

ایران توشه

IranTooshe.ir



فصل ۱ – آمار و احتمال

دروس ۱ شمارش

دروس ۲ احتمال

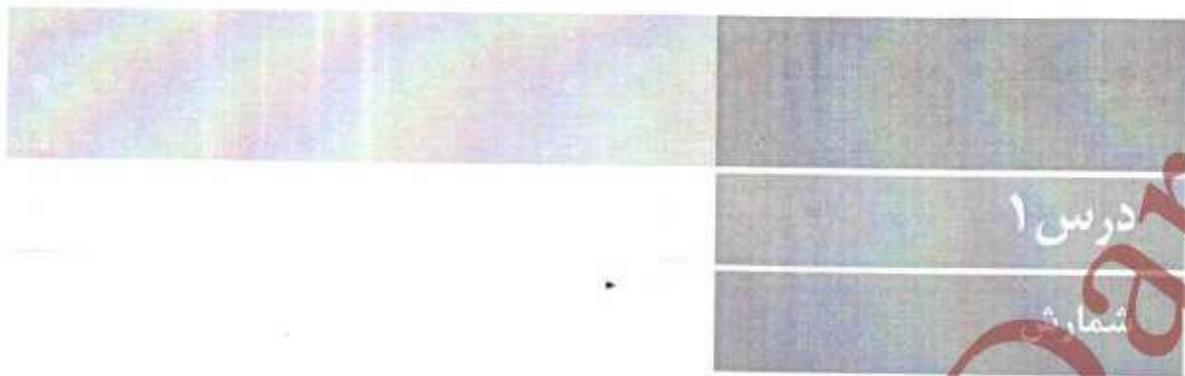
دروس ۳ چرخه آمار در حل مسائل

«... و أحاط بهما تبیهم و أحسنی کل شریع عتدها» (آلہ ۲۸ / سوره مبارکة جن)

«... و او (خداؤند) به آنچه ترد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را شمارش کرده امته»



روسانی مشکله - امکان کمالان (امیر مدان اشنی)



درس ۱

شمارش

فعالیت



۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۲۰ کتاب متفاوت درباره روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می‌تواند یکی از ۳۰ کتاب روان‌شناسی «یا» یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع $30 + 25 = 55$ راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (علیها السلام) است. او می‌تواند به صورت «راگان» (استفاده از سرویس بیمارستان با پیاده‌روی) یا با «برداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همه حالت‌های ممکن را که او می‌تواند به صورت راگان «یا» با برداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسید: {راگان, هزینه, مترو, تاکسی, پیاده‌روی}.

شما برای حل کردن هر دو قسمت، از فاعده‌ی اصلی استفاده کردید که به اصل جم جم معروف است و به صورت زیر بیان می‌شود.

اصل جم

اگر بتوان عملی را به m طرق و عمل دیگری را به n طرق انجام داد، و این دو عمل را توان باهم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طرق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جم به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است).



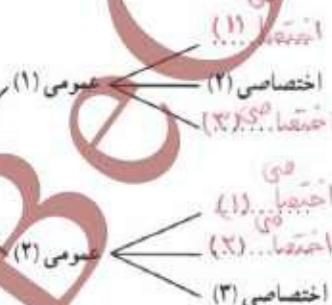
نمای شما به چند طریق می‌توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین چهار خودکار با چهار رنگ مختلف و پنج مداد با رنگ‌های مختلف و سه روان‌نویس با رنگ‌های مختلف انتخاب کنید؟
بله، در صورت مسئله از لفظ «با» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیا می‌تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل حمله دارم

$$5+4+3=12 = \text{تعداد انتخاب‌ها}$$



فعالیت

فرض کنید دانشجویی می‌خواهد از بین دوستیان عمومی از ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی از ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند یک درس علی‌الخصوص «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید:



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی $3^2 = 9$. راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به $9 \times 3 = 27$. طریق امکان‌پذیر است.

اصل ضرب

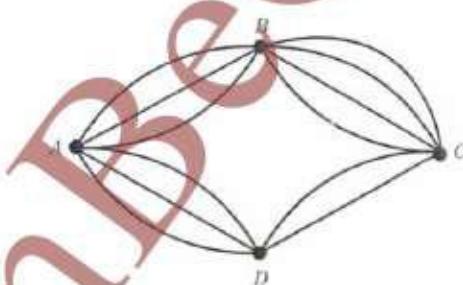
اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق (و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به «روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است).



کار در کلاس

مطابق شکل رویه رو، میان چهار شهر A , B , C و D راه های وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می توان:

(الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟ از A به B راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به $3 \times 4 = 12$ طریق می توان از A به C را انتخاب کرد.



(ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

برای سفر از A به C می توان یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ (یا $C \rightarrow A \rightarrow B$) را انتخاب کرد (اصل ۲). بنابراین:

تعداد راه های سفر از A به C برابر با $2 \times 4 = 8$ است.

$$= 2 \times 4 + 2 \times 4 = 8 + 8 = 16$$

(پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می توان یکی از دو مسیر $B \rightarrow A \rightarrow D$ (یا $D \rightarrow A \rightarrow B$) را انتخاب کرد؛ بنابراین:

$$D \text{ به } B = 4 \times 3 + 3 \times 4 = 12 + 12 = 24$$

نماد فاکتوریل

همانطور که برای ضرب یک عدد، مانند a ، در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $a \times a = a^2$ ، برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچکتر از خودش از نماد فاکتوریل «!» استفاده می‌کنیم. برای مثال، $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ و $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

قرارداد: برای اعداد صفر و بزرگ، فاکتوریل را به صورت $1! = 1$ و $0! = 1$ تعریف می‌کنیم.

مثال: حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 24 \times 2 = 48 \quad (\text{الف})$$

$$\text{ب)} \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \overbrace{(3 \times 2 \times 1)}^{3!}}{(3 \times 2 \times 1)} = 5 \times 4 = 20$$

$$\text{پ)} \frac{1!}{7!} = \frac{1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7!} = 1$$

$$\text{ت)} \frac{3! \times 5! \times 1!}{7! \times 6!} = \frac{\cancel{3!} \times \cancel{5!} \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{7}$$

جایگشت

چهار شیء متمایز a, b, c و d را در نظر بگیرید. اگر باشد $abcd$ ، که از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء به دست آمده، با ارایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک جایگشت n نامی ازین 4 شیء گفته می‌شود. در حالت کلی، «هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز» را یک جایگشت n نامی از n شیء می‌نامیم.

فعالیت

۱- اگر افراد A, B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$\frac{2}{C} \quad \frac{2}{B} \quad \frac{1}{A} \rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$$

پکی از ۲ نفر باقی مانده \rightarrow ۱ نفر باقی مانده \rightarrow $3 \times 2 \times 1 = 6$

$$ABC - ACB - BAC - BCA - CAB - CBA$$

↓
(اول شخص B ، بعد C و اخر A سخنرانی کردند)

۲- با ارقام $5, 4, 7, 2$ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

$$5 \quad 4 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \rightarrow 5! = \text{تعداد اعداد ۵ رقمی}$$



۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۶

۲- ثابت کنید تعداد کل جایگشت های «نایی از n شی» متمایز، برابر است با $n!$.

حل: اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از چه (یا راست) «انتخاب داریم و مکان بعدی ...!». انتخاب داریم و ... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت ها برابر است
یا، $\dots \times n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$

هر حالت از کنار هم فوار کردن n شی متمایز را یک جایگشت «نایی از آن n شی» می‌نامیم، و تعداد این جایگشت ها برابر است با $n!$.

کار در کلاس

ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض اند. این ارقام:

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 5 & & 5 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & & & 2 & & 2 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ 1 & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{array} \rightarrow \text{تعداد انتخاب ها}$$

(توجه دارد که صفر در سمت چپ اعداد خواهد نمی شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

(من دانیم که اگر رقمی بکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است.) تا برای این:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 5 & & 5 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & & & 2 & & 2 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ 1 & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \rightarrow 288 = 3 \times 4 \times 5 \times 2 \times 1 \rightarrow \text{تعداد انتخاب ها}$$

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول: تعداد ۵ رقمی های فرد - تعداد کل ۵ رقمی ها = تعداد ۵ رقمی های زوج
 $= 600 - 288 = 312$

روش دوم: اعداد زوج و ۵ رقمی ای که با این ارقام می‌توان ساخت، با به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمی می‌کنیم:
 (الف) ۵ رقمی هایی که به صفر ختم می‌شوند

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 5 & & 5 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & & & 2 & & 2 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ 1 & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \rightarrow \text{تعداد انتخاب ها}$$

ب) ۵ رقمی هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 4 & & 4 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & & & 2 & & 2 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & \swarrow & & \searrow & & \\ 1 & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \rightarrow 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 192 \rightarrow \text{تعداد انتخاب ها}$$

$120 + 192 = 312$ = تعداد ۵ رقمی های زوج



کارهایی که به ۵ ختم می‌شوند + ۵ رقیهای که به صفر ختم می‌شوند = تعداد ۵ رقیهای مضرب ۵

$$\frac{5}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{4}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{3}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{2}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{1}{\text{اصل ضرب}} \rightarrow \text{تعداد انتخابها} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$\frac{4}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{3}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{2}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{1}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{5}{\text{اصل ضرب}} \rightarrow \text{تعداد انتخابها} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$$

$$120 + 96 = 216$$

تبدیل (انتخاب ۷ شیء از بین ۱۲ شیء، که در آن جایه‌جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد).

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد انتخاب ۴ رقیه را که با ارقام ۱ تا ۷ می‌توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست.)

$$\frac{7}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{6}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{5}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{4}{\text{اصل ضرب}} \rightarrow \text{تعداد انتخابها} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

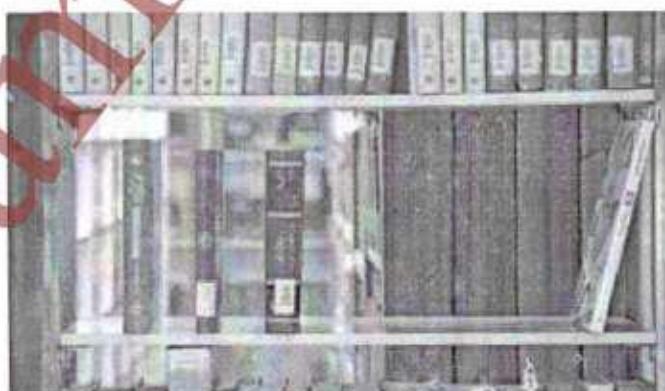
$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!} = 840 : \text{از طرفی}$$

(توجه دارید که با جایه‌جایی هر رقم از این عدد ۴ رقیه بازدمیگریم، یک عدد ۴ رقیی جدید حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت‌ها، جایه‌جایی ترتیب قرار گرفتن اشیاء انتخاب شده، اهمیت دارد).

۲. به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را ازین ۵ کتاب منابع، انتخاب کنیم و در یک ردیف بینمیم؟

$$\frac{5}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{4}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{3}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{2}{\text{اصل ضرب}} \cdot \frac{1}{\text{اصل ضرب}} \rightarrow \text{تعداد انتخابها} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60 : \text{از طرفی}$$



در حالت کلی، نشان دهد تعداد انتخاب های r شیء از بین n ($r \leq n$)، که جایه جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد.

$$\begin{aligned} & \text{تعداد انتخاب ها} \\ & \xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}} \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-3} \cdots \frac{(n-r+2)}{(n-r+1)} \cdot \frac{(n-r+1)}{(n-r)} \\ & = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \times (n-r+1) \cdots 1}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

* تبدیل r شیء از n شیء با جایگشت r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء (که جایه جایی با ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n,r)$ نشان می دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می کنیم:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست).

حل: در واقع باید سه رقم را از بین ۷ رقم داده شده انتخاب کنیم که آنها جایه جایی آنها سه از انتخاب، عدد جدیدی می سازد و اهمیت دارد.

$$\begin{aligned} & P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210 \\ & \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \end{aligned}$$

* ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء) که در آن جایه جایی اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه عضوی شکل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جایه جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی کند و نیز جوی سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشكیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب های سه تایی از بین ۴ رقم) را برشود... تقسیم کنیم.

* تعداد مجموعه های سه عضوی

$$P(4,3) = \frac{4!}{3!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱,۲,۴	۱,۲,۵	۱,۳,۶	۲,۳,۶
	۱۲۴	۱۲۵	۱۳۶	۲۳۶
	۱۴۲	۱۶۲	۱۶۴	۲۴۲
جاگذشت های سه رقم انتخاب شده	۲۴۱	۲۱۶	۴۱۶	۴۲۶
	۲۱۴	۲۶۱	۴۶۱	۴۶۲
	۲۱۲	۶۱۲	۶۱۴	۶۲۴
	۴۲۱	۶۲۱	۶۴۱	۶۴۲
	$A_1 = \{1, 2, 4\}$	$A_2 = \{1, 2, 5\}$	$A_3 = \{1, 3, 6\}$	$A_4 = \{2, 3, 6\}$

* تعداد مجموعه های سه عضوی

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!} = 20$$

* ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء را که جایه جایی اشیاء انتخاب شده، پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $\binom{n}{r}$ نشان می دهیم و بایر دستور نه محاسبه می کنیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین 7 کتاب انتخاب کنیم و به دوستان خوبه دادیم؟

حل: در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (نکرار مجاز نیست).

روش اول: $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \longrightarrow 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

روش دوم: $P(9, 5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 15120$



۶۰) به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

در ساختن تیم با حایه‌جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی‌شود بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\text{نعداد تیم‌های ۶ نفره} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = 84$$

۳. مجموعه A عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

هر سه عضو از ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می‌سازد (در مجموعه‌ها جایه‌جایی اعضای اهمیت ندارد؛ بنابراین این دارای ۳۶۰ ترکیب است).

