

ایران تووشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود **۱۵۶** به **۱۵۷**
- دانلود آزمون **۶** جزو **چهارم** چی و نجاشی
- دانلود خیام و مقاله آنلاین شی
- دانلود و مشاوره



IranTooshe.Ir



@irantoooshe



IranTooshe



فصل 1-درس 1: آشنایی با منطق ریاضی

فصل 1-درس 1



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

درس اول : آشنایی با منطق ریاضی

کار در کلاس صفحه ۲

نتیجه‌ی استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱- هیچ عدد مرکبی، عددی اول نیست.

۴ عددی مرکب است.

نتیجه: ۴ عددی اول نیست.

۲- اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد، آن‌گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم پیش‌بینی شده است.

نتیجه: فردا مدارس تعطیل است.

کار در کلاس صفحه ۳

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آن‌ها در صورت امکان تعیین کنید.

گزاره‌ای درست است.

ابران کشور آسیایی است.

گزاره‌ای درست است.

در پرتاپ یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، برابر با $\frac{1}{3}$ است.

گزاره نیست.

ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.

گزاره نیست.

آیا $2+3$ برابر با ۵ است؟

گزاره است زلی ارزش آن را نمی‌توان مشخص کرد.

توشه‌ای برای موفقیت

گزاره‌ای نادرست است.

هر معادله درجه دوم دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

گزاره‌ای نادرست است.

صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است.

ارزش‌های سه گزاره p , q و r , طبق جدول رو به رو $= 2^3 = 8$ حالت دارد. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

- به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، چند حالت دارد؟ $= 2^4 = 16$ حالت دارد.

- با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت، جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها چند حالت دارد؟ $= 2^n$ حالت دارد.

ایران توشه

فعالیت صفحه ۵

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:
توشه‌ای برای موفقیت

(الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{1}{6}$ است.

ب) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با 6 است. ($6 = 3x + 2y$)

۱- ارزش کدام یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟

ارزش هیچ یک را نمی‌توان تعیین کرد.

۲- اگر به جای متغیر در جمله‌ی « a عددی فرد است» قرار دهیم $3 = a$ در این صورت، ارزش آن را تعیین کنید.

اگر در آن $4 = a$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟

اگر $3 = a$ باشد، ارزش این گزاره درست است و اگر $4 = a$ باشد، ارزش این گزاره نادرست است.

کار در کلاس صفحه ۵

جاهای خالی را پر کنید:

اگر در جمله‌ی «ب» قرار دهیم $\{2, 4, 6\} = A$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

هر مجموعه‌ی سه عضوی بدون تکرار از بین اعداد ۱ تا ۶ را می‌توان قرار داد.

اگر در جمله‌ی «ب» قرار دهیم $\{1\} = A$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جمله‌ی ب مجموعه A را یک مجموعه‌ای غیر از مجموعه‌ی سه عضوی قرار دهیم ارزش گزاره نادرست می‌شود.

اگر در جمله‌ی «پ» قرار دهیم $\dots = x \text{ و } \dots = y$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x = \dots \text{ و } \dots = y$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

اگر در جمله پ، x و y را به این صورت قرار دهیم ارزش گزاره حاصل درست می‌شود:

مرتب دیگری به غیر از $(3, 0, 0)$ قرار دهیم ارزش گزاره نادرست می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۶

دامنه‌ی متغیر گزاره نمایه‌ای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آن‌ها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. ($D = Z$)

$$\{x = \forall k, k \in N\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-1}{15} \end{cases}$$

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

ب) $(D = Z) 15x^7 - 7x - 8 = 0$

با حل معادله درجه ۲ داریم:

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $\frac{1}{6} = P(\{x\})$.

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

فعالیت صفحه ۶

- ۱- هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟
- ۲- آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.
- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است.
 - از دو گزاره تشکیل شده، نادرست از دو گزاره تشکیل شده، درست.
 - اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است.
 - از یک گزاره تشکیل شده، نادرست از یک گزاره تشکیل شده، نادرست.
 - اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس.

فعالیت صفحه ۸

گزاره‌ی مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.»

- آیا ارزش این گزاره‌ی مرکب درست است؟ نادرست

- فرض کنید:

p: سوگند فارغ‌التحصیل شد.

q: پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

توضیحات برای موفقیت

- اگر ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ نادرست

- اگر ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ نادرست

- هرگاه ارزش دو گزاره‌ی p و q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ نادرست

- هرگاه ارزش دو گزاره‌ی p و q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ درست

بنابراین، ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره‌ی p و q درست باشند و در بقیه‌ی حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p \wedge q$ به صورت رو به رو است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس صفحه ۸

۱- جدول زیر را کامل کنید.

گزاره‌ی p	گزاره‌ی q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	د	د	د	د
۲ عددی اول نیست.	عدد ۷ مضرب ۵ نیست.	ن	د	د	ن
۲ عددی اول است.	عدد ۷ مضرب ۵ است.	ن	د	ن	د
۲ عددی اول نیست.	عدد ۷ مضرب ۵ است.	ن	ن	د	ن
(۷) اول است.	۲ عددی اول است.	ن	د	د	ن

۲. با کامل کردن جدول ارزش‌ها، ت Shank ذهید که گزاره‌های $(p \vee q) \sim$ و $\sim(p \wedge q)$ هم ارز منطقی هستند.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

همانطور که ملاحظه می‌کنید، همه‌ی حالت‌های ارزش دو گزاره‌ی $(p \vee q) \sim$ و $\sim(p \wedge q)$ بسان‌اند پس در منطق ریاضی به این همارزی قانون دمورکان گفته می‌شود.

۳- با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

کار در کلاس صفحه ۱۰

۱- با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر: نشان دهید که گزاره‌های $q \Rightarrow p \vee q$ و $\sim p \vee \sim q$ هم‌ارز منطقی‌اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

۲- گزاره‌ی « $p \Rightarrow q$ » عکس ترکیب شرطی « $q \Rightarrow p$ » و گزاره‌ی $\sim p \Rightarrow \sim q$ عکس نقیض ترکیب شرطی $q \Rightarrow p$ است. با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$ (یعنی، هر گزاره‌ی شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است).

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

۳- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پر کردن جاهای خالی نشان دهید:

$$(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

$$b) (p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

کار در کلاس صفحه ۱۲

۱- با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره‌ی مرکب « $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » را از جدول ارزش گزاره‌ی مرکب نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۲. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

الف) قوانین جابه‌جایی:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

ب) قوانین شرکت‌پذیری:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

پ) قوانین توزیع پذیری:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

عبارت با زبان ریاضی	عبارت با زبان طبیعی
$\forall x \in R; x^2 \geq 0$	برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$
$\forall a \in E; a = 2k (k \in Z)$	برای هر عدد زوج صحیح a داریم: $a = 2k$
$\exists p \in P; p = 2k (k \in Z)$	بعضی از اعداد اول زوج هستند.
$\exists x \in o; x \in P$	بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.

کار در کلاس صفحه ۱۵

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است.

نادرست، زیرا ۲ عددی اول است و زوج است.

ب) $\exists x \in N; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

خبر زیرا با حل معادله‌ی درجه‌ی ۲ داریم: $\begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ که جواب‌ها عدد طبیعی نیستند.

پ) $\exists x \in Z; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

درست، با توجه به جواب‌های معادله که عضوی از مجموعه‌ی اعداد صحیح هستند.

ت) هر عدد زوج، غیر اول است.

نادرست، زیرا ۲ عددی زوج است و اول است.

ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است برای موفقیت

بله، زیرا متغیرهای ترتیبی شدت و ضعف یک ویژگی را بیان می‌کنند.

ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است. درست

چ) در فضای نمونه Ω پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $0 < P(A) < 1$.نادرست، زیرا همواره $0 \leq P(A) \leq 1$ می‌باشد.

ح) طول هر پاره خط، عدد حقیقی است.

نادرست، زیرا طول پاره خط منفی نمی‌تواند باشد.

۱. از جملات زیر کدام یک گزاره است، ارزش گزاره ها را مشخص کنید.
- الف) خیام پژوه ایرانی است. **گزاره هست**- نادرست
- ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. **گزاره هست**- درست
- پ) $6 > 5 + 3$ **گزاره هست**- درست
- ت) تخته سیاه را پاک کنید. **گزاره نیست**
- ث) $\{1, 2, 3, 4\} \in \{1\}$ **گزاره هست**- درست
- ج) چه باران شدیدی می آید. **گزاره نیست**
- چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. **گزاره هست**- غلط
- ح) $\emptyset \in \mathbb{R}$ **گزاره هست**- غلط
- خ) $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ **گزاره هست**- غلط
- د) عدد $8 + 5^9$ عددی اول است. **گزاره نیست**
- ذ) به امید کامیابی شما. **گزاره نیست**
- ر) آمار، مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **گزاره هست**- درست
۲. در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره های حاصل دارای ارزش درست باشند.

ب) $5 + \frac{1}{7} \in \mathbb{Z}$

الف) $-7 \times 1 = -7$

ت) $\frac{1}{2} > 5 \times 2$

ب) $\frac{8 \times 1}{4} \in \{2, \frac{1}{2}\}$

ج) $1 \in \{1\}$

ث) $0 \times \sqrt{2} = 0$

ح) $7(-8 - 2) = 25$

ج) $20 - 5(-4 - 2) = 40$

۳. دامنه‌ی متغیر هر یک از گزاره نمایه‌ای زیر، مجموعه‌ی اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است. $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$

ب) « یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است. $[6, 11, 16, 21, \dots]$

پ) $-1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq -2$ $\{..., -4, -3, -2\}$

ت) $\{n(n+1) = 0 | n \in \mathbb{W}\}$

۴. نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) $4 > 3 \leq 3$

ب) ابوالوفایی بوزجانی، ریاضی دان ایرانی است. ابوالوفایی بوزجانی ریاضی دان نیست.

$$a \notin \{b, c, d\} \quad a \in \{b, c, d\}$$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست. ۲ عددی زوج نیست یا عدد π گویا نیست.

ث) خورشید به دور زمین می چرخد و سندج مرکز استان کردستان است. زمین به دور خورشید می چرخد و سندج مرکز استان کردستان تبیست

ج) اگر a زوج باشد. آنگاه $1+a$ فرد است. اگر a فرد باشد. آنگاه $1+a$ زوج است

۵. ارزش گزاره های مركب زیر را تعیین کنید.

ب) $(x^2 + 1 = 0) \vee (x^2 > 5)$ درست

الف) $(1+3=10) \wedge (4<3)$ نادرست

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد. آنگاه ۴ مربع کامل نیست.

ب) $(1 \in \{2, 3, 4\}) \vee (\frac{3}{4} \neq \frac{1}{3})$ نادرست

درست

ث) در متوازی الاضلاع مفروض دو قطر با هم برابرند. ج) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

درست

نادرست

ح) اگر $b \in \{a\}$ آن گاه $a = b$ و برعکس. درست

ج) $-3 < 2 < -2 \Leftrightarrow 2 < 3 < -2$ درست

۶. جدول زیر را کامل کنید.

ارزش $p \wedge q$	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \Rightarrow q$	گزاره p
د	د	د	د	عدد ۲ زوج است.
د	ن	ن	د	عدد ۳ فرد است
ن	د	ن	د	شہریور ۳۱ روز دارد
ن	د	د	د	عدد ۵ مضرب ۲ است
ن	د	د	ن	عدد ۷ اول است.
				$3 > 5$

۷. جدول ارزش های هر یک از گزاره های زیر را رسم کنید.

الف) $p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د

ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

$\sim p \wedge p$ (ب)

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	د	ن

$\sim p \vee p$ (پ)

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	د	د

$(p \vee q) \wedge \sim p$ (ت)

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
د	ن	ن	ن	ن
د	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د

$(p \vee q) \Leftrightarrow q$ (ث)

$p \vee q$	q	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	ن	ن
د	د	د
ن	ن	د
د	د	د

ایران نوین

توشه‌ای برای موقیت

$$\neg p \Leftrightarrow \neg q \text{ (ج)}$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Leftrightarrow \neg q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۸. با استفاده از جدول ارزش ها نشان دهید که:

$$p \Rightarrow p \equiv T \text{ (الف)}$$

p	p	$p \Rightarrow p$
د	د	د
ن	د	د
د	ن	ن
ن	ن	ن

$$p \vee F \equiv p \text{ (ب)}$$

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

p	f	$p \vee f$
د	د	د
د	ن	د
ن	ن	ن

$$p \wedge T \equiv p$$

p	T	$p \wedge T$
د	د	د $\equiv p$
ن	د	ن $\equiv p$
د	ن	ن
ن	ن	ن $\equiv p$

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	د

$$p \wedge (q \vee p) \equiv p$$

ایران توشه

p	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$
د	د	د
ن	د	ن
د	د	د
ن	ن	ن

$$p \vee (q \wedge p) \equiv p \text{ (ج)}$$

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	د $\equiv p$
د	ن	ن	د $\equiv p$
ن	د	ن	ن $\equiv p$
ن	ن	ن	ن $\equiv p$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r \text{ (ق)}$$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
د	د	ن	د	د	د	د

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \text{ (ح)}$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	د	د	د	ن	ن	د	ن	د	د
د	ن	د	ن	ن	د	ن	د	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د	ن	د	د	د

۹. ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و 2^n مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۰. گزاره های زیر را با استفاده از نمادهای \exists , \forall , \wedge , \vee , \neg بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است. $\forall x \in \mathbb{N}: (x = 2k) \vee (x = 2k - 1)$ - درست

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم: $\exists a \in \mathbb{W}: a^2 < 0$. $a^2 < 0$ - نادرست

پ) همه ای اعداد اول فرد اند. $\forall d \in \mathbb{P}: d = 2k - 1$ - نادرست

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $5 > 1 - 2x > 5$ $1 - 2x > 5$ - نادرست

- $\forall x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \wedge (x + \frac{1}{x} \geq 2)$ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ - نادرست

درست

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = x$ $x^2 = x$ - درست

۱۱. هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x \in A: x + 4 = 10$ - نادرست

ب) $\forall x \in A: x + 2 \leq 9$ درست

پ) $\exists x \in A: x + 3 \leq 4$ درست

ت) $\forall x \in A: x + 1 \geq 6$ نادرست

۱۲. ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\exists x \in \mathbb{R}: \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$ $\forall x \in \mathbb{R}: \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ - قادرست

ب) $\exists n \in \mathbb{N}: (2^{n^n} + 1) \in \mathbb{P}$ $\forall n \in \mathbb{N}: (2^{n^n} + 1) \in \mathbb{P}$ - درست

پ) $\exists x \in (-\infty, \infty): x - \frac{1}{x} \geq -4$ $\forall x \in (-\infty, \infty): x - \frac{1}{x} \leq -4$ - نادرست

ت) $\forall y \in \mathbb{R}: \frac{y-3}{5} = 0$ $\exists y \in \mathbb{R}: \frac{y-3}{5} = 0$

ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

فصل 1-درس 2: زیر مجموعه

فصل 1-درس 2



ایران تووش

توشه‌ای برای موفقیت

۱- فرض کنید $\{a, b\} \subseteq A$ درستی یا نادرستی هر یک از عضوهای زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

نادرست. زیرا در مجموعه A عضوی به این شکل $\{a\}$ نداریم و در واقع $a \in A$ است. الف) $\{a\} \in A$

درست. زیرا تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است. ب) $\emptyset \in A$

درست. $\{a\} \subseteq A$ ب)

نادرست. زیرا $h \in A$ است و $\{h\} \subseteq A$ است. ت) $b \subseteq A$

درست. $a \in A$ ت)

درست. زیرا هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است. ج) $\{a, b\} \subseteq A$

۲- کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی‌اند؟

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$2^3 \neq 9$$

الف) $\{x \in Z \mid x^2 = 9, 2x = 4\}$: نهی

$$x + \lambda = \lambda$$

$$x = \dots, 0, \dots \in Z$$

ب) $\{x \in Z \mid x + \lambda = \lambda\}$: ناتهی

پ) $\{x \in Z \mid x \neq x\}$: ناتهی، زیرا همواره $x = x$ است.

$$x^r = y^r \Rightarrow x = y$$

ت) $\{x \in N \mid x^r = y^r\}$: ناتهی

$$A = \{x \in Z \mid |x| \leq 2\}$$

مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.
ل老子

$$A = \{x \in Z \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = \{m \in Z \mid m^r = m\}$$

$$B = \{0, 1\}$$

$$C = \{k \in R \mid k^r - 1 = 0\}$$

$$C = \{1\}$$

$$D = \{a \in S \mid \text{فضای نمونه پرتاب یک تاس است}\}$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

۴- با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$B \in A$: درست

$B \subseteq A$: سُتْ

$$A \cap D \subseteq C : \text{نادرست}$$

$$B \subseteq C \cup A$$

$C \subseteq A$: true , false

$$B - D \subseteq A : \Box_{m+2}$$

۲۰ صفحه

مجموعه $A = \{a, b, c\}$ نظریّه

۱- همهی زیر مجموعه های A را بتوانید.

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

۲- با دو رقم و ۱ می توانیم زیرمجموعه $\{b, c\}$ از مجموعه A را با کد سه رقمی ۱۱ مشخص کنیم؛ چون $a \notin B$ متناظر با آن کد و $b \in B$ و $c \in B$ متناظر با آن ها کد ۱ را در نظر گرفته ایم. همچنین زیرمجموعه $\{a\} \subseteq A$ را با کد ۱۰۰ مشخص کنیم. اکنون شما بقیه، $\{b, c\}$ مجموعه های A را با کدهای سه رقمی نظر کنید.

<http://www.ijerph.com> | <http://dx.doi.org/10.3390/ijerph10093700>

۳- با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد

زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

$$٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$$

۴- فرض کنید $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = A$. با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که جند زیر مجموعه دارد.

رقم چهارم رقم سوم رقم دوم رقم اول

$$\textcircled{2} \times \textcircled{2} \times \textcircled{2} \times \textcircled{2} = 16$$

۵- اگر $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ در این صورت، با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول رقم دوم رقم سوم رقم ایم رقم n ام

$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times}_{n \text{ تا } 2 \text{ داریم}} = 16 \Rightarrow 2^n = A$

فعالیت صفحه ۲۱

۱- مجموعه $\{a, b, c\}$ را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه های A به غیر از \emptyset را بنویسید.

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

۲. از بین زیرمجموعه های نانهی A که در بالا نوشتیم، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با A شود.

$$\{a\}, \{b, c\} ; \quad \{b\}, \{a, c\} ; \quad \{c\}, \{a, b\}$$

۳. همه جواب های ممکن برای قسمت قبل را به دست آورید.

$$\{A\}, \{B\}, \{C\}$$

۴. آیا می توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با A شود؟

ایران نوشه

توشه ای برای موفقیت

کار در کلاس صفحه ۲۱

مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از حالت های زیر یک افزای برای A محسوب می شود؟

$$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} - 1$$

$$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6, 8\} - 2$$

$$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6, 8\} - 3$$

۳. چون سه مجموعه هیچ اشتراکی با هم ندارند و اجتماع آنها مجموعه A را تشکیل می دهد

۱- برای مجموعه‌های A و B با مرجع \cup ثابت کنید که $A \subseteq A \cup B$

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$$

بنابراین داریم:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید.

باید ثابت کنیم به ازای هر عضو از مجموعه A ، آن عضو حتماً در مجموعه $A \cup B$ نیز هست.

هر عضو که در مجموعه A در نظر بگیریم: $x \in A$ ، قطعاً در مجموعه‌ی مرجع \cup است؛ بنابراین این عضو یا در مجموعه A است یا در مجموعه B است. بنابراین $x \in A \cup B$ و می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq A \cup B$.

۲- فرض کنیم A و C و B و D چهار مجموعه با مرجع \cup باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.

اثبات: جاهای خالی را پر کنید:

$$\forall x; [x \in (A \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B & (A \subseteq B \text{ زیرا}) \\ \vee & \\ x \in C \Rightarrow x \in D & (C \subseteq D \text{ زیرا}) \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow x \in B \cup D$$

بنابراین داریم:

$$\forall x; [x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$$

۳- فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع \cup باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آن‌گاه $(A \cup B) \subseteq C$ راهنمایی: از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

توضیعی برازی موقوفیت

$$\forall x; [x \in (A \cup B)] \Rightarrow \begin{cases} \vee \\ x \in A \Rightarrow x \in C & \text{جون } A \subseteq C \\ x \in B \Rightarrow x \in C & B \subseteq C \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in C \quad \forall x; [x \in (A \cup B)] \Rightarrow x \in C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$$

فرض کنید $\{1, 2\} = A$. کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

(الف) $\{x \in Q \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

بنابراین این مجموعه با مجموعه A مساوی است.

(ب) $\{x \in R \mid 1 \leq x \leq 2\}$

این مجموعه با مجموعه A مساوی نیست زیرا بین ۱ و ۲ بی شمار عدد حقیقی وجود دارد.

(پ) $\{x \in Q \mid 2x^2 + 3x + 1 = 0\}$

این مجموعه با مجموعه A مساوی نیست زیرا یک عضو مجموعه A هست ولی عضو این مجموعه نیست:

$$2(1^2) + 3(1) + 1 \neq 0$$

(ت) $\{x \in N \mid 1 \leq x \leq 2\}$

این مجموعه با مجموعه A مساوی است زیرا بین ۱ و ۲ هیچ عدد طبیعی وجود ندارد و بنابراین اعضای این مجموعه:

$\{1, 2\}$ است که با مجموعه A مساوی می‌باشد.

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

۱. مجموعه های زیر را که شامل شکل های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید:

$$A = \{x \mid x \text{ یک چهارضلعی است}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ یک لوزی است}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ یک مستطیل است}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ یک مربع است}\}$$

کدام یک از روابط زیر درست است؟ (با ذکر دلیل)

الف) $D \subseteq C$ درست است زیرا مربع حالت خاصی از لوزی است.

ب) $B \subseteq D$ نادرست است زیرا نمی توان ادعا کرد که همه ممستطیلها مربع هستند.

پ) $A \subseteq B$ نادرست است زیرا نمی توان ادعا کرد که همه چهارضلعی های مستطیل هستند، مانند ذوزنقه.

ت) $D \subseteq A$ درست است زیرا مربع نوعی چهارضلعی است.

۲. فرض کنید $E = \{3, 5\}$ و $D = \{3, 4, 5\}$ و $C = \{1, 2, 5, 7, 9\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ و $A = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ در

هریک از حالت های زیر مشخص کنید: X می تواند کدام یک از این مجموعه ها باشد:

الف) X و B عضو مشترکی ندارند. $E \cap C$

ب) $D \subseteq B$ و $X \subseteq A$

پ) $E, D \subseteq X$ و $X \subseteq D$

ت) $X \subseteq A$ و $X \subseteq C$ چنین مجموعه ای وجود ندارد.

۳. درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{\emptyset\} = \emptyset$ نادرست است زیرا $\{\emptyset\}$ دارای یک عضو است ولی \emptyset عضوی ندارد.

ب) $\emptyset \subseteq \emptyset$ درست است زیرا \emptyset زیرمجموعه ای همه مجموعه هاست.

پ) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ نادرست است زیرا تنها عضو مجموعه $\{\emptyset\}$ است.

ت) درست است زیرا $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$ دقیقاً یکی از اعضاء مجموعه است.

۴. کدام یک از مجموعه های زیر باهم مساوی اند؟

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\} = \{-1, 0, 1\} \quad -2 < m < 2$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^T = x\} = \{-1, +1, 0\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^T \leq 2y\} = \{0, 1, 2\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^T \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^T + 2m = 3m^T\} = \{0, 1, 2\}$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \quad m(m-2) = 0 \quad m = 0 \quad (m-1)(m+1) = 0 \quad m = 1 \quad m = -1$$

$$x^2 - x = 0 \quad x(x-1) = 0 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$y^2 - 2y \leq 0 \quad y(y-2) \leq 0$$

	0	2	
+	0	-	0 +

$$A = B = D, \quad C = E$$

۵. مثال هایی از مجموعه های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم های زیر درست باشند.

$$A \in B \text{ و } B \in C \text{ و } A \notin C \quad (\text{الف})$$

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{\{1, 2\}, 1\} \quad C = \{\{\{1, 2\}, 1\}, 3\}$$

$$A \in B \text{ و } B \in C \text{ و } A \in C \quad (\text{ب})$$

$$A = \{1\} \quad B = \{\{1\}, 2\} \quad C = \{\{\{1\}, 2\}, \{1\}, 4, 5\}$$

$$A \in B \text{ و } A \subseteq B \quad (\text{پ})$$

$$A = \{4\} \quad B = \{4, 5, 6\}$$

۶. اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن 284 واحد کم می شود، مجموعه A چند زیر مجموعه دارد؟

$$2^x - 284 = 2^{x-2} \Rightarrow 2^x - 284 = 2^x \div 2^2 \Rightarrow 2^x - 284 = 2^x \div 4$$

$$2^x - \frac{2^x}{4} = 284 \Rightarrow 2^x \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 284 \Rightarrow 2^x = 284 \times \frac{1}{3} = 94 = 2^6 \Rightarrow x = 6$$

اگر در این صورت مقادیر x و y را باید.

$$x + 4y = 6$$

$$x - y = 4 \quad \begin{cases} x + 4y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow 5y = 2 \quad y = \frac{2}{5} \quad \frac{13}{3} - y = 4 \quad \frac{13}{3} - 4 = y \quad \frac{1}{3} = y$$

۷. ثابت کنید برای مجموعه های A و B با مرجع U داریم:

$$\forall x; [x \in (A - B)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A \Rightarrow A - B \subseteq A$$

۸. فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آن گاه:

$$A \cup C \subseteq B \cup C \quad (\text{الف})$$

$$\forall x; [x \in A \cup C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in B \cup C$$

$$A \cap C \subseteq B \cap C \quad (\text{ب})$$

$$\forall x; [x \in A \cap C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in C \cap B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$$

۱۰. مجموعه های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر $C \subseteq D$ و $A \subseteq B$ آن‌گاه:

$$A \cap C \subseteq B \cap D \quad (\text{الف})$$

$$\forall x; [x \in A \cap C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \xrightarrow{A \subseteq B, C \subseteq D} \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow (A \cap C) \subseteq B \cap D$$

$$A \cap C \subseteq B \cup D \quad (\text{ب})$$

$$\forall x; [x \in A \cap C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \xrightarrow{A \subseteq B, C \subseteq D} \begin{cases} x \in B \\ x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \cap D \xrightarrow{\text{بنابراین}} B \cap D \subseteq B \cup D$$

۱۱. الف) فرض کنید: $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید:

چون ترسی زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است بنابراین $\emptyset \subseteq A$ و از طرفی طبق فرض $A \subseteq \emptyset$ در نتیجه

ب) فرض کنید: $U \subseteq A$ ثابت کنید: $A = U$

چون هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی مرجع است بنابراین $U \subseteq A \subseteq U$ و طبق فرض در نتیجه

۱۲. هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید:

$$B - A = B \quad (\text{الف})$$

$$\forall x; x \in B - A \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B \Rightarrow B - A \subseteq B \quad (1)$$

$$\forall x; x \in B \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B - A \Rightarrow B \subseteq B - A \quad (2)$$

از (1) و (2) داریم:

$$B - A = B$$

توشه‌ای برای موفقیت

$$A - B = A \quad (\text{ب})$$

$$\forall x; x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \Rightarrow A - B \subseteq A \quad (1)$$

$$\forall x; x \in A \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A \subseteq A - B \quad (2)$$

از (1) و (2) داریم:

$$A - B = A$$

۱۳. فرض کنید: $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ گدام یک از حالت های زیر بک افزار برای X محسوب می شود.
- الف) $\{a, c, e\}$ و $\{b\}$ و $\{d, g\}$ افزار نیست زیرا اجتماع مجموعه ها برابر با X نیست.
- ب) $\{a, e, g\}$ و $\{c, d\}$ و $\{b, e, f\}$ افزار نیست زیرا مجموعه اول و آخر با هم اشتراک دارند.
- پ) $\{a, b, e, g\}$ و $\{c\}$ و $\{d, f\}$ افزار است.
- ت) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ افزار نیست زیرا افزار تنها از یک مجموعه تشکیل نمی شود.
- ث) $\{e\}$ و $\{f, g\}$ و $\{b, c\}$ و $\{d\}$ و $\{a\}$ افزار است.



ایران توشی

توشه‌ای برای موفقیت

فصل 1-درس 3-قوانين اعمال مجموعه ها(جبر مجموعه ها)

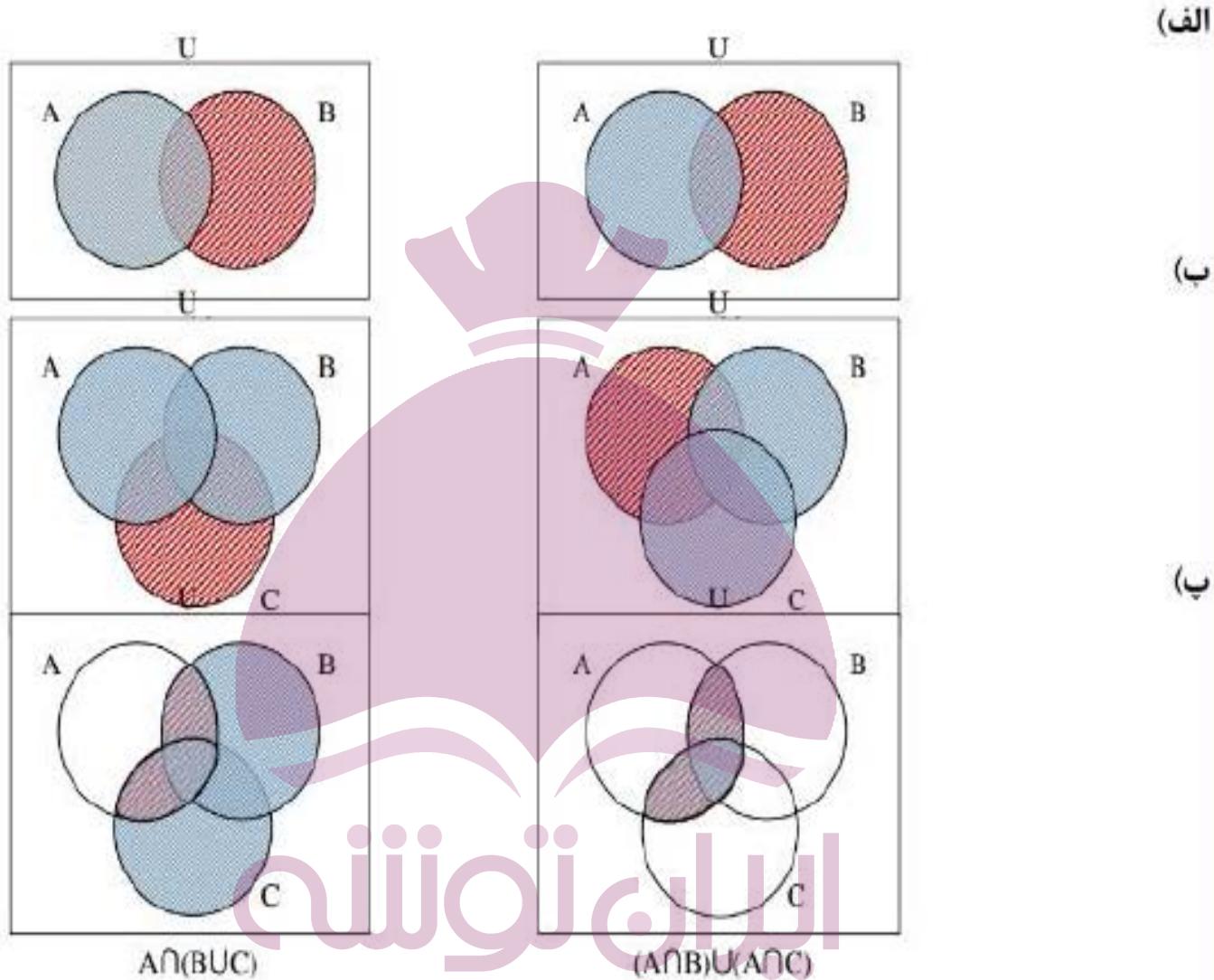
فصل 1-درس 3



ایران توše

توشه‌ای برای موفقیت

۱- در هر یک از حالت های زیر مجموعه های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (د) از دو رنگ استفاده کنید).



