فهرست مطالب :

سخن آغازین

درود بر مردمانی که در مقابل ظلم سکوت ذلت بار را اختیار نکردند.

درود بر معلم که بزرگترین سرمایه هر جامعه در اختیار اوست.

درود بر دانش آموز، تنها امید بر آینده ای روشن.

ان تاب ا ىروکی لکه نیک پیشکش است به حضور فرزندان ایران زمین.

اما چرا حل المسائل ؟

۱- استفاده برخی دانش آموزان از حل المسائل واقعیتی غیر قابل انکار است.

۲- باید دانش آموز را آگاه کرد که استفاده از حل المسائل آخرین راه است نه اولین کار .

۳- نویسندگان حل المسائل ها گاهی از روشهای میانبر و تستی برای حل مسائل استفاده کرده و معلم مزبور متهم به بد درس دادن و پیچیده کردن حل مساله می گردد ..

پاسخهای موجود در این کتاب مبتنی بر روش کتاب است.

۴- برخی دانش آموزان به دلایلی تمام کلاسها را حضور نداشته و جوابهای صحیح سوالات را در اختیار ندارند و یا دبیر فرصت حل تمام مسائل را پیدا نمی کند.

به دلایلی که برخی از آنها ذکر شد بر آن شدیم ، پاسخ مسائل کتاب درسی را در اختیار قرار دهیم.

تلاش بر این است در ویرایشهای بعدی مطالب و تمریناتی به این کتاب افزوده گردد.

مشتاقانه پذیرای نظرات و انتقادات شما هستیم.

۱-
$$a=5,\ d=8-5=3,\ s_n>500$$
$$s_n=\frac{n}{2}\left(2a+(n-1)d\right)\Rightarrow \frac{n}{2}\left(10+(n-1)3\right)>500\Rightarrow \frac{n}{2}(3n+7)>500$$
$$\Rightarrow 3n^2+7n-1000>0\Rightarrow\left(n>\frac{-7+\sqrt{12049}}{6}\ \ or\ \ n<\frac{-7-\sqrt{12049}}{6}\right)\Rightarrow n\ge 18$$

۲- سمت چپ تساوی مجموع تعداد دوایر قرمز به شکل است و سمت راست تساوی مساحت مربع به طول n ، که طبق شکل این دو با هم برابرند.

۳- چون یک هزار میلیارد تن برابر است با 10^{18} گرم پس

$$a=1,q=2,n=64,S_n=a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)\Rightarrow 1\left(\frac{1-2^{64}}{1-2}\right)=S_{64}$$
$$\Rightarrow S_{64}=2^{64}-1,\ 2^7>10^2\Rightarrow\left(2^7\right)^9>\left(10^2\right)^9\Rightarrow 2^{63}>10^{18}\Rightarrow 2^{64}-1>10^{18}$$

۴-
$$a=1000\quad q=0/9\quad n=50\Rightarrow S_{50}=1000\left(\frac{1-0/9^{50}}{1-0/9}\right)\Rightarrow$$
$$S_{50}=10^4(1-0/9^{50})\approx 10^4(1-0/005)=10^4(0/955)=9550\quad\Rightarrow$$
$$1-(0/9)^n<1\Rightarrow S_n<\frac{1000}{1-0/9}=\frac{1000}{0/1}=10000$$

۵- a میزان تابش اولیه ، پس از لایه اول $\frac{a}{2}$ ، پس از لایه دوم $\frac{a}{4}$ و. . . $\frac{a}{2},\frac{a}{4},\frac{a}{8},\dots$

$$q=\frac{1}{2}\ \ ,a_n\le\frac{1}{100}a\ ,a_n=aq^{n-1}=\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\le\frac{1}{100}a\Rightarrow 2^n\ge 100>2^6$$
$$\Rightarrow n>6\Rightarrow n\ge 7$$

۶-
$$p,\frac{1}{2}p,\frac{1}{4}p,\dots\Rightarrow S_n=\frac{p}{1-\frac{1}{2}}=2p\ \ ,\ \ S,\frac{1}{4}S,\frac{1}{16}S,\dots\Rightarrow S'_n=\frac{S}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}S$$

۱- الف)
$$p(x)=x^{۲}+ax+b\ ,\begin{cases}p(۱)=۰\Rightarrow ۱^{۲}+a(۱)+b=۰\Rightarrow a+b=-۱\\ p(۲)=۰\Rightarrow ۲^{۲}+a(۲)+b=۰\Rightarrow ۲a+b=-۴\\ \Rightarrow a=-۳\ ,\ b=۲\ ,\Rightarrow p(x)=x^{۲}-۳x+۲\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases}p(۰)=۰\Rightarrow ۰^{۲}+a(۰)+b=۰\Rightarrow b=۰\\ p(۱)=۱\Rightarrow ۱^{۲}+a(۱)+b=۱\Rightarrow a=۰\end{cases}\Rightarrow p(x)=x^{۲}$$

ج)
$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}p(-۱)=۲\Rightarrow (-۱)^{۲}+a(-۱)+b=۲\Rightarrow -a+b=۱\\ p(۲)=-۱\Rightarrow (۲)^{۲}+a(۲)+b=-۱\Rightarrow ۲a+b=-۵\end{array}\right\}\Rightarrow ۳a=-۶\Rightarrow a=-۲\\ \Rightarrow ۲+b=۱\Rightarrow b=-۱\Rightarrow p(x)=x^{۲}-۲x-۱\end{cases}$$

۲-

$$۲x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow p\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۰\Rightarrow \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۳}-m\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۴=۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۸}-\frac{m}{۴}+\frac{۱}{۲}+۴=۰\Rightarrow -\frac{m}{۴}=-\frac{۳۵}{۸}\Rightarrow m=\frac{۳۵}{۲}$$

۳-

$$\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow p(۱)=۴\Rightarrow ۱^{۳}+a(۱)^{۲}+۱+b=۴\Rightarrow a+b=۲\\ x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow p(-۲)=۰\Rightarrow (-۲)^{۳}+a(-۲)^{۲}+(-۲)+b=۰\Rightarrow ۴a+b=۱۰\end{cases}$$

$$۳a=۸\Rightarrow a=\frac{۸}{۳}\ ,\ \frac{۸}{۳}+b=۲\Rightarrow b=-\frac{۲}{۳}$$

۴-

$$x^{۲}-۵x+۶=۰\Rightarrow x=۲\vee x=۳\Rightarrow p(۲)=۰\ ,p(۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲^{۴}-۳(۲)^{۳}+m(۲)+n=۰\Rightarrow ۲m+n=۸\\ ۳^{۴}-۳(۳)^{۳}+m(۳)+n=۰\Rightarrow ۳m+n=۰\end{cases}\Rightarrow m=-۸\ ,n=۲۴$$

۵-

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^۳}+۲x^۲-۵x-۶ & x-۲ \\ \cline{2-2} \underline{-\cancel{x^۳}+۲x^۲} & x^۲+۴x+۳ \\ \quad \cancel{۴x^۲}-۵x & \\ \quad \underline{-\cancel{۴x^۲}+۸x} & \\ \qquad \cancel{۳x}-\cancel{۶} & \\ \qquad \underline{-\cancel{۳x}+\cancel{۶}} & \\ \qquad\quad ۰ & \end{array}$$

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲\ , \quad f(۲)=۲^۳+۲(۲)^۲-۵(۲)-۶=۸+۸-۱۰-۶=۰$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-۲)(x^۲+۴x+۳)=(x-۲)(x+۱)(x+۳)=۰$$

$$\Rightarrow x=۲ \ \ or \ \ x=-۱ \ \ or \ \ x=-۳$$

۶-

$$x=۲\ ,\ p(۲)=۰ \Rightarrow ۲^۳-۲(۲)^۲+a(۲)+۲=۰ \Rightarrow ۲a=-۲ \Rightarrow a=-۱$$

$$\Rightarrow p(x)=x^۳-۲x^۲-x+۲=x^۲(x-۲)-(x-۲)=(x^۲-۱)(x-۲)$$

$$\Rightarrow p(x)=(x-۱)(x+۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۱ \ \ or \ \ x=-۱ \ \ or \ \ x=۲$$

۷-

الف)

$$(۱-x)^۷=(۱)^۷-۷(۱)^۶(x)+۲۱(۱)^۵(x)^۲-۳۵(۱)^۴(x)^۳+۳۵(۱)^۳(x)^۴$$
$$-۲۱(۱)^۲(x)^۵+۷(۱)(x)^۶-(x)^۷=۱-۷x+۲۱x^۲-۳۵x^۳+۳۵x^۴-۲۱x^۵+۷x^۶-x^۷$$

ب)

$$(۱+\frac{۲}{x})^۶=(۱)^۶+۶(۱)^۵(\frac{۲}{x})+۱۵(۱)^۴(\frac{۲}{x})^۲+۲۰(۱)^۳(\frac{۲}{x})^۳+۱۵(۱)^۲(\frac{۲}{x})^۴+$$
$$۶(۱)(\frac{۲}{x})^۵+(\frac{۲}{x})^۶=۱+\frac{۱۲}{x}+\frac{۶۰}{x^۲}+\frac{۱۶۰}{x^۳}+\frac{۲۴۰}{x^۴}+\frac{۱۹۲}{x^۵}+\frac{۶۴}{x^۶}$$

ج)

$$(۲x-۳y)^۴=(۲x)^۴-۴(۲x)^۳(۳y)+۶(۲x)^۲(۳y)^۲-۴(۲x)(۳y)^۳-(۳y)^۴$$
$$=۱۶x^۴-۹۶x^۳y+۲۱۶x^۲y^۲-۲۱۶xy^۳+۸۱y^۴$$

۸ –

$$A = x^{۹} - x^{۳}y^{۳} = x^{۳}(x^{۶} - y^{۳}) = x^{۳}(x^{۲} - y)(x^{۴} + x^{۲}y + y^{۲})$$

$$B = (a^{۶} + ۱)^{۲} - (a^{۶} - ۱)^{۲} = (a^{۶} + ۱ - a^{۶} + ۱)(a^{۶} + ۱ + a^{۶} - ۱) = ۲a^{۶}(۲) = ۴a^{۶}$$

---

۹ — استقرا بر روی توان دو جمله ای ،

$$k = ۱ \Rightarrow ۱ - x^{۲} = (۱ + x)(۱ - x) \quad \boxed{\checkmark}$$

فرض $P(k) : ۱ - x^{۲k} = (۱ + x)(۱ - x + \ldots - x^{۲k-۱})$

حکم $P(k+۱) : ۱ - x^{۲k+۲} = (۱ + x)(۱ - x + \ldots - x^{۲k+۱})$

اثبات)

$$(۱ + x)(۱ - x + \ldots - x^{۲k-۱} + x^{۲k} - x^{۲k+۱}) =$$

$$(۱ + x)(۱ - x + \ldots - x^{۲k-۱}) + (۱ + x)(x^{۲k} - x^{۲k+۱}) =$$

$$(۱ - x^{۲k}) + (x^{۲k} - x^{۲k+۱} + x^{۲k+۱} - x^{۲k+۲}) = ۱ - x^{۲k+۲}$$

۱- ک م م سه عدد ۱۸ و ۲۴ و ۳۲ برابر است

$$\begin{cases} ۱۸ = ۲\times ۳^{۲} \\ ۲۴ = ۲^{۳}\times ۳ \\ ۳۲ = ۲^{۵} \end{cases} \qquad ۲۸۸ = ۲^{۵}\times ۳^{۲}$$

۲-

n	۱	۲	۳	۴	۵
a_n	۱	۵	۹	۱۳	۱۷
b_n	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶

اولین جمله مشترک ۱۳ است. از این نقطه شروع یکسان با توجه به آنکه جملات a_n ، چهار تا چهار تا و جملات b_n سه تا سه تا جلو می روند و ک.م.م ۳ و ٤ برابر ۱۲ است پس جملات $۱۳,۱۳+۱۲,\ ۱۳+۲(۱۲),\ ....,۱۳+(k-۱)۱۲$ جملات مشترکند.

$$۱۰۰\le ۱۳+(k-۱)۱۲=۱۲k+۱\le ۹۹۹ \Rightarrow ۹۹\le ۱۲k\le ۹۹۸ \Rightarrow \frac{۹۹}{۱۲}\le k\le \frac{۹۹۸}{۱۲}$$

$$\Rightarrow ۸/...\le k\le ۸۳/... \Rightarrow k\in\{۹,۱۰,۱۱,\cdots,۸۳\}=A \Rightarrow n(A)=۸۳-۹+۱=۷۵$$

۳-ب م م سه عدد ۷۲,۴۰,۴۸ برابر است با ۸ که حداکثر حجم شیشه است و

$$\begin{cases} ۷۲ = ۲^{۳}\times ۳^{۲} \\ ۴۰ = ۲^{۳}\times ۵ \\ ۴۸ = ۲^{۴}\times ۳ \end{cases} \qquad \frac{(۴۸+۴۰+۷۲)}{۸}=۲۰$$

پس تعداد ۲۰ بطری ۸ لیتری لازم است .

٤-

الف) $$\frac{(x-۱)(x-۴)}{x(x-۴)}\times\frac{x^{۲}(x+۲)}{(x+۲)(x-۱)}=x$$

ب) $$\frac{(x-۳)(x+۱)}{(x-۳)(x+۳)}\times\frac{(x-۳)(x-۷)}{(x-۷)(x+۱)}=\frac{x-۳}{x+۳}$$

ج) $$\frac{۱}{(a-۱)(a+۱)}+\frac{۲a}{(a+۱)^{۲}}-\frac{۲}{a+۱}=\frac{۱(a+۱)+۲a(a-۱)-۲(a-۱)(a+۱)}{(a-۱)(a+۱)^{۲}}$$

$$=\frac{a+۱+۲a^{۲}-۲a-۲a^{۲}+۲}{(a-۱)(a+۱)^{۲}}=\frac{-a+۳}{(a-۱)(a+۱)^{۲}}$$

د) $$\frac{x+۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۳}-\frac{۸}{(x+۳)(x-۱)}=\frac{(x+۱)(x+۳)+۱(x-۱)-۸(۱)}{(x+۳)(x-۱)}=$$

$$\frac{x^{۲}+۴x+۳+x-۱-۸}{(x+۳)(x-۱)}=\frac{x^{۲}+۵x-۶}{(x+۳)(x-۱)}=\frac{(x+۶)(x-۱)}{(x+۳)(x-۱)}=\frac{x+۶}{x+۳}$$

۱-

$$\alpha=\beta+۲ ، \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۴ ، \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m}{۲}$$

$$\Rightarrow\beta+۲+\beta=۴\Rightarrow ۲\beta=۲\Rightarrow\beta=۱ ، \alpha=۱+۲=۳\Rightarrow ۳\times ۱=\frac{m}{۲}\Rightarrow m=۶$$

$$۲x^۲-۸x+۶=۰\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۱ \text{ or } x=۳$$

۲- الف) $f(x)=۰\Rightarrow x(x^۲-۴)=۰\Rightarrow x=۰$ یا $x=\pm ۲$

ب)

$$g(x)=۰\Rightarrow (x+\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x}+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{۱}{x}=۰\Rightarrow x^۲+۱=۰ \\ x+\frac{۱}{x}=-۱\Rightarrow x^۲+x+۱=۰ \end{cases}$$

که درهردو معادله جواب وجود ندارد.(چون $\Delta<۰$)

۳- الف) $x(۲x^۲+x+۳)=۰\Rightarrow x=۰$ یا $۲x^۲+x+۳=۰$

معادله دوم جواب ندارد چون $\Delta=-۲۳<۰$ پس تنها جواب $x=۰$ است.

ب) $۹x^۲-۳۳+۱۴۸-۴x^۲=۲۴۰\Rightarrow ۵x^۲=۱۲۵\Rightarrow x^۲=۲۵\Rightarrow x=\pm ۵$

٤- الف)

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{۱}{۵}+\frac{۴}{۵}=۱ \\ \alpha\beta=\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴}{۲۵} \end{cases} \Rightarrow x^۲-۱x+\frac{۴}{۲۵}=۰\Rightarrow ۲۵x^۲-۲۵x+۴=۰$$

ب)

$$\begin{cases} \alpha+\beta=۱+\sqrt{۳}+۱-\sqrt{۳}=۲ \\ \alpha\beta=(۱+\sqrt{۳})(۱-\sqrt{۳})=۱-۳=-۲ \end{cases} \Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰$$

۵- الف)
$$f(x)=۹x^{۲}+۶x+۳ \quad ، \quad a=۹>۰ \Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۶}{۱۸}=-\frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow y_{\min}=۹(-\frac{۱}{۳})^{۲}+۶(-\frac{۱}{۳})+۳=۱-۲+۳=۲$$

ب)
$$f(x)=۴+۸x-x^{۲} \quad ، \quad a=-۱<۰ \Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۸}{-۲}=۴$$
$$\Rightarrow y_{\max}=۴+۸(۴)-۴^{۲}=۲۰$$

۶-
$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۵}{۴} \\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۵}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{۵}{۴}}{-\frac{۵}{۴}}=-۱ \\ \frac{۱}{\alpha}\times\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\alpha\beta}=\frac{۱}{-\frac{۵}{۴}}=-\frac{۴}{۵} \end{cases} \Rightarrow x^{۲}+x-\frac{۴}{۵}=۰ \Rightarrow ۵x^{۲}+۵x-۴=۰$$

۷-
$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۴۹+۱۰۰=۱۴۹>۰$$
$$S=-\frac{b}{a}=\frac{۷}{۵}>۰ \qquad P=\frac{c}{a}=\frac{-۵}{۵}=-۱<۰$$

معادله دارای دو ریشه مختلف العلامه است که عدد مثبت از نظر قدر مطلق از دیگری بزرگتر است.

۸- x = سن فعلی ، $(x+۲۱)=(x-۲۱)^{۲} \Rightarrow x^{۲}-۴۲x+۴۴۱=x+۲۱$

$\Rightarrow x^{۲}-۴۳x+۴۲۰=۰ \Rightarrow x=۱۵$ یا $x=۲۸ \Leftarrow$ سن معلم

۹-
$$(\frac{x}{۳}+۱)(\frac{x}{۴}+۱)=۲۰ \Rightarrow (x+۳)(x+۴)=۲۴۰ \Rightarrow x+۳=۱۵ \Rightarrow x=۱۲$$

۱۰-
$$\begin{cases} x=y+۱۰ \\ xy-۴۰=۳۹y+۲۲ \end{cases} \Rightarrow (y+۱۰)y-۴۰=۳۹y+۲۲ \Rightarrow y^۲+۱۰y-۴۰=۳۹y+۲۲$$

$$\Rightarrow y^۲-۲۹y-۶۲=۰ \Rightarrow (y-۳۱)(y+۲)=۰ \xrightarrow{y\oplus} y=۳۱ ، x=۳۱+۱۰=۴۱$$

۱۱-

الف) $(x^۲-۲)(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \\ \text{یا} \\ x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱ \end{cases}$

ب) $(\frac{x^۲}{۳}-۲-۶)(\frac{x^۲}{۳}-۲-۱)=۰ \Rightarrow x^۲=۲۴ \text{ یا } x^۲=۹ \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{۲۴}=\pm۲\sqrt{۶} \\ \text{یا} \\ x=\pm\sqrt{۹}=\pm۳ \end{cases}$

ج) $(۴-x^۲-۵)(۴-x^۲+۳)=۰ \Rightarrow (-x^۲-۱)(۷-x^۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲=-۱ \quad \times \\ \text{یا} \\ x^۲=۷ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۷} \end{cases}$

۱۲-
$$f(x)=x+\frac{۲}{x}=\frac{x^۲+۲}{x}=\frac{x^۲-۲\sqrt{۲}x+۲+۲\sqrt{۲}x}{x}=\frac{(x-\sqrt{۲})^۲}{x}+۲\sqrt{۲}$$

به ازای مقادیر مثبت x کمترین مقدار $\frac{(x-\sqrt{۲})^۲}{x}$ برابرصفراست که از $x=\sqrt{۲}$ حاصل می شود ،

در این صورت : $y_{min}=۲\sqrt{۲}$

۱۳-

الف)

$$\begin{cases} P(-۲)=-۲ \Rightarrow a(-۲)^۲+b(-۲)+c=-۲ \Rightarrow ۴a-۲b+c=-۲ \\ P(۰)=۰ \Rightarrow a(۰)^۲+b(۰)+c=۰ \Rightarrow c=۰ \\ P(۴)=۰ \Rightarrow a(۴)^۲+b(۴)+c=۰ \Rightarrow ۴a+b=۰ \end{cases}$$

x		۰		۴	
$p(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a-b=-۱ \\ ۴a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۶} \text{ ، } b=\frac{۲}{۳} \Rightarrow p(x)=-\frac{۱}{۶}x^۲+\frac{۲}{۳}x$$

ب)

$$\begin{cases} P(۰)=۳ \Rightarrow a(۰)^۲+b(۰)+c=۳ \Rightarrow c=۳ \\ x_{\min}=-\frac{b}{۲a}=-۴ \Rightarrow b=۸a \\ P(-۴)=-۲ \Rightarrow a(-۴)^۲+b(-۴)+۳=-۲ \Rightarrow ۱۶a-۴b=-۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=۸a \\ ۱۶a-۴b=-۵ \end{cases} \Rightarrow ۱۶a-۳۲a=-۵ \Rightarrow a=\frac{۵}{۱۶}, b=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow P(x)=\frac{۵}{۱۶}x^۲+\frac{۵}{۲}x+۳=۰ \Rightarrow ۵x^۲+۴۰x+۴۸=۰ \Rightarrow x=\frac{-۲۰\pm۴\sqrt{۱۰}}{۵}$$

اگر $\frac{-۲۰-۴\sqrt{۱۰}}{۵}<x<\frac{-۲۰+۴\sqrt{۱۰}}{۵}$ مقدار $P(x)$ منفی و در خارج این بازه مثبت است

ودر $x=\frac{-۲۰\pm۴\sqrt{۱۰}}{۵}$ برابر صفراست .

ج)

$$\begin{cases} P(۰)=۰ \Rightarrow a(۰)^۲+b(۰)+c=۰ \Rightarrow c=۰ \\ x=-\frac{b}{۲a}=۰ \Rightarrow b=۰ \\ P(۱)=۱ \Rightarrow a(۱)^۲+b(۱)+c=۱ \Rightarrow a+b=۱ \Rightarrow a=۱ \end{cases}$$

پس $P(x)=x^۲$ که در $x=۰$ برابر صفر ودر $x\neq۰$ مثبت است.

---

۱٤ - x طول و y عرض

$$\begin{cases} ۲(x+y)=۱۸ \Rightarrow x+y=۹ \Rightarrow y=۹-x \\ xy=۱۴ \Rightarrow x(۹-x)=۱۴ \Rightarrow x^{۲}-۹x+۱۴=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۷)=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow y=۹-۲=۷ \\ x=۷ \Rightarrow y=۹-۷=۲ \end{cases}$$

و چون x طول و y عرض است پس $x \geq y$ ، جواب $x=۷ \ , \ y=۲$ قابل قبول است .

۱- ک.م.م $= p(p+1)$

$$\frac{6}{p}=2+\frac{p}{p+1}\Rightarrow 6(p+1)=2p(p+1)+p(p)\Rightarrow 3p^2-4p-6=0$$

چون فقط $p=-1$, $p=0$ مخرج را صفر می‌کنند پس ق ق $p=\frac{2\pm\sqrt{4+18}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{22}}{3}$

---

۲ – ک.م.م $= k(2-k)$

$$k(k)+2(2-k)=5k(2-k)\Rightarrow k^2+4-2k=10k-5k^2\Rightarrow$$

$$6k^2-12k+4=0\Rightarrow 3k^2-6k+2=0\Rightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$$

چون فقط $k=2$, $k=0$ مخرج را صفر میکنند دو جواب قابل قبولند.

---

۳ - ک.م.م $= (3k-1)^2$

$$2(3k-1)^2+5(3k-1)=-2\Rightarrow 18k^2-12k+2+15k-5=-2\Rightarrow$$

$$18k^2+3k-1=0\Rightarrow k=\frac{-3\pm\sqrt{81}}{36}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{6}\\ k=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

چون فقط $k=\frac{1}{3}$ مخرج کسر را صفر می کند ، دو جواب قابل قبولند.

---

٤ - ک.م.م $= y^2+5y=y(y+5)$

$$3y+5+y(y+4)=(y+1)(y+5)\Rightarrow 3y+5+y^2+4y=y^2+6y+5\Rightarrow y=0$$

چون $y=-5$, $y=0$ مخرج کسر را صفر می کنند پس جواب به دست آمده قابل قبول نیست و معادله جواب ندارد.

