مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل دوم کتاب درسی پایه یازدهم تجربی، مبحث «**استدلال و قضیه تالس**» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶-استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

درس دوم

استدلال و قضیهٔ تالس

نسبت و تناسب

نسبت

نسبت بین دو عدد a و b ، کسر $\frac{a}{b}$ است که در آن b مخالف صفر است؛ به عنوان مثال، نسبت دو عدد ۳ و ۵ کسر $۰/۶ = \frac{۳}{۵}$ است و یا نسبت بین دو عدد ۱۲ و ۱۵ ، کسر $۰/۸ = \frac{۴}{۵} = \frac{۱۲}{۱۵}$ است.

مثال: طول درختی ۲ متر و سایه آن ۱۲۰ سانتی متر است. نسبت سایه ی درخت به طول درخت را تعیین کنید.

حل: نخست واحدها را یکی می کنیم؛ یا، متر را به سانتی متر تبدیل می کنیم، یا سانتی متر را به متر تبدیل می کنیم و سپس نسبت بین آن ها را به دست می آوریم.

متر به سانتی متر $۲۰۰ = ۱۰۰ \times ۲$

$$\frac{\text{طول سایه}}{\text{طول درخت}} = \frac{۱۲۰}{۲۰۰} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

مثال: فاصله ی تهران تا مشهد ۹۳۰ کیلومتر و فاصله ی خرم آباد تا اهواز ۳۹۰ کیلومتر است. نسبت فاصله ی خرم آباد تا اهواز به فاصله ی تهران تا مشهد را تعیین کنید.

حل . داریم:

$$\frac{۱۳}{۳۱}=\frac{۳۹۰}{۹۳۰}=\frac{\text{فاصله ی خرم آباد تا اهواز}}{\text{فاصله ی تهران تا مشهد}}$$

دو نسبت برابر، تشکیل یک تناسب می دهند . مانند تناسب $\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵}$ یا تناسب $\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

تناسب را در حالت کلی به صورت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نشان می دهند که در آن b و d مخالف صفر می باشند. a ، b ، c و d را چهار جزء تناسب می نامند. جزء های اول و چهارم ، یعنی a ، d را دو جزء کناری یا طرفین و جزء های دوم و سوم؛ یعنی b و c را جزء های میانی یا وسطین تناسب می نامند. به عنوان مثال در تناسب $\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$، دو جزء ۳ و ۸ جزء های کناری یا طرفین و دو جزء ۴ و ۶ جزء های میانی یا وسطین تناسب می باشند

نکته: اگر یک مقدار ثابت را با دو طرف یک تساوی جمع یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود.

نکته: اگر دو طرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیر صفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می ماند .

طرفین وسطین(تبدیل تناسب به حاصل ضرب)

مهم ترین ویژگی هر تناسب آن است که حاصل ضرب دو جمله ی کناری (طرفین)، برابر با حاصل ضرب دو جمله ی میانی (وسطین) است؛ یعنی : در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ داریم $a\times d=b\times c$.

به عنوان مثال داریم:

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۸}\Rightarrow ۳\times ۸=۴\times ۶\Rightarrow ۲۴=۲۴$$

اثبات) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\xrightarrow{\times bd}\cancel{b}d\left(\frac{a}{b}\right)=b\cancel{d}\left(\frac{c}{d}\right)\rightarrow ad=bc$

با استفاده از این ویژگی تناسب ، مسأله های زیادی را می توان حل کرد.

مثال: مقدار x را از تناسب $\frac{۶}{x} = \frac{۲}{۳}$ به دست آورید.

حل. داریم:

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۶}{x} \Rightarrow ۲ \times x = ۳ \times ۶ \Rightarrow ۲x = ۱۸ \Rightarrow x = \frac{۱۸}{۲} = ۹ \Rightarrow x = ۹$$

مثال : مقدار n را از تناسب $\frac{۳}{n-۲} = \frac{۹}{۲n}$ به دست آورید.

حل داریم:

$$۹ \times (n - ۲) = ۲n \times ۳ \Rightarrow ۹n - ۱۸ = ۶n \Rightarrow ۹n - ۶n = ۱۸ \Rightarrow ۳n = ۱۸ \Rightarrow n = \frac{۱۸}{۳} = ۶$$

مثال : اندازه ی x و y را از تناسب های زیر تعیین کنید.

$$\frac{۵}{x} = \frac{۱}{۲} \text{ و } \frac{x}{۱۲} = \frac{۵}{y}$$

حل. از تناسب $\frac{۱}{۲} = \frac{۵}{x}$ مقدار x را به دست می آوریم.

$$\frac{۵}{x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۵ \times ۲ = ۱ \times x \Rightarrow ۱۰ = x \text{ یا } x = ۱۰$$

اکنون در تناسب $\frac{۵}{y} = \frac{x}{۱۲}$ به جای x مقدار به دست آمده یعنی ۱۰ را قرار می دهیم تا y به دست آید. داریم:

$$\frac{۱۰}{۱۲} = \frac{۵}{y} \Rightarrow ۱۰ \times y = ۱۲ \times ۵ \Rightarrow ۱۰y = ۶۰ \Rightarrow y = \frac{۶۰}{۱۰} = ۶$$

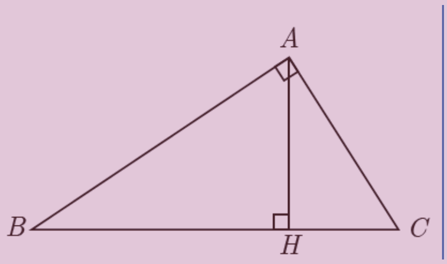
بنابراین $x = ۱۰$ و $y = ۶$ است.

تبدیل حاصل ضرب به تناسب

$$ad = bc \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

اثبات) $ab = bc \xrightarrow{\div bd} \frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}} = \frac{\cancel{b}c}{\cancel{b}d} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

مثال: در شکل مقابل مساحت مثلث قائم الزاویهٔ ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به دست آورید.



$$\begin{matrix} S=\frac{۱}{۲}AH\times BC \\ S=\frac{۱}{۲}AB\times AC \end{matrix} \rightarrow \frac{۱}{۲}AH \times BC = \frac{۱}{۲}AB \times AC \rightarrow AH \times BC = AB \times AC \rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC}$$

ویژگیهای دیگری از تناسب

۱. در هر تناسب مانند $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، می توانیم **جای دو جملهٔ ی کناری را با هم عوض کنیم**؛ در این صورت تناسبی جدید مانند $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ به دست می آید.

اثبات) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ad = bc \xrightarrow{\text{تبدیل حاصل ضرب به تناسب}} \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

۲.در هر تناسب مانند $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، می توانیم **جای دو جملهٔ ی میانی را با هم عوض کنیم**؛ در این صورت تناسبی جدید مانند $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$ به دست می آید.

اثبات) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ad = cb \xrightarrow{\text{تبدیل حاصل ضرب به تناسب}} \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

۳. در هر تناسب مانند $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، می توانیم **هر دو نسبت را معکوس کنیم**؛ در این صورت تناسبی جدید مانند $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ به دست می آید.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\to ad=bc\xrightarrow{\div ac}\frac{ac}{ac}=\frac{bc}{ac}\to\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\ \text{یا}\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$ (معکوس کردن تناسب) (اثبات

۴.هر تناسب مانند $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را می توانیم **ترکیب نسبت در صورت** کنیم؛ در این صورت تناسبی جدید مانند $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ به دست می آید.

برای اثبات به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه می کنیم

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{+۱}\frac{a}{b}+۱=\frac{c}{d}+۱\to\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

۵. هر تناسب مانند $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را می توانیم **ترکیب نسبت در مخرج** کنیم؛ در این صورت تناسبی جدید مانند $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ به دست می آید.

برای اثبات ابتدا کسرها را معکوس می کنیم، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه می کنیم.

(اثبات $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{معکوس کردن تناسب}}\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\to\frac{b}{a}+۱=\frac{d}{c}+۱\to\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\xrightarrow{\text{معکوس کردن تناسب}}\frac{a}{a+b}=\frac{d}{c+d}$$

۶.هر تناسب مانند $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را می توانیم **تفضیل نسبت در صورت** کنیم؛ در این صورت تناسبی جدید مانند $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ به دست می آید.

برای اثبات از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید

(اثبات $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\to\frac{a}{b}-۱=\frac{c}{d}-۱\to\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

۷.هر تناسب مانند $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را می توانیم تفضیل نسبت در مخرج کنیم؛ در این صورت تناسبی جدید مانند $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ به دست می آید.