توشهای برای موفقیت

۲- با فرض اینکه $C = \{1, 2, 5, 6\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ و $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ در این صورت، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

(الف) $A \cap B = B \cap A$

$$A \cap B = \{3\} , \quad B \cap A = \{3\}$$

$$\{3 \in A \cap B \Rightarrow 3 \in A \wedge 3 \in B \Rightarrow 3 \in B \cap A \Rightarrow A \cap B \subseteq B \cap A\}$$

$$\{3 \in B \cap A \Rightarrow 3 \in A \wedge 3 \in B \Rightarrow 3 \in A \cap B \Rightarrow B \cap A \subseteq A \cap B\}$$

$$A \cap B \subseteq B \cap A$$

$$\text{ب) } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$B \cap C = \{5\} ; \quad A \cap B = \{3\} ; \quad A \cap (B \cap C) = \emptyset ; \quad (A \cap B) \cap C = \emptyset$$

با توجه به اینکه دو مجموعه‌ی تهی هستند و هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است بنابراین تهی نیز زیرمجموعه‌ی تهی است و داریم:

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \subseteq A \cap (B \cup C) \end{cases} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\text{پ) } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} , \quad A \cap B = \{3\} , \quad A \cap C = \{1, 2\}$$

$$, \quad A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\} , \quad (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3\}$$

$$\forall x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\} \wedge x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Rightarrow x \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow x \in \{3\} \vee x \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{۱})$$

$$\forall x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\} \wedge x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \quad (\text{۲})$$

$$(\text{۱}), (\text{۲}) \Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ایران توش

کار در کلاس صفحه ۲۸

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جایی، شرکت‌پذیری و توزیع پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای «ل» و « \cap » اثبات کنیم. شما این اثبات‌ها را کامل کنید:

۱- ثابت کنید، برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B از مجموعه‌ی مرجع U ، داریم:

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

تعریف اجتماع

$$= \{x \in U \mid x \in B \vee x \in A\}$$

«جا به جایی» /

$$= B \cup A$$

۲- ثابت کنید، برای سه مجموعه‌ی دلخواه C, B, A از مجموعه‌ی مرجع U ، داریم:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$\begin{aligned}
 A \cup (B \cup C) &= \{x \in U \mid x \in A \vee x \in (B \cup C)\} && \text{تعريف اجتماع} \\
 &= \{x \in U \mid x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\} && \text{تعريف اجتماع} \\
 &= \{x \in U \mid (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\} && \text{شرکت پذیری «}\vee\text{»} \\
 &= \{x \in U \mid x \in (A \cup B) \vee x \in C\} && \text{تعريف اجتماع} \\
 &= (A \cup B) \cup C
 \end{aligned}$$

۳- با استفاده از روش عضوگیری دلخواه، خاصیت توزیع پذیری «ل» نسبت به « \cap » را ثابت کنید.

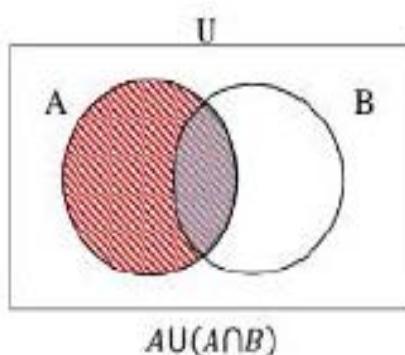
$$\begin{aligned}
 A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) && \text{يعنى ثابت کنيد:} \\
 \forall x; [x \in A \cup (B \cap C)] &\Rightarrow [x \in A \vee (x \in B \cap C)] && \text{تعريف اجتماع} \\
 &\Rightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)] && \text{تعريف اشتراك} \\
 &\Rightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)] && \text{توزيع پذيری «}\vee\text{» نسبت به «}\wedge\text{»} \\
 &\Rightarrow [x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)] && \text{تعريف «ل»} \\
 &\Rightarrow x \in [(A \cup B) \cap x \in (A \cup C)] && \text{تعريف اشتراك} \\
 &\Rightarrow A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)
 \end{aligned}$$

کار در کلاس صفحه ۳۰

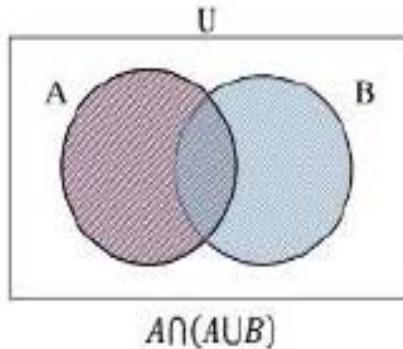
(قوانين جذب یا همپوشانی) اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، می‌خواهیم تساوی‌های زیر را که به قوانین جذب معروف‌اند، با استفاده از قضیه‌ی قبل و تعاریف اجتماع و اشتراك اثبات کنیم:

ابتدا با استفاده از نمودار ون و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:

(الف) $A \cup (A \cap B) = A$



$$\text{ب) } A \cap (A \cup B) = A$$



در هر دو قسمت جواب مجموعه‌ی A می‌شود.

در قضیه‌ی قبل ملاحظه کردید که اگر $C \cap D = C$ و $C \cup D = D$ در این صورت $C \subseteq D$ است.

$$\text{قضیه} \quad (A \cap B) \subseteq A \Rightarrow A \cup (A \cap B) = A$$

$$\text{قضیه} \quad A \subseteq (A \cup B) \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A$$

روش دیگری برای اثبات قوانین جذب نیز وجود دارد که شما با پر کردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

$$\text{الف) } A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B)$$

$$= A \cap (U \cup B)$$

توزيع پذیری

$$= A \cap U = A$$

$$\text{ب) } A \cap (A \cup B) = (A \cup A) \cap (A \cup B)$$

$$= A \cup (A \cap B)$$

توزيع پذیری برای موفقیت

$$= A \cup A = A$$

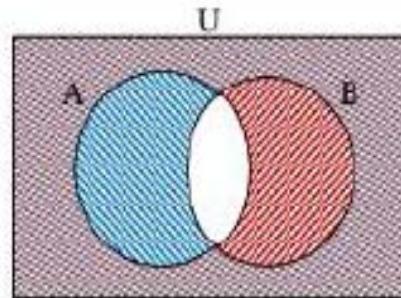
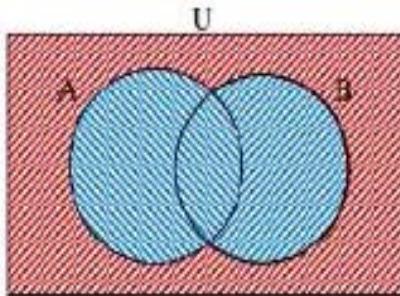
مثال صفحه ۳۱

عبارت‌های زیر را ساده کنید:

$$\text{الف) } (A \cap B) \cup ((B \cup C) \cap [(B \cup A) \cap B])$$

$$(A \cap B) \cup ((B \cup C) \cap [(B \cup A) \cap B]) = (A \cap B) \cup [(B \cup C) \cap B] = (A \cap B) \cup B = B$$

۱- فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعه مرجع U باشند. روی شکل سمت چپ، $(A \cap B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A' \cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



جواب: فسمت قرمزرنگ

جواب: فسمت که هم قرمزرنگ و هم آبی رنگ است.

نتیجه می‌گیریم این دو مجموعه باهم مساوی است.

۲- اگر فرض کنیم: $\{1, 2, \dots, 10\}$ هریک از مجموعه‌های $B = \{3, 4, 6, 8\}$ و $A = \{2, 3, 5, 8\}$ و $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ را تشکیل داده و باهم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A \cap B = \{3, 8\} \rightarrow (A \cap B)' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$$

$$A' = \{1, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}, B' = \{1, 2, 5, 7, 9, 10\}$$

$$\Rightarrow (A' \cup B') = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \forall x; [x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B] \\ \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Rightarrow x \in (A' \cap B') \end{aligned} \Rightarrow (A \cup B)' \subseteq (A' \cap B') \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \forall x; [x \in (A' \cap B') \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Rightarrow x \in A \wedge x \in B] \\ x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)' \Rightarrow (A' \cap B') \subseteq (A \cup B)' \end{aligned} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A' \cap B' = (A \cup B)'$$

ایران نوشت

تولید محتوا

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $(A - B)' = (A' \cup B)$

$$(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup (B')' = A \cup B$$

ب) $(A - B) - C = (A - C) - B$

$$(A - B) - C = (A \cap B') \cap C' = (A \cap C') \cap B' = (A - C) - B$$

پ) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cup C') = (A \cap B') \cup (A \cap C') = (A - B) \cup (A - C)$$

با استفاده از جبر مجموعه‌های درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $A - (B \cup C)(A - B) \cap (A - C)$

$$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B') \cap (A \cap C')$$

تبديل تفاضل به اشتراک

$$= [(A \cap B') \cap A] \cap C'$$

شرکت پذیری

$$= [A' \cap (A \cap B')] \cap C'$$

جا به جایی

$$= [(A \cap A) \cap B'] \cap C'$$

شرکت پذیری

$$= (A \cap B') \cap C'$$

$A \cap A = A$

$$= A \cap (B' \cap C')$$

شرکت پذیری

$$= A - (B' \cap C')$$

تبديل اشتراک به تفاضل

$$= A - (B \cup C)$$

قانون دمورگان

$$\text{ب) } A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$	تبديل تفاضل به اشتراك
$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$	قانون دمورگان
$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$	توزيع پذيری
$= [(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')]$	قوانين جا به جاي و توزيع پذيری
$= (\emptyset \cap B) \cup [A \cap (B - C)]$	تبديل اشتراك به تفاضل و تعريف متمم
$= \emptyset \cup [A \cap (B - C)]$	اشتراك هر مجموعه اي با تهی، تهی می شود.
$= A \cap (B - C)$	اجتماع هر مجموعه اي با تهی، خود مجموعه می شود.

$$\text{پ) } A - (B - C) = (A - B) - C$$

با کمی تأمل پی می بردیم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر، دچار مشکل می شویم و این کار انجام نمی شود. ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{3, 4, 5\} \quad C = \{5, 6, 7\} \quad U = \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$A - (B - C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{3, 4\} = \{1, 2, 5\}$$

$$(A - B) - C = \{1, 2\} - \{5, 6, 7\} = \{1, 2\}$$

$$\Rightarrow \{1, 2, 5\} \neq \{1, 2\} \Rightarrow A - (B - C) \neq (A - B) - C$$

$$\text{ن) } A = B \quad (\text{آنگاه } A \cup B = (A \cap B))$$

وقتی می نویسیم: $C = D$ ، یعنی C و D یک مجموعه‌اند. با دونام و لذا وقتی بین مجموعه‌ها تساوی به کار می بردیم.

می توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع، یا اشتراك بگیریم. یعنی از اینکه $C = D$ نتیجه می شود:

$$A \cap C = A \cap D \quad \text{و} \quad A \cup C = A \cup D$$

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A \cap (A \cap B)$$

$$\xrightarrow{\text{قانون جذب و تعريف اشتراك}} A = (A \cap B) \xrightarrow{\text{قضيه}} A \subseteq B \quad (1)$$

$$(A \cup B) = (A \cap B) \Rightarrow A \cup (A \cup B) = A \cup (A \cap B)$$

$$\xrightarrow{\text{قانون جذب و تعريف اجتماع}} (A \cup B) = A \xrightarrow{\text{قضيه}} B \subseteq A \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A = B$$

۱- اگر $\{1, 2, \dots, 10\}$ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $(A \cap B') \cup (A \cap B)$

$$B' = \{1, 2, 3, 4, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$(A \cap B') = \{1, 2, 3, 4\} \quad , \quad (A \cap B) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(A \cap B') \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = U$$

$$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A$$

با استفاده از جبر مجموعه‌ها :

ب) $(A - B) \cup ((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A'])$

$$A - B = \{1, 2, 3, 4\} \quad , \quad (A \cap B') = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B - A = \{11, 12, 13, 14, 15\} \quad , \quad A' = \{11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$(A - B) \cup ((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A'])$$

$$= \{1, 2, 3, 4\} \cup \underbrace{(\{1, 2, 3, 4\} \cap \{11, 12, 13, 14, 15\})}_{\emptyset} \cup \{11, 12, 13, 14, 15\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4\}$$

ایران توش

با استفاده از جبر مجموعه‌ها :

$$(A - B) \cup ((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A'])$$

$$(B - A) \cup A' = (B - A) \cap (A')' \quad , \quad (A - B) \cup ((A \cap B') \cap \emptyset)$$

$$= (B - A) \cap A = (B \cap A') \cap A \quad \Rightarrow \quad (A - B) \cup (\emptyset) = A - B$$

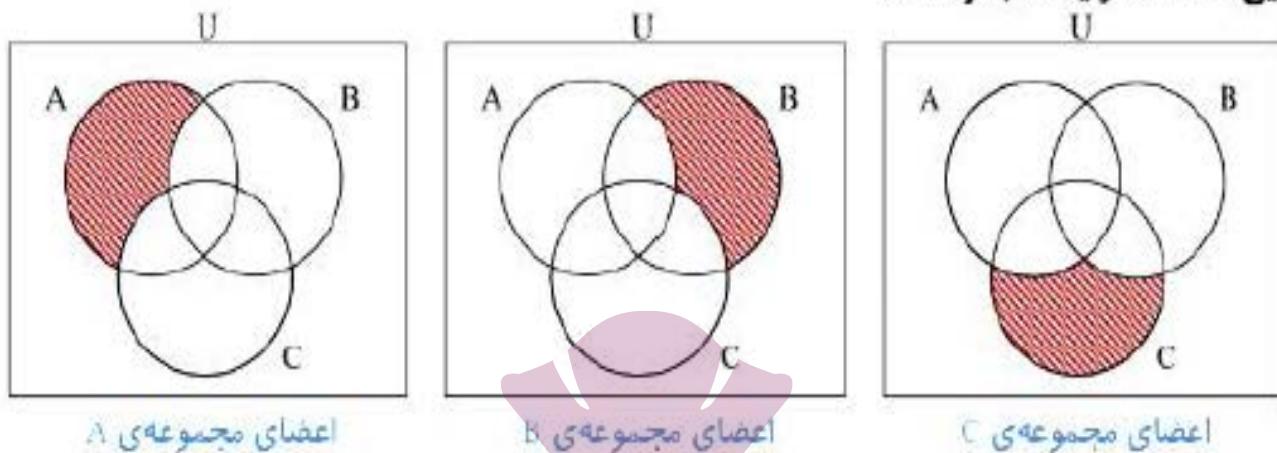
$$= B \cap (A' \cap A) \quad , \quad = A \cap B'$$

$$= B \cap \emptyset \quad , \quad = \{1, 2, 3, 4\}$$

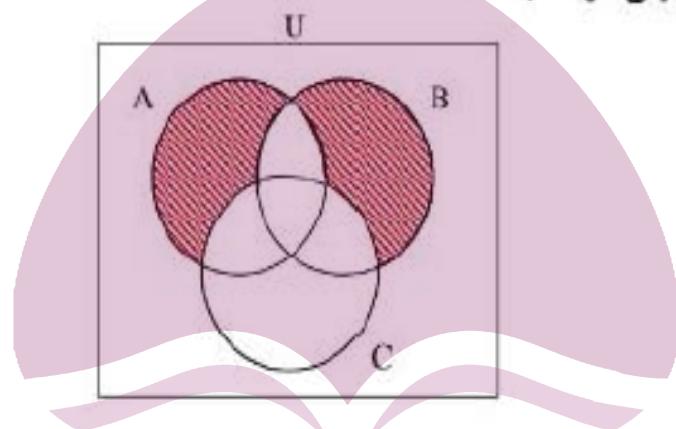
$$= \emptyset$$

۲- با توجه به نمودار ون که در رویه رو رسم شده است، ماقنند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده ایم، هاشور بزنید.

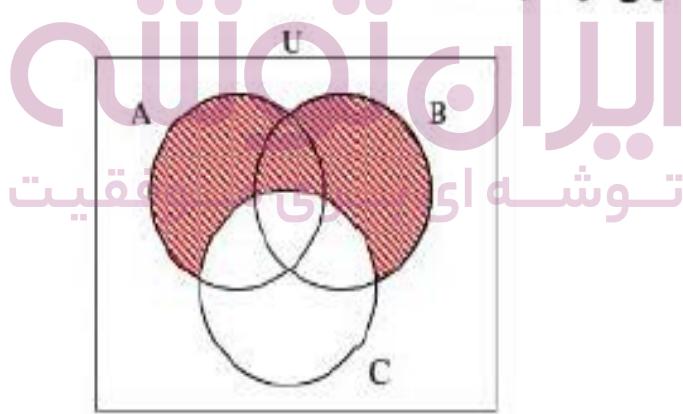
ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه‌اند.



پ) اعضایی که در A و B باشند، ولی در C نباشند.



ت) اعضایی که در A یا B باشند، ولی در C نباشند.



مثال صفحه ۳۵

اگر $\{2, 4, 6\}$ و $B = \{4, 5\}$ در این صورت مجموعه‌های $B \times A$ و $A \times B$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$$A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (4, 4), (4, 5), (6, 4), (6, 5)\}$$

$$B \times A = \{(4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$$

در مثال قبل دیدیم که در مجموعه $A \times B$ هر عضو $A \times B$ دو زوج مرتب تولید کرد و در کل شش زوج مرتب به وجود آمد، حال اگر $n(B) = k$ و $n(A) = m$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دگارنی و حاصل ضرب، نشان دهید،

$$n(A \times B) = mk$$

با توجه به اینکه هر عضو مجموعه A به تعداد اعضاً مجموعه B زوج مرتب تولید می‌کند و مجموعه A عضو $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ دارد، داریم:

$$a_1 = \text{عضو اول مجموعه } A$$

$$a_2 = \text{عضو دوم مجموعه } A$$

⋮

$$a_m = \text{عضو } m\text{-ام مجموعه } A$$

و بنابر اصل ضرب داریم:

$$\Rightarrow n(A \times B) = mk$$

فعالیت صفحه ۳۶

۱. اگر $A = \{1, -1, 2, -2\}$ و $B = \{+, -, 3, 4\}$ ، ابتدا مجموعه‌های $(A \times B)$ و $(B \times A)$ را تشکیل دهید و سپس نمودار مختصاتی هریک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید).

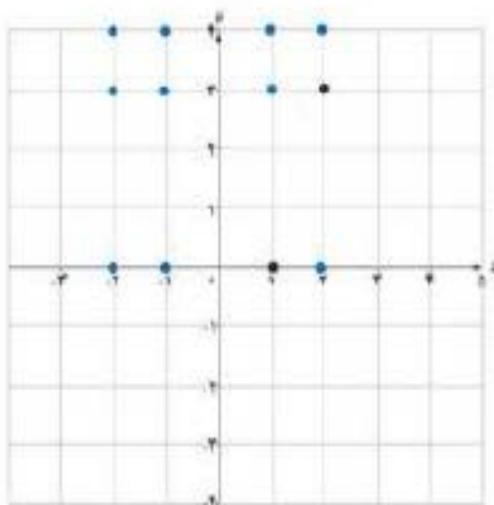
$$A \times B =$$

$$\{(1, +), (1, -), (1, 3), (1, 4), (-1, +), (-1, -), (-1, 3), (-1, 4), (2, +), (2, -), (2, 3), (2, 4), (-2, +), (-2, -), (-2, 3), (-2, 4)\}$$

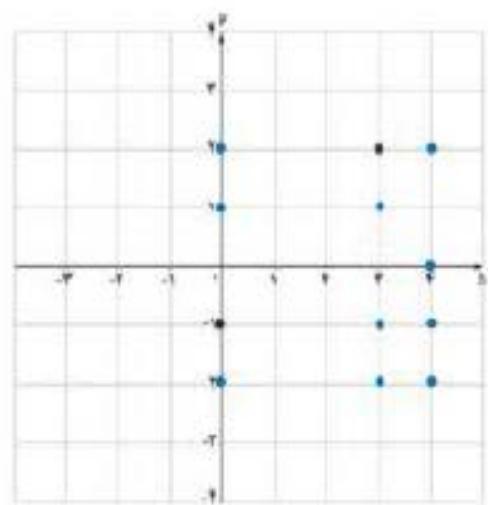
$$B \times A =$$

$$\{(+, 1), (+, -1), (+, 2), (+, -2), (+, 3), (+, -3), (+, 4), (+, -4), (-, 1), (-, -1), (-, 2), (-, -2), (-, 3), (-, -3), (-, 4), (-, -4)\}$$

ابران توشه



نمودار مختصاتی $A \times B$



نمودار مختصاتی $B \times A$

۱- با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جا به جایی، شرکت پذیری و توزیع پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره ها، هریک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

(الف) $A \cap B = B \cap A$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x \in U | x \in B \wedge x \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

(ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \{x \in U | x \in A \wedge x \in B \cap C\} \\ &= \{x \in U | x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\} \\ &= \{x \in U | (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\} \\ &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

(پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= x \in A \cap (B \cup C) \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \cup C) \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ &\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

به طور مشابه ثابت می شود $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند.

۲- درستی هریک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

(الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') \Rightarrow \left(A \cap \left(\overline{B \cup B'} \right) \right) = A$$

(ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

$(A' \cap A) \cap (B' \cap A) = \emptyset$

$$\text{پ) } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap A) \cap (B \cap C) \\ &= A \cap (A \cap (B \cap C)) \\ &= A \cap ((A \cap B) \cap C) \\ &= A \cap (C \cap (A \cap B)) \\ &= (A \cap C) \cap (A \cap B) \\ &= (A \cap B) \cap (A \cap C) \end{aligned}$$

$$\text{پ) } A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup A) \cup (B \cup C) \\ &= A \cup (A \cup (B \cup C)) \\ &= A \cup ((A \cup B) \cup C) \\ &= A \cup (C \cup (A \cup B)) \\ &= (A \cup C) \cup (A \cup B) \\ &= (A \cup B) \cup (A \cup C) \end{aligned}$$

۳- هر یک از عبارت های زیر را ساده کنید:

$$\text{الف) } (A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$$

$$(B \cap A') \cup \underbrace{[(B \cap A) \cap B']}_{B \cap A} \cap (B \cup A) = (B - A) \cup (B \cup A) \xrightarrow{(B-A) \subseteq (B \cup A)} = (B \cup A)$$

$$\text{ب) } (A \cup B) - B$$

توشه‌ای برای موفقیت

$$(A \cup B) \cap B' = \left(\overbrace{A \cap B'}^{A-B} \right) \cup \left(\overbrace{B \cap B'}^{\emptyset} \right) = (A - B) = (B \cap A') \cup (B \cap A) = B \cap (A' \cup A) = B$$

$$\text{پ) } [(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$$

$$\begin{aligned} [(A \cup B) \cap A'] \cup (A \cap B) &= \left[\left(\underbrace{A \cap A'}_0 \right) \cup (B \cap A') \right] \cup (A \cap B) = (B \cap A) \cup (A \cap B) \\ &= B \cap \left(\underbrace{A \cup A}_U \right) = B \end{aligned}$$

۴- درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

$(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow (A \cup A') \subseteq X \Rightarrow U \subseteq X$

از طرفی می دانیم همواره $X \subseteq U$ بنا بر این است.

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap \left(\underbrace{B' \cup B}_{\varnothing} \right) = A$

پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap (C' \cap C')$

$= (A \cap B) \cap \varnothing = (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) \cap (A' \cap B')$

$= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B'] = \left[\left(\underbrace{A \cap A'}_{\varnothing} \right) \cup \left(\underbrace{B \cap A'}_{B-A} \right) \right] \cup \left[\left(\underbrace{A \cap B'}_{A-B} \right) \cup \left(\underbrace{B \cap B'}_{\varnothing} \right) \right]$

$= (B - A) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ث) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \varnothing$

$(A \cup B) \cap (A \cap B)' = \varnothing$

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

ج) $(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C) \Rightarrow B = C$

$B = B \cap (A \cup B) \xrightarrow[A \cap B = A \cap C]{A \cup B = A \cup C} = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C)$

$\xrightarrow[A \cap B = A \cap C]{A \cup B = A \cup C} = (A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cap (A \cup B) \xrightarrow[A \cup B = A \cup C]{A \cap B = A \cap C} = C \cap (A \cup C) = C$

۵-اگر $\{z + 5, z + 4, z + 1\} = A \times B$ در این صورت، با فرض $B = \{x + 2, x + 4, x + 5\}$ بیشترین مقدار برای $(x + y + z)$ را بباید.

می‌دانیم اگر $A \times B = B \times A$ باشد، خواهیم داشت $A = B$. بنابراین $\{z + 5, z + 4, z + 1\} = \{x + 2, x + 4, x + 5\}$ است. اما در دو مورد دیگر دو حالت داریم:

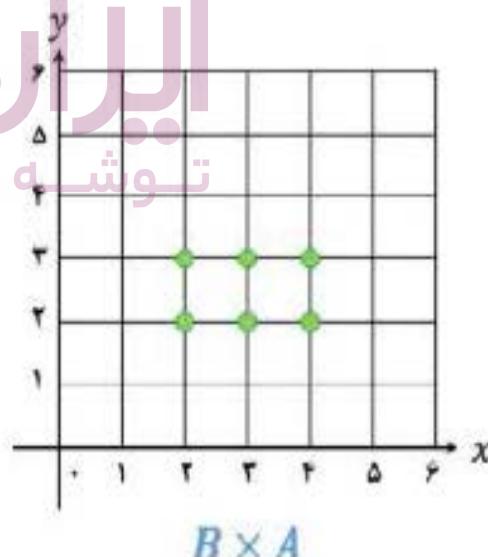
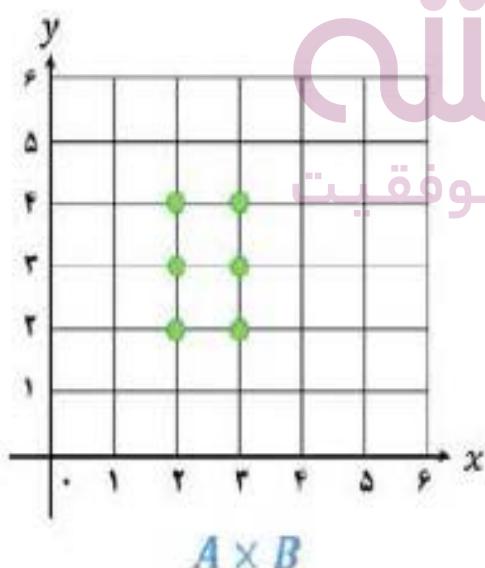
$$\begin{aligned} & [(y + 2) \wedge (z = -2)] \vee [(y + 2 = -2) \wedge (z = 4)] \\ \Rightarrow & [(y = -2) \wedge (z = -2)] \vee [(y = -2) \wedge (z = 4)] \\ \Rightarrow & y + z = -4 \\ \Rightarrow & x + y + z = 4 \end{aligned}$$

۶-با توجه به مجموعه های داده شده، نمودار هریک از حاصل ضرب های $A \times B$ و $B \times A$ رارسم کنید.