---

۵ – ک.م.م $= m(m+2)(m-2) = m(m^2-4)$

$$3m(m-2)+2(m^2-4)=(4m-4)m \Rightarrow 3m^2-6m+2m^2-8=4m^2-4m$$

$$m^2-2m-8=0 \Rightarrow (m-4)(m+2)=0 \Rightarrow m=4 \quad or \quad m=-2$$

چون $m=\pm 2$, $m=0$ مخرج را صفر می کنند تنها جواب $m=4$ قابل قبول است.

---

٦ - ک.م.م $= (x+3)(x-3) = x^2-9$

$$2(x+3)-3(x-3)=12(1) \Rightarrow -x+15=12 \Rightarrow x=3$$

چون $x=\pm 3$ جوابهای مخرجند بنابراین تنها جواب به دست آمده قابل قبول نیست.

---

۷ –چون $x=-3$ جواب مخرج است بنابراین مجموعه جواب برابر $R-\{-3\}$ است.

---

۸ – راه حل اول) n تعداد اسباب بازی و x قیمت قبل از تخفیف

$$\frac{12000}{x-100}=4+\frac{12000}{x} \Rightarrow \frac{1}{x-100}-\frac{1}{x}=\frac{1}{3000} \Rightarrow \frac{100}{x(100-x)}=\frac{1}{3000} \Rightarrow$$

$$x^2-100x-300000=0 \Rightarrow (x-600)(x+500)=0 \Rightarrow x=600 \vee x=-500$$

که $x=600$ قابل قبول است و $n=\frac{12000}{x}=\frac{12000}{600}=20$

راه حل دوم) n تعداد اسباب بازی و x قیمت قبل از تخفیف

$$\begin{cases} nx=12000 \\ (n+4)(x-100)=12000 \end{cases} \Rightarrow nx+4x-100n-400=12000 \Rightarrow$$

$$12000+4x-100n-400=12000 \Rightarrow 4x-100n=400 \Rightarrow x=25n+100 \text{ , } nx=12000$$

$$\Rightarrow n(25n+100)=12000 \Rightarrow n(n+4)=480 \Rightarrow n^2+4n-480=0 \Rightarrow n=\frac{-2\pm\sqrt{484}}{1}$$

$$\Rightarrow n=-2\pm 22 \Rightarrow n=20 \quad or \quad n=-24$$

چون n تعداد اسباب بازی است پس $n=-24$ قابل قبول نیست پس $x=\frac{12000}{20}=600$.

۱- الف)

$$\sqrt{1-x^2}=x \Rightarrow 1-x^2=x^2 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,$$

$$\sqrt{1-(\pm\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{ج}=\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

ب)

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1-x \overset{x>0}{\Rightarrow} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) \Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=1 \\ \quad or \\ (1+\sqrt{x})^2=1 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$,\begin{cases} x=1 \Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}}=0=1-1 \\ x=0 \Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{0}}{1+\sqrt{0}}=1=1-0 \end{cases} \Rightarrow \text{ج}=\{0,1\}$$

ج) راه حل اول : $(2+\sqrt{1+x})^2=(\sqrt{x})^2 \Rightarrow 5+x+4\sqrt{1+x}=x \Rightarrow \sqrt{1+x}=-\frac{5}{4}$

$\sqrt{1+x}\geq 0\ ,-\frac{5}{4}<0$ و این دو شرط اشتراک ندارند پس دارای جواب نیست.

راه حل دوم : چون باید $x>0$ باید باشد پس $\sqrt{1+x}>\sqrt{x}$ بنابراین $2+\sqrt{1+x}>\sqrt{x}$

پس معادله دارای جواب نیستپس $\text{ج}=\{\}$

۲- عبارت صفر نمی شود $\sqrt{1-x}\geq 0\ ,\ \sqrt{2-x}\geq 0\ ,3>0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}+3>0$

---

۳ -

الف) $V=\sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow V^2=\frac{2k}{m} \Rightarrow k=\frac{mV^2}{2}$

ب) $F=\frac{1}{2\pi}\sqrt{LC} \Rightarrow F^2=\frac{1}{4\pi^2}(LC) \Rightarrow L=\frac{4\pi^2F^2}{C}$

ج) $I=\frac{nE}{R+nr} \Rightarrow IR=nE-nIr=n(E-Ir) \Rightarrow n=\frac{IR}{E-Ir}$

د) $\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow T_1=\frac{P_1V_1T_2}{P_2V_2}$

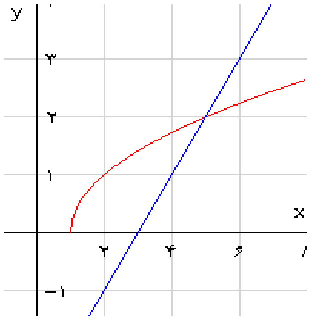
ه) $A=p(1+i)^2 \Rightarrow (1+i)^2=\frac{A}{p} \Rightarrow 1+i=\pm\sqrt{\frac{A}{p}} \Rightarrow i=\pm\sqrt{\frac{A}{p}}-1$

۱- الف) هندسی :

$$y=\sqrt{x-۱}\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۲ & ۵ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}$$

$$y=x-۳\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۲ & ۳ & ۵ \\ \hline y & -۱ & ۰ & ۲ \end{array}$$

تنها جواب $x=۵$ است .



جبری :

$$x-۱=(x-۳)^۲\Rightarrow x^۲-۷x+۱۰=۰\Rightarrow x=۲ \quad or \quad x=۵$$

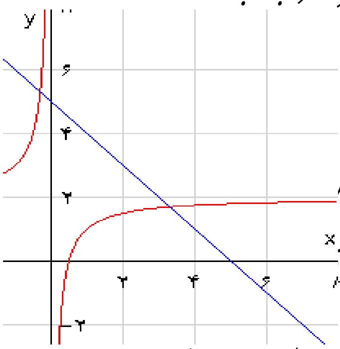
$$x=۲\Rightarrow\sqrt{۲-۱}\overset{?}{=}۲-۳ \qquad x=۵\Rightarrow\sqrt{۵-۱}\overset{?}{=}۵-۳$$

فقط تساوی دوم درست است پس تنها $x=۵$ قابل قبول است.

ب) هندسی : نمودار $y=\frac{۲x-۱}{x}=-\frac{۱}{x}+۲$ انتقال $-\frac{۱}{x}$ به اندازه ۲ واحد به بالاست.

$$y=۵-x\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۵ & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۵ & ۳ \end{array}$$

با توجه به نمودار $x=۳/۵$, $x=-۰/۲۵$ دو جواب تق



جبری :

$$\frac{۲x-۱}{x}=۵-x\Rightarrow x^۲-۳x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

$x=۰$ مخرج کسر را صفرمیکند پس هردو جواب به دست آمده قابل قبولند.

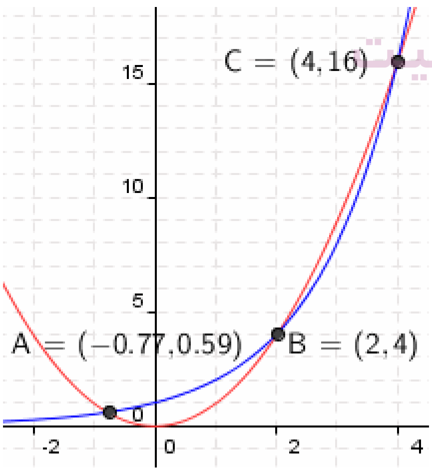
ج) هندسی :

$$y=۲^x\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۱ & ۲ & ۴ & ۸ \end{array}$$

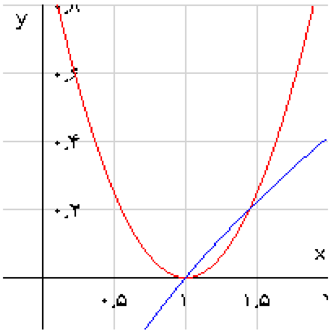
$$y=x^۲\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ & ۴ \end{array}$$

با توجه به نمودار $x=۲$, $x=-۰/۷۵$ دو جواب تقریبی اند.

جبری : ×



د) هندسی :



$$\sqrt{x}+۲x=x^{۲}+۲ \Rightarrow \sqrt{x}-۱=(x-۱)^{۲}$$

$$y=\sqrt{x}-۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۱ & ۴ & ۹ \\ \hline y & -۱ & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}$$

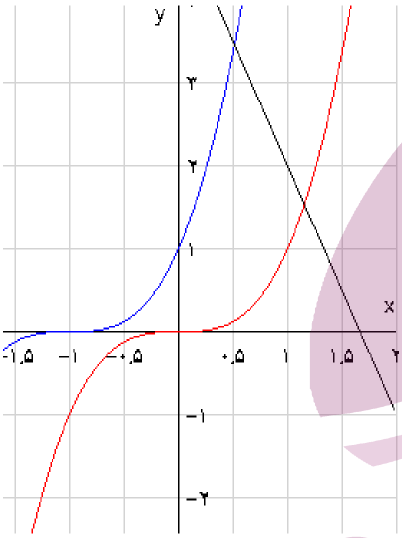
$$y=(x-۱)^{۲} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ & ۴ \end{array}$$

با توجه به شکل دو جواب $x=۱/۴$, $x=۱$ وجود دارد.

جبری : ×

---

۲ –



$$y=x^{۳} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & -۱ & ۰ & ۱ & ۸ \end{array}$$

$$y=-۳x+۵ \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۱ & ۱/۵ & ۲ \\ \hline y & ۵ & ۲ & ۰/۵ & -۱ \end{array}$$

طول محل برخورد نمودار آبی و سیاه تقریبا $x=۰/۵$ است .

۱-

$$(-a)^2=(a)^2=a^2 \Rightarrow \sqrt{(-a)^2}=\sqrt{(a)^2} \Rightarrow |-a|=|a|$$

$$|a|^2=|a|\times|a|=|a\times a|=|a^2|=a^2 \quad (a^2\geq 0)$$

$$|a|\leq|a| \;,|a|\geq 0 \Rightarrow -|a|\leq a\leq|a|$$

۲-

$$\left.\begin{array}{l} -|a|\leq a\leq|a| \\ -|b|\leq b\leq|b| \end{array}\right\} \Rightarrow -(|a|+|b|)=-|a|-|b|\leq a+b\leq|a|+|b| \Rightarrow |a+b|\leq|a|+|b|$$

۳-

$$|y|=|x+y-x|\leq|x|+|y-x| \Rightarrow |y|\leq|x|+|y-x| \Rightarrow |y|-|x|\leq|y-x|$$

۴-

$$|a|>c \Rightarrow a^2>c^2 \Rightarrow a^2-c^2=(a-c)(a+c)>0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c>0\,,\; a+c>0 \Rightarrow a>c\,,\, a>-c \Rightarrow a>c \\ \qquad\qquad or \\ a-c<0\,,\, a+c<0 \Rightarrow a<c\,,\, a<-c \Rightarrow a<-c \end{cases}$$

توضیح : برای برقراری شرط $a>-c$, $a>c$ با توجه به آنکه c مثبت است کافیست $a>c$.

۵-

الف) $f(x)=x|x|=\begin{cases} x(x)=x^2 & x\geq 0 \\ x(-x)=-x^2 & x<0 \end{cases}$

x	۰
x	$-$ ○ $+$

ب) $f(x)=\begin{cases} x+1-2=x-1 & x\geq -1 \\ -x-1-2=-x-3 & x<-1 \end{cases}$

x	۱-
$x+1$	$-$ ○ $+$

ج) $x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad , \quad x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$$\begin{cases} x\leq -2 \Rightarrow y=-(x-1+x+2)=-2x-1 \\ -2<x\leq 1 \Rightarrow y=-x+1+x+2=3 \\ x>1 \Rightarrow y=x-1+x+2=2x+1 \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} -2x-1 & x\leq -2 \\ 3 & -2<x\leq 1 \\ 2x+1 & x>1 \end{cases}$$

x		۲-		۱	
$x-1$	$-$		$-$	○	$+$
$x+2$	$-$	○	$+$		$+$

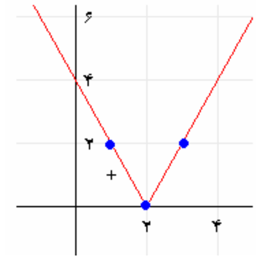
۱-

الف) $|۲t-۱|=۳ \Rightarrow ۲t-۱=\pm۳ \Rightarrow t=۲ \quad or \quad t=-۱ \Rightarrow \text{ج}=\{۲,-۱\}$

ب) $|y^{۲}-۲|=۷ \Rightarrow y^{۲}-۲=\pm۷ \Rightarrow \begin{cases} y^{۲}=۹ \Rightarrow y=\pm۳ \\ y^{۲}=-۵ \quad \times \end{cases} \Rightarrow \text{ج}=\{\pm۳\}$

ج) $|۲x-۳|=-(۲x-۳) \Rightarrow ۲x-۳\le ۰ \Rightarrow x\le \frac{۳}{۲} \Rightarrow \text{ج}=(-\infty,\frac{۳}{۲}]$

۲-



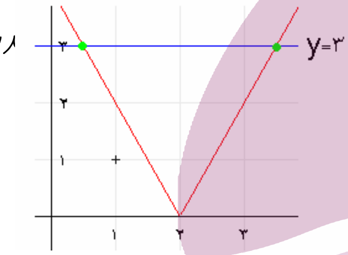
الف) $۲x-۴=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow$

x	۱	۲	۳
y	۲	۰	۲

$\Rightarrow$

جبری $|۲x-۴|=۳ \Rightarrow ۲x-۴=\pm۳ \Rightarrow x=\frac{۷}{۲} \quad or \quad x=\frac{۱}{۲}$

رسمی



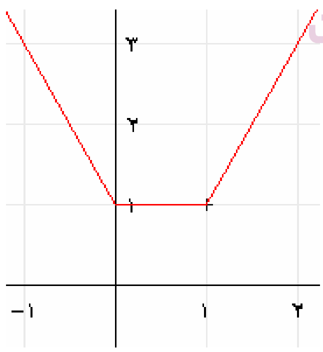
ب)

$$y=|x|+|۱-x|=\begin{cases} -x+۱-x=۱-۲x & x\le ۰ \Rightarrow \\ x+۱-x=۱ & ۰<x\le ۱ \Rightarrow \\ x-۱+x=۲x-۱ & x>۱ \Rightarrow \end{cases}$$

x	۰	-۱
y	۱	۳

x	۰	۱
y	۱	۱

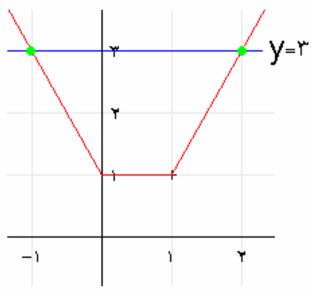
x	۱	۲
y	۱	۳



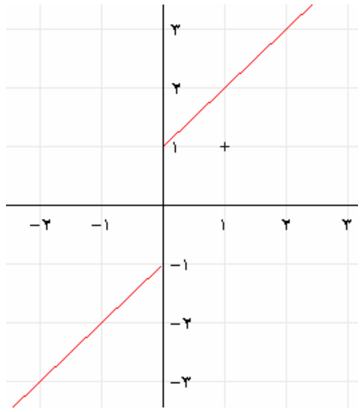
جبری $|x|+|۱-x|=۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱-۲x=۳ \quad (if \quad x<۰) \Rightarrow x=-۱ \\ ۱=۳ \quad (if \quad ۰\le x\le ۱) \Rightarrow \text{ج}=\{\} \\ ۲x-۱=۳ \quad (if \quad x>۱) \Rightarrow x=۲ \end{cases}$

پس جوابهای معادله $x=-۱ \; , \; x=۲$ است

هندسی



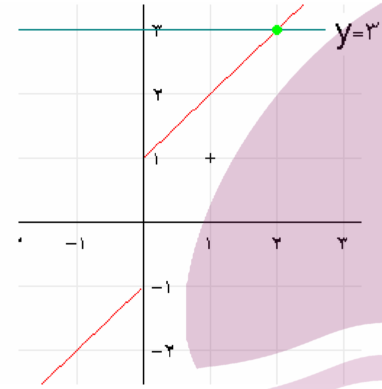
ج) $y = x + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x+۱ & x > ۰ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۲ \end{array} \\ x-۱ & x < ۰ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & -۱ \\ \hline y & -۱ & -۲ \end{array} \end{cases}$



جبری $y = ۳ \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲\ (if\ \ x > ۰) \Rightarrow ج = \{۲\} \\ x-۱ = ۳ \Rightarrow x = ۴\,(if\ \ x < ۰) \Rightarrow ج = \{\ \} \end{cases}$

پس تنها جواب قابل قبول $x = ۲$ است .

سی



۱) $x(x^2-2x+1)\ge 0 \Rightarrow x(x-1)^2 \ge 0$

ولی $(x-1)^2\ge 0$ همواره برقرار است پس باید $x\ge 0$.

۲) $\dfrac{2x-1}{x}-1>0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x}>0$

ریشه های صورت و مخرج $x=1$ ، $x=0$ هستند پس باید $x<0$ یا $x>1$.

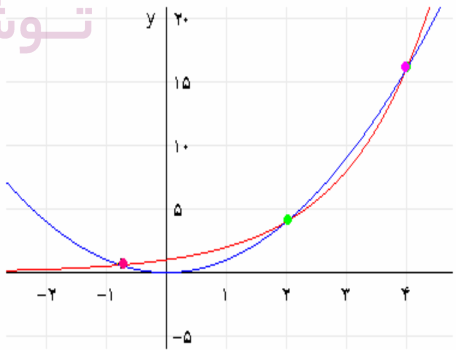
۳)
$$\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}-\frac{2}{1}\le 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)-x(x)-2x(x-1)}{x(x-1)}\le 0 \Rightarrow$$
$$\frac{x^2-1-x^2-2x^2+2x}{x(x-1)}\le 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+2x-1}{x(x-1)}\le 0$$

برای صورت کسر اخیر $\Delta=2^2-4(-2\times(-1))=4-8=-4<0$ پس صورت کسر همواره هم علامت a یعنی منفی است. پس مخرج باید مثبت باشد یعنی $x<0 \;\; or \;\; x>1$.

۴) $|x-2|\le x \Rightarrow x\ge 0 \;\; , \;\; (x-2)^2\le x^2 \Rightarrow x^2-4x+4\le x^2 \Rightarrow x\ge 1$

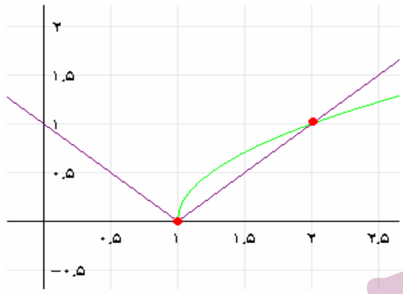
اشتراک دو شرط $(x\ge 0 \;\; , \;\; x\ge 1)$ برابر $x\ge 1$ است.

۵) آن قسمت از نمودار $y=x^2$ که زیر نمودار $y=2^x$ است را می یابیم. $-0/75\le x\le 2 \;\; or \;\; x\ge 4$.



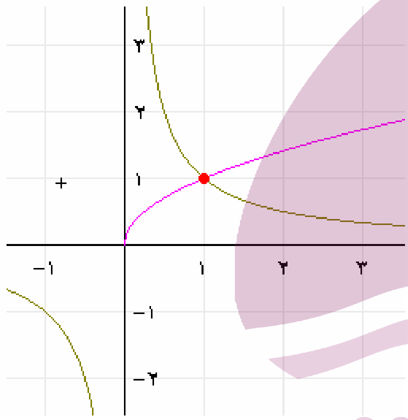
۶) $y=\sqrt{x-۱}\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۲ & ۵ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}$ و $y=|x-۱|\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}$

مجموعه جواب برابر $x\geq ۲$ است .



۷) $y=\dfrac{۱}{x}\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -۱ & -۰/۵ & ۰/۵ & ۱ \\ \hline y & -۱ & -۲ & ۲ & ۱ \end{array}$ و $y=\sqrt{x}\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۴ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}$

با توجه به شکل برای $x>۱$ نمودار $y=\dfrac{۱}{x}$ زیر نمودار $y=\sqrt{x}$ قرار دارد.



۸) $x+۱<|x|\Rightarrow (x+۱)^۲<x^۲\Rightarrow$

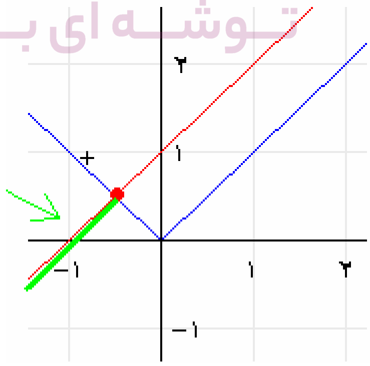
$x^۲+۲x+۱<x^۲\Rightarrow x<-\dfrac{۱}{۲}$

روش جبری :

$y=x+۱\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۲ \end{array}$

$,\ y=|x|\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۱ & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}$

روش هندسی :



۹)

روش جبری :

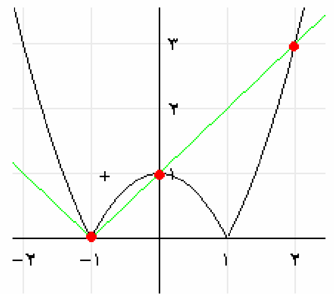
$$|x^{۲}-۱|\le|x+۱|\Rightarrow|x+۱|\times|x-۱|\le|x+۱|\Rightarrow\begin{cases}|x+۱|=۰\Rightarrow x=-۱\\ \quad or\\ |x-۱|\le ۱\Rightarrow -۱\le x-۱\le ۱\Rightarrow ۰\le x\le ۲\end{cases}$$

پس مجموعه جواب برابر $[۰\,,\,۲]\cup\{-۱\}$ است .

روش هندسی :

$$y=|x^{۲}-۱|\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -۲ & -۱ & ۰ & ۱ & ۲\\ \hline y & ۳ & ۰ & ۱ & ۰ & ۳\end{array}$$

$$y=|x+۱|\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۲ & -۱ & ۰\\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱\end{array}$$



دربازه $[۰,۲]$ نمودار $y=|x^{۲}-۱|$ زیرنمودار $y=|x+۱|$ ویا واقع بر آن است.

البته برای علامت تساوی نقاط تقاطع دیگر یعنی $x=-۱$ نیز جواب است.

روش جبری :

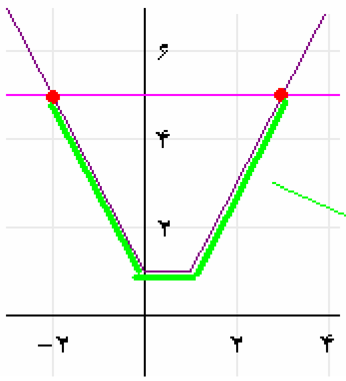
۱۰) $$|x|+|x-۱|=\begin{cases}-x-x+۱ & x<۰\\ x-x+۱ & ۰\le x\le ۱\\ x+x-۱ & x>۱\end{cases}=\begin{cases}-۲x+۱ & x\le ۰\\ ۱ & ۰<x\le ۱\\ ۲x-۱ & x>۱\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\le ۰\ ,\ -۲x+۱\le ۵\Rightarrow x\ge -۲\Rightarrow -۲\le x\le ۰\\ ۰<x\le ۱\ ,\ ۱\le ۵\Rightarrow ۰<x\le ۱\\ x>۱\ ,\ ۲x-۱\le ۵\Rightarrow x\le ۳\Rightarrow ۱<x\le ۳\end{cases}\Rightarrow x\in[-۲,۳]$$

روش هندسی : نمودار

$$y=\begin{cases}-۲x+۱ & x\le ۰\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & -۱\\ \hline y & ۱ & ۳\end{array}\\ ۱ & ۰<x\le ۱\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱\\ \hline y & ۱ & ۱\end{array}\\ ۲x-۱ & x>۱\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲\\ \hline y & ۱ & ۳\end{array}\end{cases}$$

و $y=۵$ رسم کنید.



جواب $[-۲,۳]$

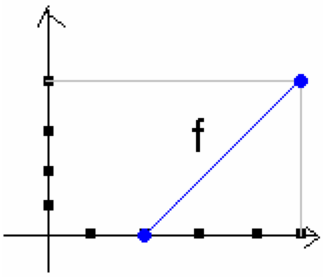
۱- برای هریک از ۴ عضو A دوانتخاب وجوددارد p,q پس تعدادحالات $16 = 2^4 = 2\times2\times2\times2$ است .