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

۴. در جمعه‌ای ۴ مهره فرمز و ۳ مهره اس و بجود دارد. به چند طریق می‌توانیم سه مهره از این جمعه خارج کنیم؟
در انتخاب مهره‌های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره فرمز و ۱ مهره ای خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده‌اند. در ه صورت ۲ فرمز و ۱ ای خارج شده است) و بنابراین داریم:

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره: } \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3! \times 6!} = 84$$

تمرين

۱. می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس نازدهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب دیم؟

$$12 + 11 + 10 = 33$$

۲. بین پنج شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راههای وجود دارد که همه در طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان:

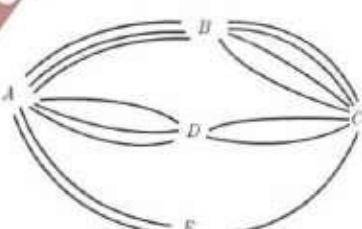
$$(r \times s) + (r \times t) + (s \times t) = 0.$$

الف) از شهر A به شهر C مسافت گرد؟

1000

(ب) از D بدون عبور از E مسافت کرده؟

$$V + (V \times V) = V$$



۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف : (با معنی یا بی معنی)

(الف) جند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

(ب) جند کلمه ۲ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

(پ) جند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» سروع و به «ال» ختم شوند؟

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره جند بازی انجام شده است؟

۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهای در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه جند انتخاب دارد؟

۶. مجموعه $A = \{1, 2, 3, 8, 9\}$ مذکور است: (الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟ (ب) چند عدد ۵ رقمی و زوج تراز 8^{****} می توان نوشت؟ (ب) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

(ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

۷. روی محيط یک دایره ۱۲ نقطه محدد دارد. مشخص کنید: (الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟
(ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

۸. من خواهیم از بین ۵ داش آموز یا به بازدها و ۴ داش آموز یا به دوازدهم افرادی را انتخاب کیم و یک تیم ۶ نفره والیال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

(الف) به تعداد مساوی داش آموز یا به بازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

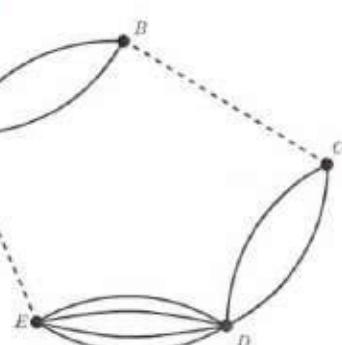
(ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از یا به دوازدهم باشد.

(پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، داش آموز یا به دوازدهم باشند.

(ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از یا به بازدهم باشند.

۹. مستلهای طرح کنید که باستخ \overline{AB} آن به صورت $(2 \times 2 + 2 \times 4 + 3^2)$ باشد.

۱۰. تعداد راهها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر می توان به ۲ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



حل تمرینهای صفحه ۱۱

تمرین ۳ :

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

ب) $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$

ب) $1 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

تمرین ۴ :

$$P(10, 5) = \frac{10!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 362880$$

الف) $7 \times 6 \times 5 = 210$

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ب) $2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 240$

ب) $\binom{6}{3} = 20$

ب) $\binom{10}{5} \times \binom{6}{1} = 252 \times 6 = 1512$

کافی است تعداد زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را پیدا کنیم.

$$\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 10$$

تمرین ۷ :

الف) $\binom{12}{3} = 220$

ب) $\binom{12}{2} = 66$

الف) $\binom{5}{2} \times \binom{6}{3} = 10 \times 20 = 200$

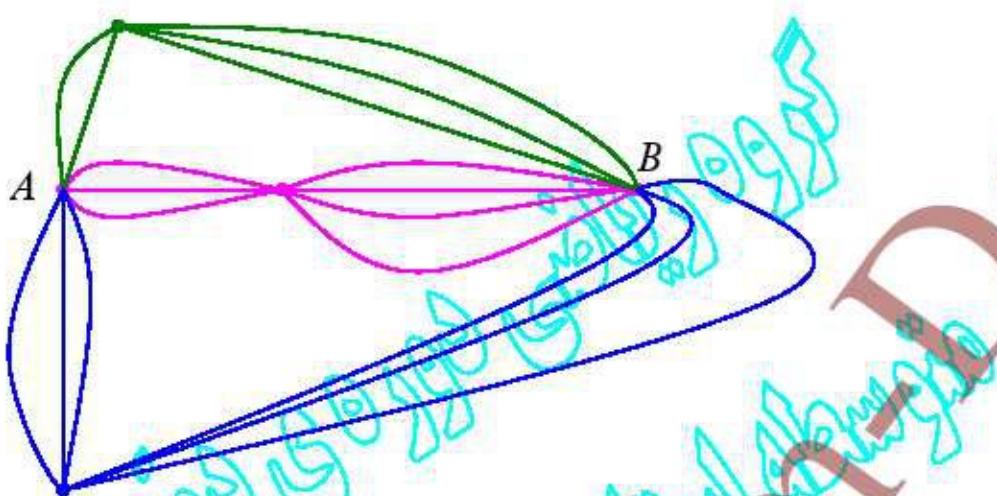
ب) $\binom{12}{2} = ????$

ب)

$$\binom{5}{2} \times \binom{6}{4} + \binom{5}{1} \times \binom{6}{5} + \binom{5}{0} \times \binom{6}{6} = (10 \times 15) + (5 \times 6) + (1 \times 1) = 150 + 30 + 1 = 181$$

$$c) \binom{5}{2} \times \binom{6}{4} = 10 \times 15 = 120$$

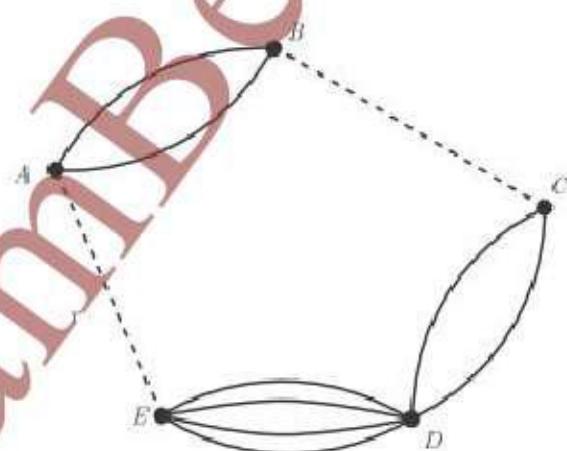
تمرین ۹: به توجه به شکل زیر، تعداد مسیرهای سفر از شهر A به شهر B را به دست آورید.



تمرین ۱۰: به نظر می‌رسد که صورت مسئله انتباہ تایپی دارد. حال اگر تغییر زیر را انجام دهیم، می‌توان

به شکل زیر عمل کرد.

۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر D به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



اکنون اگر تعداد مسیرهای از B به C را برابر m و همچنین تعداد مسیرهای از A به D را برابر n قرار دهیم خواهیم داشت.

$$2 \times m \times 2 + n \times 4 = 20 \rightarrow 4m + 4n = 20 \xrightarrow{+4} m + n = 5$$

لذا می‌توان نوشت:

m	۱	۲	۳	۴
n	۴	۳	۲	۱

درس ۲

حتمال

فعالیت

نرگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می شود؛ با وسائل نقلیه عمومی به مدرسه می رود و به طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می رسد. امروز صبح نرگس مانند هر روزی از ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می تواند به طور قطعی بگوید که او قبل از ملیکا به مدرسه می رسد؟ همچنان که نرگس نمی تواند به این پرسش باستخ فاطمی دهد. خوبه شان داده است که اگر وضعیت مانند هر روز عادی باشد، نرگس به موقع همیشه می رسد، اما آیا وضعیت همیشه عادی است؟ عامل های زیادی می توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند مانند میان ترافیک. از طرفی رفت و آمد در خیابان ها همیشه در حال تغییر است، آغاز حرکت و سرعت و سایل نقلیه عمومی به طور معمول منظم نیست و... . بنابراین: دو وضعیت وجود دارد: یکی اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد و دوم اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه نرسد.

پدیده هایی وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به طور قطعی مشخص نیست اما از رفوع همه حالت های ممکن در انها اطلاع داریم. برای مثال، وقتی از کیسه ای که شامل پنج مهره، قرمز و یک مهره سبز است، به طور تصادفی مهره ای خارج می کیم، می دانیم که رنگ مهره خارج شده سبز با قرمز است، اما قبل از بیرون کشیدن مهره، رنگ آن به طور قطعی مشخص نیست. این گونه ازمایش ها را ازمایش های تصادفی می نامیم.

به پدیده ها با ازمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای ازمایش به طور قطعی مشخص نیست، پدیده با آزمایش تصادفی می گویند. در پدیده های تصادفی از همه نتیجه های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعاً رخ می دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک ازمایش تصادفی، برآمد می گوییم.



- الف) نتیجه برتاب سله
ب) نتیجه برتاب تاسی

۱. هم ازماش نصادفی مثال برند.

با ازماش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای ازماش به طور قطع مشخص باشد، ازماش های پدیده های قطعی می گوییم.
برای مثال، حاتمی سنجی را به داخل استخراجی برتاب کنیم، قبل از اجرای ازماش می دانیم که سنج به داخل آب فرو می گردد یا
پس از برتاب یک سکه می دانیم که سکه روی زمین می شنبند. این گونه پدیده ها، ازماش هایی قطعی هستند.

۲. چند ازماش قطعی مثال برند.
الف) نتیجه رهاسناد سیب (زردخت)
کتس داری، چشمی، مهره حاضر
باشند.

کار در کلاس

۱. کدام یک از پدیده های زیر نصادفی و کدام یک قطعی است؟ جرا؟

الف) وجود داشت آموزی که سی اویشن از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم؛ **قطعی**

ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، برتاب سکه ای به در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگری عدد ۲ حک شده باشد؛ **نصادفی**

ب) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛ **قطعی**

ت) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین درجه، قبل از بازی؛ **نصادفی**

ت) در یک بازی بین دو نفر، سکه ای برتاب می شود و به دنبال آن نتیجه انداده می شود. اگر شخصی سکه اش رو و ناست زوج

باید، برنده است. آیا قبل از بازی می توان نظر برداشده را مشخص کرد؟ **نصادفی**

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور نصادفی یکی از آنها را خارج می کنیم.

الف) آیا مجموعه دو عضوی (خودکار، مداد) می تواند همه برآمدهای ممکن این ازماش نصادفی را نشان دهد؟ **جز**

ب) به نظر نسما چگونه می توان همه برآمدهای ممکن این ازماش نصادفی را مشخص کرد؟ **جز**

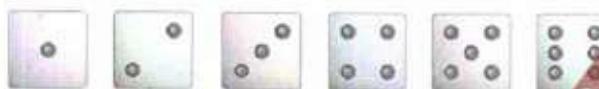
در این کتاب، اثباتی مورد بحث را با شماره گذاری متناظر می کنیم.

{ خودکاره، خودکاره، خودکاره، خودکاره، خودکاره، خودکاره، خودکاره، مداد ۳، مداد ۲، مداد ۱ }



فضای نمونه

در برنامه یک تاس بعد از آنکه تاس به زمین نشست، یکی از برمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم داشت، مجموعه همه برمدهای سکل در این آزمایش تصادفی، مجموعه ای را تشکیل می‌دهد که به آن فضای نمونه می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.



بنابراین، در برخال یک تاس، فضای نمونه برای است با: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فعالیت

فضای نمونه هر یک از ازمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.

۱. برتاب دو سکه یاهم.

برتاب سکه اول برتاب سکه دوم



کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونه برتاب دو تاس آئی و فرمز، جدول زیر را تکمیل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
۲	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
۳	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
۴	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
۵	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
۶	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

۱۴

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

۲. سه دوست با نام‌های علی، بارسا و محمد در یک رده کنار هم می‌نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

۳. در یکسال ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا از یکسال کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

$$\text{کل} = \frac{!}{3! \times 8!} = 165$$

پیشامد

با نهوم مجموعه و زیرمجموعه در کلاس نهم آشنایی داشتیم. مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم، هرگاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد در این صورت می‌نویسیم: $A \subseteq B$. برای مثال:

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

از طرفی، می‌دانیم $A = \emptyset$: یعنی هر مجموعه ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه نهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است: $\emptyset \subseteq A$.

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

حل:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مثال: در بروتافک تا سه، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) عدد کوچکتر از ۷ ظاهر شود. (ب) عدد بزرگتر از ۷ ظاهر شود.

حل:

$$(الف) A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (ب) A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S یک پیشامد می‌گویند. از آنجاکه $S \subseteq \emptyset$ ، پس ۰ یک پیشامد روی S است

و آن را پیشامد غیرممکن (تسنیدی)، همچنین $S \subseteq S$ پس ۱ نیز یک پیشامد است که آن را پیشامد حتمی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک بار بروتافک می‌کنیم: می‌دانیم $\{ب، ر\} = S$. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

$$S = \{\{\text{ب}\}, \{\text{ب، ر}\}, \{\text{ر}\}, \{\text{ر، ب}\}, \{\emptyset\}\}$$

۲. مردم، ملیکا و سوگند بولهایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان درباره دفاع مقدس از تماشگاه، کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت ممتاز نوشته و داخل گیشه‌ای انداختند. آنها با هو فرار گذاشتند که یک کارت را به طور تصادفی از یکسه خارج کنند و نام هر کسی که روی آن کارت بود، ایندا کتاب را به منزل برد و مطالعه کند. فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید.