(الف) $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$

$$A \times B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

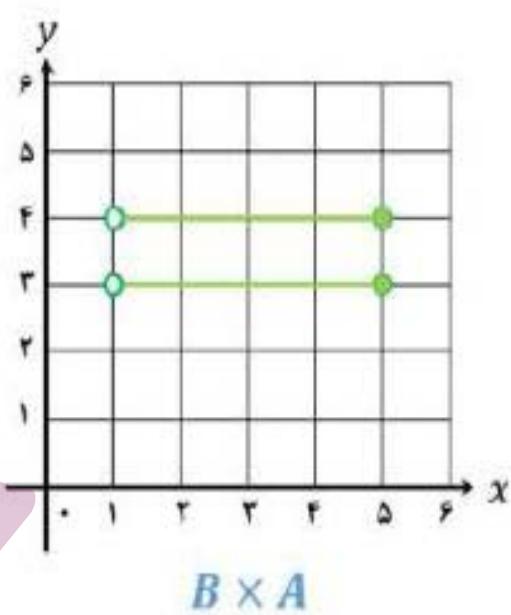
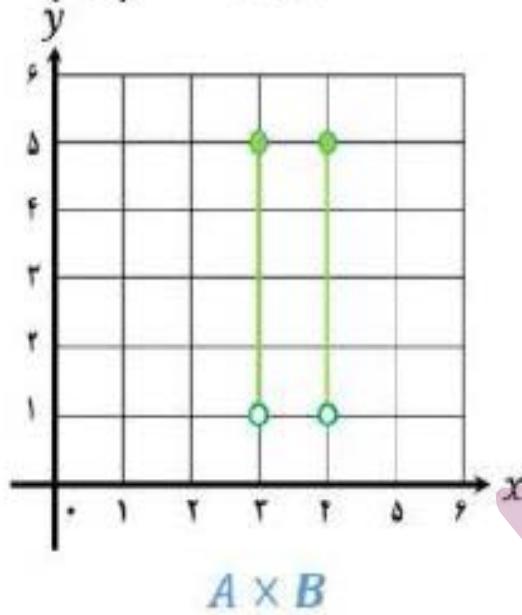
$$B \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2)\}$$



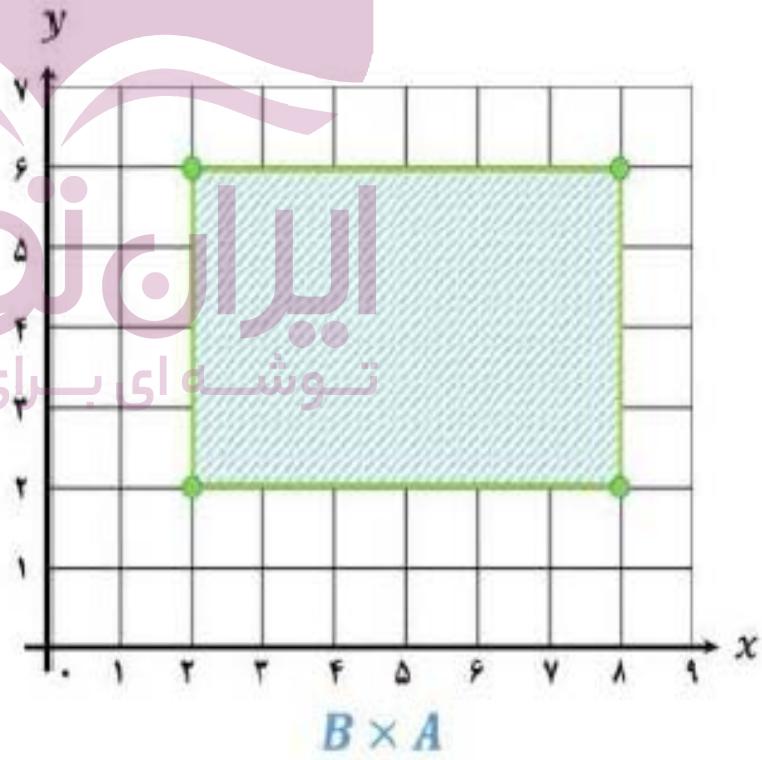
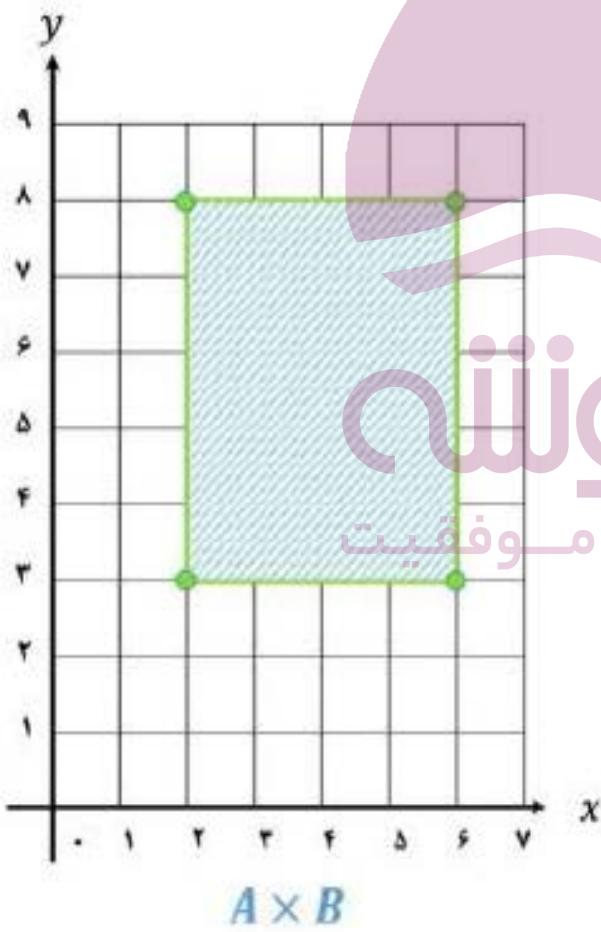
ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

$$\varphi) A = \begin{Bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۵ \end{Bmatrix}, B = [۱ \ ۵]$$

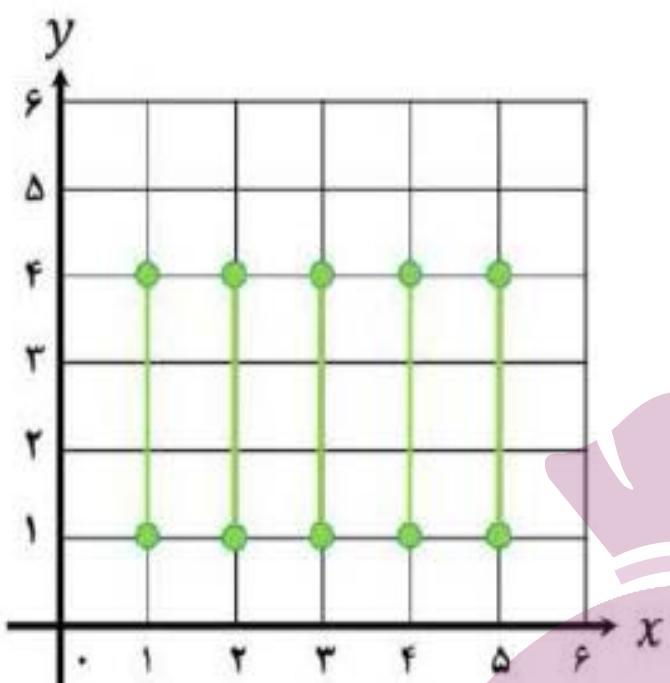


$$\varphi) A = [۲ \ ۶], B = [۳ \ ۸]$$

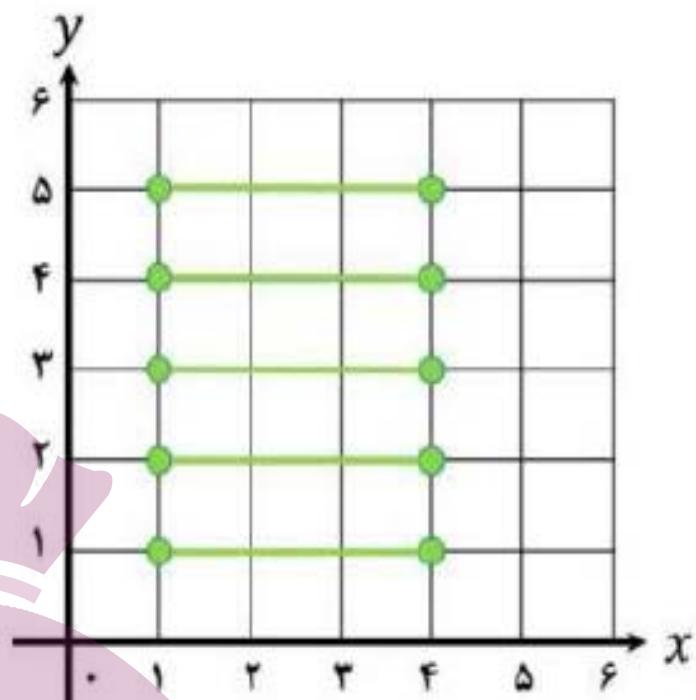


ایران جو
توضیه‌ای برای موفقیت

۵) $A = \mathbb{N}, B = [1, 4]$

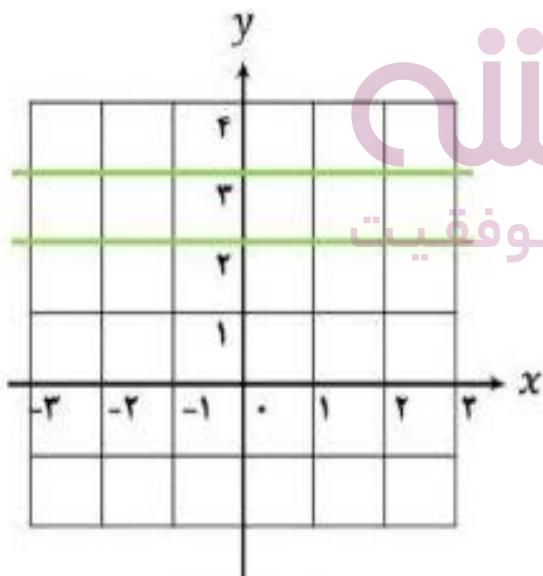


$$A \times B$$

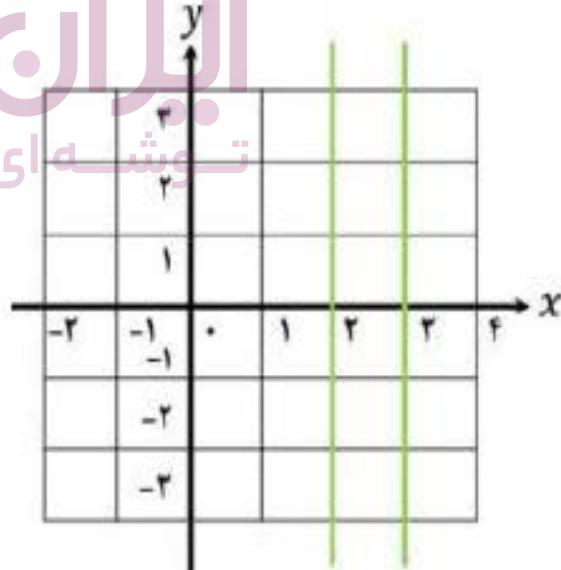


$$B \times A$$

۶) $A = \mathbb{R}, B = \{2, 3\}$



$$A \times B$$



$$B \times A$$

ابزار نوشتگاری برای موفقیت

فصل 2-درس 1: مبانی احتمال

فصل 2-درس 1



ایران تووش

توشه‌ای برای موفقیت

کدام یک از سوال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام یک مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد بادیگران گفت و گو کنید.

احتمال	آمار	صورت مسئله
<input checked="" type="checkbox"/>		۱- می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سبب یک جعبه سالم است. چند تا سبب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست کم یک سبب خراب برداشته‌ایم؟
<input checked="" type="checkbox"/>		۲- در آمد کارمندان شهرداری چقدر است؟
<input checked="" type="checkbox"/>		۳- ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟
<input checked="" type="checkbox"/>		۴- در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واحد شرایط بیرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟
<input checked="" type="checkbox"/>		۵- چه تعداد از دانش آموزان پایه‌ی یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟

ابران نوشته

فعالیت صفحه ۴۱

برق کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اولی و دومی، بهترین، ۵ و ۲۰ لامپ وجود دارد، ولی فقط برخی از این لامپ‌ها سالم‌اند؛ در اولی سه لامپ و در دومی ۱۳ لامپ سالم است. او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به تصادف، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

جواب این سؤال ساده است: در جعبه اول ۶۰ درصد و در جعبه دوم ۴۵ درصد لامپ‌ها سالم‌اند، پس بهتر است جعبه دوم را انتخاب کند.

کار در کلاس صفحه ۴۲

به چند حالت مختلف می‌نویسیم ۲ لامپ را کی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبه‌ی اول مذکور انتخاب کرد؟

۵ حالت برای انتخاب لامپ اول داریم و ۴ حالت برای انتخاب لامپ دوم. با توجه به اصل دکارتی ضرب کلّاً = $4 \times 5 = 20$.
۲۰ حالت وجود دارد.

در چند حالت هر دو لامپ معیوب است؟ مشابه همین سوال‌ها را در مورد جعبه دوم بررسی کنید. با توجه به نتایج، انتخاب کدام جعبه را برای حالت دوم بهتر می‌دانید؟

چون می‌خواهیم لامپ‌ها معیوب باشند برای انتخاب اول ۲ حالت داریم و برای انتخاب دوم یک حالت باقی می‌ماند بنابراین $2 \times 1 = 2$ حالت داریم.

در مورد جعبه دوم انتخاب دو لامپ از بین ۲۰ لامپ را داریم: $380 = 20 \times 19$ و چون ۷ لامپ معیوب است، تعداد $42 = 6 \times 7$ حالت برای معیوب بودن دو لامپ داریم. احتمال معیوب بودن در جعبه اول $\frac{1}{1}$ و در جعبه دوم $\frac{6}{38}$. بنابراین انتخاب جعبه اول بهتر است.

کار در کلاس صفحه ۴۳

زهرا و شبیم در مورد سوالی که دربارهی پرتاپ یک تاس سالم در کلاس مطرح شده با هم صحبت می‌کنند. به نظر شما چه کسی درست می‌گوید؟ شبیم درست می‌گوید.

- زهرا: فضای نمونه در این مسئله مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 6\}$ است.
- شبیم: بله، من هم موافق هستم. سوالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را پرتاپ کنیم و عدد ۶ بیاید، آیا پیشامد $\{2, 4, 6\}$ رخ داده است؟
- زهرا: به نظرم نه، چون ۶ هم علاوه بر ۲ عضو این پیشامدند.
- شبیم: ولی من فکر می‌کنم این پیشامد رخ داده است. چون این پیشامد شامل عدد ۲ است.
- زهرا: پس ۴ و ۶ که نیامدند چه؟
- شبیم: یعنی باید آنها هم در پرتاپ تاس آمده باشند تا بگوییم آن پیشامد رخ داده است؟ اصلاً اینطور که شما فکر می‌کنید، چگونه ممکن است پیشامد $\{2, 4, 6\}$ رخ دهد؟ مگر می‌شود تاسی را پرتاپ کنیم و سه مقدار مختلف با هم ظاهر شود؟!

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

ناسازگارند.

۱-دانشآموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کنید،

A : متولد ماه مهر باشد،

B : متولد فصل تابستان باشد.

سازگارند.

۲-سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید،

A : هر سه بار مشابه بیاید،

B : زوج بار رو بیاید.

۳-فردا

A : خورشید در آسمان دیده شود.

B : باران بیارد.

ناسازگارند.

۴-تاسی را بی در بی پرتاب می‌کنید،

A : برای اولین بار در مرتبه‌ی سوم ع بیاید،

B : تا پرتاب سوم دوبار ع بیاید.

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

۱. احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده‌ی بازی است؟
- ((سنگ و قیچی) (سنگ و کاغذ) (قیچی و کاغذ) (کاغذ و کاغذ) (کاغذ و قیچی) (قیچی و سنگ))
- (کاغذ و سنگ) (سنگ و سنگ))

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$3^2 = 9$$

۲. یک تیم والیبال ۱۶ عضو دارد که قد هیج دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می‌شود، بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{16}$$

۳. در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صفا یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟
- برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

$$\left\{ \text{صفا، نیمه ابری، ابری} \right\} \times \left\{ \text{باد نمی‌وزد، باد می‌وزد} \right\} \times \left\{ \text{مرطوب و خشک} \right\} \times \left\{ \text{گرم و سرد} \right\}$$

$$\times \left\{ \text{بارندگی رخ نداده، بارندگی رخ} \right\} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$$

۴. فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $A \subseteq B$ داریم: $P(A - B) = P(A) - P(B)$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$$

$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$$

ب) اگر $B \subseteq A$ ، آن‌گاه $P(B) \leq P(A)$

$$B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

۵. عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید:

$$P(A) = \text{تعداد زوج} / \text{تعداد کل} = 50 / 100 = 0.5$$

الف) عدد انتخابی بر ۲ با ۳ بخش پذیر باشد.

$$P(A) = 50 / 100 = 0.5 \quad P(B) = 33 / 100 = 0.33 \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.5 + 0.33 = 0.83$$

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی به ۳ بخش پذیر نباشد.

$$P(C) = 50 - 16 = 34 / 100 = 0.34$$

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳.

$$P(D) = 100 - 83 = 17 / 100 = 0.17$$



ایران توریسم
تouشه‌ای برای موفقیت

فصل2-درس2: احتمال غیر هم شانس

فصل2-درس2



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

یک تاس طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی‌مانده عدد ۳ مشاهده می‌شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم،

۱- فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

$$S = \{1, 2, 3\}$$

۲- با توجه به اینکه عدد ۱ روی سه وجه این تاس قرار دارد، احتمال اینکه این عدد بعد از پرتاب دیده شود را به دست آورید.

$$A = \{1\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6}$$

آیا می‌توانید از رابطه‌ی $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه‌ی احتمال وقوع پیشامد A استفاده کنید؟ چرا؟

خبر، زیرا اعضاً آن هم شناس نیستند.

۳- مشابه قسمت قبل، یعنی با توجه به تعداد وجودی از تاس که اعداد ۲ و ۳ روی آنها نوشته شده است، احتمال وقوع پیشامدهای ساده $\{2\}$ و $\{3\}$ را به دست آورید.

$$P(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(3) = \frac{1}{6}$$

۴- آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده A ، B و C با یکدیگر برابرند؟ توضیح دهید.

خبر، زیرا پیشامدها غیر هم‌شانس هستند.

۵- به کمک نتایج قسمت‌های قبل، مجموع تمام پیشامدهای ساده را به دست آورید.

$$P(1) + P(2) + P(3) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

۶- اگر $D = \{1, 2\}$ پیشامد مشاهده اعداد ۱ یا ۲ در پرتاب تاس باشد، $P(D)$ را به دست آورید. این مقدار را با $P(1) + P(2)$ مقایسه کنید.

$$P(D) = \frac{5}{6}$$

با توجه به اینکه سه وجه تاس عدد ۱ و دو وجه تاس عدد ۲ است، در پرتاب تاس اگر یکی از ۵ وجه مذکور ظاهر شود،

پیشامد D رخ می‌دهد :

$$P(1) + P(2) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

۱- در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x, z\}) = \frac{1}{4}$ و $P(\{x, y\}) = \frac{1}{4}$ احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را بدست آورید.

با توجه به اینکه x, y و z همه اعضای فضای نمونه‌ای هستند، بنابراین $P(x) + P(y) + P(z) = 1$. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P(x) + P(y) + P(z) = 1 \\ P(x) + P(y) = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} + P(z) = 1 \Rightarrow P(z) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(z) = \frac{1}{3}$$

$$P(x) + P(z) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(x) + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{6}$$

$$P(x) + P(y) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{6} + P(y) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \Rightarrow P(y) = \frac{1}{3}$$

۲- یک تاس به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را بدست آورید.

$P(2) = 3x$ و $P(1) = x$ که در آن a یک عدد زوج و b یک عدد فرد از ۱ تا ۶ هستند. حال اگر $P(a) = 3P(b)$

خواهیم داشت:

$$P(1) = P(3) = P(5)$$

$$P(2) = P(4) = P(6)$$

$$\begin{aligned} P(S) = 1 &\rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \\ &\rightarrow x + 3x + x + 3x + x + 3x = 1 \\ &\rightarrow 12x = 1 \\ &\rightarrow x = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

$$\begin{cases} P(3) = \frac{1}{12} \\ P(2) = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow P(2, 3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(2, 3) = \frac{1}{3}$$

۱. در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

$$P(\text{رو}) = \frac{1}{2} \quad P(\text{زیر}) = \frac{1}{2} \quad \text{برای سکه سالم}$$

$$P(\text{رو}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{برای سکه ناسالم}$$

۲. در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهدهٔ هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

$$S = 6 \quad A = \{1, 2, 3\} \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۳. اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $B = \{a, b, c, d\}$ ، $A = \{a, b\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(B) = \frac{4}{5}$ و $P(A) = \frac{1}{5}$ مقدار $P(C)$ را به دست آورید.

$$P(C) = \frac{3}{5} \quad P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

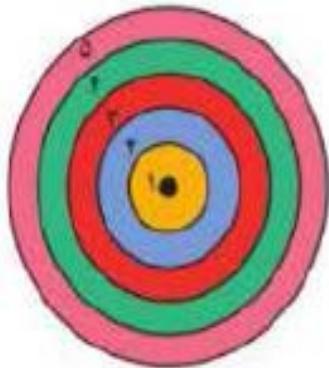
۴. در یک تجربهٔ تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.

$$P(z) = \frac{1}{4}P(y) \quad P(y) = \frac{1}{4}P(x) \quad P(z) = \frac{1}{16}P(x)$$

$$\begin{cases} P(x) + \frac{1}{4}P(x) + \frac{1}{16}P(x) = 1 \\ P(x) + P(y) + P(z) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{21}{16}P(x) = 1$$

$$P(x) = \frac{16}{21} \quad P(z) = \frac{1}{21} \quad P(y) = \frac{4}{21}$$

۵. در پرتاب یک دارت به یک صفحهٔ دایره‌ای شکل، مطابق شکل رو برو که به پنج ناحیهٔ مجزا تقسیم شده است! فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ اول، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیهٔ k ام، $x - (2k - 1)$ باشد:



الف) احتمال اصابت دارد به هر ناحیه را به دست آورید.

۰۰۰۰۰۰۰۰۰

ب) احتمال اصابت دارد به یکی از ناحیه های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیه دوم یا

پنجم؟ اول، سوم یا چهارم بیشتر است

$$P(1) = x$$

$$P(k) = 2k - 1$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1 \quad x + 2x + 3x + 4x + 5x = 1 \Rightarrow 15x = 1 \quad x = \frac{1}{15}$$

$$P(1) = \frac{1}{15} \quad P(2) = \frac{3}{15} \quad P(3) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad P(4) = \frac{7}{15} \quad P(5) = \frac{9}{15}$$

$$P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1}{15} + \frac{5}{15} + \frac{9}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

$$P(2) + P(4) = \frac{3}{15} + \frac{7}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

ایران نوشت

توشه‌ای برای موفقیت

فصل 2-درس 3: احتمال شرطی

فصل 2-درس 3



ایران تووش

توشه‌ای برای موفقیت

۱- در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۲۰ یکی را به تصادف انتخاب کنند. شماره کارت اکبر ۱۵ و شماره کارت بهرام ۷ است.

الف) احتمال اینکه اکبر برنده شود چقدر است؟ احتمال برنده شدن بهرام چقدر است؟

احتمال برنده شدن هر دو با هم برابر است و مساوی با $\frac{1}{20}$ می‌باشد.

ب) وقتی مجری کارت را انتخاب می‌کند، قبل از اینکه آن را به دیگران نشان بدهد، می‌گوید: «عدد برنده، دو رقمی است!» اکنون اکبر و بهرام احتمال برنده شدن خود را چقدر می‌دانند؟

احتمال برنده شدن بهرام صفر است چون شماره کارت او دو رقمی نیست و اکبر احتمال برنده شدن خود را $\frac{1}{11}$ می‌داند زیرا ۱۱ عدد از اعداد روی کارت‌ها دو رقمی است.

۲- در مدرسه‌ای سه کلاس بازدهم، با نام‌های ۱۱-۱، ۱۱-۲ و ۱۱-۳ وجود دارد که به ترتیب ۳۲، ۳۲ و ۳۵ دانش‌آموز دارند. در آزمونی مشترک از این سه کلاس، به ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره‌ی کامل شده‌اند. یکی از دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه که شامل همه‌ی دانش‌آموزان پایه‌ی بازدهم است، چند عضوی است؟

$$S = \{s_1, s_2, s_3\} = 32 + 33 + 35 = 100$$

ب) احتمال اینکه دانش‌آموز انتخاب شده نمره‌ی کامل گرفته باشد (پیشامد A) چقدر است؟

$$8 + 9 + 6 = 23$$

توشه‌ای برای موفقیت

پ) احتمال اینکه او، دانش‌آموز کلاس ۱۱-۱ باشد (پیشامد B) چقدر است؟

$$P(B) = \frac{32}{100}$$

$$n(B) = 32$$

ت) فرض کنید بعد از انتخاب، بفهمید که او دانش‌آموز کلاس ۱۱-۱ است. در این صورت، چقدر احتمال می‌دهید که او موفق به کسب نمره‌ی کامل شده باشد؟

در حل قسمت (ت) می‌توان این طور فکر کرد که فضای نمونه، که متشکل از ۱۰۰ دانش‌آموز پایه‌ی بازدهم است، بعد از اطلاع از اینکه او دانش‌آموز کلاس ۱۱-۱ است، به فضای نمونه‌ی دیگری، که متشکل از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱۱-۱ است، کاهش یافته است. سپس باید بررسی گنیم که چند نفر از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱۱-۱ موفق به کسب نمره‌ی

کامل شده‌اند. این یعنی تعداد اعضای پیشامد $A \cap B$ را بشرطی نتیجه را باید به تعداد اعضای مجموعه‌ی B تقسیم کنیم.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

کار در کلاس صفحه ۵۲

در فعالیت «فرعه‌کشی» احتمال شرطی کدام پیشامد نسبت به کدام پیشامد مورد سؤال قرار گرفته است؟ احتمال برنده شدن نسبت به پیشامد دو رقمی بدون شماره کارت.

کار در کلاس صفحه ۵۲

فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش چند عضوی است؟ آیا این فضای احتمال هم‌شانس است؟ فضای نمونه آزمایش $36 = 6 \times 6$ عضوی می‌باشد که این فضای احتمال هم‌شانس است.

ب) می‌دانیم که مجموع عدد دو پرتاب از ۹ بیشتر شده است. در این صورت، احتمال اینکه دست کم یک ۶ آمده باشد چقدر است؟

$$S = \{(3,6), (5,5), (5,6), (6,3), (6,5), (6,6)\}$$

$$A = \{(4,6), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$P(A) = \frac{5}{6}$$

ایران تو شن

فعالیت صفحه ۵۲

دوباره فرض کنید موضوع **حکت و گوی احتمال هم‌شانس باشد؛ آیا می‌توانید قسمت راست فرمول احتمال شرطی در حالت هم‌شانس را به شکلی بازنویسی کنید که به جای تعداد اعضای پیشامدها احتمال آنها آمده باشد؟**

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B) / n(S)}{n(B) / n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

در فعالیت مربوط به دانش آموزان پایه‌ی یازدهم که سه کلاس ۱۱-۱، ۱۱-۲ و ۱۱-۳ به ترتیب ۳۲۰، ۳۲۰ و ۳۵ دانش آموز دارند و در آزمونی مشترک در این سه کلاس، به ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره‌ی کامل شده‌اند. دانش آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد «دانش آموز کلاس ۱۱-۱ بودن» را B_1 می‌نامیم و B_2 و B_3 را به طور مشابه تعریف می‌کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با A نمایش می‌دهیم.

(الف) مقدار $P(A | B_i)$ را برای $i = 1, 2, 3$ محاسبه کنید.

$$P(A | B_1) = \frac{n(A \cap B_1)}{n(B_1)} = \frac{8}{32}$$

$$P(A | B_2) = \frac{n(A \cap B_2)}{n(B_2)} = \frac{9}{32}$$

$$P(A | B_3) = \frac{n(A \cap B_3)}{n(B_3)} = \frac{6}{35}$$

(ب) مقدار $P(B_i | A)$ را برای $i = 1, 2, 3$ محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده‌اید چیست؟

$$P(B_1 | A) = \frac{n(B_1 \cap A)}{n(A)} = \frac{8}{23}$$

$$P(B_2 | A) = \frac{n(B_2 \cap A)}{n(A)} = \frac{9}{23}$$

$$P(B_3 | A) = \frac{n(B_3 \cap A)}{n(A)} = \frac{6}{23}$$

(پ) احتمال اینکه دانش آموزی از کلاس B_i باشد به شرط آنکه نمره‌ی کامل را بیاورد، نشان می‌دهد. که جواب این احتمال میزان موفقیت هر کلاس را بیان می‌کند.

(پ) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق‌تر می‌دانید؟

کلاس ۱۱-۱ توشه‌ای برای موفقیت

برای پاسخ دادن به این سؤال، پاسخ قسمت (الف) مهم است یا پاسخ قسمت (پ)؟ پاسخ قسمت (الف)

فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت باشد. نشان دهید:

(الف) اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند:

$$P((A_1 \cup A_2) | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که دو پیشامد $A_1 \cap B$ و $A_2 \cap B$ ناسازگارند:

طبق فرض A_1 و A_2 ناسازگارند

$$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = (A_1 \cap A_2) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} P((A_1 \cup A_2) | B) &= \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} \\ &\Rightarrow \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B))}{P(B)} + \frac{P((A_2 \cap B))}{P(B)} = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) \end{aligned}$$

ب) برای هر پیشامد A داریم: $P(A' | B) = 1 - P(A | B)$:

$$P((A \cup A') | B) = P(A | B) + P(A' | B) \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$A \cup A' = S \Rightarrow P((A \cup A') | B) = P(S | B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow 1 = P(A | B) + P(A' | B) \Rightarrow P(A' | B) = 1 - P(A | B)$$

کار در کلاس صفحه ۵۷

با داده‌های مثال قبل، اگر سه گوی را به ترتیب و بدون جایگذاری خارج کنیم، احتمال اینکه اولی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

ایران تو شو

تو شه ای برای موفقیت

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B | A) \times P(C | A \cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

دو کیسه داریم که اولی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است. یکی از دو کیسه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن گویی را بر می‌داریم. می‌خواهیم احتمال سفید بودن این گوی را محاسبه کنیم.

سه پیشامد A ، B_1 و B_2 را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

A : گوی برداشته شده سفید است.

B_1 : کیسه‌ی اول انتخاب شده است.

B_2 : کیسه‌ی دوم انتخاب شده است.

پس هدف محاسبه $P(A)$ است. طبق اطلاعات داده شده $P(A|B_2) = \frac{2}{5}$ و $P(A|B_1) = \frac{1}{2}$ هستند. به

علاوه واضح است که $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. چون کیسه‌ی انتخابی یا کیسه‌ی اول است یا کیسه‌ی دوم. پس B_1 و B_2 فضای نمونه را افزایش می‌کنند. این نتیجه می‌دهد که $A \cap B_1$ و $A \cap B_2$ نیز A را افزایش می‌کنند. پس :

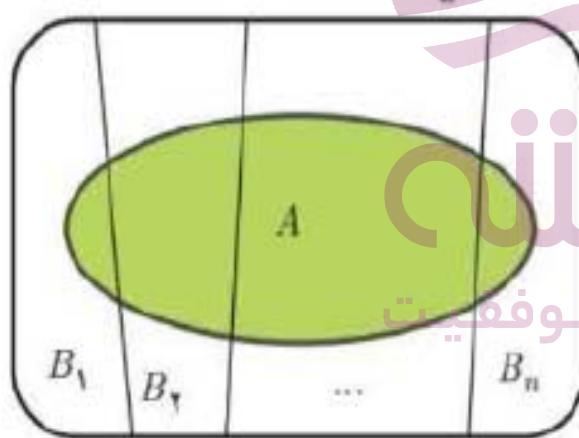
$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

کار در کلاس صفحه ۵۹

با انجام مراحل زیر قانون احتمال کل را ثابت کنید :

۱- این فرض که B_1 ، B_2 و ... B_n فضای نمونه را افزایش می‌کنند؛

یعنی دو به دو از هم مجزا هستند و $\bigcup_{k=1}^n B_k = S$.



۲- در این صورت $A \cap B_1$ ، $A \cap B_2$ و ... $A \cap B_n$ دو به دو از هم مجزا هستند و اجتماع آنها برابر A می‌شود. در نتیجه داریم :

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k)$$

۳- اگر جملات داخل سیگما را به کمک قانون ضرب احتمال بازنویسی کنید، به قانون احتمال کل می‌رسید.

