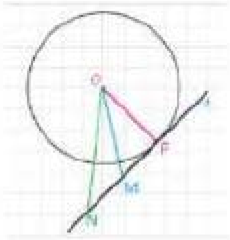
فعالیت صفحه‌ی ۱۱



۱- فرض کنیم خط d بر دایره‌ی C در نقطه‌ی F مماس است.

الف) نزدیک‌ترین نقطه‌ی خط d به نقطه‌ی O کدام است؟ چرا؟

نزدیک‌ترین نقطه‌ی خط d به نقطه‌ی O نقطه‌یF است. می‌دانیم طول OF = R و هر نقطه‌ی دیگر از خط d خارج دایره است و با توجه به قسمت (پ) مطالب فوق فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است.

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟

در نقطه‌یF قطع می‌کند. اگر فرض کنیم که در F قطع نکند پس نقطه ی دیگری مانند M وجود دارد که OM بر خط d عمود است. و M پای عمود است. نقطه ی دیگری مانند N روی خط d هست که M بین N و F قرار دارد و FM = MN در نتیجه:

$$\begin{cases} FM = MN \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ OM = OM \end{cases} \Rightarrow \widehat{OMN} \cong \widehat{OMF} \Rightarrow ON = OF = R$$

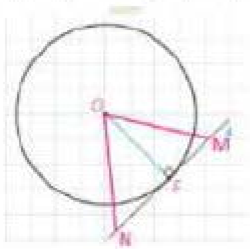
بنابراین نقطه‌ی N نیز روی دایره است و این با فرض مماس بودن خط d بر دایره تناقض دارد. پس خط مماس در نقطه‌یF بر OF عمود است.

پ) نتیجه: اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه‌ی F برهم عمودند.

ت) با توجه به قسمت (پ) اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خط مماس بر دایره در نقطه‌ی F را رسم کنید؟

با توجه به مطلب فوق کافی است خطی را که در نقطه‌ی F بر OF عمود می‌شود رسم کنیم. این خط مماس بر دایره می‌باشد.

۲- خط d در نقطه‌ی F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همه‌ی نقاط خط d نسبت به دایره‌ی C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطه‌ی تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.



فرض کنیم M نقطه‌ی دیگری غیر از F روی خط d باشد چون OM > OF در نتیجه نقطه‌ی M برون دایره C است. بنابراین خط d با دایره‌ی C فقط یک نقطه مشترک دارد. در نتیجه خط d بر دایره مماس است.

بنابراین:

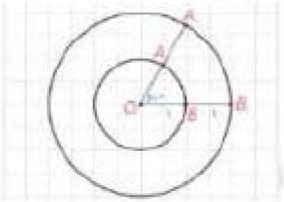
در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

کار در کلاس صفحه‌ی ۱۲

۱- با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازه ۳۶۰° است، خواهیم داشت :

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{دایره محیط}} = \frac{\text{اندازه کمان } AB}{۳۶۰}$$

۲- با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.



$\widehat{AB} = ۶۰^\circ$

$\text{طول}\widehat{AB} = \frac{\pi}{۳}$

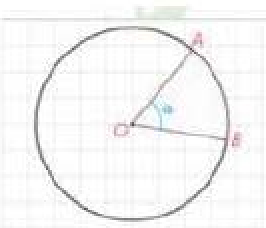
$\widehat{A_۱B_۱} = ۶۰^\circ$

$\text{طول}\widehat{A_۱B_۱} = \frac{\pi ۲}{۳}$

$$\frac{۶۰}{۳۶۰} = \frac{\text{طول}\widehat{AB}}{\pi ۲ \times ۱} \Rightarrow \text{طول}\widehat{AB} = \frac{\pi}{۳}$$

$$\frac{۶۰}{۳۶۰} = \frac{\text{طول}\widehat{A_۱B_۱}}{\pi ۲ \times ۲} \Rightarrow \text{طول}\widehat{A_۱B_۱} = \frac{\pi ۲}{۳}$$

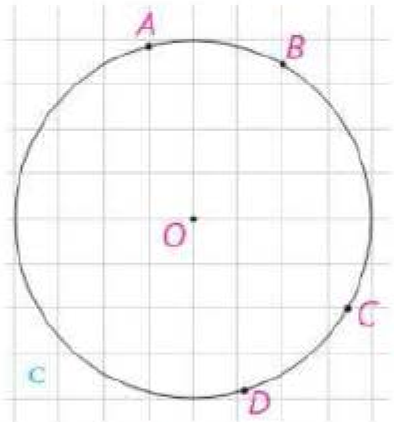
۳- ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه‌ی مرکزی قطاعی از دایره‌ی C(O,R) بر حسب درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با: $L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با: $L = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰}$

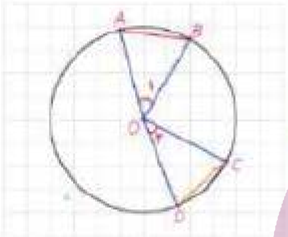


طول کمان قطاع یک درجه $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره است یعنی $\frac{۲\pi r}{۳۶۰}$ در نتیجه طول کمان نظیر قطاع α درجه $L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ است. مساحت قطاع یک درجه $\frac{۱}{۳۶۰}$ مساحت دایره است یعنی $\frac{\pi r^۲}{۳۶۰}$. در نتیجه مساحت قطاع α درجه $A = \frac{\pi r^۲}{۳۶۰}\alpha$ است.

فعالیت صفحه‌ی ۱۳

۱- فرض کنید اندازه‌های کمان های AB و CD از دایره‌ی C(O,r) باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز با هم برابرند.





فرض: $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ حکم: $AB = CD$

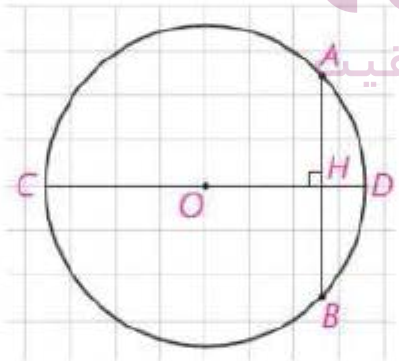
$$\begin{cases} \widehat{AB}=\widehat{CD} \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2 \\ OA=OC=R \\ OB=OD=R \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} OAB \cong OCD \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB = CD$$

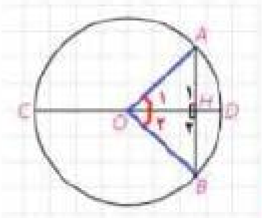
۲- فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان های AB و CD نیز باهم برابرند.

فرض: $AB = CD$ حکم: $\widehat{AB}=\widehat{CD}$

$$\begin{cases} AB = CD \\ OA=OC=R \\ OB=OD=R \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} OAB \cong OCD \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1=\hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB}=\widehat{CD}$$

۳- وتر AB و قطری از دایره که بر وتر AB عمود است مانند شکل مقابل داده شده‌اند. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.





فرض: $CD \perp AB$ حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ ، $AH = BH$

$$\begin{cases} OA = OB = R \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} OAH \cong OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} AH = BH \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{cases}$$

۴- این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می کند.

فرض: $AH = BH$ حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ و $CD \perp AB$

$$\begin{cases} OA = OB = R \\ AH = BH \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} OAH \cong OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} H_1 = H_2 = 90^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{cases}$$

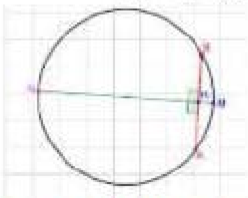
۵- حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

فرض: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ حکم: $AH = BH$ و $CD \perp AB$

$$\widehat{AD} = \widehat{BD} \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \begin{cases} OA = OB = R \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} OAH \cong OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} H_1 = H_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{cases}$$

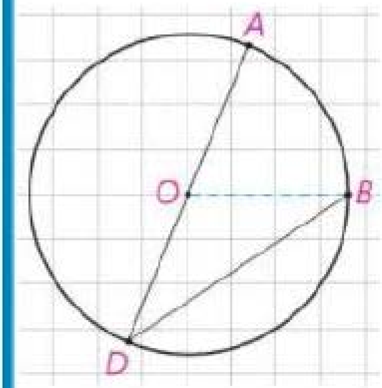
نتیجه: عمود منصف وتر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.

۶- اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه میتوانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟



اگر وسط کمان را M و وسط وتر را H بنامیم کافی است این دو نقطه را بهم وصل کنیم و از سمت H امتداد دهیم تا دایره را در نقطه‌ی N قطع کند. با توجه به ۴ و ۵ MN قطر عمود بر این وتر است.

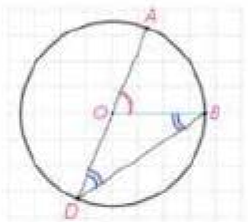
فعالیت صفحه‌های ۱۳ و ۱۴



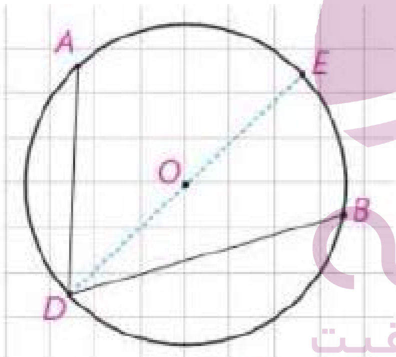
۱- در شکل مقابل $\widehat{ADB}$ یک زاویه‌ی محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

اگر از B به O وصل کنیم، زاویه‌ی AOB یک زاویه‌ی خارجی برای مثلث متساوی الساقین OBD است. بنابراین

$\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \widehat{OBD} = 2\widehat{ODB}$ و از آن نتیجه می‌شود:

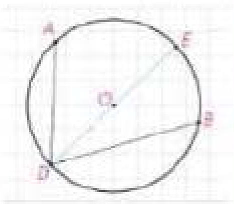


$$\widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$



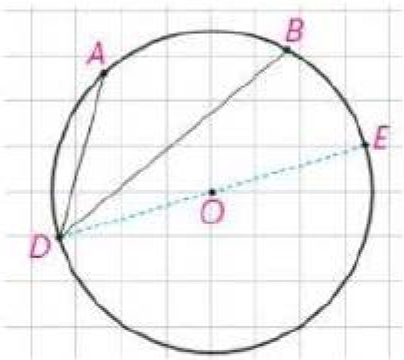
۲- در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویه‌ی محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

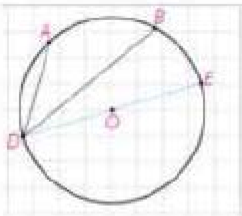
اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:



$$\begin{cases} \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{AE} \\ \widehat{EDB} = \frac{1}{2}\widehat{BE} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AE} + \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

۳- در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویه‌ی محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.





اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :

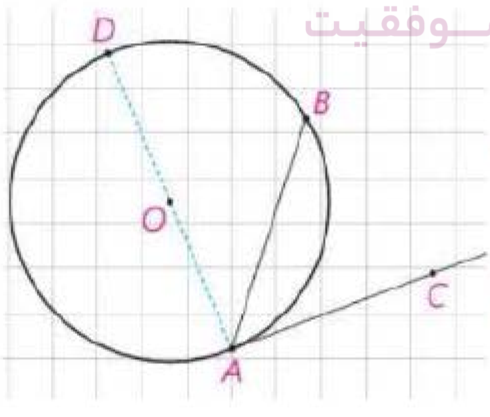
$$\begin{cases} \widehat{ADE} = \dfrac{۱}{۲}\widehat{AE} \\ \widehat{BDE} = \dfrac{۱}{۲}\widehat{BE} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ADB} = \dfrac{۱}{۲}\widehat{AE} + \dfrac{۱}{۲}\widehat{BE} = \dfrac{۱}{۲}\widehat{AB}$$

بنابراین:

قضیه: اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر است با نصف اندازه‌ی کمان مقابل به آن زاویه.

فعالیت صفحه‌های ۱۴ و ۱۵

۱-زاویه‌ی ظلی $\widehat{CAB}$ را در نظر بگیرید و قطری از دایره را رسم کنید که شامل نقطه‌ی A هست.



الف) $\widehat{DAC} = ۹۰^\circ$ و بنابراین: $\widehat{DAC} = \frac{۱}{۲}\widehat{AD}$

ب) زاویه‌ی DAB یک زاویه‌ی محاطی است. بنابراین: $\widehat{DAB} = \frac{۱}{۲}\widehat{DB}$

پ) از (الف) و (ب) داریم:

$$\widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{۱}{۲}(\widehat{DA} - \widehat{DB})$$

و بنابراین:

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.

الف) $\widehat{DAC} = 90^\circ$ و بنابراین: $\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{AD}$

ب) زاویه‌ی DAB یک زاویه‌ی محاطی است. بنابراین: $\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB}$

پ) از (الف) و (ب) داریم:

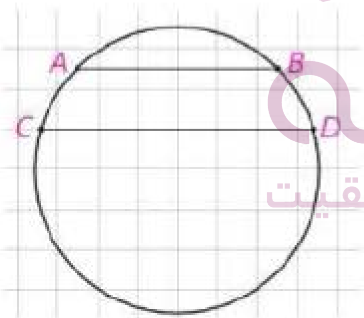
$$\widehat{DAC} + \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{DA} + \widehat{DB})$$

و بنابراین:

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

بنابراین:

قضیه: اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه.



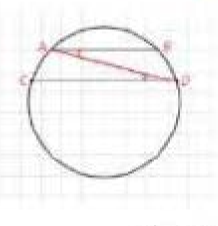
کار در کلاس صفحه‌ی ۱۵

۱- در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.

الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه اند؟

چرا؟

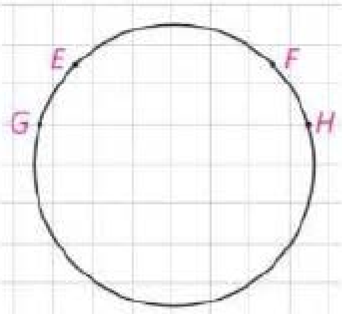
این دو زاویه بنا بر قضیه خطوط موازی با هم برابر هستند.



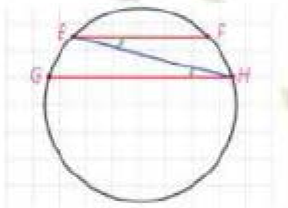
ب) کمان‌های $\widehat{BD}$ و $\widehat{AC}$ ، نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

این دو کمان روبه رو به زوایای محاطی برابر هستند، پس با یکدیگر برابرند.

۲- در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم اندازه اند.



الف) و ترهای EF و GH و پاره خط EH را رسم کنید.



ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

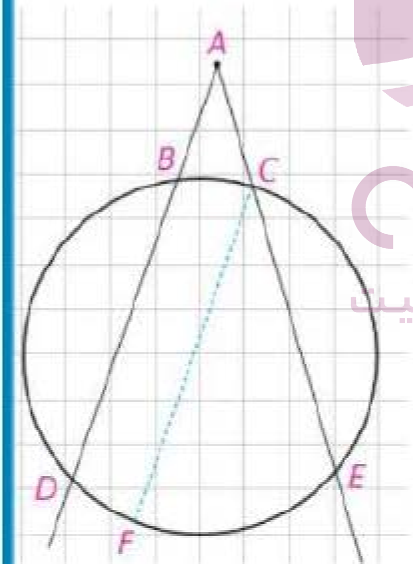
$$\overset{\frown}{EG}=\overset{\frown}{FH}\Rightarrow\frac{\overset{\frown}{EG}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{FH}}{۲}\xrightarrow{\text{زاویه محاطی}}E\hat{H}G=F\hat{E}H$$

پ) خطوط EF و GH نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

باهم موازی هستند بنا بر عکس قضیه خطوط موازی

نتیجه: دو وتر از یک دایره موازی اند، اگر و تنها اگر کمانهای محدود بین آنها مساوی باشد.

فعالیت صفحه‌های ۱۵ و ۱۶



۱- فرض کنید رأس زاویه‌ی DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده باشد و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویه‌ی مورد نظر مشخص شده باشند.

از نقطه‌ی C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی های زیر را مشخص کنید.

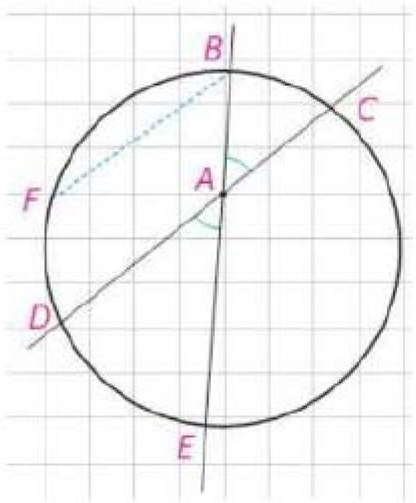
$$\widehat{DAE}=\widehat{FCE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{DF})=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC})$$

$CF \parallel AD$ و AE مورب بنا بر قضیه خطوط موازی DAE = FCE

زاویه‌ی FCE محاطی است. پس نصف کمان مقابل است یعنی $FCE=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{EF}$.

باتوجه به شکل $FCE=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{EF}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC})$

بنابر فعالیت قبل بند (۱) می‌دانیم: $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DF}$ پس داریم: $DAE=FCE=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{EF}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC})=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC})$



۲- رأس زاویه‌ی DAE مانند شکل مقابل در درون دایره می‌باشد و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.

- از نقطه‌ی B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE}=\widehat{FBE}=\frac{1}{2}\widehat{FE}=\frac{1}{2}(\widehat{FD}+\widehat{DE})=\frac{1}{2}(\widehat{BC}+\widehat{DE})$$

$BF \parallel DC$ و BE مورب بنا بر قضیه خطوط موازی DAE = FBE

زاویه‌ی FBE محاطی است. پس نصف کمان مقابل است یعنی $FBE=\frac{1}{2}\widehat{EF}$.

باتوجه به شکل $FBE=\frac{1}{2}\widehat{EF}=\frac{1}{2}(\widehat{FD}+\widehat{DE})$

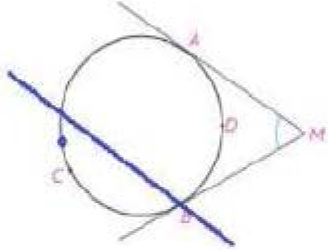
بنابر فعالیت قبل بند (۱) می‌دانیم: $\widehat{BC}=\widehat{DF}$

پس داریم: $DAE = FBE=\frac{1}{2}\widehat{EF}=\frac{1}{2}(\widehat{FD}+\widehat{DE})=\frac{1}{2}(\widehat{DE}+\widehat{DE})$

تمرین صفحه ی ۱۶ و ۱۷

۱. در شکل های زیر ثابت کنید:

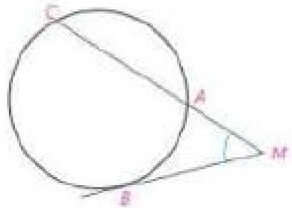
راهنمایی: از نقطه ی B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



الف) $\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{۲}$

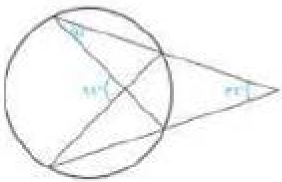
MB و مورب $AM \parallel BE \begin{cases} \hat{M} = \hat{B}_1 \\ \hat{B}_1 = \frac{۱}{۲}\widehat{BE} \end{cases} \Rightarrow \hat{M} = \frac{۱}{۲}\widehat{BE} = \frac{۱}{۲}(\widehat{ACB} - \widehat{ADB})$

ب) $\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{۲}$



MB و مورب $MC \parallel BE \begin{cases} \hat{M} = \hat{B}_1 \\ \hat{B}_1 = \frac{۱}{۲}\widehat{BE} \end{cases} \Rightarrow \hat{M} = \frac{۱}{۲}\widehat{BE} = \frac{۱}{۲}(\widehat{BE} - \widehat{CE}) \quad \hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{۲}$

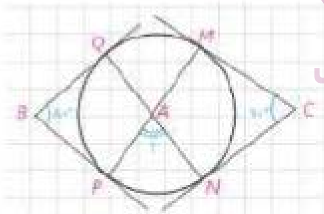
۲. در شکل مقابل اندازه ی زاویه ی α را به دست آورید.