اگر فرار یافتد و نفر از آنها بعد از مطالعه کتاب، با هم خلاصه آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

زیرمجموعه های درختی $\{\text{سوگند و ملیکا}\}, \{\text{ملیکا و سوگند}\}, \{\text{سوگند و ملیکا}\}$

۳. ناسی را بروتافک می‌کنیم. اگر پس از نشستن ناس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

(الف)

$$A = \{2, 2, 5\}$$

$$B = \{2\}$$

۱۵

$$\{\text{سوگند و ملیکا}\}, \{\text{ملیکا و سوگند}\}, \{\text{سوگند و ملیکا}\}, \{\text{ملیکا}\}, \{\text{سوگند}\}, \{\emptyset\}$$



جمله بیشترها، کافی است برآورده باشد.

$$C = \{2, 4, 6\}$$

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بیبورند.

$$\text{مثال بیشترها: } E = \{3, 4, 6\} \text{ رخ ندارد. زیرا}$$

(آ) دو ناس و یک برتاپ می‌کیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

$$\{(6, 6), (5, 5), (4, 4), (3, 3), (2, 2), (1, 1)\}$$

$$\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

{}

(ب) مجموع اعداد برآمده از دو ناس برابر با 7 باشد.

(ب) مجموع اعداد برآمده از دو ناس ۱۳ باشد.

(ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو ناس کمتر از ۳۷ باشد. کام اعضاي S

$$S = \{(6, 6), (5, 5), (4, 4), (3, 3), (2, 2), (1, 1)\}$$

۵. در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانشآموز سال دهم، ۶ دانشآموز سال بازدهم و ۴ دانشآموز سال دوازدهم شرکت دارند. فرار

است یک گروه پیشناز ۳ نفره از بین اینها برای صعود انتخاب می‌کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

(الف) سه نفر دانشآموز پیشناز از سه بایه مختلف باشند.

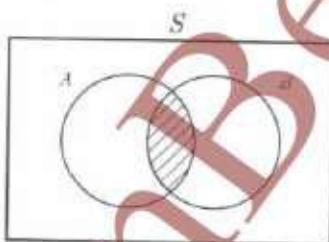
دوازدهم بازدهم دهم

$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

$$n(B) = \binom{6}{2} \times \binom{9}{1} + \binom{6}{1} \times \binom{9}{2} = 15 \times 9 + 20 \times 1 = 135 + 20 = 155$$

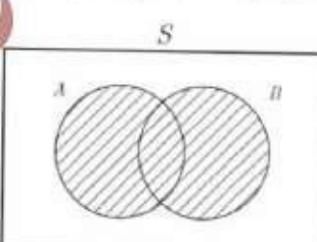
اعمال روی پیشامدها

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند؛ اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B، تفاضل B از A و متم مجموعه A را به صورت زیر باداوری می‌کنیم.



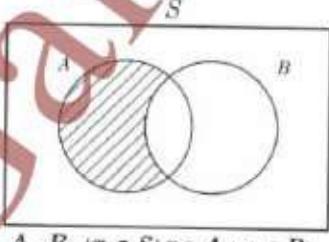
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(سکل ۱)



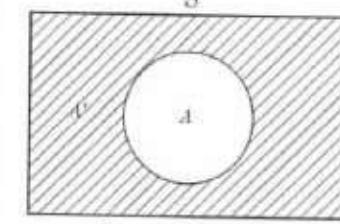
$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(سکل ۲)



$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(سکل ۳)



$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

(سکل ۴)





آندر

هرگاه A و B دو یشامد در فضای نمونه S باشند :

الف) یشامد $A \cap B$ وقتی رخ می دهد که یشامدهای A و B رخ دهند. (شکل ۱)

دو تاس را برتاب می کنیم. یشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که یکی از تاس ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

$A = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3)\}$: یکی از تاس ها ۵ باشد

$B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$: مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد

برای مشخص کردن یشامدی که در آن یکی از تاس ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد، کافی است $A \cap B$ را محاسبه کنیم.

$$A \cap B = \{(1,5), (5,1)\}$$

ب) یشامد $A \cup B$ وقتی رخ می دهد که یشامدهای A یا B (حداقل یکی از یشامدها) رخ دهند. (شکل ۲)

دو تاس را برتاب می کنیم. یشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که دو تاس یکسان با مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$: دو تاس یکسان

$B = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$: مجموع ۴ باشد

یشامد مورد نظر برابر با $A \cup B$ است.

$$A \cup B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,3), (2,1)\}$$

ب) یشامد $A - B$ وقتی رخ می دهد که یشامد A رخ دهد و یشامد B رخ ندهد. (شکل ۳)

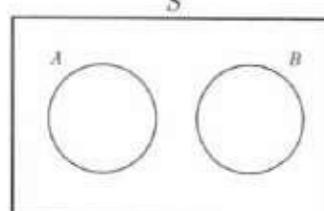
ت) یشامد A' وقتی رخ می دهد که یشامد A رخ ندهد. (شکل ۴)

در این حالت A و A' را دو یشامد متمم می گوییم و همواره داریم :

$$A \cup A' = S \quad A \cap A' = \emptyset$$

مثال : هرگاه A و B دو یشامد ناتنهی در فضای نمونه S باشند، به طوری که $A - B = B - A = B$ و $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت یشامد $A \cap B$ را محاسبه کنید.

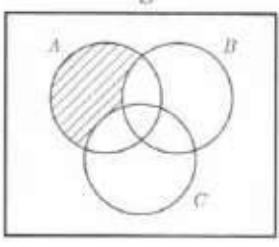
حل : چون $A - B = A - B = A$ و از انجا که A و B یشامدهای ناتنهی هستند، بتاریخن A و B عضو مشترکی ندارند؛ در این حالت $A \cap B = \emptyset$.



هرگاه A و B دو یشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت یشامدهای A و B را ناسازگار می گوییم.



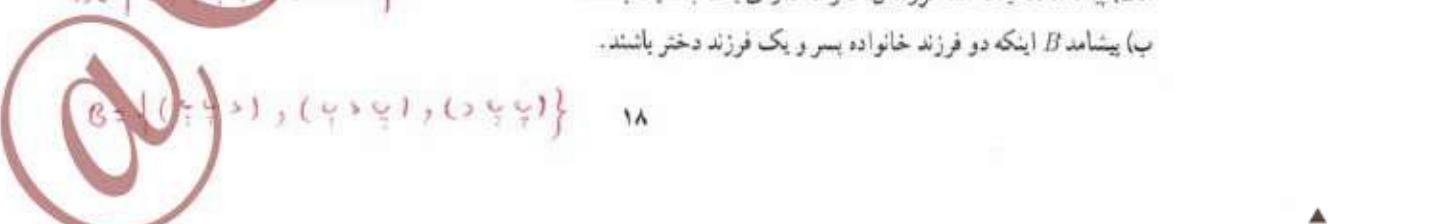
کار در کلاس

۱. کامی را برتاب می کنند؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.
- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{2, 3, 5\}$
- زوج
- $A \cap B = \{2\}$
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A - B = \{4\}$
- $B - A = \{3, 5\}$
- S
- 
- $A - (B \cup C)$
- فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.
۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای تابعه S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

– پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

- پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.
- S
- 

۳. خانواده ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
- الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.
- ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.
- $S = \{(ب, ب, ب), (ب, ب, ذ), (ب, ذ, ذ), (ذ, ذ, ذ)\}$
- $A = \{(ب, ب, ب), (ب, ذ, ذ), (ذ, ذ, ذ)\}$
- $B = \{(ب, ب, ب), (ب, ب, ذ)\}$
- ۱۸



$$C = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$$

چه می‌شاند C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به بیشامدهای A و B و C به سوالات زیر پاسخ دهد:

آیا بیشامدهای A و B ناساز گارند؟ **بله**

آیا بیشامدهای B و C ناساز گارند؟ **بله**

آیا بیشامدهای C و A ناساز گارند؟ **خیر**

۴. دو بیشامد ناساز گاراند از میان تصادفی را بنویسید. در رابطه میان بیشامدها آمد عذر خرد و آمد عذر زوج
ناساز گارند.

احتمال یک بیشامد

فرض کنید $S \neq \emptyset$ فضای نمونه متناهی یک بدیده تصادفی باشد. اگر S ، n برآمد برای وقوع داشته باشد و A بیشامدی در S باشد، در این صورت احتمال وقوع بیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می‌کیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

فعالیت

۱. جنان که بیشامد A تندی باشد، یعنی $A = \emptyset$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

۲. در حالتی که بیشامد A حتمی باشد، یعنی $S = A$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

$P(A) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$ $\Rightarrow P(S) = 1$

۳. هرگاه $A \subseteq B$ ، در این صورت جاهای خالی را بر کنید.

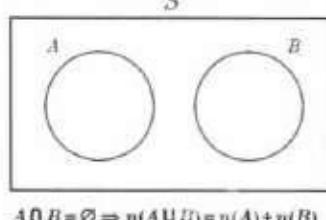
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A بیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، در این صورت داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

۵. هرگاه A و B دو بیشامد ناساز گار در فضای نمونه S باشند، با برگردان جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

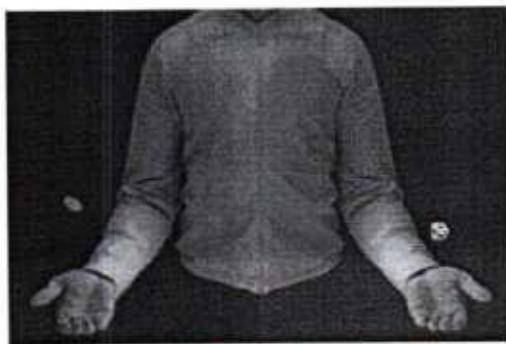
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$



کار در کلاس



۱. یک سکه و یک ناس را با هم برتاب می‌کیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:
الف) ناس زوج باید.

منهجه فضای تصادفی آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد:
بنابراین، $n(S) = 12$

$$S = \{(b, r), (r, b), (b, b), (r, r), (b, r), (r, b), (b, b), (r, r), (b, r), (r, b), (b, b), (r, r)\}$$

یشامد اینکه ناس زوج باشد، برابر است با:

$$A = \{(r, r), (b, b), (b, b), (r, r), (b, r), (r, b)\} : n(A) = 6$$

بنابراین، داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ب) سکه بشت باید.

$$B = \{(b, r), (r, b), (b, b), (r, r), (b, r), (r, b), (b, b), (r, r), (b, r), (r, b), (b, b), (r, r)\}$$

ب) ناس زوج یا سکه رو باید.

$$C = \{(b, b), (r, r), (b, b), (r, r), (b, r), (r, b), (b, b), (r, r), (b, r), (r, b), (b, b), (r, r)\}$$

ت) ناس فرد و سکه بشت باید.

$$D = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشیں است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:



الف) هر بینج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

هر یک از بینج نفر می‌تواند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند؛ بنابراین، در محاسبه $P(n)$ ، یک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر با ۱۲ حالت بر می‌شوند.

$$\text{تعداد انتخاب} \rightarrow n(s) = 12^5$$

نفر پنجم	نفر چهارم	نفر سوم	نفر دوم	نفر اول
----------	-----------	---------	---------	---------

برای محاسبه تعداد اعضای یستادن، به طوری که همه آنها در فروردین متولد شده باشند، کافی است در محاسبه (A) به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر فقط با یک حالت پر شوند.

$$\rightarrow \text{تعداد اشخاص} = \frac{1}{\text{فریبند}} + \frac{1}{\text{قرآن}} + \frac{1}{\text{قرآن و مکرر}} + \frac{1}{\text{قرآن و مکرر و مکرر}} + \frac{1}{\text{قرآن و مکرر و مکرر و مکرر}} \rightarrow n(A) = 5$$

10

در محدوده:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{10^5}$$

$$P(B) = \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{11^4} + \frac{1}{11^5} + \dots + \frac{1}{11^{10}} = \frac{\frac{1}{11^2}(1 - \frac{1}{11^9})}{1 - \frac{1}{11}} = \frac{1}{11^2} \cdot \frac{11^9 - 1}{11^9} = \frac{1}{11^2} \cdot \frac{11^9 - 1}{11^9}$$

$$P(C) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12^4} = \frac{55}{144}$$

۳. در یک یازدی ۱۱ نفره، یک هر شخص از شماره‌های ۴، ۳، ۲، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهم. سپس با برتاب دو تا س و مجموع اعداد پرآمد از آنها، نظر نمایم. مشخص است شود.

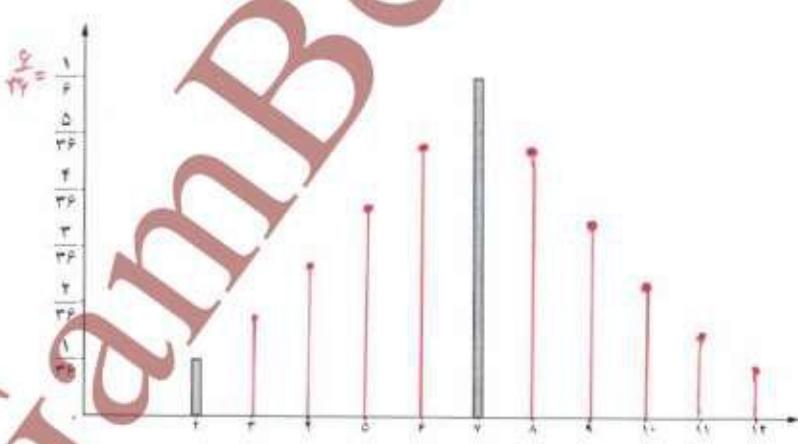
الف) احتمال برندگان شدن چه شماره‌ای نسبت به یقینه بیشتر است؟

این حالت بسته‌تر از دیگر حالت‌ها نیز بر حاصل شدن پیش‌بینی‌ها اثربار است.

