ماتریس: آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی شامل سطر و ستون.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \quad \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}_{۳\times۱} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad \begin{bmatrix} ۳ & & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & & ۵ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۱\times۳} \quad \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad \begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۶ \\ ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad \begin{bmatrix} ۵ \end{bmatrix}_{۱\times۱}$$

$$a_{ij} \rightarrow A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس:

جمع و تفریق دو ماتریس:

ضرب عدد در ماتریس:

قرینه ماتریس:

۱- A+B=B+A

۲- A+(B+C) = (A+B)+C

۳- A+Ō = Ō+A

۴- A+(-A) = Ō

۵- r(A±B) = rA±rB

۶- A=B → rA=rB

شرط ضرب دو ماتریس $A_{m\times n} \times B_{n\times p}$

نکته: A×B ≠ B×A

(AB)C = A(BC)

A(B+C) = AB+AC

اگر AB= Ō نمی‌توان گفت الزاما A=Ō یا B=Ō

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} a+b & 6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & b+c \\ c+a & 5 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، a+b+c ؟

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \times B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

سوال: اگر AB=AC آیا B=C ؟

مثال نقض:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\5 & 6\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}0 & 0\\3 & 4\end{bmatrix}$$

سوال: ماتریس تعویض پذیر یعنی چه؟ دو ماتریس مربعی که AB=BA

۱- $AI = IA$

A مربعی:

۲- $A.A^{۲} = A^{۳} = A^{۲}.A \qquad A^{۴}.A = A.A^{۴} \qquad A^{n} = A^{n-۱}.A = A.A^{n-۱}$

$A^{m}.A^{n} = A^{n}.A^{m}$

۳- $\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\۰ & b & ۰\\۰ & ۰ & c\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}a' & ۰ & ۰\\۰ & b' & ۰\\۰ & ۰ & c'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}aa' & ۰ & ۰\\۰ & bb' & ۰\\۰ & ۰ & cc'\end{bmatrix}$

۴- $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}a' & b'\\c' & d'\end{bmatrix} \qquad \frac{a-b}{a'-d'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

نکته

$\frac{۴-۴}{۲-۲} \neq \frac{۳}{۱۵} = \frac{۲}{۱۰} \leftarrow \begin{bmatrix}۴ & ۳\\۲ & ۴\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}۲ & ۱۵\\۱۰ & ۲\end{bmatrix}$

$\frac{۴-۴}{-۲-(-۲)} = \frac{۰}{۰} \neq \frac{۱}{۳} \leftarrow \begin{bmatrix}۴ & ۰\\۱ & ۴\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\۳ & -۲\end{bmatrix}$

۵- $\begin{bmatrix}a & b & c\\e & f & g\\h & i & j\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\۰ & ۳ & ۰\\۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$

(۱) در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ که $a_{\text{ij}}=\begin{cases} i-j^۲ & ,i<j \\ i+j & ,i\geq j \end{cases}$ می‌باشد حاصل $a_{۱۳}+a_{۳۲}$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) -۳

(۳) ۵

(۴) ۲

(۲) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} k & ۱ & ۱ \\ ۳ & m+۲ & ۵ \\ ۵ & ۷ & n+۵ \end{bmatrix}$ و $B=[ij+i-j]_{۳\times۳}$ با هم برابر باشند، آنگاه حاصل $m+n-k$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) -۵

(۳) ۴

(۴) -۴

(۳) اگر $A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A^۲=۳A+۴I_۲$، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) -۲

(۴) اگر در ماتریس $A=[۲i+j]_{n\times n}$ مجموع درایه‌های ستون سوم برابر ۶۰ باشد، مجموع درایه‌های سطر چهارم کدام است؟

(۱) ۴۸

(۲) ۵۵

(۳) ۶۱

(۴) ۶۹

۵) اگر $A=[a_{ij}]_{۷\times۷}$ و $a_{ij}=ij$ باشد، آن‌گاه مجموع تمام درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۴۴۱

۲) ۱۰۱۵

۳) ۷۸۴

۴) ۸۱۹

۶) اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $a_{ij}=ij$ و مجموع تمام درایه‌های ماتریس A برابر ۱۲۹۶ باشد، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۹

۲) ۸

۳) ۷

۴) ۶

۷) در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با فرض $a_{\text{ij}}=\begin{cases}x+۲i & i\leq j\\ i-j^۲ & i>j\end{cases}$، اگر مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی از دو برابر مجموع درایه‌های روی قطر اصلی، ۴ واحد کمتر باشد مقدار x کدام است؟

۱) -۴

۲) -۳

۳) ۴

۴) ۳

۸) اگر $\begin{bmatrix}۵ & ۶\\ ۷ & ۱۰\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $a+۲b+۳c+۴d$ چقدر است؟

۱) ۳۰

۲) ۳۱

۳) ۳۲

۴) ۳۳

۹) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس $۳A-۲B$، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول کدام است؟

۱) ۰

۲) -۷

۳) -۱۳

۴) ۱۰

۱۰) حاصل‌ضرب درایه‌های یک ماتریس اسکالر ۳×۳، برابر ۶۴ است. مجموع درایه‌های قطر اصلی این ماتریس کدام است؟

۱) ۲۴

۲) ۱۲

۳) ۳۶

۴) ۱۸

۱۱) به ازای کدام مقدار x و y، ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟

۱) $x=۱ \ , \ y=-۷$

۲) $x=۲ \ , \ y=-۷$

۳) $x=۲ \ , \ y=-۵$

۴) $x=۱ \ , \ y=-۵$

۱۲) دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases} \frac{i^۲+j^۲}{ij} & i=j \\ |i-j| & i\neq j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} a-۲ & b+c \\ d-b & b \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر BA یک ماتریس اسکالر باشد، حاصل $a+c+d$ کدام است؟

۱) ۲

۲) -۲

۳) ۱

۴) -۱

۱۳) ماتریسی $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به ازای کدام تعریف برای a_{ij}، یک ماتریس قطری است؟ ([ ] نماد جز صحیح است.)