برای اثبات ابتدا کسرها را معکوس کرده، سپس از دو طرف عدد ۱ را کم کنید.

$$(\text{اثبات})\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{معکوس کردن تناسب}}\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\rightarrow\frac{b}{a}-۱=\frac{d}{c}-۱\rightarrow\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}\xrightarrow{\text{معکوس کردن تناسب}}\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$$

۸. هر تناسب مانند $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ را می توانیم **ترکیب نسبت در صورت و تفضیل نسبت در مخرج** کنیم؛ در این صورت تناسبی جدید مانند $\frac{c+d}{c-d}=\frac{a+b}{a-b}$ به دست می آید.

۹. هر تناسب مانند $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ را می توانیم **تفضیل نسبت در صورت و ترکیب نسبت در مخرج** کنیم در این صورت تناسبی جدید مانند $\frac{c-d}{c+d}=\frac{a-b}{a+b}$ به دست می آید.

مثال: در هر یک از موارد زیر، از کدام یک از ویژگی های تناسب استفاده شده است:

الف. اگر $\frac{۳}{۴}=\frac{a}{b}$، آن گاه $\frac{۳}{a}=\frac{۴}{b}$

ب. اگر $\frac{۳}{۴}=\frac{a}{b}$، آن گاه $\frac{b}{۴}=\frac{a}{۳}$

پ. اگر $\frac{۳}{۴}=\frac{a}{b}$، آن گاه $\frac{۳}{۴}=\frac{a}{b}$

ت. اگر $\frac{۳}{۴}=\frac{a}{b}$، آن گاه $\frac{۷}{۴}=\frac{a+b}{b}$

ث. اگر $\frac{۳}{۴}=\frac{a}{b}$، آن گاه $\frac{۳}{۷}=\frac{a}{a+b}$

ج. اگر $\frac{۳}{۴}=\frac{a}{b}$، آن گاه $-\frac{۱}{۴}=\frac{a-b}{b}$

چ. اگر $\frac{۳}{۴}=\frac{a}{b}$، آن گاه $\frac{۳}{-۱}=\frac{a}{a-b}$

ح. اگر $\frac{۳}{۴}=\frac{a}{b}$، آن گاه $\frac{۷}{-۱}=\frac{a+b}{a-b}$

خ. اگر $\frac{۳}{۴}=\frac{a}{b}$، آن گاه $-\frac{۱}{۷}=\frac{a-b}{a+b}$

حل. الف) جای دو جمله ی کناری عوض شده است.

ب. جای دو جمله ی میانی عوض شده است.

پ. هر دو نسبت معکوس شده است.

ت. ترکیب نسبت در صورت شده است.

ث. ترکیب نسبت در مخرج شده است .

ج. تفضیل نسبت در صورت شده است.

چ. تفضیل نسبت در مخرج شده است.

ح. ترکیب نسبت در صورت و تفضیل نسبت در مخرج شده است.

خ. تفضیل نسبت در صورت و ترکیب نسبت در مخرج شده است.

مثال: تناسب $\frac{۹}{۲۴} = \frac{۳}{۸}$ داده شده است. این تناسب را:

الف. ترکیب نسبت در صورت کنید.

ب. تفضیل نسبت در مخرج کنید.

پ. تفضیل نسبت در صورت و ترکیب نسبت در مخرج کنید.

حل. الف.

$$\frac{۳}{۸} = \frac{۹}{۲۴} \Rightarrow \frac{۳+۸}{۸} = \frac{۹+۲۴}{۲۴} \Rightarrow \frac{۱۱}{۸} = \frac{۳۳}{۲۴}$$

ب.

$$\frac{۳}{۸}=\frac{۹}{۲۴}\Rightarrow\frac{۳}{۳-۸}=\frac{۹}{۹-۲۴}\Rightarrow\frac{۳}{-۱۵}=\frac{۹}{-۱۵}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۹}{۱۵}$$

یا می توان نوشت:

$$\frac{۳}{۸-۳}=\frac{۹}{۲۴-۹}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۹}{۱۵}$$

پ.

$$\frac{۳}{۸}=\frac{۹}{۲۴}\Rightarrow\frac{۳-۸}{۳+۸}=\frac{۹-۲۴}{۹+۲۴}\Rightarrow-\frac{۵}{۱۱}=-\frac{۱۵}{۳۳}\Rightarrow\frac{۵}{۱۱}=\frac{۱۵}{۳۳}$$

یا می توان نوشت:

$$\frac{۸-۳}{۸+۳}=\frac{۲۴-۹}{۲۴+۹}\Rightarrow\frac{۵}{۱۱}=\frac{۱۵}{۳۳}$$

مثال: در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$

روش اول) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{a}{۱۰}=\frac{b}{۸}\xrightarrow{\text{تعویض جای دو جمله میانی}}\frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$

روش دوم) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}\to ۸a+ab=۱۰b+ab\to ۸a=۱۰b\to\frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$

ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

حل) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}\to ۲۱a+۶ab+۷۰+۲۰b=۳۰b+۷۰+۶ab+۱۴a$

$\to ۲۱a-۱۴a=۳۰b-۲۰b\to ۷a=۱۰b\to\frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۷}$

ویژگی نسبت های مساوی

اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\cdots=k$ باشد ، آنگاه:

$$\frac{a+b+c+d+\cdots}{a'+b'+c'+d'+\cdots}=k$$

زیرا به عنوان مثال برای ۴ نسبت مساوی، داریم:

$$\begin{cases}\frac{a}{a'}=k\Rightarrow\\ \frac{b}{b'}=k\Rightarrow\\ \frac{c}{c'}=k\Rightarrow\\ \frac{d}{d'}=k\Rightarrow\end{cases}\begin{cases}a=a'k\\ b=b'k\\ c=c'k\\ d=d'k\end{cases}$$

از جمع کردن طرف های نظیر این تساوی ها نتیجه می شود:

$$a+b+c+d=a'k+b'k+c'k+d'k$$

$$\Rightarrow a+b+c+d=k(a'+b'+c'+d')\Rightarrow\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'}=k$$

مثال: اگر $\frac{۱۰}{۲۵}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$ باشد، داریم:

$$\frac{۲+۴+۶+۱۰}{۵+۱۰+۱۵+۲۵}=\frac{۲۲}{۵۵}=\frac{۲}{۵}$$

مثال : در هر یک از موارد زیر جای خالی را با مقدار یا عبارت مناسب پر کنید.

الف. اگر $\frac{۴}{۳}=\frac{a}{b}$، آن گاه $\boxed{}=\frac{a+۴}{b+۳}$

ب. اگر $\frac{۶}{d}=\frac{۵}{c}=\frac{۳}{b}=\frac{۲}{a}$، آن گاه $\frac{\boxed{}}{a}=\frac{\boxed{}}{a+b+c+d}$

حل. الف. صورت ها با هم و مخرج ها با هم جمع شده اند . پس نسبت به دست آمده با هر یک از نسبت های داده شده برابر است، یعنی داریم:

$$\frac{a+۴}{b+۳}=\boxed{\frac{۴}{۳}} \quad \text{یا} \quad \frac{a+۴}{b+۳}=\boxed{\frac{a}{b}}$$

ب. بنا به ویژگی نسبت های مساوی داریم:

$$\frac{۲}{a}=\frac{۳}{b}=\frac{۵}{c}=\frac{۶}{d}=\frac{۲+۳+۵+۶}{a+b+c+d}=\frac{۱۶}{a+b+c+d}=\frac{۲}{a}$$

بنابراین:

$$\frac{\boxed{۱۶}}{a+b+c+d}=\frac{\boxed{۲}}{a}$$

مثال: مقدار x و y را از نسبت های مساوی زیر به دست آورید.

$$\frac{x-y}{۵}=\frac{x+y}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$$

حل. بنا به ویژگی نسبت های مساوی داریم:

$$\frac{x-y}{۵}=\frac{x+y}{۲۰}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{x-y+x+y+۲}{۵+۲۰+۵}=\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow\frac{۲x+۲}{۳۰}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۱۰x+۱۰=۶۰\Rightarrow ۱۰x=۵۰\Rightarrow x=۵$$

$$\frac{x-y}{۵}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{۵-y}{۵}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۲۵-۵y=۱۰\Rightarrow ۱۵=۵y\Rightarrow y=۳$$

مثال : مقدار $x+y+z$ را از نسبت های مساوی زیر به دست آورید.