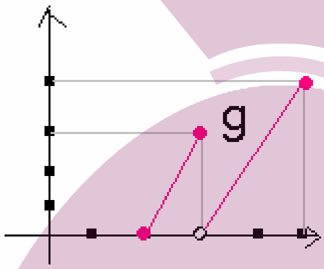
۲- برای هریک از m عضو A میتوان n انتخاب داشت ، پس تعداد حالات $n\times n\times\ldots\times n = n^m$ است .

۳- $x \geq -2 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x+2}$

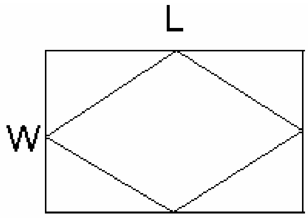
٤- $f(x)=\frac{4}{3}(x-2) \quad , \ 2\leq x\leq 5$

$$g(x)=\begin{cases} 3x-6 & 2\leq x\leq 3 \\ 2x-6 & 3< x\leq 5 \end{cases}$$





تابع f یک به یک است ولی g نیست مثلا اگر $y=1$ در اینصورت $x_2=\frac{7}{2}$, $x_1=\frac{7}{3}$.



۵- مساحت لوزی نصف حاصلضرب قطرهای آن است .

$$2(L+W)=40 \Rightarrow L+W=20 \Rightarrow L=20-W$$

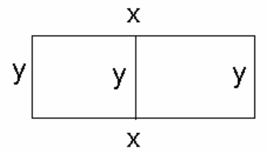
$$\begin{cases} L>0 \Rightarrow 20-w>0 \Rightarrow w<20 \\ L\geq W \Rightarrow 20-W\geq W \Rightarrow W\leq 10 \end{cases} \xrightarrow{\cap} W\leq 10$$ با دو شرط

مساحت لوزی $= f(W)=\frac{1}{2}L\times W=\frac{(20-W)W}{2} \quad , \quad W\leq 10$

٦- $x-y=12 \Rightarrow x=y+12 \Rightarrow xy=(y+12)y=y^2+12y=f(y)$

وشرط $y<x \Rightarrow y<y+12 \Rightarrow 0<12$ که همواره برقرار است .

پس $f(y)=y^2+12y \ , \ y\in R$

۷-


$$2x+3y=150 \Rightarrow x=\frac{-3y+150}{2} \quad , \quad S=xy=\frac{-3y^2+150y}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y>0 \\ x\ge y \Rightarrow \frac{150-3y}{2}\ge y \Rightarrow 5y\le 150 \Rightarrow y\le 30 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} 0<y\le 30$$ پس بشرط

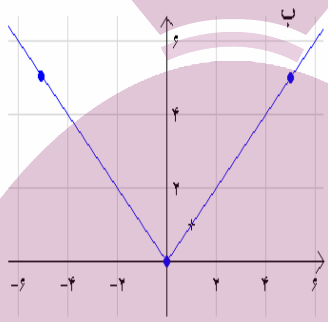
$$S(y)=\frac{-3y^2+150y}{2}$$

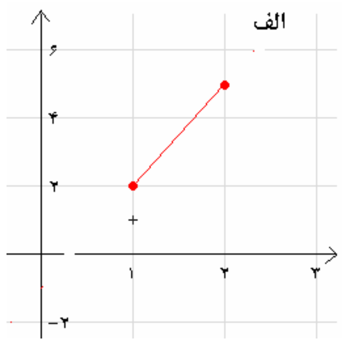
۸- الف)

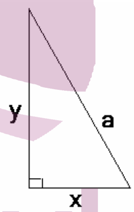
x	1	2
y	2	5

ب)

x	-5	0	5
y	5	0	5





۹-


$$\frac{xy}{2}=25 \Rightarrow xy=50 \Rightarrow y=\frac{50}{x}$$

$$a^2=x^2+y^2=x^2+\left(\frac{50}{x}\right)^2=f(x)$$

پس با شرط $x>0$ داریم $f(x)=x^2+\left(\frac{50}{x}\right)^2$.

۱۰- الف) نادرست $f(2x)=(2x)^2=4x^2 \quad , \quad 2f(x)=2x^2 \Rightarrow f(2x)\ne 2f(x)$

ب) درست $g(2x)=|2x|=|2|\times|x|=2|x|=2g(x)$

ج) نادرست $f(x+2)=(x+2)^2=x^2+2x+4 \quad , \quad f(x)+2=x^2+2 \Rightarrow f(x+2)\ne f(x)+2$

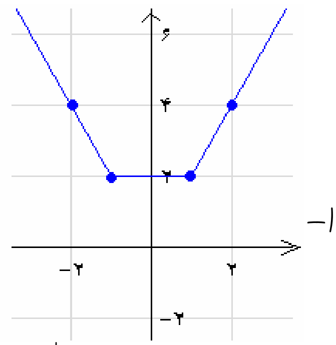
د) نادرست $g(x+2)=|x+2|\le|x|+2=g(x)+2$ طبق نامساوی مثلثی

تذکر مهم برای رسم : برای رسم ، نقاط مرزی را هر چند متعلق به دامنه نباشند را در نظر گرفته و برای رسم نقطه را توخالی رسم می کنیم مثلا برای $۱ < x < ۲$, $y = x + ۱$ هرچند $x = ۱,۲$ در دامنه نیست آنها رادر نظر گرفته و هنگام رسم تو خالی می کشیم.

$$y = x + ۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۳ \end{array}$$

$$\begin{cases} x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = +۱ \end{cases} \Rightarrow$$

x		-۱		۱	
$x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$



$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x - ۱ - x + ۱ & x < -۱ \\ x + ۱ - x + ۱ & -۱ \le x \le ۱ \\ x + ۱ + x - ۱ & x > ۱ \end{cases} = \begin{cases} -۲x & x < -۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -۱ & -۲ \\ \hline y & ۲ & ۴ \end{array} \\ ۲ & -۱ \le x \le ۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -۱ & ۱ \\ \hline y & ۲ & ۲ \end{array} \\ ۲x & x > ۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۴ \end{array} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f = [۲, +\infty)$$

۲- الف)

$$y=ax+b,\begin{cases}(-۴,+۱)\in f \Rightarrow ۱=-۴a+b\\ (-۲,۳)\in f \Rightarrow ۳=-۲a+b\end{cases} \Rightarrow -۲a=-۲ \Rightarrow a=۱\ ,\ b=۵$$

$$y=ax+b,\begin{cases}(۱,-۱)\in f \Rightarrow -۱=a+b\\ (۶,-۳)\in f \Rightarrow -۳=۶a+b\end{cases} \Rightarrow ۵a=-۲ \Rightarrow a=\frac{-۲}{۵}\ ,\ b=\frac{-۳}{۵}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x+۵ & -۴\le x\le -۲\\ +۱ & -۲<x<۱\\ \frac{-۲}{۵}x+\frac{۳}{۵} & ۱\le x\end{cases}\ ,\ \begin{cases}D_f=[-۴,+\infty)\\ R_f=(-\infty,-۱]\cup[۱,۳]\end{cases}$$

ب)

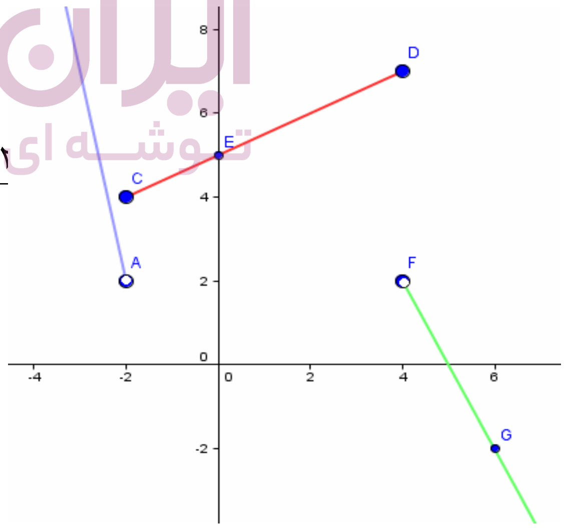
$$y=ax+b,\begin{cases}(-۳,۴)\in f \Rightarrow ۴=-۳a+b\\ (-۱,-۱)\in f \Rightarrow -۱=-a+b\end{cases} \Rightarrow -۲a=۵ \Rightarrow a=\frac{-۵}{۲}\ ,\ b=\frac{-۷}{۲}$$

$$y=ax+b,\begin{cases}(-۱,-۱)\in f \Rightarrow -۱=-a+b\\ (۲,۲)\in f \Rightarrow ۲=۲a+b\end{cases} \Rightarrow ۳a=۳ \Rightarrow a=۱\ ,\ b=۰$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{-۵}{۲}x-\frac{۷}{۲} & x\le -۱\\ x & -۱<x<۲\\ -۲ & x\ge ۲\end{cases}\ ,\ \begin{cases}D_f=(-\infty,+\infty)=IR\\ R_f=\{-۲\}\cup[-۱,+\infty)\end{cases}$$

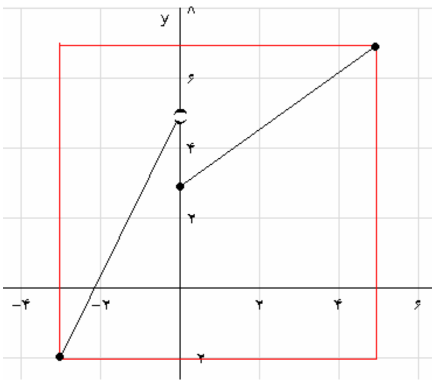
۳-

$$f(x)=\begin{cases}-۵x-۸ & x<-۲ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -۲ & -۴\\ \hline y & ۲ & ۱۲\end{array}\\ \frac{۱}{۲}x+۵ & -۲\le x\le ۴ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۴ & -۲\\ \hline y & ۵ & ۷ & ۴\end{array}\\ ۱۰-۲x & x>۴ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۴ & ۶\\ \hline y & ۲ & -۲\end{array}\end{cases}$$



$$f(۶)=۱۰-۲(۶)=-۲\ ,\ f(۴)=\frac{۱}{۲}(۴)+۵=۷$$

$$f(-۴)=-۵(-۴)-۸=۱۲\ ,\ f(۰)=\frac{۱}{۲}(۰)+۵=$$



۴-

$$y=ax+b\,,\begin{cases}(\cdot,۳)=(x,y)\Rightarrow ۳=a(\cdot)+b\Rightarrow b=۳\\(۵,۷)=(x,y)\Rightarrow ۷=۵a+b\Rightarrow a=\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

$$y=ax+b\,,\begin{cases}(\cdot,۵)=(x,y)\Rightarrow ۵=a(\cdot)+b\Rightarrow b=۵\\(-۳,-۲)=(x,y)\Rightarrow -۲=a(-۳)+b\Rightarrow a=\frac{۷}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{۴}{۵}x+۳ & \cdot\le x\le ۵\\ \frac{۷}{۳}x+۵ & -۳\le x<\cdot\end{cases}$$

۵- الف) $x^۲+y^۲=۲۵, x=\cdot\Rightarrow \cdot^۲+y^۲=۲۵\Rightarrow y=\pm ۵\Rightarrow$ تابع نیست

ب) $y=\begin{cases}x+۳ & x\le\cdot\\ x+۱ & x>\cdot\end{cases}$ تابع هست ، به ازای هر x در دامنه دقیقا یک y وجود دارد .

ج) $y=|x|+۱$ تابع هست ، به ازای هر x در دامنه دقیقا یک y وجود دارد .

د) $x=|y|+۱\ ,\ x=۲\Rightarrow |y|=۱\Rightarrow y=\pm۱$ تابع نیست

ه) $y^۲=x^۲,\ x=۱\Rightarrow y^۲=۱\Rightarrow y=\pm۱$ تابع نیست

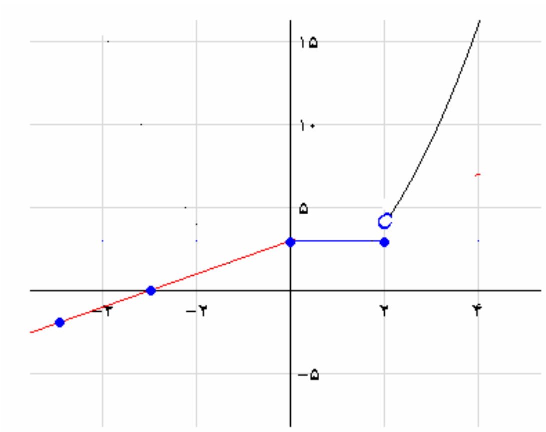
و) $۳x+۲y=۱۲\Rightarrow y=\frac{۱۲-۳x}{۲}$ تابع هست

۶- الف+ه) $\overset{x<\cdot}{\Rightarrow} f(x)=ax+b,\begin{cases}f(-۵)=-۲\Rightarrow -۵a+b=-۲\\ f(-۳)=\cdot\Rightarrow -۳a+b=\cdot\end{cases}\Rightarrow a=۱\,,\,b=۳$

ج+الف) $\overset{\cdot\le x\le ۲}{\Rightarrow}\ f(x)=f(۲)=۳$ د) $\overset{x>۲}{\Rightarrow} f(x)=x^۲$

ادامه ۶−

$$f(x)=\begin{cases} x+۳ & x<۰\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -۵ & -۳ \\ \hline y & -۲ & ۰ \end{array} \\ ۳ & ۰\leq x\leq ۲\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲ \\ \hline y & ۳ & ۳ \end{array} \\ x^۲ & x>۲\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۴ & ۹ \end{array} \end{cases}$$



۷−

الف) $g(x)=\sqrt{۱-Cos^۲x}=\sqrt{Sin^۲x}=|Sin\,x|\neq Sin\,x=f(x)\Rightarrow f\neq g$

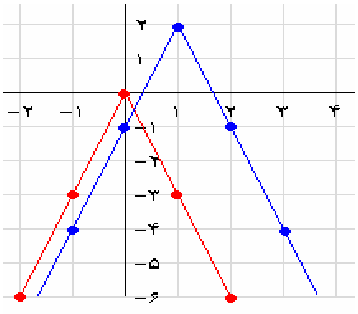
ب) $f(۳)=۵,\ g(۳)=۳+۳=۶,\ f(۳)\neq g(۳)\Rightarrow f\neq g$

ج) $D_f=D_g=R,\begin{cases} x\neq ۲\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^۲-۲x}{x-۲}=\dfrac{x(x-۲)}{x-۲}=x=f(x) \\ x=۲\Rightarrow g(۲)=۳=f(۲)\end{cases}\Rightarrow f=g$

د)

$$D_f=D_g=R\ ,\ f(x)=\frac{x^۲}{۱+\sqrt{۱+x^۲}}\times\frac{۱-\sqrt{۱+x^۲}}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{x^۲(۱-\sqrt{۱+x^۲})}{۱-۱-x^۲}$$

$$=-۱(۱-\sqrt{۱+x^۲})=\sqrt{۱+x^۲}-۱=g(x)\Rightarrow f=g$$

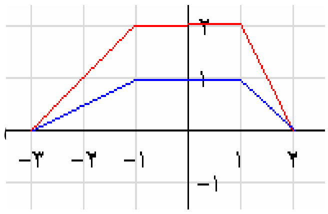


۱- روش اول) $y=|x|$ را رسم ،انتقال یک واحد به راست ، قرینه نمودار نسبت به محور x ها ، انبساط عمودی در امتداد محور yها با ضریب ۳ ، دو واحد انتقال به بالا.

روش دوم) ابتدا نمودار $y=-۳|x|$ را رسم کرده و سپس نمودار را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا انتقال می دهیم.

$$y=-۳|x| \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -۲ & -۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & -۶ & -۳ & ۰ & -۳ & -۶ \end{array}$$ (رسم با روش دوم↑)

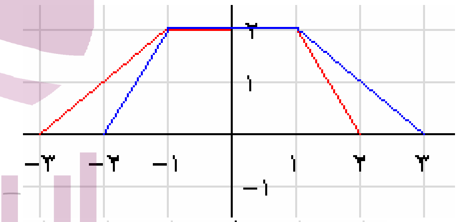
۲-



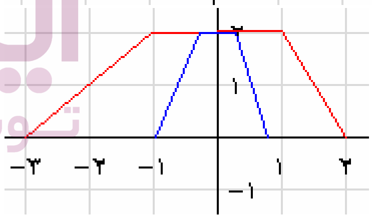
(قرمز،نمودار پیش فرض و آبی ،نمودار جواب)

توجه به نمودار f داریم $f(-۳)=۰$, $f(-۱)=۲$, $f(۱)=۲$, $f(۲)=۰$

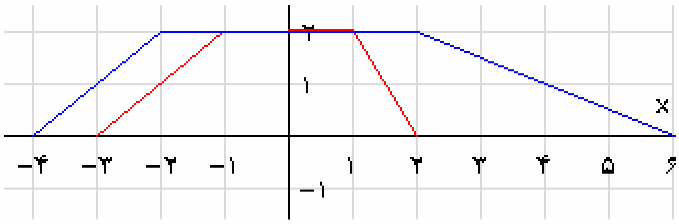
الف) انقباض عمودی در امتداد محور y ها با ضریب $\frac{۱}{۲}$



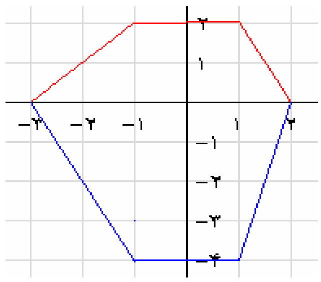
ب) قرینه نسبت به محور y ها



ج) انقباض افقی در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{۱}{۳}$

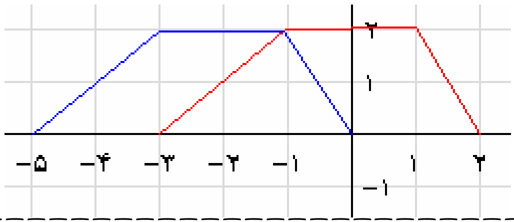


د) قرینه نسبت به محور y ها و انبساط افقی در امتداد محور x ها با ضریب ۲



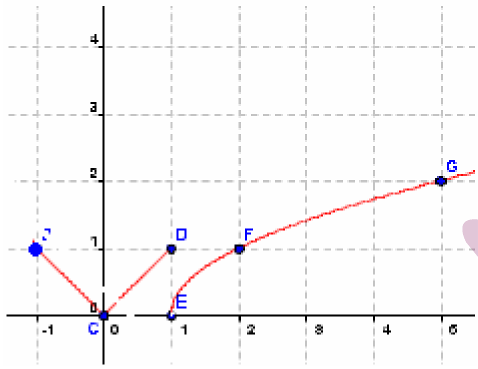
ه) قرینه نسبت به محور x ها ، انبساط عمودی درامتداد محور y ها باضریب ۲

انتقال نمودار ۲ واحد به سمت چپ و)



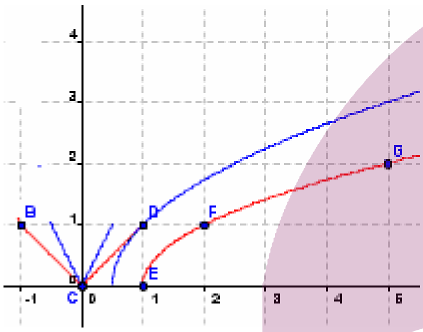
۳-

$$f(x)=\begin{cases}|x| & -1\le x\le 1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 & 1\end{array} \\ \sqrt{x-1} & x>1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 5 \\ \hline y & 0 & 1 & 2\end{array}\end{cases}$$



رسم $y=f(2x)$

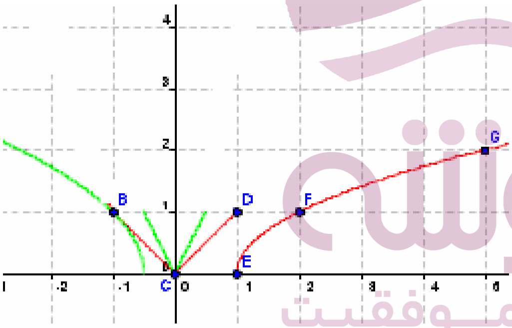
انقباض افقی در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{2}$.



رسم $y=f(-2x)$

قرینه نسبت به محور yها و انقباض افقی

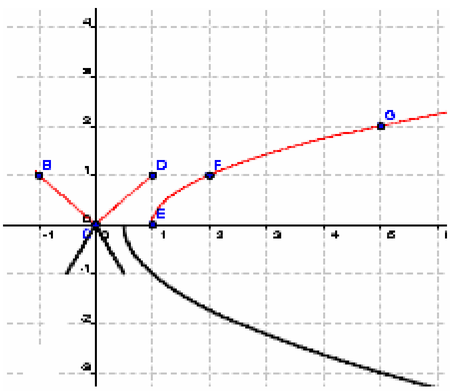
این نمودار در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{2}$.



رسم $y=-f(2x)$

قرینه نسبت به محور x ها و انقباض افقی

درامتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{2}$.



۴- الف) نادرست (باید ۳ واحد به چپ)

ب) نادرست ، g قرینه نمودار f نسبت به محور y هاست. ج) درست

۵- g از انتقال f به اندازه ۲ واحد به سمت چپ و قرینه نسبت به محور x ها و آنگاه انقباض عمودی در امتداد محور y ها به اندازه $\frac{۱}{۲}$ و آنگاه انتقال به اندازه ۳ واحد به پائین .

$$g(x) = -\frac{۱}{۲}|x+۲|-۳$$

۶- $\sqrt{x} \to \sqrt{-x} \to \sqrt{-(x-۳)} \to \sqrt{-x+۳}-۵ \Rightarrow f(x)=\sqrt{-x+۳}-۵$

۷- الف) $g(-۸)=\frac{۱}{۲}f(-۸)=\frac{۱}{۲}\times ۶=۳ \Rightarrow (-۸\,,\,۳)\in g$

ب) $g(۸)=f(-۸)=۶ \Rightarrow (۸\,,\,۶)\in g$

ج) $g(-۸)=f(-۸)-۳=۶-۳=۳ \Rightarrow (-۸\,,\,۳)\in g$

د) $g(-۸)=۳f(-۸)=۳\times ۶=۱۸ \Rightarrow (-۸\,,\,۱۸)\in g$

۸- الف) $g(x)=-\frac{۱}{۲}f(x-۱)+۳$ انتقال ۱ واحد به راست ، قرینه نسبت به محور x ها ، انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ ، انتقال ۳ واحد به بالا .

ب) $g(x)=-۲f(x+۴)-۳$ انتقال ۴ واحد به چپ ، قرینه نسبت به محور x ها ، انبساط عمودی با ضریب ۲ ، انتقال ۳ واحد به پائین .

ج) $g(x)=-۲f(x-\frac{۱}{۳})+۱$ انتقال $\frac{۱}{۳}$ واحد به راست ، قرینه نسبت به محور x ها ، انبساط عمودی با ضریب ۲ ، انتقال ۱ واحد به بالا .

۹- نقاط

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	1	0	-1	0	1

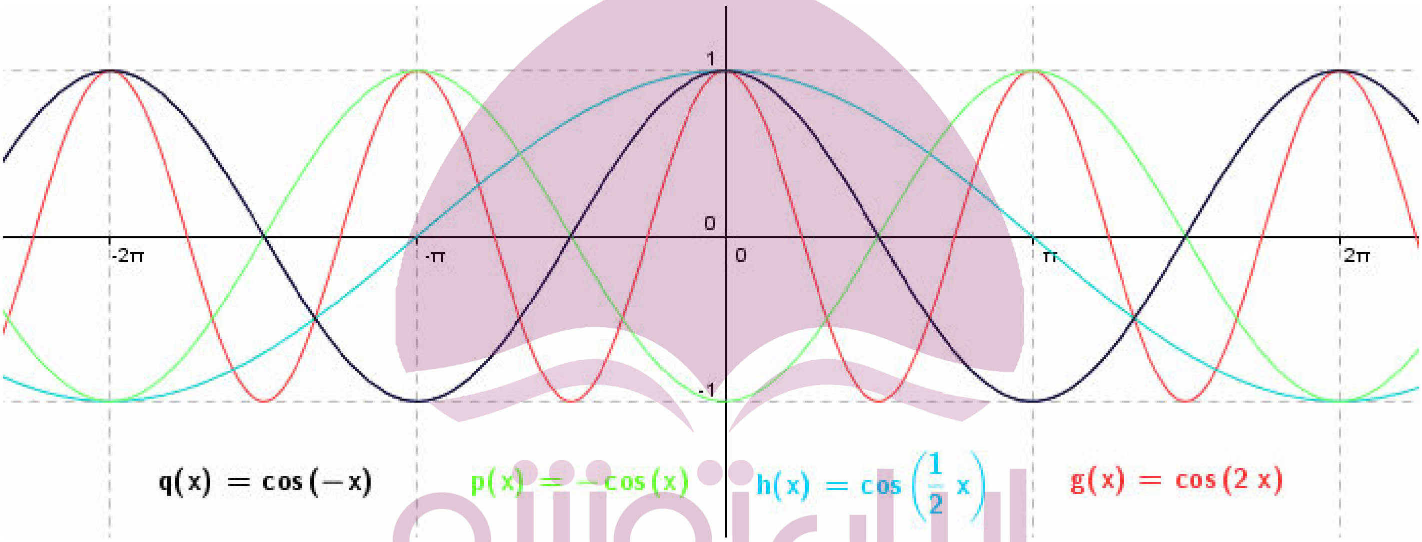
$\Rightarrow f(x)=\cos(x)$ را مبنا گرفته و بر این نقاط دستورات زیر را اعمال و سپس با توجه به شکل کلی نمودار پیش فرض ، نمودار اصلی را رسم کنید.