ب) احتمال برندگان شدن کدام شماره‌ها از همه ممکن است
لذا احتمال برندگان شدن کارت ۷ میتر است.

ب) اما کسی که اختلال برنه شدنی داشت، ممکن است در این ماده برنده شود؛ جراحته میگیرد و از این راه میتواند در این ماده شرکت نداشته باشد.

ت) دستگاه مخصوصانی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد مردمه از دو تا سه و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار مبله‌ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



$$E = \{(1,2), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

$$P(E) = \frac{\epsilon}{\pi^2 \epsilon}$$

برائیں جمع ۵

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
CHP	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{13}{36}$
CHP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

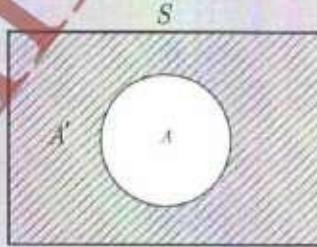


فعالیت

- در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه :
- الف) احتمال این را پایید که شیء انتخابی مداد باشد: $P(A)$.
 - ب) احتمال این را پایید که شیء انتخابی خودکار باشد: $P(B)$.
 - پ) احتمال این را پایید که شیء انتخاب شده مداد باشد: $P(A')$.
 - ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید: چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 - ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را بیندازید.
- $P(B) = \frac{5}{8}$
- $P(A') = \frac{3}{8}$
- $P(A) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$



اگر $P(A)$ احتمال وقوع یشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن یشامد را با $P(A')$ تابعی می‌دهیم و داریم: $P(A) + P(A') = 1$ یا $P(A') = 1 - P(A)$. در این حالت، A و A' را دو یشامد متمم می‌گوییم.



کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

۲. احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نزود برابر با 10% است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه کیارش به مدرسه برود.

۳. احتمال اینکه ریحانه انتسب سریال شکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه انتسب سریال را تماشا نکند.

$$1 - \frac{32}{49} = \frac{17}{49}$$

مثال: در یک فروشگاه، ورزشی تصادی براهن ورزشی شامل ۴ براهن قرمز، ۴ براهن آبی و ۲ براهن زرد در یک رخت ایزی قرار دارند. شخصی در خواست می‌کند: در ورود به طور تصادفی ۳ براهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

(الف) احتمال این را که ۲ براهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

(ب) احتمال این را که ۲ براهن مختلف باشند، محاسبه کنید.

(پ) احتمال این را که حداقل ۲ براهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

(ت) احتمال این را که حداقل ۲ براهن آبی باشند، محاسبه کنید.

(ج) جواب‌های قسمت‌های ت و پ را مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: (الف) جون قرار است ۳ براهن از بین ۱۰ براهن انتخاب شود، بنابراین داریم:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

چنانچه هر سه براهن یک رنگ باشند، آن گاه هر سه قرمز یا هر سه آبی هستند؛ بنابراین، اگر A بیشامد هر سه قرمز و B بیشامد هر سه آبی باشند، در این صورت می‌خواهیم $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم. از انجا که A و B متساز فرازند، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{4}{3}}{120} + \frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

(ب) برای اینکه رنگ سه براهن متفاوت باشد، آن گاه یک براهن قرمز، یک براهن آبی و یک براهن زرد است؛ بنابراین، داریم:

$$n(C) = \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 4 \times 2 = 32 \quad ; \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$





$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = P(S) = 1$$

ب) برای اینکه حداقل ۲ براهن قرمز باشند، آن‌گاه ۲ براهن قرمز با ۳ براهن قرمزد؛ بنابراین، متسابه با قسمت «الف» خواهیم داشت:

$$\text{فرموده براهن‌ها قرمز} \\ n(D) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 6 + 4 = 40 \quad ; \quad P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

ت) برای اینکه حداقل دو براهن آیی باشند، باید دو براهن آیی با یک براهن آیی و با صفر براهن آیی داشته باشیم:

$$\text{پنهان آیی براهن} \\ n(E) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} + \binom{4}{0} \times \binom{6}{3} = 6 \times 6 + 4 \times 15 + 1 \times 20 = 116 \\ P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

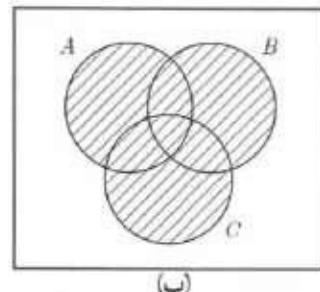
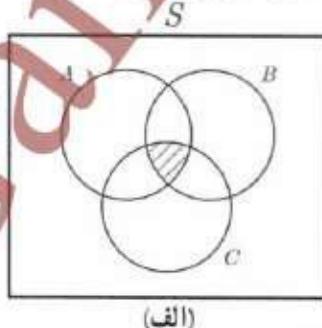
ث) اگر $P(F)$ احتمال ۳ براهن آیی باشد، آن‌گاه $P(F')$ احتمال این است که ۳ براهن آیی نباشند؛ بنابراین:

$$P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{4}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ج) قسمت‌های «ت» و «ث» یکسان‌اند. یعنی می‌توان راه حل قسمت «ت» را برای قسمت «ث» به کار برد. جنابجه در انتخاب ۳ براهن به دنبال تعداد براهن‌های آیی باشیم، پیشامدهای ممکن روی قفسای نموده به صورت زیر است.

تمرین

- ۱) کدام یک از بدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟
- الف) نام ۲ دانش آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کنیم
 - نام یکی از دانش آموزها استخراج شود. **تصادفی**
 - ب) مقداری اب را حراست می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود. **قطعی**
 - ب) نتیجه یک ازون جهارجوایی، که نیمی از مشکلات ان را شناسی باشیم داده ایم. **قطعی**
 - ت) در یک بازی ساده دو نفر، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.
 - عددی را انتخاب می‌کند.
 - سه واحد به آن عدد می‌افزاید.
 - سیز حاصل را دو برابر می‌کند.
 - از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.
 - نتیجه به دست امده را نصف می‌کند.
 - از حاصل به دست امده، عدد اولیه را کم می‌کند.
 - در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه کننده باشید را اعلام می‌کند. - ۲. سکای را برتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، ان گاه ناس را می‌بینم. در غیر این صورت، یکبار دیگر سکه را می‌اندازم.
 - الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
 - ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت باشد، با اعضاء مشخص کنید.
 - ۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچکتر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را بررمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:
 - الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی
 - ب) پیشامد ای که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.
 - ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجدد کامل باشد. ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $B - A$ را با اعضاء مشخص کنید.
 - ۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید



که هر یک از اعداد دورقی را که با ارقام $1, 2, 3, 4$ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می‌کنیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

- ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب 6 باشد. ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

۶. خانواده‌ای دارای 3 فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنبشی فرزندان این خانواده چیست؟

- ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند. ب) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد C که در آن حداقل 1 فرزند پسر باشند. ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

۷. خانواده‌ای دارای 4 فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنبشی فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

- ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوی و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. ت) ایا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه‌ای که شامل 12 سبب سالم و 5 سبب لکه‌دار است، 3 سبب را به طور تصادفی بر می‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :

الف) هر سه سبب سالم باشند. ب) دو سبب سالم و یک سبب لکه‌دار باشند.

ب) تعداد سبب‌های سالم از تعداد سبب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

۹. عقره دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از 8 ناحیه می‌افتد و عددی انتسان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که :

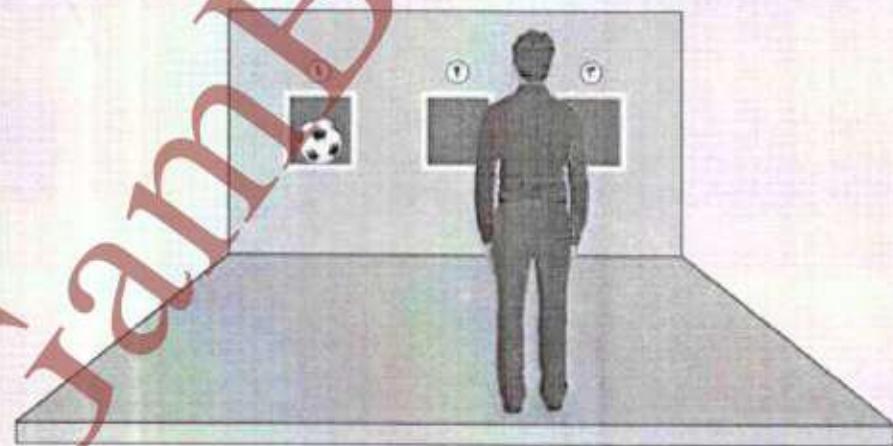


الف) عقره روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقره یک عدد اول با فرد را نشان دهد.

پ) عقره روی یک عدد مضرب 3 بایستد.

۱۰. ۷ برجم مختلف را به هفت میله برجم نصب گردایم و روی میله‌ها شماره‌های 1 تا 7 را حک کرده‌ایم. حتانجه این برجم‌ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله برجم‌ها با شماره‌های غیر اول در مکان‌های زوچ باشند.



خواندنی

در یک مسابقه، سه دریچه مطابق شکل زیر مقابل یک شرکت کننده قرار دارد. ناگهان یک دریچه به طور تصادفی باز می‌شود و تویی ازان به طرف شرکت کننده پرتاپ می‌شود. اگر این فرد تواند توب را بگیرد، برنده است و در غیراین صورت، بازنشده می‌شود.

به نظر شما، احتمال پرتاپ توب از هر دریچه چقدر است؟
اگر یک دریچه را غیرفعال کنند و شرکت کننده شماره دریچه همراه بازنشده را نداند، در این صورت احتمال پرتاپ توب از هر دریچه برای شرکت کننده در مسابقه چقدر است؟

۱۱. اراده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کتاب یکدیگر فرار می‌گیرند تا عکسی بادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپتان حضور داشته باشند؟

در یک مركب جنگلی حفاظت شده، ۲۰ فوج و حتی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می‌گیرند و سه از شان دار کردن، رهایش می‌کند. بعد از منس، محیط‌بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد فوج‌های شان دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداقل ۲ فوج نشان دار باشند.

۱۲. انجمن اولیا و مربیان یک دیبرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رای موافق، ۳ نفر رای مخالف و ۲ نفر رای متنم داده‌اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها ماتنده باشد.

حل تعریفهای صفحه‌ی ۲۵

تعریف ۲:

(الف)

$$R \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \\ ۶ \end{array} \right.$$

$$S = \{(R, ۱), (R, ۲), (R, ۳), (R, ۴), (R, ۵), (R, ۶), (P, P), (P, R)\}$$

(ب)

$$A = \{(R, ۲), (R, ۳), (R, ۶), (P, P), (P, R)\}$$

$$P \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \\ R \end{array} \right.$$

تعریف ۳:

(الف)

$$S = \{1, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹\}$$

(ب)

$$A = \{۳, ۹, ۱۵\}$$

(پ)

$$B = \{1, ۹\}$$

(ت)

$$A \cap B = \{1\} \text{ و } A - B = \{۳, ۱۵\}$$

تعریف ۴:

الف: هر سه پیشامد C و B و A با هم رخ دهند.

بعضی از این رخدادها می‌توانند A یا B یا C رخ دهند.

ایران توشه



تعريف ۵ :

(الف)

$$S = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$$

(ب)

$$A = \{12, 24, 32\}$$

(ج)

$$B = \{11, 13, 23, 31, 41, 43\}$$

تعريف ۶ :

(الف)

$$S = \{PPP, PPR, PRP, RPP, PRR, RPR, RRP, RRR\}$$

(ب)

$$A = \{PPP, RRR\}$$

(ج)

$$B = \{PPR, PRP, RPP\}$$

(د)

$$C = \{PPP, PPR, PRP, RPP\}$$

(هـ)

$$D = \{PRR, RPR, RRP, RRR\}$$

(وـ)

تعريف ۷ :

عضو $2^2 = 16$ (الف)

ب) $A = \{PPRR, PRRR, RPRR, RRRR\}$

ج) $C = \{PRRR, RPRR, RRPR, RRRP, RRRR\}$

ت) خیر ناسازگار نیستند.