۱) $a_{ij}=\left[\frac{i+j}{۳}\right]-۱$

۲) $a_{ij}=\left[\frac{i-j}{۳}\right]-۱$

۳) $a_{ij}=\left[\frac{i-j}{۳}\right]+۱$

۴) $a_{ij}=\left[\frac{i+j}{۳}\right]+۱$

۱۴) فرض کنید A ماتریسی ۳ × ۲، B ماتریسی ۴ × ۳ و C ماتریسی ۳ × ۳ باشد، کدام حاصل‌ضرب قابل انجام است؟

۱) ABC

۲) CAB

۳) BA

۴) ACB

۱۵) اگر برای دو ماتریس مربعی A و B تساوی‌های $۳AB=-۴BA$ و $AB^۳=-mB^۳A$ برقرار باشند، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۶۴}{۲۷}$

۲) $\frac{۱۶}{۹}$

۳) $-\frac{۶۴}{۹}$

۴) $-\frac{۱۶}{۹}$

۱۶) برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ رابطهٔ $A^۲=\alpha A+\beta I_۲$ برقرار است. دوتایی (α,β) کدام است؟

۱) $(۲,۱۱)$

۲) $(۲,۱۳)$

۳) $(۴,۱۱)$

۴) $(۴,۱۳)$

۱۷) اگر $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$، آنگاه A^{101} کدام است؟

① $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

④ $-I$

۱۸) اگر $A^3-2A^2+3A-2I=\bar{O}$ باشد آنگاه ماتریس A^4 کدام است؟

① $A^2-4A+4I$

② $A^2-4A-4I$

③ $A^2+4A+4I$

④ $A^2+4A-4I$

۱۹) اگر $A^2=A-2I$ و $A^5=\alpha A+\beta I$ باشد، حاصل $\beta+\alpha$ کدام است؟

① ۲

② ۳

③ ۴

④ ۵

۲۰ فرض کنید A و B دو ماتریس مرتبهٔ ۲ باشند، ماتریس $AB-BA$ با کدام‌یک از ماتریس‌های زیر می‌تواند برابر باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۴) هیچ‌کدام

۲۱ اگر $A=\begin{bmatrix} \tan x & ۱ \\ \dfrac{-۱}{\cos^۲ x} & -\tan x \end{bmatrix}$، آنگاه حاصل $A^۵-A^۶+A^۷$ کدام است؟ $(x\neq \dfrac{k\pi}{۲})$

۱) I

۲) $-I$

۳) $۳I$

۴) $-۳I$

۲۲ اگر $[-۱\ \ ۱]\times A=[۲\ \ ۴]$ و $[۲\ \ ۳]\times A=[۱\ \ -۳]$ باشد، حاصل $[-۱\ \ -۲]\times A$ کدام است؟(A یک ماتریس است.)

۱) $[-۲\ \ ۲]$

۲) $[-۳\ \ ۳]$

۳) $[۲\ \ -۲]$

۴) $[-۱\ \ ۱]$

۲۳ ماتریس $A=\begin{bmatrix} -\tan x & \frac{۱}{\cos x} \\ -\frac{۱}{\cos x} & \tan x \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس $A^{۲۰}+A^۹+A^۳-I$ کدام است؟ $(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{۲})$

۱) $\overline{O}$

۲) $-۲I$

۳) I

۴) $۲I$

۲۴ اگر $A = \begin{bmatrix} \circ & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \circ \end{bmatrix}$ و $A^{691} = 2kA$ باشد، مقدار عدد حقیقی k کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) -1

۲۵ اگر $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix} = 7$ مقدار مثبت x کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۱

(۴) ۲

۲۶ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ \circ & 1 & -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ \circ & -1 & \circ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A^2 + AB - 3B$ کدام است؟

(۱) $3I$

(۲) $-3I$

(۳) $9I$

(۴) $-9I$

۲۷ اگر $A = \begin{bmatrix} a & a+2 \\ -1 & b \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -2 & b \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ و AB یک ماتریس قطری باشد، آن‌گاه ماتریس $C = \begin{bmatrix} b & a-2b \\ b+2 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}$ چگونه است؟

(۱) مربعی غیرقطری

(۲) قطری غیراسکالر

(۳) اسکالر غیرهمانی

(۴) همانی

۲۸) فرض کنید: $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&3&-1\\1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$ باشد. مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس A کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۲۹) اگر $A=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه A^{1000} کدام است؟

۱) $1000A$
۲) $3^{999}A$
۳) $3^{1000}A$
۴) $3^{1001}A$

۳۰) اگر $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix}a&b&3\\c&-4&d\\-1&e&f\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $b+d-c$ کدام است؟

۱) -6
۲) -2
۳) 4
۴) 6

۳۱) اگر $A=\begin{bmatrix}4&x\\y&z\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-2\\3&2\end{bmatrix}$ و $A\times B$ ماتریسی اسکالر باشد، حاصل $x+2y+3z$ کدام است؟

۱) -1
۲) -2
۳) 2
۴) 1

۳۲) اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه حاصل $A+A^2+A^3+\cdots+A^{20}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 40 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۳۳) اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^2+A^3+\cdots A^{10}$ کدام ماتریس است؟

۱) ۲۰

۲) ۲۵

۳) ۳۰

۴) ۳۵

۳۴) برای ماتریس A رابطهٔ $A^2=3A+I$ برقرار است. حاصل $A(A-2I)^2$ کدام است؟

۱) $2A-I$

۲) $5I-A$

۳) $2A+I$

۴) $5A+I$

۳۵) اگر $A^2=2A-I$ و $A^6=\alpha A+\beta I$ مقدار $\alpha-\beta$ کدام است؟

۱) ۵

۲) -11

۳) ۱۱

۴) -5

۳۶) اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $(A-2I)(A^2+2A+I)$ کدام است؟

۱) 6

۲) -6

۳) 12

۴) -12

۳۷) در ماتریس $A=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A^{2n}+A^{2n+1}$ برابر ۱۴۵۸ باشد، n کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۳۸) اگر $-AB=-2BA$ آن‌گاه ماتریس AB^3 چند برابر ماتریس B^3A است؟

۱) -8

۲) $\frac{1}{8}$

۳) 8

۴) $-\frac{1}{8}$

۳۹) اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس BA^{10} کدام است؟

۱) 5

۲) -5

۳) 11

۴) -11

۴۰) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ در ماتریس $A^{۱۰۰}$ حاصل جمع درایه‌ها کدام است؟

۱) -۱

۲) -۳

۳) ۱

۴) ۳

۴۱) اگر برای ماتریس‌های مربعی و هم مرتبهٔ A و B روابط $BA+A=B$ و $AB+B=A$ برقرار باشد، آن‌گاه چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح‌اند؟

الف) $B=\overline{O}$ ب) $B^{۲}=I$

ج) $AB=\overline{O}$ د) $A^{۲}=\overline{O}$

هـ) $B=A$

۱) ۵

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۲

۴۲) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$، درایهٔ واقع بر سطر دوم و ستون اول ماتریس ABC کدام است؟