$f(2x)$، نمودار f منقبض گردد به صورت افقی با ضریب $\frac{1}{2}$.

$f(\frac{1}{2}x)$، نمودار f منبسط گردد به صورت افقی با ضریب ۲ .

$-f(x)$، نمودار f قرینه گردد نسبت به محور x ها .

$f(-x)$ ، نمودار f قرینه گردد نسبت به محور y ها .



---

۱۰ —نمودار دو تابع قرینه همدیگر نسبت به محور y ها

$D_{\sqrt{x}}=[0,+\infty)$, $D_{\sqrt{-x}}=(-\infty,0]$ ، $R_{\sqrt{x}}=R_{\sqrt{-x}}=[0,+\infty)$.

نمودار دو تابع $f(x), f(-x)$ قرینه همدیگر نسبت به محور y ها ،

$g(x)=f(-x)\Rightarrow D_g=\{x\in R\,|\,-x\in D_f\}$ ، $R_{f(x)}=R_{f(-x)}$.

توضیح : چون نمودار قرینه نسبت به محور y هاست بنابراین تصویر نمودار بر محور y ها (یعنی برد) تغییر نمی کند ولی دامنه نسبت به محور y ها قرینه می شود.

۱۱- ابتدا نسبت به محور y ها قرینه شده سپس اگر $|a|>1$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{|a|}$ منقبض و اگر $|a|<1$ با ضریب $\frac{1}{|a|}$ منبسط می گردد.

$$(f/g)_{(x)}=f(x)/g(x)=\frac{۵x}{۳x-۷}\div\frac{x^{۵}-۱}{۵x-۱۵}=\frac{۲۵x(x-۳)}{(۳x-۷)(x^{۵}-۱)}$$

-۱
$$\begin{cases} ۳x-۷=۰\Rightarrow x=\frac{۷}{۳}\Rightarrow D_f=R-\{\frac{۷}{۳}\} \\ ۵x-۱۵=۰\Rightarrow x=۳\Rightarrow D_g=R-\{۳\}\Rightarrow D_{f/g}=R-\{\frac{۷}{۳},۳,۱\} \\ g(x)=۰\Rightarrow x^{۵}-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow \end{cases}$$

-۲ الف) $D_f=R\ ,\ D_g=R\ ,\begin{cases} f(x)=۰\Rightarrow ۴x=۰\Rightarrow x=۰ \\ g(x)=۰\Rightarrow ۲-x=۰\Rightarrow x=۲ \end{cases}$

$$(g/f)_{(x)}=g(x)/f(x)=\frac{۲-x}{۴x}\ ,D_{g/f}=R\cap R\cap(R-\{۰\})=R-\{۰\}$$

$$(f.f)_{(x)}=f(x).f(x)=۱۶x^{۲}\ ,D_{f.f}=R\cap R=R$$

$$(f-g)_{(x)}=f(x)-g(x)=۴x-۲+x=۵x-۲\ ,D_{f-g}=R\cap R=R$$

ب) $x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow D_f=R-\{۲\}\ ,\ ۶-x=۰\Rightarrow x=۶\Rightarrow D_g=R-\{۶\}$

$f(x)=۰\ ,\ g(x)=۰$ جواب ندارد

$$(g/f)_{(x)}=g(x)/f(x)=\frac{۱}{۶-x}\div\frac{۴}{x-۲}=\frac{x-۲}{۴(۶-x)}\ ,D_{g/f}=R-\{۲,۶\}$$

$$(f.f)_{(x)}=f(x).f(x)=\frac{۱۶}{(x-۲)^{۲}}\ ,D_{f.f}=R-\{۲\}$$

$$(f-g)_{(x)}=f(x)-g(x)=\frac{۴}{x-۲}-\frac{۱}{۶-x}=\frac{۲۶-۵x}{(x-۲)(۶-x)}\ ,D_{f-g}=R-\{۲,۶\}$$

ج) $x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \Rightarrow D_f=[۲,+\infty)$, $x+۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲\Rightarrow D_g=[-۲,+\infty)$

$f(x)=۰\Rightarrow x-۲=۰\Rightarrow x=۲$, $g(x)=۰\Rightarrow x+۲=۰\Rightarrow x=-۲$

$(g/f)(x)=g(x)/f(x)=\dfrac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{x-۲}}$, $D_{g/f}=[-۲,+\infty)\bigcap[۲,+\infty)\bigcap(R-\{۲\})=(۲,+\infty)$

$(f.f)(x)=f(x).f(x)=(\sqrt{x-۲})^۲=x-۲$, $D_{f.f}=[۲,+\infty)\bigcap[۲,+\infty)=[۲,+\infty)$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x-۲}-\sqrt{x+۲}$, $D_{f-g}=[۲,+\infty)$

د) $x+۳\geq ۰\Rightarrow x\geq -۳\Rightarrow D_f=[-۳,+\infty)$, $x=۰\Rightarrow D_g=R-\{۰\}$

$f(x)=۰\Rightarrow x=-۳$, $g(x)=۰$ جواب ندارد

$(g/f)(x)=g(x)/f(x)=\dfrac{۲}{x}\div\sqrt{x+۳}=\dfrac{۲}{x\sqrt{x+۳}}$, $D_{g/f}=(-۳,+\infty)-\{۰\}$

$(f.f)(x)=f(x).f(x)=(\sqrt{x+۳})^۲=x+۳$, $D_{f.f}=[-۳,+\infty)$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+۳}-\dfrac{۲}{x}$, $D_{f-g}=[-۳,+\infty)-\{۰\}$

۳- $f(x)=\begin{cases}۵x-۷ & x\geq ۱\\ -x-۱ & x<۱\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{۲}x-۲ & x\geq -۲\\ -۱ & x<-۲\end{cases}$

الف) $(f+g)_{(-۴)}=f(-۴)+g(-۴)=(۴-۱)+(-۱)=۲$

ب) $(f-g)_{(۳)}=f(۳)-g(۳)=(۵(۳)-۷)-(-\frac{۱}{۲}(۳)-۲)=\frac{۲۳}{۲}$

ج) $(f/g)_{(۰)}=f(۰)/g(۰)=(-۰-۱)/(-\frac{۱}{۲}(۰)-۲)=\frac{۱}{۲}$

د) $(f.g)_{(\frac{۱}{۳})}=f(\frac{۱}{۳}).g(\frac{۱}{۳})=(-\frac{۱}{۳}-۱)(-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۳})-۲)=\frac{۲۶}{۹}$

ه) $(fog)_{(-\frac{۱}{۲})} = f(g(-\frac{۱}{۲})) = f(-\frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۲}) - ۲) = f(-\frac{۷}{۲}) = \frac{۷}{۲} - ۱ = \frac{۵}{۲}$

و) $(fof)_{(۷)} = f(f(۷)) = f(۵(۷) - ۷) = f(۲۸) = ۵(۲۸) - ۷ = ۱۳۳$

۴- $D_f = N \ , D_g = \{۱,۲,۳,۴\} \ , D_{۲f+g} = \{۱,۲,۳,۴\} \ , D_{gof} = \{۱,۲,۳,۴\}$

$(۲f+g)_{(۱)} = ۲f(۱) + g(۱) = ۲(۲) + ۲(۱) = ۶ \ , (gof)_{(۱)} = g(f(۱)) = g(۲) = ۲(۲) = ۴$

$(۲f+g)_{(۲)} = ۲f(۲) + g(۲) = ۲(۳) + ۲(۲) = ۱۰ \ , (gof)_{(۲)} = g(f(۲)) = g(۳) = ۲(۳) = ۶$

$(۲f+g)_{(۳)} = ۲f(۳) + g(۳) = ۲(۵) + ۲(۳) = ۱۶ \ , (gof)_{(۳)} = g(f(۳)) = g(۵) = ۲(۵) = ۱۰$

$(۲f+g)_{(۴)} = ۲f(۴) + g(۴) = ۲(۷) + ۲(۴) = ۲۲ \ , (gof)_{(۴)} = g(f(۴)) = g(۷) = ۲(۷) = ۱۴$

۵-

$f(x) = \frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} \ , \ ۱-x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow D_f = R - \{\pm ۱\}$

$g(x) = \sqrt{x(۱-x)} \ , \ x(۱-x) \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۱ \Rightarrow D_g = [۰,۱]$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [۰,۱] \mid \sqrt{x(۱-x)} \neq \pm ۱$

$\sqrt{x(۱-x)} = ۱ \Rightarrow x - x^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ - x + ۱ = ۰ \ , \Delta = -۳ < ۰$ معادله جواب ندارد

$\sqrt{x(۱-x)} = -۱ \ , \ \sqrt{x(۱-x)} \geq ۰ \ , \ -۱ < ۰ \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

$\Rightarrow D_{fog} = \{x \in [۰,۱] \mid x \in R\} = [۰,۱]$

۶- الف) $۲r = x \Rightarrow r = \frac{x}{۲} \Rightarrow r(x) = \frac{x}{۲}$

ب) $A(r) = \pi r^۲$

ج) $(AOr)_{(x)} = A(r(x)) = \pi r^۲ = \pi(\frac{x}{۲})^۲ = \frac{\pi x^۲}{۴}$ ، مساحت دایره ای به شعاع $\frac{x}{۲}$

۷-

$$f+g=\{(-۴,f(-۴)+g(-۴)),(۰,f(۰)+g(۰)),(۳,f(۳)+g(۳))$$
$$=\{(۴,۱۳+(-۷)),(۰,۵+(-۳)),(۳,-۵+۰)\}=\{(۴,۶),(۰,۲),(۳,-۵)\}$$

$$f-g=\{(۴,۱۳-(-۷)),(۰,۵-(-۳)),(۳,-۵-۰)\}=\{(۴,۲۰),(۰,۸),(۳,-۵)\}$$

$$f\times g=\{(۴,۱۳\times(-۷)),(۰,۵\times(-۳)),(۳,-۵\times۰)\}=\{(۴,-۹۱),(۰,-۱۵),(۳,۰)\}$$

چون $g(۰)=۰$ پس $۰\notin D_{f/g}$ بنابراین

$$f/g=\{(۴,۱۳\div(-۷)),(۰,۵\div(-۳))\}=\{(۴,-\frac{۱۳}{۷}),(۰,-\frac{۵}{۳})\}$$

۸- x فاصله زمانی از ۱۳۸۶ تا سال مورد نظر

زمان اول: $f(x)=۲۷+۳x$

زمان دوم: $g(x)=۱۲+۲x$

هردوزمان $f(x)+g(x)=۳۹+۵x$

$x=۱۳۹۶-۱۳۸۶=۱۰\Rightarrow(f+g)_{(۱۰)}=۳۹+۵(۱۰)=۸۹$ میلیون (مجموع فروش پس از ده سال)

۹-

$$f(x)=x^۲+۲x+۲=(x+۱)^۲+۱$$

$$\Rightarrow(fog)_{(x)}=f(g(x))=(g(x)+۱)^۲+۱\ ,\ (fog)_{(x)}=x^۲-۴x+۵=(x-۲)^۲+۱$$

$$\Rightarrow(g(x)+۱)^۲+۱=(x-۲)^۲+۱\Rightarrow g(x)+۱=\pm(x-۲)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}g(x)+۱=x-۲\Rightarrow g(x)=x-۳\\ \quad or\\ g(x)+۱=-x+۲\Rightarrow g(x)=-x+۱\end{cases}$$

۱۰-

$$f(x)=\sqrt{۱-x^۲}\ ,\ ۱-x^۲\geq۰\Rightarrow-۱\leq x\leq۱\Rightarrow D_f=[-۱,۱]$$

$$g(x)=\sqrt{x}\ ,\ x\geq۰\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[۰,۱]$$

$$D_{(f+g)of}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_{f+g}\}=\{x\in[-۱,۱]\mid\sqrt{۱-x^۲}\in[۰,۱]\}$$

پس باید $۰\leq\sqrt{۱-x^۲}\leq۱$ اما می دانیم $\sqrt{۱-x^۲}\geq۰$ از سوئی

ادامه سوال ۱۰

$\sqrt{۱-x^{۲}} \le ۱ \Rightarrow ۱-x^{۲} \le ۱ \Rightarrow x^{۲} \ge ۰$ که همواره برقرار است ،بنابراین

$$D_{(f+g)of} = \{x \in [-۱,۱] \mid \sqrt{۱-x^{۲}} \in [۰,۱]\} = \{x \in [-۱,۱] \mid x \in R\} = [-۱,۱]$$

۱۱- الف) نادرست زیرا

$$(fog)_{(x)} = f(g(x)) = f(\sqrt{x^{۲}-۴}) = (\sqrt{x^{۲}-۴})^{۲} - ۴ = x^{۲} - ۸$$

ب) نادرست زیرا $(fog)_{(۴)} = f(g(۴)) = f(۷) = ۵$

ج) درست زیرا $(fog)_{(۵)} = f(g(۵)) = f(۹) = \sqrt{۹} = ۳ \ , \ g(۲) = ۲(۲) - ۱ = ۳$

د) نادرست ،مثال نقض $f(x) = \sqrt{x} \ , \ g(x) = x + ۱ \Rightarrow \begin{cases} (fog)_{(x)} = \sqrt{x+۱} \\ (gof)_{(x)} = \sqrt{x} + ۱ \end{cases}$

۱۲-

$$(fog)_{(x)} = h(x) \Rightarrow f(۲x+۱) = ۴x^{۲} + ۴x + ۷ = ۴x^{۲} + ۴x + ۱ + ۶$$

$$= (۲x+۱)^{۲} + ۶ \xrightarrow{۲x+۱ \to x} f(x) = x^{۲} + ۶$$

۱۳-

$f(x) = \sqrt{x^{۲}+۵} \ , \ x^{۲} + ۵ \ge ۰$ همواره برقرار است $\Rightarrow D_f = R$

$g(x) = \sqrt{۴-x^{۲}} \ , \ ۴ - x^{۲} \ge ۰ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲ \Rightarrow D_g = [-۲,۲]$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-۲,۲] \mid \sqrt{۴-x^{۲}} \in R\} = [-۲,۲]$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in R \mid \sqrt{x^۲+۵}\in[-۲,۲]\}$$

$$-۲\le\sqrt{x^۲+۵}\le۲\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^۲+۵}\ge-۲\Rightarrow x\in R\\ \quad and\\ \sqrt{x^۲+۵}\le۲\Rightarrow x^۲+۵\le۴\Rightarrow x^۲\le-۱\Rightarrow x\in\varnothing\end{cases}$$

اشتراک دو مجموعه بالا تهی است بنابراین $D_{gof}=\varnothing$

$$(fog)_{(x)}=f(g(x))=f(\sqrt{۴-x^۲})=\sqrt{۴-x^۲+۵}=\sqrt{۹-x^۲}$$

$$(gof)_{(x)}=\{\}$$

---

۱۴ و ۱۵-

الف) $f(g(۱))=f(۶)=۵$ ب) $g(f(۱))=g(۳)=۲$

ج) $f(f(۱))=f(۳)=۴$ د) $g(g(۱))=g(۶)=۳$

ه) $(\boldsymbol{gof})(۳)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(۳))=\boldsymbol{g}(۴)=۱$ و) $(\boldsymbol{fog})(۶)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(۶))=\boldsymbol{f}(۳)=۴$

۱۶-

$$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۶)=۵\ ,\quad (fog)(۲)=f(g(۲))=f(۴)=۵$$
$$(fog)(۶)=f(g(۶))=f(۸)=۱۲\ ,\quad (fog)(۸)=f(g(۸))=f(۱۰)=۲$$

۱- شماره گذاری چپ به راست و از بالا به پائین

$a)$ نه زوج و نه فرد (متقارن نسبت به مبدأ و محور y هانیست)

$b)$ فرد (نسبت به مبدأ متقارن است)

$c)$ زوج (متقارن نسبت به محور y هاست)

$d)$ فرد (نسبت به مبدأ متقارن است)

$e)$ زوج (نسبت به محور y ها متقارن است)

۲- الف) $۵-x^۲ \geq ۰ \Rightarrow |x| \leq \sqrt{۵} \Rightarrow x \in [-\sqrt{۵}, \sqrt{۵}]$ دامنه متقارن

$f(-x) = (-x)\sqrt{۵-(-x)^۲} = -x\sqrt{۵-x^۲} = -f(x) \Rightarrow$ تابع فرد

ب) $x^۳ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۳ = ۱ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow D_f = R - \{۱\}$

دامنه متقارن نیست چون $-۱ \in D_f$ ولی $۱ \notin D_f$ پس نه زوج و نه فرد است.

ج) $x > ۰ \Rightarrow f(x) = ۱ , -x < ۰ \Rightarrow f(-x) = -۱ \Rightarrow f(x) = -f(x)$

ولی در تابع فرد اگر $۰ \in D_f$ باید $f(۰) = ۰$ ولی در این مثال $f(۰) = ۱$ پس نه زوج نه فرد

د) $f(x) = |x| \Rightarrow D_f = R$ دامنه متقارن و $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow$ زوج

ه) $f(x) = ۲x + \sin x \Rightarrow D_f = R$ دامنه متقارن

$f(-x) = ۲(-x) + \sin(-x) = -۲x - \sin x = -(۲x + \sin x) = -f(x) \Rightarrow$ فرد

و) $f(x) = x^۲ + ۲x^۸ \Rightarrow D_f = R$ دامنه متقارن

$f(-x) = (-x)^۲ + ۲(-x)^۸ = x^۲ + ۲x^۸ = f(x) \Rightarrow$ زوج

۳- الف) درست می دانیم $D_{f\pm g} = D_{f\times g} = D_f \cap Dg$ و اگر دو مجموعه متقارن باشند اشتراک (واجتماع) آنها نیز نسبت به صفر متقارن است.

$$(f+g)_{(-x)} = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)_{(x)}$$

ب) درست $(f\times g)_{(-x)} = f(-x)\times g(-x) = f(x)\times g(x) = (f\times g)_{(x)}$

ج) نادرست $(f\times g)_{(-x)} = f(-x)\times g(-x) = -f(x)\times(-g(x)) = (f\times g)_{(x)}$ زوج

د) نادرست $(f\times g)_{(-x)} = f(-x)\times g(-x) = -f(x)\times g(x) = -(f\times g)_{(x)}$ فرد

۴- الف) $g(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{۲} = \dfrac{f(x)+f(-x)}{۲} = g(x) \Rightarrow$ زوج

ب) $h(-x) = \dfrac{f(-x)-f(x)}{۲} = -\dfrac{(f(x)-f(-x))}{۲} = -h(x) \Rightarrow$ فرد

ج) $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{۲} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{۲} = g(x)+h(x)$

د) $f(x) = (۲x^۳)+(-۱۰x^۲+۲۷\sqrt{۱+x^۲}-۵) = (h(x))+(g(x)) \Rightarrow$ فرد h و زوج g

---

۵- زوج $f(-x)=f(x)$ و فرد $f(-x)=-f(x)$

هم زوج و هم فرد $f(x) = -f(-x) = -f(x) \Rightarrow ۲f(x)=۰ \Rightarrow f(x)=۰$

پس تابع ثابت $f(x)=۰$ با دامنه دلخواه متقارن هم زوج و هم فرد است.

چون دامنه دلخواه و متقارن است پس بیشمار تابع ثابت صفر با دامنه دلخواه متقارن موجود است که هم زوج و هم فرد باشد.

۶- الف) زوج $\Rightarrow B(۷,۲)$ و فرد $\Rightarrow B(۷,-۲)$ ب) زوج $\Rightarrow B(-a,b)$ و فرد $\Rightarrow B(-a,-b)$

ج) زوج $\Rightarrow B(\frac{۲}{۷},-۷)$ و فرد $\Rightarrow B(\frac{۲}{۷},۷)$ د) زوج $\Rightarrow B(-۵,۳)$ و فرد $\Rightarrow B(-۵,-۳)$

۷- در بازه های $(-\infty,-۴],[۰,+\infty)$ نزولی ، در بازه $[۰,۴]$ ثابت و در $[-۴,۴]$ صعودی است.

در بازه های $(-\infty,-۴],[۴,+\infty)$ اکیدا نزولی

و در $[-۴,۰]$ اکیدا صعودی است.

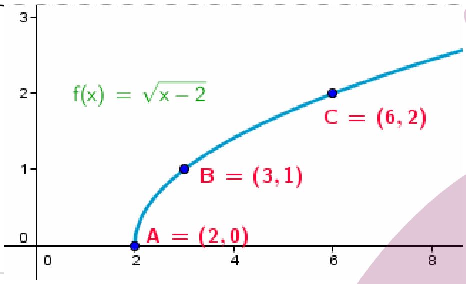
تکمیلی) تعیین ضابطه تابع

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{۳}{۲}x+۹ & x>۴ \\ ۳ & ۰<x\le ۴ \\ \frac{۳}{۲}x+۳ & -۲<x\le ۰ \\ (x+۴)^{۲}-۴ & x\le -۲ \end{cases}$$

۸- الف)

$$f(x)=\sqrt{x-۲}\Rightarrow$$

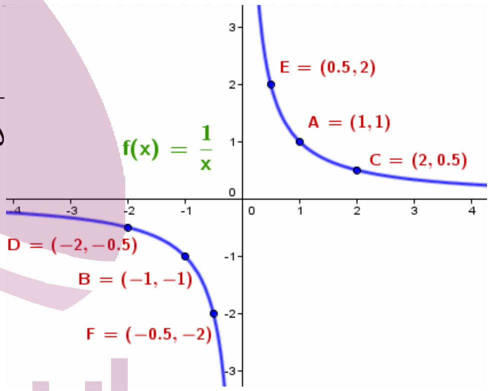
x	۲	۳	۶
y	۰	۱	۲



در بازه ی $[۲,+\infty)$ صعودی (و اکیدا صعودی) است.

ب) $f(x)=\frac{۱}{x}\Rightarrow$

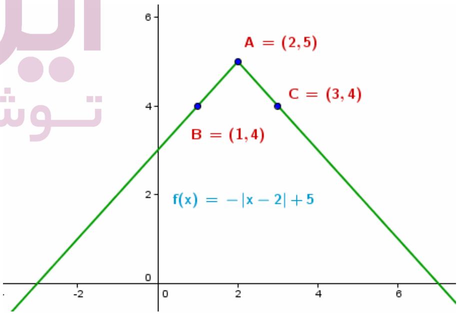
x	۱	−۱	۰/۵	−۰/۵	۲	−۲
y	۱	−۱	۲	−۲	۰/۵	−۰/۵



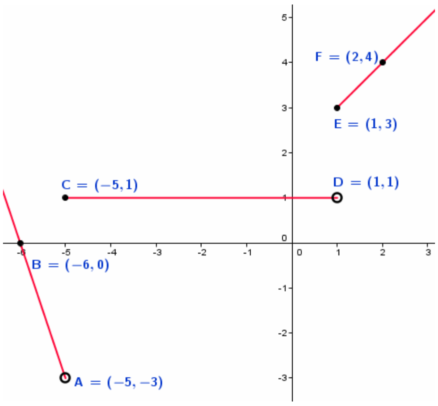
تابع f بر بازه $(-\infty,۰)$ و همچنین بر $(۰,+\infty)$ نزولی (اکیدا نزولی) است.