تعريف ۸ :

الف) $P(A) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{220 \times 1}{680} = \frac{11}{34}$

ب) $P(B) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{66 \times 5}{680} = \frac{33}{68}$

ج) $P(C) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} + \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{11}{34} + \frac{33}{68} = \frac{55}{68}$

تعريف ۹:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

(الف)

$$A = \{2, 3, 4, 7\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(ب)

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

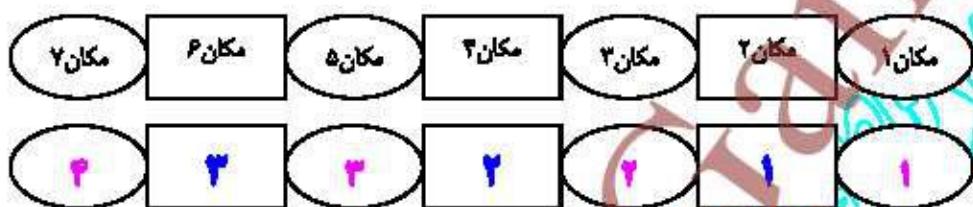
(ج)

$$C = \{3, 6\} \rightarrow P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

تعريف ۱۰:

۶ و ۴ و ۱ بیزه مهای غیر اول

۲ و ۵ و ۳ و ۲ بیزه مهای اول



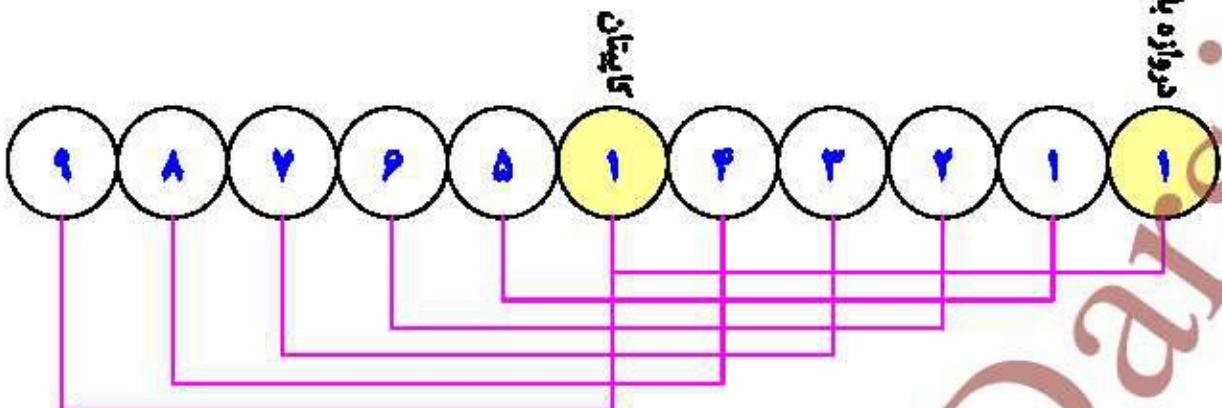
$$4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4! \times 3! = 144$$

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5040$$

$$P(E) = \frac{144}{5040} = \frac{1}{35}$$

تمرین ۱۱:

دروازه بان



تعداد حالت های مساعد = $۹! \times ۶ \times ۲$

تعداد کل حالت ها = $۱۱!$

$$P(E) = \frac{۹! \times ۶ \times ۲}{۱۱!} = \frac{۹! \times ۶ \times ۲}{۱۱ \times ۱۰ \times ۹!} = \frac{۶}{۵۵}$$

تمرین ۱۲:

$$P(E) = \frac{\binom{۵}{۲} \times \binom{۱۵}{۵}}{\binom{۲۰}{۷}} + \frac{\binom{۵}{۱} \times \binom{۱۵}{۶}}{\binom{۲۰}{۷}} + \frac{\binom{۵}{۰} \times \binom{۱۵}{۷}}{\binom{۲۰}{۷}} =$$

تمرین ۱۳:

(الف) $P(A) = \frac{\binom{۵}{۲} \times \binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} + \frac{\binom{۵}{۳} \times \binom{۵}{۰}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۱۰ \times ۵}{۱۲۰} + \frac{۱۰ \times ۱}{۱۲۰} = \frac{۵۰ + ۱۰}{۱۲۰} = \frac{1}{۲}$

(ب) $P(B) = \frac{\binom{۵}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۲}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۵ \times ۳ \times ۲}{۱۲۰} = \frac{۱}{۴}$

دنای امروز بر از اطلاعاتی است که ما در یخش‌های مختلف زندگی با آنها رو به رو می‌شویم. بنابراین، برای اینکه بتوانیم بهتر زندگی کیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کیم. درک صحیح شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند که نفسر درستی از این اطلاعات دانسته باشیم، محدودیت‌های تابع پدست آمده را بشناسیم و در تابعیت، با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می‌خواهیم از شکل‌گیری یک مسئله در محیط زندگی مان کایانش پاسخی برای آن، از آمار استفاده کیم و آماری فکر کردن را تمرین کیم.

فعالیت

دانش‌آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن‌های هوشمند اختصاص می‌دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش‌آموزان به تلفن‌های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان و چگونگی استفاده دانش‌آموزان از تلفن‌های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند. بنابراین، نامه‌بریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر جیز سئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: «دانش‌آموزان باعثی دهم، پازدهم و دوازدهم این مدرسه به طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟»

گروه اجراکننده این بروزه، برشن نامه‌ای طرایی کردند و با انتخاب تصادفی (۲ نفر از هر گروه، از این نمونه از دانش‌آموزان خواستند که این برشن نامه را تکمیل کنند:

الف) به طور متوسط، روزانه چند دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنید؟

ب) از میان گزینه‌های زیر سه فعالیتی را که بیش از دیگر گزینه‌ها با تلفن هوشمند خود انجام می‌دهند، علامت بزنید.

خواندن کتاب الکترونیک شبکه‌های اجتماعی عکاسی بازی تماس تلفنی

نمایش فیلم با گوش دادن به موسیقی



مشاهد مدرسه تضمیم داشتند با توجه به کمی بودن میزان استفاده از تلفن هوشمند، نتایج آن را به صورت میانه و دامنه میان چارکی^۱ گزارش کردند و در حد فراوانی هر یک از فعالیت‌ها را به صورت نمودار میله‌ای نمایش دهند.

جدول می‌نماید داشت آموزان کلاس شما به طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

* اگر واحد اندازه‌گیری مدت استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه) در بررسی اول مشخص نمی‌شد، ممکن بود چه مشکلی پیش بیاید؟
** چگونه می‌توانستیم با احترام به حریم خصوصی افراد، داده‌های گردآوری شده را به واقعیت تزدیک کنیم؟

■ داده‌ها پس از گردآوری در نرم افزار وارد شدند. انتباوهای نایابی تا حد ممکن رقم و درستی داده‌های دورافتاده بررسی شد. بررسی نامه‌هایی که اخلاق‌نامه‌های آنها اشتباه به نظر می‌رسید (مانلا میزان استفاده از تلفن هوشمند بیش از ۲۴ ساعت در روز بودا) کثار گذاشته شدند.

* ممکن است برخی داشت آموزان نخواهند بسی از جزئیات فعالیت‌های آنها با تلفن هوشمند پاخبر شود. در طراحی بررسی نامه

چگونه می‌توانستیم با احترام به حریم خصوصی افراد، داده‌ای گردآوری شده را به واقعیت تزدیک کنیم؟

■ نتایج این نظرسنجی درباره فعالیت‌های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شد. در نموده مورد

بررسی، میانه میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷ دقیقه و دامنه میان چارکی آن $25 - Q_1 = 100$ (و $Q_3 = 65$) دقیقه بود.



* با توجه به چارک‌های گزارش شده، (غیریا) چند درصد از داشت آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟

■ با توجه به نمودار میله‌ای، بیشترین و کمترین فراوانی مربوط به کدام فعالیت‌های است؟

* چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟

۱- پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌ناسو. در داده‌های مرتب شده، میانه داده‌ای قبل از میانه را چارک اول (Q₁) و میانه داده‌ای بعد از میانه را چارک سوم (Q₃) می‌نامیم. دامنه میان چارکی حاصل تفاضل چارک سوم و اول است. آن را با IQR (Interquartile Range) نمایش می‌دهیم.



دهم، عزیزم و درازم

باید توجه داشته باشیم که این تابع فقط در مورد دانش اموزان یابدهای این مدرسه (نه دانش اموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از آنها چویمه..... (نه ابزارهای دیگر) صادق است.

با توجه به نمودار میله‌ای صفحه پیش، دانش اموزان متوجه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن جه فعالیت‌های از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند؟ سیکل‌های اجتماعی

از میانه‌روانه میان چارکی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن‌های هوشمند جه تیجه‌ای می‌گیرید با به زبان اماری، انهارا حکونه تفسیر می‌کند: ۵۰ درصد درست آموزه میش باز ۷۰ درصد از تلفن هوشمند استفاده می‌کنند و ۵۰ درصد از تلفن

۷۰ درصد از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند، به کدک دانش اموزان و اولیا با پرسی تابع و فعالیت‌های که بیشترین فراوانی را داشتند و با در نظر گرفتن ویژگی‌های دانش اموزان مدرسه به این تیجه رسیدند که ۱) تشکیل یک گروه اموزشی در بکی از شبکه‌های اجتماعی می‌تواند عملکرد تحصیلی و ارتباط عاطفی معلم‌ها و دانش اموزان را بهبود یخشد؛ ۲) معلم‌ها می‌توانند با تهیه فیلم‌های اموزشی جذاب،



محنواه درسی را به صورت فیلم در اختیار دانش اموزان قرار دهند و دانش اموزان در ساعاتی از نسبه‌روز که امادگی پیشتری دارند، فیلم‌ها را تعاملنا کنند و بررسی‌های اینشان را در کلاس به صورت حضوری، معلم‌ها در میان بگذارند؛ ۳) با برگزاری دوره‌های اموزشی و نمایشگاه‌هایی از اثار دانش اموزان، می‌توان علاقه دانش اموزان به عکاسی و در تیجه، استفاده از تلفن‌های هوشمند را هدفمند کرد.

در این نظرسنجی فقط درباره مدت زمانی که دانش اموزان در طول روز با تلفن‌های اینشان کار می‌کنند، بررسیدیم اما اگر بخواهیم برنامه‌ای داشته باشیم که با استفاده از آن عملکرد تحصیلی دانش اموزان بهتر شود، باید در یک نظرسنجی دیگر، مدت زمانی را که دانش اموزان صرف کارهای مختلف می‌کنند، به تفکیک این فعالیت‌ها بدانیم.

همان طور که در فعالیت بالا دیدید، حل کردن مسئله‌های مرتبط با این به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های: ۱. بیان مسئله، ۲. طرح و برنامه‌ریزی، ۳. گردآوری و پاک‌سازی، داده‌ها، ۴. تحلیل داده‌ها و نتیجه گیری است.



۱- هنگامی که بر اساس داده‌های یک نویه اماری، برای جامعه اماری مرتبط با این نتیجه گیری می‌کیم، به اصطلاح می‌گوییم تابع را تعمیم داده‌ایم.

کار در کلاس

- اگر کوئی که جرخه حل مسئله را می‌شناسیم، می‌توانیم در جدول زیو نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (متاهده نموده حل شده در سطر سوم می‌تواند به ما کمک کند).

توضیح گام	نام گام	ترتیب گام
عن برای رسیدن به باسخ مسئله پیدا می‌کیم، به نوبه‌گیری، شوه‌النمازه‌گیری متغیر و جگونگی توصیف تابع می‌اندازم.	طفر و ذکر	۲
عن برای رسیدن به باسخ مسئله پیدا می‌کیم و باسخ برای بررسش اصلی پیدا می‌کنم.	تعیین تابع و استفاده را تفسیر می‌کنم و باسخ برای بررسش اصلی پیدا می‌کنم.	۵
پیان مسئله مسئله‌ای را که در دستای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق اماری مطرح می‌کنم.	پیان مسئله	۱
با استفاده از معیارهای دوره‌ها و مقاهمی که اموخته‌ام، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و وزن‌گذاری‌ها داده‌ها تجزیه می‌کنم.	حکایت و درجه‌ها	۴
داده‌ها را گردآوری می‌کنم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شوم.	مرداده و داده‌گیری	۳

گام‌های چرخه امار در حل مسائل

بیش از هر چیز خوب است بدانیم «چرا فرایند حل مسئله را «چرخه» می‌نامیم». همان‌طور که در مثال «استفاده از تلقن هوشمند» دیدیم، گام‌های مختلف حل مسئله به ما کمک می‌کند که برای بررسی اصلی پاسخی پیدا کنیم، اما اغلب پس از اجرای تمامی گام‌ها با رسیدن ابعاد مختلف مسئله و برآسانس تتابع و تجربه به دست آمده، یک مسئله جدید دقیق‌تر شکل می‌گیرد. در واقع، برای پیدا کردن پاسخ بررسی اصلی تا رسیدن به یک جمع‌بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازیتی می‌شویم. در این بخش، گام‌های چرخه حل مسئله را بیشتر بررسی می‌کیم.

؟ گام اول (بیان مسئله)

طرح یک بررسی دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین، بیش از هر چیز باشد مسئله به درستی درگ شود و بسی به طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه اماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کیم.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم میزان فعالیت بدنسازان گراماشاء را بدانیم و برای آن برنامه‌ای داشته باشیم. بیش از هر چیز باشد بتوانیم مسئله را دقیق تعریف کنیم. پس از مشورت با کارشناسان این حوزه متوجه می‌شویم که با توجه به عواملی مانند سن، محل سکونت (از نظر نزدیکی به مکان‌های ورزشی)، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنسازان (مانند ارزشمندی ورزش‌های بیهلوانی و...) یا توانایی‌ها و ناتوانای‌های



آنچه

جهنمی، میزان فعالیت بدنی این افراد بسیار متفاوت است؛ پس، بدون محدود کردن جامعه اماری نمی‌توانیم باستم مشخصی برای این مستعلمه داشته باشیم.
هیچ ترتیب، مثلاً «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای ازاد در میان بسوان ۱۲ تا ۱۵ ساله بک مدرسه مشخص در کوشا»، «میزان اندام بسوان بک مستعلمه مطرح شود.

چند مثال دیگر برزند.