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

۴) ۰

۴۳) اگر $A^{۲}-A+۲I=\bar{O}$ باشد، آن‌گاه حاصل $A^{۶}$ کدام است؟

۱) $-۵A+۲I$

۲) $۵A+۲I$

۳) $\overline{O}$

۴) $۸I$

(۴۴) ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ در رابطهٔ $A^۲=\alpha A+\beta I$ صدق می‌کند، حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

(۱) -۵

(۲) ۰

(۳) -۹

(۴) ۱۰

(۴۵) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ آنگاه درایه‌ی واقع در سطر دوم ستون اول ماتریس $A^۳$ کدام است؟

(۱) -۶

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۵

(۴۶) ماتریس‌های مربعی A و B هم‌مرتبه بوده و $۳B^۲A-BA$ ماتریسی اسکالر است که مجموع تمام درایه‌هایش صفر است.
ماتریس $B^۳A$ چند برابر ماتریس $AB^۶$ است؟

(۱) ۳

(۲) ۹

(۳) ۲۷

(۴) ۸۱

(۴۷) اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد حاصل $A^۳+۳AB$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۲ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ -۵ & ۱۲ \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۳ \\ ۱۲ & -۵ \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۲ \\ -۵ & ۷ \end{bmatrix}$

۴۸) اگر $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ آنگاه $x+y$ کدام است؟

۱) -۴

۲) ۳

۳) -۲

۴) ۱

۴۹) فرض کنید $A=[a_{ij}]_{۹۹۹\times۹۹۹}$ و $a_{ij}=\begin{cases} ۰ & ; \quad i+j\neq ۱۰۰۰ \\ -۱ & ; \quad i+j=۱۰۰۰ \end{cases}$ در این‌صورت مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^{۱۰۰۰}+A^{۱۰۰۱}$ چقدر است؟

۱) ۹۹۸

۲) -۹۹۹

۳) ۱۰۰۰

۴) -۱۰۰۱

۵۰) اگر $AB=B$ و $BA=A$ حاصل $(A+B)(A-B)$ کدام است؟

۱) $۲A-۲B$

۲) $A-B$

۳) $۲A+۲B$

۴) $A+B$

۵۱) اگر $A^۳+A^۲+A+I=\overline{O}$ باشد $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) A

۲) $A^۲$

۳) $A^۳$

۴) I

۵۲) اگر $A=\begin{bmatrix}\cos^{۲}\alpha & \frac{\sin ۲\alpha}{۲}\\ \frac{\sin ۲\alpha}{۲} & \sin^{۲}\alpha\end{bmatrix}$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم ماتریس $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $\sin ۲\alpha$

۲) $\sin^{۲}\alpha$

۳) $\frac{\sin ۲\alpha}{۲}$

۴) $\cos^{۲}\alpha$

۵۳) اگر A ماتریسی مربعی و $A^{۲}=A$ آنگاه حاصل $(I-A)^{۷}$ کدام است؟

۱) $I-A$

۲) $I-۷A$

۳) $۷I+A$

۴) $۷I-A$

۵۴) اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و $AB=B$ و $BA=A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A+B)^{۳}$ کدام است؟

۱) $A+B$

۲) $۲(A+B)$

۳) $۳(A+B)$

۴) $۴(A+B)$

۵۵) اگر $\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ ۳ & ۶ & ۹\end{bmatrix}=A\times\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۳\end{bmatrix}$ مجموعه درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۵۶) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند به طوری که $A^۲ = A$ و $B = I - ۲A$، مقدار $B^۵ - A^۵$ کدام است؟

۱) $۲A - I$

۲) $۳A - I$

۳) $۴A - I$

۴) $۵A - I$

۵۷) اگر $B = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد ، حاصل $B^۲(B+I)^۶$ کدام است؟

۱) B

۲) $۶B$

۳) $۶۴B$

۴) $۳۲B$

۵۸) ماتریس مربعی A طوری مفروض است که $A^۳ = \overline{O}$، حاصل $A(۳I - A)^۵$ کدام است؟

۱) $۲۴۳I - ۴۰۵A$

۲) $۲۴۳A - ۴۰۵A^۲$

۳) $۲۴۳A + ۴۰۵A^۲$

۴) $۲۴۳I + ۴۰۵A$

۵۹) اگر A، B و C سه ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، کدام رابطه درست است؟

۱) $AB = AC \,,\, A \neq \overline{O} \Rightarrow B = C$

۲) $(A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$

۳) $AB = \overline{O} \Rightarrow A = \overline{O}$ یا $B = \overline{O}$

۴) $AB = BA \Rightarrow BA^۲ = A^۲B$

۶۰) اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ b & a \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۳

۳) ۲

۴) -۲

۱

گزینه ۲ ماتریس A را می‌سازیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱-۲^۲ & ۱-۳^۲ & ۱-۴^۲ \\ ۲+۱ & ۲+۲ & ۲-۳^۲ & ۲-۴^۲ \\ ۳+۱ & ۳+۲ & ۳+۳ & ۳-۴^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۸ & -۱۵ \\ ۳ & ۴ & -۷ & -۱۴ \\ ۴ & ۵ & ۶ & -۱۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{۱۳}=-۸ \\ a_{۳۲}=۵ \end{matrix} \to a_{۱۳}+a_{۳۲}=-۸+۵=-۳$$

۲

گزینه ۱ درایه‌های دو ماتریس A و B را نظیر به نظیر با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{matrix} B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ \\ ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix} \\ A=\begin{bmatrix} k & ۱ & ۱ \\ ۳ & m+۲ & ۵ \\ ۵ & ۷ & n+۵ \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{A=B} \begin{cases} k=۱ \\ m+۲=۴ \to m=۲ \\ n+۵=۹ \to n=۴ \end{cases} \to m+n-k=۲+۴-۱=۵$$

۳

گزینه ۲ ماتریس A را برحسب $A^۲$ و I به دست می‌آوریم:

$$A^۲=۳A+۴I_۲ \to ۳A=A^۲-۴I_۲ \to A=\frac{۱}{۳}(A^۲-۴I_۲) \to A=\frac{۱}{۳}\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}\right) \to A=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} -۳ & ۳ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix} \to A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