ج) $f(x)=-|x-۲|+۵\Rightarrow$

x	۱	۲	۳
y	۴	۵	۴



تابع f بر بازه $[۲,+\infty)$ نزولی (اکیدا نزولی) و بر $(-\infty,۲]$ صعودی (اکیدا صعودی) است .



تابع f بر هر یک از بازه های $[-۵,۱)$ ، $(-\infty,-۵)$ نزولی و بر بازه $[-۵,+\infty)$ صعودی است .

بر $(-\infty,-۵)$ اکیدا نزولی و بر $[۱,+\infty)$ اکیدا صعودی است

۹- الف) $D_f=(-\infty,۶]\ ,\ R_f=[-۳,+\infty)$

ب) توضیح : ابتدا محل برخورد خط گذرنده بر نقاط $(۵,-۳)\ ,\ (۴,۲)$ با محور x ها را می یابیم

$$(۴,۲)\ ,(۵,-۳)\Rightarrow m=\frac{-۳-۲}{۵-۴}=-۵\ ,\ y-۲=-۵(x-۴)\Rightarrow y=-۵x+۲۲$$

$$y=۰\Rightarrow ۰=-۵x+۲۲\Rightarrow x=\frac{۲۲}{۵}$$

پس محل تقاطع خطی که از $(۵,-۳)\ ,\ (۴,۲)$ می گذرد با محور طولها نقطه $(\frac{۲۲}{۵},۰)$ است.

بنابراین $f(x)>۰\Rightarrow x\in(-\infty,۱)\cup(۱,\frac{۲۲}{۵})\ ,\ f(x)<۰\Rightarrow x\in(\frac{۲۲}{۵},۶]$

ج) صعودی $f\Rightarrow[۱,۴]$ یا $[۵,۶]$

نزولی $f\Rightarrow(-\infty,۱]$ یا $[۴,۶]$

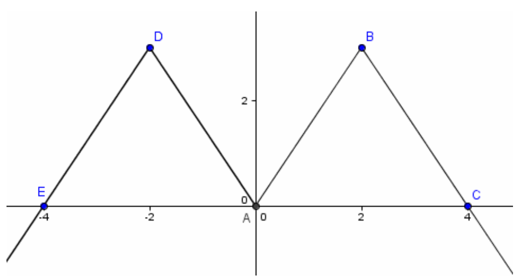
تذکر مهم : اگر تابع بر بازه ای صعودی (یا نزولی) باشد ، بر هر زیر بازه ای از آن بازه هم صعودی (یا نزولی) خواهد بود .

د) $x\le ۱\ ,\ f(x)=\sqrt{ax+b}\ ,(۱,۰),(۰,۱)\in f\Rightarrow\begin{cases}۰=\sqrt{a+b}\\ ۱=\sqrt{a(۰)+b}\end{cases}\Rightarrow a=-۱\ ,b=۰$

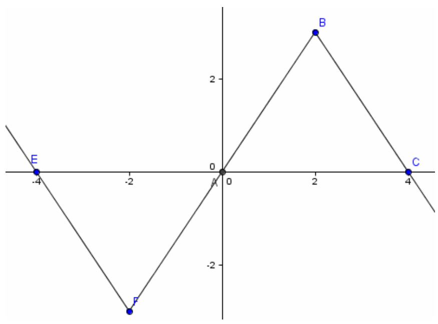
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+۱} & x\le ۱ \Leftarrow y=\sqrt{ax+b}\ ,(۰,۱)\ ,(۱,۰)\in f\\ \frac{۲}{۳}x-\frac{۲}{۳} & ۱\le x\le ۴\Leftarrow y=ax+b\ ,(۱,۰),(۴,۲)\in f\\ -۵x+۲۲ & ۴<x\le ۵\Leftarrow y=ax+b,(۴,۲),(۵,-۳)\in f\\ -۳ & ۵<x\le ۶\end{cases}$$

ه) $f(-۴)=\sqrt{-(-۴)+۱}=\sqrt{۵}\ ,\ f(۵/۳)=-۳\ ,\ f(\frac{۷}{۲})=\frac{۲}{۳}(\frac{۷}{۲})-\frac{۲}{۳}=\frac{۵}{۳}$

۱۰- الف) قرینه نمودار نسبت به محور y ها



ب) قرینه نمودار نسبت به مبدأ را اضافه کنید .



۱۱- برای‌فرد بودن تابع f باید $f(-x)=-f(x)$ اما ،

$$f(-x)=\log(-x+\sqrt{(-x)^{۲}+۴a^{۲}})=\log(-x+\sqrt{x^{۲}+۴a^{۲}})$$

$$-f(x)=-\log(x+\sqrt{x^{۲}+۴a^{۲}})=\log(x+\sqrt{x^{۲}+۴a^{۲}})^{-۱}=\log\frac{۱}{(x+\sqrt{x^{۲}+۴a^{۲}})}$$

$$f(-x)=-f(x)\Rightarrow(-x+\sqrt{x^{۲}+۴a^{۲}})=\frac{۱}{(x+\sqrt{x^{۲}+۴a^{۲}})}\Rightarrow(\sqrt{x^{۲}+۴a^{۲}})^{۲}-x^{۲}=۱$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۴a^{۲}-x^{۲}=۱\Rightarrow ۴a^{۲}=۱\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$$

توجه : اگر $a\neq ۰$ عبارت $x+\sqrt{x^{۲}+۴a^{۲}}$ به ازای جمیع مقادیر x مثبت است (تحقیق کنید)

بنابراین دامنه ی تابع f برابر R است که متقارن می باشد.

۱۲- $D_f=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ متقارن است و

$$f(-۲)=f(۲)=۵\ ,\ f(-۱)=f(۱)=۴, f(۰)=f(-۰)=۳\Rightarrow$$ زوج f

$Dg=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ متقارن است و

$$g(-۲)=۱=-g(۲)\ ,\ g(-۱)=۲=-g(۱)\ , g(۰)=۰=-g(۰)\Rightarrow$$ فرد g

---

$$f(x)=\frac{۱}{x}+۲ \ , \ x=۰ \Rightarrow D_f=R_g=R-\{۰\}$$

$$g(x)=\frac{۱}{x-۲} \ , \ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow D_g=R_f=R-\{۲\}$$

۱- $x\in D_g \Rightarrow x\neq ۲ \ , f(g(x))=f(\frac{۱}{x-۲})=\frac{۱}{\frac{۱}{x-۲}}+۲=x-۲+۲=x$

$x\in D_f \Rightarrow x\neq ۰, g(f(x))=g(\frac{۱}{x}+۲)=\frac{۱}{\frac{۱}{x}+۲-۲}=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x$

۲- در ناحیه اول چون $f^{-۱}$ قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ است.

۳- $f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow |x_۱-۲|+۳=|x_۲-۲|+۳ \Rightarrow |x_۱-۲|=|x_۲-۲|$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱-۲=x_۲-۲ \Rightarrow x_۱=x_۲ \\ or \\ x_۱-۲=-x_۲+۲ \Rightarrow x_۱+x_۲=۴ \end{cases} \Rightarrow$$ یعنی لزوما $x_۱, x_۲$ مساوی نیستند

برای یک به یک شدن کافیست دامنه را محدود به $x>۲$ یا $x<۲$ یا $x\leq ۲$ یا $x\geq ۲$ کرد .

مثلا برای $x>۲$ داریم $y=|x-۲|+۳=x-۲+۳=x+۱$ که ۱-۱ است.

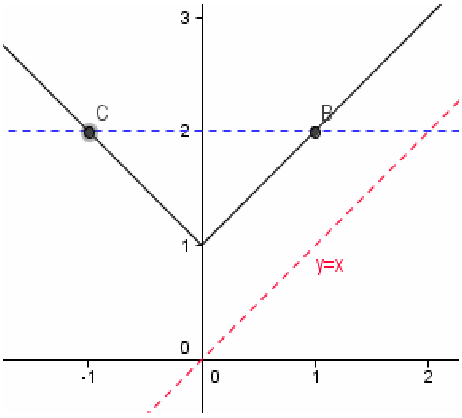
۴- الف) $D_f=D_g=R \ , \ x\in R \Rightarrow (fog)(x)=f(\sqrt[۳]{x+۵})=(\sqrt[۳]{x+۵})^۳-۵=x$

$, \ x\in R \Rightarrow (gof)(x)=g(x^۳-۵)=\sqrt[۳]{x^۳-۵+۵}=\sqrt[۳]{x^۳}=x$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۲} \ , \ g(x)=x^۲+۲ \ , D_f=R_g=[۲,+\infty) \ , \ D_g=R_f=[۰,+\infty)$

$x\in [۲,+\infty) \Rightarrow (gof)(x)=g(\sqrt{x-۲})=(\sqrt{x-۲})^۲+۲=|x-۲|+۲=x-۲+۲=x$

$x\in [۰,+\infty) \Rightarrow (fog)(x)=f(x^۲+۲)=\sqrt{x^۲+۲-۲}=\sqrt{x^۲}=|x|=x$ (با فرض $x\geq ۰$)



۵- $f(x)=|x|+1$ با توجه به نمودار، تابع f یک به یک نیست پس وارون پذیر نیست و از طرفی نمودار f بالای خط $y=x$ است. پس

$$\forall x\in R \quad x<f(x)$$

۶-

الف)

$$f(x_1)=f(x_2),\ x_1,x_2\geq -5 \Rightarrow (x_1+5)^2=(x_2+5)^2$$

$$\xrightarrow[x_2+5\geq 0]{x_1+5\geq 0} x_1+5=x_2+5 \Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=(x+5)^2 \Rightarrow \sqrt{y}=x+5 \Rightarrow x=\sqrt{y}-5$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt{x}-5=f^{-1}(x)\ ,\ x\geq 0$$

ب)

$$x_1,x_2\geq 1 \Rightarrow x_1-1\geq 0\ ,\ x_2-1\geq 0\ \ f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow -|x_1-1|+1=-|x_2-1|+1$$

$$\Rightarrow |x_1-1|=|x_2-1| \Rightarrow x_1-1=x_2-1 \Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=-|x-1|+1\ ,\ x>1 \Rightarrow y=-x+1+1=-x+2 \Rightarrow x=-y+2$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=f^{-1}(x)=-x+2$$

ج)

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow (x_1-3)^2=(x_2-3)^2 \Rightarrow x_1-3=\pm(x_2-3) \not\Rightarrow x_1=x_2$$

مثال نقض : $(4,1)\ ,\ (2,1)\in f$

د)

$$x_1,x_2\geq -2\ ,\ f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1+2}-3=\sqrt{x_2+2}-3$$

$$\Rightarrow x_1+2=x_2+2 \Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=\sqrt{x+2}-3 \Rightarrow \sqrt{x+2}=y+3 \Rightarrow x+2=(y+3)^2 \Rightarrow$$

$$x=(y+3)^2-2 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=f^{-1}(x)=(x+3)^2-2\ ,\ x\geq -3$$

۷- روش ۱)

$$y=\frac{۳x-۲}{۵x-۳}\Rightarrow ۵xy-۳y=۳x-۲\Rightarrow ۵xy-۳x=۳y-۲$$

$$\Rightarrow x(۵y-۳)=۳y-۲\Rightarrow x=\frac{۳y-۲}{۵y-۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=f^{-۱}(x)=\frac{۳x-۲}{۵x-۳}$$

روش ۲)

$$x\in R-\{\frac{۳}{۵}\},(fof)_{(x)}=f(\frac{۳x-۲}{۵x-۳})=\frac{۳(\frac{۳x-۲}{۵x-۳})-۲}{۵(\frac{۳x-۲}{۵x-۳})-۳}=$$

$$\frac{۹x-۶-۱۰x+۶}{۱۵x-۱۰-۱۵x+۹}=\frac{-x}{-۱}=x\Rightarrow f^{-۱}(x)=f(x)$$

۸-

$$f^{-۱}(x)=f(x)\Rightarrow (fof)_{(x)}=f(ax+b)=a(ax+b)+b$$

$$=a^{۲}x+ab+b=x\Rightarrow\begin{cases}a^{۲}=۱\\ ab+b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}if\ \ a=+۱\Rightarrow b+b=۰\Rightarrow b=۰\Rightarrow y=x\\ if\ \ a=-۱\Rightarrow -b+b=۰\Rightarrow y=-x+b\end{cases}$$

۹- $f(-\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$ ولی $-\frac{۱}{۲}\neq\frac{۱}{۲}$ بنابراین f یکه به یک نبوده و درنتیجه وارون پذیر نیست.

۱۰-

$$(fog)_{(x)}=f(۳x-۷)=۳x-۷+۳=۳x-۴\Rightarrow y=۳x-۴\Rightarrow x=\frac{y+۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y}(fog)^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l}g(x)=۳x-۷\Rightarrow y=۳x-۷\Rightarrow x=\frac{y+۷}{۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}g^{-۱}(x)=\frac{x+۷}{۳}\\ f(x)=x+۳\Rightarrow x=y-۳\xrightarrow{x\leftrightarrow y}f^{-۱}(x)=x-۳\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$(g^{-۱}of^{-۱})_{(x)}=g^{-۱}(x-۳)=\frac{x-۳+۷}{۳}=\frac{x+۴}{۳}$$

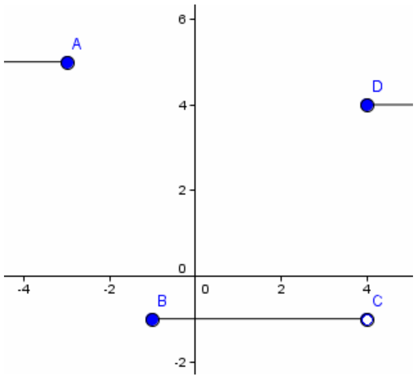
۱۱- الف) $D_h = [۰ , \frac{۱۰}{۷}\sqrt{۱۰}] \quad , R_h = [۰ , ۱۰۰]$

ب) در دو زمان متفاوت در یک ارتفاع قرار نمی گیرد.

ج)
$$y = ۱۰۰ - \frac{۴۹}{۱۰}t^۲ \Rightarrow \frac{۴۹}{۱۰}t^۲ = ۱۰۰ - y \Rightarrow t^۲ = \frac{۱۰}{۴۹}(۱۰۰ - y)$$
$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{۱۰}{۴۹}(۱۰۰ - y)} \xrightarrow{t \leftrightarrow y} y = h^{-۱}(t) = \sqrt{\frac{۱۰}{۴۹}(۱۰۰ - t)} \quad , t \in [۰,۱۰۰]$$

د) زمانی که سنگ دریک ارتفاع خاص قرار دارد را مشخص می کند(به ازای زمان ارتفاع سنگ را می دهد)

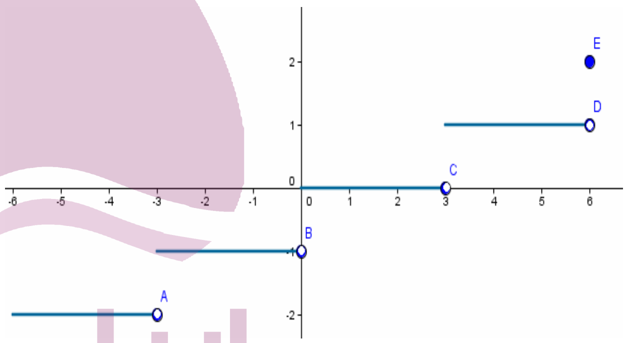
۱-



۲-

$$x \in [-6,6] \Rightarrow \frac{1}{3}x \in [-2,2]$$

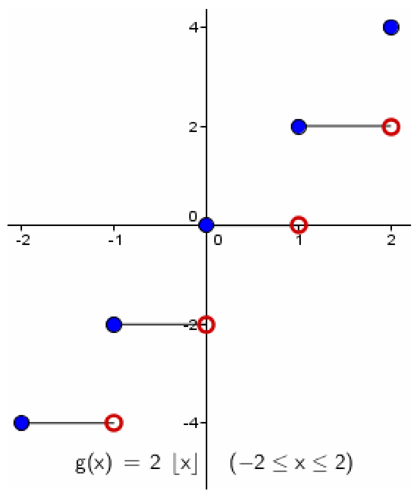
$$\begin{cases} -2 \le \frac{1}{3}x < -1 \Rightarrow -6 \le x < -3 \Rightarrow y = -2 \\ -1 \le \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow -3 \le x < 0 \Rightarrow y = -1 \\ 0 \le \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow 0 \le x < 3 \Rightarrow y = 0 \\ 1 \le \frac{1}{3}x < 2 \Rightarrow 3 \le x < 6 \Rightarrow y = 1 \\ \frac{1}{3}x = 2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$



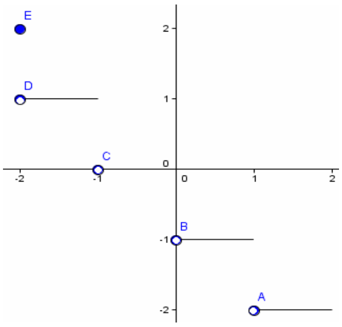
۳- $f(\frac{1}{5}) = [\frac{1}{5}] = 0 \, , \, f(\frac{2}{5}) = [\frac{2}{5}] = 0 \, , \, \frac{1}{5} \neq \frac{2}{5} \Rightarrow$ f یک به یک نیست پس وارون پذیر نیست

۴-

الف) $y = 2[x] \Rightarrow \begin{cases} -2 \le x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = -4 \\ -1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -2 \\ 0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$



ب) $y=[-x]\Rightarrow\begin{cases}-2\le -x<-1\Rightarrow 1<x\le 2\Rightarrow [-x]=-2\Rightarrow y=-2\\ -1\le -x<0\Rightarrow 0<x\le 1\Rightarrow [-x]=-1\Rightarrow y=-1\\ 0\le -x<1\Rightarrow -1<x\le 0\Rightarrow [-x]=0\Rightarrow y=0\\ 1\le -x<2\Rightarrow -2<x\le -1\Rightarrow [-x]=1\Rightarrow y=1\\ -x=2\Rightarrow x=-2\Rightarrow [-x]=2\Rightarrow y=1\end{cases}$



۵-کمترین مقدار مثبت برای T با توجه به برقرای تساوی برای اعداد صحیح برابر $T=1$ است.

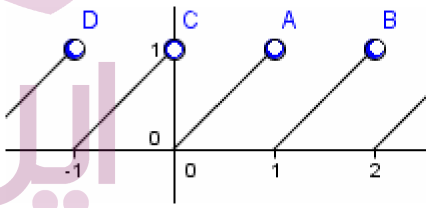
$$T\in Z\ , f(x+T)=x+T-[x+T]= x+T-[x]-T=x-[x]=f(x)\Rightarrow$$

نمودار تابع را درفاصله ای به طول دوره تناوب رسم می کنیم.

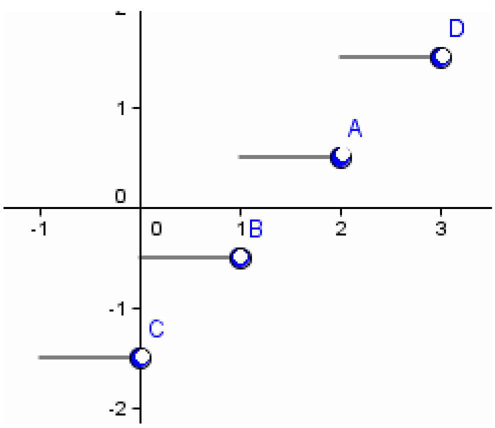
$$T=1\Rightarrow 0\le x<1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow y=x-[x]=x-0$$

$\Rightarrow y=x\Rightarrow$

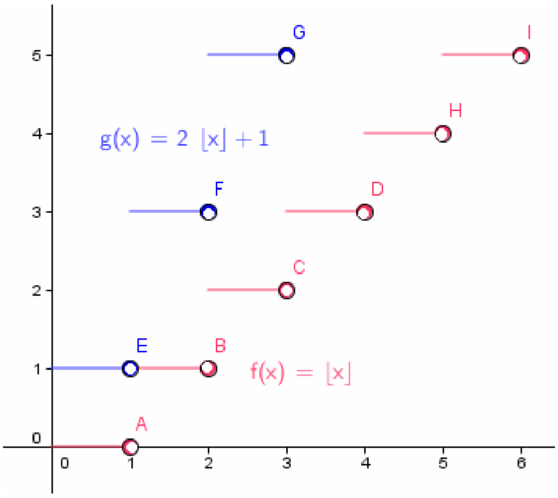
x	0	1
y	0	1



۶- الف) انتقال به اندازه $\frac{1}{2}$ به پائین

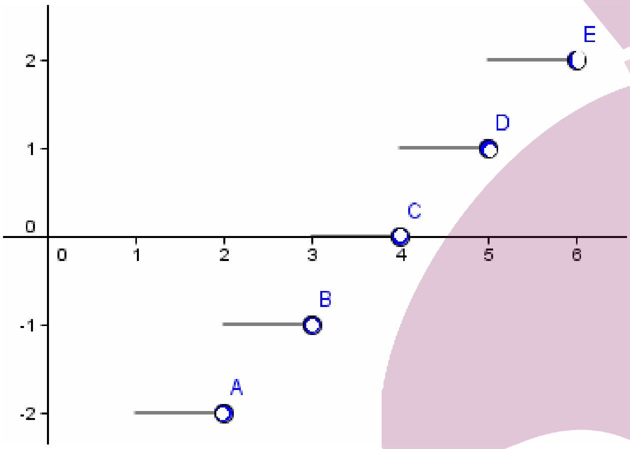


ب)انبساط باضریب ۲درامتداد محور yهاو انتقال یک واحد به بالا



۷- این دو تابع برابرند.