بحث و آنفرونو

هر یک از عوامل نامزد، (سن، محل سکونت و...) جگوه می‌تواند بر فعالیت بدنی جامعه اماری مورد بررسی نایاب بگذارد؟
جه عوامل دیگری به تعریف دقیق مستعلمه کمک می‌کند؟
گروه اجرا کننده این مطالعه باید شالاجه متخصصانی باشد و دانش هر یک چه نقشی در این مطالعه دارد؟ (مثلاً متخصصان تربیت بدنی چگونه می‌توانند اندازه‌گیری متغیر «فعالیت بدنی» کمک کنند)

گام ۲ (طرح و برنامه‌ریزی)

اندازه‌گیری باستجشن، اولین قدم برای یافتن دلخواه بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری، در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه‌گیری مناسب برای متغیرهای مانند قد، وزن و دما اسان است؛ زیرا با ابزارهایی اشنا می‌توانیم توصیف‌هایی مانند قد بشنید، وزن مناسب با هوای گرم را به کمینی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. البته اندازه‌گیری همیشه اینقدر هم اسان نیست. فرض کنید در مطالعه‌ای می‌خواهیم میزان «خوشحالی» افراد را اندازه‌گیری کنیم. چه برسن‌هایی می‌تواند برای اندازه‌گیری این متغیر به ما کمک کند؟ ای اندازه‌گیری دارایی‌ها، تحصیلات، دستاوردها، تعداد، وستنان و... لزوماً مشخص می‌کند که هر فرد چقدر خوشحال است؟ احتمالاً این طور نیست. با توجه به اهمیت اندازه‌گیری می‌توانیم بفهمیم که حضور افراد متخصص در گروه هدایت‌کننده بیزوهش‌چندرهم است. متخصصان، ابزارهای اندازه‌گیری یا برسن‌نامه‌ها را طوری طراحی می‌کنند که با آنها بتوانیم همان متغیری را که مورد نظر است، اندازه بگیریم. بدون مشورت با این افراد، ممکن است به جای «خوشحالی» مثلاً «رفاه» یا به جای «هوش» مثلاً «حافظه» اندازه‌گیری می‌شود.

در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.



تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌نامیم. هرچه برآکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود توزع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم.

آذمایش

کار در کلاس

۱. در مرحله اول، برای بررسی کدام بک از مواردیه اندازه نموده بزرگ نیاز است؟ توضیح دهد.

(الف) سی دانش اموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید. **حقوقه گوچیک**
که معدل سال گذشته دانش اموزان در کلاسی که در آن درس می خوانید. **بزرگ**

حجم بزرگ **متغیر مورد بررسی**

حقوقه گوچیک

بزرگ **متغیر**

□ بررسی متوسط حقوقه معلمگان یک مدرسه دولتی **حقوقه گوچیک**

□ بررسی متوسط حقوقه کارکنان یک شرکت بزرگ خصوصی **حقوقه بزرگ**

□ اینها به شود.

۲. علی و امید در یک پرورش دانش اموزی می خواهند بررسی کنند که «تجویانان منطقه ۲ ابادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت هایی مشغول اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می کنند».

علی پیشنهاد می کند: «برای نمونه گیری به جند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند توجیان را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها بررسی بطور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند».

امید پیشنهاد می کند: «اگر اداره اموری و برویس منطقه موافقت کند، برای نمونه گیری فهرستی از دانش اموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ ابادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه نمودن کافی از راهنمایی را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش اموز بررسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت هایی انجام می دهد و به صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت ها مشغول است».



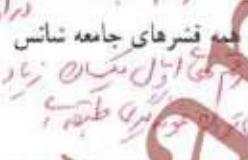
موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهادهای امید و علی وجود دارد در هر مورد، بوسیله که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است باشد.



(الف) کسانی که اوقات فراغشان را در خانه می گذرانند، شناس حضور در نمونه را ندارند. **حقوقه بزرگ**
ب) توجیانان بازمانده از تحصیل، شناس حضور در نمونه را ندارند. **حقوقه بزرگ**

ب) اگر مثلاً به کتابخانه برویم و از توجیانان بررسیم بطور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می آیند، میانگین داده های بعدست امده (اماره نموده) بزرگتر از میانگین آن در جامعه امایی (بازار اسلامی) می شود؛ چون توجیانی که احتمالاً به کتابخانه نمی روند، در نظر گرفته نشده اند. **حقوقه بزرگ**

دو اشکال دیگر را که به نمونه گیری علی وارد است، مطرح کرد. **علم طبقه ایزد اسماهی**، **شناخت / عدم توجه**، **بروز رسانی حقوقه بزرگ**، **برای این اتفاق**



۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام شیوه نموده بیشتری، به قشرهای جامعه شناس حضور ندارند؟ چرا؟



(الف) انتخاب خانوارها براساس رقم اول تلفن خانه ها

ب) انتخاب خانوارها براساس رقم اخر تلفن خانه ها.

■ گام ۳ (گردآوری و پاک سازی داده ها)

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه گیری، گردآوری یا بست داده ها و یا وارد کردن داده ها در نرم افزار اشتباہی رخ دهد. با بررسی دقیق داده ها می توان برخی از این اشتباہها را تصحیح کرد.

کار در کلاس

این در جدول زیر نشان داده شده، بخشی از داده‌های گردآوری شده در یک بروزه دانش‌آموزی پیش از برطرف کردن انتباهاست.

جون پرخوازم افزارهای توالت‌داده‌های غیر عددی را تحلیل کنند، برای منغیرهای کیفی که تعیین می‌کنم؛ مثلاً در این داده‌ها برای جنس تخریب کرد ۱ و برای پسر کرد ۲ تعیین شده است. در منغیر «ورزش مورد علاقه»، نیز برای فوتبال، والیبال، بسکتبال و شنا به ترتیب کدهای ۲، ۱، ۴ تعیین شده است. در این داده‌ها هر سطر نشان‌دهنده یک فرد و هر ستون نشان‌دهنده یک منغیر است.

	نمره ادبیات	متوجه ساعت مطالعه از ازد در هفته	ورزش مورد علاقه	جنسیت	سن	نیازهای دانش‌آموز
۱	۱۵	۱	۱	۱	۱۶	۱۶
۲	۱۴	۱	۱	۲	۱۵	۵
۳	۱۵	۲	۲	۱	۱۶	۱
۴	۱۷	۲۲	۲۲	۱	۱۵	۴۵
۵	۱۷	۱۵	۲	۲	۵۱	۲
۶	۱۸	۶	۳	۲	۱۶	۱۷
۷	۱۹	۱۱	۲	۲	۱۵	۱۹
۸	۱۷	۴	۴	۲	۱۶	۲۴
۹	۱۵	۳	۳	۱	۱۶	۵۲
۱۰	۱۰	۱	۱	۱	۱۶	۱۲
۱۱	۱۲	۱	۱	۱	۱۶	۷
۱۲	۱۴	۲	۱	۲	۱۵	۲۵
۱۳	۱۰	۷	۱	۱	۱۵	۲۶
۱۴	۱۸	۵	۱	۲	۱۳	۲۱

با توجه به جدول داده‌ها

۵۱

(الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً انتباه تایپ شده است؟ چگونه می‌توانیم با مرتب کردن داده‌ها در ترم افزار، این داده را از میان تعداد سیار زیادی سطر پیدا کنیم؟

دانش آموز ۱۵ ساله حرف خوارد. ریف ۵

(ب) در داده‌های مربوط به کدام دانش‌آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده‌های متغیرهای بعدی اورزش مورد علاقه، متوسط ساعات مطالعه از ازد و نمره ادبیات به سمت جای به جای شده‌اند؟ اورزش مورد علاقه این دانش‌آموز چیست؟ نمره ادبیات او چند است. ریف ۷ / کد ۴ پستیل ۱۹

پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به انتباه نوشته شده است؟ ریف ۲۲

(ت) در متغیر «متوسط ساعت‌های مطالعه از ازد در هفته» کدام عدد با الگوی داده‌های دیگر تفاوت دارد؟ لایم می‌توانیم این عدد را بدون پرسی، حذف یا اصلاح کنیم؟ ریف ۲۴ / بله

(ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده‌های مربوط به کدام دانش‌آموز با واحد اندازه‌گیری متفاوتی ثبت شده است؟ چگونه می‌توانیم این اتفاق جلوگیری کنیم؟ ریف ۲۴ / دانش آموز ریف ۲۴ نیز نمود + بهتر کنم

۲۴



بەپ و گفت و گو

- اگر انتساب موزی در روز برگزاری ازمون ادبیات غایب باشد چه باید کرد؟ اگر بخواهیم نمره‌ای برای او در نظر بگیریم، این کار چگونه انجام دهنده‌است؟ در این باره چه بیشترهادی دارد؟
ایا پرسنل سامی موارد ممکن می‌توانند مطعن پاشیم که داده‌ها کاملاً درست نبودندند؟ جراحتی

گام ۴ (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج اماری است. این نتایج و نتیجه‌گیری از آنها در گام بعد انجام خواهد شد.

یاد او ری: همان طور که می‌باید، برای تو سفت داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار برآکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه و هما کمک می‌کند بداتیم داده‌ها در یکجا متراکم شوند و معیارهای برآکندگی به ما کمک می‌کنند بداتیم داده‌ها جگونه متراکم یا متراکم شده شوند. به یاد دارید که اگر داده دورانه داشته باشیم، میانگین و انحراف معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهد بود. حوا؟

کار در کلاس

ناتو حه به داددها حدیو! زیرا کاما کند.

معیارهای برآکندگی												
متغیر	معیارهای گرایش به مرکز											
	نحوه‌ها											
سن (سال)	۱۷	۱۸	۱۶	۱۷	۱۵	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۵	۱۹
میزان تعدادی تلویزیون	۴	۲۱	۴	۶	۷	۶/۵	۷	۸	۶	۳	۴	۵

راهنماهی در میان نیازمندان: متوسط ساعت‌های تماشای تلویزیون در هفته، IQR : دامنه میان‌جایی، SD : انحراف معیار.

$$Q_3 = Q_2 = 1V \quad Q_1 = 10.0 \quad \text{Min} = 10 \quad \text{Max} = 19$$

با توجه به جدول بالا، به بررسی‌های زیر پاسخ دهد.

الف) کدام میانگین اش بوده که کدام میانگین است؟
ا) نصف داده های منفرد «س»
ب) مناسب آن داده هست

بیانگن / اخراج معاشر زیرا داره در آفتاب و قرود بپار.

IOR: Interquartile Range
SD: Standard Deviation



نکدام معیار گرایش به مرکز و نکدام معیار برآکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ جرا؟
نکدام معیار گرایش به مرکز و نکدام معیار برآکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ جرا؟

ب) انحراف نکدام داده‌ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟

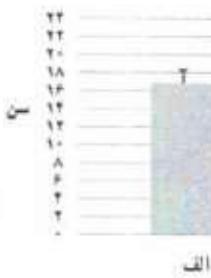
۲۹ و ۳۰ فواره ۱۳۹۷ احتمال از همان لیره زیاد نیست.

نه اگر برای توصیه‌های متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» فقط میانگین گزارش می‌شد، خواسته‌گانی که به داده‌های خام دسترسی نداشتند چگونه کاره می‌شدند؟ میانگین عرض واقع در اینکاره نهاده و احتمال از آنچه درست هیچ‌گاه نموده بود.

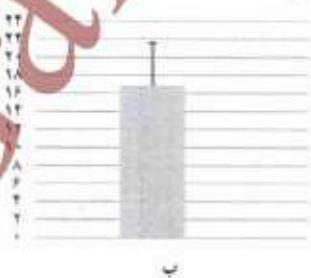
در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل ان نشان‌دهنده میانگین باشد و میله خطای آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

ن) با توجه به داده‌های جدول کار در کلاس در صفحه قبل، نکدام از نمودارهای زیر نشان‌دهنده میانگین و انحراف معیار سن است؟

الف



ب



اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسته کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این گونه موارد باید از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم. برای نکدام داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» در مثال بالا، با استفاده از مقدار چارک‌های اول، دوم (میانه) و سوم، ابعاد جعبه (به ترتیب ابتداء، خط میانی و انتهای) را روی محور زیر مشخص کنید. سپس، با توجه به کوچکترین و بزرگترین داده‌ها، نمودار جعبه‌ای رارسم کنید.



الف) نکدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا برآکنده‌ترند؛ نمودار نمایش‌دهنده میانگین و انحراف معیار با نمودار جعبه‌ای؟

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها وجود داده‌های دورافتاده اطلاعی نداشته باشیم، نکدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهایی کمی مطمئن‌تر است؟

جعبه‌ای زیرا اگر داره‌ی دورافتاده نباشه، فوری می‌تواند میانگین و هیچ‌گاه دفعه‌ای نمایش داده شود.

کار در کلاس

دو شرکت نزدیک پیشنهاد کار داده اند که بکی از آنها ۳۰ و دیگری ۲۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، نفربای ۴ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم نفربای ۴ میلیون تومان است. او برای انتخاب بکی از این دو شرکت، از حجم و سیم نظرخواهی می کند.

اعظم می کوید: «شرکت دو را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.» مربع می کوید: «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معابر را کندگی چه فایده ای دارد؟» آنها تصمیم می کنند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می کنند.



(الف) با استفاده از داده های جدول بالا، تولد ارجاعی حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.

(ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارت های زیر را مشخص کنید.

* حقوق نفربای ۵٪ کارمندان شرکت: و متر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است

* اگر نزدیک سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را بر اساس شایستگی هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است. درست

* در شرکت دوم، میانگین معیار گرایش به مرکز مناسبی است. درست

کار در کلاس

دو مدرسه متوسطه دوم، که تعداد دانش اموزانشان نفربای برابر بود، در سال گذشته با تغییر برلامعاو و کادر آموزشی شان، وضعیت قبولی دانش اموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی هایش ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

(الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کمی؟

(ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می کنید؟ **حواله ندارد را ایشان امور را قبول کنند**

شاند متشخصی نمی شوند، برای اینهمه ب مدرسه ای اطمینان داشتند

ب) افزایش ۲۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهد.