$\begin{cases} ۹۱^\circ = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AE}}{۲} \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{AE} = ۱۸۲^\circ \\ ۳۱^\circ = \frac{\widehat{AE} - \widehat{BD}}{۲} \Rightarrow \widehat{AE} - \widehat{BD} = ۶۲^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲AE = ۲۴۴^\circ \Rightarrow \widehat{AE} = ۱۲۲^\circ$

$\widehat{BD} + ۱۲۲^\circ = ۱۸۲^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{BD}}{۲} = ۳۰^\circ$

۳. در شکل اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه ی زاویه ی $\hat{A}$ چند درجه است؟



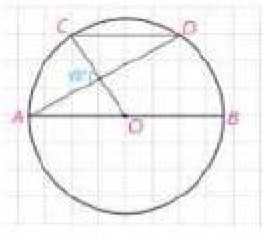
$۱)\ ۷۰^\circ = \frac{\widehat{MQPN} - \widehat{MN}}{۲} \Rightarrow \widehat{MQPN} - \widehat{MN} = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \widehat{MQ} + \widehat{QP} + \widehat{PN} - \widehat{MN} = ۱۴۰^\circ$

$۲)\ ۸۰^\circ = \frac{\widehat{PNMQ} - \widehat{PQ}}{۲} \Rightarrow \widehat{PNMQ} - \widehat{PQ} = ۱۶۰ \Rightarrow \widehat{PN} + \widehat{MN} + \widehat{MQ} - \widehat{PQ} = ۱۶۰^\circ$

$\hat{A} = \frac{\widehat{PN} + \widehat{MQ}}{۲} \Rightarrow \widehat{PN} + \widehat{MQ} = ۲\hat{A} \Rightarrow \widehat{MN} + \widehat{PN} + \widehat{PQ} + \widehat{MQ} = ۳۶۰$

$(۱\ و\ ۲) \Rightarrow ۲\widehat{MN} - \widehat{PQ} = ۲۰ \quad \widehat{MN} - \widehat{PQ} = ۱۰^\circ \quad \widehat{MN} - \widehat{PQ} + \widehat{PN} + \widehat{MQ} = ۱۰ + ۲\hat{A}$

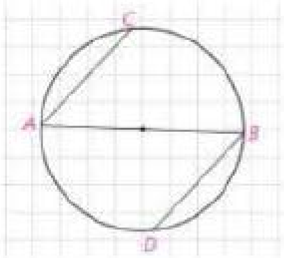
۴. در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ ، اندازه ی کمان را به دست آورید.



$= \hat{O}_1 \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{۲} = \frac{\widehat{BD}}{۲} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \quad ۷۵^\circ = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AC}}{۲} = \widehat{BD} + \widehat{AC} = ۱۵۰ \Rightarrow ۲\widehat{BD} = ۱۵۰ \Rightarrow \widehat{BD} = \hat{A}_1,$
۷۵°

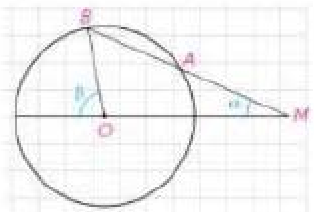
$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} + \widehat{AB} = ۳۶۰ \Rightarrow ۷۵ + \widehat{CD} + ۷۵ + ۱۸۰ = ۳۶۰ \Rightarrow \widehat{CD} = ۳۰^\circ$

۵. در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند. ثابت کنید: $AC = BD$



$$\begin{cases} CO = OD = \text{شعاع} \\ OA = OB = \text{شعاع} \\ AC \parallel BD \text{ و } CD \text{ مورب} \rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \end{cases} \Rightarrow ACO \cong BOD \Rightarrow AC = BD \text{ ض ز ض}$$

۶. دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه ی M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه ی A و B قطع کرده است و MA = R؛ نشان دهید: β = ۲α



$\beta = B + \alpha$ زاویه خارجی $\beta = ۲\alpha$ = حکم

۷. در دایره ی $C(O,R)$ ، $\widehat{AB} = ۶۰$ و $AB = ۱۰$ فاصله ی O از وتر AB را به دست آورید.

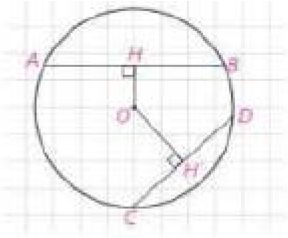
$$\frac{\text{اندازه مکان } AB}{۳۶۰} = \frac{\text{طول مکان } AB}{\text{محیط دایره}} \Rightarrow \frac{۶۰}{۳۶۰} = \frac{۱۰}{۲ \times ۳ \times ۷} \Rightarrow r = ۱۰ = OA = OB$$

$$\begin{cases} OA = OB = \text{شعاع} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = ۹۰ \\ OH = \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ AB = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow BH = AH = ۵$$

$$OA^۲ = AH^۲ + OH^۲ = ۱۰۰ = ۲۵ + OH^۲ \Rightarrow OH = ۵\sqrt{۳}$$

۸. در دایره ی $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$ (OH و OH' فاصله ی O از دو وتر AB و CD هستند)

راهنمایی: از O به B و C وصل و از قضیه ی فیثاغورس استفاده کنید.

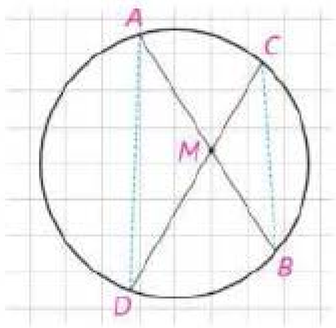


$$\begin{cases} BHO: BO^2 = BH^2 + OH^2 \\ C\acute{H}O: CO^2 = O\acute{H}^2 + C\acute{H}^2 \Rightarrow BH^2 + CH^2 = C\acute{H}^2 + O\acute{H}^2 \\ BO = CO \end{cases}$$

از رابطه ی 1 و فرض مسئله که $OH < O\acute{H}$ است نتیجه می شود که $BH < C\acute{H}$ پس در نتیجه

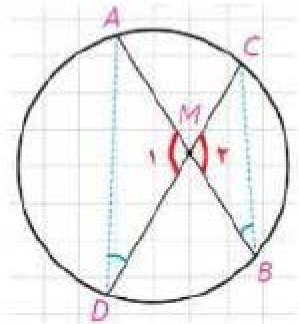
$AB > CD$ خواهد بود.

فعالیت صفحه‌ی ۱۸



۱- دو وتر AB و CD در نقطه‌ی M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBCمتشابه اند.

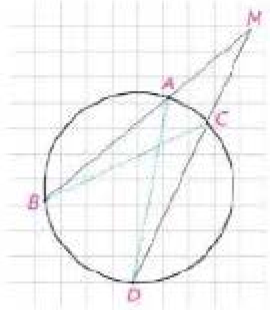


این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\begin{cases} \widehat{M}_{\text{۱}} = \widehat{M}_{\text{۲}} \\ \hat{D} = \hat{B} = \dfrac{\widehat{AB}}{\text{۲}} \Rightarrow AMD \cong CMB \end{cases}$$

ب) با توجه به تشابه دو مثلث مذکور داریم: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$

۱ و در نتیجه: AM.BM=CM.DM

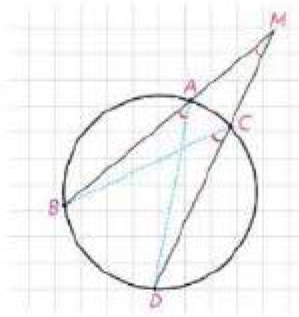


۲- خطهای شامل دو وتر AB و CD در نقطه‌ی M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) نقطه A را به D و نقطه‌ی C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MCB باهم متشابه اند.

این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{A} = \hat{C} = \dfrac{\widehat{BD}}{\text{۲}} \Rightarrow AMD \cong CMB \end{cases}$$



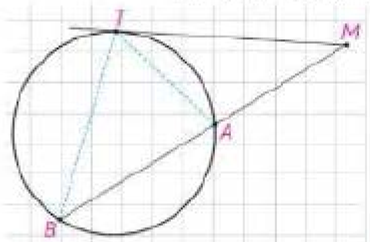
ب) با توجه به تشابه دو مثلث مذکور داریم: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$

۲ و در نتیجه: MA.MB=MC.MD

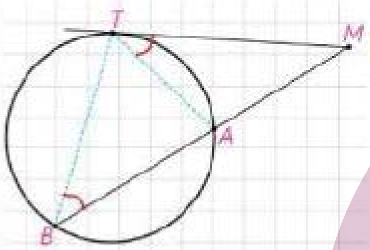
نتیجه ۱ و ۲

هرگاه وترهای AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آنگاه MA.MB=MC.MD

۳- فرض کنیم از نقطه‌ی M (خارج دایره) مانند شکل یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم.



الف) T را به B و A وصل نمایید و مشخص کنید چرا $M\hat{T}A = T\hat{B}M$



$$\begin{cases} M\hat{T}A = \dfrac{\widehat{AT}}{2} \ \text{ظلی} \\ T\hat{B}M = \dfrac{\widehat{AT}}{2} \ \text{محاطی} \end{cases} \Rightarrow M\hat{T}A = T\hat{B}M$$

ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص کنید و با توجه به این تشابه رابطه‌ی زیر را کامل نمایید.

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{M} \\ M\hat{T}A = T\hat{B}M \end{cases} \Rightarrow MTB \cong MAT$$

$$\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

و در نتیجه: $MT^2 = MA.MB$

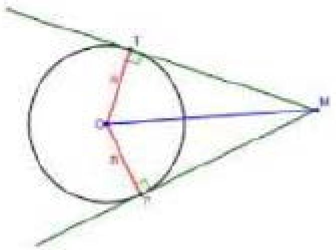
کار در کلاس صفحه‌ی ۲۰

هرگاه از نقطه M خارج دایره C(O,R) دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند، ثابت کنید:

الف) اندازه‌های دو مماس برابرند.

دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم همنهشت هستند. و بنابر اجزای متناظر MT = MT'

ب) نیم‌خط MO نیمساز زاویه TMT' است.



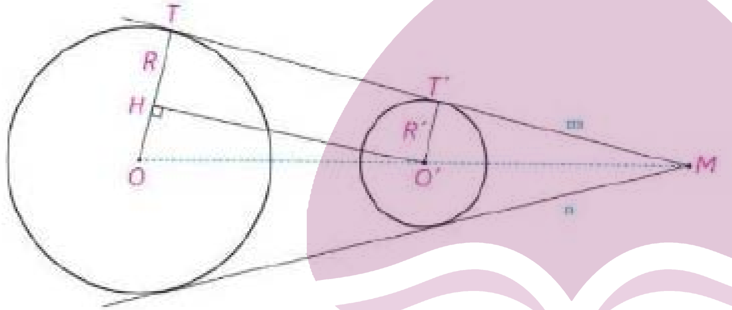
راه اول : دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم همنهشت هستند. و بنا بر اجزای متناظر $O\hat{M}T = O\hat{M}T'$

راه دوم : فاصله‌ی نقطه‌ی O از دو ضلع زاویه TMT' به یک فاصله است پس بنا بر خاصیت نیمساز زاویه نقطه‌ی O روی نیمساز این زاویه است.

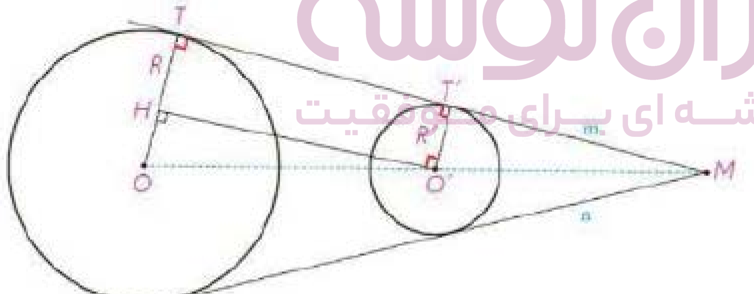
یعنی نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

فعالیت صفحه‌های ۲۱ و ۲۲

۱- فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاع‌های OT و $O'T'$ رسم شده است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O' خطی موازی خط m رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع کند.



الف) $TT'O'H$ مستطیل است؛ چرا؟



شعاع‌های OT و $O'T'$ بر خط m در نقاط T و T' عمودند و چون $O'H$ موازی خط m است پس بنابر قضیه خطوط موازی $\hat{T'} = \hat{O'} = 90°$ و $\hat{T} = \hat{H} = 90°$ بنابراین چهار ضلعی $TT'O'H$ چهار زاویه قائمه دارد پس مستطیل است.

ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$، تساوی زیر را توجیه کنید.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$OO' = d$ و $OT = R$ و $O'T' = R'$ و با توجه به بند الف $O'H = TT'$

$$OO'H = \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow O'H^2 + OH^2 = \ldots'^2 \Rightarrow O'H^2 = \ldots'^2 - OH^2 \Rightarrow O'H$$
$$= \sqrt{d^2 - (OT - OT')^2} \xrightarrow{O'H = TT',\ OT = R,\ O'T' = R'} TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

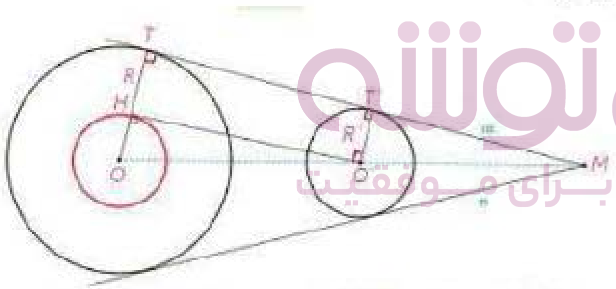
پ) با توجه به کار در کلاس قبل بگوید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع باشند، نقطه‌ی تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

فرض کنیم این دو مماس مشترک در نقطه ی M یکدیگر را قطع کنند. با توجه به بند (ب) کار در کلاس قبل $O'M$ نیمساز زاویه M است. همچنین OM هم نیمساز زاویه M است و چون هر زاویه یک نیمساز دارد در نتیجه OM و $O'M$ بر هم منطبق هستند در نتیجه نقطه‌ی تقاطع مماس هاروی خط OO' قرار دارد.

ت) به مرکز O و به شعاع $R - R'$ دایره‌ای رسم کنید. پاره خط $O'H$ برای دایره‌ی رسم شده چگونه خطی است؟

پاره خط OH بر این دایره مماس است.

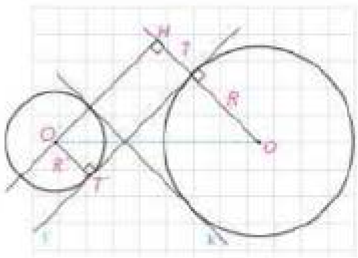
ث) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد. از آنجا که مرکزها و شعاع‌های دو دایره معلوم است، می توان دایره‌ی مطرح شده در قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛ در این صورت چگونه می‌توانید مماس TT' را بر آن رسم کرد؟



از نقطه‌ی O به H وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی (C) را در نقطه‌ی T قطع کند. سپس از این نقطه خطی موازی $O'H$ رسم می‌کنیم. این خط در نقطه‌ی T' بر دایره‌ی (C) مماس می شود.

۲- دو مماس مشترک l و k نیز بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده است مرکزهای دو دایره در دو طرف مماس مشترک‌اند. با به کار بردن قضیه فیثاغورس در $\Delta O'OH$ مانند قبلی نشان دهید:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$



با توجه به شکل چهارضلعی $THO'T'$ مستطیل است پس $TT' = OH$.

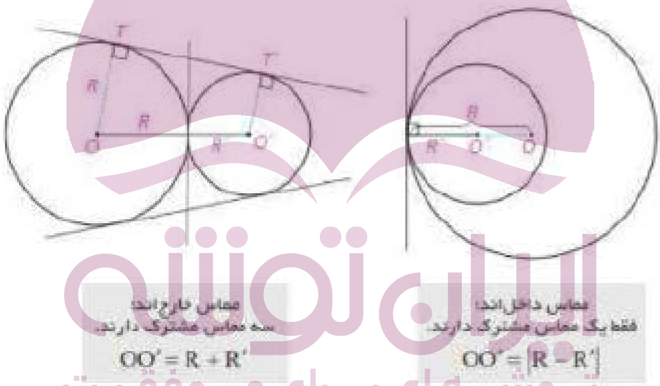
همچنین $TH = O'T' = R'$ و در نتیجه: $OH = R + R'$

$$O'OH: H = 90^\circ \Rightarrow O'H^2$$

$$= OO'^2 - OH^2 \xrightarrow{O'H=TT',\ OH=R+R',\ OO'=d} TT'$$

$$= \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

۳- دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می‌نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دو طرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می‌نامند.



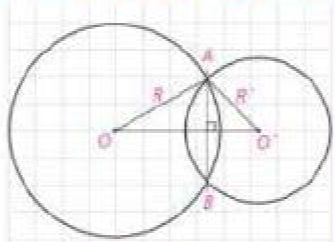
با استفاده از دستور محاسبه‌ی طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره مماس خارج، $TT' = 2\sqrt{RR'}$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \xrightarrow{d=R+R'} TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - \left(R^2 + R'^2 + 2RR'\right)}$$

$$= \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - R^2 - R'^2 + 2RR'} \Rightarrow TT' = \sqrt{4RR'} \Rightarrow TT' = 2\sqrt{RR'}$$

۴-دو دایره متقاطع. دو دایره را که فقط دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می‌نامند. در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند. و $|R-R'|<OO'<R+R'$؛ چرا؟



با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AOO' داریم:

$$1)\ OO'<R+R'$$

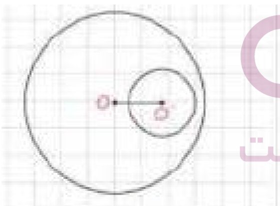
$$2)\begin{cases} R'<OO'+R \Rightarrow -OO'<R-R' \\ R<OO'+R' \Rightarrow R-R'<OO' \end{cases} \Rightarrow -OO'<R-R'<OO' \Rightarrow |R-R'|<OO'$$

$$\xrightarrow{\text{۱ و ۲}} |R-R'|<OO'<R+R'$$

پاره خط AB ، که دو سر آن روز هر دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع است. چرا پاره‌خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است؟

$OA=OB=R$ و $O'A=O'B=R'$ بنابر خاصیت عمود منصف نقاط O و O' روی عمود منصف AB قرار دارد و چون عمود منصف هر پاره‌خط یکتا است در نتیجه پاره‌خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است.

۵- دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می‌نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها
$OO'=|R-R'|$

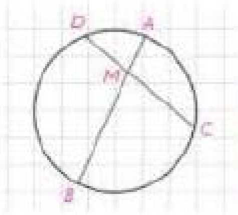


$OO'<|R-R'|$

تمرین صفحه ۲۳

۱. در دایره ی $C(O,R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتیمتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11cm$، آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟

$$\begin{cases} 18 = AM.MB \\ AM + MB = 11 \end{cases} \Rightarrow Am = 2 \quad MB = 9$$

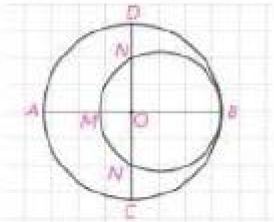


$$\begin{cases} DM.MC = AM.MB \\ DM + MC = 9 \\ \dfrac{DM}{MC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MC = 2DM \end{cases} \Rightarrow 3DM = 9 \quad DM = 3 \quad MC = 6$$

۲. از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه ی B و C قطع کرده است و $BC = 20$. طول های PB و PC را به دست آورید.

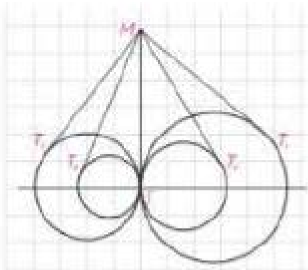
$$PA^2 = PB.PC \quad 300 = PB(PB + 20) \quad PB = 10 \quad PC = 30$$

۳. در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر برهم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$، شعاع های دو دایره را پیدا کنید.



۴. مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T برهم مماس اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم؛ ثابت کنید

$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$



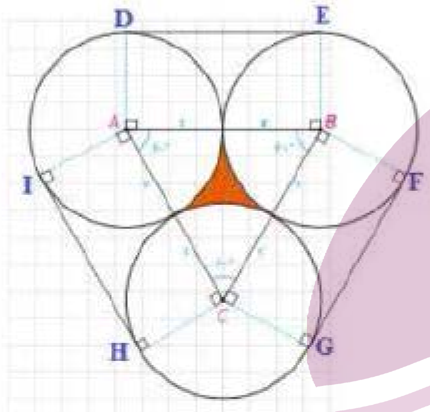
۵. طول شعاع های دو دایره ی متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی ۳√۷ و طول مماس مشترک داخلی آنها √۱۵ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

$HH' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow R - R' = 1$

$TT' = \sqrt{15} \quad OO' = d = 8 \quad HH' = 3\sqrt{7}$

$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \quad 15 = 64 - (R + R')^2 \Rightarrow R + R' = 7 \quad R = 4 \quad R' = 3$

۶. سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو برهم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله ی نخی بسته شده اند. نشان دهید طول این نخ برابر $\pi r\ 2 + 6r$.همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ محدود است.



$DE = FG = HI = 2r \quad \widehat{EF} + \widehat{GH} + \widehat{ID} =$ محیط دایره $= 2\pi r$

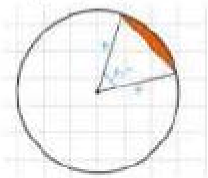
$= 3(2r) + 2\pi r = 6r + 2\pi r$ طول نخ $\quad 4r^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{h.2r}{2} = r^2\sqrt{3} \qquad S_{\text{قسمت رنگی}} = r^2\sqrt{3} - \left(3 \times \frac{1}{6}\pi r^2\right) = r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

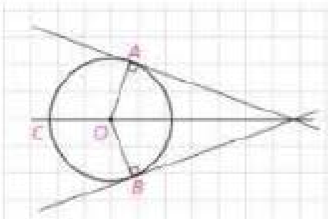
۷.طول خط المرکزین دو دایره ی مماس درونی۲ سانتی متر و مساحت ناحیه ی محدود بین آنها 16π سانتی متر مربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید.