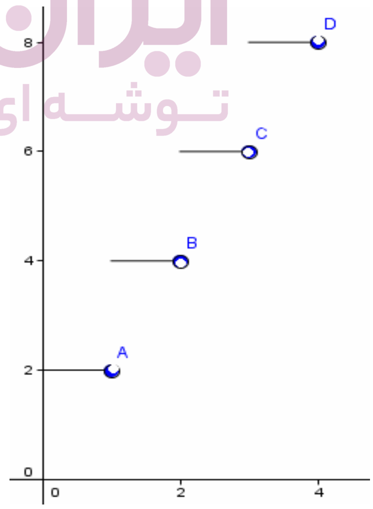
$$y=[x-۳]\Rightarrow\begin{cases}-۲\le x-۳<-۱\Rightarrow[x-۳]=-۲\Rightarrow y=-۲\ (۱\le x<۲)\\ -۱\le x-۳<۰\Rightarrow[x-۳]=-۱\Rightarrow y=-۱(۲\le x<۳)\\ ۰\le x-۳<۱\Rightarrow[x-۳]=۰\Rightarrow y=۰\ (۳\le x<۴)\\ ۱\le x-۳<۲\Rightarrow[x-۳]=۱\Rightarrow y=۱(۴\le x<۵)\\ ۲\le x-۳<۳\Rightarrow[x-۳]=۱\Rightarrow y=۲\ (۵\le x<۶)\end{cases}$$



$$y=[x]-۳\Rightarrow\begin{cases}۱\le x<۲\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow y=-۲\\ ۲\le x<۳\Rightarrow[x]=۲\Rightarrow y=-۱\\ ۳\le x<۴\Rightarrow[x]=۳\Rightarrow y=۰\\ ۴\le x<۵\Rightarrow[x]=۴\Rightarrow y=۱\\ ۵\le x<۶\Rightarrow[x]=۵\Rightarrow y=۲\end{cases}$$

-۸

$$f(x)=\begin{cases}۲ & ۰<x<۱\\ ۴ & ۱\le x<۲\\ ۶ & ۲\le x<۳\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲[x]+۲$$



۱-

$$\sin\alpha=\frac{۳}{۵}\ ,\ (\frac{۳}{۵})^{۲}+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۴}{۵}$ (α در ربع اول) $\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۴}{۵}\ ,\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۳}{۵}\div\frac{۴}{۵}=\frac{۳}{۴}$

$$\cos\beta=-\frac{۵}{۱۳}\ ,\ \sin^{۲}\beta+(-\frac{۵}{۱۳})^{۲}=۱\Rightarrow\sin^{۲}\beta=۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}=\frac{۱۴۴}{۱۶۹}$$

$\Rightarrow\sin\beta=\pm\frac{۱۲}{۱۳}$ (β در ربع سوم) $\Rightarrow\sin\beta=-\frac{۱۲}{۱۳}\ ,\ \tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\frac{۱۲}{۱۳}\div\frac{-۵}{۱۳}=\frac{۱۲}{۵}$

$$A=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta=(\frac{۴}{۵}\times\frac{-۵}{۱۳})+(\frac{۳}{۵}\times\frac{-۱۲}{۱۳})=-\frac{۵۶}{۶۵}$$

$$B=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta=(\frac{۳}{۵}\times\frac{-۵}{۱۳})+(\frac{۴}{۵}\times\frac{-۱۲}{۱۳})=-\frac{۶۳}{۶۵}\Rightarrow A.B=\frac{۳۵۲۸}{۴۲۲۵}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{\frac{۳}{۴}+\frac{۱۲}{۵}}{۱-\frac{۳}{۴}\times\frac{۱۲}{۵}}=\frac{\frac{۶۳}{۲۰}}{-\frac{۴}{۵}}=-\frac{۶۳}{۱۶}$$

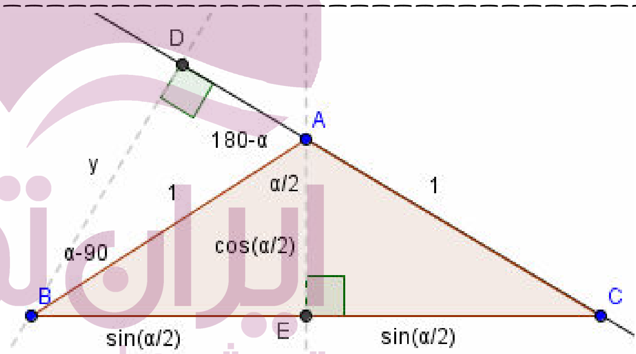
۲-

$$\cos(\alpha-۹۰)=\frac{y}{۱}=\cos(۹۰-\alpha)=\sin\alpha$$

$$S_{۱}=\frac{۱\times y}{۲}=\frac{\sin\alpha}{۲}$$

$$S_{۲}=\frac{۱}{۲}(۲\sin\frac{\alpha}{۲}.\cos(\frac{\alpha}{۲}))=\sin\frac{\alpha}{۲}.\cos\frac{\alpha}{۲}$$

$$S_{۱}=S_{۲}\Rightarrow\sin\alpha=۲\sin\frac{\alpha}{۲}.\cos\frac{\alpha}{۲}$$



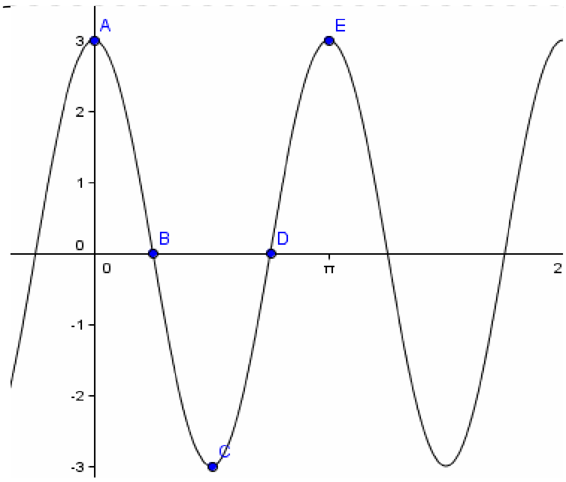
۳-

$$y=۳-۶\sin^{۲}x=۳-۶(\frac{۱-\cos ۲x}{۲})$$

$$=۳-۳+۳\cos ۲x=۳\cos ۲x$$

$$T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\Rightarrow$$

x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
y	۳	۰	−۳	۰	۳



۴-

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha.\cos\alpha+\cos\alpha.\sin\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha.\cos\alpha-\sin\alpha.\sin\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

۵-

$$\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha.\tan\alpha}\Rightarrow \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

۶-

$\sin\alpha=-\frac{12}{13}\ ,\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ (در ربع سوم α)

چون $\frac{\pi}{2}\le\frac{\alpha}{2}\le\frac{3\pi}{4}$ پس $\frac{\alpha}{2}$ در ربع دوم است.

$\sin^2(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1+\frac{5}{13}}{2}=\frac{9}{13}\Rightarrow\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{9}{13}}$ (در ربع دوم $\frac{\alpha}{2}$)

$\cos^2(\frac{\alpha}{2})=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1-\frac{5}{13}}{2}=\frac{4}{13}\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{4}{13}}$ (در ربع دوم $\frac{\alpha}{2}$) $\Rightarrow\tan(\frac{\alpha}{2})=-\frac{3}{2}$

۷-

الف)

$$\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\sin x.\cos\frac{\pi}{4}+\cos x.\sin\frac{\pi}{4})=$$

$$\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})(\sin x+\cos x)=\sin x+\cos x$$

ب) $(\sin x\ \cos x)^2=\sin^2x+2\sin x.\cos x+\cos^2x=1+2\sin x.\cos x=1+\sin 2x$

ج) $$\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}=\frac{2(\frac{\sin x}{\cos x})}{1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{2\sin x.\cos^2x}{\cos x\times(1)}=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

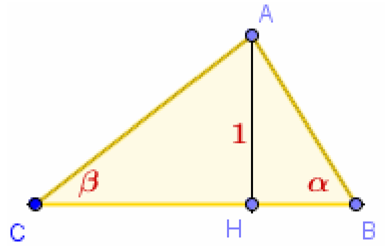
د) $$\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}=\frac{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x+\sin^2x}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{1}=\cos 2x$$

ادامه سوال ۷

ه)
$$\cos ۴x = ۲\cos^۲(۲x) - ۱ = ۲(۲\cos^۲ x - ۱)^۲ - ۱$$
$$= ۲(۴\cos^۴ x - ۴\cos^۲ x + ۱) - ۱ = ۸\cos^۴ x - ۸\cos^۲ x + ۱$$

۸- پاره خط دلخواه رسم و ازنقطه دلخواه H برآن عمودی به طول ۱ رسم و انتهای عمود را A می نامیم. از A به زاویه $۹۰-\alpha, ۹۰-\beta$ نسبت به پاره خط AH رسم تا پاره خط اولیه رادر B, C قطع کند.

با توجه به تعریف نسبتهای مثلثاتی



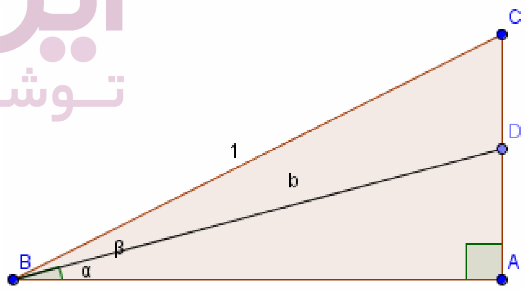
$$\sin\alpha = \frac{۱}{AB} \Rightarrow AB = \frac{۱}{\sin\alpha}, \quad \sin\beta = \frac{۱}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۱}{\sin\beta}$$

$$\tan\alpha = \frac{۱}{CH} \Rightarrow CH = \frac{۱}{\tan\alpha}, \quad \tan\beta = \frac{۱}{BH} \Rightarrow BH = \frac{۱}{\tan\beta}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_۱ = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin(۱۸۰ - (\alpha+\beta)) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{۱}{\sin\beta}\right)\sin(\alpha+\beta) \\ S_۲ = \frac{۱}{۲} BC \times AH = \frac{۱}{۲}(CH + BH)(۱) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\tan\alpha} + \frac{۱}{\tan\beta}\right) \end{array}\right\}$$

$S_۱ = S_۲ \Rightarrow$ حکم ,

۹- با توجه به تعریف نسبتها و قانون سینوسها داریم ،



$$AB = \cos\beta = b\cos\alpha$$

$$AC = \sin\beta \ , \ AD = b\sin\alpha$$

$$\Delta BCD : \frac{\sin(۹۰+\alpha)}{۱} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{CD} \Rightarrow CD = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$S_{BCD} = S_{ABC} - S_{BDA}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)(b\cos\alpha) = \frac{۱}{۲}(\sin\beta)(b\cos\alpha) - \frac{۱}{۲}(b\sin\alpha)(\cos\beta)$$

$$\Rightarrow \sin(\beta-\alpha) = \sin\beta.\cos\alpha - \sin\alpha.\cos\beta$$

۱- الف)

$$\sin x - \cos x = ۱ \Rightarrow \sqrt{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴}) = ۱ \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin(\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ or \\ x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$$

جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\{-\pi, -\frac{\pi}{۲}, ۰, \frac{\pi}{۲}, \pi\}$

ب)

$$۲\sin\theta.\cos\theta + \sqrt{۲}\cos\theta = ۰ \Rightarrow \cos\theta(۲\sin\theta + \sqrt{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = ۰ = \cos(\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow \theta = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \\ or \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow \begin{cases} \theta = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ or \\ \theta = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \end{cases} \end{cases}$$

جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\{-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, -\frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}\}$

ج)

$$\tan x.\tan ۲x = ۱ \Rightarrow \frac{\sin x.\sin ۲x}{\cos x.\cos ۲x} = ۱ \Rightarrow \cos x.\cos ۲x - \sin x.\sin ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos(۲x + x) = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = ۰ = \cos\frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۶}$$

البته باید توجه داشت که جوابهای مخرج را از جوابهای به دست آمده حذف کنیم یعنی

مجموعه جواب $= \{\frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۶} \mid k \in Z\} - \{۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}, k\pi \pm \frac{\pi}{۴} \mid k \in Z\}$

جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\{-\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۶}, -\frac{۵\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}\}$ که اعداد $-\frac{\pi}{۲}$, $\frac{\pi}{۲}$ چون مخرج

راصفرمی کردند از جوابها حذف شدند.

ز) $\Delta = ۱^۲ - ۴(۲(-۱)) = ۹ > ۰ \Rightarrow \sin t = \frac{-۱ \pm \sqrt{۹}}{۴} = \frac{-۱ \pm ۳}{۴}$

$$\begin{cases} \sin t = \frac{-۱-۳}{۴} = -۱ \Rightarrow t = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \\ \quad or \\ \sin t = \frac{-۱+۳}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow t = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad or \quad t = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\left\{-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}\right\}$

ه)

$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - \cos x = ۰$$

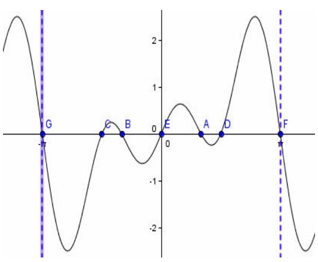
$$\Rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \\ \quad or \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\{-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, -\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}\}$

و)

$$\sin x + \sin ۳x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲\sin ۲x . \cos x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow$$

$$\sin ۲x(۲\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \\ \quad or \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$



جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\{۰, -\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, -\pi, \pi, -\frac{۲\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}\}$

راه حل دوم (و)

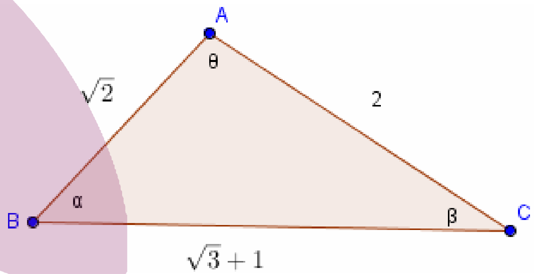
$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\sin x+2\sin x.\cos x+3\sin x-4\sin^3 x=0$$

$$4\sin x-4\sin^3 x+2\sin x.\cos x=4\sin x(1-\sin^2 x)+2\sin x.\cos x=$$

$$4\sin x.\cos^2 x+2\sin x.\cos x=2\sin x.\cos x(2\cos x+1)=$$

$$\sin 2x(2\cos x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}\\ \quad or\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

۲-



$$(2)^2=(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{3})^2-2(\sqrt{2})(1+\sqrt{3})\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 4=2+4+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cos\alpha$$

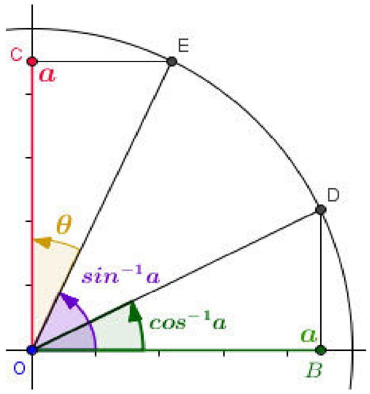
$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^\circ$$

$$(\sqrt{2})^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2(2)(1+\sqrt{3})\cos\beta$$

$$\Rightarrow 2=4+4+2\sqrt{3}-4(1+\sqrt{3})\cos\beta$$

$$\Rightarrow\cos\beta=\frac{-2(3+\sqrt{3})}{-4(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

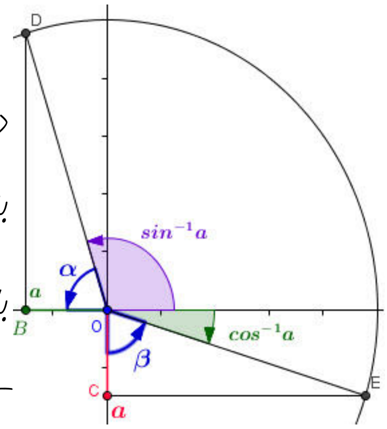
$$\Rightarrow\beta=30^\circ\Rightarrow\theta=180-(30+45)=105^\circ$$



۱- دو $\Delta OCE , \Delta ODB$ به حالت وتر ویک ضلع همنهشتند

بنابراین $\theta = \cos^{-1} a$ و طبق شکل $\theta + \sin^{-1} a = \frac{\pi}{2}$ پس

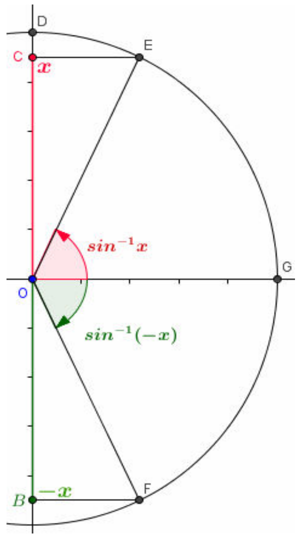
با جایگذاری داریم $\cos^{-1} a + \sin^{-1} a = \frac{\pi}{2}$



دو $\Delta OCE , \Delta ODB$ به حالت وترویک ضلع همنهشتند

بنابراین مقدار $\alpha = \beta$ و طبق شکل $\alpha + \sin^{-1} a = \pi \ , \ \beta - \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2}$

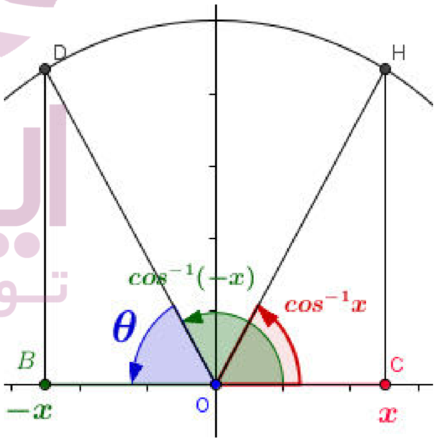
با جایگذاری داریم $\pi - \sin^{-1} a = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1} a \Rightarrow \sin^{-1} a + \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2}$



۲- دو $\Delta OCE , \Delta OBF$ به حالت وتر ویک ضلع همنهشتند

بنابراین $\angle EOC = \angle BOF$ بنابراین متمم آنها برابرند پس

با توجه به جهت زاویه $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$



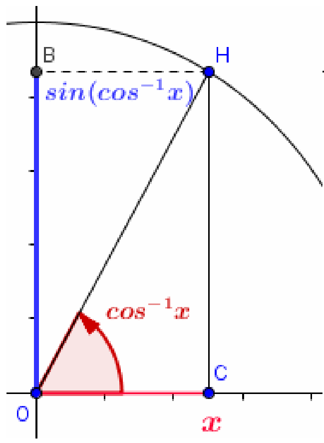
دو $\Delta OCH , \Delta OBD$ به حالت وتر ویک ضلع

همنهشتند پس $\cos^{-1} x = \theta$ و با توجه به شکل

با جایگذاری داریم $\cos^{-1}(-x) + \theta = \pi$

$$\cos^{-1}(-x) + \cos^{-1} x = \pi \Rightarrow \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$$

۳-



۱) $OC = x \Rightarrow \angle COH = \cos^{-1} x \Rightarrow \sin(\cos^{-1} x) = HC$

ازطرفی $HC = \sqrt{OH^2 - OC^2} = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

۲) $if \ \ OB = x \Rightarrow \angle COH = \sin^{-1} x \Rightarrow \cos(\sin^{-1} x) = OC$

ازطرفی $OC = \sqrt{OH^2 - HC^2} = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$

۴- $\tan^{-1} x = \theta \Rightarrow \tan\theta = x \ , \sin\theta = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \Rightarrow \sin(\tan^{-1} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

وبه همین ترتیب $\cos(\tan^{-1} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

۵- می دانیم برای تابع $y = \sin^{-1} x$ دامنه برابر $[-1,1]$ است (دامنه متقارن) وطبق مسأله ۲ داریم $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$ بنابراین تابع معکوس سینوس فرد است.

همچنین $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$ پس $y = \cos^{-1}(x)$ نه زوج و نه فرد است.

ونیز برای $y = \tan^{-1}(x)$ دامنه برابر $(-\infty, +\infty)$ است (دامنه متقارن) و $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$ بنابراین تابع معکوس تانژانت فرد است.

۶- $$x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < \tan^{-1}\dfrac{1}{x} < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < \tan^{-1} x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x} < \pi$$

$$\cos(\tan^{-1} x + \tan^{-1}(\frac{1}{x})) = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos(\tan^{-1} x).\cos(\tan^{-1}\frac{1}{x}) - \sin(\tan^{-1} x).\sin(\tan^{-1}\frac{1}{x}) = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}}\right) - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}}\right)$$

$$= \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = 0 = \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

۱- الف)

x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
y	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	?	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹

$$\lim_{x\to ۰^+} y = \lim_{x\to ۰^-} y = -۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} y = -۱$$

ب)

x	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	−۱	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹
y	۲/۲۱	۲/۰۲	۲/۰۰۲	?	۲/۰۰۲۹	۲/۰۲۹	۲/۲۷۱

$$\lim_{x\to -۱^+} y = \lim_{x\to -۱^-} y = ۲ \Rightarrow \lim_{x\to -۱} y = ۲$$

ج)

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۲	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
y	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	?	۴/۰۰۲	۴/۰۲	۴/۱

$\lim_{x\to ۲^+} y = ۴ \quad , \quad \lim_{x\to ۲^-} y = ۲ \Rightarrow$ حد چپ وراست نابرابر پس تابع در $x = ۲$ دارای حد نیست

د)

x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
y	۰/۹۹۴	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹۹	?	۰/۹۹۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۴

$$\lim_{x\to ۰^+} y = \lim_{x\to ۰^-} y = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} y = ۱$$

ه)

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
y	−۱/۵۷	−۴/۹۹	−۱۵/۸۱	?	۱۵/۸۱	۴/۹۹	۱/۵۷

$\lim_{x\to ۱^+} y = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۱^-} y = -\infty \Rightarrow$ تابع در $x = ۱$ حد ندارد

و)

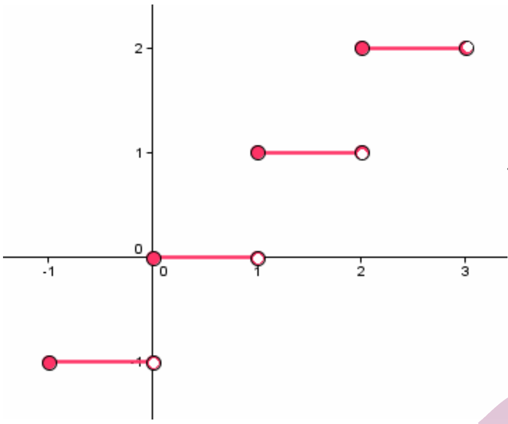
x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
y	۰/۴۹۹	۰/۴۹۹۹۹	۰/۴۹۹۹۹۹۹	?	۰/۴۹۹۹۹۹۹	۰/۴۹۹۹۹	۰/۴۹۹

$$\lim_{x\to ۰^+} y = \lim_{x\to ۰^-} y = ۰/۵ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} y = ۰/۵$$

۲- الف)

$$y=[x]\ ,\ a=۱/۲\Rightarrow y=\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ۰ & ۰\leq x<۱ \\ ۱ & ۱\leq x<۲ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

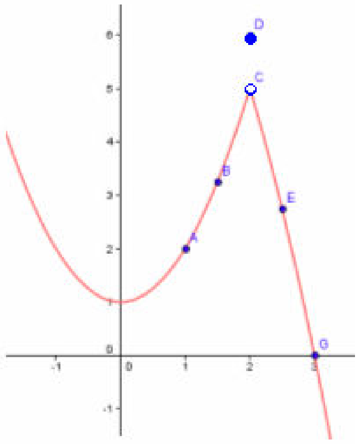
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱/۲^{+}} y=\lim_{x\to ۱/۲^{-}} y=۱$$



ب)

$$a=۲\ ,\ y=\begin{cases}x^{۲}+۱ & x<۲\ , \quad \begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۱/۵ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۳/۲۵ & ۵\end{array} \\ ۶ & x=۲ \\ -x^{۲}+۹ & x>۲\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۲ & ۲/۵ & ۳ \\ \hline y & ۵ & ۲/۷۵ & ۰\end{array}\end{cases}$$

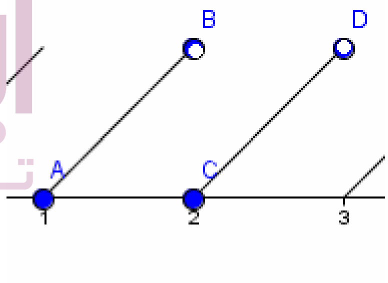
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^{+}} y=۵\ ,\ \lim_{x\to ۲^{-}} y=۵\Rightarrow \lim_{x\to ۲} y=۵$$



ج)

$$a=۲\ ,\ y=x-[x]=\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x-۱ & ۱\leq x<۲\ , \quad \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۱\end{array} \\ x-۲ & ۲\leq x<۳\ , \quad \begin{array}{c|cc} x & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۰ & ۱\end{array} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

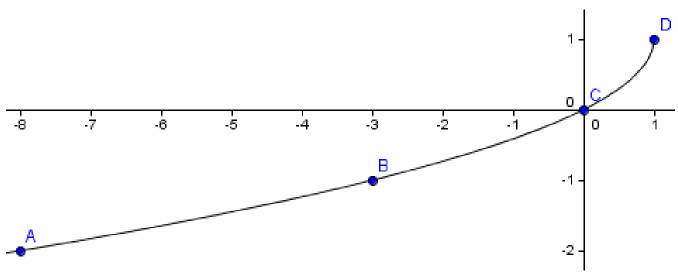
$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^{+}} y=۰\ ,\ \lim_{x\to ۲^{-}} y=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۲} y$ وجود ندارد



د)

$$a=-۳\ ,\ y=۱-\sqrt{۱-x}\ ,$$

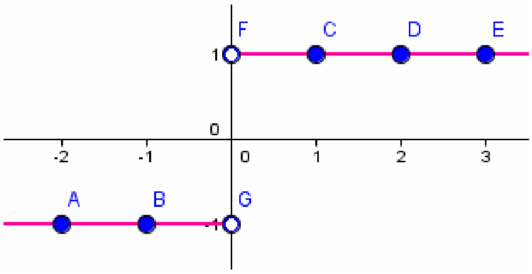
$$\begin{array}{c|cccc} x & -۸ & -۳ & ۰ & ۱ \\ \hline y & -۲ & -۱ & ۰ & ۱\end{array}\Rightarrow \lim_{x\to -۳} y=-۱$$



ه) $a=0\ ,\ y=\frac{x}{|x|}\ ,$

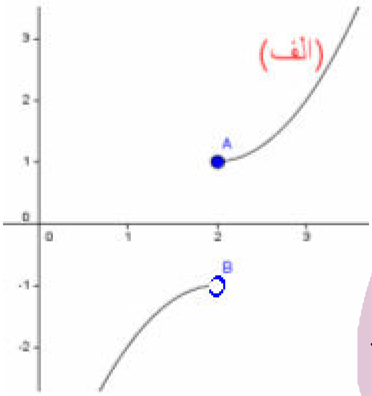
x	-2	-1	1	2	3
y	-1	-1	1	1	1

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} y = 1\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^-} y = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} y$ وجود ندارد



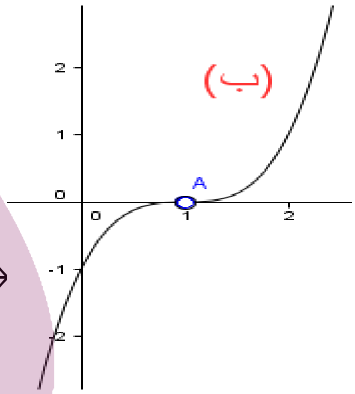
۳- وقتی مقدار x درآن همسایگی به a نزدیک می شود مقدار y برای هر دوتابع $f\ ,g$ یکسان است.
یعنی اگر مقدار $f(x)$ به عددی نزدیک شود معادل آن یعنی $g(x)$ هم به همان عدد نزدیک میشود.