$$\frac{x-۱}{۳}=\frac{y+۲}{۲}=\frac{z-۱}{۴}=\frac{۲}{۱}$$

حل. راه حل اول. هر یک از مقدارهای x، y و z را محاسبه کرده، با هم جمع می کنیم داریم:

$$\frac{x-۱}{۳}=۲\Rightarrow x-۱=۶\Rightarrow x=۷$$

$$\frac{x+۲}{۲}=۲\Rightarrow y+۲=۴\Rightarrow y=۲$$

$$\frac{z-۱}{۴}=۲\Rightarrow z-۱=۸\Rightarrow z=۹$$

$$\Rightarrow x+y+z=۷+۲+۹=۱۸$$

راه دوم. از ویژگی های نسبت های مساوی استفاده می کنیم . داریم:

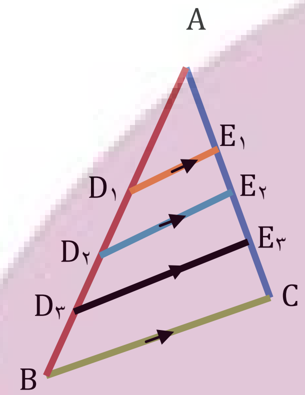
$$\frac{x-۱}{۳}=\frac{y+۲}{۲}=\frac{z-۱}{۴}=\frac{۲}{۱}=\frac{(x-۱)+(y+۲)+(z-۱)}{۳+۲+۴}=\frac{x+y+z}{۹}$$

$$\Rightarrow\frac{x+y+z}{۹}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow x+y+z=۱۸$$

استدلال، قضیهٔ تالس و تعمیم آن

در شکل مقابل داریم: $D_۱E_۱ \parallel BC$ و $D_۲E_۲ \parallel BC$ و $D_۳E_۳ \parallel BC$ این اطلاعات را می توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i \parallel BC$ برای $۱ \leq i \leq ۳$

–اندازهٔ پاره خط های زیر را با خط کش مشخص کرده ایم و در کسرها جایگزین کرده ایم و نتایج زیر حاصل شده است.

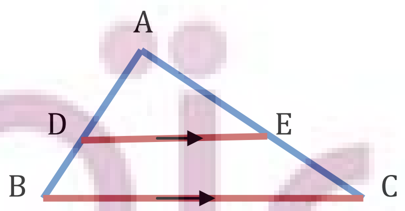


$$\frac{AE_۱}{E_۱C}=\frac{۱}{۱/۵}=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{AD_۱}{D_۱B}=\frac{AE_۱}{E_۱C} \qquad \frac{AD_۱}{D_۱B}=\frac{۱/۶}{۲/۴}=\frac{۱۶}{۲۴}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{AE_۲}{E_۲C}=\frac{۱/۵}{۱}=\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{AD_۲}{D_۲B}=\frac{AE_۲}{E_۲C} \qquad \frac{AD_۲}{D_۲B}=\frac{۲/۴}{۱/۶}=\frac{۲۴}{۱۶}=\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{AE_۳}{E_۳C}=\frac{۲}{۰/۵}=\frac{۲۰}{۵}=\frac{۴}{۱}\Rightarrow\frac{AD_۳}{D_۳B}=\frac{AE_۳}{E_۳C} \qquad \frac{AD_۳}{D_۳B}=\frac{۳/۲}{۰/۸}=\frac{۳۲}{۸}=\frac{۴}{۱}$$

سوال: اگر پاره خط DE مانند شکل رو به رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می زنید نسبت کدام پاره خط ها با هم برابر باشند؟



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

آیا می توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

در سال های قبل دیدید که نمی توان به درست بودن نتیجه ای که بر اساس مشاهدهٔ چند مورد به دست آمده باشد، مطمئن بود.

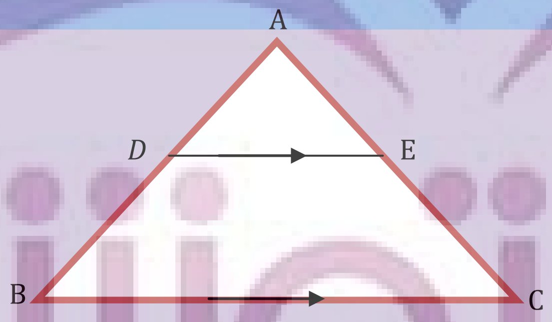
این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه ای کلی از آن گرفته می شود؛ یعنی « از **جزء به کل** می رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می شود.

استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت هایی که درستی آنها را پذیرفته ایم، بیان می شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده اید، با مواردی از استدلال های استنتاجی مواجه شده اید. در ادامه با استدلال استنتاجی، نتیجه ای را که با استدلال استقرایی به دست آوردیم، ثابت خواهیم کرد.

قضیهٔ تالس:

اگر خطی با یک ضلع مثلثی موازی باشد و دو ضلع دیگر آن مثلث را قطع کند، نسبت پاره خط هایی که روی این دو ضلع پدید می آیند، با هم برابر است؛ یعنی اگر در مثلث ABC ، خطی موازی ضلع BC ضلع AB را در نقطه D و ضلع AC را در نقطه E قطع کند، آن گاه داریم:



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

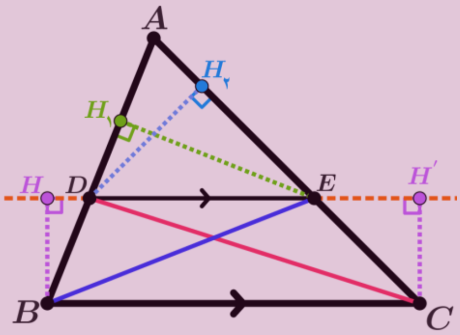
اثبات

مرحله ۱. از D به C و از E به B وصل می کنیم

مرحله ۲. از D عمود $DH_۲$ را بر AC و از E عمود $EH_۱$ را بر AB فرود می آوریم.

مرحله ۳. نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت DEB را محاسبه می کنیم. داریم:

$$\frac{S_{\mathrm{ADE}}}{\mathrm{S_{DEB}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\mathrm{AD}\times \mathrm{E}H_۱}{\frac{۱}{۲}\mathrm{DB}\times \mathrm{E}H_۱}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} \qquad (۱)$$



مرحله ۴. نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت مثلث DEC را به دست می آوریم، داریم:

$$\frac{S_{\mathrm{ADE}}}{\mathrm{S_{DEC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\mathrm{AE}\times DH_۲}{\frac{۱}{۲}\mathrm{EC}\times DH_۲}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} \qquad (۲)$$

مرحله ۵. از B و C عمودهای BH و CH' را بر خط DE فرود می آوریم. چهار ضلعی BCH'H مستطیل است،

زیرا ضلع هایش دو به دو موازی و زاویه هایش قائمه اند. پس $BH=\mathrm{CH'}$ است.

مرحله ۶. مساحت دو مثلث DEB و DEC با هم برابر است، زیرا داریم:

$$\mathrm{S_{DEB}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{DE}\times \mathrm{BH} \quad , \quad \mathrm{S_{DEC}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{DE}\times \mathrm{CH'} \quad , \mathrm{BH}=\mathrm{CH'}$$

بنابراین: $S_{\mathrm{DEB}}=\mathrm{S_{DEC}}$

مرحله ۷. از برابری $S_{DEC} = S_{DEB}$، نتیجه می شود که طرف های اول رابطه های (۱) و (۲) با هم برابرند یعنی $\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}$: زیرا صورت این دو نسبت با هم برابرند و مخرج آن ها نیز طبق مرحله(۶) برابر می باشند. در نتیجه طرف های دوم رابطه های (۱) و (۲) با هم برابر می باشند، یعنی داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

و حکم قضیه ثابت شد.

تعمیم قضیهٔ تالس:

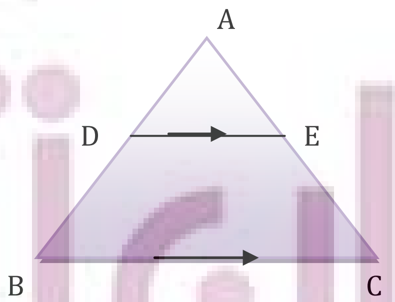
نتیجه ۱. رابطه ی $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ را می توانیم ترکیب نسبت در مخرج کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AD + DB} = \frac{AE}{AE + EC} \Longrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

همچنین رابطه $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ را می توانیم ترکیب نسبت در صورت کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC} \Longrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

بنابراین می توان گفت : اگر خط DE موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، رابطه های زیر برقرار است:

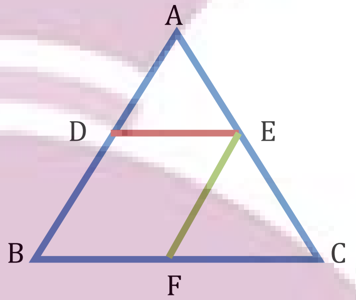


$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$
$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

از هر یک از رابطه های بالا در صورت لزوم، می توانیم استفاده کنیم.