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)) \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) \end{aligned}$$

میوه‌فروشی ده صندوق سبب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سبب لکه‌دار باشد، به ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سبب در صندوق‌های مختلف برابر است، احتمال اینکه سببی که از یکی از صندوق‌ها برمند داریم لکه‌دار باشد چقدر است؟

B_3 : سبب انتخابی از باغ جنوبی

A : پیشامد لکه‌دار بودن سبب انتخابی

B_1 : سبب انتخابی از باغ شمالی

B_2 : سبب انتخابی از باغ مرکزی

$$P(B_1) = \frac{3}{10}$$

$$P(A | B_1) = \frac{10}{100}$$

$$P(B_2) = \frac{5}{10}$$

$$P(A | B_2) = \frac{3}{100}$$

$$P(B_3) = \frac{2}{10}$$

$$P(A | B_3) = \frac{5}{100}$$

با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + P(B_3)P(A | B_3) = \frac{3}{100} + \frac{15}{100} + \frac{10}{100} = \frac{28}{100}$$

فعالیت صفحه ۶۱

فرض کنید سه صندوق، با تعداد زیاد سبب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سبب‌ها لکه دارند. یکی از صندوق‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

(الف) احتمال اینکه این صندوق مربوط به باغ شمالی باشد چقدر است؟ در مورد دو باغ دیگر این احتمال چقدر است؟

B_1 : سبب انتخابی از باغ شمالی B_2 : سبب انتخابی از باغ مرکزی B_3 : سبب انتخابی از باغ جنوبی

$$P(B_1) = \frac{1}{3}, \quad P(B_2) = \frac{1}{3}, \quad P(B_3) = \frac{1}{3}$$

(ب) اکنون سببی را به تصادف از داخل صندوق انتخابی خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. آیا بعد از این مشاهده، نظر شما در مورد احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، تغییر کرده است؟ **بله**

(پ) به طور شهودی، فکر می‌کنید آیا این احتمال نسبت به قبل از مشاهده‌ی سبب لکه‌دار افزایش پیدا کرده است. یا کاهش؟ **افزایش پیدا کرده است.**

توشه‌ای برای موفقیت

فرض کنید سه صندوق سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه‌دارند. یکی از صندوق‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و نمی‌دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است. سیبی را از آن صندوق خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. در این صورت، احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

B_1 : سیب انتخابی از باغ جنوبی

B_1 : سیب انتخابی از باغ شمالی

A : پیشامد لکه‌دار بودن سیب انتخابی

B_2 : سیب انتخابی از باغ مرکزی

$$P(B_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(A | B_1) = \frac{1}{100}$$

$$P(B_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A | B_2) = \frac{3}{100}$$

$$P(B_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A | B_3) = \frac{5}{100}$$

با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + P(B_3)P(A | B_3) = \frac{1}{300} + \frac{3}{300} + \frac{5}{300} = 0.06$$

$$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1)P(A | B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{100}}{0.06} = \frac{5}{9}$$

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

۱. درباره‌ی خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً پسر داشته باشند چقدر است؟

$$2^4 = 16$$

(ب، ب، د، د) (د، د، ب، ب) (ب، د، د، ب) (د، ب، ب، د) (د، ب، د، ب)

۲. ستاد مرکزی معاينه‌ی فني خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد: «امسال یک‌کارتین سال در عرصه‌ی معاينه‌ی فني خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاينه‌ی فني شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سالهای مبارزه با آلودگی هوا بود...» در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاينه‌ی فني خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه کرده و خودروهای مردودی در معاينه‌ی فني باشد: (تعداد به هزار دستگاه است).

شماره مرکز	تعداد مراجعه	تعداد مردودی
۱۳	۱۲	۱۱
۱۲	۵۱	۵۵
۱۱	۵۵	۵۰
۱۰	۴۸	۴۹
۹	۵۹	۵۶
۸	۵۶	۷۹
۷	۷۹	۷۹
۶	۸۵	۸۵
۵	۸۵	۸۶
۴	۸۶	۷۷
۳	۶۰	۶۰
۲	۲۱	۲۱
۱	۲	۲
۰	۱	۱

$$\frac{۲۵۸}{۸۷۰} = \frac{۸۶}{۲۹۰} = \frac{۴۳}{۱۴۵}$$

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شماره‌ی ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

$$\frac{۲۶}{۸۷۰}$$

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شماره‌ی ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

$$\frac{۲۶}{۷۹}$$

۳. بررسی‌های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیره‌ی هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

اگر یک روز ساحل جزیره‌ی هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است = $P(A)$

اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد = $P(B)$

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

$$P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$$

۴. قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$$

$$P(A_3|(A_1 \cap A_2)) = \frac{P(A_3 \cap (A_1 \cap A_2))}{P(A_1 \cap A_2)}$$

۵. قانون ضرب احتمال ۱۱ پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبه‌ی احتمال اشتراک ۱۱ پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل اجرا است؟

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

۶. جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامه‌ی تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامه‌ی تراکتور داشته باشد چقدر است؟

$$P(A) = ۰/۵۵ \quad P(B) = ۰/۴۵ \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = ۰/۷۵۵$$

۷. دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{۴}{۷} \times \frac{۴}{۹} + \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۹}$$

۸. در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک راننده‌ی مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۵/۰ است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال ۱/۰ انجام می‌دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی، روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

$$P(A \cap B) = \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۵}{۰/۵} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۱}{۰} = ????$$

۹. در دو جعبه به ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه‌ی اول ۴ لامپ و در جعبه‌ی دوم ۳ لامپ معیوب است. از هر کدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه‌ی جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

$$P(A \cap B) = \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۰} + \frac{۳}{۱۲} \times \frac{۵}{۱۲}$$

۱۰. ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کردند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

$$P(A) = ./۵ P(B) = ./۸ P(A) = ۲(P(B)) \quad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{?????} =$$

۱۱. احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن زده ۱/۰۵ است.

$$P(A) = ./۰۰۲ \quad P(B) = ./۱$$

ایران تو شو

اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} = \frac{۰/۰۰۲ \times ۰/۹}{۰/۱}$$

۱۲. قانون بیز را ثابت کنید:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

راهنمایی: در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید. تا درستی آن را بینید.

۱۳. با فرض شرایط قانون احتمال کل، ثابت کنید:

$$\min\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\} \leq P(A) \leq \max\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\}$$

۱۴. فرض کنید B و C دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A|B) \leq P(A|C)$. ثابت کنید:

$$P(A|B) \leq P(A|(B \cup C)) \leq P(A|C)$$

۱۵. امیر و بابک عضو تیم ۵۰ نفره‌ی والیبال مدرسه‌اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{38}$$

۱۶. علی و مازیار هر کدام به ترتیب، با احتمال های $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ برای دیدن یک مسابقه‌ی ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال $\frac{1}{8}$ به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad P(B|A) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{24}$$

۱۷. خانم‌ها اکبری، برونا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسه‌ی انتشاراتی اند که به ترتیب، 20 ، 30 و 50 درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آنها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به ترتیب 0.95 ، 0.99 و 0.99 است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad P(h) = \frac{1}{5} \quad P(A|(B \cap h)) = \frac{P(A) \cdot P(B???)}{P(A)}$$

۱۸. فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های 1 تا 4 کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر 2 بار رو بیاید، احتمال اینکه شماره‌ی کارت خارج شده 3 باشد چقدر است؟

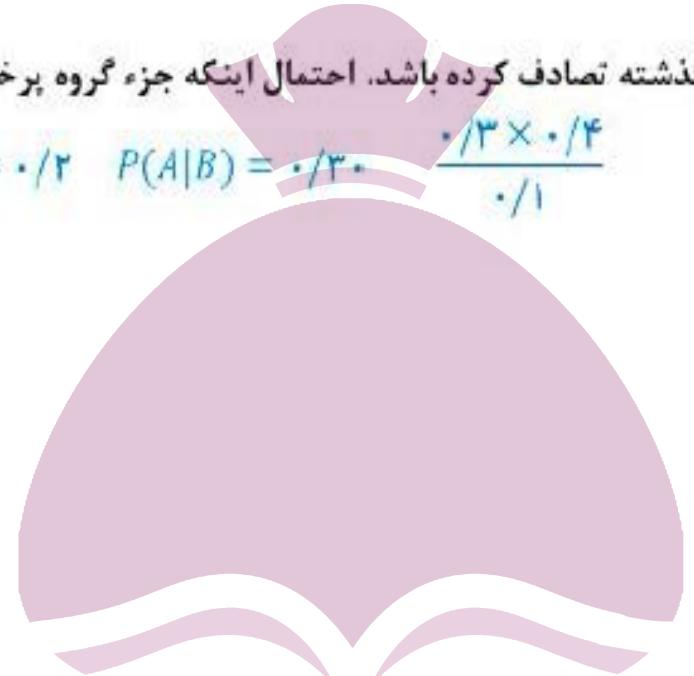
۱۹. یک شرکت بیمه، بیمه گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است: گروه «پر خطر» که در یک سال با احتمال $\frac{1}{4}$ تصادف می‌کنند و گروه «کم خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال $\frac{1}{2}$ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه گزاران پر خطرند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$$

ب) اگر یک بیمه گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پر خطر باشد چقدر است؟

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A|B) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فصل 2-درس 4: پیشامد های مستقل و وابسته

فصل 2-درس 4



ایران تووش

توشه‌ای برای موفقیت

یک سکه و یک تاس را به طور همزمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد ۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه باشد.

۱- فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای A ، B و $A \cap B$ را بنویسید.

$$S = \{(1, \text{ب}), (1, \text{ع}), (2, \text{ب}), (2, \text{ع}), (3, \text{ب}), (3, \text{ع}), (4, \text{ب}), (4, \text{ع}), (5, \text{ب}), (5, \text{ع})\}$$

$$A = \{(1, \text{ب}), (2, \text{ب}), (3, \text{ب}), (4, \text{ب}), (5, \text{ب})\}$$

$$B = \{(1, \text{ب}), (2, \text{ب}), (3, \text{ب}), (4, \text{ب}), (5, \text{ب})\}$$

$$A \cap B = \{(1, \text{ب}), (2, \text{ب}), (3, \text{ب}), (4, \text{ب}), (5, \text{ب})\}$$

۲- احتمال وقوع پیشامدهای A ، B و $A \cap B$ را تعیین کنید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{12}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}, \quad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{12}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بباید یعنی $P(A | B)$ را بدست آورید.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}$$

۳- با مقایسه $P(A | B)$ و $P(A)$ آیا وقوع پیشامد B تأثیری در احتمال وقوع A داشته است؟

از اینکه هر دو احتمال با هم برابر شده‌اند و قرعه پیشامد B تأثیری نداشته است.

توشه‌ای برای موفقیت

۴- اگر $P(A \cap B)$ ، $P(B)$ ، $P(A)$ برقرار است، $P(A | B) = P(A)$ چه رابطه‌ای بین $P(A \cap B)$ و $P(B)$ است؟

$$\begin{cases} P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(A | B) = P(A) \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

۵- در تساوی $P(B | A) = P(B)$ و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی $P(A | B) = P(A)$ را نتیجه بگیرید.

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(B | A) = P(B)$$

۱- سکه‌ی سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهدهی فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$$A = \left\{ (\underline{\underline{p}}, \underline{\underline{p}}), (\underline{\underline{p}}, \underline{\underline{r}}), (\underline{\underline{r}}, \underline{\underline{p}}), (\underline{\underline{r}}, \underline{\underline{r}}) \right\}$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \left\{ (\underline{\underline{p}}, \underline{\underline{r}}), (\underline{\underline{r}}, \underline{\underline{p}}) \right\}$$

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B = \left\{ (\underline{\underline{p}}, \underline{\underline{r}}), (\underline{\underline{r}}, \underline{\underline{p}}) \right\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

دو پیشامد مستقل نیستند زیرا:

$$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

۲- در پرتاب دو تاس، A را پیشامد عدد ۳ در تاس اول و B را پیشامد مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید.
آیا A و B مستقل‌اند؟

$$A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$$

$$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cap B) = 0$$

A و B مستقل نیستند زیرا:

$$0 \neq \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

ایران تویی

تشوه‌ای برای موفقیت

۳- در یک مسابقه‌ی تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزنند، $\frac{5}{7}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{2}{5}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

A : پیشامد به هدف زدن محمد

B : پیشامد به هدف زدن مرتضی

$$P(A) = \frac{5}{7}, \quad P(B) = \frac{2}{5}, \quad A \cap B = \frac{5}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$$

کار در کلاس صفحه ۷۰

در مثال صفحه‌ی قبل، اگر مهره‌ی دوم را پس از جایگذاری مهره‌ی اول در جعبه بیرون آوریم، با محاسبه‌ی $P(B)$ و $P(B | A)$ ، مستقل بودن A و B را نتیجه بگیرید.

وقتی مهره‌ی اول را جایگذاری می‌کنیم تعداد کل مهره‌ها ۱۳ می‌شود و داریم: $P(B | A) = \frac{8}{12}$ از طرفی $P(B) = \frac{8}{13}$ بنابراین $P(B) = P(B | A)$ و این یعنی دو پیشامد مستقل هستند.

تمرین صفحه ۷۱

۱- اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

فرض می‌کنیم A و B دو پیشامد ناسازگار باشند یعنی $A \cap B = \emptyset$ بنابراین داریم:

(۱) $P(A \cap B) = 0$ از طرفی اگر A و B مستقل باشند داریم:

(۲) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ و از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$P(A) \times P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ یا $P(B) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ بنابراین برای اینکه دو پیشامد ناسازگار مستقل از یکدیگر باشند، حداقل یکی از آنها باید تهی باشد.

۲- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq B$ و $F \subseteq A$ دو زیرمجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل‌اند؟ چرا؟

خبر، زیرا اگر E و F اشتراک‌شان تهی باشد آنگاه E و F مستقل نیستند. به عنوان مثال:

$$S = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$\begin{cases} A = \{5, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \\ B = \{5, 7\} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

حال زیر مجموعه‌های دو مجموعه‌ی A و B را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} P(E) = \frac{1}{4} \\ P(F) = \frac{1}{4} \end{cases}, \quad E \cap F = \emptyset \Rightarrow P(E \cap F) = 0 \Rightarrow P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$$

پس نتیجه خواهیم گرفت که E و F مستقل نیستند.

۳-اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر مستقل‌اند.

الف) A و A'

$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A')$$

$$\begin{aligned} P(B \cap A') &= P(A - B) = P(B) - P(B \cap A) \xrightarrow{\text{با توجه به مستقل بودن } A \text{ و } B} = P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= P(B)(1 - P(A)) = P(B) \times P(A') \end{aligned}$$

ب) A' و B'

راه حل اول :

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P(A' - B) = P(A') - P(A' \cap B) \xrightarrow{\text{با توجه به قسمت الف}} = P(A') - P(A') \times P(B) \\ &= P(A')(1 - P(B)) = P(A') \times P(B') \end{aligned}$$

راه حل دوم : بدون استفاده از قسمت الف

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{P(A')}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{با توجه به مستقل بودن } A \text{ و } B} = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = P(A') - P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(A') - P(B) \times P(A') = P(A')(1 - P(B)) = P(A') \times P(B') \end{aligned}$$

۴- در پرتاب دو تاس به طور پی در پی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهرشدن عدد ۳

در تاس اول باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$$A = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5)\}$$

$$B = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}, \quad P(A \cap B) = \{(3,2), (3,4)\}$$

$$\begin{cases} P(A) = \frac{10}{36} \\ P(B) = \frac{6}{36} \\ P(A \cap B) = \frac{2}{36} \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{36} \times \frac{6}{36} \neq \frac{2}{36} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

۵- از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$$\begin{cases} A = \{2, 3, 6, 8, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{10} \\ B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10} \\ P(A \cap B) = \{6\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10} \end{cases}$$

A و B مستقل نیستند.

۶- احتمال موقعيت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار $\frac{1}{6}$ و روی بیمار دیگر $\frac{1}{8}$ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه:

پیشامد موقعيت آمیز بودن پیوند کلیه روی بیمار اول را A و پیشامد موقعيت آمیز بودن پیوند کلیه روی بیمار دوم را B در نظر می‌گیریم. بنابراین با توجه به مستقل بودن این دو پیشامد داریم:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{8}$$

(الف) روی هر دو بیمار موقعيت آمیز باشد.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$$

(ب) روی هیچ کدام موقعيت آمیز نباشد.

با توجه به این که هرگاه دو پیشامد مستقل باشند، مقدم آنها نیز مستقلند. داریم:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{48}$$

(پ) فقط روی بیمار دوم موقعيت آمیز باشد.

هرگاه دو پیشامد مستقل باشند، هر کدام از آنها مستقل از مجموع دیگری است بنابراین:

$$\begin{cases} P(A') = \frac{5}{6} \\ P(B) = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{48}$$

۷- یک سکه و دو تاس به طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

روش اول:

$$n(S) = 2 \times 6 \times 6 = 72, \quad A = \{(6, 6, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{72}$$

روش دوم:

اگر A را پیشامد روآمدن سکه و B را پیشامد ۶ آمدن دو تاس در نظر بگیریم این دو پیشامد از هم مستقل هستند.
بنابراین داریم:

$$\begin{cases} P(A) = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{72}$$

۸- در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سوال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سوالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به دست آورید که:

(الف) به تمام سوال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

با توجه به اینکه پیشامدهای پاسخ دادن به هر سوال مستقل از سوال‌های دیگر است، داریم:

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{5^{10}}$$

ب) تنها به پنج سوال اول پاسخ صحیح داده باشد.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{5^5}$$

برای پنج سوال اول که پاسخ صحیح داده باشد، داریم:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

و برای پنج سوال دوم داریم:

$$\frac{1}{5^5} \times \frac{4^5}{5^5} = \frac{(4^5)^5}{5^{10}} = \frac{2^{10}}{5^{10}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{10}$$

پ) به نیمی از سوال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

در اینجا انتخاب پنج سوال از بین ده سوال را داریم و با توجه به قسمت ب داریم:

۹- در یک جعبه که شامل ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی آبی و ۱ مهره‌ی زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری

لوشه‌ای برای موفقیت

برای

دو

مهره

بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه:

(الف) هر دو مهره قرمز باشند.

دو پیشامد قرمز بودن مهره اول و مهره دوم مستقل از یکدیگرند و احتمال قرمز بودن هر مهره برابر است با

$\frac{3}{6}$

بنابراین داریم:

$$\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

احتمال اینکه حداقل یک مهره آبی باشد، متمم احتمال این است که هیچکدام آبی نباشد:

$$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$$

احتمال اینکه هیچکدام آبی نباشد:

احتمال حداقل یک مهره آبی:

پ) هر دو مهره همنگ باشند.

هر دو مهره همنگ باشند یعنی یا هر دو قرمز باشند و یا هر دو آبی باشند.

$$\begin{array}{l} \text{احتمال قرمز بودن هر دو مهره} \\ \text{احتمال آبی بودن هر دو مهره} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36} \\ \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{احتمال همنگ} \\ \text{بودن هر دو مهره} \end{array} : \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{13}{36}$$

۱۰- جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که:

(الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

این سه پیشامد از یکدیگر مستقلند. بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{12} = \text{احتمال معیوب بودن لامپ اول} \\ \frac{2}{11} = \text{احتمال معیوب بودن لامپ دوم} \\ \frac{1}{10} = \text{احتمال معیوب بودن لامپ سوم} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{220}$$

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

احتمال اینکه تمام لامپ‌ها سالم باشند را به دست می‌آوریم:

$$\frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{55}$$

ایران توشه

توشه‌ای برق موفقیت

۱۱- احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، $\frac{9}{10}$ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همه افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

$$1 - \left(\frac{9}{10} \right)^{10} = 0.1$$

افراد از یکدیگر مستقل هستند. بنابراین:

$$0.1 \times 0.1 = (0.1)^{10}$$

۱۲- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B') = \frac{1}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ حاصل $P(A \cup B')$ را به دست آورید.

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{4} = P(A) - \frac{1}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{8}$$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ با توجه به مستقل بودن A و B

$$\cdot/1 = \cdot/5 \times P(B) \Rightarrow P(B) = \cdot/2 \Rightarrow P(B') = 1 - \cdot/2 = \cdot/1$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') \Rightarrow P(A \cup B') = \cdot/5 + \cdot/1 - \cdot/1 = \cdot/9$$



فصل 3-درس 1: توصیف و نمایش داده ها

فصل 3-درس 1



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

یک راننده تاکسی در یک روز، اسکناس‌های زیر را از مسافران دریافت می‌کند. او تصمیم دارد این اسکناس‌ها را در کیف خود دسته‌بندی کند. برای انجام این دسته‌بندی، می‌خواهد مراحل زیر را انجام دهد. شما او را کمک کنید تا این کار را انجام دهد.



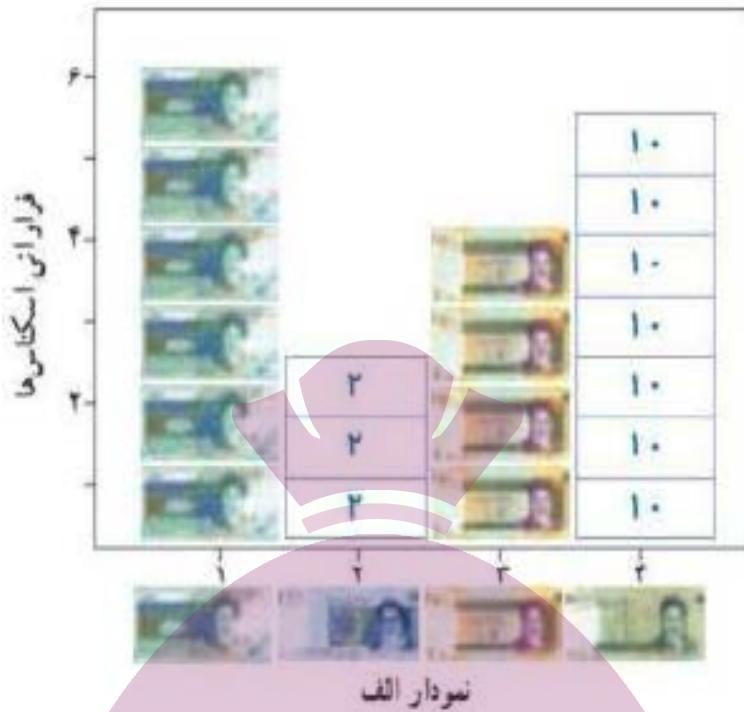
- ۱- ابتدا به هر نوع اسکناس عدد ۱ تا ۴ را بدھید و در ستون شماره وارد کنید.
- ۲- سپس به شمارش اسکناس‌ها پردازید و تعداد تکرار هر اسکناس را در ستون سوم وارد کنید.
- ۳- در ادامه تعداد هر اسکناس را بر تعداد کل اسکناس‌ها تقسیم کنید و آن را در ستون چهارم قرار دهید.
- ۴- با توجه به اعداد موجود در جدول زیر، چند درصد اسکناس‌ها ۱۰ هزار تومانی، چند درصد ۱۰۰۰ تومانی، چند درصد ۵ هزار تومانی و چند درصد از اسکناس‌ها ۱۰ هزار تومانی است؟

انواع اسکناس‌ها	شماره	فرابانی یا تعداد هر اسکناس	تعداد کل اسکناس‌ها
۱۰۰۰ تومانی	۲	۶	۲۰
۲ هزار تومانی	۳	۰/۱۵	۳
۵ هزار تومانی	۳	۰/۲۰	۴
۱۰ هزار تومانی	۴	۰/۲۵	۷
تعداد کل اسکناس‌ها	۲۰	۱	

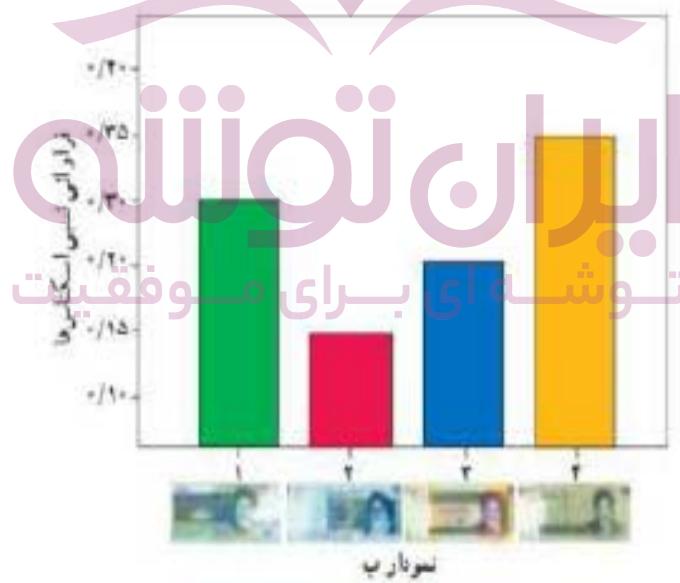
حال می‌خواهیم جدول بالا را به صورت سه نمودار الف، ب و پ نشان دهیم.

- ۱- در نمودار الف، ابتدا دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهندهٔ تعداد تکرار اسکناس‌ها، یا فرابانی اسکناس‌ها و محور افقی نشان‌دهندهٔ نوع اسکناس‌ها باشد. در این نمودار، اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۵ هزار

تومانی روی هم قرار گرفته‌اند. شما هم اسکناس‌های ۲ هزار تومانی را به صورت **۲** و اسکناس‌های ۱۰ هزار تومانی را به صورت **۱۰** در نمودار قرار داده و آن را کامل کنید.



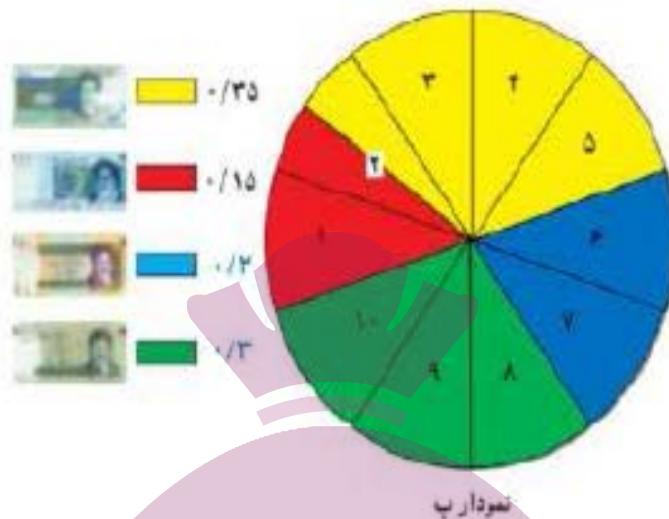
۲-در نمودار ب، نیز دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهندهٔ نسبت تکرار اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی اسکناس‌ها و محور افقی نشان‌دهندهٔ نوع اسکناس‌ها است. با رسم مستطیل‌هایی برای فراوانی نسبی اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۵ هزار تومانی نمودار شکل ب را کامل کنید.



۳-اگر رانده تاکسی بخواهد وضعیت تعداد اسکناس‌های خود را در یک هفته پیش‌بینی کند، کدام نمودار الف یا ب می‌تواند به او کمک کند؟ **هر دو نمودار مناسب است ولی نمودار ب بهتر است.**

۴-برای رسم نمودار دایره‌ای ابتدا دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشان‌دهندهٔ ۱۰ درصد کل دایره است. سپس با استفاده از عدد مربوط به نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی

مربوط به اسکناس ۱۰ هزار تومانی در ستون چهارم، قسمت اول دایره و نصف قسمت دوم دایره قرمز رنگ شده است که معادل ۱۵ درصد کل دایره است و به طور مشابه برای اسکناس ۲ هزار تومانی سه قسمت دایره به علاوه نصف قسمت دوم رنگ زرد می شود که معادل ۳۵ درصد کل دایره است. برای اسکناس های ۱۰۰۰ و ۵ هزار تومانی دایره را رنگ آبی و سبز کنید.

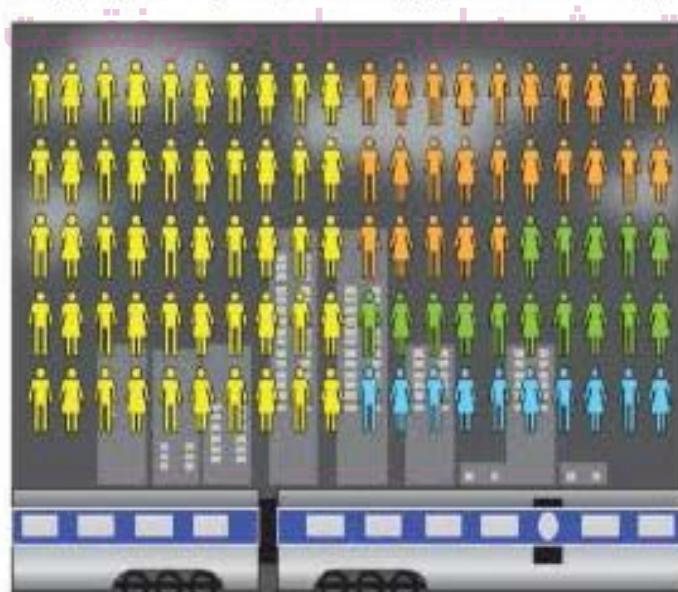


کار در کلاس صفحه ۷۶

در مورد اینکه مسافران یک قطار در طول سفر چگونه از وقت خود استفاده می کنند، تحقیقی صورت گرفته است و نتایج زیر به دست آمده است.

در شکل ت، مسافران یک قطار به عنوان متغیر گستته را ملاحظه می کنید.

- افرادی که با رنگ زرد مشخص شده اند، مسافرانی اند که در قطار استراحت می کنند.
- افرادی که با رنگ نارنجی مشخص شده اند، مسافرانی اند که در قطار با تلفن همراه خود بازی می کنند.
- افرادی که با رنگ سبز مشخص شده اند، مسافرانی اند که در قطار مطالعه می کنند.
- افرادی که با رنگ آبی مشخص شده اند، مسافرانی اند که در قطار غذا می خورند.