A مجموع درایه‌های ماتریس $=-۱+۱-۱=-۱$

۴

گزینه ۴ ابتدا ماتریس A را می‌نویسیم:

$$A=[۲i+j]_{n\times n}=\begin{bmatrix} ۲+۱ & ۲+۲ & ۲+۳ & \cdots & ۲+n \\ ۴+۱ & ۴+۲ & ۴+۳ & \cdots & ۴+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۲n+۱ & ۲n+۲ & ۲n+۳ & \cdots & ۲n+n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

مجموع درایه‌های ستون سوم $=۶۰ \to (۲+۴+\cdots+۲n)+\underbrace{(۳+۳+\cdots+۳)}_{n\text{بار}}=۶۰$

$$۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}+۳n=۶۰ \to n^۲+۴n-۶۰=۰ \to \begin{cases} n=۶ \\ n=-۱۰ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

مجموع درایه‌های سطر چهارم $=(۸+۸+۸+۸+۸+۸)+(۱+۲+۳+۴+۵+۶)=۴۸+۲۱=۶۹$

۵

گزینه ۳ ماتریس A طبق تعریف به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ ۲ & ۲\times۲ & ۲\times۳ & ۲\times۴ & ۲\times۵ & ۲\times۶ & ۲\times۷ \\ ۳ & ۳\times۲ & ۳\times۳ & ۳\times۴ & ۳\times۵ & ۳\times۶ & ۳\times۷ \\ ۴ & ۴\times۲ & ۴\times۳ & ۴\times۴ & ۴\times۵ & ۴\times۶ & ۴\times۷ \\ ۵ & ۵\times۲ & ۵\times۳ & ۵\times۴ & ۵\times۵ & ۵\times۶ & ۵\times۷ \\ ۶ & ۶\times۲ & ۶\times۳ & ۶\times۴ & ۶\times۵ & ۶\times۶ & ۶\times۷ \\ ۷ & ۷\times۲ & ۷\times۳ & ۷\times۴ & ۷\times۵ & ۷\times۶ & ۷\times۷ \end{bmatrix}$$

یعنی سطر i ام، i برابر سطر اول است. مجموع درایه‌های سطر اول با $\frac{۷\times۸}{۲}$ یعنی ۲۸ برابر است. پس:

A مجموع درایه‌های $=۱\times۲۸+۲\times۲۸+\cdots+۷\times۲۸$

$=۲۸(۱+۲+\cdots+۷)=۲۸\times۲۸=۷۸۴$

۶

گزینه ۲ مجموع درایه‌های سطر اول برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}=n+\cdots+۲+۱$ است. همچنین درایه‌های سطر kام، k برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است، پس داریم:

$$A \text{ مجموع درایه‌های } =\frac{n(n+۱)}{۲}+۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}+\cdots+n\times\frac{n(n+۱)}{۲}=(۱+۲+\cdots+n)\frac{n(n+۱)}{۲}=\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲$$

پس:

$$\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲=۱۲۹۶ \Rightarrow \frac{n(n+۱)}{۲}=۳۶ \Rightarrow n=۸$$

۷

گزینه ۲ ابتدا ماتریس A را می‌سازیم:

$$A=\begin{bmatrix} x+۲ & * & * \\ ۲-۱^{۲} & x+۴ & * \\ ۳-۱^{۲} & ۳-۲^{۲} & x+۶ \end{bmatrix}$$

۴ − مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی × ۲ = (مجموع درایه‌های روی قطر اصلی)

طبق فرض داریم:

$$\Rightarrow (۱+۲+(-۱)) = ۲(۳x+۱۲) \Rightarrow -۴ \Rightarrow ۲-۶x+۲۴-۴ \Rightarrow x=-۳$$

۸

گزینه ۲ جمع ماتریسی سمت راست را انجام داده و درایه‌های متناظر در دو طرف را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۷ & ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+b+c+d & a-b+c+d \\ a+b-c+d & a+b+c-d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+b+c+d=۵ \\ a-b+c+d=۶ \\ a+b-c+d=۷ \\ a+b+c-d=۱۰ \end{cases} \xrightarrow{(+)} ۲(a+b+c+d)=۲۸ \Rightarrow a+b+c+d=۱۴$$

حال معادلهٔ اخیر را با هر کدام از معادلات بالا حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a+b+c+d=۱۴ \\ -a+b+c+d=۵ \end{cases} \Rightarrow ۲a=۹ \Rightarrow a=\frac{۹}{۲}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$b=۴, c=\frac{۷}{۲}, d=۲$$

در نتیجه:

$$a+۲b+۳c+۴d=\frac{۹}{۲}+۸+\frac{۲۱}{۲}+۸=۳۱$$

۹

گزینه ۳ مطابق فرض داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow ۳A=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ -۹ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow ۲B=\begin{bmatrix} -۸ & ۶ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$۳A-۲B=\begin{bmatrix} ۱۱ & ۰ \\ -۱۳ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول این ماتریس، برابر ۱۳− است.

۱۰

گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$\text{اسکالر} : A=\begin{bmatrix} x & ۰ & ۰ \\ ۰ & x & ۰ \\ ۰ & ۰ & x \end{bmatrix} \rightarrow x\cdot x\cdot x=۶۴ \rightarrow x^{۳}=۶۴ \rightarrow x=۴$$

$۱۲ = ۴ × ۳ = ۳x =$ مجموع عناصر قطر اصلی

۱۱

گزینه ۲ حاصل‌ضرب دو ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \times \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۲} = \begin{bmatrix} ۲x-۱+۴y & -۲x+۴ \\ ۴+۳+y & -۴+۱ \end{bmatrix}$$

درایه‌های خارج قطر اصلی باید صفر باشند یعنی:

$$\begin{cases} -۲x+۴=۰ \Rightarrow x=۲ \\ ۷+y=۰ \Rightarrow y=-۷ \end{cases}$$

۱۲

گزینه ۱ ماتریس AB را تشکیل داده و برابر با ماتریس اسکالر قرار می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱^{۲}+۱^{۲}}{۱\times۱} & |۱-۲| \\ |۲-۱| & \frac{۲^{۲}+۲^{۲}}{۲\times۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} a-۲ & b+c \\ d-b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲a-۴+b+c & a-۲+۲b+۲c \\ ۲d-۲b+b & d-b+۲b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲a+b+c-۴ & ۲b+۲c+a-۲ \\ ۲d-b & d+b \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix} \text{(ماتریس اسکالر)}$$

$$۲d-b=۰ \rightarrow \boxed{b=۲d}, \quad ۲b+۲c+a-۲=۰ \xrightarrow{b=۲d} ۴d+۲c+a=۲$$

$$۲a+\cancel{b}+c-۴=d+\cancel{b} \rightarrow \left.\begin{matrix} ۲a-d+c=۴ \\ ۴d+۲c+a=۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} ۳a+۳d+۳c=۶ \rightarrow a+c+d=۲$$

۱۳

گزینه ۱ در گزینهٔ ۱ داریم:

$$a_{12} = a_{21} = \left[\frac{3}{3}\right] - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$a_{13} = a_{31} = \left[\frac{4}{3}\right] - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$a_{23} = a_{32} = \left[\frac{5}{3}\right] - 1 = 1 - 1 = 0$$

پس درایه‌های بیرون قطر اصلی همگی صفر هستند.