$\pi r^2 - \pi r'^2 = 16\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow (R - R') = (R + R') = 16 \quad OO' = R - R' = 2 \quad 2(R + R') = 16 \Rightarrow R + R' = 8 \quad R - R' = 2 \quad R = 5 \quad R' = 3$

۸. مطابق شکل دایره به شعاع ۴ ، مساحت ناحیه ی سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام دارد.



$S_{\text{دایره}} = 16\pi \Rightarrow \quad$ دایره $\frac{1}{6}S = \frac{8}{3}\pi \quad \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2\sqrt{3} \quad S_{\text{یک مثلث}} = \frac{2\sqrt{3}\times 4}{2} = 4\sqrt{3}$



فعالیت صفحه‌های ۲۴ و ۲۵

فرض کنید دایره‌ی C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.

الف)

۱-پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اضلاع با دایره وصل می‌کند رسم کنید و آنها را OA و OB بنامید.

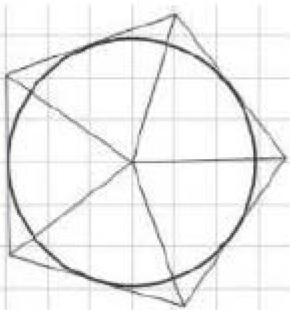
۲-پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی است؟

شعاع‌های دایره‌اند.

۳-فاصله‌ی نقطه‌ی O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟

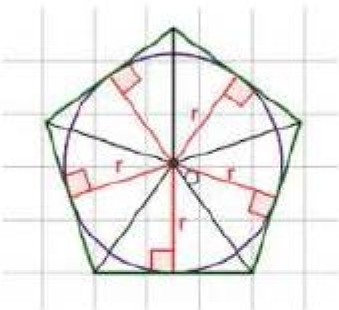
باهم برابرند. زیرا شعاع نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

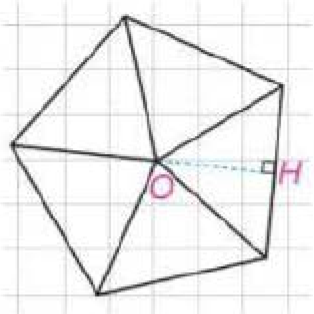
۴-با توجه به (۲) و (۳) فاصله‌ی مرکز دایره از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و بنابراین نقطه‌ی O روی نیمساز زاویه است.



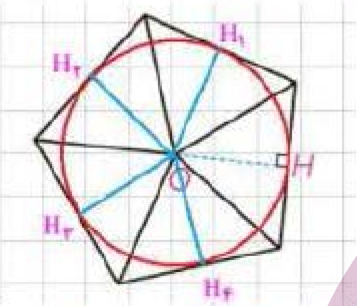
۵-فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چند ضلعی محاط شده باشد. چرا مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی چند ضلعی است؟

بنا به تعریف چند ضلعی محاطی ، اضلاع چند ضلعی بر دایره مماس هستند و می‌دانیم شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است. پس این شعاع ها همان فاصله ی مرکز دایره از اضلاع چند ضلعی هستند و همگی با هم برابرند. بنا بر خاصیت نیمساز مرکز این دایره روی نیمساز هر یک از زاویه‌های داخلی چند ضلعی است به عبارتی مرکز دایره محل برخورد نیمساز های داخلی چند ضلعی است.





ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای زوایای داخلی آن در نقطه‌ی O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره‌خط عمود به یک ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه نوع دایره‌ای است؟



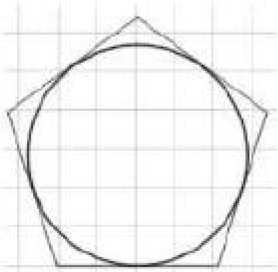
نقطه‌ی O روی نیمساز زوایای داخلی است پس بنا بر خاصیت نیمسازها

$$OH = OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$$

همچنین OH_1 و OH_2 و OH_3 و OH_4 همگی بر اضلاع عمود هستند. در نتیجه وقتی دایره‌ای به شعاع OH رسم می‌کنیم شعاع ها بر اضلاع عمود هستند پس اضلاع بر دایره در نقطه‌ی تماس‌شان عمودند یعنی دایره بر اضلاع چندضلعی مماس است در نتیجه بنا به تعریف دایره محاطی است.

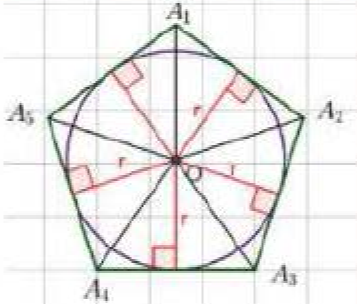
بنابراین؛ یک چند ضلعی. محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

کار در کلاس صفحه‌ی ۲۵



اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط 2P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید: S=rp

راهنمایی: کافی است مساحت n مثلث را محاسبه، و با هم جمع کنید.



$$S = \frac{1}{2}r.A_1A_2 + \frac{1}{2}r.A_2A_3 + \frac{1}{2}r.A_3A_4 + \frac{1}{2}r.A_4A_5 + \cdots + \frac{1}{2}r.A_{n-1}A_n = \frac{1}{2}r(A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$$

$$= \frac{1}{2}r \times 2P \Rightarrow S = rp$$

فعالیت صفحه‌ی ۲۶

در شکل داریم $S(ABC) = S(OAC) + S(OAB) - S(OBC)$ اگر مساحت ΔABC را با S نشان دهیم،

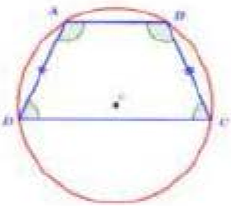
$S = \frac{1}{2}r_a(b+c-a)$. اگر محیط مثلث را با $2p$ نشان دهیم، داریم، $2p = a + b + c$؛ پس

$2p - 2a = a + b + c - 2a = b + c - a$ در نتیجه $S = r_a\,(P-a)$ و بنابراین $r_a = \frac{S}{P-a}$ به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:

$$r_b = \frac{S}{P-b} \qquad r_c = \frac{S}{P-c}$$

کار در کلاس صفحه‌ی ۲۸

با توجه به این قضیه‌ها بررسی کنید که چهار ضلعی‌های ذوزنقه، کایت، متوازی الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع کدام محاطی، و کدام محیطی است. ذوزنقه متساوی الساقین چطور؟



ذوزنقه در حالت کلی محاطی نیست زیرا زوایای مقابل آن مکمل نیستند. اما اگر ذوزنقه متساوی الساقین باشد داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow$$ محاطی است $ABCD$ ذوزنقه

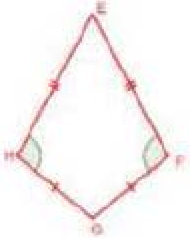
یک ذوزنقه در حالت کلی محیطی نیست اما می‌تواند محیطی باشد به شرط آن‌که نیمسازهای داخلی همرس باشند.

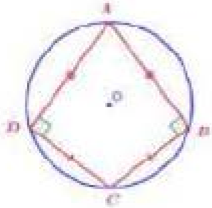
مانند شکل مقابل:

یک کایت در حالت کلی محاطی نیست ولی اگر دو زاویه مقابل آن قائمه باشند می‌تواند محاطی باشد.

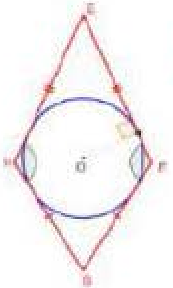
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ \xrightarrow{\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ} \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

پس بنابر قضیه‌ی کایت $ABCD$ محاطی است.





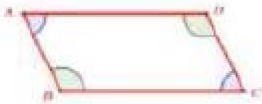
یک کایت حتما محیطی است زیرا مجموع اضلاع مقابل با هم برابرند.



$$\begin{cases} EF=EH \\ GH=GF \end{cases} \Rightarrow EF+GH=EH+GF$$

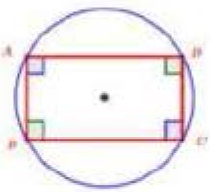
یک متوازی الاضلاع در حالت کلی محاطی نیست؛ زیرا:

زاویه های مقابل نمی‌توانند مساوی ۱۸۰° باشند.

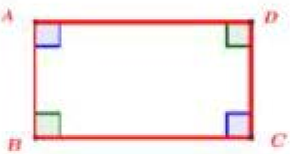


$$\hat{A}+\hat{C}<۱۸۰^\circ ,\hat{B}+\hat{D}>۱۸۰^\circ$$

یک متوازی الاضلاع در حالت کلی محاطی نیست؛ زیرا اضلاع مقابل دو به دو برابرند و مجموع آنها با هم برابر نیست با توجه به شکل فوق: $AB+DC<AD+BC$.



یک مستطیلی محاطی است؛ زیرا مجموع زاویه های مقابل همیشه برابر با ۱۸۰° است.



یک مستطیل محیطی نیست زیرا اضلاع مقابل برابرند و مجموع آن ها باهم برابر نیست با توجه به شکل:

$$AB+DC<AD+BC$$

یک لوزی محاطی نیست؛ زیرا مجموع زاویه های مقابل ۱۸۰° نیست

یک لوزی محیطی است؛ زیرا مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.

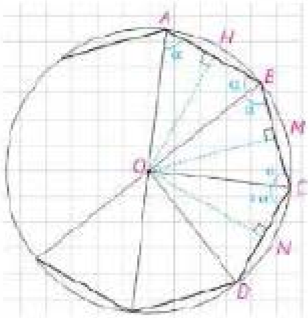
یک مربع هم می‌تواند محیطی و هم محاطی باشد. زیرا هم مجموع زاویه های مقابل ۱۸۰° است و هم مجموع اضلاع مقابل با هم برابر هستند.

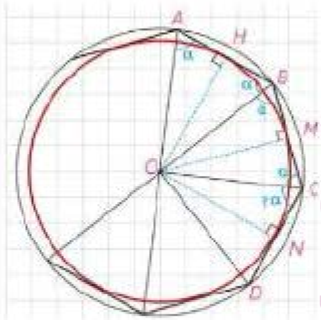
فعالیت صفحه‌ی ۲۹

فرض کنید اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم ... ABCD، ۲α باشد: عمود منصف‌های دو ضلع AB و BC را رسم می کنیم.

فرض کنیم در O متقاطع اند. بنابراین $OA = OB = OC$

پس $\Delta OAB \cong \Delta OBC$ چرا؟





دو مثلث به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند.

$\widehat{ABC} = \widehat{OBA} + \widehat{OBC} \xrightarrow{\widehat{OBA}=\widehat{OBC}} ۲\alpha = ۲\widehat{OBA} \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \alpha$

اکنون از D به O وصل می‌کنیم. چرا اندازه $\widehat{OCD}$ برابر α است؟ چرا $\Delta OCD \cong \Delta OCB$ و $OA = OB = OC = OD$؟

$\widehat{BCD} = \widehat{OCB} + \widehat{OCD} \Rightarrow ۲\alpha = \alpha + \widehat{OCD} \Rightarrow \widehat{OCD} = \alpha$

$\begin{cases} OC = OC \\ BC = DC \\ \widehat{OCD} = \widehat{OCB} \end{cases} \Rightarrow OCD \cong OCB \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} OD = OB$

$\begin{cases} OD = OB \\ OA = OB = OC \end{cases} \Rightarrow OA = OB = OC = OD$

با ادامه این روند داریم :

$OA = OB = OC = OD = \cdots$ و $OH = ON = OM = \cdots$ بنابراین، O از همه‌ی رأس ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که از تمام رأس های n ضلعی منتظم می‌گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که بر تمام ضلع‌های n ضلعی منتظم مماس است.

تمرین صفحه ۲۹

۱. ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

$$\begin{cases}\hat{A}=\dfrac{\widehat{BCD}}{2}\\ \hat{C}=\dfrac{\widehat{BAD}}{2}\end{cases}\quad \begin{cases}\hat{B}=\dfrac{\widehat{ADC}}{2}\\ \hat{D}=\dfrac{\widehat{ABC}}{2}\end{cases}\Rightarrow \hat{B}+\hat{D}=\dfrac{ADC+ABC}{2}=\dfrac{360}{2}=180$$

زاویه های مقابل مکمل هستند پس چهارضلعی محاطی است.

۲. مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را به دست آورید که در دایره ای به شعاع R محاط شده باشد.

$$\sin 30=\frac{h}{R}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{h}{R}\Rightarrow h=\frac{R}{2}$$

$$\cos 30=\frac{a}{R}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{R}\Rightarrow a=\frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{متساوی الاضلاع}}=3\times\frac{1}{2}\times R\sqrt{3}\times\frac{R}{2}=\frac{3R\sqrt{3}}{4}$$

۳. ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه ی مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره ی محیطی مثلث قطع می کنند.

۴. یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

در ذوزنقه محاطی $\Rightarrow 2\alpha+2\beta=180\Rightarrow\alpha+\beta=90$

مثلث $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{h_1}{R}\\ \cos\alpha=\dfrac{a_1}{R}\end{cases}$ ارتفاع $=R\sin\alpha$ قاعده $=2R\cos\alpha$ $\quad S=R^2\sin\alpha\cos\alpha$

۵- اگر r_a ، r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

$$r_a=\frac{S}{P-a}\qquad r_b=\frac{S}{P-b}\qquad r_c=\frac{S}{P-c}$$

$$R=\frac{S}{P}=\frac{2S}{a+b+c}$$

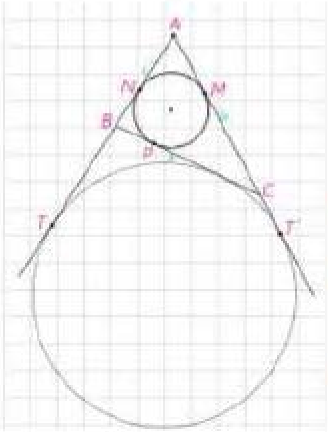
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}=\frac{3P-(a+b+c)}{S}=\frac{P}{S}=\frac{1}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a h_b و h_c اندازه های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

$$\begin{cases}h_a=r_a\\ h_b=r_b\\ h_c=r_c\end{cases}$$

طبق قسمت اول سوال حل می شود.



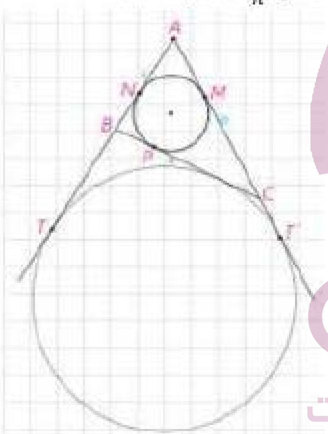
۶. اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن N, M و P باشند و T و T̂ نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:

$Am = AN = P - A$

$BN = BP = P - B, CM = CP = P - C$

$AT = A\hat{T} = P$

۷. یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلعی های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آنگاه $AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$ و $CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$



$$\begin{cases} CD = CH + HD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n} \\ OB = OM = OA = r \\ AM = MB \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{OM} = \frac{MB}{r} \Rightarrow MB = r\tan\frac{۱۸۰}{n} \\ AB = AM + MB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n} \end{cases}$$

$$\sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{HD}{r} \Rightarrow HD = CH = r\sin\frac{۱۸۰}{n}$$

۸. شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته ایم. الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.

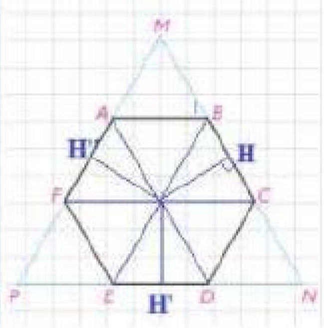
زاویه های ۶ ضلعی ۱۲۰ درجه هستند از قانون زوایای نیم صفحه در می یابیم که زوایای مثلث ABM و DNC و FEP ۶۰ درجه هستند بنابراین مثلث MNP متساوی الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

$$\text{مساحت شش ضلعی} = ۶ \times \frac{h \times ۲a}{۲} = ۶ha$$

$$MNP \text{ مساحت مثلث} = \frac{۳h \times ۶a}{۲} = ۹ha \qquad \frac{\text{مساحت شش ضلعی}}{S_{MPN}} = \frac{۶ha}{۹ha} = \frac{۳}{۲}$$

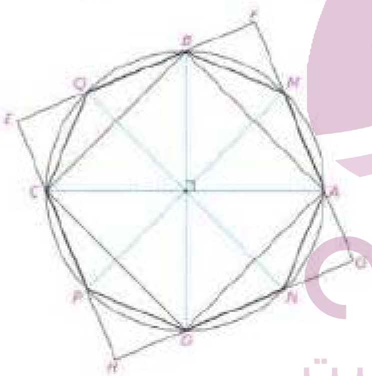
ب) از نقطه ی دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH، TH́ و TH″ را به ترتیب بر ED, BC و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه ی پایه ی ۱ می دانید، مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟



ت) مجموع مساحت های مثلث های TDE, TBC و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD} = \frac{S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF}}{S_{MNP}} = \frac{۳ \times h \times ۳a}{۲ \times ۹ha} = \frac{۱}{۲} =$$

۹- دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می کنیم؛ چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است. چرا؟ عمود منصف های ضلع های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.

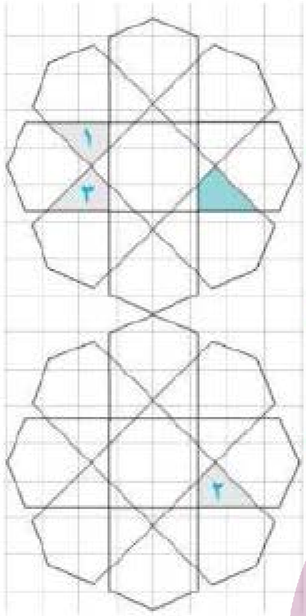


$ABCD$ در دایره محاط است قطرهایش برهم عمود هستند و زوایای رو به رو ی آن مکمل است پس یک مربع است.

چون همه ی عمود منصف ها همدیگر را در شعاع دایره قطع کرده اند و هم ضلعی به وجود آمده محاطی است و اندازه ی زوایا همه با هم برابر نصف مکان روبه روی خود هستند این چند ضلعی منتظم می باشد.

فعالیت صفحه ۳۴

۱- به تصویر روبه‌رو دقت کنید.



اگر چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده بدانیم:

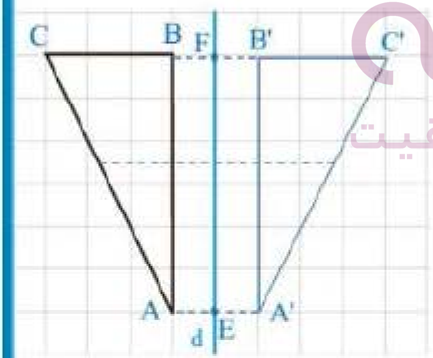
الف) کدام چهارضلعی، انتقال یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده است؟ چهارضلعی ۲ انتقال یافته چهارضلعی رنگ شده است.

ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ شده است؟ چهارضلعی ۳ بازتاب چهارضلعی رنگ شده است.

پ) کدام شکل، دوران یافته‌ی شکل رنگ شده است؟ چهارضلعی ۱ دوران یافته چهارضلعی رنگ شده است.

۲- الف) بازتاب شکل روبه‌رو را نسبت به خط d رسم کنید.

(توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به پاره‌خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟



ابتدا از هر رأس مثلث ABC بر خط d یک خط عمود رسم می‌کنیم سپس به همان اندازه خط عمود را امتداد می‌دهیم تا تصویر آن رأس را بدست آوریم. بنابراین $BF = FB'$ ، $AE = EA'$ و $CF = FC'$. حال نقاط بدست آمده را به هم وصل می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC است. فاصله هر نقطه تا تصویرش توسط d نصف شده است، بنابراین خط d عمودمنصف پاره‌خطی است که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟

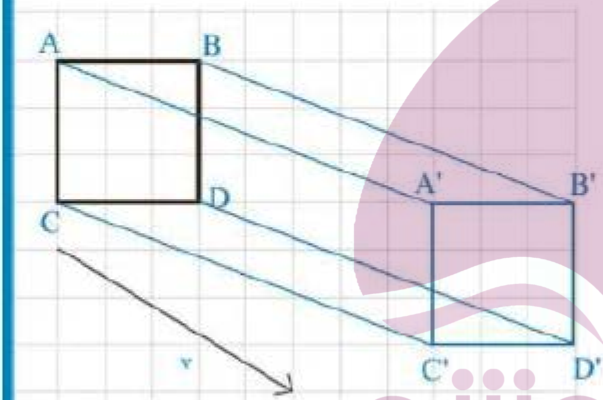
اندازه‌ها را چطور؟ بله، این تبدیل موقعیت شکل را تغییر می‌دهد ولی اندازه‌ها ثابت می‌ماند و تغییر نمی‌کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟ خیر. زیرا شیب خط CA و C'A' که پاره‌خط متناظر آن است برابر نیست.

ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟

اگر خطی که می‌خواهیم آن را بازتاب دهیم موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد آنگاه شیب خط‌ها حفظ می‌شوند. در شکل قسمت الف می‌بینیم که پاره‌خط BC قسمتی از خط عمود بر d است و تصویر این پاره‌خط نیز روی همان خط قرار می گیردبنابراین شیب خط BC برابر شیب خط $B'C'$ است و اگر خط مورد نظر موازی محور بازتاب باشد مانند خط BA، شیب آن حفظ می‌شود و تصویر آن نیز موازی محور بازتاب است.

۳- الف) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید).



همه رأس‌های مربع را باید با توجه به بردار v، ۵ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین انتقال بدهیم تا تصویر هر رأس را بدست آوریم. با توجه شکل همه‌ی بردارهایی که هر نقطه را تصویرش برده است برابر بردار v هستند. نقاط تصویر را به هم وصل می‌کنیم. مربع $A'B'C'D'$ انتقال یافته مربع $ABCD$ تحت بردار V است.

در این حالت پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند موازیند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟

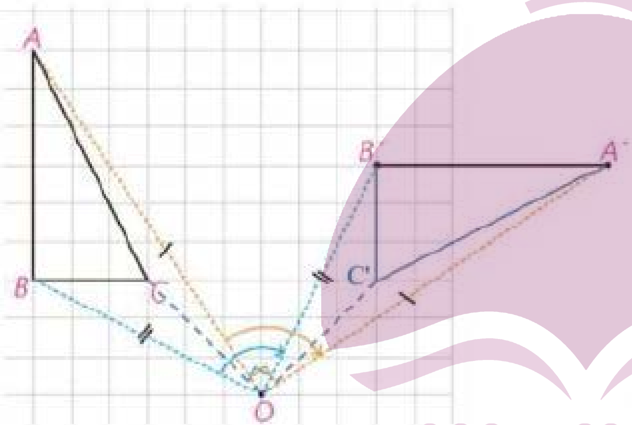
اندازه‌ها را چطور؟ این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی‌کند اما اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟ بله. تحت این تبدیل شیب‌ها حفظ می‌شوند و تغییر نمی‌کنند.

ت) آیا در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می‌شود؟ بله. تحت این تبدیل، زاویه‌ها در شکل اولیه و تصویر آن حفظ می‌شود.

۴- در سال‌های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازه‌ی زاویه‌ی α، کافی است هر نقطه از شکل، مثل نقطه‌ی A را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم، و روی ضلع دیگر این زاویه پاره‌خطی به اندازه‌ی OA جدا کنیم تا نقطه‌ی 'A به دست آید.

می‌خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O و ۹۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B را دوران داده‌ایم.



الف) به همین ترتیب تصویر نقطه‌ی C را پیدا، و شکل را کامل کنید.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟

اندازه‌ها را چطور؟ این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی‌کند ولی اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط تصویر آن برابر است؟

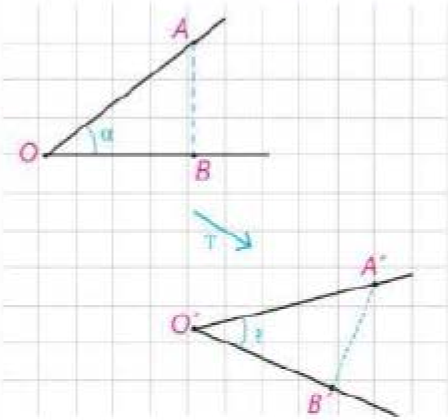
این تبدیل، شیب را حفظ نمی‌کند بنابراین شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط تصویر آن برابر نیست.

ت) آیا می‌توانید زاویه‌ی دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را حفظ کند؟

دوران تحت زاویه‌های ۰، ۱۸۰ و ۳۶۰ درجه شیب خط حفظ می‌شود.

فعالیت صفحه ۳۶

می‌خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولپا اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند.



فرض کنید T تبدیلی طولپاست.

و داریم:

$T(A) = A'$

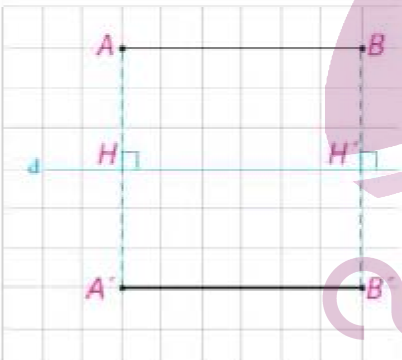
$T(B) = B'$

$T(O) = O' \quad , \quad A\hat{O}B = \alpha$

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ OA = O'A' \\ OB = O'B' \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{O'A'B'} \Rightarrow \begin{cases} A\hat{O}B = A'\hat{O'}B' = \alpha \\ \hat{A} = \hat{A'} \\ \hat{B} = \hat{B'} \end{cases}$$

فعالیت صفحه ۳۸

می‌خواهیم با استدلال دقیق‌تری نشان دهیم بازتاب، تبدیل طولپا است. حالت‌های مختلف یک پاره‌خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم که اندازه‌ی پاره‌خط با اندازه‌ی تصویر آن برابر است.



الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط d موازی است. بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم.

چرا $A'B'$ با خطوط d و AB موازی است؟

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} = ۹۰ \Leftarrow AB \| d \text{ و } AH \text{ مورب} \\ \hat{B} = \hat{H'} = ۹۰ \Leftarrow AB \| d \text{ و } AH' \text{ مورب} \end{cases} \Rightarrow ABH'H \text{ مستطیل است}$$

می‌دانیم که چهارضلعی که همه زوایای آن قائمه باشند مستطیل است و در هر مستطیل اضلاع مقابل با هم برابر هستند

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} AH = BH' \\ A'H = H'B' \end{cases} \Rightarrow AA' = BB' \quad \begin{cases} AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{cases} \Rightarrow AA' \| BB' \quad \Rightarrow ABB'A' \text{ متوازی اضلاع} \Rightarrow A'B' \| AB$$

و همچنین داریم:

$$\begin{cases} A'B' \parallel AB \\ AB \parallel d \end{cases} \Rightarrow A'B' \parallel d$$

بنابراین اضلاع روبه‌روی هم موازی هستند و زاویه‌ها قائمه هستند.

پس چهارضلعی $ABB'A'$ یک مستطیل است و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که اضلاع روبه‌رو، دو به دو هم‌اندازه‌اند؛ یعنی: $AB = A'B'$.

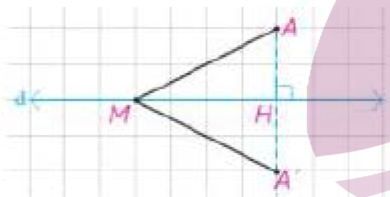
ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره‌خط داده شده روی خط بازتاب باشد.

(اگر هر دو نقطه‌ی ابتدا و انتهای پاره‌خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدیهی است؛ چرا؟)

چون در این حالت بازتاب پاره‌خط AM بر روی خط d و بر روی خودش منطبق می‌شود بنابراین:

$$\begin{matrix} S(M) = M \\ S(A) = A \end{matrix} \Rightarrow AM = AM$$

آیا می‌توانید به کمک هم نهشتی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA=MA'$ ارائه کنید؟



$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = A'H \\ MH = MH \text{ ضلع مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MA'H}$$

بنابراین اجزاء متناظرشان برابرند یعنی:

$MA = MA'$

$A\hat{M}H = A'\hat{M}H$

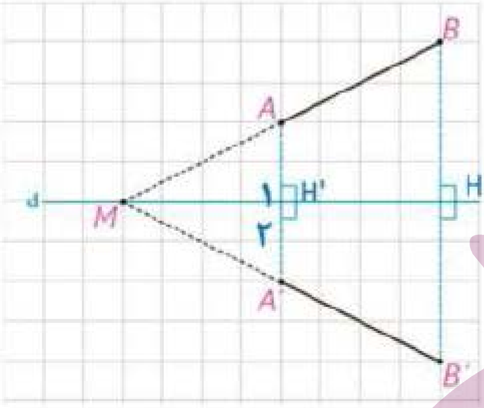
$\hat{A} = \hat{A'}$

آیا می‌توانید این تساوی را به روش دیگری نشان دهید؟ (از خاصیت عمود منصف یک پاره‌خط کمک بگیرید.)

چون خط d عمودمنصف AA' است پس هر نقطه روی خط d مانند M از دو سر پاره‌خط AA' به یک فاصله است بنابراین: $MA=MA'$

پ) در حالتی که پاره‌خط AB با خط بازتاب d، نه موازی و نه متقاطع باشد. پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در نقطه‌ی M قطع کند.

نقطه B' بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا، و پاره‌خط MB' را رسم می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که تصویر نقطه A نیز روی خط MB' واقع می‌شود؛ چرا؟ با توجه به قسمت (ب) داریم: $MB=MB'$ بنابراین مثلث BMB' متساوی‌الساقین است و چون خط d عمودمنصف BB' است بنابراین بنابر قضایای مربوط به مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه BMB' است یعنی: $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ باید نشان دهیم A' تصویر نقطه A نسبت به محور بازتاب d است یعنی:



$$AH'=A'H' \quad \text{و} \quad \hat{H'}_1=\hat{H'}_2=90^\circ$$

بنابه قانون خطوط موازی چون $AA'\parallel BB'$ و خط d مورب است بنابراین:

$$\hat{H'}_1=\hat{H'}_2=90^\circ$$

$$\begin{cases}\hat{H'}_1=\hat{H'}_2=90^\circ\\ \hat{M}_1=\hat{M}_2\\ MH'=MH' \quad \text{ضلع مشترک}\end{cases} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \overset{\Delta}{MH'A}\cong\overset{\Delta}{MH'A'} \Rightarrow \begin{cases}AH'=A'H'\\ \hat{A}=\hat{A'}\end{cases}$$

حال داریم:

$$\begin{cases}AB=MB-MA\\ A'B'=MB'-MA'\\ MB=MB' \text{ و } MA=MA' \quad \text{با توجه به قسمت ب}\end{cases} \Rightarrow AB=A'B'$$

ت) چرا در حالتی که پاره‌خط AB خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را نقطه A' می‌نامیم.

پاره‌خط MA' را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه B' هم بر امتداد MA' واقع است؛ چرا؟

با توجه به قسمت (ب) بازتاب پاره‌خط MH و MH' بر روی خط d و بر روی خودش منطبق می‌شود و اگر از نقطه A خطی عمود بر d رسم کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم به نقطه A' می‌رسیم و همین‌طور برای نقطه B نیز تکرار می‌کنیم تا به نقطه B' برسیم. نشان می‌دهیم:

$$\begin{cases} MH = MH \text{ ضلع مشترک} \\ BH = B'H \\ H_1 = H_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{MHB} \cong \overset{\Delta}{MHB'} \Rightarrow MB = MB' \quad (1)$$

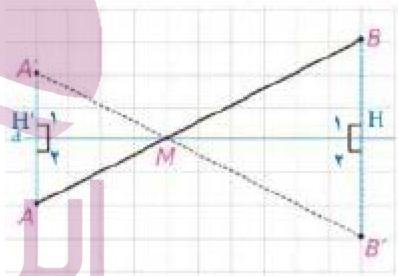
$$\begin{cases} MH' = MH' \text{ ضلع مشترک} \\ AH' = AH' \\ H'_1 = H'_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{MH'A} \cong \overset{\Delta}{MH'A'} \Rightarrow MA = MA' \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1)\text{و}(2)} \begin{cases} MA = MA' \\ MB = MB' \end{cases} \xRightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} MA + MB = MA' + MB' \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین MA بر MA' و MA بر MB' منطبق است.

حال داریم:

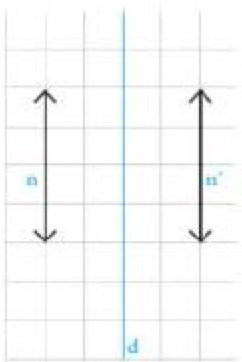
$$\begin{cases} AB = AM + MB \\ A'B' = A'M + B'M \\ MB = MB' \text{ و } AM = A'M \text{ با توجه به قسمت ب} \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$



فعالیت صفحه ۳۹

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

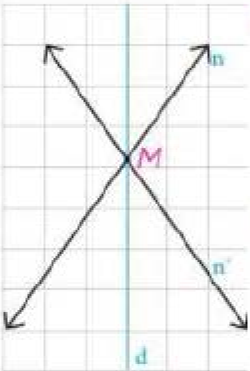
مسئله را برای دو حالت کلی در نظر می‌گیریم: وقتی خط داده شده با خط بازتاب موازی باشد و وقتی با آن موازی نباشد.



الف) اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط n' می‌نامیم. خطوط n و n' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟

می‌دانیم که خط n موازی محور بازتاب یعنی d است. حال پاره‌خطی دلخواه روی خط n در نظر می‌گیریم. بنا به قسمت (الف) فعالیت قبل، تصویر پاره‌خط AB نسبت به محور بازتاب پاره‌خط $A'B'$ است که با خط d موازی است و از طرفی خط n' تصویر خط n است. بنابراین پاره‌خط $A'B'$ روی خط n' قرار دارد. بنابراین خط n' با خط d موازی است در نتیجه n' موازی n است.

آیا در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ می‌کند؟



در حالتی که دو خط موازی باشند اگر دارای شیب باشند، شیب خط حفظ می‌شود. (اگر خطی بدون شیب باشد تصویر آن نیز بدون شیب خواهد بود.)

ب) اگر خط n با خط بازتاب d موازی نباشد، خط‌های d، n و n′ در نقطه‌ای مثل M متقاطع می‌شوند؛ پس n و n′ موازی نیستند و در این حالت بازتاب، شیب خط را حفظ نمی‌کند

بنابراین؛

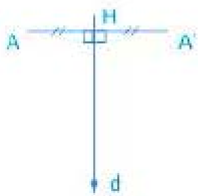
در حالت کلی، بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند.

کار در کلاس صفحه ۴۰

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید:

الف) وقتی A′ بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A′ نسبت به خط d، کدام نقطه است؟ A **چرا؟**

می‌دانیم که خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' است. بنابراین $AH=A'H$. در نتیجه اگر عمودی از A' بر خط d رسم کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم به نقطه A می‌رسیم.



ب) قرینه‌ی قرینه‌ی هر نقطه چیست؟ خود آن نقطه است.

در واقع: $S(S(A)) = S(A') = A$ **و به زبان ساده‌تر** $(A')' = A$

پ) در هر بازتاب تبدیل یافته‌ی یک مثلث، یک مثلث **است که با مثلث اولیه** همنهشت **است.**

ت) در حالتی که پاره‌خط AB نسبت به خط بازتاب موازی **باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.**

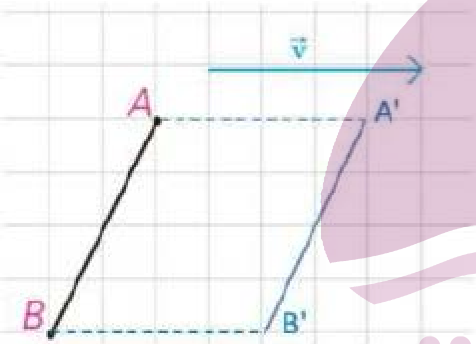
ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافته‌ی تمام نقاط روی خط، روی خط d است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب بیشمار است.

فعالیت صفحه ۴۱

۱- می‌خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولپاست.

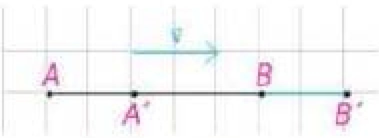
الف) اگر پاره‌خط دلخواه AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد، تبدیل یافته‌ی AB را با بردار $\vec{v}$ رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید: $AB=A'B'$.

راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

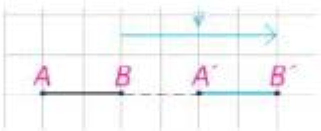


اگر نقطه A را چهار واحد به سمت راست انتقال دهیم نقطه A' بدست می‌آید، بنابراین طول بردار AA' با طول بردار v برابر است. یعنی $\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$ و موازی نیز هستند. و به همین ترتیب اگر نقطه B را چهار واحد به سمت راست انتقال دهیم نقطه B' بدست می‌آید، بنابراین $\overrightarrow{BB'}=\vec{v}$ و موازی هم هستند. پس $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ و $AA' \parallel BB'$ بنا به راهنمایی داده شده چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه: $AB=A'B'$

ب) اگر پاره‌خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره‌خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید: $AB=A'B'$.



$$\begin{cases} AB = AA' + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \\ AA' = BB' \text{ طبق تعریف انتقال} \end{cases} \Rightarrow AB = A'B' \qquad (۱)$$



$$\begin{cases} AB = AA' - BA' \\ A'B' = BB' - BA' \\ AA' = BB' \text{ طبق تعریف انتقال} \end{cases} \Rightarrow AB = A'B' \qquad (۲)$$

تذکر: در حالتی که طول بردار v با پاره‌خط AB برابر است به کمک هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

بنابراین:

قضیه: در هر انتقال، اندازه‌ی هر پاره‌خط و اندازه‌ی تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه‌ی P که $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$.

۲- در هریک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

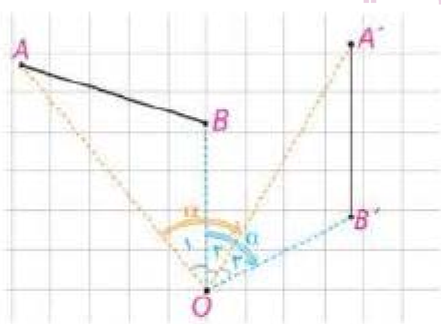
در قسمت (الف) نتیجه گرفتیم $AA'B'B$ متوازی الاضلاع است، بنابراین $AB=A'B'$ و $AB||A'B'$ در نتیجه شیب خط حفظ شده است. در قسمت (ب) و (پ) هر پاره‌خط و تصویر آن بر روی یک خط قرار داشتند. بنابراین شیب آن‌ها حفظ شده است.

فعالیت صفحه ۴۲

می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیل طولپاست.

برای دوران دادن هر پاره‌خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A′ و B′ حاصل شود. پاره‌خط A′B′ را رسم می‌کنیم.

مسئله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم:



الف) مرکز دوران O بر پاره‌خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه‌ی دوران از زاویه‌ی $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد.

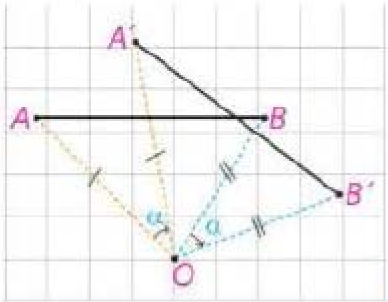
با توجه به شکل $O_۱ + O_۲ = O_۳ + O_۲ = \alpha$

پس می‌توان مدعی شد که $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ $(O_۱ = O_۳)$

به کمک همنهشتی دو مثلث OAB و OA′B′ نشان دهید AB و A′B′ هم‌اندازه‌اند.

$$\begin{cases} OA = OA' & \text{بنا به تعریف دوران} \\ OB = OB' & \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' & \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{A'OB'} \Rightarrow AB = A'B'$$

ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره‌خط AB واقع نباشد ولی زاویه‌ی دوران از زاویه‌ی $\widehat{AOB}$ کمتر باشد، باز هم تساوی $AB = A'B'$ برقرار است.

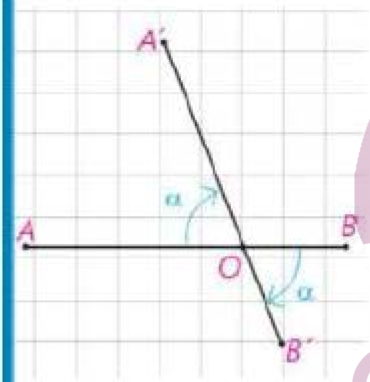


تذکر: در حالتی که $\widehat{AOB}$ با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} A\hat{O}B = \alpha + A'\hat{O}B \\ A'\hat{O}B' = A'\hat{O}B + \alpha \end{cases} \Rightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$$

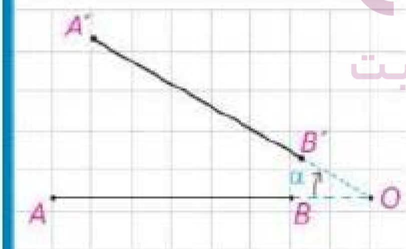
بنابراین:



$$\begin{cases} OA = OA' & \text{بنا به تعریف دوران} \\ OB = OB' & \text{بنا به تعریف دوران} \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' & \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{A'OB'} \Rightarrow AB = A'B'$$

پ) اگر نقطه‌ی O روی پاره‌خط AB باشد:

$$\begin{cases} AB = AO + OB \\ A'B' = A'O + OB' \\ AO = A'O \text{ و } OB = OB' \quad \text{طبق تعریف دوران} \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$



ت) به طریق مشابه نشان دهید اگر نقطه‌ی O روی امتداد پاره‌خط AB باشد، حکم برقرار است.

$$\begin{cases} AB = AO - OB \\ A'B' = A'O - OB' \\ AO = A'O \text{ و } OB = OB' \quad \text{طبق تعریف دوران} \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین:

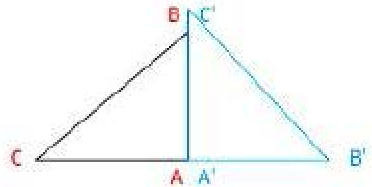
قضیه: در هر دوران، اندازه‌ی هر پاره‌خط و تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیل طولپا است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$.