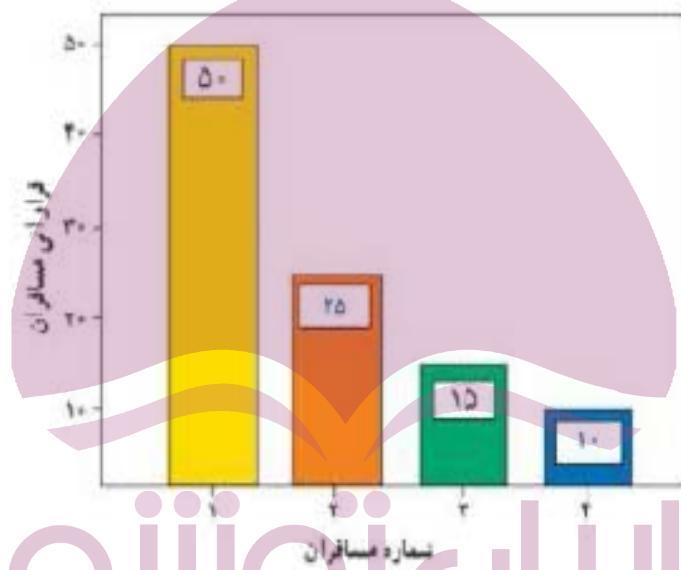


شکل ت

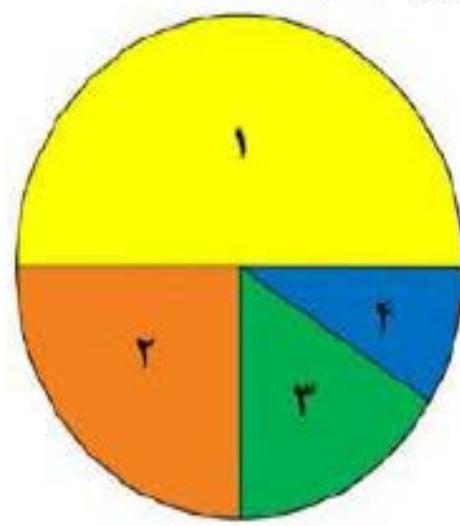
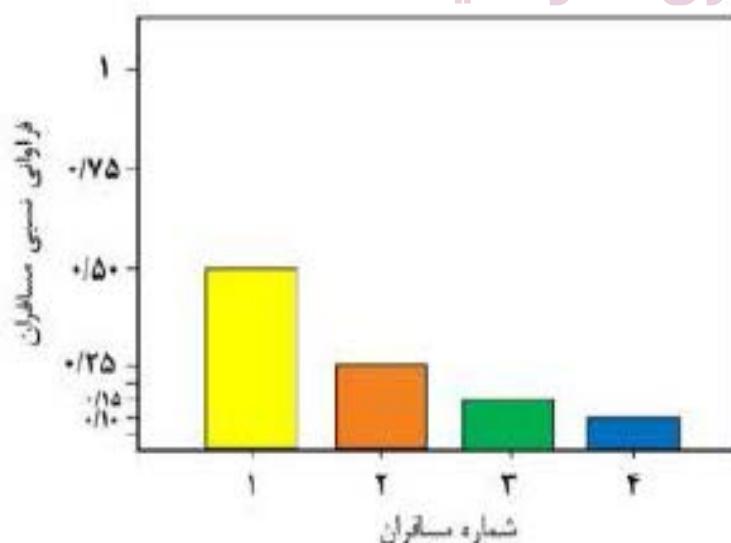
جدول فراوانی مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

مسافران قطار	شماره مسافران	فراوانی مسافران	فراوانی نسبی مسافران
مسافرانی که استراحت می‌کنند	۱	۵۰	۰/۵۰
مسافرانی که با تلفن همراه خود بازی می‌کنند	۲	۲۵	۰/۲۵
مسافرانی که مطالعه می‌کنند	۳	۱۵	۰/۱۵
مسافرانی که غذا می‌خورند	۴	۱۰	۰/۱۰
تعداد کل مسافران	۱۰۰	۱	

همچنین نمودار مبله‌ای مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.



فراوانی نسبی تعداد مسافران را براساس جدول کامل شده رسم کنید. نمودار دایره‌ای مربوط به فراوانی نسبی تعداد مسافران را رسم کنید.



فراوانی نسبی تعداد مسافران

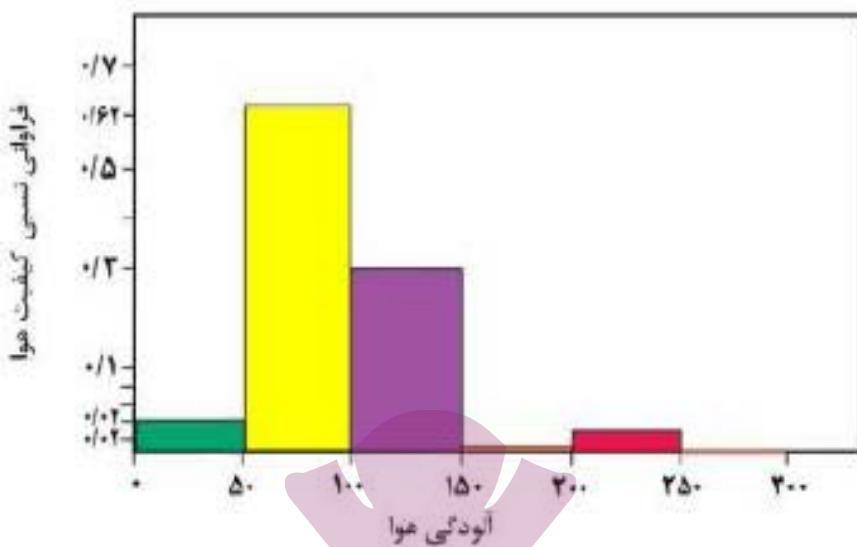
سال هاست با مسئله‌ی آلودگی هوای آشنا هستیم و این مسئله به یکی از دغدغه‌های مهم تبدیل شده است. اطلاعات و داده‌های مربوط به شاخص آلودگی هوا در سایت شرکت کنترل کیفیت هوا قابل دسترسی است. میزان شاخص کیفیت هوا در شهر تهران برای تمام روزهای سال ۱۳۹۳ در جدول زیر گزارش شده است. این جدول را کامل کنید:

وضعیت هوا	شاخص کیفیت هوا	فراآنی	فراآنی نسبی
پاک	$0 \leq AQI \leq 50$	۱۶	۰/۰۴
سالم	$50 < AQI \leq 100$	۲۲۲	۰/۶۲
ناسالم برای گروه‌های حساس	$100 < AQI \leq 150$	۱۱۲	۰/۳
ناسالم	$150 < AQI \leq 200$	۴	۰/۰۱
بسیار ناسالم	$200 < AQI \leq 250$	۱۰	۰/۰۳
خطرناک	$250 < AQI \leq 300$	۰	.
تعداد کل روزهای یک سال		۳۶۵	۱

نمودار مربوط به فراآنی تعداد روزها براساس وضعیت آلودگی هوا را کامل کنید؟



- نمودار فراوانی نسبی تعداد روزها را براساس وضعیت آبودگی هوا رسم کنید.



چند درصد از روزهای سال، هوا سالم بوده است؟

$$\cdot / 52 \times 100 = 52\%$$

- چند درصد روزهای سال، هوا ناسالم و بسیار ناسالم بوده است؟

$$(\cdot / \cdot + \cdot / \cdot \%) \times 100 = \text{r} \%$$

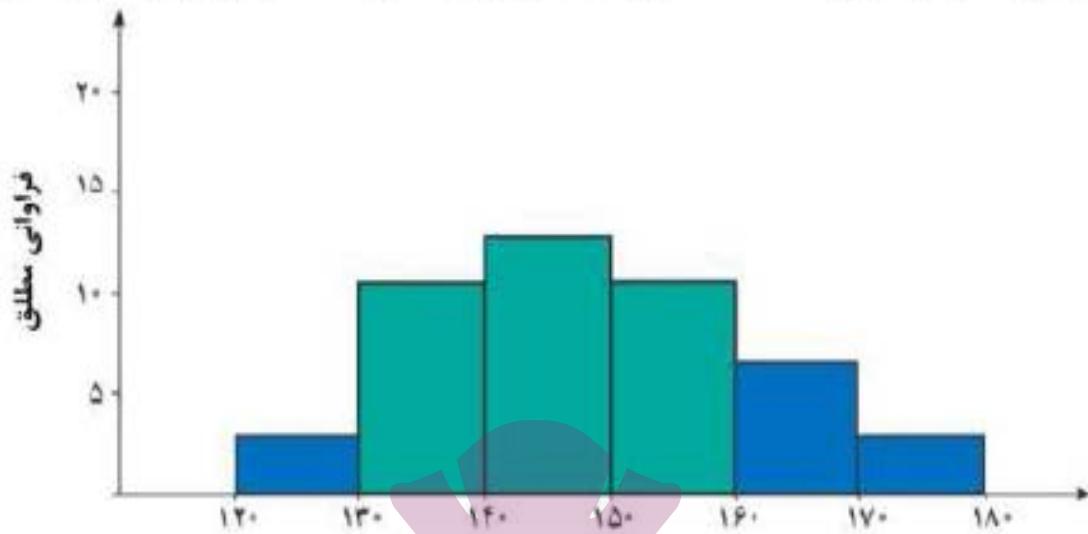
– کدام نمودار، در پاسخ دادن به سوالات، ما را بیهتر راهنمایی می‌کند؟ نمودار فراوانی تسبی

کار در کلاس صفحه ۸۰

جدول فراوانی زیر مربوط به قدر (H) ۵۰ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم است. جاهای خالی جدول زیر را کامل کنید.

قد دانش آموزان	فرداواني نسبی	فرداواني	۰/۰۶
۱۲۰ ≤ H < ۱۳۰	۳	۰/۰۶	۰/۰۶
۱۳۰ ≤ H < ۱۴۰	۱۰	۰/۲۰	۰/۲۰
۱۴۰ ≤ H < ۱۵۰	۱۳	۰/۲۶	۰/۲۶
۱۵۰ ≤ H < ۱۶۰	۱۱	۰/۲۲	۰/۲۲
۱۶۰ ≤ H < ۱۷۰	۱۰	۰/۲۰	۰/۲۰
۱۷۰ ≤ H < ۱۸۰	۳	۰/۰۶	۰/۰۶
مجموع	۵۰	۱	

براساس اعداد جدول، نمودارهای بافت نگاشت مربوط به فراوانی مطلق قد دانشآموزان را کامل کنید.



قد چند درصد از دانشآموزان بین ۱۶۰ تا ۱۷۰ سانتی‌متر است؟

همچنین قد چند درصد از دانشآموزان بین ۱۴۰ تا ۱۵۰ سانتی‌متر است؟

$$\cdot / . ۶ + \cdot / ۲۰ = \cdot / ۲۶ \%$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

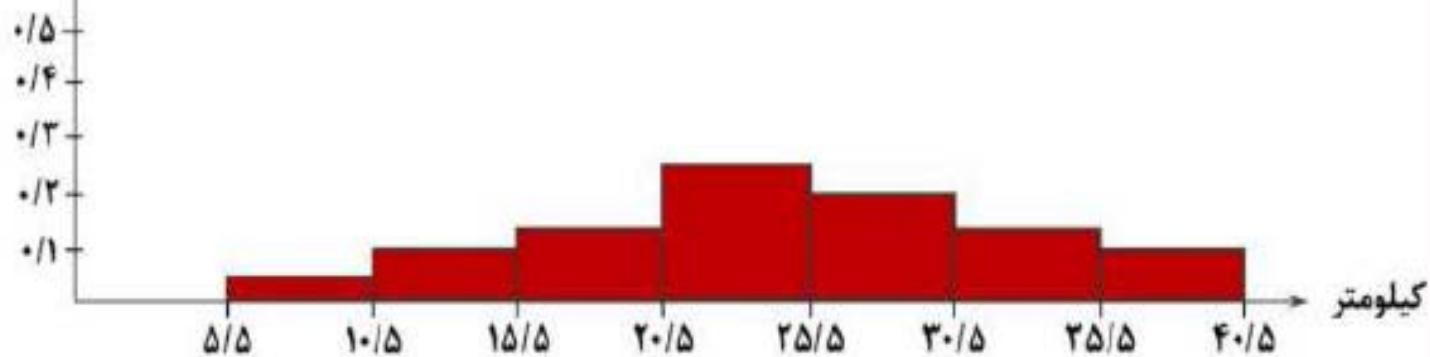
۱-داده‌های زیر، مسافتی را که ۲۰ راننده از مکان‌های مختلف برای رسیدن به مقصد A طی می‌کنند نشان می‌دهد.
این داده‌ها، در جدول زیر گردآوری شده است. جدول را کامل کرده و نمودار بافت نگاشت مربوطه را رسم کنید.

فراوانی نسبی	فراوانی	کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است
۰/۰۵	۱	از ۵/۵ کیلومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر
۰/۱۰	۲	از ۱۰/۵ کیلومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر
۰/۱۵	۳	از ۱۵/۵ کیلومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر
۰/۲۵	۵	از ۲۰/۵ کیلومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر
۰/۲۰	۴	از ۲۵/۵ کیلومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر
۰/۱۵	۳	از ۳۰/۵ کیلومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر
۰/۱۰	۲	از ۳۵/۵ کیلومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر
۱	۲۰	مجموع

فراوانی نسبی

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت



۲-رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است: ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز و ۵ نفر سایر رنگ‌هاست. چه نمودارهایی می‌توان برای این اعداد رسم کرد. آن نمودار را رسم کنید.

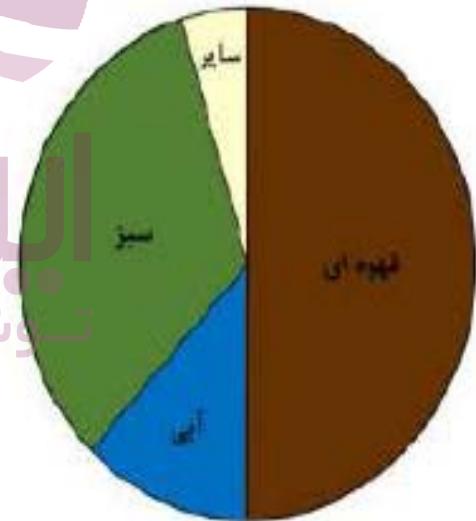
نمودار میله‌ای نمودار دایره‌ای هر دو

رنگ چشم افراد	فرابونی	فرابونی نسبی
قهوه‌ای	۶۴	$\frac{۶۴}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۱۸۰$
آبی	۲۳	$\frac{۲۳}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۶۴/۷$
سبز	۳۶	$\frac{۳۶}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۱۰۱/۲$
سایر	۵	$\frac{۵}{۱۲۸} \times ۳۶۰ = ۱۴/۱$
مجموع	۳۶۰	۱۲۸



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت



۳-جملات زیر را کامل کنید:

الف) برای متغیرهای پیوسته از نمودار **بافت‌نگار** استفاده می‌شود.

ب) برای متغیرهای گسسته از نمودارهای **دایره‌ای** و **میله‌ای** استفاده می‌شود.

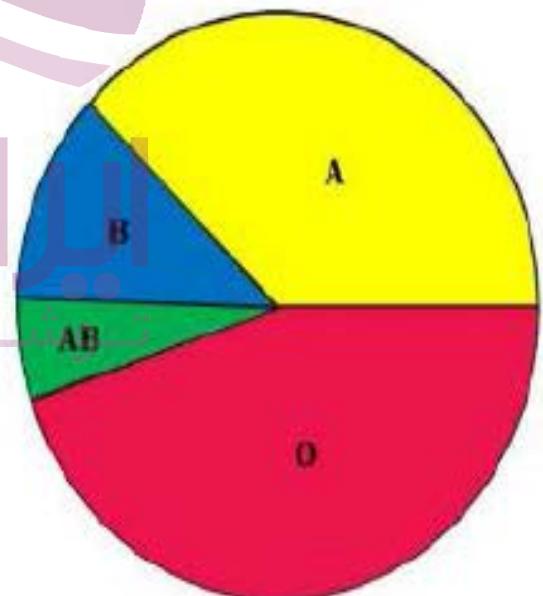
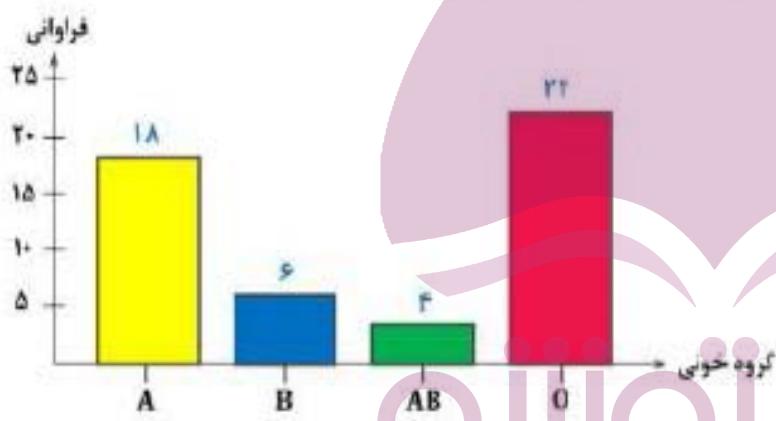
پ) برای متغیرهای کیفی از نمودارهای **دایره‌ای** و **میله‌ای** استفاده می‌شود.

۴- گروه خونی ۵۰ دانش آموز پایه‌ی بازدهم به صورت زیر گردآوری شده‌اند:
 الف) جدول فراوانی مربوط به گروه خونی این افراد رارسم کنید.

O	O	A	A	O
B	O	B	A	O
AB	B	A	B	AB
O	O	A	A	O
AB	O	A	B	A
O	A	A	O	A
O	A	O	AB	A
O	B	A	A	O
O	O	O	A	O
O	A	O	A	O

گروه خونی	فرابانی نسبی	فرابانی	گروه خونی
	۰/۳۶	۱۸	A
	۰/۱۲	۶	B
	۰/۴۴	۲۲	O
	۰/۰۸	۴	AB
	۱	۵۰	مجموع

ب) نمودار میله‌ای مربوط به فرابانی و فرابانی نسبی و همچنین نمودار دایره‌ای مربوط به این افراد رارسم کنید.



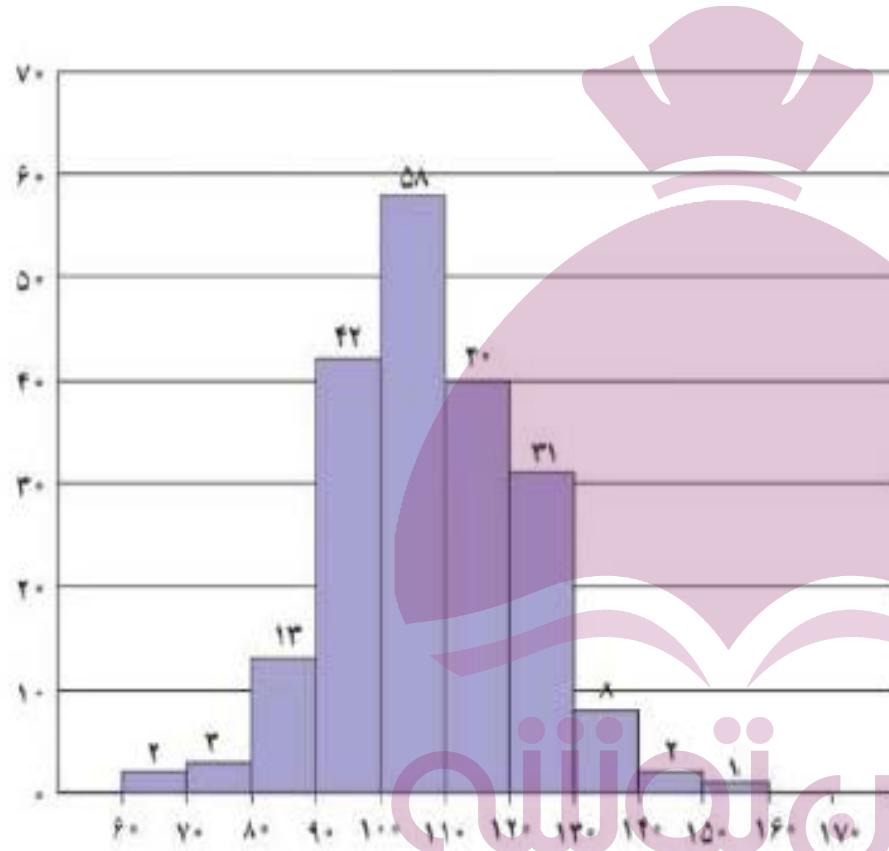
پ) چند درصد افراد، دارای گروه خونی O هستند؟

$$۰/۴۴ \times ۱۰۰ = ۴۴\%$$

۵-اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی ۰، ۴٪ باشد و مجموع فراوانی‌های همه‌ی گروه‌های خونی برابر ۲۰ در نظر گرفته شود، فراوانی گروه خونی ۰ چه عددی است؟

$$f_0 = \cdot / ۴ \Rightarrow \frac{F_0}{۲} = \cdot / ۴ \Rightarrow F_0 = ۸$$

۶-نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهد کودک به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این نمودار، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



نمرات IQ	فرافوانی
۷۰-۶۰	۲
۸۰-۷۰	۳
۹۰-۸۰	۱۳
۱۰۰-۹۰	۴۲
۱۱۰-۱۰۰	۵۸
۱۲۰-۱۱۰	۷۰
۱۳۰-۱۲۰	۳۱
۱۴۰-۱۳۰	۸
۱۵۰-۱۴۰	۲
۱۶۰-۱۵۰	۱
مجموع	۲۰۰

۲۰۰ توشه‌ای برای موفقیت

الف) تعداد کل کودکان که نمره‌ی IQ آنها، مورد بررسی قرار گرفته است. چند نفر است؟

$$۲ + ۳ + ۱۳ + ۴۲ + ۵۸ + ۷۰ + ۳۱ + ۸ + ۲ + ۱ = ۲۰۰$$

ب) نمره‌ی IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

$$100 \leq IQ \leq 110 \quad \text{بیشترین نمره‌ی IQ}$$

$$150 \leq IQ \leq 160 \quad \text{کمترین نمره‌ی IQ}$$

پ) چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین ۱۴۰ تا ۱۶۰ هستند؟

$$2 + 1 = 3 \Rightarrow \frac{3}{200} \times 100 = 1.5\%$$

۷-جدول فراوانی و نمودارهای مناسب مربوط به تعداد حروف بیت شعر زیر را به دست آورید.
کیست این پنهان مرا در جان و تن کز زبان من همی گوید سخن

حروف	مجموع	۱	۴۱	فراآنی نسبی	حروف	فراآنی	فراآنی نسبی	فراآنی نسبی
گ				۰/۰۸	م	۳	۰/۰۵	۰/۰۸
ی				۰/۰۵	ر	۲	۰/۱۰	۰/۰۵
س				۰/۰۵	د	۲	۰/۰۵	۰/۰۵
ت				۰/۰۲	ج	۱	۰/۰۵	۰/۰۲
ا				۰/۰۵	و	۲	۰/۱۲	۰/۰۵
ن				۰/۰۵	ذ	۲	۰/۲۰	۰/۰۵
پ				۰/۰۲	ب	۱	۰/۰۲	۰/۰۲
ه				۰/۰۲	گ	۱	۰/۰۵	۰/۰۲
فراآنی نسبی								



فصل 3-درس 2: معیار های گرایش به مرکز

فصل 3-درس 2



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

درس دوم: معیارهای کراپش به مرکز

الف) میانگین داده‌ها

فعالیت صفحه ۸۴

در یک باغ، برای تعیین میزان محصولات گردو، چهار نوع درخت گردو وجود دارد که میزان محصولات انواع گردوها بر حسب تعداد به شرح زیر است:

نوع گردو	میزان محصول گردو (تعداد)	گردوى نوع اول	گردوى نوع دوم	گردوى نوع سوم	گردوى نوع چهارم
میزان محصول گردو (تعداد)	۵۰۰۰	۲۵۰۰	۳۵۰۰	۱۰۰۰	

الف) میانگین تعداد گردوى تولید شده برای این چهار نوع درخت چه تعداد است؟

$$\bar{x} = \frac{۵۰۰۰ + ۲۵۰۰ + ۳۵۰۰ + ۱۰۰۰}{۴} = ۱۰۸۷۵$$

حال اگر علاوه بر داشتن اطلاعات میزان تولید گردو برای هر نوع درخت گردو، تعداد درخت‌های باغ مطابق جدول زیر مشخص شده باشند:

نوع گردو	میزان محصول گردو (تعداد)	گردوى نوع اول	گردوى نوع دوم	گردوى نوع سوم	گردوى نوع چهارم
میزان محصول گردو (تعداد)	۵۰۰۰	۲۵۰۰	۳۵۰۰	۱۰۰۰	
تعداد درخت‌ها	۱۰	۵	۷	۳	

ب) آیا می‌توان میانگین تعداد گردوى تولید شده در قسمت (الف) را در این حالت به عنوان میانگین تولید شده برای این چهار نوع درخت گردو در نظر گرفت؟ خبر

پ) میانگین گردوى تولید شده در این حالت، به چه صورت است؟

$$\bar{x} = \frac{(۱۰ \times ۵۰۰۰) + (۵ \times ۲۵۰۰) + (۷ \times ۳۵۰۰) + (۳ \times ۱۰۰۰)}{۱۰ + ۵ + ۷ + ۳} = \frac{۳۱۰۵۰}{۲۵} = ۱۲۴۲$$

دانش آموزی در کنکور سراسری شرکت می کند و نتیجه هی کارنامه ای آزمون آن به شرح زیر است:

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	زبان فارسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۷۱	۶۵	۸۰	۵۲	۹۵	۱۰۰	۳
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۶	۳

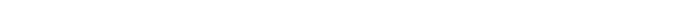
الف) متوسط درصد مواد امتحانی این دانش آموز بدون احتساب ضرایب مواد امتحانی چه عددی است؟

$$\bar{x} = \frac{71 + 65 + 80 + 52 + 95 + 100}{6} = \frac{463}{6} = 77\text{/}۱۲$$

ب) متوسط درصد مواد امتحانی این دانش آموز با احتساب ضرایب مواد امتحانی را کامل کنید.

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^r w_i x_i}{\sum_{i=1}^r w_i} = \frac{(4 \times 71) + (3 \times 65) + (1 \times 80) + (1 \times 52) + (4 \times 95) + (3 \times 100)}{4 + 3 + 1 + 1 + 4 + 3}$$

$$\bar{x}_w = \frac{1291}{16} = 80\text{/}۶۹$$



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

کار در کلاس صفحه ۸۷

در یک شعبه بانک تراکنش‌های مالی بسیاری در یک روز انجام می‌گردد. یک تراکنش مالی ممکن است انتقال مبلغی از حساب پس‌انداز یک مشتری به حساب جاری مشتری دیگری در یک بانک باشد. این تراکنش را می‌توان به دو عملیات تقسیم کرد: بدھکار کردن حساب پس‌انداز یک مشتری به اندازه‌ی مبلغ موردنظر و طلبکار کردن حساب جاری مشتری دیگر به اندازه‌ی همان مبلغ است.

(الف) فرض کنید تراکنش‌های مالی در بازه‌ی زمانی ۸ تا ۹ صبح یک شعبه‌ی بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود. میانه، چارک اول و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

۲۵ ۱۲ ۱۰ ۸/۷ ۱۰

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۸/۷ و ۱۰ و ۱۲ و ۲۵

چون تعداد آنها فرد است، عدد وسط میانه می‌باشد.

$Q_2 = 12$ چارک سوم $Q_1 = 10$ چارک اول

(ب) حال فرض کنید تراکنش‌های مالی دیگری در بازه‌ی زمانی ۹ تا ۱۰ صبح در همان شعبه بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود. در این حالت نیز میانه، چارک اول و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

۳۴ ۲۲ ۲۰ ۸۱/۷ ۳۰ ۷۰

همانند حالت قبل ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۸/۱ و ۷۰ و ۳۴ و ۳۰ و ۳۲ و ۲۰

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانه از میانگین دو عدد وسط به دست می‌آید:

$$Q_2 = \frac{32 + 34}{2} = 33$$

$Q_2 = 20$ چارک سوم $Q_1 = 30$ چارک اول

به تصاویر رو به رو توجه کنید. در شکل (الف)، (ب) و (پ) یک سری از حالت های صور تک را مشاهده می کنید.
تعداد این حالت ها را در شکل (الف)، (ب) و (پ) در جدول زیر کامل کنید.



شماره صور تک ها	انواع صور تک ها	شکل الف	شکل ب	شکل پ
۱	😊	۴	۲	۴
۲	😠	۱	۲	۱
۳	😔	۲	۲	۱
۴	☺️	۲	۲	۲
۵	😢	۲	۲	۲
۶	😭	۱	۲	۱

- در شکل الف کدام صور تک بیشتر از همه تکرار شده است؟ صور تک **۱**
- در شکل ب کدام صور تک بیشتر از همه تکرار شده است؟ همهی صور تک ها به یک اندازه تکرار شده اند.
- در شکل پ کدام صور تک بیشتر از همه تکرار شده است؟ صور تک های **۱ و ۵**

کار در کلاس صفحه ۸۸

در مسابقه‌ی پرتاب دارت، سه نفر شرکت کرده‌اند. براساس ۱۰ پرتابی که آنها انجام داده‌اند، امتیازهای زیر به‌دست آمده است:

- مدنفر اول چه عددی است؟ ۹ و ۱۰
- مدنفر دوم چه عددی است؟ مدندارد.
- مدنفر سوم چه عددی است؟ ۹

۸	۸	۹	۱۰	۹	۵	۷	۱۰	۹	۱۰	نفر اول
۷	۴	۵	۳	۲	۱	۶	۸	۹	۱۰	نفر دوم
۷	۴	۵	۹	۱۰	۱۰	۷	۹	۹	۹	نفر سوم

کار در کلاس صفحه ۸۹

دو کارخانه‌ی تولید لامپ را در نظر بگیرید. کارخانه‌ی (الف) لامپ‌های کم‌صرف و کارخانه‌ی (ب)، لامپ‌های پر‌صرف تولید می‌کند. مدیر این دو کارخانه می‌خواهد در مورد طول عمر لامپ‌های تولیدی کارخانه‌ها یافشان تحقیق انجام بدهد.

براساس داده‌های سال‌های گذشته در کارخانه‌ی (الف) و (ب)، طول عمر پنج لامپ بر حسب ماه ثبت شده است و نتایج را به صورت زیر جمع‌آوری می‌نماید.

لامپ انتخاب شده	پنجم	چهارم	سه	دوم	اول
طول عمر لامپ تولید شده در کارخانه‌ی (الف)	۱۶	۱۵	۱۴	۱۵	۱۲
طول عمر لامپ تولید شده در کارخانه‌ی (ب)	۱۳	۱۶	۰	۱۵	۰

- آیا میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانه‌ی (الف)، معیار گراش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده کارخانه‌ی (الف) است؟ **بله**
- به دلیل وجود لامپ‌های تولید شده با طول عمر صفر در کارخانه‌ی (ب) آیا باز هم میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانه‌ی (ب)، معیار گراش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده است؟ چه معیار گراش به مرکزی مناسب است؟ **خیر، میانه**
- مدیر کارخانه براساس فروشن گذشته، متوجه شده است که لامپ‌های کم‌صرف با نور سفید در منازل مردم رایج شده است. اگر او بخواهد برای امسال لامپ‌های کم‌صرف تولید کند، کدام معیار گراش به مرکز، برای تعداد این لامپ‌های تولیدی به او کمک می‌کند؟ **خیر، مد**

۱- تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش مسابقه گذشته به صورت ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۲، ۴۵، ۴۸ است. میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی گذشته را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{48 + 45 + 44 + 45 + 42 + 43}{6} = \frac{367}{6} = 61\frac{1}{6}$$

۲- بالاترین دما در هر یک از روزهای هفته گذشته اندازه گیری شده و نتایج زیر به دست آمده است. معدل یا میانگین دما در هفته‌ی گذشته چه عددی است؟

۵۵، ۲۷، ۲۹، ۳۲، ۲۸، ۳۱، ۲۹

$$\bar{x} = \frac{55 + 27 + 29 + 32 + 28 + 31 + 29}{7} = \frac{231}{7} = 33$$

۳- میانه و مد هر یک از داده‌های زیر را به دست آورید.