۱۴

گزینه ۴ ماتریس ACB تعریف شده است، زیرا:

$$A_{2\times3}C_{3\times2}B_{2\times4}$$

۱۵

گزینه ۱

$$3AB = -5BA \Rightarrow AB = -\frac{4}{3}BA$$

$$AB^3 = AB\cdot B^2 = -\frac{4}{3}BA\cdot B^2 = -\frac{4}{3}B\cdot AB\cdot B = -\frac{4}{3}B\cdot(-\frac{4}{3}BA)\cdot B = \frac{19}{9}B^2\cdot AB = \frac{19}{9}B^2\cdot(-\frac{4}{3}BA) = -\frac{64}{27}B^3A$$

$$\Rightarrow AB^3 = -\frac{64}{27}B^3A \quad (1)$$

از طرفی طبق مسئله: $AB^3 = -mB^3A \quad (2)$

بنابراین از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$m = \frac{64}{27}$$

۱۶

گزینه ۲ ماتریس A^2 را یافته و در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

روش اول:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha+\beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha+\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 13 \end{cases}$$

روش دوم: (نکته) هر ماتریس ۲ × ۲ مانند A در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (a+d)A + |A|I = \bar{O}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - 2A - 13I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = 2A + 13I \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 13$$

۱۷

گزینه ۱ ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$\to A^3 = -I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 33} A^{99} = -I \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } A^2} A^{101} = -A^2$$

۱۸

گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$$A^3 - 2A^2 + 3A - 2I = \bar{O} \xrightarrow{\text{طرفین در } A \text{ ضرب شود}} A^4 - 2A^3 + 3A^2 - 2A = \bar{O}$$

$$\xrightarrow{A^3 = 2A^2 - 3A + 2I} A^4 - 2(2A^2 - 3A + 2I) + 3A^2 - 2A = \bar{O}$$

$$\to A^4 - 4A^2 + 6A - 4I + 3A^2 - 2A = \bar{O} \to A^4 - A^2 + 4A - 4I = \bar{O}$$

$\rightarrow A^4 = A^2 - 4A + 4I$	
گزینه ۴ از روی ماتریس A^2، ماتریس A^5 را می‌یابیم: $A^2 = A - 2I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} A^4 = A^2 - 4A + 4I = (A - 2I) - 4A + 4I$ $\rightarrow A^4 = -3A + 2I \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A} A^5 = -3A^2 + 2AI = -3(A - 2I) + 2A$ $\rightarrow A^5 = -3A + 6I + 2A$ $\rightarrow A^5 = -A + 6I = \alpha A + \beta I \rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 6 \end{cases} \rightarrow \alpha + \beta = 5$	۱۹
گزینه ۴ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ در این صورت داریم: $AB = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+ct & bz+dt \end{bmatrix}$ پس: $AB - BA = \begin{bmatrix} bz - cy & - \\ - & cy - bz \end{bmatrix}$ همان‌طور که ملاحظه می‌کنید درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس $AB - BA$ قرینهٔ یکدیگرند که در هیچ کدام از گزینه‌ها چنین چیزی دیده نمی‌شود.	۲۰
گزینه ۱ ماتریس A^2 را می‌سازیم: $A^2 = \begin{bmatrix} \tan x & 1 \\ -\frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tan x & 1 \\ -\frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} & \tan x - \tan x \\ -\frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{\cos^2 x} & -\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$ $A^2 = \begin{bmatrix} \tan^2 x - (1 + \tan^2 x) & 0 \\ 0 & -(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$ $A^5 - A^6 + A^7 = (A^2)^2 \times A - (A^2)^3 + (A^2)^3 \times A = A + I - A = I$	۲۱
گزینه ۴ ماتریس A باید 2×2 باشد تا ضرب قابل انجام باشد. با فرض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow -a + c = 2\ ,\ -b + d = 4$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow 2a + 3c = 1\ ,\ 2b + 3d = -3$ $\begin{cases} -a + c = 2 \\ 2a + 3c = 1 \end{cases} \rightarrow c = 1, a = -1$ $\begin{cases} -b + d = 4 \\ 2b + 3d = -3 \end{cases} \rightarrow d = 1, b = -3$ $\begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$	۲۲
گزینه ۱ ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم: $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -\tan x & \frac{1}{\cos x} \\ -\frac{1}{\cos x} & \tan x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tan x & \frac{1}{\cos x} \\ -\frac{1}{\cos x} & \tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} & -\frac{\tan x}{\cos x} + \frac{\tan x}{\cos x} \\ \frac{\tan x}{\cos x} - \frac{\tan x}{\cos x} & -\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x} A^2$ $= \begin{bmatrix} \tan^2 x - 1 - \tan^2 x & 0 \\ 0 & -1 - \tan^2 x + \tan^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$ $A^{20} + A^9 + A^3 - I = (A^2)^{10} + (A^2)^4 \cdot A + A^2 \cdot A - I = (-I)^{10} + (-I)^4 \cdot A + (-I) \cdot A - I = I + A - A - I = \overline{O}$	۲۳
گزینه ۲ ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم: $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \Rightarrow A^2 = -I$ $A^{691} = (A^2)^{345} \times A = (-I)^{345} \cdot A = -A \Rightarrow A^{691} = -A \quad (1)$ از طرفی طبق فرض داریم: $A^{691} = 2kA \quad (2)$ بنابراین از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.	۲۴

$2k=-1 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$

---

۲۵ گزینه ۳

$$[1 \quad x]\begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=[3x \quad 1]$$

$$[3x \quad 1]\begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix}=6x^2+1=7 \to 6x^2=6 \to x^2=1 \to x=\pm 1$$

---

۲۶ گزینه ۳ ماتریس A^2+AB به صورت ضربی از ماتریس $A+B$ است، لذا ماتریس $A+B$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A+B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}=-3I$$

$$A^2+AB-3B=A(A+B)-3B=A(-3I)-3B=-3(A+B)=-3\times(-3I)=9I$$

---

۲۷ گزینه ۳ ماتریس AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix} a & a+2 \\ -1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & b \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a+2 & ab+4a+8 \\ 2+b & 3b \end{bmatrix}$$

چون AB قطری است، پس درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی باید صفر باشند:

$$\begin{cases} 2+b=0 \Rightarrow b=-2 \quad (1) \\ ab+4a+8=0 \xrightarrow{(1)} -2a+4a+8=0 \Rightarrow 2a=-8 \Rightarrow a=-4 \end{cases}$$

اکنون ماتریس C برابر $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ است که ماتریسی اسکالر و غیرهمانی می‌باشد.