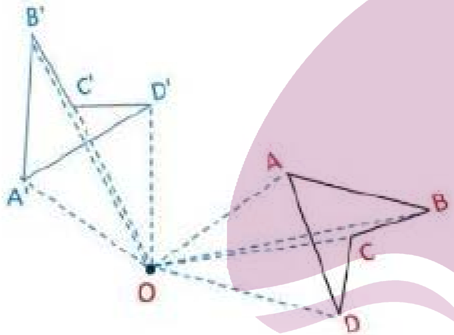
کار در کلاس صفحه ۴۳

دوران یافته‌ی هر شکل را رسم کنید.

الف) دوران به مرکز A و با زاویه‌ی 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت:



ب) دوران به مرکز O و با زاویه‌ی 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت:



تمرین صفحه ی ۴۴

۱. در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم اندازه اند.

اگر پاره خط AB در یک طرف خط بازتاب باشد. امتداد خط AB را می کشیم تا خط d را در نقطه M قطع کند تصویر A نسبت به خط d را هم مشخص کرده و A' می‌نامیم حال از M به A' وصل میکنیم. وبرای B نیز به همین ترتیب، حال داریم:

$$\begin{cases} AM = A'M \\ BM = B'M \end{cases} \qquad (۱)$$

$$AB = AM - BM = A'M - B'M = A'B'$$

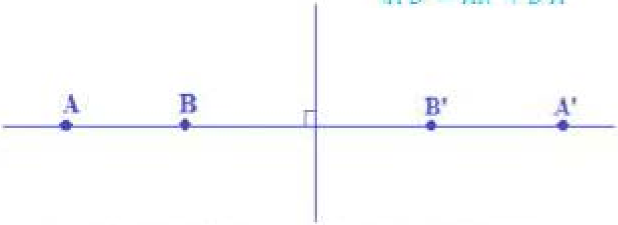
اگر پاره خط AB از خط بازتاب عبور کرده باشد نیز ثابت می‌شود.

$$\begin{cases} AM = A'M \\ BM = B'M \end{cases} \qquad (۲)$$

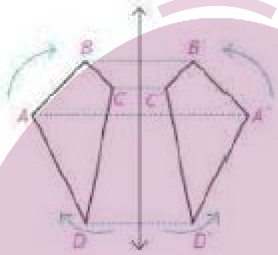
$$B'A + AM = BA' + A'M \Rightarrow B'A = BA' \qquad (۳)$$

بنا به رابطه‌های (۲) و (۳) داریم:

$$\begin{cases} AB = AA' + A'B \\ A'B' = AA' + B'A \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

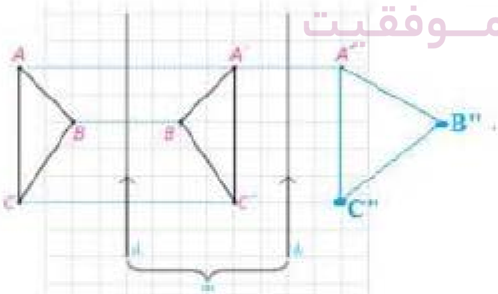


۲- در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضلعی محدب $ABCD$ تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به C، B و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



جهت حرکت در بازتاب شده‌ی این شکل ($A'B'C'D'$) خلاف جهت عقربه های ساعت است بازتاب جهت شکل را حفظ می‌کند.

۳- در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله‌ی m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.



الف) نشان دهید $AA'' = 2m$

$$AA'' = AD + DA' + A'D' + D'A''$$
$$\begin{cases} AD = DA' \\ A'D' = D'A'' \end{cases} \Rightarrow AD + D'A'' = m$$
$$AA'' = m + m = 2m$$

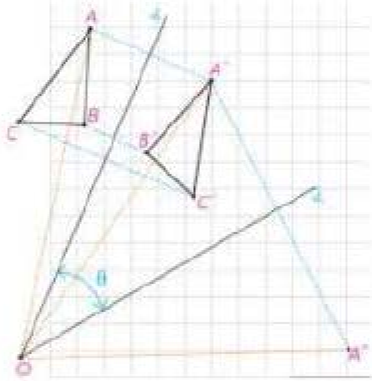
ب) اندازه‌ی BB'' و CC'' چقدر است؟

طبق اثبات قسمت الف مقدار BB'' و CC'' هم برابر ۲m است.

پ) با چه تبدیلی می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه ای می‌گیرید؟

انتقال تصویر یک شکل، انتقال آن شکل با برداری به اندازه ی ۲ برابر فاصله ی ۲ خط بازتاب است.

۴. در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه‌ی θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.



الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = ۲\theta$

$$\widehat{AOA''} = \widehat{AOD} + \widehat{DOA'} + \widehat{A'OE} + \widehat{EOA''}$$

$$\begin{cases} \widehat{AOD} = \widehat{DOA'} \\ \widehat{EOA''} = \widehat{A'OE} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AOD} + \widehat{EOA''} = \theta \Rightarrow \widehat{AOA''} = ۲\theta$$

ب) اندازه‌ی $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چقدر است؟

طبق اثبات قسمت الف $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ هم برابر ۲θ است.

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

دوران حول مرکز O با زاویه ۲θ و نتیجه می‌گیریم که اگر محور دو بازتاب متقاطع باشند ترکیب آنها یک دوران است.

سؤال متن صفحه ۴۵

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی نیم خط OM، نقطه M' را چنان می‌یابیم که $OM' = k.OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطه‌ی M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطه‌ی O بین نقاط M و M' باشد و $OM' = |k|.OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k، نقطه‌ی M' مجانس نقطه‌ی M به نسبت k و نقطه‌ی M مجانس نقطه‌ی M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است؛ چرا؟

در تجانس به مرکز O و نسبت k، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k است، بنابراین داریم:

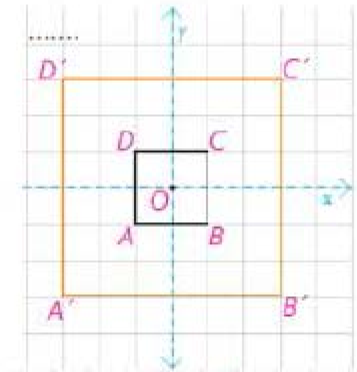
$$k > ۰ \Rightarrow OM' = k.OM \overset{\div k}{\Rightarrow} \frac{۱}{k}.OM' = OM$$

$$k < ۰ \Rightarrow OM' = |k|.OM \overset{\div |k|}{\Longrightarrow} \frac{۱}{|k|}.OM' = OM$$

در نتیجه نقطه M مجانس نقطه M' به نسبت $\frac{۱}{k}$ است.

فعالیت صفحه ۴۶

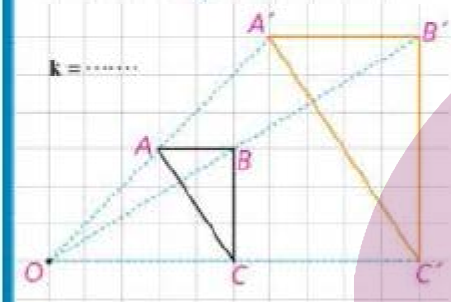
۱- این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.



الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

بنا به تعریف تجانس چون نقاط A و A' در یک طرف نقطه O قرار دارند، بنابراین $k>0$ و داریم:

$$OA' = k.OA \Rightarrow k = \frac{OA'}{OA} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow k = 3$$



$$OC' = k.OC \Rightarrow k = \frac{OC'}{OC} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow k = 2$$

ب) آیا تجانس طولپاست؟ چرا؟

خیر، زیرا اندازه پاره‌خط تغییر می‌کند، بنابراین طولپا نیست.

پ) در این شکل‌ها، طول هر پاره‌خط را با طول تصویر آن مقایسه کنید. به چه نتیجه‌ای می‌توان رسید؟

در شکل مربع: $D'A'=3DA$ و $A'B'=3AB$ و $B'C'=3BC$ و $C'D'=3CD$ بنابراین: طول تصویر هر پاره‌خط ۳ برابر شده است و ۳ در واقع نسبت تجانس است:

$$\frac{A'B'C'D' \text{ محیط}}{ABCD \text{ محیط}} = \frac{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'}{AB+BC+CD+DA} = \frac{3(AB+BC+CD+DA)}{AB+BC+CD+DA} = 3 \text{ نسبت تجانس}$$

در شکل مثلث:

$A'B' = 2AB$ و $B'C' = 2BC$ و $A'C' = 2AC$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2)^2 + (3)^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow AC = \sqrt{13}$$

و $(A'C')^2 = (A'B')^2 + (B'C')^2 = (4)^2 + (6)^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow A'C' = 2\sqrt{13}$

بنابراین طول تصویر هر پاره‌خط ۲ برابر شده است و ۲ در واقع نسبت تجانس است.

$$\frac{A'B'C' \text{ محیط مثلث}}{ABC \text{ محیط مثلث}} = 2$$

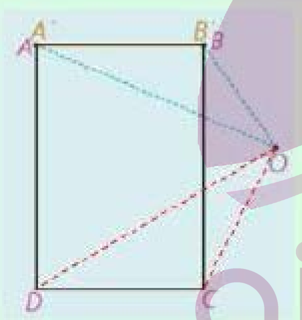
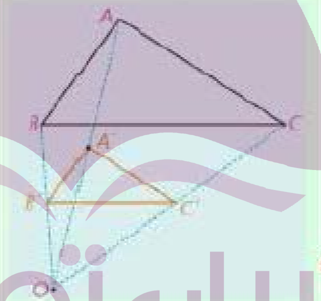
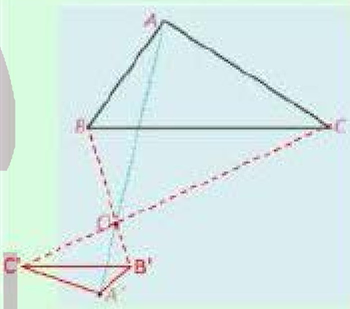
ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟

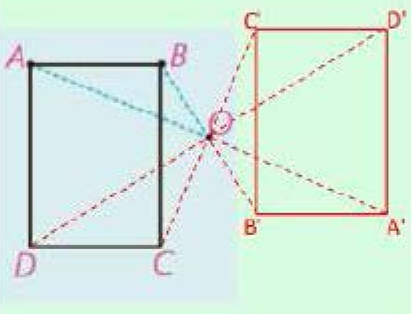
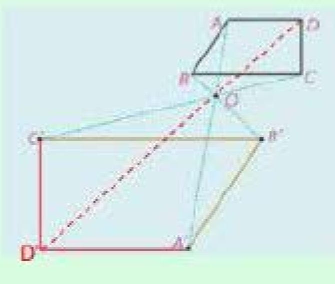
$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶}{\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۳}=۴=(۲)^۲ \quad و \quad \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=\frac{(۶)^۲}{(۲)^۲}=\frac{۳۶}{۴}=۹=(۳)^۲$$

بنابراین مساحت تصویر یک شکل نسبت به مساحت آن شکل برابر با توان دوم نسبت تجانس یعنی $k^۲$ است.

۲- در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به عبارتی: $k>۱$. حال مسئله را برای مقادیر مختلف k بررسی می‌کنیم.

الف) در هر حالت مراحل باقی‌مانده را کامل کنید.

k	k = ۱	۰ < k < ۱	-۱ < k < ۰
مثال		$k=\frac{۱}{۲}$	$k=\frac{۱}{۳}$
			

k	k = -۱	k < -۱
مثال		k = -۲
		

ب) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید:

			طولپاست	اندازه‌ی زاویه حفظ می‌شود.	شیب خط حفظ می‌شود.	جهت شکل حفظ می‌شود.	مساحت شکل حفظ می‌شود.
تجانس	$k > 0$	$K > 1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
		$k = 1$	درست	درست	درست	درست	درست
		$0 < k < 1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
	$k < 0$	$-1 < k < 0$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست
		$k = -1$	درست	درست	درست	درست	درست
		$k < -1$	نادرست	درست	درست	درست	نادرست

پ) شرط اینکه تجانس طولپا باشد، این است که $k = 1$ یا $k = -1$ باشد. درواقع $|k| = 1$

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می‌کند، یعنی خطوط AA'، BB' و ... نسبت به هم چه وضعی دارند؟

همه این خطوط در نقطه O یعنی مرکز تجانس همرسند.

در تجانس به مرکز O و نسبت k:

اگر $k > 0$ تجانس را، تجانس مستقیم می‌نامیم.

اگر $k < 0$ تجانس را تجانس معکوس می‌نامیم.

اگر $|k| < 1$ تصویر شکل کوچک‌تر می‌شود و آن را انقباض می‌نامیم.

اگر $|k| > 1$ تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را انبساط می‌نامیم.

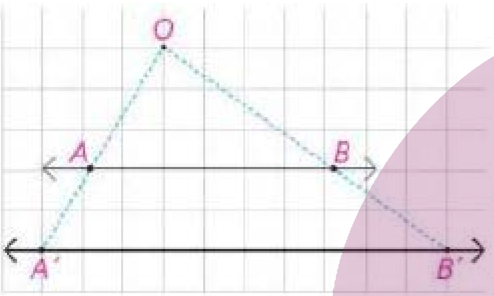
فعالیت صفحه ۴۸

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. برای این منظور، تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می‌گیریم: دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف) نقطه‌ی O روی خط AB است.

حل: در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B، روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.

ب) نقطه‌ی O غیرواقع بر خط AB است.



حل: در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم:

$$\begin{cases} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$$

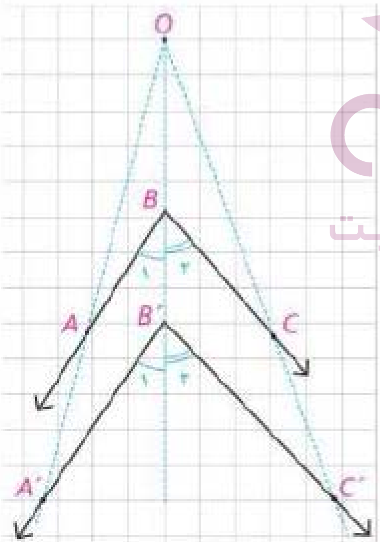
$$\Rightarrow AB \parallel A'B' \quad (\text{چرا؟})$$

بنا به عکس قضیه تالس

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی‌اند و شیب دو خط، برابر است؛ بنابراین:

قضیه: تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

دومین فعالیت صفحه ۴۸



می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند.

تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه $\widehat{ABC}$ را در نظر می‌گیریم. مجانس این زاویه، یعنی زاویه‌ی $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می‌کنیم.

به کمک قضیه‌ی قبل و شکل داده شده، ثابت کنید: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

با توجه به قضیه قبل داریم $AB \parallel A'B'$ و با توجه به شکل اگر خط OB' مورب

باشد بنابه قضیه خطوط موازی داریم $\widehat{B_1} = \widehat{B'_1}$ (۱) و همین‌طور $BC \parallel B'C'$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد (بنابه قضیه خطوط موازی (۱) $\widehat{B'_2} = \widehat{B_2}$. بنابراین از جمع (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \widehat{B'_1} + \widehat{B'_2} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

کار در کلاس صفحه ۴۹

۱- الف) فرض کنید پاره‌خط $A'B'$ مجانس پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد: نشان دهید: $\frac{A'B'}{AB} = |k|$

۱) اگر نقطه O روی پاره‌خط AB قرار داشته باشد و $k > 0$ باشد آنگاه:

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{OA'=k.OA \ , \ OB'=k.OB} A'B' = k.OA + k.OB = k(OA+OB) = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$

۲) اگر نقطه O روی پاره‌خط AB قرار داشته باشد و $k < 0$ باشد: آنگاه:

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{OA'=|k|.OA \ , \ OB'=|k|.OB} = |k|.OA + |k|.OB = |k|(OA+OB) = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$

۳) اگر نقطه O روی امتداد پاره‌خط AB قرار داشته باشد و $k > 0$ باشد: آنگاه:

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow{OA'=k.OA \ , \ OB'=k.OB} = k.OA - k.OB = k(OA-OB) = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$

۴) اگر نقطه O روی امتداد پاره‌خط AB قرار داشته باشد و $k < 0$ باشد: آنگاه:

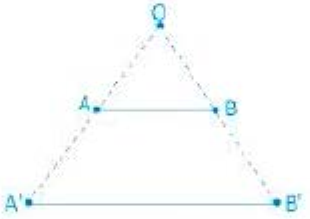
$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow{OA'=|k|.OA \ , \ OB'=|k|.OB} = |k|.OA - |k|.OB = |k|(OA-OB) = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$

۵) اگر نقطه O روی پاره‌خط AB قرار داشته باشد و $0 < k < 1$ باشد: آنگاه:

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{OA'=k.OA \ , \ OB'=k.OB} = k.OA + k.OB = k(OA+OB) = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$

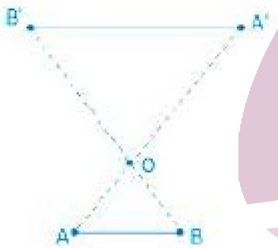
۶) اگر نقطه A روی پاره‌خط AB قرار نداشته باشد و $k > 0$ باشد، آنگاه:

$$\begin{matrix} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{matrix} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} AB \parallel A'B' \ , \ \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$



۷) اگر نقطه O روی پاره‌خط AB قرار نداشته باشد و $k < 0$ باشد، آنگاه:

$$\begin{matrix} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \end{matrix} \xrightarrow{\text{بنا به قضایای تشابه مثلث ها}} \overset{\Delta}{AOB} \sim \overset{\Delta}{A'OB'} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$



ب) اگر n ضلعی $A'_1A'_2 \dots A'_n$ مجانس n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ باشد، نشان دهید این دو n ضلعی با هم متشابه‌اند.

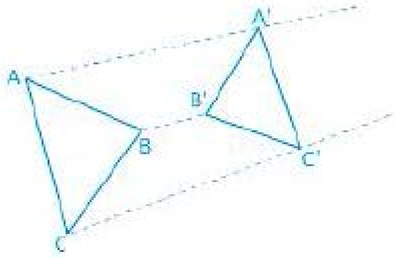
فرض می‌کنیم $A_1A_2 \dots A_n$ یک n ضلعی باشد و n ضلعی $A'_1A'_2 \dots A'_n$ مجانس آن به مرکز تجانس O و نسبت تجانس k باشد؛ آنگاه بنابه تعریف تجانس داریم:

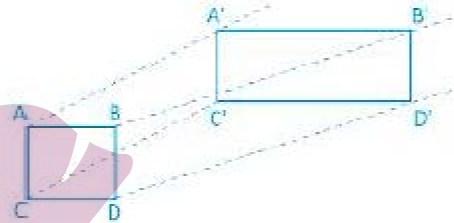
$$\begin{cases} OA'_1 = |k|.OA_1 \\ OA'_2 = |k|.OA_2 \\ \vdots \\ OA'_n = |k|.OA_n \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'_1}{OA_1} = \frac{OA'_2}{OA_2} = \cdots = \frac{OA'_n}{OA_n} = |k|$$

بنا به سومین قضیه متشابه، چون همه‌ی اضلاع متناسب هستند، بنابراین دو n ضلعی متشابه هستند.

۲- با توجه به ویژگی‌های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.

با توجه به فعالیت (صفحه ۴۷) می‌دانیم که خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می‌کند در مرکز تجانس یعنی O همرسند بنابراین کافی است دو شکل متشابه رسم کنیم که وقتی هر نقطه را به تصویر آن وصل می‌کنیم همرس نشوند. به این ترتیب مرکز تجانس وجود ندارد و در نتیجه تجانس نیز وجود نخواهد داشت.





فعالیت صفحه ۴۹

پیش از این دیدیم که اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است و داریم $S(A) = A' = A$؛ این نقاط را نقاط ثابت تبدیل نامیدیم. اما برخی از تبدیل‌ها، هر نقطه‌ی صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند؛ چنین تبدیل‌هایی را تبدیل همانی می‌نامیم.

تعریف: تبدیل T را تبدیل همانی گوییم، هرگاه به ازای هر نقطه‌ی A از صفحه‌ی P داشته باشیم $T(A) = A$.