در وورد: «**اگر دهد افزایش ۲۰٪ برای برآورد ولی و رجور در ۲۰٪ مدد افزایش ۱٪ برآورده است.**



نفر فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی ها قبل از نفر بوده و با تغییر کادر اموزشی ۳ نفر شده است (۲۰٪ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر اموزشی ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می کنید؟

~~نمایش~~

ن) در گزارش متغیرهای کیفی، آراله در صد بدون مشخص کردن تعداد، جگونه می تواند گمراه کننده باشد؟

~~نمایش~~

برای توصیف داده های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش در صد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

گام د) (بحث و نتیجه گیری)

بس از تحلیل داده ها، باید توانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت های مطالعه ای که انجام داده ای را بسیار مهراست. روش کار و محدودیت های ان باید جنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه ای در همان زمان داشتند، با مشکلاتی مشابه مواجه شوند. پیشنهادهای ما می تواند به این افراد کمک کند. اگر ضمن توجه به تمامی نکات نمونه گیری، داده ها را با روش های مناسبی تحلیل کرده باشیم، در بهترین حالت می توانیم نتایج را فقط به جامعه اماری مورد بررسی قرار دهیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه اماری را بررسی نکردیم، نتایج ما قطعی نیستند؛ چون در نمونه گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

(از جامعه ای با اندازه N به چند طریق می توانیم نمونه گیری با اندازه n داشته باشیم؛)

$$= \frac{N!}{(N-n)!}$$

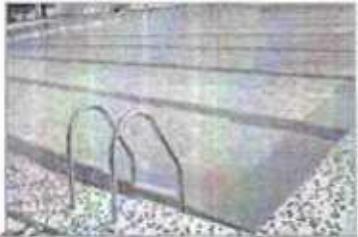
یکارچکی چرخه امار در حل مسائل

همان طور که دیدید، در تمامی گام های حل مسئله مرتبط با امار لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آنها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه نژوهه مورد بررسی، معکن نیست. مثلاً اگر امار گیران از اهداف کلی مطالعه با خبر نباشند یا فردی که داده ها را تحلیل می کند، وی کی های جامعه اماری را موضوع مورد بررسی را به خوبی

شناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود. باید توجه داشته باشیم که اگر مطالعه در منطقه ای انجام می شود که ویزگی های آن را به خوبی نمی شناسیم، در تمام گام ها به داشتن اهالی منطقه اولویت دهیم. کیفیت اجرای هر یک از گام های چرخه امار، گام های دیگر را بدشت تحت تأثیر قرار می دهد. مثلاً برای تقدیم معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می توانیم جرایی گزارش میانگین یا میانه و یا گزارش نشدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره چگونگی نمونه گیری، شیوه اندازه گیری، نوع ورود داده ها و تمامی موارد گام های دیگر چرخه نیز تردید و بررسی داشته باشیم.



کار در کلاس



۱. توانی احداث یک استخر در حاشیه یک کلان شهر، محل مناسبی انتخاب، و با مسکارهای تروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره‌برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه بزنگنی در قسمت کم عمق در حال راه رفتن در اب آند و در قسمت عمیق کافی فقط چند نفر شنا می‌کنند.

- الف) اگاهی از میانگین سنی افراد منطقه احداث استخر، جگونه می‌توانست به اجرای این بروزه کمک کند؟ **اگاهی از میانگین سنی افراد منطقه احداث استخر، جگونه می‌توانست به اجرای این بروزه کمک کند؟**
که اهداف قصیت خواهند داشت.
- ب) چه کسانی می‌توانستند از احداث این استخر، درباره فراوانی افرادی که در آن منطقه شناگر بودند، اطلاع بدھند؟

ب) جگونه مشورت با افراد بومی درباره اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم عمق و عمیق استخر را مناسب با نیاز منطقه طراحی کند.
در راست اطلاعات افراد بومی در امور مسنه آنها و تدبیرهای میانگین سنی

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام یگان است ویر کدام دامنهای دیگر از مردم گذارد؟ جگونه؟

الف) مثله به صورتی بیان شده است که اجرای تندکان برداشت‌های متقارنی از اهداف بروهش دارند.
تندکان برداشت‌های متقارنی از اهداف بروهش

ب) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است.
وزن افراد را با معاصرها می‌سازد برآوردهای دارند.
اما اشکال موادی می‌گذارد.



ت) در بروهشی با موضوع «بررسی قدمت بنایهای مسکونی جند روستا»، محرمانه بروزه جلسه‌ای را با حضور کارشناسان برگزار می‌کنند و پس از تصمیم‌گیری درباره طراحی و برنامه‌ریزی بروزه، برای گرداؤری داده‌ها جند نقره استفاده می‌کنند. امارگیرها بدون اطلاع از جگونگی شکل گیری مثله و اهداف این بروهش، برای پر کردن پرسنل نامه‌ها به مراحل مختلف مراجعت می‌کنند. هنگام وارد کردن داده‌ها در نرم افزار، مشاهده می‌شود که در چندین پرسنل نامه در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته‌اند: «قوت شده است»، «راههای نادرست بروی آمده».

ث) پس از گرداؤری و تحلیل داده‌ها به شیوه‌ای که پیشتر در گام «طرح و برنامه‌ریزی» به تأیید رسیده بود، تایم مورد انتظار به دست نیامد. به همین سبب، معیارهای دیگری برای گزارش تایم انتخاب شده است.
عدم تعریف مثله آنچه از نظر

ج) نایم را فقط افراد متخصص امار تفسیر کرده‌اند.
عدم شاخت و تری ده منطقه ای



خواندنی

بادشاھی پسر خود را به جماعتی اهل هنر سپرد بود تا او را از علوم تجوم و رمل و غیره اموخته بودند و استاد تمام گشت با کمال کودکی، روزی بادشاھ ایشتری در مشت گرفت؛ فرزند خود را امتحان کرد که یا بگو در مشت چه دارم؟ پسر گفت: «انجeh داری گرد است و زرد است و میخوف (میان‌تهی) است.» بادشاھ گفت: «جون نشان‌های راست دادی، پس حکم کن که این چه جزوی باشد.» پسر گفت: «باید که غریل (غربال، الک) باشد.» بادشاھ گفت: «از قوت تحصیل و دانش این نشان‌های دست دادی که عقول در آن حیران شوند اما ندانستی که غریل در مشت نگنجد!» برگرفته از قیه ما فیه - مولانا جلال الدین محمد

تمرین

۱. به نظر می‌رسد کودکانی که از زبان مادری شان فارسی نیست، در دوره دستان مشکلات بیشتری برای بادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه اماری محدود (از نظر یا به تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

۲. با توجه به تأثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌آموختان، از انها برسیم در هفته گذشته، پیش‌به کدامیک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟

* ۱- پیاده‌با با دوچرخه

* ۲- با وسائل حمل و نقل عمومی

* ۳- با سرویس مدرسه با خودروی شخصی.

(الف) در این مطالعه، جامعه اماری، نمونه اماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

(ب) داده‌های این مطالعه را با چه روشی می‌توان گرداوری کرد؟ آیه مشکلاتی ممکن است در گرداوری این داده‌ها رخ دهد؟

(ب) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی/کیفی) و مقباس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبی - اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

(ت) چه نتودارها و امارهایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

(ث) ایا می‌توانیم این نتایج را به شیوه‌رفت و امدانش اموختان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم بدهیم (منلا به فصل‌های مختلف با زمان برگزاری ازمون‌های بایان تیمسال؟)؟ توضیح دهید.

(ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، ایا لزوماً نتایج مشابهی حاصل می‌شوند؟ توضیح دهید.

۳. در هر یک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه اماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه کیفی چه پیشنهادی دارد؟ انتخاب نادرست نمونه در هر یک از موارد چگونه بر نتایج تأثیر می‌گذارد؟

(الف) مسئله: بررسی میزان رضابت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی

نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز



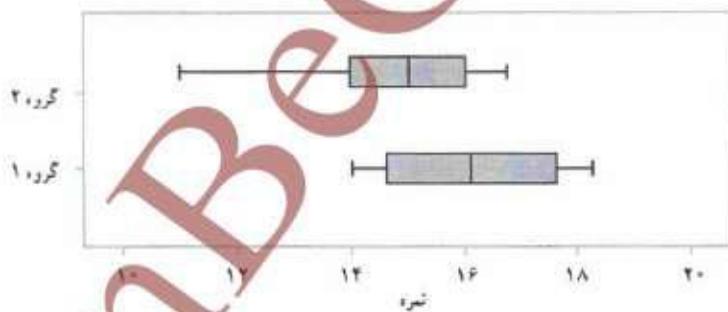


ت) در کدام گروه مقدار میانگین و مبانه به هم نزدیک ترند؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

ب) از مقایسه کهنه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



ب) مسئله نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تحاليف مدرسه احتضانی می‌دهند.

نمونه: دختران پایه دوازدهم چک مدرسه از این منطقه که به صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.

۴. «مطالعات دانشستان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم‌زمان چند فعالیت ساخته شده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به صورت هم‌زمان هستیم، در واقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌برد. مغز انسان تئته خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و تاگهان حسایی دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می‌شود، مغزمان که ای تیابانه منتظر کشف از اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متوجه نیست. این مطالعات نشان می‌دهد که مثلاً اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون نمایش کند یا گفتارگویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به جای اینکه به قسمت حقائق و ایده‌ها برود، به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.» سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در شرایط مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت پی‌صدا فرار می‌دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی‌دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:

ب) برآندهایی کهنه گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.

ب) از مقایسه کهنه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه کننده باشد؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) برآندهایی کهنه گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.

ت) در کدام گروه مقدار میانگین و مبانه به هم نزدیک ترند؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

ب) از مقایسه کهنه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه کننده باشد؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

ب) از مقایسه کهنه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه مقدار میانگین و مبانه به هم نزدیک ترند؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

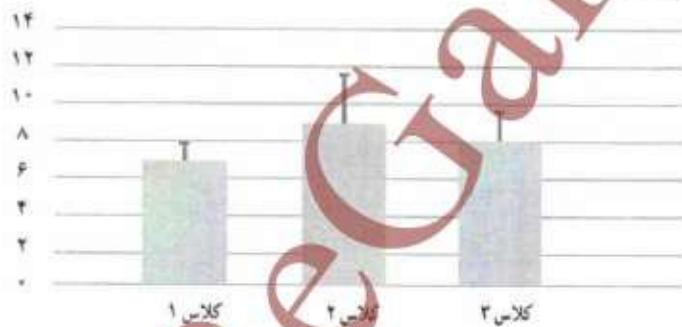


۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش‌آموز علوم انسانی یا به باره‌دهم یک مدرسه بررسی‌ده این که به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۳ ۱۲ ۱۱ ۶ ۲ ۲۰ ۱۸ ۲۲ ۱۴ ۱۲ ۱۰

- (الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهد که میانگین و انحراف معیار پیشتر شود اما میانه و جارک اول و جارک سوم تغییر نکند.
- (ب) فرض کنید می خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

۶. با توجه به تأثیر کمیت و کیفیت خواب بر بارگیری، ندا و او اوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس یا به دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌آموزان را در هفته گذشته بر حسب ساعت بررسیدند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده میانگین و میله خطای نشان‌دهنده انحراف معیار است.)



(الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها تابع را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می‌برسیم ایا آن‌ها می‌توانند به درستی به بارگیری کمک کنند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟)

- (ب) نوع (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی - اسمی/ترتیبی) متعارف مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.
- (پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، تابع را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین			
انحراف معیار			

(ت) چه عواملی می‌تواند بر تابع این مطالعه تأثیر بگذارد؟ جگوهه می‌توانیم با بیان مسئله‌ای جدید، باستم دقیق تری برای این مسئله پیدا کنیم؟

ث) مهندسی می توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

۷. مدیری برای ترویج فرهنگ کتابخوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش اموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضوی نمودار مبلغ ای زیر نشان دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



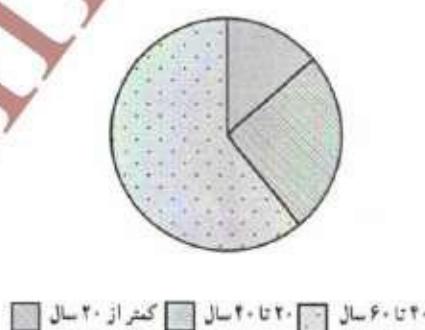
الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش اموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) یا استفاده از نمودارهای مبلغ ای داده شده، برای هر یک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروههای سنی مختلف در نمودار دایره‌ای تیر نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)



لک) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۰-۶۰ سال سن دارند؟

ب) میول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، ان را غیرواقعی دانست و گفت: «بیتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۳۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشند؟ توضیح دهید.

- بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تماشی به پاسخ گویی به سوالات پرسشگر نداشته‌اند.
- گردابی داده‌ها در ساعت‌داده‌ای انجام شده است و بازنیستگان بیشتری در نمونه فرار گرفته‌اند.
- هنگام نودابوری داده‌ها، داشن‌آموزان بسیاری از طرف مدرسہ برای بازدید حضور داشته‌اند.

۹. جدول زیر شاند همه تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

(کیلومتر در ساعت) سرعت	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰	۱۱۰
تعداد خودروهای تصادف کرده	۴۰	۱۲۰	۲۱۰	۲۵۰	۳۵۰		۱۵۰	۱۰۰	۴۰	۲۰	۲۰	۱۰

همان‌طور که دیده‌می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعان‌ترین پیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس:

«هرچه سرعی‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.»

نتیجه‌گیری بالا جه انسکالی دارد؟ جرا این تصور بیجاد شده است!

پروژه

موضوعی دلخوا، یا یکی از موضوعات زیر را انتخاب کنید و با استفاده از گام‌های جرخه امار، نتایج حاصل را در قالب یک گزارش در کلاس ارائه کنید.