نتیجه ۲: اگر در مثلث ABC خطی موازی ضلع BC دو ضلع AB و AC را بترتیب در نقطه های D و E قطع کند، داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$



اثبات :

۱.در مثلث ABC چون DE موازی BC است، بنا به نتیجه ۱ قضیه ی تالس داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \qquad (۱)$$

۲.ازنقطه ی E خطی موازی ضلع AB رسم می کنیم تا ضلع BC را در نقطه ی F قطع کند. چهار ضلعی BDEF که ضلع های آن دو به دو موازی اند ، متوازی الاضلاع است، بنابراین : $DE = BF$

۳.در مثلث ABC ، چون EF موازی ضلع AB است، پس بنا به نتیجه ی ۱ قضیه تالس داریم:

$$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC} \qquad (۲)$$

۴.در رابطه ی (۲) به جای BF پاره خط، مساوی اش DE را قرار می دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC} \qquad (۳)$$

۵. رابطه های (۱) و (۳) دارای یک نسبت مساوی $\left(\frac{AE}{AC}\right)$ می باشند، پس نسبت های دیگرشان نیز با هم مساوی اند یعنی داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

مثال: در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{BC}$

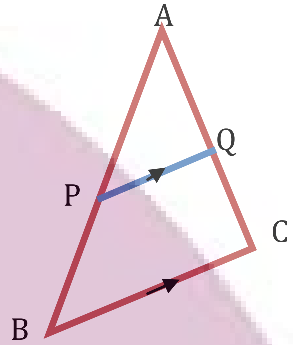
ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$

ب) $\frac{PB}{AP}=\frac{QC}{AC}$

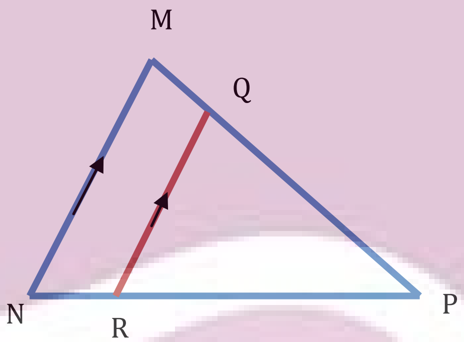
ت) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}=\frac{PQ}{BC}$

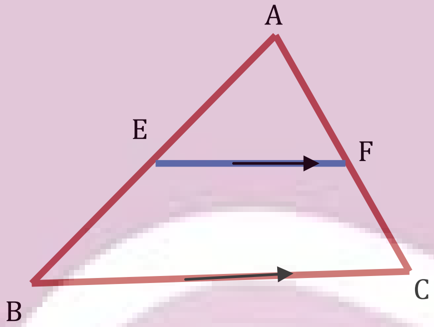
ث) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$

ج) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$



مثال: با توجه به شکل ها ، در هر کدام از موارد زیر جای خالی را پر کنید.





در مثلث ABC پاره خط EF ، با ضلع BC موازی است.

الف. $\frac{AE}{EB}=\frac{\square}{FC}$ ب. $\frac{AE}{AB}=\square$ پ) $\frac{FC}{AC}=\square$

در مثلث MNP پاره خط QR با ضلع MN موازی است.

الف. $\frac{PQ}{QM}=\square$ ب. $\frac{PR}{PN}=\square$ پ. $\square=\square=\frac{PQ}{PM}$

حل. در مثلث ABC داریم:

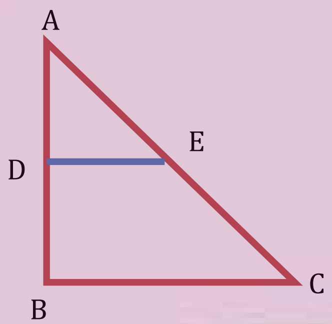
الف . $\frac{AE}{EB}=\boxed{\frac{AF}{FC}}$ ب. $\frac{AE}{AB}=\boxed{\frac{AF}{AC}}$ پ) $\boxed{\frac{EB}{AB}}=\frac{FC}{AC}$

در مثلث MNP داریم:

الف. $\frac{PQ}{QM}=\boxed{\frac{PR}{RN}}$ ب. $\boxed{\frac{PQ}{PM}}=\frac{PR}{PN}$ پ. $\frac{PQ}{PM}=\boxed{\frac{PR}{PN}}=\boxed{\frac{QR}{MN}}$

مثال: در شکل روبه رو ، $AB \mid\mid DE$ است.

الف. اگر $DA=۸ ,DB=۱۲$ و $AE=۲۰$ باشد، EC را تعیین کنید.



ب. اگر $DB=۱۲ ,DA=۲۰$ و $EC=۶$ باشد، AE را تعیین کنید.

پ. اگر $DB=۱۵ ,AB=۶۰$ و $AC=۵۴$ باشد، EC را تعیین کنید.

حل. بنا به قضیه ی تالس داریم:

الف. $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{EC}\Longrightarrow\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲۰}{EC}\Longrightarrow EC=\frac{۲۰\times۱۲}{۸}=۳۰$

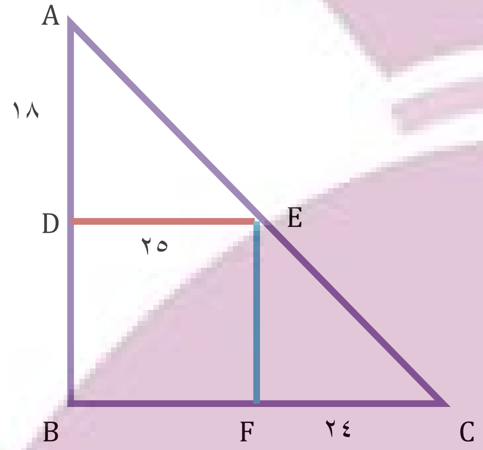
ب. $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Longrightarrow\frac{۲۰}{۱۲}=\frac{AE}{۶}\Longrightarrow AE=\frac{۲۰\times۶}{۱۲}=۱۰$

پ. $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}\Longrightarrow\frac{۶۰}{۱۵}=\frac{۵۴}{EC}\Longrightarrow EC=\frac{۱۵\times۵۴}{۶۰}=۱۳/۵$

مثال: در شکل روبه رو ، $DE \parallel BC$ و $EF \parallel AB$ است. با توجه به شکل ، اندازه ی BD را تعیین کنید.

حل. چهار ضلعی DEFB متوازی الاضلاع است، زیرا ضلع های آن دو به دو موازی اند؛ بنابراین BF=DE=۲۵

و از آنجا، BC=BF+FC=۲۵+۲۴=۴۹



پس داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۱۸}{AB} = \frac{۲۵}{۴۹} \Rightarrow AB = ۳۵/۲۸$$

$$DB = AB - AD = ۳۵/۲۸ - ۱۸ = ۱۷/۲۸$$

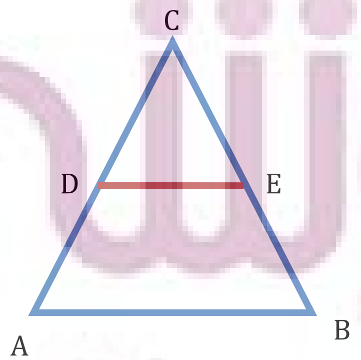
مثال: در شکل روبه رو DE موازی AB است.

الف. اگر $AC = ۲۴$، $CD = ۸$ و $CE = ۱۶$ باشد، BC را حساب کنید.

ب. اگر $AD = ۳$، $BE = ۵$ و $CD = ۲$ باشد، CE را حساب کنید.

پ. اگر $BC = ۱۱$، $BE = ۳$ و $CD = ۴$ باشد، AC را حساب کنید.

ت. اگر $AD = ۱۰$، $CD = ۱۴$ و $BC = ۳۶$ باشد، BE را حساب کنید.