---

۲۸ گزینه ۴ به ترتیب از چپ به راست، درایه‌های سطر دوم ماتریس‌های سمت چپ، را در ماتریس‌های راست ضرب می‌کنیم:

$$[1 \quad 1 \quad -1]\times\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}=[0 \quad 3 \quad 1]$$

$$[0 \quad 3 \quad 1]\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=[-1 \quad 3 \quad 4] \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های سطر دوم}=-1+3+4=6$$

---

۲۹ گزینه ۲

ابتدا ماتریس‌های A^2 و A^3 را بدست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 9 & \frac{9}{2} & 3 \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}=3A$$

$$A^3=A^2\cdot A=3A\cdot A=3A^2=3(3A)=3^2\cdot A$$

با ادامه این روند می‌توان فهمید که $A^n=3^{n-1}\cdot A$ بنابراین داریم:

$$A^{1000}=3^{999}A$$

---

۳۰ گزینه ۲ برای قابل انجام بودن ضرب، ماتریس A باید یک ماتریس سطری 3×1 باشد.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}[x \quad y \quad z]=\begin{bmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & 3 \\ c & -4 & d \\ -1 & e & f \end{bmatrix} \to 3z=3 \to z=1 \;,\; 2y=-4 \to y=-2 \;,\; x=-1$$

در نتیجه:

$$b+d-c=3y+2z-2x=3(-2)+2(1)-2(-1)=-2$$

---

۳۱ گزینه ۲ در ماتریس اسکالر، درایه‌های قطر اصی با هم برابر بوده و بقیه درایه‌ها صفر هستند:

$$AB=\begin{bmatrix} 4 & x \\ y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+3x & -8+2x \\ y+3z & -2y+2z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -8+2x=0 \to x=4 \\ y+3z=0 \\ -2y+2z=4+3x \xrightarrow{x=4} -2y+2z=16 \end{cases} \to \begin{cases} y+3z=0 \\ -2y+2z=16 \end{cases} \to \begin{cases} y=-6 \\ z=2 \end{cases} \to x+2y+3z=4+2(-6)+3(2)$$

$$=4-12+6=-2$$

۳۲

گزینه ۴ ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

پس نتیجه می‌شود:

$$A^n=\begin{cases}A &, n=\text{فرد}\\ I &, n=\text{زوج}\end{cases}$$

بنابراین:

$$A+A^2+\cdots+A^{20}=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=10\begin{bmatrix}2&2\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&20\\0&0\end{bmatrix}$$

۳۳

گزینه ۱ سعی می‌کنیم قانونی برای A^n به دست بیاوریم:

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&1\\-1&-(1-1)\end{bmatrix}$$

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+1&2\\-2&-(2-1)\end{bmatrix}$$

$$A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\-3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+1&3\\-3&-(3-1)\end{bmatrix}$$

طبق استدلال استقرایی می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$A^n=\begin{bmatrix}n+1&n\\-n&-(n-1)\end{bmatrix}$$

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&3\\-3&-2\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}11&10\\-10&-9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+3+\cdots+11&1+2+\cdots+10\\-1-2-\cdots-10&-1-2-\cdots-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13\times10}{2}&\frac{10\times11}{2}\\\frac{-10\times11}{2}&\frac{-9\times10}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}65&55\\-55&-45\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=20$$

۳۴

گزینه ۱ از اتحادهای جبری در ماتریس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$A(A-2I)^2=A(A^2+4I-4A)=A(3A+I+4I-4A)$$

$$=A(5I-A)=5A-A^2=5A-(3A+I)=2A-I$$

۳۵

گزینه ۳ از روی A^2 ماتریس A^6 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=2A-I$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} A^4=4A^2+I^2-4AI\Rightarrow A^4=4A^2+I-4A\xrightarrow{A^2=2A-I}A^4=4(2A-I)+I-4A$$

$$\Rightarrow A^4=8A-4I+I-4A=4A-3I$$

$$A^6=A^2\times A^4=(2A-I)(4A-3I)=8A^2-6A-4A+3I^2=8A^2-10A+3I$$

$$\xrightarrow{A^2=2A-I}=8(2A-I)-10A+3I=16A-8I-10A+3I=6A-5I$$

در مقایسه با رابطهٔ $A^6=\alpha A+\beta I$ واضح است $\alpha=6$ و $\beta=-5$ پس داریم: $\alpha-\beta=11$

۳۶

گزینه ۱ اگر A^3 را محاسبه کنیم، نتیجه می‌گیریم $A^3=\bar{O}$، بنابراین داریم:

$$(A-2I)(A^2+2A+I)=A^3+2A^2+A-2A^2-4A-2I$$

$$=-3A-2I=-3\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&0&0\\1&-3&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\6&-2&0\\-3&9&-2\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=6$$

۳۷

گزینه ۳ ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&3\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}=3I$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، آنگاه $A^n=\begin{cases}3^kI, n=2k\\3^kA, n=2k+1\end{cases}$ پس:

$$A^{2n}+A^{2n+1}=\begin{bmatrix}3^n&0\\0&3^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3^{n+1}&0\\0&3^n\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = 3 \times 3^{n} + 3^{n+1} = 2 \times 3^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2 \times 3^{n+1} = 1458 \Rightarrow 3^{n+1} = 739 = 3^{6}$$

۳۸

گزینه ۱ از فرض سؤال به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$AB^{3} = (AB)B^{2} = (-2BA)B^{2} = -2B(AB)B$$

$$= -2B(-2BA)B = 4B^{2}(-2BA) = -8B^{3}A$$

بنابراین ماتریس AB^{3}، -8 برابر ماتریس $B^{3}A$ است.

۳۹

گزینه ۴ ماتریس‌های A^{2} و A^{3} را به دست می‌آوریم:

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

در نتیجه داریم:

$$BA^{10} = B(A^{3})^{3}A = B(-I)A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = -11$$

۴۰

گزینه ۴

اگر ماتریس‌های A^{2} و A^{3} را بدست آوریم و به استقرا نتیجه می‌گیریم.