(الف) ۸، ۹، ۹، ۹، ۹

$$\hat{x} = 9 \quad \text{و} \quad \tilde{x} = 9$$

(ب) ۶۰، ۴۰، ۲۴، ۳۰۰، ۵۰

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۲۴، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۳۰۰

میانه ندارد

$$\tilde{x} = 50$$

(پ) ۱۵، ۸، ۳، ۱۰

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۳، ۸، ۱۰، ۱۵

میانه ندارد

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

(ت) ۵، ۱۲، ۹، ۶، ۴

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۴، ۵، ۶، ۹، ۱۲

میانه ندارد

$$\tilde{x} = 6$$

(ث) ۲۳، ۱۲، ۱۲، ۲۳

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۱۲، ۱۲، ۲۳، ۲۳

میانه ندارد

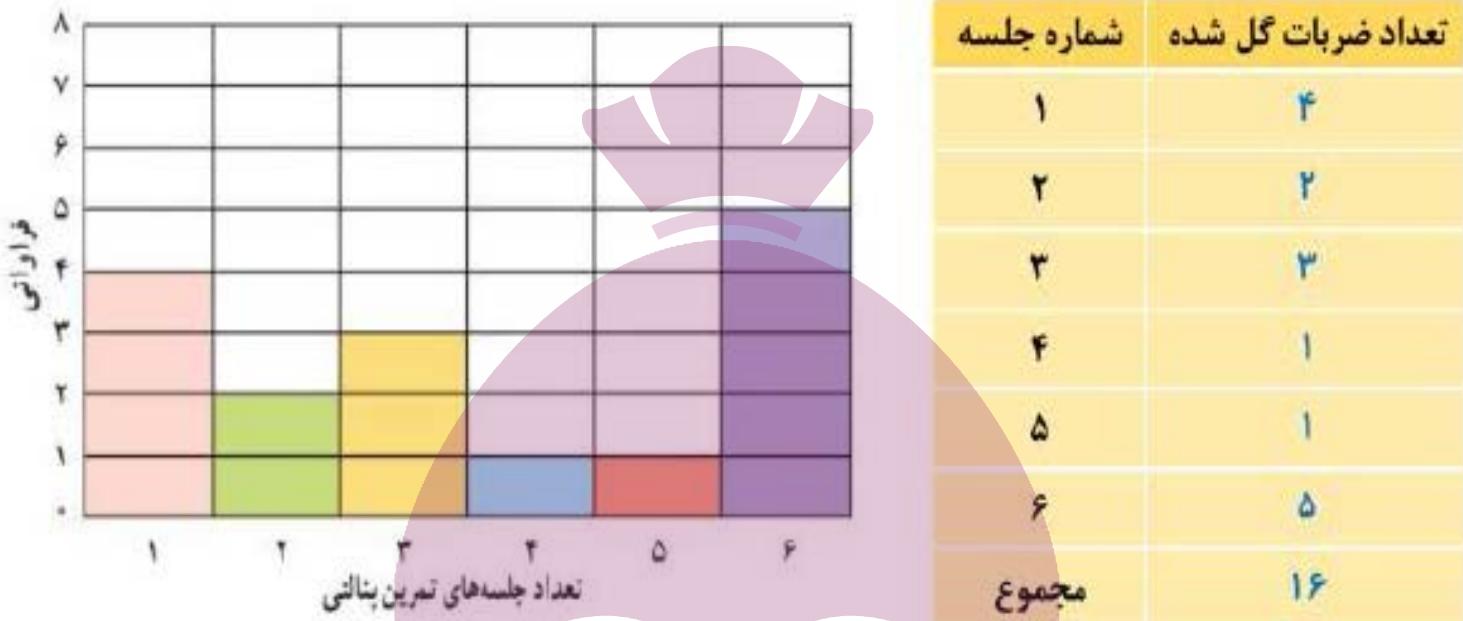
$$\tilde{x} = 17/5$$

ابتدا داده‌های کوچک به بزرگ مرتب می‌کیم:

۴، ۷، ۷، ۱۳

$$\hat{x} = 7 \quad , \quad \tilde{x} = 7$$

۴- نمودار زیر، نمودار میله‌ای مربوط به تعداد ضربات پنالتی گل شده یک بازیکن در شش جلسه‌ی تمرین پنالتی است. با توجه به نمودار، میانگین، میانه و مد تعداد ضربات گل شده را به دست آورید.



$$\bar{x} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$$

$$1, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow Q_2 = \frac{2+3}{2} = 2\frac{1}{2}$$

۵- در جدول زیر، نمرات درس ریاضی ۱۰ دانش‌آموز غرددآوری شده و میانگین نمرات داده شده است. علامت‌های سؤال چه اعدادی‌اند؟

نمرات درس ریاضی
۱۷/۵
۱۶

$$\text{میانگین نمرات} = 15/65$$

$$\text{مد نمرات} = ?$$

$$\bar{x} = 15/65 \Rightarrow \frac{17/5 + 19 + 17 + 16 + 20 + 16 + 15 + 18 + a + 18}{10} = 15/65$$

$$\frac{a + 106/5}{10} = 15/65 \Rightarrow a + 156/5 = 15/65 \Rightarrow a = 15/65 - 156/5 = 15/65 - 312/5 = 15/65 - 6240/130 = 15/65 - 480/130 = 15/65 - 360/130 = 15/65 - 30/13 = 15/65 - 15/13 = 15/65 - 75/65 = -60/65 = -12/13$$

$$\hat{x} = 18 \text{ و } 16$$

۶-داده‌های زیر مدت زمان مطالعه‌ی یک دانش‌آموز را در روزهای هفته نشان می‌دهد.

روزهای هفته								مدت زمان مطالعه (ساعت)
جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه		
۳	۳	۲	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۲	۱/۵	۲/۲۱

این دانش‌آموز به طور میانگین چند ساعت در روز، در هفته‌ی گذشته مطالعه کرده است؟

$$\bar{x} = \frac{2 + 1/5 + 2/5 + 1/5 + 2 + 3 + 3}{7} = \frac{15/5}{7} = 2/21$$

۷-یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به دست آمده است در صورتی که مبانه و مدد آن برای این خسارت‌های پرداخت شده برابر ۴۲/۲ میلیون ریال و عدد ۹ میلیون ریال می‌باشد. به نظر شما مدیر شرکت، کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا اینکه این شرکت ضرر نکند؟ میانگین معیار بهتری است تا شرکت ضرر نکند.

۸-دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه‌ی کارنامه آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فيزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دين و زندگی	۶۷	۸۰	۳۴	۶۷	۹	۵۳	درصد
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۱	۳	۳	۴	۱	۱	۱	۳	۴

اگر معدل موزون درصد این دانش‌آموز ۶۲ باشد، درس فيزیک را چند درصد زده است؟

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{(4 \times 53) + (3 \times x) + (1 \times 67) + (1 \times 34) + (4 \times 80) + (3 \times 67)}{4 + 3 + 1 + 1 + 4 + 3}$$

$$63 = \frac{834 + 3x}{16} \Rightarrow 834 + 3x = 172 \Rightarrow 3x = 58 \Rightarrow x = 19.33$$

۹-میانگین ۵ داده‌ی آماری ۱۷ است، اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟

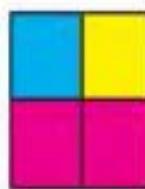
ابتدا مجموع داده‌های قبلی را به دست می‌آوریم سپس دو داده جدید را به آن اضافه می‌کنیم :

$$5 \times 17 = 85 \Rightarrow 85 + 17 + 11 = 113$$

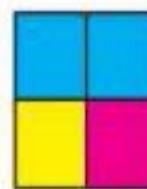
چون دو عدد ۱۷ و ۱۱ به داده‌های قبلی اضافه شده پس تعداد داده‌ها، ۷ می‌شود. بنابراین :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{113}{7} = 16.14$$

۱-دو دانش آموز، جدول های چهار خانه‌ای را به صورت رو به رو رنگ آمیزی کرده‌اند، براساس جدول مربوط به طیف رنگ‌ها، جدول عددی این دو شکل به صورت رو به رو نشان داده شده است :



$$\begin{pmatrix} 470 & 510 \\ 690 & 690 \end{pmatrix}$$



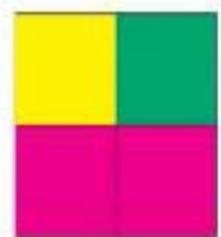
$$\begin{pmatrix} 470 & 470 \\ 510 & 690 \end{pmatrix}$$

حال جدول عددی مربوط به این دو شکل را ابتدا با هم جمع و سپس هریک از اعضای جدول عددی را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم جدول عددی حاصل را به دست آورده و شکل مورد نظر را با توجه به جدول طیف رنگ‌ها، به دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل بالا است؟

برای پاسخ به این سؤال، کاربرد علم آمار در علوم شناختی و منز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حاشیه نشان داده شده است.

طیف رنگ‌ها	رنگ‌ها
۴۹۵ تا ۴۵۰	Blue
۵۷۰ تا ۴۹۵	Green
۵۹۰ تا ۵۷۰	Yellow
۶۳۰ تا ۵۷۰	Orange
۷۵۰ تا ۶۲۰	Pink

$$\left(\frac{470 + 470}{2} \quad \frac{510 + 420}{2} \right) = \left(\frac{470}{635} \quad \frac{525}{690} \right)$$



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

فصل 3-درس 3: معیارهای پراکندگی

فصل 3-درس 3



۱- انحراف معیار و واریانس داده‌ها

فعالیت صفحه ۹۳

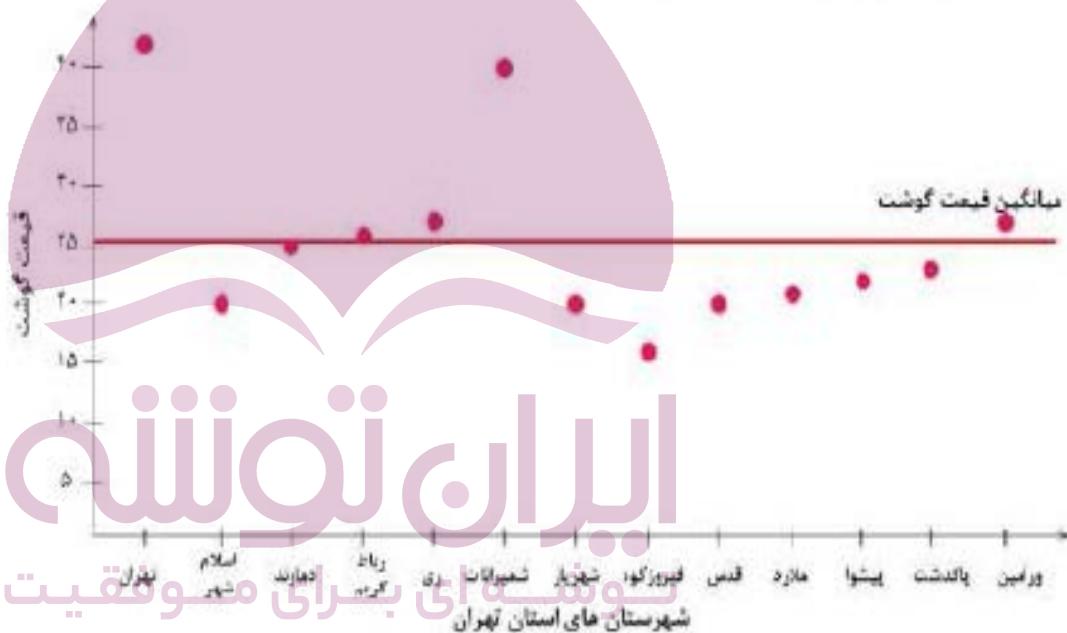
قیمت	شهرستان های استان تهران
گوشت قرمز	تهران
۴۲	تهران
۲۰	اسلام شهر
۲۵	دماوند
۲۶	رباط کریم
۲۷	ری
۴۰	شمیرانات
۲۰	شهریار
۱۶	فیروزکوه
۲۰	قدس
۲۱	ملارد
۲۲	پیشوا
۲۳	پاکدشت
۲۶	ورامین

در اقتصاد هر کشوری شاخصی تحت عنوان نرخ تورم، نقش بسیار مهمی را ایفا می کند. یکی از اقلام مصرفی مورد نیاز در محاسبه نرخ تورم در یک کشور، قیمت گوشت قرمز است. در جدول رو به رو قیمت گوشت قرمز در سال ۱۳۹۵ در شهرستان های استان تهران گردآوری شده است.

- میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان های استان تهران را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{328}{13} = 25/23 \Rightarrow \bar{x} = 25/23$$

- در نمودار زیر، میانگین گوشت قرمز در شهرستان های استان تهران را با کشیدن نقطه روی نمودار مشخص کنید.



- ۱- چند نقطه بالای خط قرمز، چند نقطه پایین خط قرمز و چند نقطه روی خط قرمز قرار دارند؟
- ۲- هرچقدر نقاط با همان قیمت گوشت قرمز در هر یک از شهرستان های استان تهران حول خط قرمز یا همان میانگین قیمت گوشت قرمز نزدیکتر باشند، نشان دهنده چیست؟ هرچقدر دورتر باشند چطور؟
- ۳- معیاری برای اندازه گیری پراکندگی قیمت گوشت قرمز یا همان نقاط حول خط قرمز می توانید معرفی کنید؟

انحراف معیار و واریانس مربوط به داده‌های قیمت گوشت قرمز در شهریان‌های تهران را می‌توانید با تکمیل جدول رو به رو محاسبه کنید.

$(x_i - \bar{x})^2$	$x_i - \bar{x}$	قیمت گوشت قرمز
۲۸۹	$۴۲ - ۲۵ = ۱۷$	۴۲
۲۵	$۲۰ - ۲۵ = -۵$	۲۰
.	$۲۵ - ۲۵ = ۰$	۲۵
۱	$۲۶ - ۲۵ = ۱$	۲۶
۴	$۲۷ - ۲۵ = ۲$	۲۷
۲۲۵	$۴۰ - ۲۵ = ۱۵$	۴۰
۲۵	$۲۰ - ۲۵ = -۵$	۲۰
۸۱	$۱۶ - ۲۵ = -۹$	۱۶
۲۵	$۲۰ - ۲۵ = -۵$	۲۰
۱۶	$۲۱ - ۲۵ = -۴$	۲۱
۹	$۲۲ - ۲۵ = -۳$	۲۲
۴	$۲۳ - ۲۵ = -۲$	۲۳
۱	$۲۴ - ۲۵ = -۱$	۲۴
تotaL		۲۳۶
میانگین		۲۵
انحراف معیار		۷/۳۶
واریانس		۵۲/۲۳۶

۲- ضریب تغییرات داده‌ها

فعالیت صفحه ۹۶

یکی از شاخص‌های کیفیت در لاستیک‌های تولید شده اتومبیل توسط یک کارخانه، طول عمر آن لاستیک‌هاست. هر چقدر متوسط طول عمر لاستیک‌های تولیدی بیشتر و انحراف معیار طول عمر لاستیک‌ها کمتر باشد، به این معناست که لاستیک‌ها کیفیت بالایی از نظر طول عمر دارند.

حال با توجه به مطالب گفته شده به بررسی کیفیت لاستیک‌های تولیدی از نظر طول عمر دو کارخانه‌ی (الف) و (ب) می‌پردازیم.

براساس داده‌های به دست آمده میانگین طول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانه و انحراف معیار آنها به شرح جدول زیر است :

انحراف معیار	میانگین	کارخانه
۵۰ کیلومتر	۵۴۰۰۰	کارخانه‌ی الف
۱۰۰ کیلومتر	۶۵۰۰۰	کارخانه‌ی ب

- شما ترجیح می‌دهید از کدام کارخانه لاستیک بخرید؟ کارخانه الف
- آیا می‌توان براساس میانگین و انحراف معیار و نمونه‌های در نظر گرفته شده قضاوت کرد؟ خبر

کار در کلاس صفحه ۹۷

(الف) با کامل کردن جدول زیر، ضریب تغییرات مربوط به طول عمر دو کارخانه را محاسبه کنید.

ضریب تغییرات موقیت انجراف معیار میانگین کارخانه

ضریب تغییرات موقیت انجراف معیار میانگین کارخانه	کارخانه
$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{50}{54000} = 0.0009$	کارخانه‌ی الف
$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{100}{65000} = 0.0015$	کارخانه‌ی ب

محصولات کدام کارخانه را انتخاب می‌کنید؟ محصولات کارخانه‌ی الف

ب) حال با تغییر واحد اندازه‌گیری در جدول قبلی و میانگین و انحراف معیار طول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانه (الف) و (ب) به صورت زیر گزارش داده شده است.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانه‌ی الف	۵۴۰۰۰۰۰ متر	۵۰۰۰۰۰ متر	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{500000}{5400000} = .09$
کارخانه‌ی ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{100}{65000} = .0015$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید میانگین و انحراف معیار لاستیک‌ها برای کارخانه‌ی (الف) برحسب واحد اندازه‌گیری متر و برای کارخانه‌ی (ب) برحسب کیلومتر است. در این حالت نیز ضریب تغییرات را در جدول محاسبه کنید. آیا ضریب تغییرات به واحد اندازه‌گیری وابسته است؟ خیر، وابسته نیست.

فعالیت صفحه ۹۷

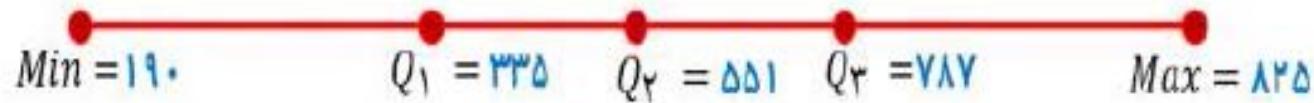
میزان بارش برف سالانه در دو پیست اسکی (الف) و (ب) برای هفت سال اندازه‌گیری و نتایج، در جدول زیر گردآوری شده است:

سال	میزان بارش برف در پیست اسکی الف	میزان بارش برف در پیست اسکی ب
۱۳۸۸	۵۵۱	۲۷۱
۱۳۸۹	۱۹۰	۰
۱۳۹۰	۴۳۵	۵۲۵
۱۳۹۱	۷۸۷	۱۰۱۶
۱۳۹۲	۴۷۲	۹۳
۱۳۹۳	۷۲۸	۵۸۱
۱۳۹۴	۸۲۵	۵۶۶

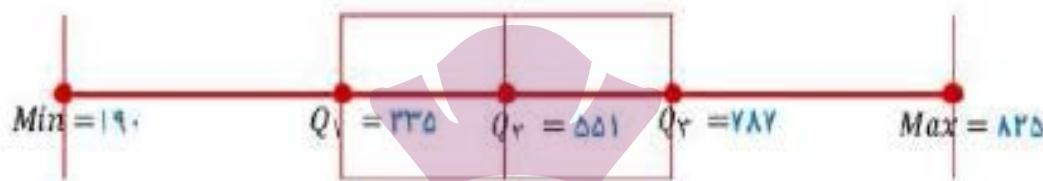
برای رسم نمودار آماری، مراحل زیر را انجام دهید.
الف) جدول زیر را کامل کنید.

سال	میزان بارش برف در پیست اسکی الف	بیشترین مقدار میزان بارش برف	چارک سوم میزان بارش برف	میانه میزان بارش برف	چارک اول میزان بارش برف	کمترین مقدار میزان بارش برف
پیست اسکی الف	۸۲۵	۷۸۷	۵۸۱	۵۵۱	۰	۱۹۰

ب) حال مقادیر جدول را روی یک محور نمایش می‌دهیم.



پ) برای مشخص کردن حدود دامنه میان چارکی (IQR) یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم. سپس با استفاده از یک خط، میانه را در جعبه مشخص می‌کنیم و در انتهای آن، از دو طرف جعبه به کمترین و بیشترین مقدار داده‌ها دو خط رسم می‌کنیم.



کار در کلاس صفحه ۹۸

- نمودار جعبه‌ای مربوط به پیست (ب) را رسم کنید. و سپس با نمودار جعبه‌ای پیست (الف) مقایسه کنید.
- اگر داده دورافتاده‌ای در داده‌ها باشد، نمودار جعبه‌ای چه تغییری می‌کند؟ وقتی پراکندگی زیاد می‌گردد نمودار کشیده‌تر می‌شود بنابراین در نمودار ب پراکندگی داده‌ها زیادتر می‌شود.



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱- فرض کنید سن افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند به صورت زیر است:

۳۲، ۵۹، ۲۶، ۵۳، ۷۴، ۱۷، ۴۵، ۲۳، ۶۴، ۵۰، ۶۱

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سن افراد را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{404}{11} = 45.81 = 46$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۳۲	-۱۴	۱۹۶
۵۹	۱۳	۱۶۹
۲۶	-۳۰	۹۰۰
۵۳	۷	۴۹
۷۴	۲۸	۷۸۴
۱۷	-۲۹	۸۴۱
۴۵	-۱	۱
۲۳	-۲۳	۵۲۹
۶۴	۱۸	۳۲۴
۵۰	۱۵	۲۲۵
۶۱	۱۶	۲۵۶

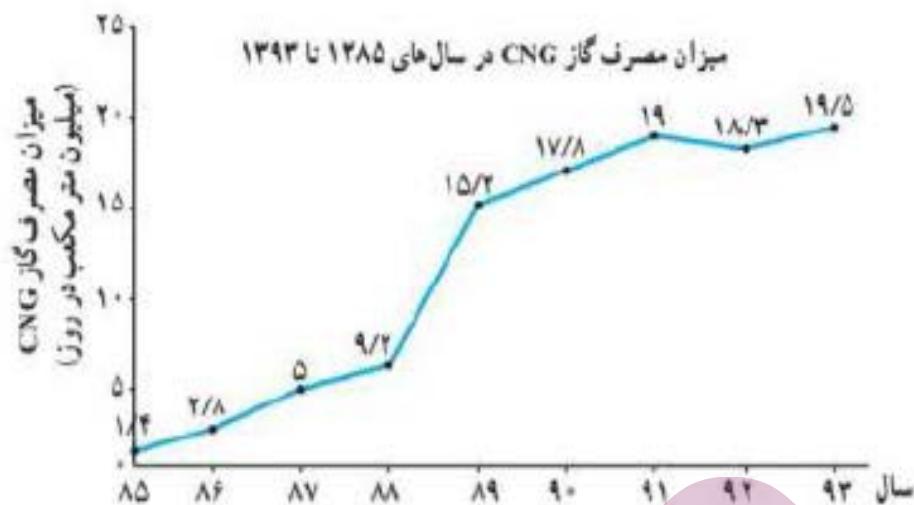
توضیحاتی برای موفقیت

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{3534}{11} = 321/27$$

$$\sigma = \sqrt{321/27} = 18/.9$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{18/.9}{46} = .4/29$$

۲-نمودار روبه رو میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ نشان می دهد. با توجه به این نمودار انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز CNG از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ را به دست آورید.



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{108/2}{9} = 12/0.2 = 12$$

سال	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۸۵	۱.۴	-۱۰/۶	۱۱۲/۳۶
۸۶	۲.۸	-۹/۲	۸۴/۶۴
۸۷	۵	-۷	۴۹
۸۸	۹.۲	-۲/۸	۷/۸۴
۸۹	۱۵.۲	۲/۲	۱۰/۲۴
۹۰	۱۷.۸	۵/۸	۳۲/۶۴
۹۱	۱۹	۷	۴۹
۹۲	۱۸.۳	۶/۳	۳۹/۶۹
۹۳	۱۹.۰	۷/۵	۵۶/۲۵
مجموع	۱۰۸/۲	—	۴۴۲/۶۶

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{442/66}{9} = 49/18$$

$$\sigma = \sqrt{49/18} = 7/1$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7/1}{12} = .58$$

ایران توشه

توشه‌ای برای معرفی

۳- انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد جدول زیر به دست آورید.

ضریب تغییرات	واریانس	انحراف معیار	اعداد
$1/42$	$1015/3$	$31/86$	$100, 12, 8, 16, 10, 4, 7$
تعریف نشده	$3/5$	$1/82$	$2, 2, 1, 0, 0, -3, -2, -1$
$0/017$	$0/029$	$0/17$	$10/11, 11/36, 10/11$ $9/88, 9/42, 9/76, 9/62$
$0/6$	$1295000/75$	$1137/98$	$2, 3000, 2500, 2000$

۴- اعداد دلخواه را در جدول زیر بنویسید و انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد به دست آورید.

ضریب تغییرات	واریانس	انحراف معیار	اعداد
$\frac{2}{5} = 0/4$	۴	۲	$2, 4, 6, 8$
$\frac{\sqrt{4/5}}{4} = 0/53$	$4/5$	$\sqrt{4/5}$	$2, 3, 5, 6, 4$
.	.	.	$7, 7, 7, 7, 7$
$1/19 = 0/17$	$\frac{1}{19} = 1/42$	$1/19$	$5, 6, 7, 8, 9$

۵- اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده ۲ باشد و میانگین آن ۴، واریانس داده‌ها را به دست آورید.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 2 = \frac{\sigma}{4} \Rightarrow \sigma = 8 \Rightarrow \sigma' = 64$$

۶- اگر ۲ داده را c برابر کنیم ضریب تغییرات داده‌ها چند برابر می‌شود؟

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{\sum cx_i}{n} = c \frac{\sum x_i}{n} = c\bar{x}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum (cx_i - c\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum c^2(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{c^2 \sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = c^2 \sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_y = |c| \sigma_x$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{|c| \sigma_x}{c\bar{x}} = \pm \frac{\sigma_x}{\bar{x}}$$

$$CV_y = \pm CV_x$$

۷- فرض کنید ۲۲ بونه گل قرمز را انتخاب و تعداد گل‌های هر بونه را شمرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است :

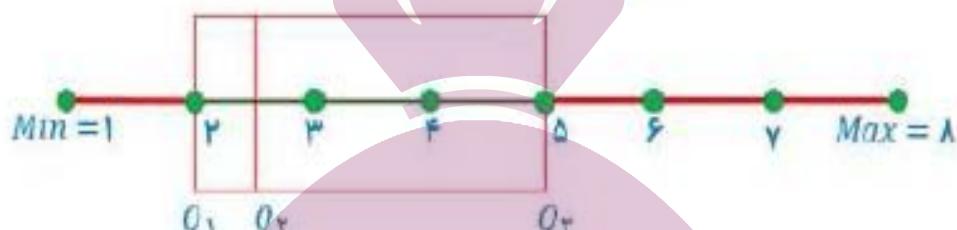
۷، ۴، ۳، ۱، ۲، ۱، ۱، ۳، ۲، ۲، ۵، ۵، ۱، ۲

نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم کنید.

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم :

۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۵، ۵، ۶، ۷، ۷، ۸

$$\min = 1 \quad \max = 8 \quad Q_1 = 2 \quad \text{و} \quad Q_r = \frac{2+3}{2} = 2.5 \quad \text{و} \quad Q_3 = 5$$



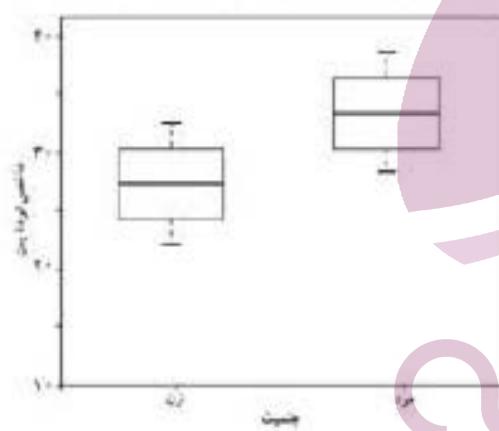
۸- نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص توده‌ی بدن (BMI) به تفکیک جنسیت بدن (BMI) رسم شده است. این نمودار را تفسیر کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) میانگین شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟

میانگین شاخص توده‌ی بدنی در آقایان بیشتر است.

ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟

توده‌ی پراکندگی یکسان است.



۹- داده‌های زیر مربوط به نرخ بیکاری یک کشور در ۵ سال گذشته است :

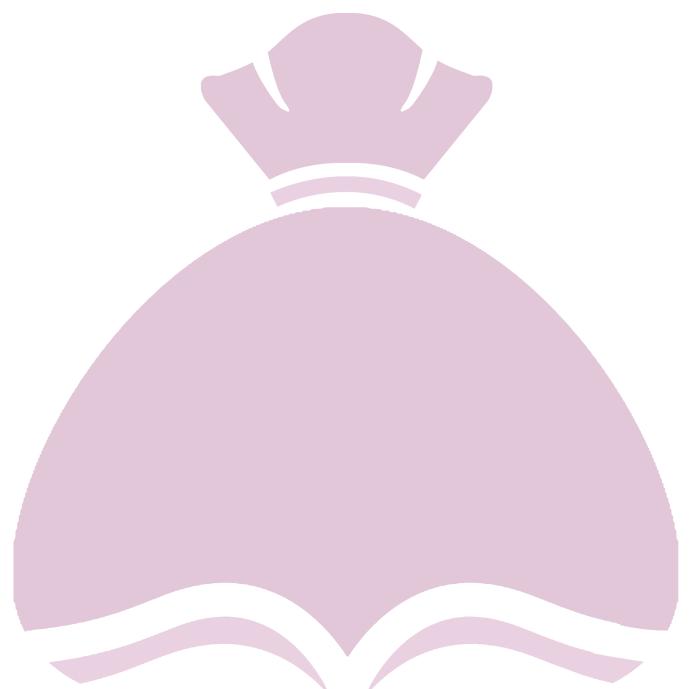
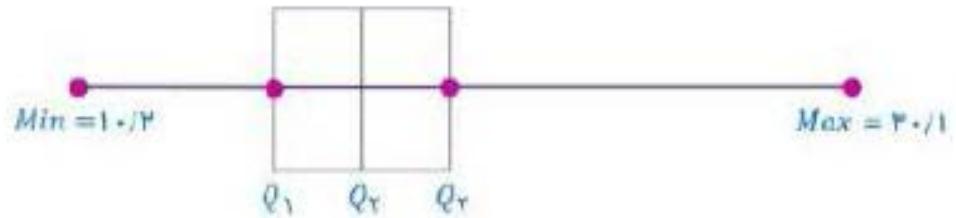
سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم	نرخ بیکاری
۳۰/۱	۱۰/۴	۱۲/۲	۱۲/۳	۱۳/۵	۱۱/۹	۱۰/۴	۱۰/۵	۱۱/۳	۱۱/۵	۱۰/۲	۱۰/۴

نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنید.