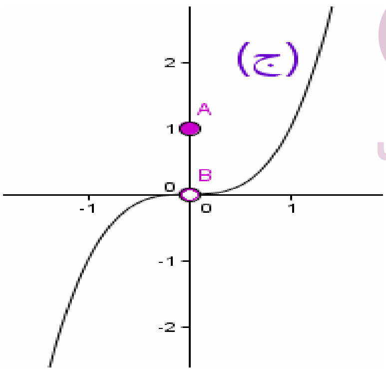
۴-



$\longleftarrow \lim\limits_{x\to 2^+} y = 1\ ,\ \lim\limits_{x\to 2^-} y = -1$

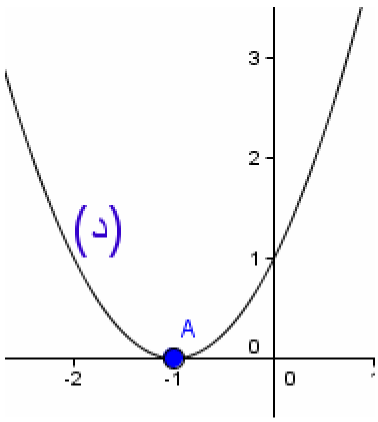
$\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^-} y = 0\ ,\ 1\notin D_f \longrightarrow$

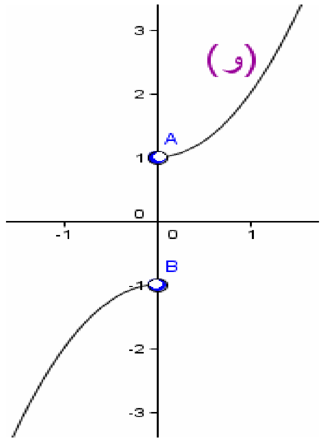




$\longleftarrow \lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^-} y = 0\ ,\ f(0)=1$

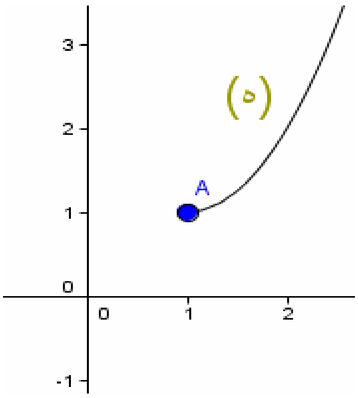
$\lim\limits_{x\to -1^+} y = \lim\limits_{x\to -1^-} y = 0 = f(-1) \longrightarrow$





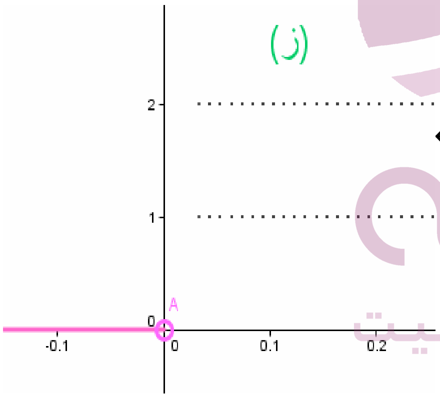
$\lim_{x \to 1^+} y = 1 \ , \ \lim_{x \to 1^-} y$ وجود ندارد $\longrightarrow$

$\lim_{x \to 0^+} y = 1 \ , \ \lim_{x \to 0^-} y = -1 \ , \ 0 \notin D_f \longrightarrow$

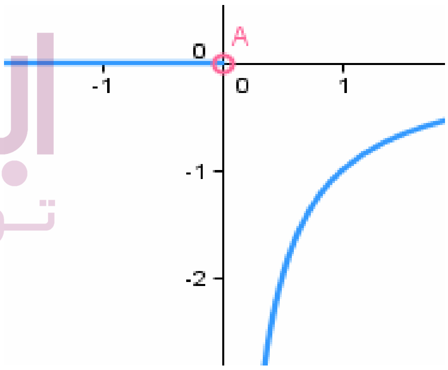


تابع در $x = 0$ دارای حد چپ برابر صفر است ولی از راست چون اعداد گویا و گنگ دربین هم پراکنده اند ، مقدار تابع دو مقدار ۱ , ۲ را اختیار میکند و به هیچکدام نزدیک نمی شود.

$$\longleftarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0, x \in Q \\ 2 & x > 0, x \notin Q \end{cases}$$



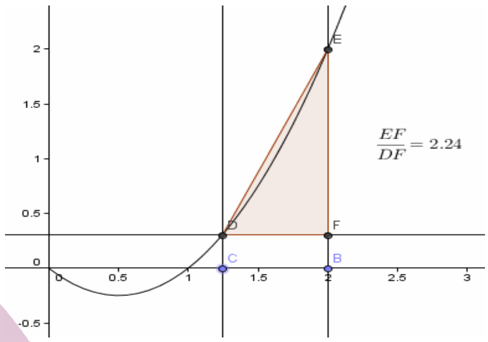
$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases} \longrightarrow$$



۵- $x(t)=t^{۲}-t \ , t \geq ۰ \Rightarrow$

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۰	۰	۲	۶	۱۲

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$	$\frac{x(۲/۱)-x(۲)}{۲/۱-۲}$	$\frac{x(۲/۰۱)-x(۲)}{۲/۰۱-۲}$	$\frac{x(۲/۰۰۱)-x(۲)}{۲/۰۰۱-۲}$
$answer$	۳/۱	۳/۰۱	۳/۰۰۱



سرعت متوسط در نزدیکی $t = ۲$ به عدد ۳ نزدیک می شود

یعنی سرعت لحظه ای در لحظه $t = ۲$ برابر ۳ است.

۱-

الف) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=\sqrt{4}+2=4$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)=n-1+1=n$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x^2}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}1+(\frac{\sin x}{x})^2=1+1^2=2$

د) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x+2}{x-1}=\frac{1+1+2}{-1-1}=-2$

ه) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\sqrt{x+1}=0\times\sin(1)=0$

و) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$

ز) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2(\frac{x}{2}))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{4}{x})(\frac{x^2}{4})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{0}{2}\times 1=0$

ح) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{1-\cos\pi}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$

ط)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x} = -(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) == -\sqrt{2}$$

۲- هنگامی که x به a نزدیک می شود اگر $f(x)$ به L نزدیک شود به معنای آنست که فاصله $f(x)$ تا L کم و کمتر شده وبه صفر نزدیک می شود به عبارت دیگر مقدار $f(x) - L$ به صفر نزدیک می شود ، یعنی $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) - L = 0$

۳-برای مقادیری از x که $f(x)$ مثبت است(قسمتی ازنمودار که بالای محور x هاست) دو تابع $|f|$, f برابرند و برای مقادیری از x که $f(x)$ منفی است (زیر محور x ها) به جای آنکه تابع از مقادیر منفی به صفر نزدیک شود از مقادیر مثبت به صفر نزدیک می شود .

پس در هر دو حالت حد برابر صفر است.

٤- برهان خلف) اگر $f+g$ در $x=a$ دارای حد باشد چون f در $x=a$ حد دارد بنابر قضایای حد $(f+g)-f=g$ هم در $x=a$ حد دارد که خلاف فرض است.

۵-

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad , \ g(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \quad , \ (f+g)(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = 0 \ , \ x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \ , \ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \ , \ \lim_{x \to 0^+} g(x) = -1 \ , \ \lim_{x \to 0^-} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) + g(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) + g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) + g(x) = 0$$

۶- $f(x)=|x|\ ,\ g(x)=\frac{|x|}{x}\ ,\ (f.g)(x)=\frac{|x|^2}{x}=\frac{x^2}{x}=x\ ,x\neq 0$

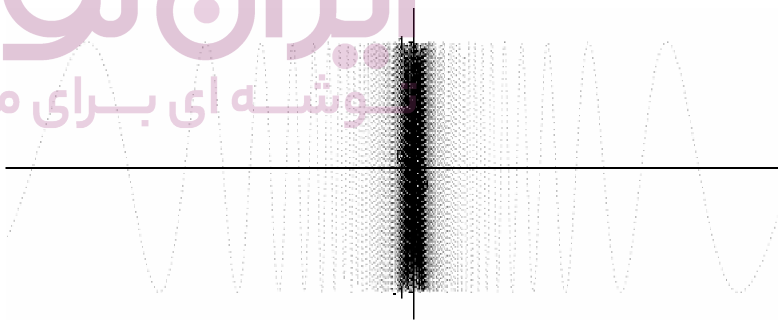
$\lim_{x\to 0}f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to 0^+}g(x)=1\ ,\ \lim_{x\to 0^-}g(x)=-1\Rightarrow\lim_{x\to 0}g(x)$ وجود ندارد

$\lim_{x\to 0}(f.g)(x)=\lim_{x\to 0}x=0$

۷- بلی در اطراف صفر تعریف شده است.خیر زیرا به ازای $x=\frac{1}{2k\pi}\ ,\ k\in Z$ مقدار $\sin\frac{1}{x}$ برابر صفر و به ازای $x=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\ ,\ k\in Z$ مقدار $\sin\frac{1}{x}$ برابر ۱ می باشد و این دو عبارت را به ازای k ی مناسب به هر مقدارمی توان به صفر نزدیک گرفت. بنابراین در همسایگی صفر به عدد ثابتی نزدیک نمی شود و حد ندارد.

$|\sin\frac{1}{x}|\leq 1\ ,\ |x|\geq 0\Rightarrow|x|\times|\sin\frac{1}{x}|\leq|x|\times 1\Rightarrow|x\sin\frac{1}{x}|\leq|x|\ ,\ \lim_{x\to 0}|x|=0$

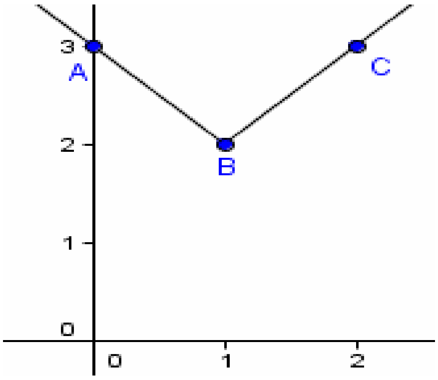
پس طبق ق فشردگی $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.



۱- الف)

$$y=|x-۱|+۲ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۳ & ۲ & ۳ \end{array}$$

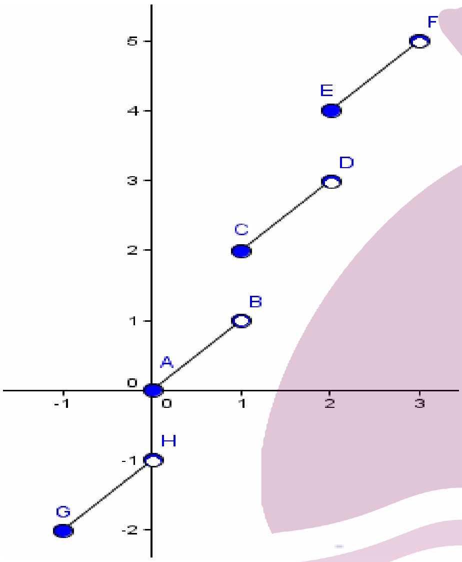
تابع در تمام نقاط پیوسته است و ناپیوستگی ندارد.



ب)

$$y=x+[x]=\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x & ۰\leq x<۱ \ , \quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array} \\ x+۱ & ۱\leq x<۲ \ , \quad \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۲ & ۳ \end{array} \\ x+۲ & ۲\leq x<۳ \ , \quad \begin{array}{c|cc} x & ۲ & ۳ \\ \hline y & ۴ & ۵ \end{array} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

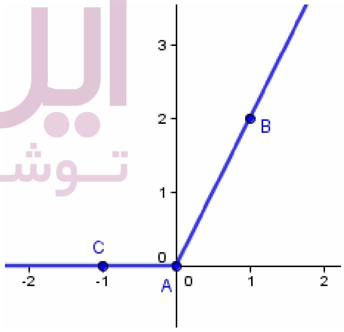
تابع در تمام نقاط $x=n\in Z$ ناپیوسته است.



ج)

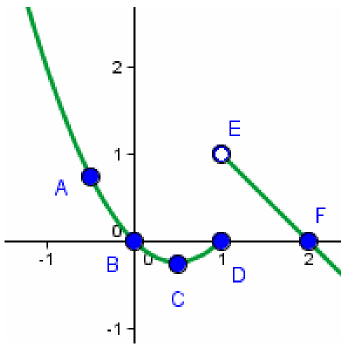
$$y=x+|x|=\begin{cases} ۲x & x\geq ۰ \ , \quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۰ & ۲ \end{array} \\ ۰ & x<۰ \ , \quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & -۱ \\ \hline y & ۰ & ۰ \end{array} \end{cases}$$

تابع در تمام نقاط $x\in R$ پیوسته است و ناپیوستگی ندارد.



د)

$$y=\begin{cases} x(x-۱) & x\leq ۱ \ , \quad \begin{array}{c|cccc} x & -\frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۱ \\ \hline y & \frac{۳}{۴} & ۰ & -\frac{۱}{۴} & ۰ \end{array} \\ -x+۲ & x>۱ \ , \quad \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۱ & ۰ \end{array} \end{cases}$$



ادامه سوال ۱ قسمت (د)

تابع در تمام نقاط به جز $x=۱$ پیوسته است.

یادآوری: $x(x-۱)=x^۲-x=x^۲-x+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}=(x-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}$ پس رأس سهمی $(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۴})$ است.

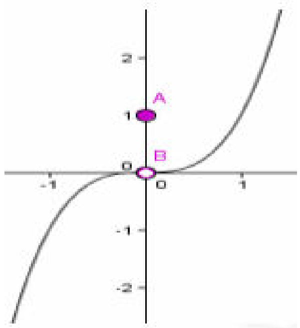
۲-

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} y=\lim\limits_{x\to ۱^+} x-۲a=۱-۲a\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} y=\lim\limits_{x\to ۱^+} x^۲-ax+۱=۱-a+۱=۲-a\end{cases}\Rightarrow ۱-۲a=۲-a\Rightarrow a=-۱$$

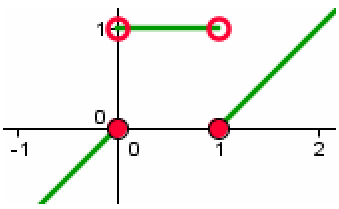
۳- برای پیوستگی تساوی اخیر باید برقرا باشد که دستگاهی بدون جواب است. پس به ازای هیچ مقدار از a تابع در $x=۰$ پیوسته نیست.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+} y=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{ax}{|x|}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{ax}{x}=a\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} y=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{ax}{|x|}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{ax}{-x}=-a\\ f(۰)=۱\end{cases}\Rightarrow a=-a=۱$$

۴- تابع $f(x)=\begin{cases}x^۳ & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$ در $x=۰$ دارای حد برابر ۰ است ، ولی در این نقطه پیوسته نیست.



۵- تابع در $x=۰$ و در $x=۱$ حد راست و چپ نابرابر دارد بنابراین در این نقاط حد ندارد پس دراین نقاط ناپیوسته است.



۶- اگر دو تابع f, g در $x=a$ پیوسته باشند یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$

آنگاه
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+g(x)$$
$$=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$$

به همین روش
$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)\times g(x)$$
$$=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)=f(a)\times g(a)=(f\times g)(a)$$

ولی برای تقسیم اگر f, g دارای دامنه یکسان و $g(x)$ در یک همسایگی a غیر صفر باشد

آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$

تذکر طبق تعریف جدید اگر تابع پیوستگی راست داشته باشد ودر سمت چپ نقطه تعریف نشده باشد پیوسته خوانده می شود پس برای معتبر بودن این قضیه دو تابع f, g باید دامنه یکسان داشته باشند.

۷-دامنه دو تابع f, g برابر R است پس $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=R$

در اینصورت اگرتابع f در $x=a$ پیوسته بوده و تابع g در $f(a)$ پیوسته باشد

آنگاه تابع gof در $x=a$ پیوسته است و

$$\lim_{x\to a}(gof)(x)=(gof)(a)$$

۱- الف) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c-c}{x-a}=0=f'(a)$

ب) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(3x+5)-(3a+5)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3(x-a)}{x-a}=3=f'(a)$

ج) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{x(t)-x(a)}{t-a}=\lim\limits_{t\to a}\dfrac{t^4-a^4}{t-a}=\lim\limits_{t\to a}\dfrac{(t-a)(t^3+t^2a+ta^2+a^3)}{t-a}$

$$=a^3+a^3+a^3+a^3=4a^3=x'(a)$$

د) $\lim\limits_{u\to a}\dfrac{y(u)-y(a)}{u-a}=\lim\limits_{u\to a}\dfrac{\frac{u}{1+u}-\frac{a}{1+a}}{u-a}=\lim\limits_{u\to a}\dfrac{\frac{u+ua-a-au}{(1+u)(1+a)}}{u-a}$

$$=\lim\limits_{u\to a}\frac{u-a}{(1+u)(1+a)(u-a)}=\lim\limits_{u\to a}\frac{1}{(1+u)(1+a)}=\frac{1}{(1+a)^2}$$

ه) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{k(x)-k(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{xa}}}{(x-a)}$

$$=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{xa}(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim\limits_{x\to a}\frac{-1}{\sqrt{xa}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{-1}{2a\sqrt{a}}$$

۲- الف) $m=y'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{\frac{1-x^2}{2(1+x^2)}}{x-1}}{1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1+x)}{2(1+x^2)(x-1)}$

$$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(1+x)}{2(1+x^2)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

ادامه سوال ۲ (الف)

معادله مماس $x=1 \Rightarrow y(1)=\dfrac{1}{1+1^2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow A(1,\dfrac{1}{2}) \Rightarrow y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+1$

معادله قائم $m=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow m'=2 \Rightarrow y-\dfrac{1}{2}=2(x-1) \Rightarrow y=2x-\dfrac{3}{2}$

ب)

$$m=y'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{(x+1)(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to -1}\frac{1-x}{(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{3})}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x=-1 \Rightarrow y(-1)=\sqrt{4-(-1)^2}=\sqrt{3} \Rightarrow m=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ A(-1,\sqrt{3})$$

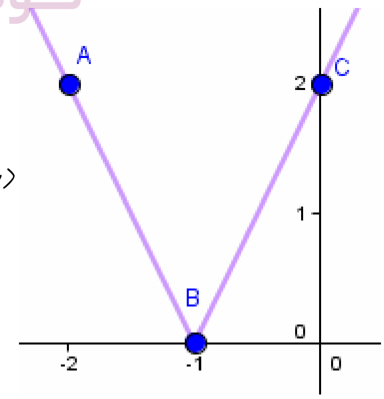
معادله مماس $y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$$m=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m'=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}\ ,\ A(-1,\sqrt{3})$$

معادله قائم $\Rightarrow y-\sqrt{3}=-\sqrt{3}(x+1) \Rightarrow y-\sqrt{3}=-\sqrt{3}x-\sqrt{3} \Rightarrow y=-\sqrt{3}x$

۳- الف) $y(x)=2|x+1| \Rightarrow$

x	-2	-1	0
y	2	0	2



در نقطه $A(-1,0)$ (نقطه زاویه دار) مشتق پذیر نیست و

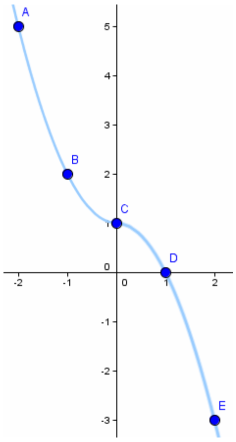
$$y'_+(-1)=\frac{2}{1}=2\ ,\ y'_-(-1)=\frac{-2}{1}=-2$$

ادامه سوال ۳

ب)

$$y(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\le 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 0 \\ \hline y & 5 & 2 & 1 \end{array} \\ -x^2+1 & x>0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 & -3 \end{array} \end{cases}$$

در تمام نقاط مشتق پذیر است $y'_+(0)=y'_-(0)=0$



ج) $y(x)=|1-x^2|=\begin{cases} 1-x^2 & -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & x>1 \ or \ x<-1 \end{cases}$

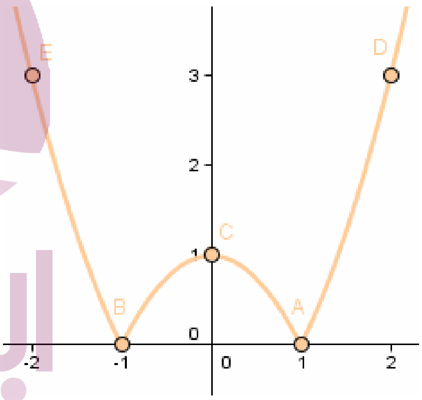
د نقاط در $x=1\ ,\ x=-1$ مشتق پذیر نیست زیرا

$$y'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

$$y'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)(1+x)}{x-1}=-2$$

$$y'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1-x^2-0}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{(1-x)(1+x)}{x+1}=2$$

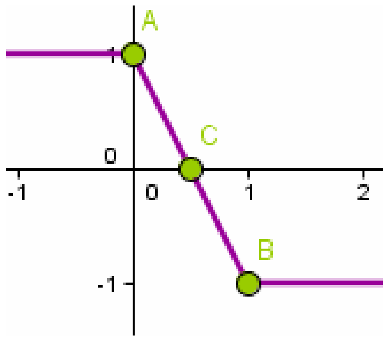
$$y'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-1-0}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=-2$$

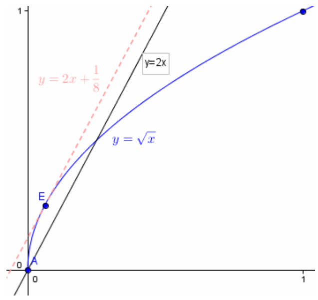


د) $y(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ -2x+1 & 0\le x\le 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & -1 \end{array} \\ -1 & x>1 \end{cases}$

در نقاط $x=0\ ,\ x=1$ مشتق پذیر نیست .

$$y'_-(0)=0\ ,\ y'_+(0)=-2\ ,\ y'_+(1)=0\ ,\ y'_-(1)=-2$$





-٤

$$y_1(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & ۰ & ۱ & ۴ & ۹ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \end{array} \ , \ y_۲ = ۲x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۲ & ۴ \end{array}$$

$$y'_1(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \ , \ y'_۲(x) = ۲ \ , y'_1(x) = y'_۲(x)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = ۲ \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۶} \ , ۲(\frac{۱}{۱۶}) + b = \sqrt{\frac{۱}{۱۶}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow y = ۲x + \frac{۱}{۸}$$

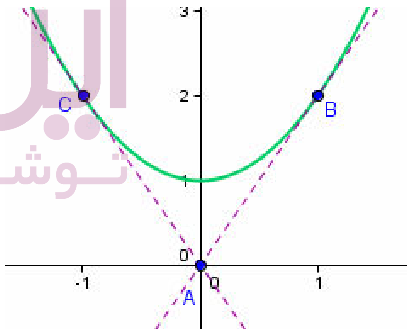
پس اگر به اندازه $\frac{۱}{۸}$ نمودار $y = ۲x$ را بالا ببریم دو نمودار در $A(\frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۴})$ مماس خواهند شد.

-٥ نمودار $g(x)$ ازانتقال نمودار $f(x)$ به اندازه b واحد به بالا یا پائین به دست می آید(علامت b)

بنابراین چون دو خط مماس مرسوم موازی می شوند شیب آنها تغییری نمی کند.

یعنی اگر مشتق آنها در نقطه دلخواه موجود باشد با هم برابر است.