حل. بنا به قضیه ی تالس داریم:

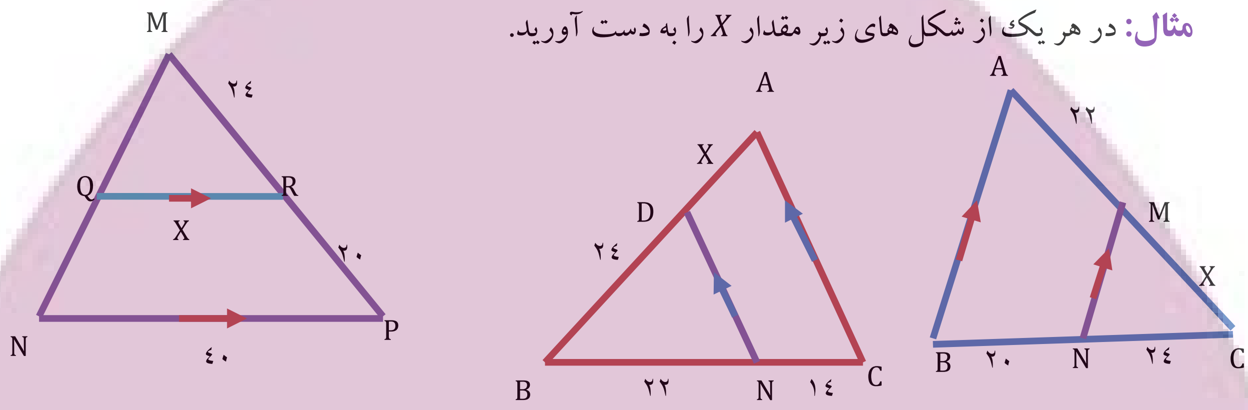
الف. $\frac{CD}{AC}=\frac{CE}{BC}\Rightarrow\frac{۸}{۲۴}=\frac{۱۶}{BC}\Rightarrow BC=\frac{۱۶\times۲۴}{۸}=۴۸$

ب. $\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{CB}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{CE}{۵}\Rightarrow CE=\frac{۱۰}{۳}$

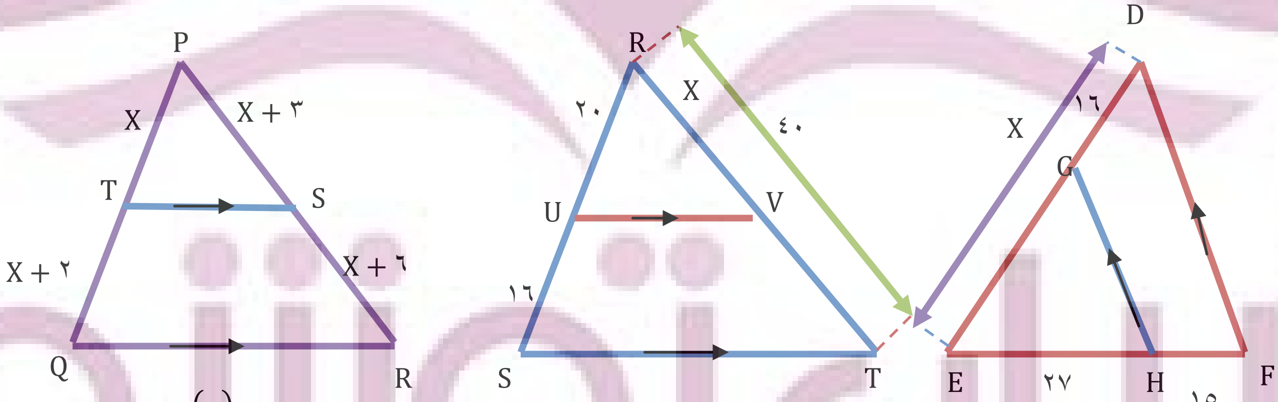
پ. $CE=BC-BE=۱۱-۳=۸ ,\frac{CD}{AC}=\frac{CE}{BC}\Rightarrow\frac{۴}{AC}=\frac{۸}{۱۱}\Rightarrow AC=\frac{۴\times۱۱}{۸}=\frac{۱۱}{۲}$

ت. $AC=AD+DC=۱۰+۱۴=۲۴ ,\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BE}\Rightarrow\frac{۲۴}{۱۰}=\frac{۳۶}{BE}\Rightarrow BE=\frac{۱۰\times۳۶}{۲۴}=۱۵$

مثال: در هر یک از شکل های زیر مقدار X را به دست آورید.



(الف) (ب) (پ)



(ت) (ث) (ج)

حل. الف. $MN || AB \Longrightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{NC}{NB} \Longrightarrow \frac{X}{۲۲} = \frac{۲۴}{۲۰} \Longrightarrow X = ۲۶/۴$

ب. $DE || AC \Longrightarrow \frac{X}{۲۴} = \frac{۱۴}{۲۲} \Longrightarrow X = \frac{۱۶۸}{۱۱}$

پ. $QR || NP \Longrightarrow \frac{MR}{MP} = \frac{QR}{NP}\ , MP = ۲۴ + ۲۰ = ۴۴ \Longrightarrow \frac{۲۴}{۴۴} = \frac{X}{۴۰} \Longrightarrow X = \frac{۲۴۰}{۱۱}$

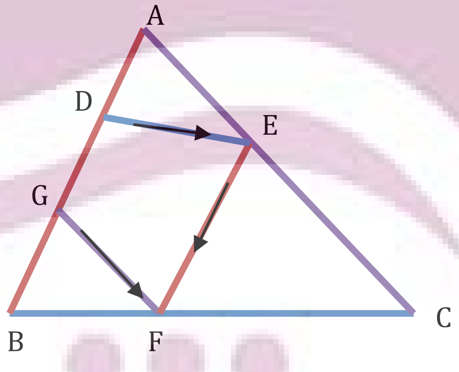
ت. $GH || DF \Longrightarrow \frac{ED}{GD} = \frac{EF}{HF}\ , EF = ۲۷ + ۱۵ = ۴۲ \Longrightarrow \frac{X}{۱۶} = \frac{۴۲}{۱۵} \Longrightarrow X = \frac{۲۲۴}{۵}$

ث. $UV || ST \Longrightarrow \frac{RT}{RV} = \frac{RS}{RU}\ , RS = ۲۰ + ۱۶ = ۳۶ \Longrightarrow \frac{۴۰}{X} = \frac{۳۶}{۲۰} \Longrightarrow X = \frac{۲۰۰}{۹}$

ج. $TS || QR \Longrightarrow \frac{PR}{TQ} = \frac{PS}{SR} \Longrightarrow \frac{X}{X+۲} = \frac{X+۳}{X+۶} \Longrightarrow X(X+۶) = (X+۲)(X+۳)$

$\Longrightarrow X^۲ + ۶X = X^۲ + ۵X + ۶ \Longrightarrow X = ۶$

مثال :در مثلث ABC از نقطه ی D واقع بر ضلع AB خطی موازی ضلع BC رسم می کنیم تا ضلع AC را در نقطه E قطع کند. از E خطی موازی ضلع AB رسم می کنیم تا ضلع BC را در نقطه ی F قطع کند و از نقطه ی F نیز خطی موازی ضلع AC ریم می کنیم تا ضلع AB را در نقطه ی C قطع نماید. ثابت کنید که $\frac{AD}{DB} = \frac{BG}{GA}$



حل. بنا بر قضیه ی تالس در مثلث ABC داریم:

$$DE || BC \Longrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \qquad (۱)$$

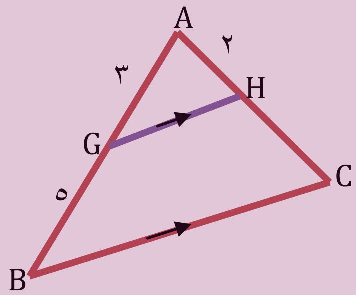
$$EF || AB \Longrightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FC} \qquad (۲)$$

$$FG || AC \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{BG}{GA} \qquad (۳)$$

از مقایسه ی رابطه های (۱)، (۲) و (۳) که دو به دو دارای عضوی مشترک هستند، نتیجه می شود که $\frac{AD}{DB} = \frac{BG}{GA}$

مثال: در شکل پاره خط های GH و BC موازی اند. اندازهٔ پاره خط های AC و HC را به دست آورید.