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم :

۱۰/۲، ۱۰/۴، ۱۰/۵، ۱۱/۳، ۱۱/۵، ۱۱/۹، ۱۲/۲، ۱۳/۵، ۳۰/۱

$$\min = 10/2 \quad \max = 30/1 \quad Q_1 = 10/5 \quad \text{و} \quad Q_r = \frac{11/5 + 11/9}{2} = 11/2 \quad \text{و} \quad Q_3 = 13/5$$



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

فصل 4-درس 1: گردآوری داده ها

فصل 4-درس 1



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

درس اول : گردآوری داده‌ها

فعالیت صفحه ۹۶

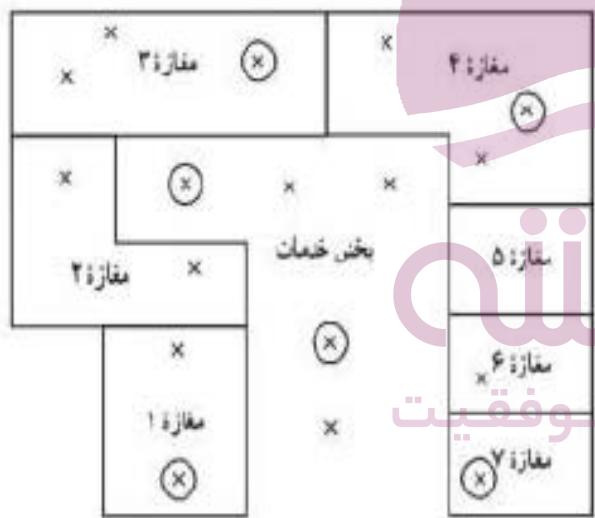
می خواهیم برخی از ویژگی‌های مگس‌های سفید مزاحم در شهر تهران را بررسی کنیم. آیا برای انجام این کار می‌توانیم ویژگی‌های همه مگس‌های سفید را اندازه‌گیری کنیم؟ **خیر** آیا همه آنها در دسترس‌اند؟ **خیر** آیا زمان و هزینه لازم برای این کار در اختیار داریم؟ **خیر**

کار در کلاس صفحه ۱۰۴

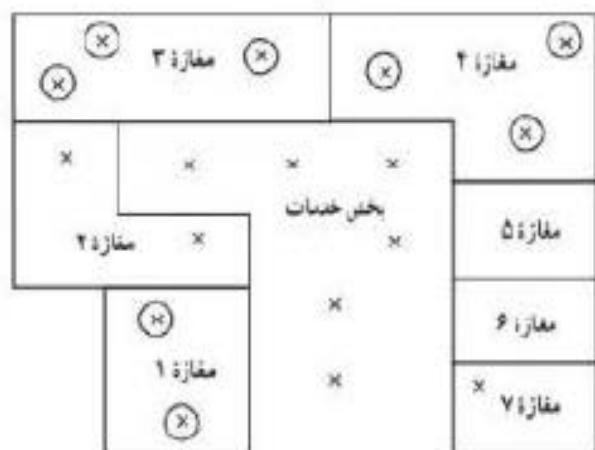
در فعالیت قبل هر مگس سفید **واحد آماری** است. همه مگس‌های سفید، که کل واحدهای آماری هستند، جامعه‌ی آماری را تشکیل می‌دهند. اگر سن همه مگس‌های سفید را در اختیار داشته باشیم، داده‌های **نمونه** را داریم. ۱۰۰ مگس سفید معروف یک **نمونه گیری** است.

فعالیت صفحه ۹۵

۱- می خواهیم متوسط درآمد کارکنان یک مجتمع تجاری را محاسبه می‌کنیم. اگر این مجتمع از ۷ مغازه و یک بخش خدمات تشکیل شده باشد، که روی هم ۱۷ کارکن دارند، چگونه از بین ۱۷ نفر، ۶ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنید؟ یک راه ساده برای انجام این کار نوشتن اسمی کارکنان با شماره‌ی کارمندی آنها روی ۱۷ برگه‌ی کوچک و انتخاب تصادفی ۶ تا از آنهاست. آیا این روش نمونه‌گیری، نمونه‌گیری تصادفی ساده است؟ بله آیا همه واحدهای جامعه احتمال برابر برای انتخاب دارند؟ بله

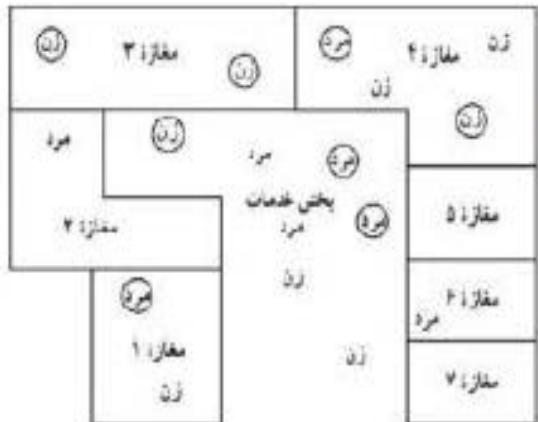


در شکل روبرو نقشه‌ای از مجتمع تجاری ترسیم شده که کارکنان با **X** و دور انتخاب شدگان یک دایره رسم شده است.



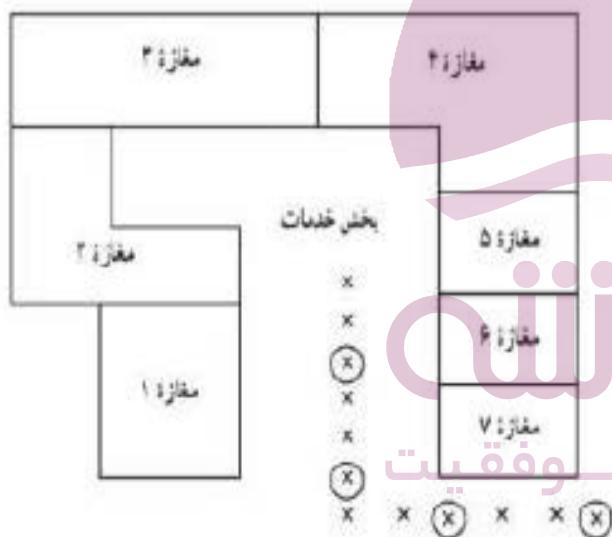
۲- هر یک از ۷ مغازه و بخش خدمات را به صورت یک گروه فرض می‌کنیم. حال از بین ۸ گروه در نظر گرفته شده، سه تا از آنها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و در هر یک سرشماری انجام می‌دهیم. آیا این روش نمونه‌گیری سریع‌تر است؟ بله

سؤال : می خواهیم میانگین نمرات ریاضی دانش آموزان شهر تهران را محاسبه کنیم. اگر فهرست همه دانش آموزان را نداشته باشیم، اما فهرست مدارس موجود باشد، نمونه گیری خوشای، راه مناسبی برای گردآوری داده هاست. اگر بودجه کافی یا زمان لازم برای نمونه گیری تصادفی ساده نداشته باشیم آیا این روش مقرر و به صرفه است؟



۳- اگر بخواهیم یک نمونه ۸ تایی شامل دقیقاً ۴ مرد و ۴ زن از مجتمع تجاری بگیریم، چگونه این کار را انجام می دهیم؟ نمونه گیری طبقه ای زمانی که جامعه به دو یا چند بخش تقسیم می شود که عضو مشترکی ندارند، می توان از هر بخش جداگانه نمونه گیری کرد. این کار با افزایش هزینه یازمان همراه است، ولی انتظار داریم که دقت را نیز افزایش دهد.

۴- فرض کنید در مجتمع، ۱۲ نفر حضور دارند. صبر می کنیم که مجتمع تجاری تعطیل شود و هنگام خروج کارکنان می خواهیم نمونه ۴ نفری انتخاب کنیم. برای این منظور، همانند شکل زیر عمل کرده ایم. ابتدا از ۳ نفر یکی را به تصادف انتخاب می کنیم. در این شکل، نفر اول انتخاب شده است. حال با همین رویه برای سه نفر بعد هم، نفر اول را انتخاب می کنیم و ادامه می دهیم. این روش نمونه گیری شاهدت پیشتوی به کدام یک از روش های نمونه گیری قبلی دارد؟ خوشای یا طبقه ای؟ نمونه گیری طبقه ای این کار باعث چه نوع صرفه جویی می شود؟ هم در وقت و هم در هزینه صرفه جویی می شود.



به نظر شما این نوع نمونه گیری در کدام یک از مثال های زیر امکان دارد:

- گردآوری اطلاعات از مبدأ و مقصد مسافران در خروجی - ورودی یک شهر: امکان دارد
- کنترل کیفیت یک خط تولید: امکان دارد
- انتخاب نمونه از ماهی های یک حوضچه: امکان دارد
- زمانی که فهرستی از واحد های جامعه وجود نداشته باشد: امکان دارد
- فهرست واحد های آماری ترتیب تصادفی داشته باشند: امکان دارد

روش نمونه‌گیری	مزیت	محدودیت
تصادفی ساده	همه داده‌ها برای انتخاب شدن در نمونه دسترسی به همه داده‌ها دشوار و هزینه‌بر است.	دسترسی ساده به همه داده‌ها در نمونه احتمال یکسان دارند.
خوش‌های	دسترسی ساده به همه داده‌ها و هم شانس هزینه‌بر بودن - وقت‌گیر بودن داده‌ها بودن داده‌ها	دسترسی ساده به همه داده‌ها و هم شانس هزینه‌بر بودن - وقت‌گیر بودن داده‌ها - داده انتخاب شده ممکن است ویژگی مورد نظر را نداشته باشد.
سامانمند	دسترسی ساده به همه داده‌ها و هم شانس هزینه‌بر بودن داده‌ها - داده انتخاب شده ممکن است ویژگی مورد نظر را نداشته باشد.	دسترسی ساده به همه داده‌ها و هم شانس هزینه‌بر بودن داده‌ها - داده انتخاب شده ممکن است ویژگی مورد نظر را نداشته باشد.

فعالیت صفحه ۱۰۷

از مگس‌های سفید با چه روشی می‌توان نمونه‌گیری خوش‌های فهرستی از آنها نداریم. تعداد آنها را هم نمی‌دانیم. می‌توان چند منطقه از تهران را به تصادف انتخاب کرد و در هر منطقه نمونه در دسترس را انتخاب و بررسی کنیم. آیا این روش نمونه‌گیری به تمامی واحدهای جامعه شانس انتخاب می‌دهد؟ خیر

کار در کلاس صفحه ۱۰۸

راه حلی ارائه کنید که نمونه‌گیری های غیر احتمالی زیر را احتمالی می‌کند. هر چند که به صورت غیر واقعی باشد.

مثال	نمونه‌گیری غیر احتمالی	نمونه‌گیری احتمالی
نمونه‌گیری از یک قفس بزرگ خرگوش های یک آزمایشگاه	بدون برنامه‌ریزی خرگوش‌هایی را بروی دارد که دستش به آنها می‌خورد.	خرگوش‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم و از هر دسته یک خرگوش برمی‌داریم.
در مطالعاتی که در آنها فرآیند سنجش که سنجیده می‌شود ناخواهایند یا دردسر آفرین است.	داوطلبانی که حاضر به پاسخ به سوالات شما در یک نظرسنجی می‌شوند.	ابتدا اشخاص را به دسته‌های مختلف غیرمتداخل تقسیم‌بندی می‌کنیم و سپس انتخاب می‌کنیم.
نمونه‌گیری از زغال‌سنگ‌های یک واگن	نمونه در دسترس انتخاب می‌شود.	ابتدا به چند قسم تقسیم می‌کنیم و سپس از هر قسم نمونه‌ای را انتخاب می‌کنیم.

فرض کنید آمارگیری می‌خواهد بداند در یک شهر خانواده‌ها چند نفره‌اند. او برای این کار صد نفر را به تصادف انتخاب می‌کند و از آنها می‌پرسد: «خانواده‌شما چند نفر است؟» آیا این روش برای نمونه‌گیری درست است؟ جواب منفی است ادله‌ای آن هم این است که واحدهای آماری مورد نظر در این مسئله خانواده‌ها هستند نه افراد. آیا خانواده‌های مختلف احتمال حضور برابر در این نمونه‌گیری را دارند؟ واضح است که احتمال حضور هر خانواده متناسب با تعداد اعضا آن است و مثلًا احتمال حضور یک خانواده شش نفره دو برابر احتمال حضور یک خانواده سه نفره است و این، یعنی شرایط نمونه‌گیری ساده برقرار نیست. نتیجه چنین ایرادی در نمونه‌گیری این است که هر چه تعداد نمونه‌ها را افزایش دهیم. نتایج به مقداری اشتباه نزدیک‌تر می‌شود. مثلًا فرض کنید آمار واقعی تعداد افراد خانواده‌ها چنین باشد:

درصد	۸/۵	۲۰/۷	۲۸/۵	۲۷/۶	۱۴/۷	۵ و بیشتر	تعداد افراد
۱	۲	۳	۴	۴	۱۴/۷	۵ و بیشتر	

در این جامعه تعداد خانواده‌های دو نفره تقریباً $\frac{20}{14/7} = \frac{20}{2} = 1/4$ برابر تعداد خانواده‌های پنج نفره (و بیشتر) است. ولی با آمارگیری نادرستی که توضیح داده شد به نتیجه دیگری خواهیم رسید؛ احتمال حضور یک خانواده پنج نفره (و بیشتر) در نمونه‌ها بیشتر از $\frac{2}{5}$ برابر احتمال حضور یک خانواده دونفره است و لذا عددی که در روش نادرست آماری به دست می‌آید کمتر از $\frac{5}{14/7} = \frac{5}{4} = 1/4$ است. نتیجه اینکه هر چند واقعیت این است که نسبت خانواده‌های دونفره بسیار بیشتر از خانواده‌های شصت نفره (و بیشتر) است، ولی ما با نمونه‌گیری اشتباه به نتیجه‌ای بسیار متفاوت می‌رسیم.

ایران توشه

فرض کنید در شهری جمعیت کلاس‌های پایه‌ی ششم دبستان به شکل زیر باشد:

تعداد کلاس	۷	۹	۱۰	۱۱	۱۱	۱۱	۱۰	۹	۷	۵	۴	۲۵	تعداد دانش آموز
تعداد کلاس	۷	۹	۱۰	۱۱	۱۱	۱۱	۱۰	۹	۷	۵	۴	۲۵	تعداد دانش آموز

(الف) چه تعداد کلاس پایه‌ی ششم در این شهر وجود دارد؟
 $7 + 9 + 10 + 11 + 11 + 11 + 10 + 9 + 7 = 87$

تعداد دانش آموزان پایه‌ی ششم چند تاست؟

$$(25 \times 7) + (26 \times 9) + (27 \times 10) + (28 \times 11) + (29 \times 11) + (30 \times 11) + (31 \times 8) + (32 \times 8) + (33 \times 7) + (34 \times 5) + (35 \times 4) = 2565$$

ب) چه درصدی از کلاس‌های پایه‌ی ششم بیشتر از ۳۰ دانش‌آموز است؟

$$\frac{۳۲}{۸۷} \times 100 = 36/78\% \Rightarrow \text{تعداد کلاس‌های بیش از ۳۰ نفر}$$

پ) اگر به تصادف یک دانش‌آموز ششم دبستانی را انتخاب کنیم، احتمال اینکه کلاسی که در آن درس می‌خواند بیشتر از ۳۰ دانش‌آموز داشته باشد، چقدر است؟

$$\frac{\text{تعداد کلاس‌های بیش از ۳۰ نفر}}{\text{تعداد کل دانش‌آموزان}} = \frac{1045}{2565} = 0/4$$

ت) فرض کنید فردی برای اینکه بفهمد کلاس‌های ششم دبستان چند نفری‌اند، تعداد زیادی دانش‌آموز ششم دبستانی را به تصادف انتخاب کند و از آنها پرسد «کلاس شما چند نفره است؟» این کار چه ایرادی دارد؟ وقت‌گیر است.

ث) اگر با روش قبل درصد کلاس‌های با بیش از ۳۰ دانش‌آموز را محاسبه کنیم، نتیجه از جواب واقعی چند درصد فاصله خواهد داشت؟ تقریباً تا ۶۴ درصد فاصله خواهد داشت.

کار در کلاس صفحه ۱۰۹

فرض کنید بخواهیم میزان مطالعه‌ی غیر درسی دانش‌آموزان یک مدرسه را بررسی کنیم. برای این سؤال را طراحی کرده‌ایم و می‌خواهیم از یک نمونه ۳۰ نایی آن را پرسیم:

«در یک سال گذشته چند کتاب غیردرسی خوانده‌اید؟»

روش‌های زیر را نقد کنید:

الف) پرسیدن سؤال از تعدادی از دانش‌آموزانی که در کتابخانه هستند.
احتمال بالا بودن میزان مطالعه بیشتر است زیرا دانش‌آموزانی که در کتابخانه هستند به مطالعه علاقه و یا عادت دارند.

ابزارهایی برای متوافقیت

ب) گذاشتن تعدادی پرسشنامه در محل رفت و آمد دانش‌آموزان.
دانش‌آموزانی به سراغ پرسشنامه می‌روند که اهل مطالعه هستند و در این صورت نتایج غیرواقعی خواهد بود.

پ) پرسیدن از دانش‌آموزانی که صبح وارد مدرسه می‌شوند و مایل‌اند به سؤال مذکور جواب دهند.
قطعانه دانش‌آموزان مایل به پاسخ‌گویی نخواهند بود به خصوص دانش‌آموزانی که به مطالعه عادت ندارند.

شما چه روشی را پیشنهاد می‌کنید که به نمونه‌گیری تصادفی نزدیکتر باشد؟
دانش‌آموزانی از همه پایه‌ها و به صورت تصادفی برای پرکردن فرم انتخاب شوند.

کار در کلاس صفحه ۱۱۰

از جمله مسائلی که مردم در مورد آنها به نظرسنجی‌ها علاقه زیادی نشان می‌دهند، انتخابات است. با این وجود، گاهی مردم و گاهی گروه‌های سیاسی از روش‌هایی برای کشف نظر مردم استفاده می‌کنند که آنها را گمراه می‌کند. در این مورد روش‌های زیر را نقد کنید:

الف) پرسیدن نظر دوستان و اطرافیان.

نظرسنجی به سمت انحراف خواهد رفت زیرا دوستان و اطرافیان یک شخص غالباً هم نظر خواهند بود.

ب) طراحی یک نظرسنجی در وبگاهی پرطرفدار و لحاظ کردن ساز و کاری که از یک آدرس بیش از یک بار رأی گرفته نشود.

در یک وبگاه قطعاً یک جهت تغیری خاصی مطرح است و بنابراین نظرسنجی به سمت انحراف خواهد رفت.

کار در کلاس صفحه ۱۱۳

- ۱- چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانشآموزان یک مدرسه پیشنهاد می‌کنید؟ پرسشنامه
- ۲- فرض کنید زمان لازم را برای گردآوری همه داده‌های دانشآموزان در اختیار نداشته باشید. اگر بخواهیم نمونه‌ای را انتخاب و آمارگیری کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید که نمونه به صورت تصادفی انتخاب شود؟ اصولاً دانشآموزان براساس بلندی و کوتاهی قد در کلاس درس می‌شوند بنابراین از هر کلاسی به صورت تصادفی و از سه قسمت جلوی کلاس، وسط کلاس و آخر کلاس، دانشآموزانی را انتخاب می‌کیم.

ایران نوشه

کار در کلاس صفحه ۱۱۴

- الف) کدام روش برای گردآوری هر یک از داده‌ها مناسب است؟
- ۱- تعداد قلم‌های هر دانشآموز در یک کلاس: مصاحبه
 - ۲- ساعت خواب دانشآموزان کلاس درس شما در شب گذشته: پرسشنامه
 - ۳- طول قد دانشآموز یک کلاس: پرسشنامه

ب) می‌خواهیم طول قد دانشآموز یک کلاس یا مدرسه وابه یکی از سه روش زیر آمارگیری کنیم. هر یک از این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند. چگونه می‌توان این محدودیت‌ها را ای بین برد؟

پرسشنامه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان بر است.

پرسشنامه را تحويل می‌دهیم و پس از زمانی معین برای پاسخگویی، آن را دریافت می‌کنیم و یا پرسشنامه را به صورت اینترنتی برای هر شخص می‌فرستیم.

مشاهده: اگر به دقت زیادی نیاز داشته باشیم، مناسب نیست.
از وسائلی که قد را به صورت دقیق اندازه‌گیری می‌کنند استفاده می‌کنیم.

دادگان‌ها: همیشه اطلاعات ثبتی در اختیار نیست.
اطلاعات ثبتی توسط دانش آموzan ارسال شود.

فعالیت صفحه ۱۱۴

قرار است درباره افرادی که از کوه دنا بالا رفته‌اند، پژوهشی آماری انجام دهیم. واحدهای آماری این پژوهش، همه‌ی افرادی هستند که توانسته‌اند به قله برسند. هدف از این پژوهش می‌تواند فرهنگی، یا علمی باشد. بسته به نوع پژوهش، یک یا چند ویژگی این افراد (مانند طول قد یا جنسیت) مورد نیاز است. به هر یک از این ویژگی‌ها که مورد پژوهش قرار می‌گیرد، متغیر می‌گویند. سایر متغیرها می‌توانند مواردی هائند: سن، وزن، ملیت، میزان تحصیلات و درآمد باشند. متغیرهای مورد بررسی در یک پژوهش ممکن است کمی یا کیفی باشند.
از آنایی که همه داده‌های جامعه در اختیار است و همه داده‌ها ثابت‌اند بنابراین پارامتر مورد نظر نیز ثابت خواهد ماند.



ایران توش
توشه‌ای برای موفقیت

۱- در نمونه‌گیری تصادفی ساده، احتمال اینکه فرد به خصوصی در اولین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟ اگر مسئله با جای‌گذاری باشد، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟ اگر مسئله بدون جای‌گذاری باشد، و از نتیجه انتخاب اول اطلاع نداشته باشیم، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد،

چقدر است؟ در هر سه حالت احتمال برابر است با: $\frac{1}{\text{تعداد اعضای نمونه}}$

۲- آیا در نمونه‌گیری خوش‌های احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است؟ بله چرا؟ زیرا واحدهای آماری هم‌شانس هستند. احتمال انتخاب خوش‌ها چطور؟ بله آیا این روش نمونه‌گیری احتمالی است؟ بله

۳- روش‌های نمونه‌گیری احتمالی چه مزیتی بر نمونه‌گیری‌های غیر احتمالی دارند؟ در روش‌ها نسونه‌گیری احتمالی همه اعضاء می‌توانند انتخاب شوند و نتیجه هم‌شانس است.

۴- برای هریک از روش‌های نمونه‌گیری احتمالی دو مثال واقعی بباورید.
نمونه‌گیری ساده:

۱- انتخاب چند نفر از شرکت کنندگان در یک جشنواره برای اهدای جوایز قرعه‌کشی

۲- انتخاب ۱۰۰ نفر از کارکنان یک کارخانه برای نظرسنجی

نمونه‌گیری خوش‌های:

۱- انتخاب دانشجویان دانشگاه‌های آزاد یک شهر

۲- انتخاب دانشآموزان چند منطقه از یک شهر ای برای موفقیت

نمونه‌گیری طبقه‌ای:

۱- انتخاب دانشجویان ممتاز یک دانشگاه در سه سال ۱۳۹۶ تا ۱۳۹۵

۲- انتخاب کتاب از بین ۳ نوع کتاب تاریخی، رملن و علمی یک کتابخانه برای بررسی میزان امانت گرفتن آنها

نمونه‌گیری سامانمند:

۱- دانشآموزان یک کلاس را براساس فامیل به ترتیب (حرروف الفبا) به گروه‌های ۵ نفره تقسیم می‌کنیم و سپس نفر دوم هر گروه را انتخاب می‌کنیم.

۲- از هر ۵ دانشآموزی که وارد مدرسه می‌شود نفر دوم را انتخاب می‌کنیم.

ابران توشه

۵-اگر اندازه‌ی جامعه بزرگ باشد، نمونه‌گیری با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری تقریباً مثل هم هستند. در این صورت، آیا می‌توانید راه حل کلی برای انتخاب تصادفی ۱۱ نمونه از یک فهرست ۷۰ تایی ارائه کنید؟ از فهرست ۷۰ تایی یک نمونه تصادفی انتخاب می‌کنیم. و این کار را ۱۱ تکرار می‌کنیم.

۶-آیا احتمال انتخاب واحدهای آماری در نمونه‌گیری طبقه‌ای برابر است؟ در هر طبقه چطور؟
بله، در نمونه‌گیری طبقه‌ای این احتمال هم شانس است.

۷-فرق بین داده و متغیر چیست؟

داده‌ها واقعیت‌هایی هستند که به عنوان مرجع و به صورت خام برای محاسبه واستنباط مازیک چیز به کار می‌رود و متغیر کمیتی است که می‌تواند از عضوی به عضو دیگر متفاوت باشد و مقادیر مختلفی به آن اطلاق می‌شود. در واقع متغیر ویژگی‌هایی از چیزی (شی یا شخص) است که داده‌های آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۸-فرق بین آماره با پارامتر چیست؟

پارامتر کمیتی است که مشخصه‌ای معین را در مورد کل جامعه شرح می‌دهد. اما آماره کمیتی است که به عنوان برآورد پارامتر استفاده می‌شود و از یک نمونه به دست می‌آید.

۹-در یک جامعه‌ی آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟
اگر سه نمونه با اندازه‌ی یکسان از یک جامعه داشته باشیم، می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟
بله

۱۰-در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذایی، سوال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده‌اند؟

الف) متغیر را مشخص کنید. این متغیر کمی است یا کیفی؟ وعده غذایی، کیفی

ب) کدام روش گردآوری داده‌ها برای مطالعه مناسب است؟ مصاحبه

پ) جامعه‌ی آهاری در اینجا چیست؟ در این مطالعه پارامتر و آماره چه چیزی می‌توانند باشند؟ ۱۲۶۱ مشتری

۱۱-کدام روش گردآوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

- میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها.

پرسشنامه، هر مشتری با آرامش پرسشنامه را تکمیل کند.

- سن همه‌ی دانش آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایه‌ی دهم.
دادگان، دانش آموزان در هنگام ثبت نام اطلاعات خود را به دیبرستان داده‌اند.
- تعداد سرفشنیان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر مشاهده، صرفاً با مشاهده می‌توان به این اطلاعات دست یافت.

۱۲- فرض کنید جامعه‌ای از $N = 100$ عضو تشکیل شده و می‌خواهیم نمونه‌ای به اندازه‌ی $n = 20$ از آن انتخاب کنیم. در هر یک از حالت‌های زیر احتمال انتخاب هر عضو جامعه به عنوان نمونه چقدر است؟ نام هر روش نمونه گیری را بگوید.

الف) اگر جامعه به دو قسمت ۵۰ تایی تقسیم شود و بخواهیم از هر قسمت نمونه‌ی تصادفی ۱۰ تایی انتخاب کنیم.
نمونه گیری طبقه‌ای، $\frac{1}{25}$

ب) اگر جامعه به تصادف به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شود و دو قسمت را به عنوان نمونه انتخاب کنیم.
نمونه گیری خوش‌ای، $\frac{1}{5}$

پ) اگر جامعه به تصادف به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود، و از قسمت اول یک عضو به تصادف انتخاب شود. فرض کنید عضو انتخابی دومین عضو باشد و از قسمت‌های بعدی نیز دومین عضو انتخاب شود.

نمونه گیری سیستماتیک، $\frac{1}{5}$

۱۳- دلایل اربیبی در نمونه‌گیری‌های زیر را ذکر کنید. کدام روش گردآوری داده‌ها برای آنها مناسب‌تر است؟
الف) نمونه‌گیری راحت: افراد در دسترس را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم.

افرادی که نیستند انتخاب نمی‌شوند.

ب) نمونه‌ی غیر تصادفی: عامل شائس در انتخاب نمونه نقشی ندارد.
انتخاب براساس سلیقه صورت می‌گیرد.

پ) نمونه‌گیری ایمیلی (رایانامه‌ای): پرسش نامه‌ای به ایمیل‌های انتخاب شده ارسال می‌شود.
افرادی که ایمیل ندارند انتخاب نمی‌شوند.

ت) نمونه‌گیری تلفنی: از دفترچه‌ی راهنمای تلفن تعدادی شماره به تصادف انتخاب می‌شود.
افرادی که تلفن ندارند انتخاب نمی‌شوند.

ث) برخی از اعضای انتخاب شده در نمونه حاضر به پاسخگویی نمی‌باشند.
 فقط افرادی که مایل به پاسخگویی هستند انتخاب می‌شوند.

۱۴- نوع روش نمونه‌گیری مناسب تر را انتخاب کنید.

الف) شرکت وارد کننده‌ی خودروهای سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آنها می‌خواهد ده درصد از خودروهایی را که به مرور زمان وارد کشور می‌شوند بازرسی کند. [خوش‌آی](#)

ب) مدیر مدرسه‌ی ۶۰۰ نفری می‌خواهد نظر دانش آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه براساس یک نمونه‌ی ۱۲ تایی بداند. [تصادفی](#)

پ) در قسمت قبل اگر مدرسه، شش پایه داشته باشد و ما حدس بزنیم که نظر ۶ پایه باهم تفاوت دارد (با فرض برابر بودن تعداد دانش آموزان در پایه های مختلف). [سیستماتیک](#)

۱۵- چگونه از ارقام ۰ تا ۹ عدد تصادفی انتخاب می‌کنید؟ آیا با روش پیشنهادی شما می‌توان عدد تصادفی بین اعداد ۰ تا ۹۹ انتخاب کرد؟ آیا امکان توسعه‌ی روش پیشنهادی شما به انتخاب تصادفی از فهرستی ۱۰۰۰ تایی امکان‌پذیر است؟

به کمک تابع *Rand* در ماشین حساب در هر سه حالت می‌توان عددی تصادفی انتخاب کرد. به این صورت که یک عدد بین ۰ و ۱ در نظر می‌گیریم و آن را در ۹ ضرب می‌کرد و سپس گرد می‌کنیم تا عددی بین ۰ تا ۹ به صورت تصادفی انتخاب شود. حال اگر عددی که بین ۰ تا ۱ انتخاب کردیم را در ۹۹ ضرب کنیم می‌توان عددی بین ۰ تا ۹۹ به دست آورد و برای فهرست هزارتابی نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

فصل4-درس2:برآورد

فصل4-درس2



ایران توشه

توضیحاتی برای موفقیت

یک شرکت تولید لیوان شیشه‌ای می‌خواهد تعداد لیوان‌هایی را که در یک بسته قرار می‌دهد مشخص کند. تعداد لیوان‌ها در هر بسته به میانگین تعداد اعضا کشور بستگی دارد که بعد خانوار نام دارد. مثلاً در ۷ سال پیش بعد خانوار (میانگین تعداد اعضا خانواده‌ها) ۴ بوده است. لذا بسته‌بندی‌ها از ۶ به ۴ کاهش داده شد. از آنجا که فروش شرکت کم شده، به نظر کارشناسان، دلیل آن تغییر بعد خانوار در کشور است. بعد خانوار هر کشور از اطلاعات سرشماری قابل دسترسی است که ۷ سال پیش انجام شده است، که در ایران هر ۱۰ سال یک بار انجام می‌شود. لذا داده‌های جدید آن تا ۳ سال آینده در دسترس نیست. از آنجا که سرشماری روش مقرر به صرفه‌ای برای گردآوری داده‌ها به منظور پاسخگویی به این سوال نیست، شرکت تصمیم می‌گیرد که بعد خانوار خریدارهای محصول این شرکت را به وسیله نمونه‌گیری انجام دهد.