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) + b - (f(a) + b)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$



-٦

$$m_{OA} = \frac{a^۲ + ۱ - ۰}{a - ۰} = \frac{a^۲ + ۱}{a}$$

$$m_{OA} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x^۲ + ۱) - (a^۲ + ۱)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x^۲ - a^۲}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = ۲a \Rightarrow \frac{a^۲ + ۱}{a} = ۲a \Rightarrow a^۲ + ۱ = ۲a^۲$$

$$\Rightarrow a = \pm ۱ \Rightarrow A(۱, ۲) \ , \ B(-۱, ۲)$$

-٧

$$g'(b) = \lim_{x \to b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} = \lim_{x \to b} \frac{f(ax) - f(ab)}{x - b} = \lim_{x \to b} a(\frac{f(ax) - f(ab)}{ax - ab})$$

$$= af'(ab) \Rightarrow g'(x) = af'(ax)$$

۱- الف) $y'=4x^3+\frac{4}{x^5}$ ب) $y'=(3x^2-2x)(x-\sqrt{x}+5)+\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^3-x^2-1)$

ج) $y'=2(4-3x)(x^2+x+5)-3(2x+1)(x^2+x+5)+(2x+1)^2(4-3x)$

د) $y'=\frac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$ ه) $y'=\frac{\sqrt{x}+2-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x)}{(\sqrt{x}+2)^2}=\frac{\sqrt{x}+4}{2(\sqrt{x}+2)^2}$

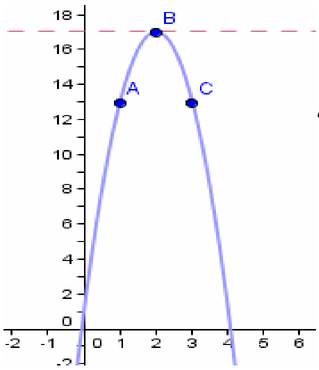
۲- موازی نیمساز ربع اول و سوم یعنی شیب برابر ۱ $(y'(x)=1)$

دو نقطه $y'=3x^2-2=1\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow A(1,-7),\ B(-1,-5)$

۳- $y=-4(x^2-4x+4)+16+1=-4(x-2)^2+17\Rightarrow$

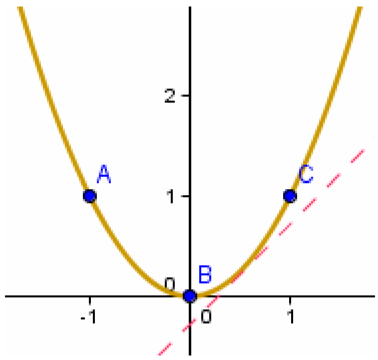
x	1	2	3
y	13	17	13

مماس موازی محور x ها یعنی شیب برابر صفر پس $y'=-8x+16=0\Rightarrow x=2$



$x=2\Rightarrow y=-4(2-2)^2+17=17\Rightarrow B(2,17)$

فقط درنقطه B (رأس سهمی)مماس بر منحنی موازی محور x هاست، که این نقطه ماکسیمم تابع است.

۴- 

$y=x^2\Rightarrow$

x	-1	0	1
y	1	0	1

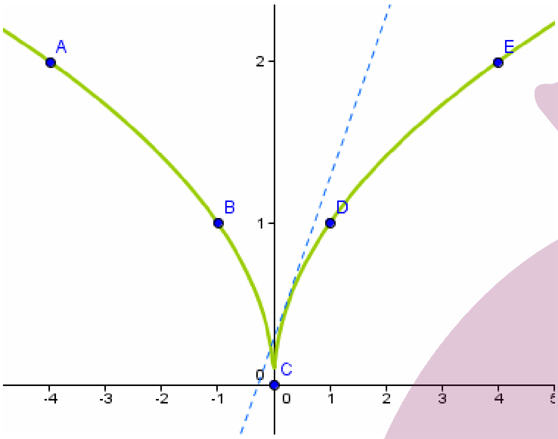
تنها یک نقطه این خاصیت رادارد.

$$\left.\begin{array}{l} y=mx+b\Rightarrow y'=m \\ y=x^2\Rightarrow y'=2x \end{array}\right\}\Rightarrow 2x=m\Rightarrow x=\frac{m}{2}$$

ادامه سوال ٤

$$y=\sqrt{|x|}\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -4 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline y & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=mx+b\Rightarrow y'=m \\ y=\sqrt{|x|}\Rightarrow y'=\dfrac{|x|}{2x\sqrt{|x|}},x\neq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} if\ \ m>0\Rightarrow x>0\Rightarrow x=\dfrac{1}{4m^2} \\ if\ \ m<0\Rightarrow x<0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{4m^2} \end{cases}$$



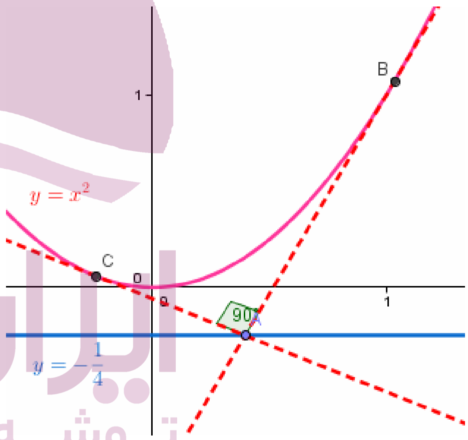
اگر m مثبت باشد محل برخوردطول مثبت و

اگر m منفی طول محل برخورد منفی است.

در هر صورت تنها یک نقطه دارای خاصیت مفروض است.

۵-

$$y=x^2\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$$



$$m=\frac{y-a^2}{x-a}=2a\Rightarrow y=2ax-a^2 \ ①$$

$$m'=\frac{y-b^2}{y-b}=2\Rightarrow y=2bx-b^2 \ ②$$

$$m\times m'=-1\ ,\ ①,\ ②\Rightarrow 2a\times 2b=-1\Rightarrow ab=-\frac{1}{4}\ ③$$

پس باید مقادیر a,b را چنان یافت که $ab=-\frac{1}{4}$ که بیشمار جواب دارد . در این صورت

با حل دستگاه شامل ①,② داریم $\begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=ab=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$ یعنی مجموعه جواب خط $y=-\frac{1}{4}$ است.

۶-

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x)-\left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x).f(a)}}{x-a}}{1}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-(f(x)-f(a))}{f(x).f(a)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{-1}{f(x)f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\frac{1}{f(a)^2}\times f'(a)$$

۷-

$$f(x)^k=x\Rightarrow(f(x)^k)'=(x)'\Rightarrow kf'(x).f(x)^{k-1}=1$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{k.f(x)^{k-1}}=\frac{1}{k.x^{\frac{k-1}{k}}}=\frac{1}{k}.x^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}$$

۸-

$$r>0\ ,\ r=\frac{m}{n}\Rightarrow(x^r)'=(x^{\frac{m}{n}})'=((x^{\frac{1}{n}})^m)'=m(x^{\frac{1}{n}})'(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}$$

$$=m\left(\frac{1}{n}\right)(x^{\frac{1}{n}-1})(x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}})=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=rx^{r-1}$$

$$r<0\ ,r=\frac{m}{n}\Rightarrow(x^r)'=((x^{-r})^{-1})'=(-1)(x^{-r})'(x^{-r})^{-2}$$

$$=(-1)((-r)(x^{-r-1})(x^{2r})=rx^{r-1}$$

۹-

$$y=6x^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{4}}\Rightarrow y'=6\left(\frac{1}{3}\right)(x)^{\frac{1}{3}-1}-3\left(\frac{1}{4}\right)(x^{\frac{1}{4}-1})$$

$$\Rightarrow y'=2x^{-\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

۱-

$$\left.\begin{array}{l} s = \pi R^{۲} \\ P = ۲\pi R \Rightarrow R = \dfrac{P}{۲\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow S = \pi\left(\dfrac{P}{۲\pi}\right)^{۲} = \dfrac{P^{۲}}{۴\pi} \Rightarrow S' = \dfrac{P}{۲\pi}$$

$$S_{۰} = \pi = \pi R_{۰}^{۲} \Rightarrow R_{۰} = ۱ \Rightarrow P_{۰} = ۲\pi(۱) = ۲\pi \Rightarrow S' = \dfrac{۲\pi}{۲\pi} = ۱$$

۲- الف) $\dfrac{۴}{۳}\pi R^{۳} = ۴t \Rightarrow R^{۳} = \dfrac{۳}{\pi}t \Rightarrow R = \sqrt[۳]{\dfrac{۳}{\pi}t} = \sqrt[۳]{\dfrac{۳}{\pi}}.\sqrt[۳]{t} \Rightarrow R'(t) = \sqrt[۳]{\dfrac{۳}{\pi}}.\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{t^{۲}}} = \dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۹\pi t^{۲}}}$

ب) $S = ۴\pi R^{۲} = ۴\pi\left(\sqrt[۳]{\dfrac{۳}{\pi}t}\right)^{۲} = ۴\pi\left(\dfrac{۳}{\pi}t\right)^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow S'(t) = ۸\left(\dfrac{۳}{\pi}t\right)^{-\frac{۱}{۳}} = ۸\sqrt[۳]{\dfrac{\pi}{۳t}}$

ج) $S = ۴\pi R^{۲} \Rightarrow R^{۲} = \dfrac{S}{۴\pi} \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{۴\pi}} \Rightarrow R'(S) = \dfrac{۱}{۸\pi}\left(\dfrac{S}{۴\pi}\right)^{-\frac{۱}{۲}} = \dfrac{۱}{۴\sqrt{\pi S}}$

د) $S = ۴\pi R^{۲} \Rightarrow S'(R) = ۸\pi R \ , ۴۵۰۰\pi = \dfrac{۴}{۳}\pi R^{۳} \Rightarrow R = \sqrt[۳]{۳۳۷۵} = ۱۵$

$\Rightarrow S'(R) = ۸\pi(۱۵) = ۱۲۰\pi$

۳- الف) $S(t) = ۲۵t - \dfrac{۵}{۲}t^{۲} = -\dfrac{۵}{۲}(t-۵)^{۲} + \dfrac{۱۲۵}{۲} \Rightarrow$

t	۴	۵	۶
$S(t)$	۶۰	$\dfrac{۱۲۵}{۲}$	۶۰

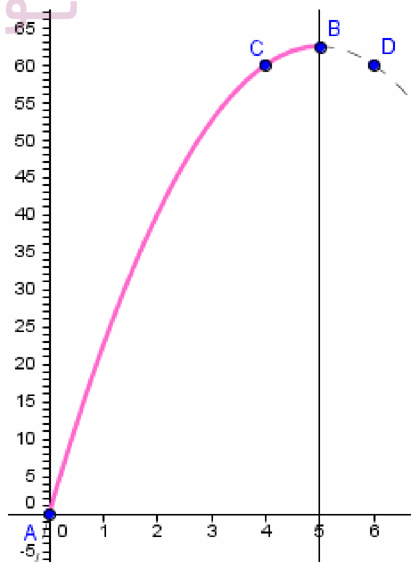
دامنه اعتبار تابع از $t = ۰$ تا توقف کامل یعنی $S'(t) = ۰$ است که

$S'(t) = ۲۵ - ۵t = ۰ \Rightarrow t = ۵$ پس $D_S = [۰,+۵]$

ب) $V = S'(t) = ۲۵ - ۵t = \ , t = ۰ \Rightarrow V = ۲۵ - ۵(۰) = ۲۵ \ m/s$

ج) $V = ۰ \Rightarrow ۲۵ - ۵t = ۰ \Rightarrow t = ۵$

د) توقف کامل $t = ۵ \Rightarrow S(۵) = ۲۵(۵) - \dfrac{۵}{۲}(۵)^{۲} = \dfrac{۱۲۵}{۲} = ۶۲/۵$



۴- الف) $۱۰۰\times۳=۳۰۰$ متر فاصله رادر نه دقیقه طی کرده است.

ب)۱۰۰ متر را در دودقیقه طی کرده است پس $۵۰=\frac{۱۰۰}{۲}=v_۱$ یعنی سرعت ۵۰ متر بر دقیقه است.

ج) ایستاده بوده است چون مسافتی طی نشده است.

د) ۱۰۰ متر را در یک دقیقه طی کرده پس با سرعت ۱۰۰ متر بر دقیقه به طرف خانه اش حرکت کرده است . (دویده)

ه) دم در خانه اش ایستاده بوده و برای خودش آواز می خوانده است.

و) چون ۳۰۰ متر رادر ۲ دقیقه طی کرده است ، می توان گفت با سرعت متوسط ۱۵۰ متر در دقیقه به طرف مدرسه می دویده است.

ز) دم در مدرسه ایستاده و منتظر بوده ببیند آیا معلم ریاضی می آید یا نه ؟؟؟!!!

۱- الف) $y' = ۳\cos ۳x$ ب) $y' = \tan\frac{x}{۲} + \frac{x}{۲}(۱+\tan^۲\frac{x}{۲})$

ج) $y' = ۲(\cos ۲x)(۳\sin^۲ ۲x) = ۳\sin ۴x.\sin ۲x$ د) $y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^۲}$

ه) $y = \frac{۱}{\cot x + ۱} \Rightarrow y' = -۱(-۱)(۱+\cot^۲ x)(\cot x + ۱)^{-۲} = \frac{۱+\cot^۲ x}{(۱+\cot x)^۲}$

و) $y' = \frac{(۲x - \sin ۲x)(۱+\cos^۲ x) + \sin ۲x(x^۲ - \sin^۲ x)}{(۱+\cos^۲ x)^۲}$

۲-

$$y'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x\to a}\frac{-۲\sin(\frac{x+a}{۲}).\sin(\frac{x-a}{۲})}{۲(\frac{x-a}{۲})} =$$

$$= \lim_{x\to a} -\sin(\frac{x+a}{۲}).\frac{\sin(\frac{x-a}{۲})}{(\frac{x-a}{۲})} = -\sin(\frac{a+a}{۲})\times ۱ = -\sin a$$

۳-

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \;,\; x = ۰ \Rightarrow \cos ۰ = ۱ = m = \tan\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$

$y = \tan x \Rightarrow y' = ۱+\tan^۲ x \;, x = ۰ \Rightarrow ۱+\tan^۲ ۰ = ۱ = m = \tan\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$

۴- موازی محور x ها است چون شیب صفراست. $y = \sin ۳x \Rightarrow y' = ۳\cos ۳x = ۰$

$\cos ۳x = ۰ \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۶} \Rightarrow A(\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}, ۱), B(\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}, -۱)$

۵- شیب خط $y = ۳x - ۱$ برابر ۳ است. $y = \sin x + \cos x$

معادله جواب ندارد. $\Rightarrow y' = \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = ۳ \Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{۴}) = ۳\sqrt{۲} > ۱$

۶- شیب خط $y = mx + ۲$ برابر m است و

$$y = \tan ۳x \Rightarrow y' = ۳(۱ + \tan^۲ ۳x) = \frac{۳}{\cos^۲ ۳x} = m$$

$$\Rightarrow \cos^۲ ۳x = \frac{۳}{m} \quad , \quad ۰ \leq \cos^۲ ۳x \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq \frac{۳}{m} \leq ۱ \Rightarrow m \geq ۳$$

۷- $y = ۱ + ۲\sin^۲ ۲x = ۱ + ۲(\frac{۱ - \cos ۲x}{۲}) = ۲ - \cos ۲x \Rightarrow y' = ۲\sin ۲x$

پس حرکت این متحرک به صورت تناوبی با دوره تناوب $T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$ است.

$$y' = ۰ \Rightarrow ۲\sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \Rightarrow A(\frac{k\pi}{۲}, ۱) \quad or \quad B(\frac{k\pi}{۲}, ۳)$$

$$y'_{\max} = ۲ \, , \, \sin ۲x = \pm ۱ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} = (۲k + ۱)\frac{\pi}{۴}$$

۱- الف) $y'=\frac{2x(1+x^2)-2x(x^2)}{(1+x^2)^2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}=\frac{x}{(1+x^2)^2}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}$

تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست .

ب) $f(t)=\cos\sqrt[3]{t}\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\times-\sin\sqrt[3]{t}=-\frac{\sin\sqrt[3]{t}}{3\sqrt[3]{t^2}}$ در $t=0$ مشتق پذیر نیست.

ج) $g(\alpha)=\sqrt[5]{1+\tan\alpha}\Rightarrow g'(\alpha)=(1+\tan^2\alpha)\left(\frac{1}{5\sqrt[5]{(1+\tan\alpha)^4}}\right)=\frac{1+\tan^2\alpha}{5\sqrt[5]{(1+\tan\alpha)^4}}$

اگر $\tan\alpha=-1$ یعنی $\alpha=k\pi-\frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر نیست.

البته در $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$ مشتق پذیر نیست که جزء دامنه نمی باشد.

د) $y(\alpha)=\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}\alpha)$

$\Rightarrow y'(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}(1+\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}\alpha))(2\tan(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}\alpha))$

اگر $\alpha=\pm1$ تابع مشتق پذیر نیست.

البته در $\alpha=\frac{1}{2}$ مشتق پذیر نیست که جزء دامنه نمی باشد.

ه) $x(t)=\sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}\Rightarrow x'(t)=2t\left(\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}}\right)=\frac{t}{2\sqrt{1+t^2}.\sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}}$

زیر رادیکالها مثبت و مخرج هیچگاه صفر نمی شود پس در تمام نقاط مشتق پذیر است.

$$k(z)=\sqrt{1+\cos^2\sqrt{1+z^2}}$$

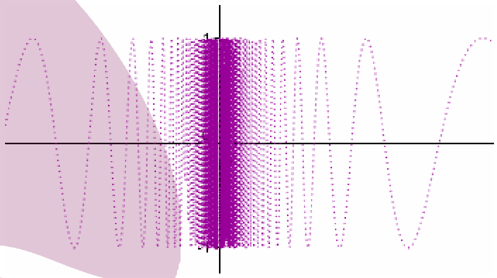
و) $$\Rightarrow k'(z)=2z\left(\frac{1}{2\sqrt{1+z^2}}\right)\left(-\sin\sqrt{1+z^2}\right)\left(2\cos\sqrt{1+z^2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2\sqrt{1+z^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow k'(z)=\frac{-z\sin 2\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{1+z^2}\,.\sqrt{1+\cos^2\sqrt{1+z^2}}}$$

زیر رادیکالها مثبت و مخرج هیچگاه صفر نمی شود پس در تمام نقاط مشتق پذیر است.

-۲

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$ وجو ندارد



$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x.\sin\frac{1}{x}=0$$

زیرا) $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1\Rightarrow -x\le x.\sin\frac{1}{x}\le x$ و حد دوطرف نامساوی صفر است ،

پس طبق قضیه فشردگی $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ (

$$D_f=[-\infty,+\infty]=R\quad,\quad R_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

-۳ $$T=2\pi\Leftrightarrow f(x+2\pi)=\sin^{-1}(\sin(x+2\pi))=\sin^{-1}(\sin(x))=f(x)$$

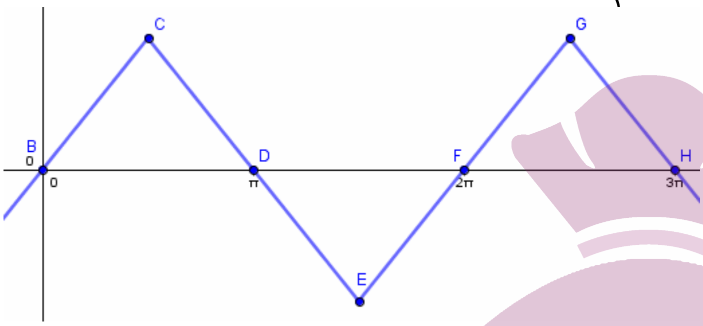
$f(x)=\sin^{-1}(\sin x)\Rightarrow$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
y	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0

ادامه سوال ۳ در نقاطی که $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ مشتق ناپذیر است.

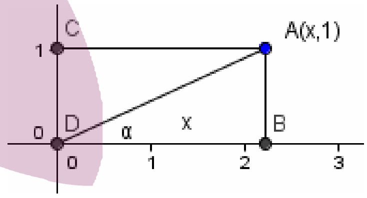
در نقاطی که $(4k-1)\frac{\pi}{2}<x<(4k+1)\frac{\pi}{2}$ شیب $+1$ است پس $f'(x)=+1$

در نقاطی که $(4k+1)\frac{\pi}{2}<x<(4k+3)\frac{\pi}{2}$ شیب -1 است پس $f'(x)=-1$



۴-

$$\tan\alpha=\frac{1}{x}\Rightarrow\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\ ,\ D_{\alpha(x)}=R\ \ ,\ R_{\alpha(x)}=(0,\pi)$$



$$\alpha'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\right)=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)=-\frac{1}{x^2+1}$$

مقدار α با افزایش x کاهش می یابد و علامت $\alpha'(x)$ همواره منفی بنابراین تابع اکیدا نزولی.

۵- الف)

$$L^2=2^2+4^2-2(2\times4)\cos\alpha=20-16\cos\alpha\ \ ,\ 0<\alpha<180$$

$$\Rightarrow D_{L(\alpha)}=(0,180)\ ,\ L=\sqrt{20-16\cos\alpha}\ ,L>0\Rightarrow R_{L(\alpha)}=(0,+\infty)$$

نکته) چون $\cos\alpha\le1$ بنابراین $20-16\cos\alpha>0$ همواره برقرار است.

ب) $L^2=20-16\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{20-L^2}{16}\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{20-L^2}{16}\right)$

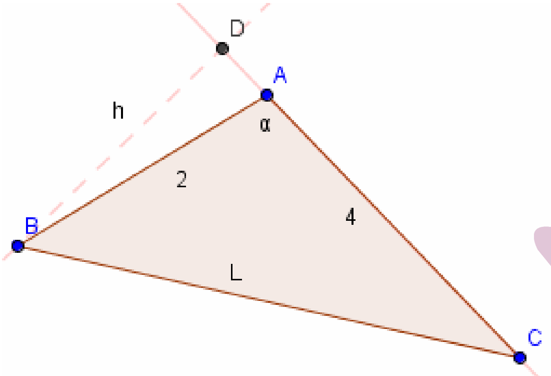
$$\sin(180-\alpha)=\frac{h}{2}\Rightarrow h=2\sin\alpha\ ,\ S=\frac{4\times h}{2}=2h=4\sin\alpha$$

ج)

$$\Rightarrow S'(\alpha)=4\cos\alpha\Rightarrow\begin{cases}0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow S'(\alpha)>0\\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow S'(\alpha)<0\end{cases}$$

ادامه سوال ۵ برای $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ آهنگ افزایش مساحت صعودی است (هنگامیکه زاویه α تند است)

برای $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ آهنگ افزایش مساحت نزولی است (هنگامیکه زاویه α باز است)



$S'(\alpha)=0 \Rightarrow \cos\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$ پس بیشترین مقدار مساحت زمانی است که مثلث قائمه الزاویه است .

$$S(\frac{\pi}{2})=4\sin(\frac{\pi}{2})=4$$

۶-

$$R=1 \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})=\frac{\frac{l}{2}}{1} \Rightarrow l=2\sin(\frac{\alpha}{2})$$

$$R=1 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})=\frac{h}{1} \Rightarrow h=\cos(\frac{\alpha}{2})$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}AB\times h=\frac{1}{2}l.\cos(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{2}(2\sin(\frac{\alpha}{2}))\cos(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{2}\sin\alpha$$

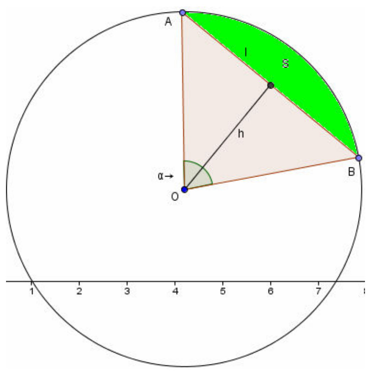
(سبز)هاشورخورده $S=\alpha$ مساحت قطاع $-OAB$ مساحت مثلث $S=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha$ ①

$$l=2\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{l}{2} \Rightarrow \alpha=2\sin^{-1}(\frac{l}{2}) \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow S=\sin^{-1}(\frac{l}{2})-\frac{1}{2}\sin(2\sin^{-1}(\frac{l}{2}))=\sin^{-1}(\frac{l}{2})-\frac{1}{2}(2\frac{l}{2})(\sqrt{1-\frac{l^2}{4}}$$

$$\Rightarrow S=\sin^{-1}(\frac{l}{2})-\frac{l}{4}\sqrt{4-l^2} \quad ③$$

$$①\Rightarrow S'(\alpha)=\frac{1}{2}--\frac{1}{2}\cos\alpha \quad , \quad ②\Rightarrow \alpha'(l)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{l^2}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{4-l^2}}$$



$$③\Rightarrow S'(l)=\frac{1}{\sqrt{4-l^2}}-\frac{1}{4}\sqrt{4-l^2}+\frac{l^2}{4\sqrt{4-l^2}}=\frac{l^2}{2\sqrt{4-l^2}}$$