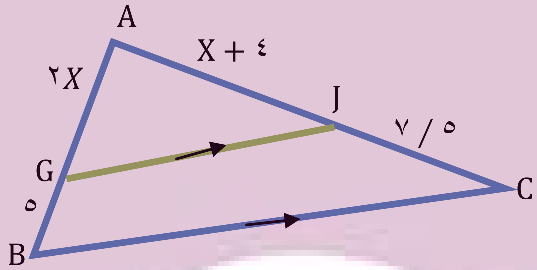
$$CH || BC \rightarrow \frac{AG}{GB} = \frac{AH}{HC} \rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{HC} \rightarrow HC = \frac{۱۰}{۳} \rightarrow AC = AH + HC = ۲ + \frac{۱۰}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$



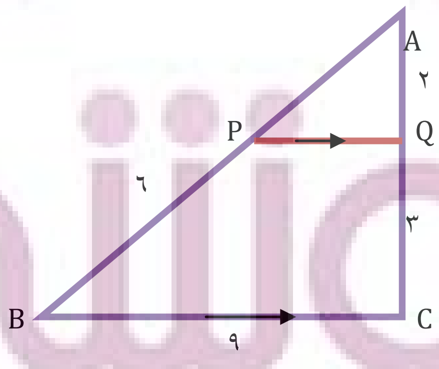
مثال: با تشکیل یک معادله، مقدار X و اندازهٔ پاره خط های AI و AJ را به دسا آورید.

$$IJ || BC \rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{AJ}{JC} \rightarrow \frac{۲X}{۵} = \frac{X+۴}{۷/۵}$$

$$۱۵X = ۵X + ۲۰ \rightarrow ۱۰X = ۲۰ \rightarrow X = ۲$$



مثال: در شکل مقابل $PQ || BC$ است . طول پاره خط های AP و PQ را به دست آورید.

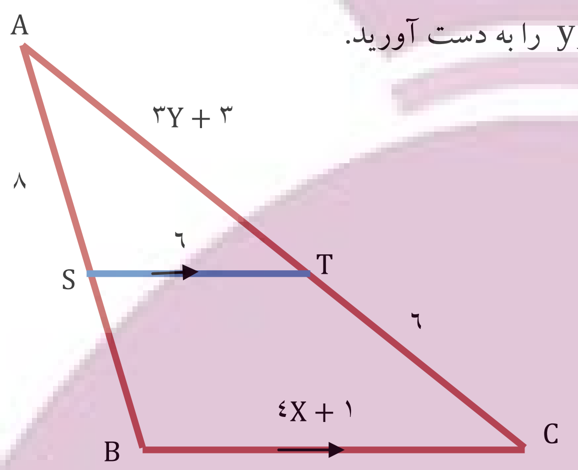


حل)

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}\rightarrow\frac{AP}{۲}=\frac{۲}{۳}\rightarrow AP=۴$$

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}\rightarrow\frac{۲}{۵}=\frac{PQ}{۹}\rightarrow PQ=\frac{۱۸}{۵}$$

مثال: در شکل مقابل $ST || BC$ است. مقادیر x و y را به دست آورید.

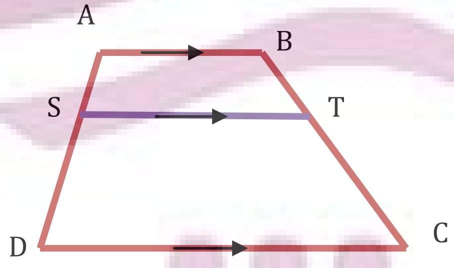


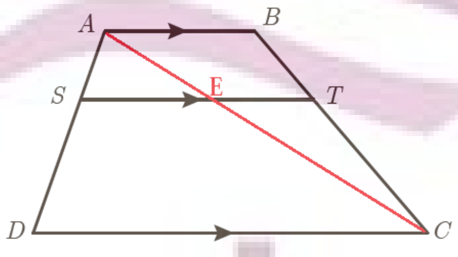
حل)

$$\frac{۸}{۱۲}=\frac{۳Y+۳}{۳Y+۹}=\frac{۶}{۴X+۱}\rightarrow\frac{۸}{۱۲}=\frac{۶}{۴X+۱}\rightarrow ۱۸=۸X+۲\rightarrow X=۲$$

$$\frac{۳y+۳}{۳y+۹}=\frac{۲}{۳}\rightarrow ۹y+۹=۶y+۱۸\rightarrow ۳y=۹\rightarrow y=۳$$

مثال: در ذوذنقه مقابل $DC || ST || AB$ است. ثابت کنید: $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$ (راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)





در مثلث ABC : $SE || DC \rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{AE}{EC}$ (۱)

در مثلث ABC : $ET || AB \rightarrow \frac{CT}{TB}=\frac{CE}{EA}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{BT}{TC}=\frac{AE}{EC}$ (۲)

$(۱)(۲): \rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

عکس قضیه

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه جا کنیم، آنچه حاصل می شود « **عکس قضیه**» است. عکس یک قضیه می تواند درست یا نادرست باشد.

مثال: اگر a و b دو عدد فرد باشند آن گاه $a+b$ زوج است

عکس: اگر $a+b$ زوج باشد آن گاه a و b فرد است . غلط

۱۲=۴+۸ هیچ یک از اعداد ۸ و ۴ فرد نیستند.

در مثال های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

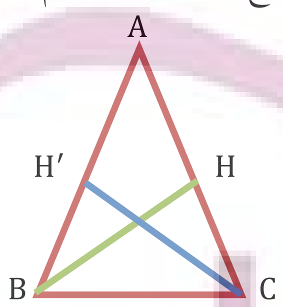
مثال ۱:

قضیه: اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهار ضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند ، آنگاه آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

مثال ۲:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.



فرض : $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آن گاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع ها نیز با هم برابرند.

فرض : $BH = CH'$

حکم : $AB = AC$

مثال: در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است ، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهار ضلعی ضلعی اضلاع رو به رو موازی باشند ، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

پ) اگر رأس های یک چهار ضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند ، در این صورت زوایای مقابل آن چهار ضلعی مکمل اند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، « ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ تر» کوچک تر است از « ضلع مقابل به ارتفاع کوچک تر» (راهنمایی: شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)

حل)

- الف) اگر در مثلثی ۳ زاویه برابر باشند آن گاه ۳ ضلع نیز برابرند.

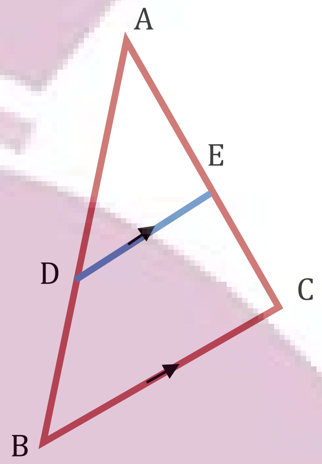
ب) اگر در یک ۴ ضلعی زوایای مقابل برابر باشند آن گاه اضلاع روبرو موازی هستند.

پ) اگر در یک ۴ ضلعی زوایای مقابل مکمل باشند آن گاه رأس های آن روی یک دایره هستند.

ت) اگر در یک مثلث دو ضلع نابرابر باشد، آن گاه ارتفاع متناظر به ضلع بزرگتر کوچکتر از ارتفاع متناظر به ضلع کوچکتر است.

عکس قضیه ی تالس

در قضیهٔ تالس فرض و حکم به صورت زیر است.



فرض : $DE \| BC$

حکم : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیه تالس به صورت زیر است:

فرض : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

حکم : $DE \| BC$

به عبارت دیگر:

عکس قضیه تالس می گوید هر گاه پاره خط DE مانند شکل پاره خط های AB و AC را به گونه ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ در این صورت پاره خط DE موازی پاره خط BC است.

کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت که عکس قضیه تالس درست است یا نه؟

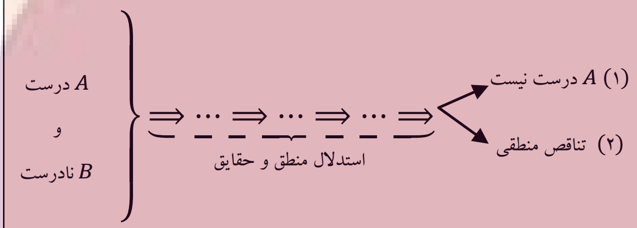
تذکر: معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابجا می شود و قسمت هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم در عکس آن ثابت باشند؛ مثلاَ در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

برهان خلف:

نوعی استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می شود. برهان غیر مستقیم یا برهان خلف است. در برهان خلف به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیر ممکن می رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می شود.