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ A^{3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & -100 & 100 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌ها} = 3$$

۴۱

گزینه ۳ از روابط داده شده به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} AB + B = A \\ BA + A = B \end{cases} \xrightarrow{+} AB + BA + B + A = A + B \Rightarrow AB + BA = \overline{O} \quad (1)$$

$$\begin{cases} A \times (BA + A) = A \times B \Rightarrow ABA + A^{2} = AB \\ (AB + B) \times A = A \times A \Rightarrow ABA + BA = A^{2} \end{cases} \xrightarrow{-} A^{2} - BA = AB - A^{2} \Rightarrow 2A^{2} = AB + BA \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} 2A^{2} = \overline{O} \Rightarrow A^{2} = \overline{O} \rightarrow \text{مورد (د) صحیح است}$$

$$AB + B = A \Rightarrow A \times (AB + B) = A \times A \Rightarrow A^{2}B + AB = A^{2} \Rightarrow \overline{O}B + AB = \overline{O} \Rightarrow AB = \overline{O} \rightarrow \text{مورد (ج) صحیح است}$$

$$AB + B = A \rightarrow \overline{O} + B = A \Rightarrow B = A \Rightarrow \text{مورد (هـ) صحیح است}$$

اگر $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، شرایط مسئله برقرار است ولی هیچ‌کدام از روابط $B = \overline{O}$ و $B^{2} = I$ برقرار نیستند.

۴۲

گزینه ۱ برای یافتن درایهٔ سطر دوم و ستون اول ماتریس ABC به صورت زیر عمل می کنیم:

$$m_{21} = (\text{سطر دوم } A) \times B \times (\text{ستون اول } C) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$$

۴۳

گزینه ۲ با توجه به فرض سؤال، می‌توانیم بنویسیم:

$$A^{2} - A = -2I \overset{A\times}{\Rightarrow} A \times (A^{2} - A) = A \times (-2I)$$

$$\Rightarrow A^{3} - A^{2} = -2A \Rightarrow A^{3} = A^{2} - 2A = (A - 2I) - 2A \Rightarrow A^{3} - A - 2I \Rightarrow (A^{3})^{2} = (-A - 2I)^{2} \Rightarrow A^{6} = A^{2} + 4A + 4I^{2}$$

$$= (A - 2I) + 4A + 4I = 5A + 2I$$

۴۴

گزینه ۱ نکته: در مورد ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ رابطه کیلی - همیلتون به صورت زیر برقرار است که در آن $|A|$ برابر $ad - bc$ می‌باشد:

$$A^{2} - (a + d)A + |A|\, I = \overline{O}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{2} - 8A + 13I = \overline{O} \Rightarrow A^{2} = 8A - 13I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = -13 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 8 - 13 = -5$$

۴۵

گزینه ۲ می‌دانیم $A^{3} = A^{2} \times A$ می‌باشد، بنابراین درایه واقع بر سطر دوم ستون اول ماتریس A^{3} از ضرب سطر دوم A^{2} در ستون اول A به دست می‌آید.

برای به دست آوردن سطر دوم A^2 باید سطر دوم ماتریس A را در ستون‌های ماتریس A ضرب کنیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 1 & 2 & 0 \\ - & - & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$ (سطر دوم ماتریس A^2)

$$A^3 \text{ سطر دوم، ستون اول } = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + 4 + 2 = 6$$

۴۶ گزینه ۳ با استفاده از فرض سؤال می‌فهمیم که ماتریس موردنظر ماتریس صفر است. پس:

$$3B^2A - BA = \bar{O} \Rightarrow 3B^2A = BA \quad (1)$$

$$B^3A = B^2(BA) \overset{(1)}{=\!=} B^2(3B^2A) = 3B^4A = 3B^3(BA)$$
$$\overset{(1)}{=\!=} 3B^3(3B^2A) = 9B^5A = 9B^4(BA)$$
$$\overset{(1)}{=\!=} 9B^4(3B^2A) = 27B^6A$$

۴۷ گزینه ۱ طبق فرض سوال داریم:

$$A = I \Rightarrow \begin{cases} AB = IB = B \\ A^n = I \end{cases}$$

$$A^3 + 3AB = I + 3B$$

$$I + 3B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

۴۸ گزینه ۴

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ -2x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x + 2y = 2 \xrightarrow{\times 2} 2x + 4y = 4 \xrightarrow{(+)} 7y = 7 \Rightarrow y = 1 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x + y = 1$$

۴۹ گزینه ۱ ماتریس A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یعنی یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۹۹۹ که قطر فرعی آن همگی عدد ۱− وبقیهٔ درایه‌ها همگی صفرند. در چنین ماتریسی می‌توان نشان داد به ازای nهای زوج برابر I و به ازای n های فرد برابر A است، پس:

$$A^{1000} + A^{1001} = I + A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

در ماتریس مربعی $I + A$ (که از مرتبه زوج ۹۹۹ است)، درایه‌های قطر اصلی، همگی برابر ۱، فقط درایهٔ وسطی برابر صفر است، بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $I + A$ برابر ۱۳۹۶ است.

۵۰ گزینه ۱ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$AB = B \xrightarrow{A=BA} B\underbrace{AB}_{B} = B \to B^2 = B$$

$$BA = A \xrightarrow{B=AB} A\underbrace{BA}_{A} = A \to A^2 = A$$

$$(A+B)(A-B) = \underbrace{A^2}_{A} - \underbrace{AB}_{B} + \underbrace{BA}_{A} - \underbrace{B^2}_{B} = 2A - 2B$$

۵۱

گزینه ۴ طرفین رابطهٔ داده شده را در ماتریس $(A-I)$ ضرب می‌کنیم:

$$A^{۳}+A^{۲}+A+I=\overline{O}\xrightarrow[\text{ضرب طرفین در}]{A-I}(A-I)(A^{۳}+A^{۲}+A+I)=\overline{O}$$

$$A^{۴}-I=\overline{O}\rightarrow A^{۴}=I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲۵}}A^{۱۰۰}=I$$