در اینجا صورت ساده‌تر آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، بعد خانوار ۹ خریدار محصول به صورت زیر باشد. میانگین بعد این نمونه چقدر است؟ میانگین بعد این نمونه $\frac{3}{23}$ است.

۴	۱	۲	۳	۵	۲	۷	۲	۳
---	---	---	---	---	---	---	---	---

در این فعالیت میانگین تعداد اعضا خانوار پارامتر است. آماره، خریدار محصول؛ و برآورد نقطه‌ای پارامتر میانگین بعد این نمونه است.

کار در کلاس صفحه ۱۱۹

فرض کنید، جامعه از ۶ نفر تشکیل شده باشد با درآمد ماهیانه برحسب میلیون تومان به صورت زیر:

۴	۱	۳	۵	۲
---	---	---	---	---

می‌خواهیم براساس نمونه‌ای به اندازه ۱، میانگین این جامعه ای عضوی را برآورد کنیم. در واقع باید از بین ۶ نفر، یکی را به تصادف انتخاب کنیم. اگر شخصی انتخاب شود که درآمدش ۵ باشد، این عدد برآورد میانگین درآمد همه افراد است. ممکن است فرد انتخابی درآمدی نداشته باشد. آن‌گاه صفر به عنوان نمونه انتخاب شده و برآورد میانگین درآمد این افراد برابر ۰ می‌شود. نمونه‌های مختلف منجر به برآوردهای متفاوتی می‌شوند.

- در این مثال، پارامتر جامعه چیست و مقدار آن چقدر است؟ پارامتر جامعه، میانگین درآمد افراد است که برابر با $\frac{2}{5}$ می‌باشد.

- آیا براساس هر یک از نمونه‌ها برآورد به مقدار پارامتر نزدیک است؟ خیر

- چه راه حلی پیشنهاد می‌کنید که برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود؟ با افزایش دادن اندازه‌ی نمونه می‌توان برآورد را به پارامتر نزدیک کرد.

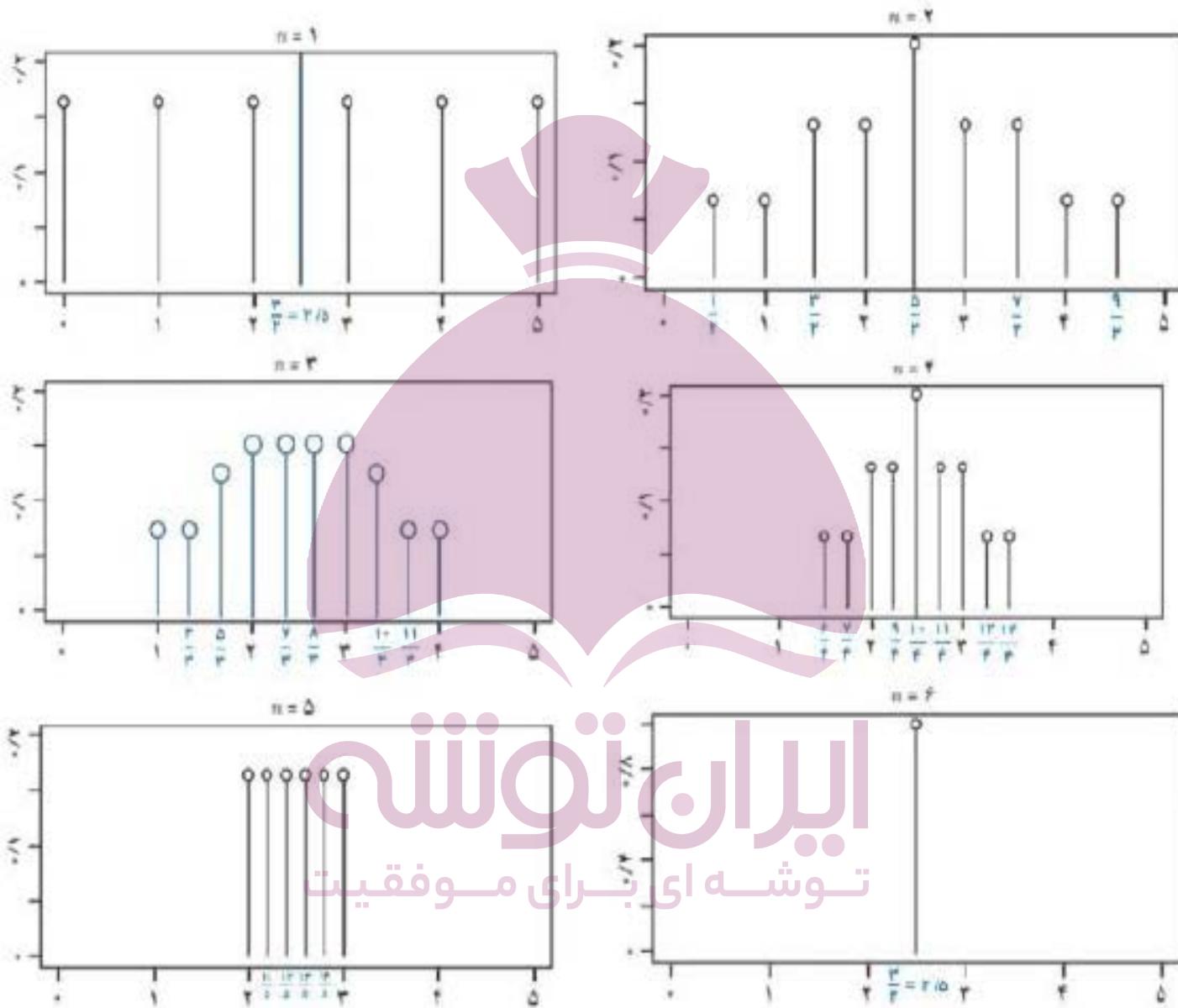
- آیا نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی ۲ وجود دارد که مقدار پارامتر را دقیقاً $2/5$ برآورد کند؟ بله، نمونه ۳ و ۱
 - آیا امکان دارد با نمونه‌های مختلف برآوردهای برابر به دست آوریم؟ بله
 - بدون شمارش بگویید امکان مشاهده چند نمونه‌ی دوتایی داریم؟ ۱۵
- در جدول زیر، احتمال مشاهده هر یک از مقادیر برآوردهای میانگین برای نمونه‌های دوتایی آمده است.

نمونه	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{0,3\}\{1,2\}$	$\{0,4\}\{1,3\}$	$\{0,5\}\{1,4\}\{2,3\}$	$\{1,5\}\{2,4\}$	$\{2,5\}\{3,4\}$	$\{3,5\}$	$\{4,5\}$
\bar{x}	$0/5$	۱	$1/5$	۲	$2/5$	۳	$3/5$	۴	$4/5$
احتمال	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

اگر نمونه‌گیری تصادفی ساده به اندازه‌ی ۳ = n از این ۶ عضو جامعه انجام دهیم، همانند جدول قبل مقادیر \bar{x} و احتمال مشاهده هر مقدار را محاسبه و در جدول بنویسید.

نمونه	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,4\}$	$\{0,1,5\}$	$\{0,2,5\}$
\bar{x}	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$
احتمال	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$
نمونه	$\{0,1,3\}$	$\{1,3,5\}$	$\{1,4,5\}$	$\{2,4,5\}$	$\{3,4,5\}$
\bar{x}	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{12}{3}$
احتمال	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

جدول به دست آمده از کار در کلاس قبل را برای $n = 3$ رسم کنید. برای این منظور، بر روی محور طول‌ها مقادیر برآورد عیانگین جامعه. یعنی \bar{x} را مشخص کنید. حال احتمال مشاهده هر یک از مقادیر را در نمودار علامت بزنید. این کار برای اندازه‌ی نمونه‌های مختلف انجام شده است. هر نمودار مربوط به اندازه نمونه‌ی به خصوص $n = 1, 2, 4, 5, 6$ است.



اگر برآورد را براساس نمونه‌ای به اندازه‌ی ۳ محاسبه کنیم، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر باشد، نسبت $n = 1, 2$ بیشتر است. آیا اگر اندازه‌ی نمونه بیشتر از ۳ شود، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود، باز هم بیشتر می‌شود؟ **بله** زمانی که اندازه‌ی نمونه به ۶ می‌رسد، برآورد برابر $\frac{2}{5}$ می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۱۲۱

به فعالیت ابتدایی درس باز می‌گردیم. اگر از مطالعات سال‌های گذشته بدانیم که انحراف معیار در آمد هر فرد در کشور ۲ میلیون تومان است انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه را برای اندازه‌ی نمونه‌های ذکر شده محاسبه کنید.

n	۲۵	۱۰۰	۱۰۰۰
$\sigma_{\bar{x}}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۲}{\sqrt{۲۵}} = ۰.۴$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۰۰}} = ۰.۲$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۰۰۰}} = ۰.۰۲$

- انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه با نمونه‌ی ۱۰۰ نفری چند برابر انحراف معیار با نمونه‌ی ۱۰۰۰ نفری است؟ ۰.۲ برابر

- اگر اندازه‌ی نمونه ۱۰ برابر شود، انحراف معیار برآورد میانگین چند برابر می‌شود؟ دیدیم با ۱۰۰ برابر شدن اندازه‌ی نمونه، انحراف معیار برآورد میانگین ۰.۱ برابر می‌شود بنابراین با ۱۰ برابر شدن اندازه‌ی نمونه انحراف معیار $\sqrt{۱۰}$ برابر خواهد شد.

فعالیت صفحه ۱۲۲

در فعالیت قبل میانگین داده‌ها $۲/۵$ محاسبه می‌شود؛ یعنی برآورد میانگین جامعه به دست آمده است. چقدر به این برآورد اطمینان داریم؟ برای یافتن پاسخ این سوال به باد آورید که دقیق برآورد میانگین جامعه به اندازه‌ی نمونه و انحراف معیار بستگی داشت. اگر اندازه‌ی نمونه زیاد می‌شود، با انحراف معیار کم بود، دقیق برآورد میانگین بیشتر می‌گردد.

توشه‌ای برای موفقیت
اگر یک نمونه به اندازه‌ی چهار داشته باشیم یک فاصله اطمینان برای میانگین جامعه محاسبه کنید.

مشاهدات: $۱, ۲, ۳, ۴$

$$\bar{x} = \frac{۱+۲+۳+۴}{۴} = ۲ \quad \text{میانگین نمونه:}$$

$$\sigma = ۱/\sqrt{۲} \quad \text{انحراف معیار نمونه:} \\ ۰.۷۰7 < M < ۳.۷۰7$$

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq M \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow ۲ - \frac{۱/\sqrt{۲}}{۲} < M < ۲ + \frac{۱/\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow ۰.۷۰7 < M < ۳.۷۰7$$

کار در کلاس صفحه ۱۲۲

خط فقر حداقل درآمدی است که برای زندگی در یک ماه به ازای هر نفر مورد نیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین درآمد افراد جامعه. براساس داده‌های فعالیت اول خط فقر را برآورد کنید. انحراف معیار جامعه را برآورد کنید. اگر فرض کنیم که انحراف معیار به دست آمده انحراف معیار جامعه است، یک برآورد فاصله‌ای برای خط فقر محاسبه کنید.

$$\sigma^2 = \frac{(4 - 2/5)^2 + (1 - 2/5)^2 + (0 - 2/5)^2 + (3 - 2/5)^2 + (5 - 2/5)^2 + (2 - 2/5)^2}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{(1/75)^2 + (-1/5)^2 + (-2/5)^2 + (0/5)^2 + (2/5)^2 + (-0/5)^2}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{3/25 + 2/25 + 6/25 + 0/25 + 6/25 + 0/25}{6} = \frac{17/5}{6} = 3 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3}$$

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq M \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2/5 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \leq M \leq 2/5 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \Rightarrow 2/5 - \sqrt{2} \leq M \leq 2/5 + \sqrt{2}$$

کار در کلاس صفحه ۱۲۴

یک موسسه نظرسنجی معتبر، یک روز قبل از برگزاری انتخابات ریاست جمهوری، از یک نمونه ۱۰۰۰ نفری از واجدان شرایط، که به طور تصادفی از کل کشور انتخاب شده‌اند، پرسیده است که «آیا در انتخابات شرکت خواهید کرد؟» اگر جواب ۷۰۰ نفر مثبت بوده باشد، یک بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی برای شرکت‌کنندگان در انتخابات به دست آورید.

حل: در این مسئله $p = \frac{m}{n} = \frac{700}{1000} = 0.7$ و $n = 1000$. باید عبارت زیر را نیز محاسبه کنیم:

$$2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2\sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{1000}} = 0.029$$

توشه‌ای برای موفقیت

$$p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ و } p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.7 - 0.029 \text{ و } 0.7 + 0.029 \Rightarrow (0.641, 0.729)$$

پس با اطمینان ۹۵ درصد مشارکت در انتخابات بین ۶۴٪ و ۷۲٪ درصد خواهد بود.

۱- در اولین کار در کلاس، جداول را برای نمونه‌گیری تصادفی ساده به اندازه‌ی ۴ و ۵ تشکیل داده و مقادیر \bar{x} را در مقابل احتمال مشاهده‌ی هر مقدار محاسبه و در جدولی بنویسید.

اندازه‌ی ۴ :

نمونه	$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{0, 1, 2, 4\}$	$\{0, 1, 3, 4\}$ $\{0, 1, 2, 5\}$	$\{0, 2, 3, 4\}$ $\{0, 1, 3, 5\}$	$\{0, 1, 4, 5\}$ $\{0, 2, 3, 4\}$ $\{0, 2, 3, 5\}$
\bar{x}	$1/5$	$1/75$	۲	$۲/۲۵$	$۲/5$
احتمال	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$
نمونه	$\{0, 2, 3, 5\}$ $\{0, 2, 4, 5\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$ $\{0, 3, 4, 5\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$	
\bar{x}	$2/25$	۳	$۳/۲۵$	$۳/5$	
احتمال	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	

اندازه‌ی ۵ :

نمونه	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3, 5\}$	$\{0, 1, 2, 4, 5\}$	$\{0, 1, 3, 4, 5\}$	$\{0, 2, 3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
\bar{x}	۲	$۲/۲$	$۲/۴$	$۲/۶$	$۲/۸$	۳
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

۲- از اعداد ۰ تا N، ۱۰ عدد به تصادف انتخاب شده است. اگر اعداد انتخابی به صورت زیر باشند با دو روش مختلف N را برابر کنید.

۵	۸	۹	۱۱	۱۲	۳	۷	۵	۲	۹
---	---	---	----	----	---	---	---	---	---

نمونه	۲	۳	۵۰۵	۷	۸	۹۹۹	۱۱	۱۲
\bar{x}	۲	۳	۵	۷	۸	۹	۱۱	۱۲
احتمال	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

۳- رئیس بک دانشگاه علاقه‌مند است متوسط سن دانشجویانی که در سال جاری ثبت‌نام کرده‌اند را بداند. برای این منظور، او یک نمونه‌ی تصادفی از سن ۲۵ دانشجو را انتخاب می‌کند. میانگین سن آنها برابر ۲۲ سال برآورد شده است. اگر در بررسی‌های گذشته انحراف معیار طول قد دانشجویان این دانشگاه برابر $1/9$ سال باشد، بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سن جامعه را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \bar{x} = 22 & \bar{x} - 2\sigma \leq M \leq \bar{x} + 2\sigma \\ \sigma = 1/9 & 22 - 2/8 \leq M \leq 22 + 2/8 \\ 2\sigma = 3/8 & 18/2 \leq M \leq 25/8 \end{array}$$

۴- طول فاصله‌ی اطمینان، برابر تفاضل حد بالا و پایین بازه‌ی اطمینان است.
 الف) اگر در فرمول بازه اطمینان اندازه‌ی نمونه افزایش یابد، طول فاصله‌ی اطمینان کاهش می‌یابد. چرا؟ زیرا دقت برآورد افزایش می‌یابد.

ب) اگر در فرمول بازه اطمینان انحراف معیار جامعه افزایش یابد. طول فاصله‌ی اطمینان افزایش می‌یابد. چرا؟ زیرا دقت برآورد کاهش می‌یابد.

۵- داده‌های زیر نمرات ۲۴ دانش‌آموز از ۱۰۰ است.

$$\begin{array}{ccccccccc} 75 & 74 & 73 & 71 & 71 & 70 & 67 & 75 \\ 79 & 78 & 78 & 78 & 78 & 77 & 75 & 80 \\ 82 & 86 & 86 & 83 & 82 & 82 & 81 & 91 \end{array}$$

الف) میانگین و انحراف معیار نمرات را محاسبه کنید.

$$\bar{x} = \frac{(75 \times 3) + (74 \times 2) + (73 \times 1) + (71 \times 2) + (70 \times 1) + (67 \times 1) + (79 \times 1) + (78 \times 3) + (77 \times 1) + (75 \times 2) + (80 \times 1) + (82 \times 2) + (86 \times 2) + (83 \times 1) + (81 \times 1) + (91 \times 1)}{24} = 78$$

$$\bar{x} \approx 78 \quad \sigma = 5/5$$

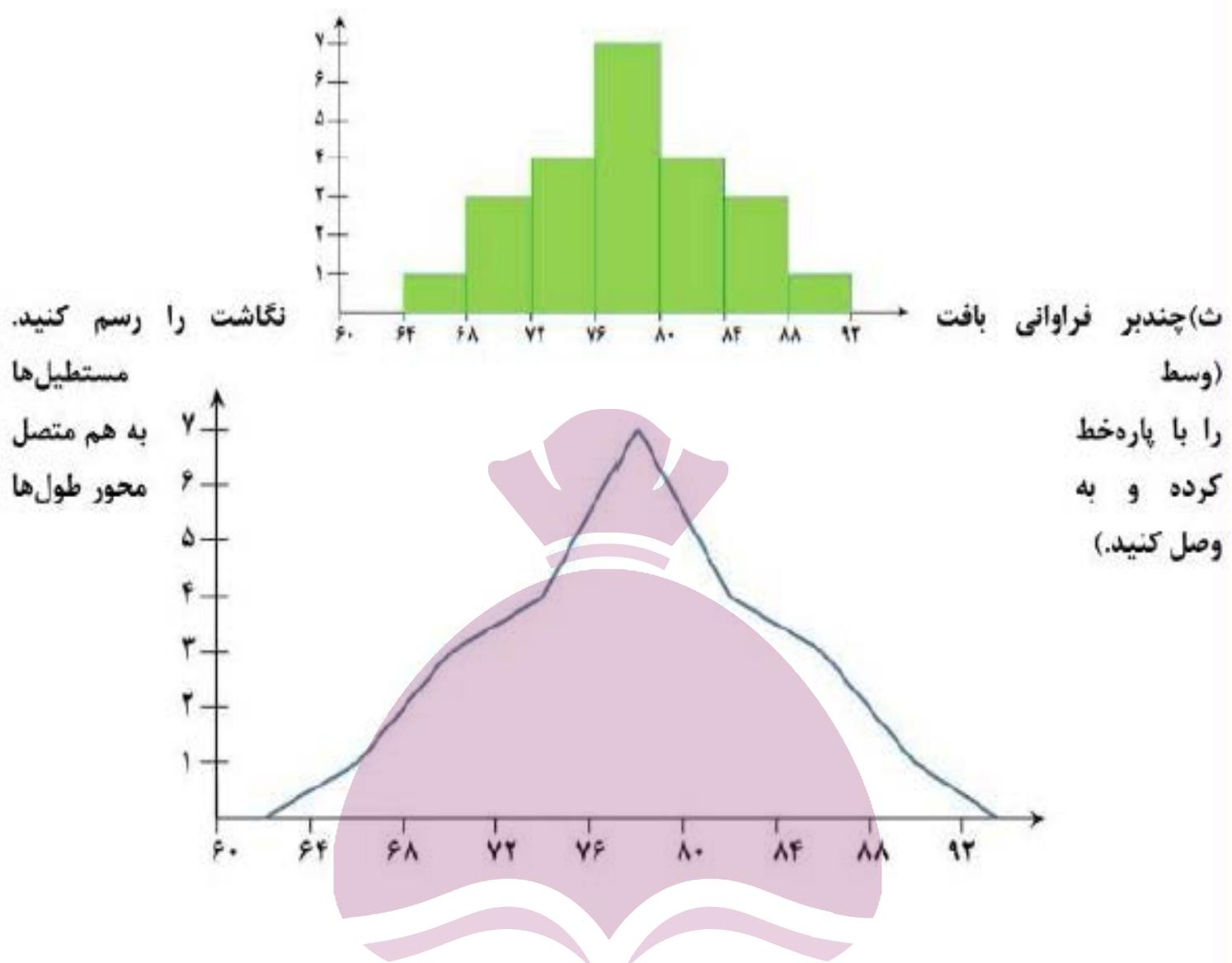
ب) اگر انحراف معیار جامعه ۶ باشد بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات جامعه محاسبه کنید.

$$\bar{x} - 2\sigma \leq M \leq \bar{x} + 2\sigma \Rightarrow 78 - 12 \leq M \leq 78 + 12 \Rightarrow 66 \leq M \leq 90$$

پ) چند درصد داده‌ها داخل این بازه قرار می‌گیرند؟

$$\frac{23}{24} \times 100 = 95\%$$

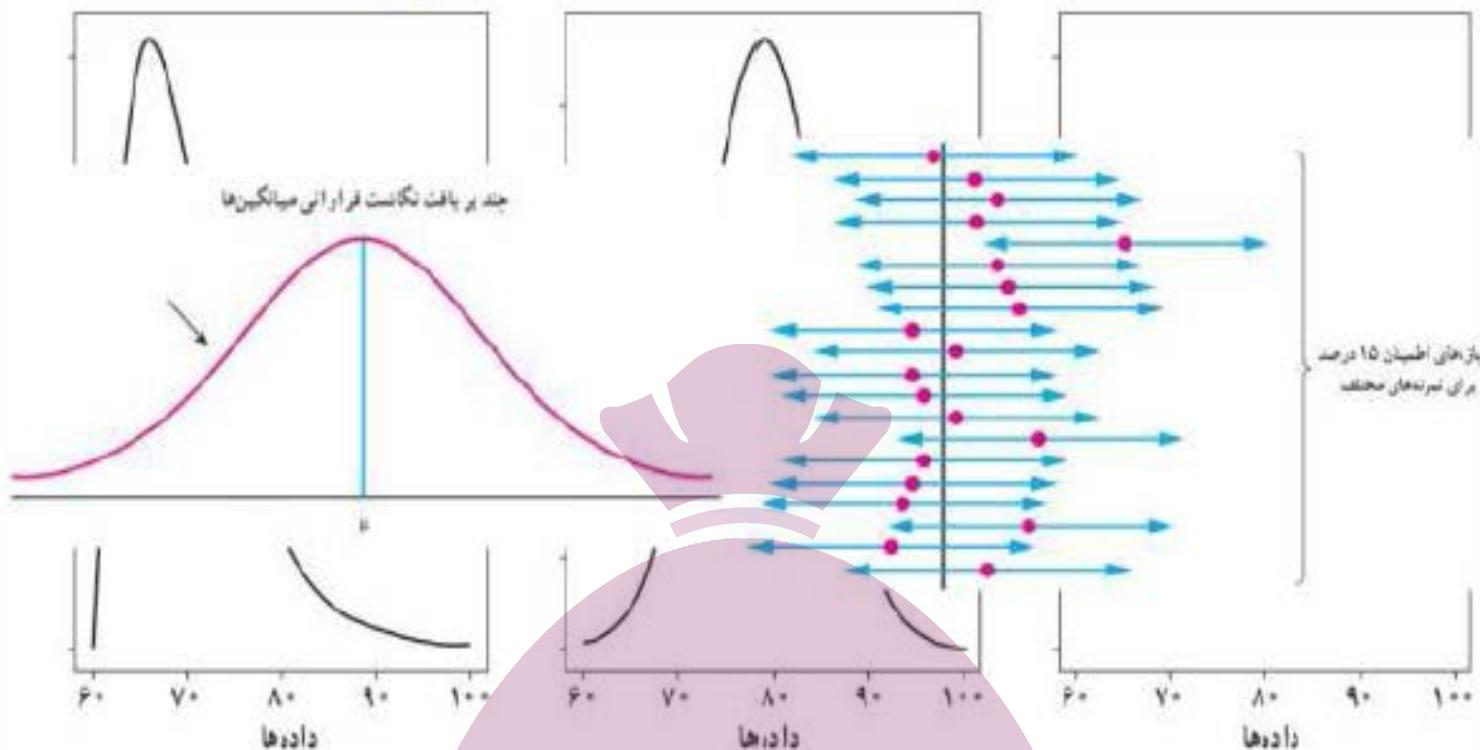
ت) بافت نگاشت فراوانی داده‌ها رارسم کنید. (در فواصل $[67, 71]$ و $[71, 75]$ و ...)



ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

ج) اگر داده‌ها زیاد شوند، به نظر شما شکل چندبر فراوانی بافت نگاشت به کدامیک از نمودارهای زیر شباهت بیشتری خواهد داشت؟ (نام نمودارها به ترتیب: یکنواخت، نرمال، نامتقارن یا چوله است). نرمال



۶- اگر در سؤال قبل ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم؛ یعنی ۱۰۰ دفعه نمونه‌ای به اندازه‌ی ۲۴ بگیریم و چند بر فراوانی بافت نگاشت ۱۰۰ میانگین را رسم کنیم می‌توان نشان داد که تقریباً به صورت یک منحنی به شکل زیر است (توجه کنید منظور از ۱۰۰ عددی بزرگ است، ۱۰۰ یک مثال است). در این شکل نشان دهنده‌ی میانگین جامعه است، که در اینجا میانگین نمرات همه‌ی دانش آموزان است، که مجھول است. حال فرض کنید برای ۱۰۰ نمونه‌ی ۲۴ تایی، ۱۰۰ بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی محاسبه کردۀ‌ایم. در زیر نمودار نرمال ۲۰ تا از آنها رسم شده است. نقاط قرمز رنگ نشان دهنده‌ی میانگین نمونه و پاره خط‌های افقی آبی معرف فاصله‌ی اطمینان مربوطه‌اند. خط سیاه عمودی میانگین جامعه را مشخص کرده است.

توضه‌ای برای موفقیت

الف) اگر پاره خط آبی، خط سیاه را قطع نکند، چه نتیجه‌ای باید گرفت؟
اگر پاره خط آبی، خط سیاه را قطع کند نشان دهنده‌ی این است که میانگین جامعه در بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی وجود ندارد و بنابراین نمونه‌ی درستی انتخاب نشده است.

ب) چند درصد از ۲۰ پاره خط آبی، خط سیاه را قطع کردۀ‌اند؟
۱۹ پاره خط آبی، خط سیاه را قطع کردۀ‌اند بنابراین:

$$\frac{19}{20} \times 100 = 95\%$$

پ) اگر ۱۰۰ پاره خط آبی را رسم می‌کردیم، انتظار داشتید چند تا از آنها خط سیاه را قطع نکنند؟

با توجه به اینکه ۹۵ درصد خطوط را قطع می‌کند پس با رسم ۱۰۰ پاره خط آبی، ۵ تا از آنها خط سیاه را قطع نمی‌کنند.

ت) نتیجه این تمرین تعبیر یک بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد است. اگر ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم و ۱۰۰ بازه‌ی اطمینان محاسبه کنیم انتظار داریم ۹۵٪ از آنها پارامتر میانگین جامعه را در برگیرند.

۷- شاخص پوسیدگی دندان (DMFT) در ایران برای سال ۱۳۶۰ برابر ۳ بوده است؛ یعنی به طور متوسط هر ایرانی دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پرشده است. براساس نمونه‌ای به اندازه‌ی ۴۰۰، این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است ($\bar{x} = 2$). اگر انحراف معیار دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پرشده به ترتیب برابر ۲ و $1/6$ باشد. بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پرشده محاسبه کنید.

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای دندان‌های کشیده شده:

$$\bar{x} - 2\sigma\sqrt{n} \leq M \leq \bar{x} + 2\sigma\sqrt{n} \Rightarrow 2 - 2(1)\sqrt{400} \leq M \leq 2 + 2(1)\sqrt{400} \Rightarrow -38 \leq M \leq 42$$

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای دندان‌های پوسیده شده:

$$2 - 2(2)\sqrt{400} \leq M \leq 2 + 2(2)\sqrt{400} \Rightarrow -78 \leq M \leq 82$$

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای دندان‌های پرشده:

$$2 - 2(1/6)\sqrt{400} \leq M \leq 2 + 2(1/6)\sqrt{400} \Rightarrow -62 \leq M \leq 66$$

۸- پارامتر میانگین جامعه را با چه آماره‌های می‌توان برآورد کرد؟ (۵ آماره نام ببرید)

با آماره‌ای میانگین - میانه - مدار فراوانی نسبی و فاصله اطمینان موفقیت

۹- پارامتر واریانس و انحراف معیار جامعه را با چه آماره‌ای می‌توان برآورد کرد؟

با آمار واریانس و انحراف معیار نمونه‌ی تصادفی از یک جامعه

۱۰- در فصل قبل با چه آماره‌های آشنا شده‌اید؟ آنها چه پارامترهای را برآورد می‌کردند؟

در فصل قبل با آمار فراوانی نسبی نمونه آشنا شدیم که با استفاده از آن می‌توان فراوانی نسبی جامعه را برآورد کرد.

۱۱- مدیر تولید یک روزنامه می‌خواهد درصد روزنامه‌های معیوب را بررسی کند. برای این منظور، ۱۰۰ روزنامه به تصادفی انتخاب می‌شود که ۱۶ تا از آنها معیوب است. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵٪ برای درصد روزنامه‌های معیوب محاسبه کنید. اگر بخواهیم طول بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی، برابر یک درصد باشد باید n را چقدر انتخاب کنیم؟

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} n = 100 \\ m = 16 \end{array} \right. \Rightarrow p = \frac{m}{n} = \frac{16}{100} = 0.16 \\ \left(p - 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} , p + 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) = \left(0.16 - 2(0.16)(0.84), 0.16 + 2(0.16)(0.84) \right) \\ \Rightarrow (0.088, 0.232) \\ \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{0.08}{0.16} = 0.5 \Rightarrow n = 400 \end{aligned}$$

۱۲- مثال‌های این درس را با اندازه‌ی نمونه‌های مختلف حل کنید. چه نتیجه‌هایی می‌توان گرفت؟ (مقدار برآورد تغییر نمی‌کند.)

با اندازه‌های نمونه مختلف نیز مقدار برآورد تغییر نمی‌کند.

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی

- دانلود آزمون های مکالمه

- دانلود آزمون های حفظ و نجاشی

- دانلود فیلم و مقاله آنلاین

- کنوار و مشاوره



IranTooshe.Ir



@irantoooshe



IranTooshe