مسئله : $\left(\text{فرض}\right) A \Rightarrow \left(\text{حکم}\right) B$

اثبات به روش برهان خلف:



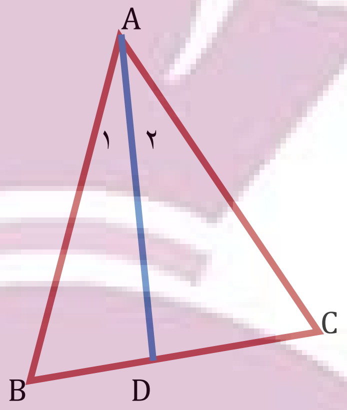
پس نتیجه می گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می رسیم که هیچ کدام نمی تواند اتفاق بیفتد.

مثال: اگر $n \in N$ و $n^۲$ عددی فرد باشد، آن گاه n نیز عددی فرد است.

حل: با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد ؛ یعنی n عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می توان نوشت $n = ۲k$ به طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^۲ = ۴\mathrm{k}^۲ = ۲(۲\mathrm{k}^۲)$ که عدد زوج است و با فرض مسئله در تناقض است ؛ لذا از ابتدا n نمی توانست عددی زوج باشد.

مثال: فرض کنیم AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن گاه $AB \neq AC$.



حل: با استفاده از برهان خلف فرض می کنیم حکم نادرست باشد.

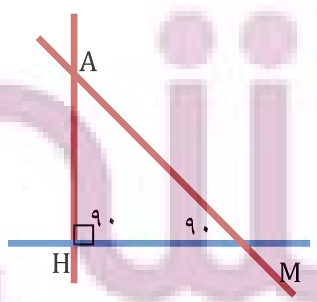
بنابراین داریم $AB=AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $\overset{\Delta}{\widehat{ACD}} \cong \overset{\Delta}{\widehat{ABD}}$ (چرا؟). از این هم نهشتی نتیجه خواهد شد $\mathrm{BD} = \mathrm{DC}$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB=AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است.

مثال: با برهان خلف ثابت کنید نمی توان از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط، دو عمود بر آن رسم کرد.

– فرض خلف: فرض کنیم از نقطه A بتوان دو خط عمود رسم کرد:

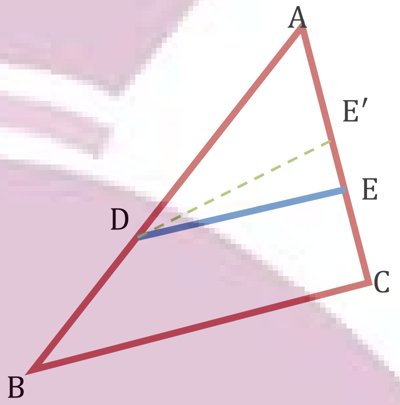
مجموع زوایای داخلی : $A + \underbrace{H + M}_{۱۸۰} = A + ۱۸۰ > ۱۸۰$

مجموع زوایای داخلی =۱۸۰ و این تناقض نتیجه می شود که فرض خلف باطل و در نتیجه حکم درست است.



اثبات عکس قضیهٔ تالس به کمک فرض خلف:

عکس قضیهٔ تالس :مانند شکل مقابل در مثلث ABC، اگر $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، آن گاه $DE \parallel BC$.

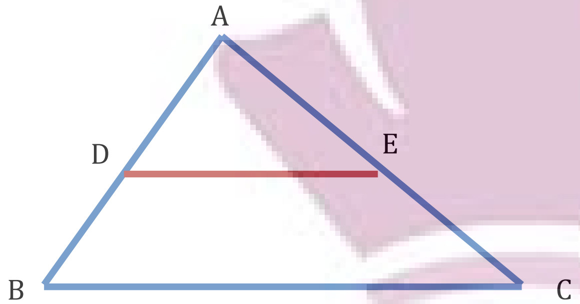


اثبات: با استفاده از برهان خلف فرض می کنیم حکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \nparallel BC$. لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می کنیم تا AC را در نقطه ای مانند E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$ و از مقایسه با فرض قضیه ، یعنی $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، نتیجه می شود که طرف های دوم این دو تناسب با هم برابرند (چون طرف های اول آن ها مساوی اند). یعنی داریم $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}$. این تناسب را ترکیب نسبت در مخرج می کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{AE}{AE+EC}=\frac{AE'}{AE'+E'C} \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AE'}{AC}$$

از این تناسب نتیجه می شود که $AE = AE'$ است، یعنی نقطه ی E' بر نقطه ی E منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است، زیرا $DE \nparallel BC$ و $DE' \parallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرض غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی تواند غلط باشد، $DE \parallel BC$ است.

مثال : در شکل روبه رو داریم:



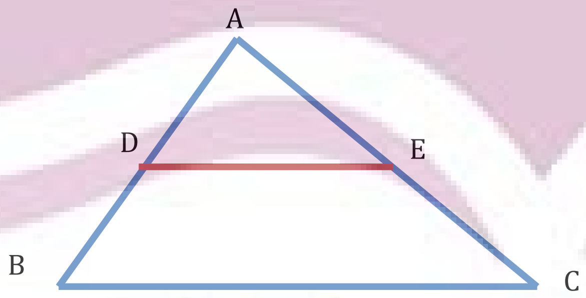
$AD = ۲۴$,$AB = ۳۲$,$AE = ۳۳$ و $AC = ۴۴$ است، آیا DE موازی BC است.

حل. داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{۲۴}{۳۲} = \frac{۳}{۴} \quad \text{و} \quad \frac{AE}{AC} = \frac{۳۳}{۴۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

بنابراین ، بنابه عکس قضیه ی تالس، DE موازی BC است.

مثال : با توجه به شکل روبه رو در کدام یک از حالت های زیر FE موازی BC است؟



الف. $AE = ۶ , AC = ۱۴, AF = ۱۲, AB = ۲۸$

ب. $AE = ۱۸, AC = ۲۴ , FB = ۹, AB = ۳۶$

پ. $CE = ۸, AE = ۹, FB = ۵, AF = ۶$

حل. داریم:

$$\frac{AF}{AB}=\frac{۱۲}{۲۸}=\frac{۳}{۷} \qquad ,\frac{AE}{AC}=\frac{۶}{۱۴}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

بنابراین در این حالت FE موازی BC است.

ب.
$$AF=AB-BF=۳۶-۹=۲۷,\quad \frac{AF}{AB}=\frac{۲۷}{۳۶}=\frac{۳}{۴},$$

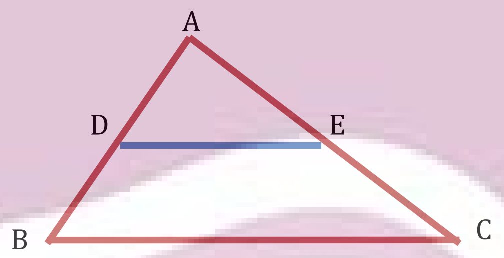
$$\frac{AE}{AC}=\frac{۱۸}{۲۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow FE\|BC$$

پ.
$$\frac{AF}{FB}=\frac{۶}{۵}=۱/۲ \quad ,\frac{AE}{EC}=\frac{۹}{۸}=۱/۱۲۵\Rightarrow\frac{AF}{FB}\neq\frac{AE}{EC}$$

پس در این حالت FE موازی BC نیست.

مثال: ثابت کنید در هر مثلث پاره خطی که وسط های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

حل) D وسط AB و E وسط AC است.



حکم : $DE\|BC\ ,DE=\frac{۱}{۲}BC$

اثبات : $\begin{matrix}AD=DB\rightarrow\frac{AD}{DB}=۱\\ AE=EC\rightarrow\frac{AE}{EC}=۱\end{matrix}\rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

$$\xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} DE\|BC$$

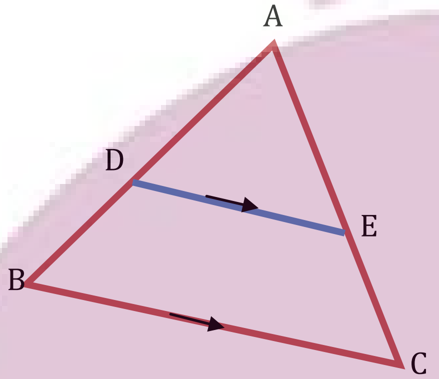
هم چنین از تعمیم تالس داریم :
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\qquad(۱)$$

و $AD=DB\rightarrow AB=AD+DB=AD+AD=۲AD$

$$\xrightarrow{\text{در (۱)}}\frac{AD}{۲AD}=\frac{DE}{BC}\rightarrow DE=\frac{۱}{۲}BC$$

قضیه های دو شرطی:

همان گونه که دیدیم، قضیهٔ تالس و عکس آن هر دو درست اند؛ بنابراین برای مثلثی مانند $\overset{\Delta}{\widehat{ABC}}$ در شکل مقابل می توان هر دوی آنها را به صورت زیر بیان کرد:



اگر $DE \| BC$، آن گاه $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ و برعکس.