معمولاً تبدیل‌های همانی را با I نمایش می‌دهند؛ پس $I(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

اگر بردار انتقال برابر با بردار صفر باشد آنگاه تبدیل انتقال همانی است.

اگر زاویه دوران صفر درجه یا ۳۶۰ درجه باشد آنگاه تبدیل دوران همانی است.

اگر $k = 1$ باشد تجانس تبدیل همانی است.

ب) آیا تبدیل همانی طولپاست؟

بله، چون هر نقطه را به خود آن نقطه تصویر می‌کند، بنابراین تبدیل همانی، طولپاست. اگر A و B دو نقطه در صفحه باشند، آنگاه تحت یک تبدیل همانی داریم: $T(A) = A,\ T(B) = B \Rightarrow AB = AB$

پ) توضیح دهید که در هریک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱- **انتقال غیرهمانی:** خیر، نقطه ثابت ندارد. چون هر نقطه تحت یک بردار غیرصفر انتقال داده می‌شود، بنابراین به روی خودش منطبق نمی‌شود.

۲- **دوران غیرهمانی:** در صورتی که نقطه مورد نظر روی مرکز دوران باشد تحت هر دورانی ثابت می‌ماند. بنابراین مرکز دوران، نقطه ثابت دوران غیرهمانی است.

۳- **تجانس غیرهمانی:** در صورتیکه نقطه مورد نظر روی مرکز تجانس باشد تصویر آن بر روی خودش منطبق می‌شود بنابراین مرکز تجانس نقطه ثابت، تجانس غیرهمانی است.

کار در کلاس صفحه ۵۰

۱- درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

	طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.	اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.
بازتاب	درست	درست	نادرست	نادرست	درست
انتقال	درست	درست	درست	درست	درست
دوران	درست	درست	نادرست	درست	درست
تجانس	نادرست	درست	درست	درست	نادرست

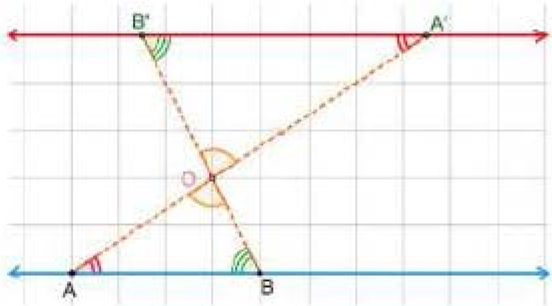
تمرین صفحه ۵۰

۱. در تجانسی با نسبت $K < 0$ و مرکز تجانس O نشان دهید:

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

حالت‌های مختلف در کار در کلاس صفحه ۴۸ بررسی شده است و به عنوان مثال، در حالت $K = -1$ دو خط روی همدیگر افتاد یعنی اینکه شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می کند.

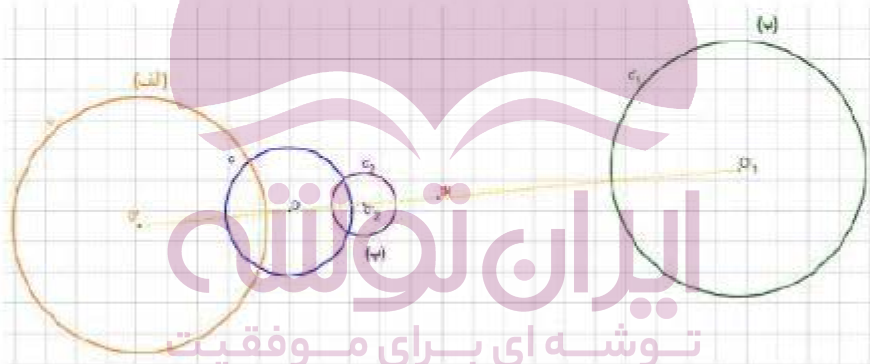


۲. دایره $C(O, R)$ و نقطه‌ی M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه‌ی M در هر حالت رسم کنید.

الف) $K = 2$

ب) $K = -2$

پ) $K = \frac{1}{2}$



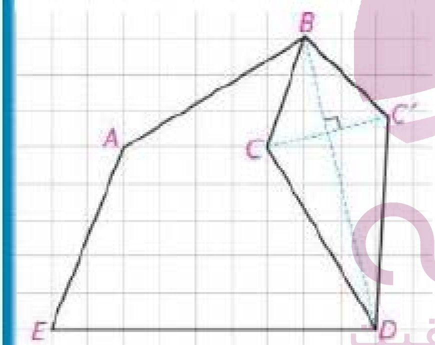
سؤال متن صفحه ۵۲

۱- توضیح دهید که بازتاب به حل مسئله چه کمکی کرده است؟

شکل‌های A و A' نسبت به محور بازتاب یعنی خط d قرینه هستند. بنابراین هم‌اندازه‌اند. همچنین شکل‌های B و B' نیز نسبت به محور بازتاب یعنی خط d' قرینه‌اند. پس هم‌اندازه‌اند. در نتیجه به یک نفر شکل A و B و به نفر دیگر شکل A' و B' را می‌دهیم.

۲-برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چند ضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده‌ایم. حال می‌خواهیم با ثابت نگه داشتن محیط و ثابت نگه داشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدن اینکه اندازه حصار کشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم. به کمک تصویر روبرو توضیح دهید که این عمل را چگونه می‌توان انجام داد.

اگر نقطه B را به D وصل کنیم و آن را به عنوان محور بازتاب درنظر می‌گیریم. حال تصویر نقاط B و C و D را نسبت به پاره‌خط BD بدست می‌آوریم. می‌دانیم که تصویر نقاط D و B بر روی خودشان منطبق می‌شود ولی تصویر نقطه C نقطه C' است.



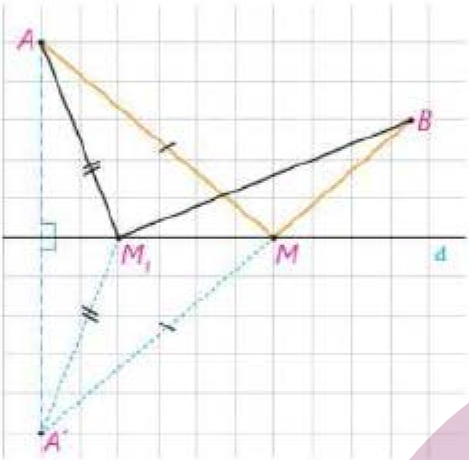
چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC'DE یکی است؟

می‌دانیم که تبدیل بازتاب، طولپاست بنابراین داریم:

$$BC = BC' \quad , \quad CD = C'D \qquad (1)$$

$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA \overset{(1)}{\Rightarrow} = AB + BC' + C'D + DE + EA = P_{ABC'DE} \quad \Rightarrow \quad P_{ABCDE} = P_{ABC'DE}$$

سؤال متن صفحه ۵۳



۱- برای هر نقطه‌ی دلخواه دیگری نظیر M_1 داریم $M_1A = M_1A'$ (و به همین ترتیب $AM = A'M$)؛ چرا؟

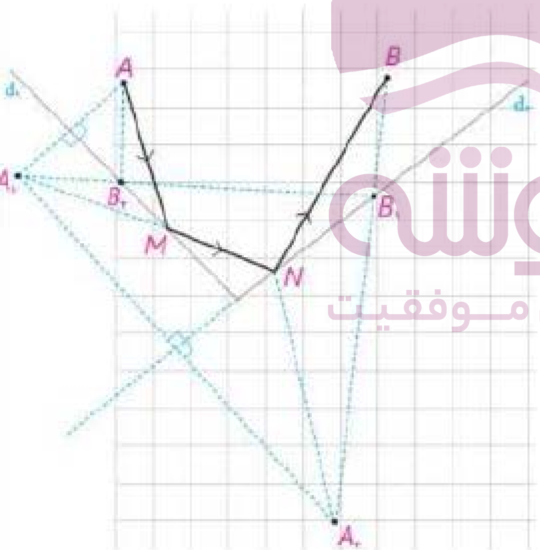
چون خط d محور بازتاب است، بنابراین عمودمنصف پاره‌خط AA' است. نقاط M و M_1 روی خط d قرار دارند، بنابه خاصیت عمودمنصف $AM = A'M$ و $AM_1 = A'M_1$ بنابراین هر نقطه روی خط d از دو سر پاره‌خط AA' به یک فاصله است.

۲- در مثلث $A'M_1B$ داریم $A'M_1 + M_1B > A'B$؛ چرا؟

بنابه قضیه نامساوی مثلث، در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است؛ بنابراین:

$A'M_1 + M_1B > A'B$

از تساوی $A'B = A'M + MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.



$$A'B = A'M + MB \xrightarrow{A'M = AM \ (1)} A'B = AM + MB$$
$$A'B < A'M_1 + M_1B \quad (2)$$
$$\Rightarrow AM + MB < A'M_1 + M_1B$$

بنابراین M_1 دلخواه و $AM + MB$ بنابه ادعای هرون کوتاهترین مسیر ممکن است:

خط d محور بازتاب است پس عمودمنصف پاره‌خط AA' است.

نقطه M روی خط d قرار دارد بنابراین $MA = MA'$ در نتیجه مثلث AMA' متساوی‌الساقین است پس d نیمساز زاویه $A\hat{M}A'$ است بنابراین داریم:

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_3$$
$$\hat{M}_3 = \hat{M}_2 \quad \text{متقابل به رأس} \quad \Rightarrow \quad \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

حل صفحه ۵۴

کافی است نشان دهیم این مسیر از تمام مسیرهای دیگر کوتاه‌تر است. ابتدا ثابت می‌کنیم که طول این مسیر با طول پاره‌خط A_2B برابر است.

(۱)

$$\begin{cases} A_1B_2 = AB_2 \Rightarrow AB_2 + B_2B_1 = A_1B_1 \\ A_1B_1 = A_2B_1 \Rightarrow A_1B_1 + B_1B = A_2B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad AB_2 + B_2B_1 + B_1B = A_2B$$

(۲) حال مسیر دلخواه دیگری مانند AMNB را در نظر می‌گیریم؛ داریم:

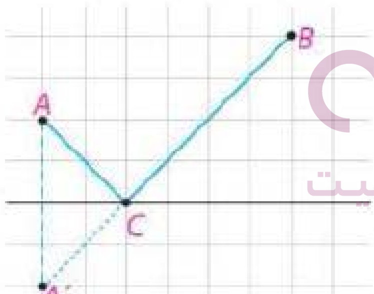
$$AM = A_1M \quad \Rightarrow \quad AM + MN = A_1N$$

$$A_1N = NA_2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{AM + MN}_{A_1N} + NB = A_2N + NB$$

حال با توجه به مثلث BNA_2 داریم:

طول مسیر اول $\boxed{<}$ طول مسیر دوم

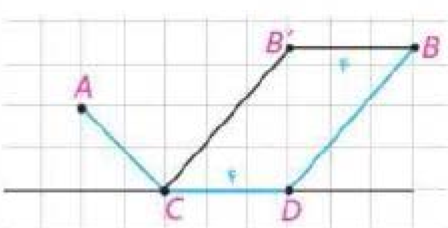
حل صفحه ۵۵



حل: مسئله را در چند مرحله حل می‌کنیم.

۱- اگر جاده‌ی ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر CD=۰، این مسئله به کدام یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده‌اید؟

شبیه به مسئله هرون، مردی که می‌خواست از رودخانه آب بردارد و به اسطبل ببرد.



۲- با توجه به شرایط مسئله، مسیر موردنظر، باید مسیری به شکل مسیر ACDB باشد؛ اما:

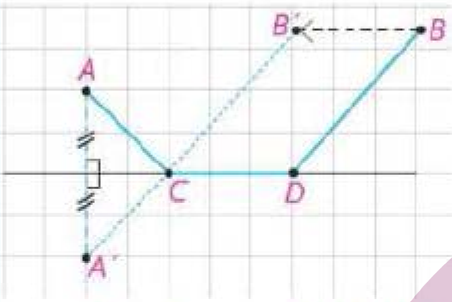
(چرا؟) طول مسیر ACB'B = طول مسیر ACDB

بنابراین:

۴ + طول مسیر ACB = طول مسیر ACDB

چون نقطه C تحت بردار انتقال به طول ۴ به نقطه D و نقطه B' نیز تحت همان بردار به B منتقل شده است. با توجه به ویژگی انتقال چهارضلعی $CB'BD$ متوازی‌الاضلاع است. بنابراین: (۱) $CD = B'B$ و $CB' = DB$ در نتیجه داریم:

$$\text{مسیر } ACDB = AC + CD + DB \overset{(1)}{=} AC + CB' + B'B = ACB'B$$



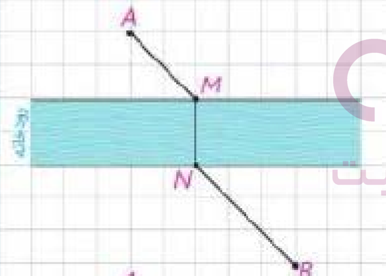
۳- پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ممکن به شکل ACDB مسیر را به گونه‌ای انتخاب کنیم که طول ACB' کوتاه‌ترین طول ممکن باشد.

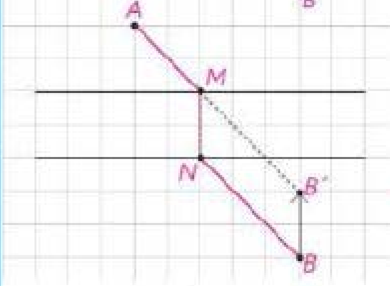
۴- به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل روبه‌رو توضیح دهید که رسم کوتاه‌ترین مسیر ACDB چگونه است.

ابتدا نقطه B را تحت بردار انتقال به طول ۴ موازی رودخانه و به سمت چپ به نقطه B' انتقال می‌دهیم. حال همانند مسئله هرون بازتاب نقطه A را نسبت به خط کنار رودخانه بدست می‌آوریم یعنی A'. بعد از A' به B' وصل می‌کنیم. خط $A'B'$ خط کنار رودخانه را در نقطه C قطع می‌کند از نقطه C موازی خط رودخانه و به طول ۴ به سمت راست حرکت می‌کنیم تا نقطه D به دست آید. بنابراین ACB' +۴ طول مسیر = $ACDB$ طول مسیر.

کار در کلاس صفحه ۵۵

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد. محل احداث پل را کجا در نظر بگیری که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟





ابتدا تصویر نقطه B را بدست می‌آوریم. B را تحت برداری مساوی عمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می‌دهیم. B' را به A وصل می‌کنیم نقطه برخورد AB' با خط کنار رودخانه را M می‌نامیم. از M بر رودخانه عمود می‌کنیم و N را بدست می‌آوریم. بنابراین $AMNB$ کوتاهترین مسیر است. بنابه قسمت پ از مسئله قبل و باتوجه به ویژگی تبدیل انتقال چهارضلعی $MNBB'$ متوازی الاضلاع است و داریم:

$AMB'B$ مسیر $= AM + MB' + BB' \xrightarrow{MB'=NB \;,\; MN=BB'}$

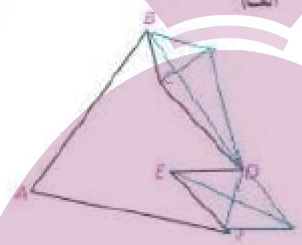
مسیر $AMB'B = AM + NB + MN = AMNB$ مسیر

$\Rightarrow$ مسیر $AMB'B = AMNB$ مسیر

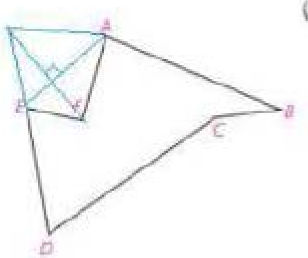
تمرین صفحه ۵۶

۱. دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

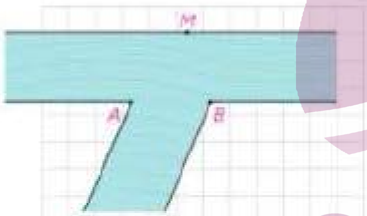
(الف)



ب)



۲. می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله‌ی A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله‌ی M را در چه نقطه‌ای از ساحل بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟

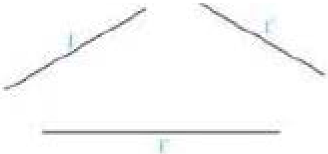


با توجه به شکل عرض رودخانه را در طول مسیر ثابت درنظر می‌گیریم.
بازتاب نقاط A و B را نسبت به عرض رودخانه بدست می‌آوریم یعنی $\acute{A}$ و $\acute{B}$. حال $\acute{B}$ را به A وصل می‌کنیم و نقطه برخورد با ساحل را M می‌نامیم. اگر $\acute{A}$ را به B وصل کنیم خواهیم دید که از M میگذرد.با استفاده از مسئله هرون نتیجه می گیریم که مسیر $MABM$ کوتاه‌ترین مسیر است.

می

۳- سه خط دو به دو ناموازی l و $\acute{l}$ و l'' در صفحه مفروض‌اند. پاره خطی به طول ۵ سانتیمتر رسم کنید که دو سر آن روی l و $\acute{l}$، و موازی l'' باشد.

ابتدا پاره‌خطی دلخواه روی l'' در نظر می گیریم و آن را AB می‌نامیم، خط l را تحت بردار $\overline{AB}$ انتقال می‌دهیم تا خط d به دست آید. حال نقطه برخورد خط d و $\acute{l}$ را E می‌نامیم. از E خطی موازی l'' رسم می‌کنیم تا خط l را در نقطه F قطع کند، پاره‌خط EF جواب مورد نظر است.



۴- فرض کنید G محل برخورد میانه های مثلث ABC(مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{1}{2}$ باشد.

الف) جایگاه رأس های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟ چون تجانس به مرکز G است بنابراین $GA' = \frac{1}{2} GA$ و همچنین G بین A و A' است، برای B و B' و C و C' نیز به همین ترتیب است. بنابراین رأس های A' و B' و C' روی اضلاع مثلث ABC قرار دارند.

ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

مساحت تصویر یک شکل نسبت به مساحت آن شکل برابر توان دوم نسبت تجانس است بنابراین داریم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$$

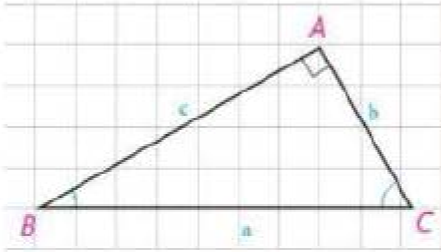
فعالیت ۱ صفحه ۶۲

در کتاب ریاضی ۱ (پایه دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، جاهای خالی را پر کنید.

$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a$$

$$\sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a$$

$$\sin A = \sin 90^\circ = 1 \Rightarrow \frac{a}{\sin a} = a$$



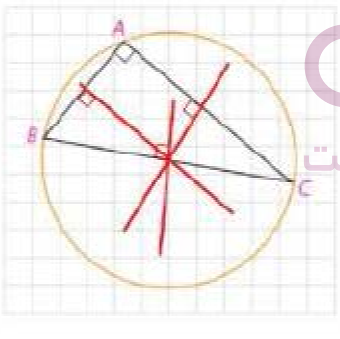
بنابراین داریم :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه‌ی هر ضلع **به** سینوس زاویه مقابل به آن ضلع **برابر است با اندازه‌ی** وتر مثلث.

فعالیت ۲ صفحه ۶۳

در کتاب هندسه ۱ دیدیم که عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همرس اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث است. دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟

روش اول :



در هر مثلث قائم‌الزاویه، محل برخورد عمودمنصف‌ها وسط وتر است. بنابراین مرکز این دایره وسط وتر است. و چون وتر BC از مرکز دایره عبور کرده پس، قطر دایره است.

روش دوم :

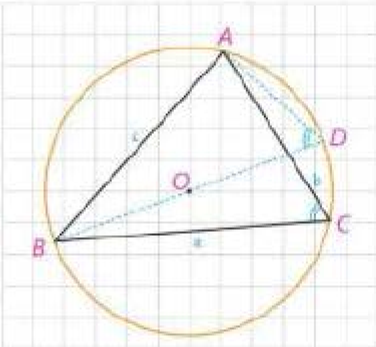
چون $B\hat{A}C = 90^\circ$ ، زاویه محاطی است بنابراین کمان BC برابر 180° است یعنی دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده است بنابراین وتر BC قطر دایره است.

با توجه به نتیجه فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه‌ی روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه‌ی قطر دایره ی محیطی مثلث.

فعالیت ۳ صفحه ۶۳

مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < ۹۰^\circ$) و دایره‌ی محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم. قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم.



۱-زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟

چون هر دو زاویه محاطی و روبرو به کمان AB هستند بنابراین برابرند.

اندازه‌ی آنها برابر است با نصف کمان AB.