۵۲

گزینه ۳ با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ ماتریس $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}\cos^{۲}\alpha & \frac{\sin ۲\alpha}{۲}\\ \frac{\sin ۲\alpha}{۲} & \sin^{۲}\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos^{۲}\alpha & \frac{\sin ۲\alpha}{۲}\\ \frac{\sin ۲\alpha}{۲} & \sin^{۲}\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^{۴}\alpha+\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha & \cos^{۳}\alpha\sin\alpha+\sin^{۳}\alpha\cos\alpha\\ \cos^{۳}\alpha\sin\alpha+\sin^{۳}\alpha\cos\alpha & \sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha+\sin^{۴}\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^{۲}\alpha(\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha) & \cos\alpha\sin\alpha(\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha)\\ \sin\alpha\cos\alpha(\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha) & \sin^{۲}\alpha(\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^{۲}\alpha & \frac{\sin ۲\alpha}{۲}\\ \frac{\sin ۲\alpha}{۲} & \sin^{۲}\alpha\end{bmatrix}=A$$

$$\rightarrow A^{۲}=A\rightarrow A^{۱۰}=A\rightarrow \text{درایهٔ سطر اول و ستون دوم}=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin ۲\alpha}{۲}$$

۵۳

گزینه ۱ با توجه به فرض داریم:

$$(I-A)^{۲}=I-۲AI+\underbrace{A^{۲}}_{A}=I-۲A+A=I-A$$

به همین ترتیب $(I-A)^{۳}$ و $(I-A)^{۴}$ و ... نیز برابر $I-A$ بدست می‌آیند.

۵۴

گزینه ۴ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$AB=B\ (۱)\quad,\quad BA=A\ (۲)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}AB=B\xrightarrow{(۲)}(BA)B=B\xrightarrow{(۱)}BB=B\Rightarrow B^{۲}=B\\ BA=A\xrightarrow{(۱)}(AB)A=A\xrightarrow{(۲)}AA=A\Rightarrow A^{۲}=A\end{cases}$$

$$(A+B)^{۲}=A^{۲}+AB+BA+B^{۲}=A+B+A+B=۲(A+B)$$

$$(A+B)^{۳}=(A+B)^{۲}(A+B)=۲(A+B)(A+B)$$

$$=۲(A+B)^{۲}=۴(A+B)$$

توجه: اگر $A=B=I$ باشد حاصل برابر با $۸I$ است و فقط گزینه‌ی «۴» درست است.

۵۵

گزینه ۲ واضح است که بایستی A مرتبه ۳ × ۱ باشد تا ضرب، قابل تعریف باشد؛ فرض کنیم $A=[x\quad y\quad z]$:

$$\begin{bmatrix}۱\\۲\\۳\end{bmatrix}_{۳\times۱}\times[x\quad y\quad z]_{۱\times۳}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ ۳ & ۶ & ۹\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x & y & z\\ ۲x & ۲y & ۲z\\ ۳x & ۳y & ۳z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ ۳ & ۶ & ۹\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=۲\\ z=۳\\ a=x=۱,b=y=۲,c=z=۳\\ d=۲x=۲,e=۲y=۴,f=۲z=۶\end{cases}$$

در نتیجه:

$$A\ \text{مجموع درایه‌های}: x+y+z=۱+۲+۳=۶$$

۵۶

گزینه ۲ ماتریس‌های $A^{۳}$ و $B^{۳}$ را به دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=A\xrightarrow{\times A}A^{۳}=A^{۲}=A\xrightarrow{\text{به همین ترتیب}}A^{۵}=A^{۴}=A$$

$$B=I-۲A\Rightarrow B^{۲}=I-۴A+\underbrace{۴A^{۲}}_{۴A}=I\Rightarrow B^{۲}=I\xrightarrow{\times B}B^{۳}=B\xrightarrow{\times B}B^{۴}=B^{۲}=I\xrightarrow{\times B}B^{۵}=B$$

$$\Rightarrow A^{۵}-B^{۵}=A-B=A-(I-۲A)=۳A-I$$

۵۷

گزینه ۳ با کمی تحقیق می‌بینیم که $B^2=B$، پس $B^n=B$ و در حالت کلی داریم:

$$(B+I)^6=\binom{6}{0}B^6+\binom{6}{1}B^5+\binom{6}{2}B^4+\cdots+\binom{6}{6}I$$
$$=\binom{6}{0}B+\binom{6}{1}B+\binom{6}{2}B+\cdots+\binom{6}{5}B+I$$
$$=\left(\binom{6}{0}+\cdots+\binom{6}{5}\right)B+6I=(2^6-1)B+6I=63B+I$$
$$B^2=B\Rightarrow B^2(B+I)^6=B(63B+I)=63B^2+B=63B+B=64B$$

۵۸

گزینه ۲

اولاً چون $IA=AI$ می باشد، پس می توانیم از اتحادها استفاده کنیم. ضمناً چون $A^3=\overline{O}$، پس به ازای $n\geq 3$ داریم: $A^n=\overline{O}$

$$(3I-A)^5=(3I)^5-\binom{5}{1}(3I)^4A+\binom{5}{2}(3I)^3(A)^2-\binom{5}{3}(3I)^2(A)^3+\cdots$$

بقیه جملات دارای A^3 و A^4 و A^5 هستند که حاصل آن‌ها حتماً ماتریس صفر است.

$$\Rightarrow(3I-A)^5=243I-405A+270A^2$$
$$?=A(243I-405A+270A^2)=243A-405A^2+270A^3\xlongequal{A^3=\overline{O}}243A-405A^2$$

۵۹

گزینه ۴ مثال نقض گزینهٔ «۱»:

$$\left.\begin{array}{l}A=\begin{bmatrix}0&0\\1&3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\to AB=\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix}\\ \qquad\quad C=\begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix}\to AC=\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow AB=AC\,,\ B\neq C$$

رابطهٔ گزینهٔ «۲» تنها زمانی برقرار است که دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند.

مثال نقض گزینهٔ «۳»:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&4\\-1&-2\end{bmatrix}\to AB=\overline{O},\ A\neq\overline{O},\ B\neq\overline{O}$$

اثبات گزینهٔ «۴»:

$$BA^2=(BA)A=(AB)A=A(BA)=A(AB)=A^2B$$

۶۰

گزینه ۲ اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند، تساوی $AB=BA$ برقرار می‌شود.

$$AB=BA\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&-3\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\a&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\a&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-3\\3&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2-3a&4-3b\\3-2a&-6-2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&1\\-2a+3b&-3a-2b\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{درایه‌های متناظر را برابر قرار می‌دهیم}}\begin{cases}-2-3a=-8\to-3a=-6\to a=2\\4-3b=1\Rightarrow3b=3\Rightarrow b=1\end{cases}$$

$$a+b=2+1=3$$