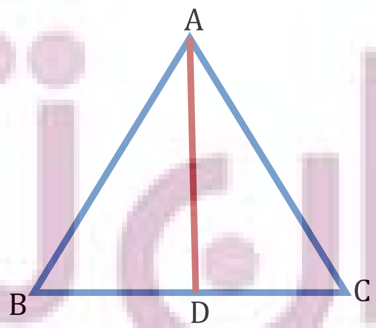
چنین قضیه هایی را قضیه های دو شرطی می نامیم . قضیه های دو شرطی را با نماد [1] $\Leftrightarrow$ (که اگر و تنها اگر خوانده می شود) بیان کرد؛ به طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می توان به صورت زیر بیان کرد:

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$DE \| BC \Leftrightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}.$$

مثال: در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه های رو به رو به آنها با هم برابر باشند.

مثال: در مثلث متساوی الاضلاع یک پاره خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.



[1] این نماد نشان دهندهٔ آن است که هر کدام از طرفین می توانند طرف دیگر را نتیجه دهند؛ لذا یا هر دو طرف درست اند و یا هر دو طرف نادرست اند.

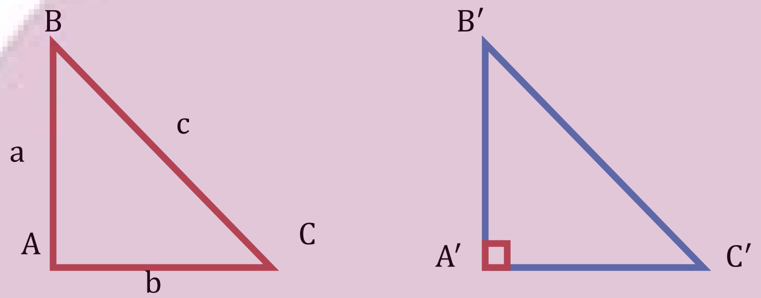
فعالیت: با توجه به قضیهٔ فیثاغورس اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC قائمه باشد، آنگاه $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید. اگر در مثلثی مربع یک ضلع برابر مجموع دو ضلع دیگر باشد آن گاه آن مثلث قائم الزاویه است.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱–فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ بین اندازهٔ اضلاع آن برقرار است.

۲–پاره خط های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه ای در نظر بگیرید که $\widehat{A'} = ۹۰^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$ است.



۳–با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازه پاره خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

$$B'C'^۲ = A'C'^۲ + A'B'^۲ = \underbrace{b^۲ + c^۲}_{a^۲}$$

۴– توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{A'B'C'} = \overset{\Delta}{ABC}$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = ۹۰^\circ$

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ بنا به حالت ض ض ض هم نهشتند پس :

$$B'C'^۲ = a^۲ \rightarrow B'C'^۲ = a, a = BC \qquad \hat{A} = \widehat{A'} = ۹۰^\circ$$

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان کنید.

مثلثی قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.

مثال نقض:

به مثالی که برای رد یک حکم کلی استفاده می شود، مثال نقض می گوییم .

مثال: اگر فردی ادعا کند که « همهٔ اعداد فرد ، اول اند» این یک حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است، برای رد این ادعا کافی است .

مثال: فرض کنیم فردی ادعا کند که « هیچ فرد ایرانی ای تا به حال مدال فیلدز[۲] نگرفته است». در این صورت شما برای رد ادعای او چه می توانید بگویید؟ اگر شما حتی یک فرد ایرانی را که مدال فیلدز گرفته است ، برای او مثال بزنید، در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض، ادعای او را باطل کرده اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهیم دید که کلمهٔ « هیچ» در این حکم باعث می شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعهٔ افراد ایرانی است) باشد. بنابراین در این مورد نیز آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد.

در ادامه نمونه هایی از حکم های کلی آمده اند.

الف) همهٔ اعداد اول فردند. (حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد اول)

ب) « در هر مستطیل اندازهٔ قطرها با هم برابر است.» (حکم کلی دربارهٔ تمام مستطیل ها)

---

[۲] مدال یا نشان فیلدز (FIELDS MEDAL) جایزه ای است که به ابتکار ریاضی دان کانادایی جان چالز فیلدز هر چهار سال یک بار به ریاضی دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده ای در ریاضی انجام داده باشند تعلق می گیرد . از آنجا که در رشتهٔ ریاضی جایزهٔ نوبل اهدا نمی شود، این جایزه را « نوبل ریاضیات» می خوانند . در سال ۲۰۱۴ نشان فیلدز به ریاضی دان ایرانی خانم مریم میرزاخانی تعلق گرفت . گفتنی است که میرزاخانی اولین زنی در دنیاست که موفق به گرفتن این نشان شده است. البته با تاسف تمام موقع تدوین کتاب خبر در گذشت ایشان، جهان علم و جامعهٔ ایرانی را سخت متأ ثر ساخت، روانش شاد

پ) « به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم « الف» چه حدسی می زنید؟ چگونه می توانید حدس خود را ثابت کنید؟

می دانیم که در ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی « الف» با ارائهٔ همین مثال نقض رد می شود.

دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم های « ب» و «پ» چه حدس هایی می زنید؟ آیا می توانید برای آنها مثال نقض بیاورید و آنها را باطل کنید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض ارائه کنیم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می توان گفت؟ آیا در این حالت درستی حکم را باید پذیرفت؟

برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که « برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم».

دربارهٔ گزینهٔ (پ) چه می توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن ، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه ای گرفت.

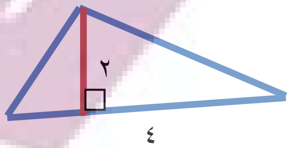
مثال: هر یک از حکم های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اول بزرگ تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

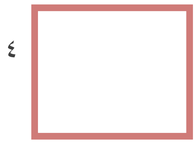
حل) ۱۳۱ اول است و از ۱۲۷ بزرگتر است.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

ب)

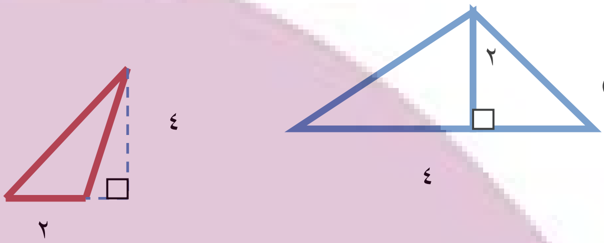


$S = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ٤ = ٤$,　$\to S = ۱٦$



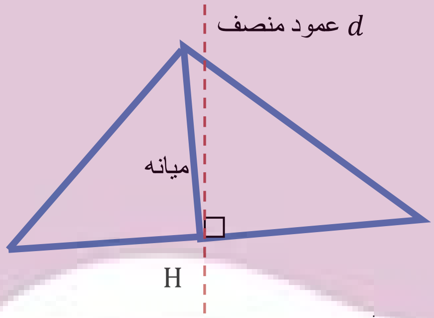
پ)در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ تر است.

حل)



ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق اند.

حل)



درس سوم

تشابه مثلث ها

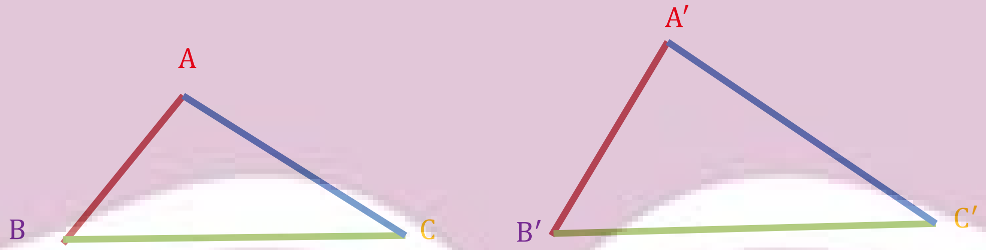
دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند؛ هر گاه دارای دوشرط زیر باشد:

۱.زوایای متناظر با هم برابر باشند.

۲.نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد

به عبارت دیگر:

$$\overset{\Delta}{\overbrace{ABC}} \sim \overset{\Delta}{\overbrace{A'B'C'}} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \widehat{A'}, \hat{B} = \widehat{B'}, \hat{C} = \widehat{C'} \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



در این صورت نسبت اضلاع متناظر