۲-چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟

چون زاویه محاطی $B\hat{A}D$ روبرو به قطر دایره است. بنابراین داریم:

$$B\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

۳-با توجه به دو قسمت قبل، داریم:

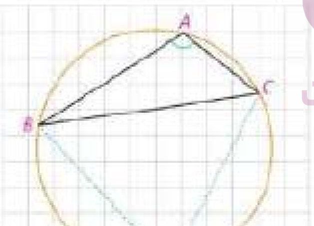
R شعاع دایره محیطی است و $۲R = BD$.

$$\sin C = \sin D \quad \text{و} \quad \sin D = \frac{C}{BD} \Longrightarrow \sin C = \frac{C}{۲R} \Longrightarrow \frac{C}{\sin C} = ۲R$$

۴-به‌طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin A} = ۲R \quad \text{و} \quad \frac{b}{\sin B} = ۲R$$

۵-حال مثلث ABC ($\hat{A} > ۹۰^\circ$) را در نظر بگیرید. نقطه‌ی دلخواه A' روی کمان BC را به B و C وصل می‌کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A'}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



مکمل‌اند، زیرا:

$$\begin{cases} \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BA'C}}{۲} \\ \hat{A'} = \dfrac{\overset{\frown}{BAC}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{A'} = \frac{\overset{\frown}{BA'C}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BAC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BA'C} + \overset{\frown}{BAC}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

$\hat{A} + \hat{A'} = ۱۸۰^\circ$ **بنابراین $\hat{A'}$ زاویه‌ای حاده است.**

با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانید، جاهای خالی را پر کنید:

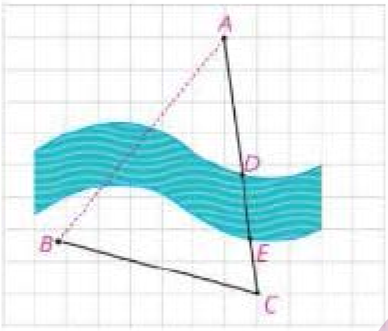
$$\sin A = \sin(۱۸۰^\circ - A') = \sin A'$$

در مثلث A'BC طبق نتیجه قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{\sin A'} = ۲R \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = ۲R$$

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه‌ی روبه‌رو به آن برابر است با طول قطر دایره محیطی مثلث.

کار در کلاس صفحه ۶۵



می‌خواهیم روی یک رودخانه‌ی عمیق بین دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به دست بیاوریم؛ اما امکان اندازه‌گیری مستقیم (به دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطه A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم‌عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه‌یاب (تئودولیت) زاویه‌ی دید AC از نقطه B $(\hat{B})$ و زاویه‌ی دید ABاز C $(\hat{C})$ را اندازه می گیریم. به صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می توان فاصله AB را به‌دست آورد:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin\left(۱۸۰^\circ - (B + C)\right)} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(B + C)}$$

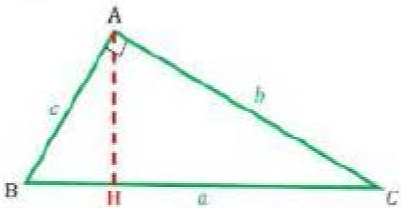
اگر $BC = ۳\ km$ و $\hat{B} = ۷۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به دست آورید.

$$AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(B + C)} = \frac{۳ \times \sin ۶۰}{\sin ۱۳۰} = \frac{۳ \times ۰/۸۶}{۰/۷۶} \simeq ۳/۳۹$$

تمرین صفحه ۶۵

۱-ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ با ارتفاع $AH = h_a$ داریم:

$$\frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{b^۲} = \frac{۱}{c^۲}$$



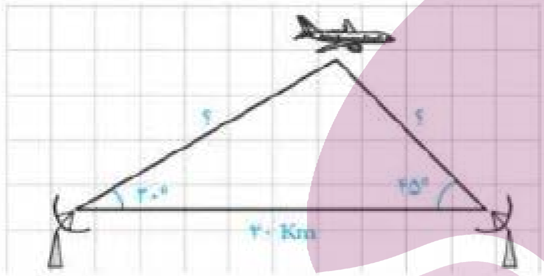
با توجه به مساحت مثلث داریم :

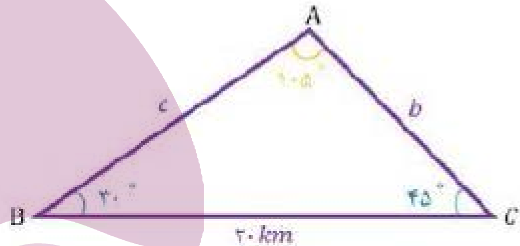
$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}bc \\ S = \frac{1}{2}ah_a \end{cases} \Rightarrow bc = ah_a \xRightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} (bc)^2 = (ah_a)^2 \Rightarrow b^2c^2 = a^2h_a^2$$

$$\xRightarrow{a^2=b^2+c^2} b^2c^2 = (b^2+c^2)h_a^2 \Rightarrow b^2c^2 = b^2h_a^2 + c^2h_a^2$$

$$\xRightarrow{\text{طرفین تقسیم به } b^2c^2h_a^2} \frac{b^2c^2}{b^2c^2h_a^2} = \frac{b^2h_a^2}{b^2c^2h_a^2} + \frac{c^2h_a^2}{b^2c^2h_a^2} \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

۲-دو ایستگاه رادار، که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصله‌ی هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.





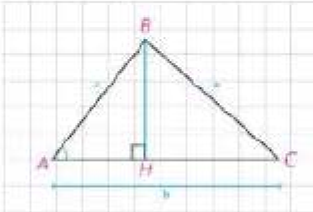
$$180° - (45° + 30°) = 105°$$

$$\frac{20}{\sin 105} = \frac{AC}{\sin 30} = \frac{AB}{\sin 45} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{\sin 105} = \frac{c}{0/707} \Rightarrow a = 14/72 \\ \frac{20}{\sin 105} = \frac{b}{0/5} \Rightarrow b = 10/41 \end{cases}$$

درس دوم : قضیه کسینوس‌ها

فعالیت ۱ صفحه ۶۶

در مثلث ABC $(\hat{A} < ۹۰^\circ)$، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم. با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث‌های قائم الزاویه، جاهای خالی را پر کنید :



$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \times \cos A \quad \text{و} \quad CH = b - AH = b - c\cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \times \sin A$$

$$\Delta BHC: \; BC^۲ = BH^۲ + CH^۲ \;\Rightarrow\; a^۲ = (c\sin A)^۲ + (b - c\cos A)^۲$$

حال به کمک اتحادهای جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$ ، نشان دهید :

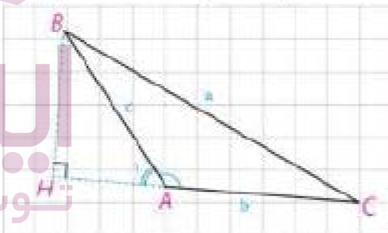
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲\,bc \times \cos A$$

$$a^۲ = (c\sin A)^۲ + (b - c\cos A)^۲ = c^۲\sin^۲ A + b^۲ - ۲\,bc\cos A + c^۲\cos^۲ A$$

$$\Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲\big(\underbrace{\sin^۲ A + \cos^۲ A}_{۱}\big) - ۲\,bc\cos A \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲\,bc \times \cos A$$

اکنون در مثلث ABC $(\hat{A} > ۹۰^\circ)$، ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم. اگر $\hat{A}_۱$ زاویه‌ی خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_۱ = ۱۸۰ - \hat{A}$ داریم :

$\sin A_۱ = \sin A$ و $\cos A_۱ = -\cos A$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نوشت :



$$\cos A_۱ = \frac{AH}{c} \quad \text{و} \quad \sin A_۱ = \frac{BH}{c} \Rightarrow AH = c \times -\cos A \quad \text{و}$$

$$BH = c \times \sin A \quad \text{و} \quad CH = b + AH = b - c\cos A$$

$$\Delta BHC: \; BC^۲ = BH^۲ + CH^۲$$

$$\Rightarrow \; a^۲ = (c\sin A)^۲ + (b - c\cos A)^۲$$

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲\,bc \times \cos A$$

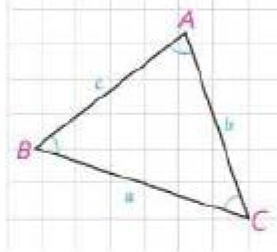
$$a^۲ = (c\sin A)^۲ + (b - c\cos A)^۲ = c^۲\sin^۲ A + b^۲ - ۲\,bc\cos A + c^۲\cos^۲ A$$

$$\Rightarrow a^۲ = c^۲\big(\underbrace{\sin^۲ A + \cos^۲ A}_{۱}\big) + b^۲ - ۲\,bc\cos A \Rightarrow a^۲ = c^۲ + b^۲ - ۲\,bc \times \cos A$$

سوال : در حالتی که زاویه A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟

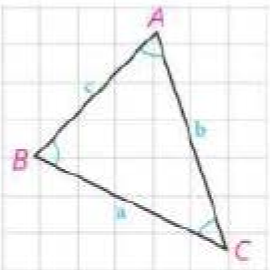
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \underbrace{-۲\,bc \times \cos ۹۰^\circ}_{۰} = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

قضیه‌ی کسینوس‌ها : در هر مثلث، مربع اندازه‌ی هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه‌ی آن دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین آنها :



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲\,bc\cos A$$
$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲\,ac\cos B$$
$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲\,ab\cos C$$

کار در کلاس صفحه ۶۷



در مثلث ABC، $AB = ۲\sqrt{۲}$ و $AC = \sqrt{۶} + \sqrt{۲}$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$:

۱-طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس‌ها به‌دست آورید.

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲ \times AC \times AB \times \cos A$$
$$BC^۲ = (\sqrt{۶} + \sqrt{۲})^۲ + (۲\sqrt{۲})^۲ - ۲(۲\sqrt{۲})(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})\cos ۶۰^\circ$$
$$BC^۲ = ۶ + ۲\sqrt{۱۲} + ۲ + ۸ - ۲\sqrt{۱۲} - ۴ = ۱۲$$
$$\Longrightarrow BC^۲ = ۱۲ \quad \text{و} \quad BC = ۲\sqrt{۳}$$

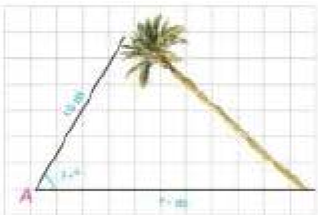
۲-اندازه $\hat{C}$ را به کمک قضیه سینوس‌ها به‌دست آورید و از آنجا اندازه $\hat{B}$ را هم بیابید.

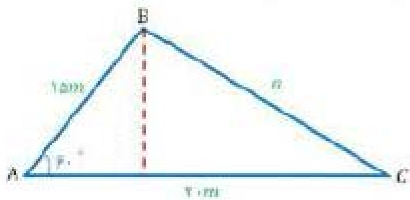
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow \frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C} = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۶۰} \Longrightarrow \sin C = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad \hat{C} = ۴۵^\circ \qquad \left(\sin C = \frac{۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰ - (\hat{A} + \hat{C}) = ۷۵^\circ$$

تمرین صفحه ۶۷

۱- یک درخت کج از نقطه‌ی A روی زمین، که در فاصله‌ی ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه‌ی ۶۰° دیده می‌شود. اگر فاصله‌ی A تا پای درخت ۲۰ متر باشد. مطلوب است :





الف) طول درخت

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲\, bc\cos A = ۲۰^۲ + ۱۵^۲ - ۲(۱۵)(۲۰)\cos ۶۰^\circ = ۴۰۰ + ۲۲۵ - ۳۰۰ = ۳۲۵$$
$$\Rightarrow a^۲ = ۳۲۵ \Rightarrow a = ۵\sqrt{۱۳}$$

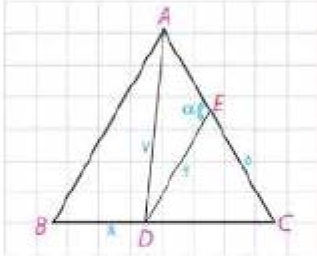
ب) زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{۱۵}{\sin C} = \frac{۵\sqrt{۱۳}}{\sin ۶۰^\circ} \Rightarrow \sin C = \frac{۱۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۵\sqrt{۱۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۳}} \simeq ۰/۷۲$$
$$\Rightarrow \hat{C} = ۴۶^\circ$$

پ) فاصله نوک درخت از زمین

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۱۵} \Rightarrow BH = \frac{۱۵\sqrt{۱۳}}{۲} \simeq ۱۲/۹۹$$

۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله ای دارد؟ $(CD > BD)$ نقطه‌ی E، که به فاصله‌ی ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه‌ی زاویه‌ی AED چند درجه است؟



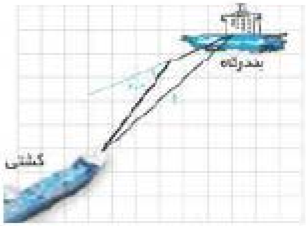
$$۷^۲ = ۸^۲ + x^۲ - ۲ \times ۸ \times x\cos ۶۰^\circ \Rightarrow ۴۹ = ۶۴ + x^۲ - ۸x$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۸x + ۶۴ - ۴۹ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)(x-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = ۵ \end{cases} \xrightarrow{CD > BD} \begin{cases} x = BD = ۳ \\ CD = ۵ \end{cases}$$

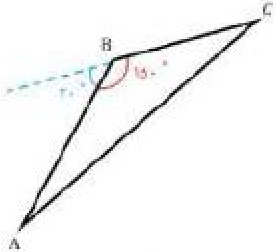
بنابراین $CD = CE = ۵$ ، یعنی مثلث CED متساوی‌الساقین است و چون $\hat{C} = ۶۰^\circ$ پس $\hat{C} = \hat{E} = ۶۰^\circ$ بنابراین $\hat{D} = ۶۰^\circ$ و نتیجه می‌گیریم مثلث CED متساوی‌الاضلاع است. پس $ED = ۵$. حال زاویه α را مشخص می‌کنیم:

$$\alpha = ۱۸۰ - D\hat{E}C = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰ \Rightarrow \alpha = ۱۲۰$$

(روش دوم برای محاسبه زاویه α : زاویه α یک زاویه خارجی برای مثلث CED است پس : $\alpha = ۶۰ + ۶۰ = ۱۲۰$)

۳- یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله‌ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



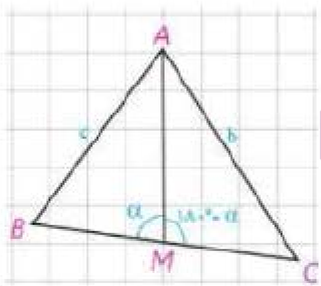


بنا به تعریف سرعت می‌توان مسافت را محاسبه کرد. اگر سرعت را در مدت زمان طی شده ضرب کنیم. مسافت طی شده به دست می‌آید. پس داریم :

$AC = ۶۰ \times ۱ = ۶۰\ km$ و $CB = ۴۰ \times ۰/۵ = ۲۰\ km$

$AB^۲ = AC^۲ + CB^۲ - ۲\,AC \times CB \times \cos ۱۵۰^\circ = ۶۰^۲ + ۲۰^۲ - ۲(۶۰)(۲۰)\cos ۱۵۰^\circ$

$AB^۲ = ۳۶۰۰ + ۴۰۰ - ۲۴۰۰(-۰/۸۶۶) = ۶۰۷۸/۴ \Rightarrow AB \simeq ۷۷/۹۶$



۴- در مثلث ABC، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم $(MB = MC = \frac{a}{۲})$ با نوشتن قضیه‌ی کسینوس ها در دو مثلث AMB و AMC ، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^۲ + c^۲ = ۲\,AM^۲ + \frac{a^۲}{۲} \quad (\text{قضیه‌ی میانه‌ها})$$

$\Delta AMB:\ c^۲ = \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + AM^۲ - ۲\left(\frac{a}{۲}\right)(AM)\cos\alpha \Rightarrow c^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ - a(AM)\cos\alpha\ (۱)$

$\Delta AMC:\ b^۲ = \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + AM^۲ - ۲\left(\frac{a}{۲}\right)(AM)\cos(۱۸۰ - \alpha) \Rightarrow b^۲$

$= \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ + a(AM)\cos\alpha\ (۲)$

از جمع (۱) و (۲) داریم :

$b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۴} + ۲\,AM^۲$

در حالت خاص ۴ = AB و ۶ = AC و ۸ = BC. طول میانه AM را به دست آورید.

$b = ۶ \quad ,c = ۴ \quad ,a = ۸$

$b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲\,AM^۲ \Rightarrow ۶^۲ + ۴^۲ = \frac{۸^۲}{۲} + ۲\,AM^۲ \Rightarrow ۵۲ = \frac{۶۴}{۲} + ۲\,AM^۲$

$$\Rightarrow 2AM^2 = 52 - 32 = 20 \Rightarrow AM^2 = \frac{20}{2} = 10$$

$$\Rightarrow AM^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

۵- در مثلث ABC، نقطه‌ی دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2.BC + DB.DC.BC \qquad \text{(قضیه‌ی استوارت)}$$

با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ADB داریم:

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD.BD.\cos\alpha$$

$$\xRightarrow{\times DC} AB^2.DC = AD^2.DC + DB^2.DC - 2.AD.DB.DC.\cos\alpha \qquad (1)$$

حال در مثلث ADC نیز داریم:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD.DC.\cos(180 - \alpha)$$

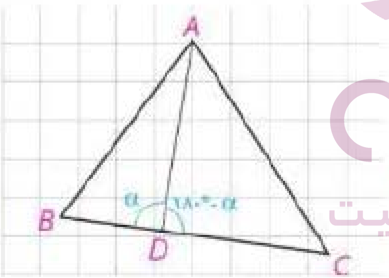
$$\xRightarrow{\times DB} AC^2.DB = AD^2.DB + DC^2.DB - 2 \times AD.DC.DB.\cos(180 - \alpha) \qquad (2)$$

روابط (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$AB^2.DC + AC^2.DB =$$
$$AD^2.DC + DB^2.DC - 2AD.DB.DC.\cos\alpha + AD^2.DB + DC^2.DB + 2AD.DC.DB\cos\alpha$$

$$\Rightarrow AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2\left(\underbrace{DC + DB}_{BC}\right) + DB.DC(\underbrace{DB + DC}_{BC})$$

$$\Rightarrow AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2.BC + DB.DC.BC$$



به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

اگر $DC = DB = \frac{a}{2}$، $AC = b$ و $AB = c$ باشد آنگاه با استفاده از قضیه استوارت داریم:

$$c^2 \times \frac{a}{2} + b^2 \times \frac{a}{2} = AD^2 \times a + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times a$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}(c^2 + b^2) = \frac{a}{2}(2AD^2 + \frac{a^2}{2})$$

$$\Rightarrow c^2 + b^2 = 2AD^2 + \frac{a^2}{2}$$

۶-مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه استوارت حل کنید.

$AB = AC = BC = 8$ و $AD = 7$ و $BD = x$ و $DC = 8 - x$

$$AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2.BC + DB.DC.BC$$

$$\Rightarrow 8^2 \times (8 - x) + 8^2 \times x = 7^2 \times 8 + x \times (8 - x) \times 8$$

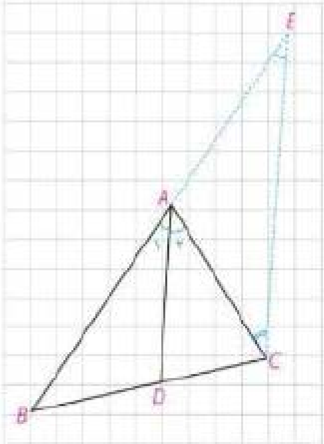
$$\Rightarrow ۶۴ \times ۸ - ۶۴x + ۶۴x = ۴۹ \times ۸ + ۶۴x - ۸x^{۲}$$

$$\xRightarrow{\div ۸} ۶۴ = ۴۹ + ۸x - x^{۲} \Rightarrow x^{۲} - ۸x - ۴۹ + ۶۴ = ۰ \Rightarrow x^{۲} - ۸x + ۱۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۳)(x-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = ۵ \end{cases} \xRightarrow{DC > DB} \begin{cases} x = DB = ۳ \\ DC = ۵ \end{cases}$$

درس سوم : قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه‌ی طول نیمسازها

اثبات قضیه ۱ صفحه ۷۰



مطابق شکل از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

الف) چرا $\widehat{A_۱} = \hat{E}$ و چرا $\widehat{A_۲} = \hat{C}$ ؟

بنا به قضیه‌ی خطوط موازی چون $AD||EC$ و خط BE مورب است بنابراین $\widehat{A_۱} = \hat{E}$

و همچنین چون $AD||EC$ و خط AC مورب است پس $\widehat{A_۲} = \hat{C}$.

ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای درباره زوایای E و C می توان گرفت؟ مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟

چون AD نیمساز زاویه A است پس $\widehat{A_۱} = \widehat{A_۲}$ درنتیجه بنابه قسمت الف، $\hat{E} = \hat{C}$

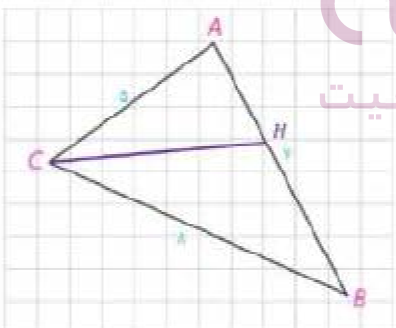
و مثلث AEC متساوی‌الساقین است (چون $\hat{E} = \hat{C}$).

ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC $(AD||EC)$ نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجه‌ی قسمت (ب) اثبات را کامل کنید :

$$AD||EC \Longrightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

کار در کلاس صفحه ۷۱

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.

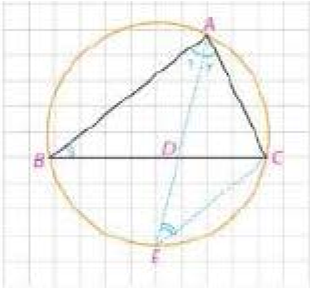


$$\frac{AC}{CB} = \frac{AH}{HB} \Longrightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{۵}{۸} \Longrightarrow \frac{AH+HB}{HB} = \frac{۵+۸}{۸}$$

$$\Longrightarrow \frac{۷}{HB} = \frac{۱۳}{۸} \Longrightarrow HB = \frac{۷ \times ۸}{۱۳} = \frac{۵۶}{۱۳}$$

$$\Longrightarrow AH = ۷ - HB = ۷ - \frac{۵۶}{۱۳} = \frac{۹۱-۵۶}{۱۳} = \frac{۳۵}{۱۳}$$

محاسبه‌ی طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث صفحه ۷۱



در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ $(\widehat{A_1} = \widehat{A_2})$، یعنی AD، AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.

الف) چرا $\hat{E} = \hat{B}$؟

چون هر دو زاویه محاطی و روبه‌رو به کمان AC هستند بنابراین برابرند.

ب) چرا مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؟

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} & \text{نیمساز } AD \\ \hat{E} = \hat{B} & \text{بنا به قسمت الف} \end{cases} \xRightarrow{(\text{ز.ز})} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{AEC}$$

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BD}$$

ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم :

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

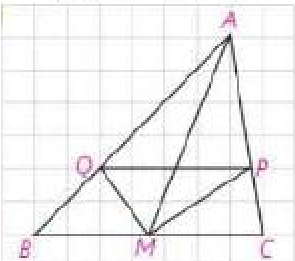
و چون AD.DE = BD.DC (چرا؟) بنابراین :

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

بنا به قضیه‌ای در فصل اول داریم : چون دو وتر AE و BC یکدیگر را در نقطه D در درون دایره قطع کرده‌اند بنابراین داریم : AD.DE = BD.DC

تمرین صفحه ۷۲

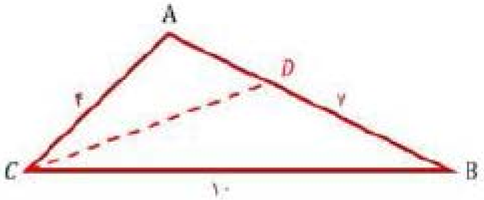
۱-در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید : $PQ || BC$



با توجه به قضیه ۱، در مثلث AMC پاره‌خط MP نیمساز زاویه $A\hat{M}C$ و در مثلث AMB پاره‌خط MQ نیمساز زاویه $A\hat{M}B$ است. بنابراین داریم :

$$\begin{cases} \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AP}{PC} \\ \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AQ}{QB} \xrightarrow{MB=MC} \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AQ}{QB} \end{cases} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ || BC$$

۲-در مثلث ABC، $AB = 7$ و $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز زاویه‌ی داخلی C را به دست آورید.



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow\frac{AD+DB}{DB}=\frac{۴+۱۰}{۱۰}\Longrightarrow\frac{۷}{DB}=\frac{۱۴}{۱۰}\Longrightarrow DB=\frac{۷۰}{۱۴}=۵$$

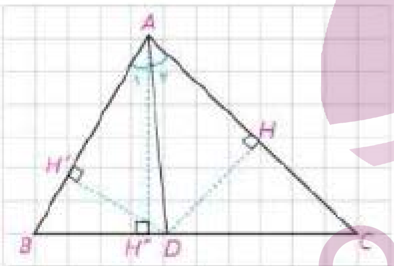
$$\Longrightarrow AD=۷-DB=۷-۵=۲$$

$$CD^۲=AC\cdot BC-AD\cdot BD$$

$$\Rightarrow CD^۲=۴\times۱۰-۲\times۵=۴۰-۱۰=۳۰\Longrightarrow CD=\sqrt{۳۰}$$

۳-با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا $DH = DH'$ ؟



چون AD نیمساز زاویه A است و از آنجا که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است بنابراین $DH = DH'$.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH'\times AB}{\frac{۱}{۲}DH\times AC}=\frac{AB}{AC}\qquad(۱)$$

ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{۱}{۲}BD\times AH''}{\frac{۱}{۲}CD\times AH''}=\frac{BD}{CD}\qquad(۲)$$

از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

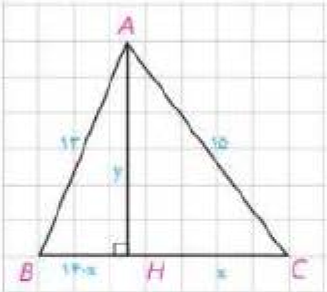
$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$$

درس چهارم : قضیه‌ی هرون (محاسبه‌ی ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

سوال متن صفحه ۷۳

با مسئله زیر در کتاب هندسه ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های AHB و AHC اندازه‌های x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :



به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می‌کنیم :

$$\begin{cases} CH^۲ + AH^۲ = AC^۲ \\ BH^۲ + AH^۲ = AB^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۲۲۵ \\ (۱۴ - x)^۲ + y^۲ = ۱۶۹ \end{cases}$$

طرفین این دو تساوی را از هم کم می‌کنیم که با حذف $y^۲$ معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آید :

$$x^۲ - (۱۴ - x)^۲ = ۵۶ \Rightarrow x^۲ - ۱۹۶ - x^۲ + ۲۸x = ۵۶$$

$$\Rightarrow x = ۹ \quad و \quad y = ۱۲ \quad و \quad S = \frac{۱}{۲} BC.AH = ۸۴$$

مثال صفحه ۷۳

مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است با:

$$۲P = ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ = ۴۲ \Rightarrow P = ۲۱$$

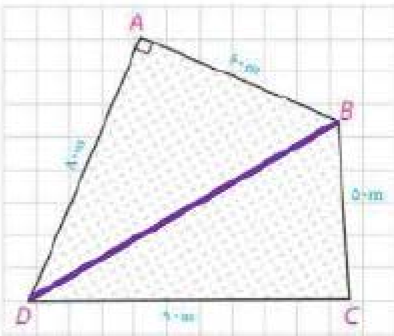
$$s = \sqrt{۲۱ \times ۶ \times ۷ \times ۸} = \sqrt{۷^۲ \times ۳^۲ \times ۲^۴} = ۸۴$$

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با :

$$h_a = \frac{۲s}{a} = \frac{۲ \times ۸۴}{۱۴} = ۱۲ \quad و \quad h_b = \frac{۲s}{b} = \frac{۲ \times ۸۴}{۱۵} = \frac{۵۶}{۵} \quad و \quad h_c = \frac{۲s}{c} = \frac{۲ \times ۸۴}{۱۳} = \frac{۱۶۸}{۱۳}$$

کار در کلاس صفحه ۷۴

چهارضلعی ABCD یک مزرعه کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به دست آورید :



الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$BD^۲ = ۶۰^۲ + ۸۰^۲ = ۳۶۰۰ + ۶۴۰۰ = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow BD = ۱۰۰$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$S_{ABD} = \frac{AD \times AB}{۲} = \frac{۸۰ \times ۶۰}{۲} = ۲۴۰۰$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به دست آورید.

$$P=\frac{۱۰۰+۹۰+۵۰}{۲}=۱۲۰$$

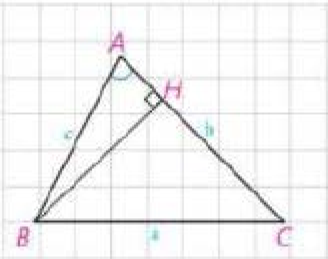
$$S_{CBD}=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۱۲۰(۱۲۰-۱۰۰)(۱۲۰-۹۰)(۱۲۰-۵۰)}$$
$$=\sqrt{۱۲۰\times ۲۰\times ۳۰\times ۷۰}=\sqrt{۵۰۴۰۰۰۰}\simeq ۲۲۴۴/۹۴۴$$

ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با:

$$S=۲۴۰۰+۲۲۴۴/۹۹۴\simeq ۴۶۴۴/۹۹۴$$

فعالیت صفحه ۷۴

می‌خواهیم دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به دست آوریم.



۱-در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.

$$\sin A=\frac{BH}{c}\Rightarrow BH=c\times\sin A$$

۲-مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BH\times AC=\frac{۱}{۲}bc.\sin A$$

کار در کلاس صفحه ۷۵

۱-مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید.

$$P=\frac{۷+۵+۳}{۲}=\frac{۱۵}{۲}$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{\frac{۱۵}{۲}\left(\frac{۱۵}{۲}-۷\right)\left(\frac{۱۵}{۲}-۵\right)\left(\frac{۱۵}{۲}-۳\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{۱۵}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۹}{۲}}=\sqrt{\frac{۶۷۵}{۱۶}}=\frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳}$$

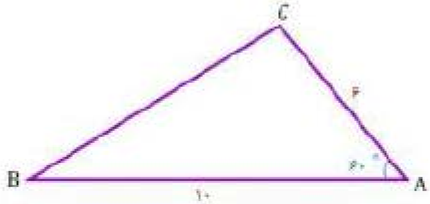
۲-مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S=\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A$ بنویسید.

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۵\times \sin A=\frac{۱۵}{۲}\sin A$$

۳-از مقایسه‌ی نتایج ۱ و ۲ اندازه‌ی زاویه‌ی منفرجه $\hat{A}$ را به دست آورید.

$$\frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳}=\frac{۱۵}{۲}\sin A\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ$$

تمرین صفحه ۷۵



۱-در مثلث ABC، $AB = ۱۰$، $AC = ۶$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$.

الف) طول BC را به دست آورید.

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲\, AB.AC.\cos A$$

$$BC^۲ = (۱۰)^۲ + (۶)^۲ - ۲ \times ۱۰ \times ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۱۰۰ + ۳۶ - ۶۰ = ۷۶ \Longrightarrow BC = \sqrt{۷۶} = ۲\sqrt{۱۹}$$

ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

روش اول :

$$S = \frac{۱}{۲} AC \times AB \times \sin A = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$$

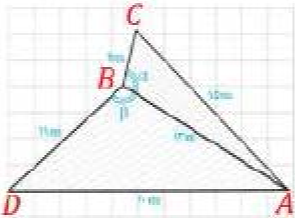
روش دوم : با استفاده از دستور هرون نیز می‌توان مساحت را به دست آورد.

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{۲\sqrt{۱۹}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۶}{\sin B} \Longrightarrow \sin B = \frac{۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۹}} = \frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۹}} \xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \sin B = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$$

۲-دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟



ابتدا با استفاده از دستور هرون مساحت مثلث‌های ACB و ABD را به دست می‌آوریم.

$$P_{ACB} = \frac{۱۵ + ۱۳ + ۴}{۲} = ۱۶ \Longrightarrow S_{ACB} = \sqrt{۱۶ \times ۱ \times ۳ \times ۱۲} = ۲۴m^۲$$

$$P_{ABD} = \frac{۱۳ + ۱۱ + ۲۰}{۲} = ۲۲ \Longrightarrow S_{ABD} = \sqrt{۲۲ \times ۹ \times ۱۱ \times ۲} = ۶۶m^۲$$

$$S_{ACBD} = S_{ACB} + S_{ABD} = ۲۴ + ۶۶ = ۹۰m^۲$$

نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha = \beta)$

روش اول : با استفاده از مساحت‌های دو مثلث ACB و ABD داریم :

$$\begin{cases} S_{ACB} = \frac{۱}{۲} BC \times AB \times \sin\alpha \\ S_{ABD} = \frac{۱}{۲} AB \times BD \times \sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۴ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱۳ \times \sin\alpha \\ ۶۶ = \frac{۱}{۲} \times ۱۳ \times ۱۱ \times \sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \\ \sin\beta = \frac{۱۲}{۱۳} \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$$

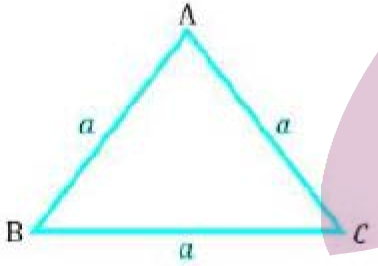
$$\Rightarrow \alpha = \beta$$

روش دوم : با استفاده از قضیه کسینوس‌ها نیز می‌توان نشان داد یعنی :

$$\begin{cases} (۱۵)^۲ = (۴)^۲ + (۱۳)^۲ - ۲ \times ۴ \times ۱۳ \times \cos\alpha \\ (۲۰)^۲ = (۱۳)^۲ + (۱۱)^۲ - ۲ \times ۱۱ \times ۱۳ \times \cos\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۲۵ = ۱۸۵ - ۱۰۴ \cos\alpha \\ ۴۰۰ = ۲۹۰ - ۲۸۶ \cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{۵}{۱۳} \\ \cos\beta = -\frac{۵}{۱۳} \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

۳-دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

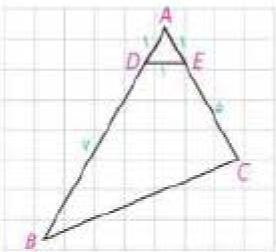


$$AB = AC = BC = a \quad و \quad P = \frac{a + a + a}{۲} = \frac{۳a}{۲}$$

$$S = \sqrt{\frac{۳a}{۲}\left(\frac{۳a}{۲} - a\right)\left(\frac{۳a}{۲} - a\right)\left(\frac{۳a}{۲} - a\right)}$$

$$S = \sqrt{\frac{۳a}{۲}\left(\frac{۳a}{۲} - a\right)^۳} = \sqrt{\frac{۳a}{۲} \times \left(\frac{a}{۲}\right)^۳} = \sqrt{\frac{۳a^۴}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲$$

۴-در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



مثلث ADE مثلث متساوی‌الاضلاع است بنابراین $\hat{A} = ۶۰$ است. حال با استفاده از قضیه کسینوس‌ها ضلع BC را به دست می‌آوریم :

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲\, AB \times AC \times \cos A$$
$$= ۸^۲ + ۶^۲ - ۲(۸) \times ۶ \times \cos ۶۰$$
$$BC^۲ = ۶۴ + ۳۶ - ۴۸ = ۵۲ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۳}$$

حال مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم و بعد با کم کردن مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ADE مساحت چهارضلعی $DECB$ به دست می‌آید :

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} \xRightarrow{a=۱} S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{DECB} = S_{ABC} - S_{ADE} = ۱۲\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$

۵-در شکل زیر AD نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ است. با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه A به دست آورید.

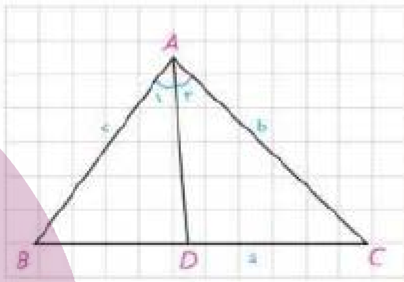
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A = \frac{۱}{۲}(AB) \times (AD) \times \sin\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}(AC) \times (AD) \times \sin\frac{A}{۲}$$

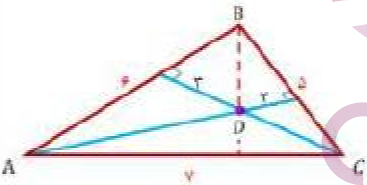
$$\Rightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin\frac{A}{۲}(AB + AC)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB.AC.\sin A}{(AB + AC)\sin\frac{A}{۲}} = \frac{۲\,AB.AC.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(AB + AC)\sin\frac{A}{۲}}$$

$$\Rightarrow AD = d_a \Rightarrow \left(\text{نیمساز رأس } A\right) d_a = \frac{۲\,bc.\cos\frac{A}{۲}}{b + c}$$



۶-در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶ به فاصله ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگتر چه فاصله‌ای دارد؟



نقطه تقاطع خطوط داخل مثلث ABC را D می‌نامیم که همان نقطه مورد نظر است.

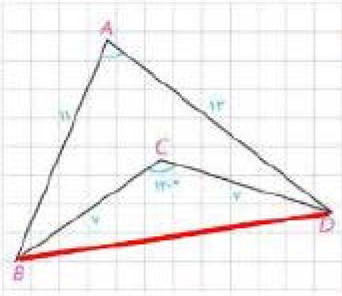
$$S_{ABC} = S_{BDA} + S_{BDC} + S_{ADC} \qquad (۱)$$

$$P_{ABC} = \frac{۵ + ۶ + ۷}{۲} = ۹ \quad \Rightarrow \quad S_{ABC} = \sqrt{۹(۹-۵)(۹-۶)(۹-۷)} = \sqrt{۹ \times ۴ \times ۳ \times ۲} = ۶\sqrt{۶}$$

$$S_{BDA} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۶ = ۹ \quad \text{و} \quad S_{BDC} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۵ = ۵ \quad \text{و} \quad S_{ADC} = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times x = \frac{۷}{۲}x$$

$$\xRightarrow{(۱)} ۶\sqrt{۶} = ۹ + ۵ + \frac{۷}{۲}x \quad \Rightarrow ۶\sqrt{۶} - ۱۴ = \frac{۷}{۲}x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{۲}{۷}\left(۶\sqrt{۶} - ۱۴\right) = ۰/۲ \quad \Rightarrow \quad x = ۰/۲$$

۷-در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.



ابتدا نقطه B را به نقطه D وصل می‌کنیم. می‌بینیم که مثلث BCD متساوی‌الساقین است. با توجه به زوایای داخلی مثلث و زاویه $B\hat{C}D$ پس $C\hat{B}D = C\hat{D}B = 30^\circ$.
حال با استفاده از قضیه کسینوس‌ها طول ضلع BD را به دست می‌آوریم. بنابراین :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2\,BC \times CD \times \cos 120^\circ$$

$$BD^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \times 7 \times 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 147 \Rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

حال با استفاده از دستور هرون و نتیجه صفحه ۷۴ داریم :

$$P_{ABD} = \frac{11 + 13 + 7\sqrt{3}}{2} = 12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3})(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 7\sqrt{3})(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 13)(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 11)}$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3})(12 - \frac{7}{2}\sqrt{3})(\frac{7}{2}\sqrt{3} - 1)(\frac{7}{2}\sqrt{3} + 1)}$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{\left(144 - \frac{147}{4}\right)\left(\frac{147}{4} - 1\right)} = \sqrt{\frac{429}{4} \times \frac{143}{4}} = \sqrt{\frac{61347}{16}} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{143\sqrt{3}}{4} \qquad (1)$$

از طرفی داریم:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin A = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \sin A = \frac{143}{2} \sin A \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{143\sqrt{3}}{4} = \frac{143}{2} \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 60$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sin 120 = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} = \frac{143\sqrt{3}}{4} - \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{94\sqrt{3}}{4}$$

۸- ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

اگر در متوازی‌الاضلاع ABCD ، B را به D وصل کنیم، با توجه به ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع داریم :

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \times \frac{1}{2} \times ab \,.\, \sin\alpha \Rightarrow S_{ABCD} = ab \,.\, \sin\alpha$$

۹- به کمک قضیه کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ > b^۲ + c^۲$

$$\hat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow \cos A < ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\cos A < ۰ \Leftrightarrow -۲bc.\cos A > ۰$$

$$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲$$

ب) $\hat{A} < ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ < b^۲ + c^۲$

$$\hat{A} < ۹۰^\circ \Leftrightarrow \cos A > ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\cos A > ۰ \Leftrightarrow -۲bc.\cos A < ۰$$

$$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A < b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲$$

پ) $\hat{A} = ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow \cos A = \cos ۹۰^\circ = ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\cos A = ۰ \Leftrightarrow -۲bc.\cos A = ۰$$

$$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos A = b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

۱۰- به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده(تند)، قائمه یا منفرجه(باز) بودن زاویه A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید:

الف) $BC = ۹$ ، $AC = ۶$ ، $AB = ۱۰$

$a = ۹$ و $b = ۶$ و $c = ۱۰$

$a^۲ = ۸۱$ و $b^۲ + c^۲ = ۱۳۶ \Rightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} < ۹۰^\circ$

ب) $BC = ۹$ ، $AC = ۴$ ، $AB = ۸$

$a = ۹$ و $b = ۴$ و $c = ۸$

$a^۲ = ۸۱$ و $b^۲ + c^۲ = ۸۰ \Rightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$

پ) $BC = ۱۷$ ، $AC = ۱۵$ ، $AB = ۸$

$a = ۱۷$ و $b = ۱۵$ و $c = ۸$

$a^۲ = ۲۸۹$ و $b^۲ + c^۲ = ۲۸۹ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$