- بررسی ساعت‌روزه حضور داشن‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی
- نظرسنجی درباره تغییر فواین حاکم بر کلاس یا مدرسه
- نظرسنجی درباره کلاس درسی که می‌توانند بررسی‌های خود را از ادانه در آن محروم کنند.
- نظرسنجی درباره ساعت‌لازم برای ندریس ریاضی در کلاس دوازدهم انسانی
- بررسی ساعت‌های مطالعه از داشن‌آموزان و مقایسه آن‌ین دو گروه از داشن‌آموزان
- بررسی فعالیت‌های فوق برنامه مورد علاقه داشن‌آموزان.



حل تمرینهای صفحه‌ی ۴۰ و ۴۱

تمرین ۱:

بررسی وضعیت نمرات درس دانش آموزان پایه‌ی اول استان چند پایه‌ی مختلف شهید احمدی شهرستان خوزستان در سال تحصیلی ۹۷-۹۸

تمرین ۲:

الف:

دانش آموزان کلاس	جامعه‌ی آماری
دانش آموزان انتخاب شده	نمونه‌ی آماری
۲۸ نفر	اندازه‌ی جامعه
۹ نفر	اندازه‌ی نمونه

ب : پرسش شفاهی (چون تعداد نمونه کم است) / ممکن است در روز جمع آوری اطلاعات مشکلی مثل این برای سرویس مدرسه پیش آمده باشد و دانش آموزان پیاده به مدرسه آمده باشند.

پ : شیوه‌ی رفتار به مدرسه / کیفی / اسمی

ت : دایره‌ای ، میله‌ای / مُد و نسبت

ث : خیر، چون ممکن است در ایام امتحانات شرایط متفاوت پیش بیاید

ج : خیر، نتایج ممکن است قدری تغییر کنند.

تمرین ۳:

الف: ۱) مدیران شیفت شب در نظر گرفته نشده اند ۲) مدیران نمی توانند نماینده‌ی کل کارمندان محسوب

شوند برای رفع مشکل نمونه گیری از هر دو شیفت به تناسب و از تعاملی کارمندان صورت گیرد

ب : ممکن است برخی از مادران در این ساعت سرکار رفتار باشند و لذا اطلاعات از آنها دریافت نمی شود.

برای رفع این مشکل کافی است مدت مراجعه را تغییر یا افزایش دهیم.

پ : ۱) دانش آموزان پسر از این مطالعه حذف شده اند ۲) نمونه گیری تصادفی نیست.

نمونه‌ی انتخاب نمونه‌ای تصادفی و به تناسب دانش آموزان توصیه می شود.

تمرین ۴:

الف : تقریباً مساویند. (ولی گروه اول نتیجه‌ی بهتری دارد)

ب : دامنه‌ی تغییرات در گروه ۲ بیشتر از گروه ۱ است. دامنه‌ی میان چارکی در گروه ۱ بیشتر از گروه ۲ است.

پ : مقدار کمینه‌ی گروه ۱ برابر چارک اول گروه ۲ است. (گروه ۱ بیشتر است).

ت : گروه الف، چون داده‌ی دور افتاده دارد.

ش: گروه ۱ . نمودار متقاضی است. (عدم وجود داده‌ی دور افتاده)

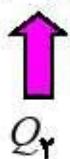
ج : داده‌ی گروه ۱ این اطمینان از درست بودن نتایج

تعزین ۵:

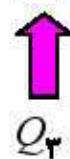
۲۲ و ۲۰ و ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۰ و ۱۰ و ۶ و ۴ و ۰



چارک اول



چارک دوم (میانه)



چارک سوم

جمع کل داده ها برابر ۱۸۹ و میانگین آنها ۱۲/۶

الف : داده‌ی آخر را به یک عدد دوره افتاده مانند ۵ تغییر می‌دهیم.

ب : میانگین این داده ها ۱۷/۶ می‌باشد . لذا می‌توان دو داده طوری اضافه کرد که مثلاً ۲ واحد بیشتر و ۳ واحد کمتر از میانگین باشند (۱۲/۶ و ۹/۶) . بدین شکل میانگین تغییر نمی‌کند از طرفی چون وسط یودن میانه نیز حفظ شده است، لذا با این عمل میانه نیز ثابت مانده است.

تعزین ۶:

الف : ممکن است میزان ساعت جواب توسط دانش آموزان با دقت بیان نشود برای رفع این مشکل لازم است از آنها بخواهیم ساعت خواب و بیداری خود را قبل از خواب و بعد از بیداری یادداشت نموده و بعد اعلام نمایند.

ب : کمی / نسبتی (چون صفر مطلق داردند).

پ :

گروه	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲/۸	۱/۸

ت : اولاً : ممکن است برخی از دانش آموزان به دلیل مسائلی مانند میهمانی / جشن تولد / بیماری و ساعت خواب آنها موقتاً تغییر کند. ثانیاً : میزان تأثیر خواب بر یادگیری اگر تعریف عملیاتی نشود، نتایج مطالعه ارزش نخواند داشت.

ث : والدین دانش آموزان ، خود بهتر از خود دانش آموزان از میزان ساعت و خواب فرزندان خود و تأثیر آن بر یادگیری آگاهند.

تعزین : ۷

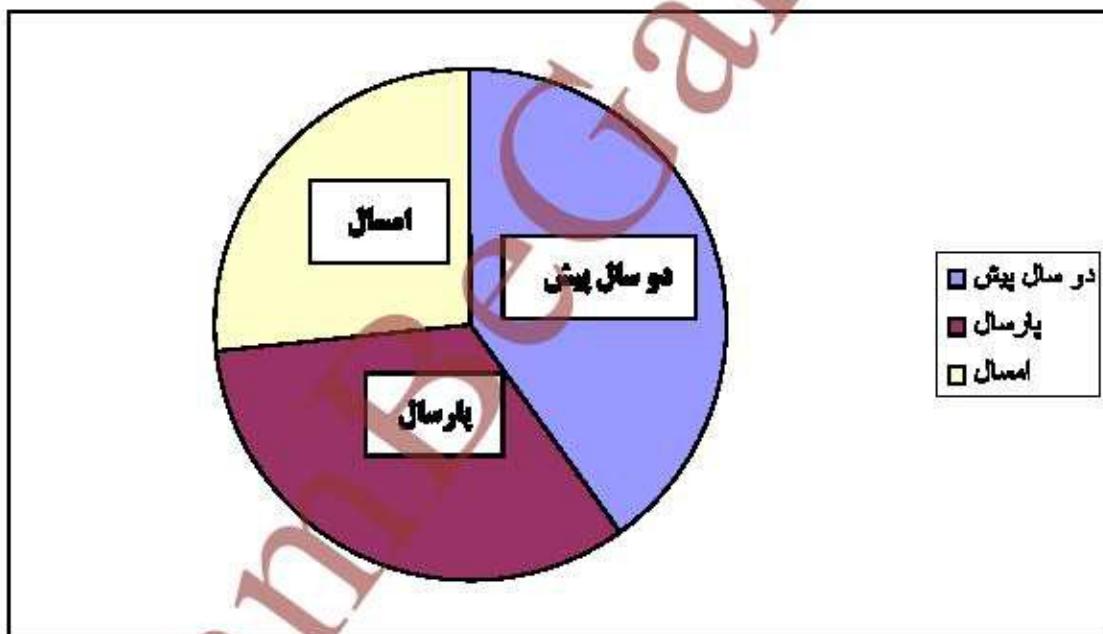
الف : ۳۰ نفر

ب : ۳۰ نفر (روند نزولی دارد)

پ :

نمودار دانش آموزان مدرسه

سال	فرآواني	زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پيش	۶۰	$\frac{60}{150} \times 360 = 144$
پارسال	۵۰	$\frac{50}{150} \times 360 = 120$
امسال	۴۰	$\frac{40}{150} \times 360 = 96$
جمع	۱۵۰	۳۶۰

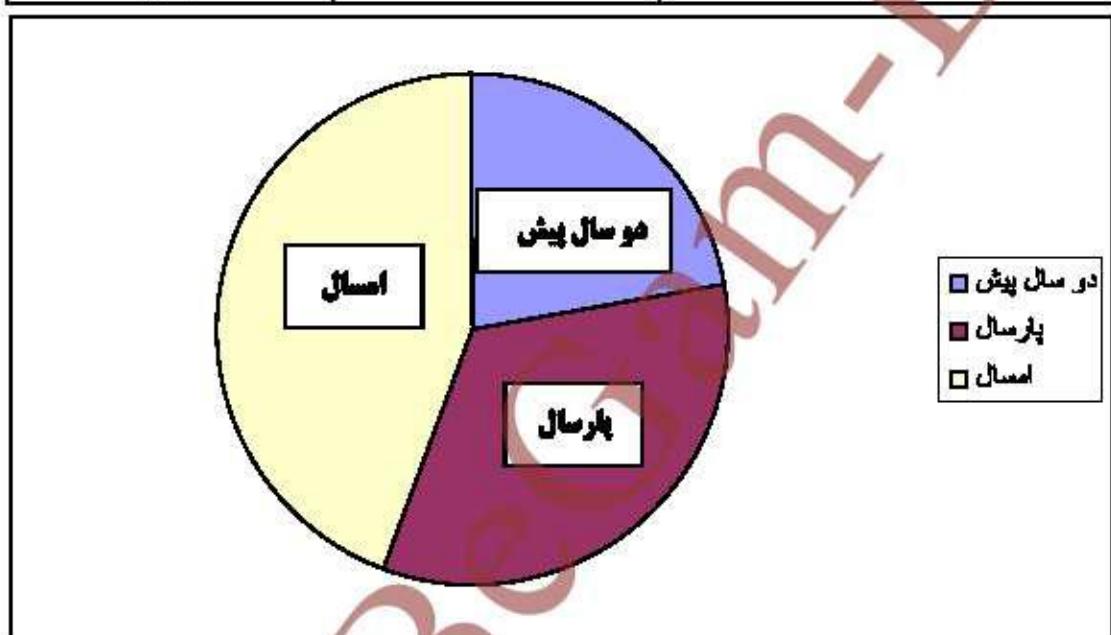


@Gan

ادامهٔ حل تمرین ۷

نمودار سایر اعضاء

سال	فراوانی	زاویهٔ مرکزی (بر حسب درجه)
دو سال پیش	۲۰	$\frac{20}{90} \times 360 = 80$
پارسال	۳۰	$\frac{30}{90} \times 360 = 120$
امسال	۴۰	$\frac{40}{90} \times 360 = 160$
جمع	۹۰	۳۶۰



ت: عواملی مانند مدیریت / تبلیغات / اوقات فراغت / هزینه و ... تناسب کتابهای موجود با سن اعضا نیز ممکن است اثرگذار باشد.

تمرین ۸:

الف:

دوره‌ی سنی	زاویهٔ مرکزی (بر حسب درجه)
کمتر از ۲۰ سال	۵۴
بین ۲۰ تا ۴۰	۹۰
بین ۴۰ تا ۶۰	(*) ۲۱۶
جمع	۳۶۰

$$360 - (90 + 54) = 216$$

$$\frac{360}{100} = \frac{216}{x} \rightarrow x = \frac{216 \times 100}{360} = 60$$

درصد ۶۰

اولاً: در ساعت اداری افراد بازنشسته لزومی ندارد که در ادارات حاضر شوند. ثانیاً: افراد کمتر از ۲۰ سال سن معمولاً دانش آموز هستند که در این مطالعه سهم کمتری دارند.

تعویین ۹:

اشکال این نتیجه گیری این است که تعداد کمتری از رانندگان خودروها ممکن است خود با سرعت ۸۰ به بالا به رانندگی کنند که این مورد ملاحظه نشده است. از طرفی تعداد کل جهت مقایسه سی پیشتر نیز در اختیار نیست.

توجه به جدول و عدم کمک گرفتن از نظرات رانندگان موجب این تصور نادرست شده است.

@Gambegardan

فصل ۲- الگوهای خطی

مدل سازی و دنباله

درس ۱

دنباله حسابی

درس ۲

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَالْخَلْقِ الْأَيْمَنِ وَالْأَيْمَانِ لِآيَاتٍ لِأُولَئِي الْأَلْبَابِ (۱۹۰) سُورَةٌ مَبَارَكَةٌ أَلِّيْ عَمَرَانَ
وَسَلِّمًا مَذْكُورًا لِفِيْنَشِ آسِمَانَهَا وَزَمِنَهَا وَآمِدَورَفَتْ هَبَ وَرُوزْ تَشَاهَعَهَايِ (لَوْفَنْ) بِرَأْيِ خَرْمَنَانَ اسْتَهَ

در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیرخطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و یعنی
در طبیعت قابل مشاهده است.

درس ۱

مدل سازی و دنیا له

مدل سازی

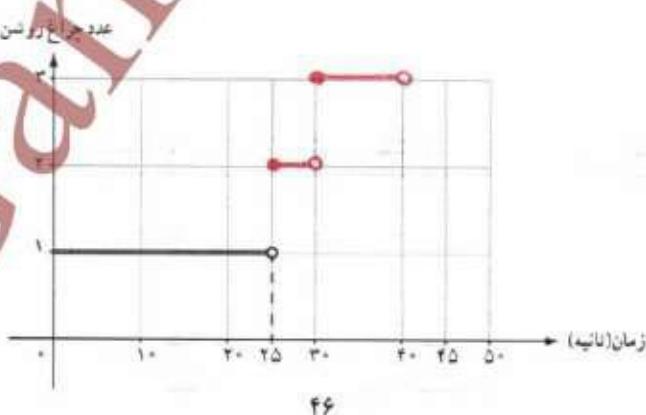
در کتاب بازدهم با بررسی مدل سازی از دنیا لی و آقی، ماتنده محاسبه قبض برق یک خانه با مدل ریاضی جراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل سازی آشنا شدیم (رسم بودا ر توابع متناظر با مفهوم مطرح شده).

فعالیت



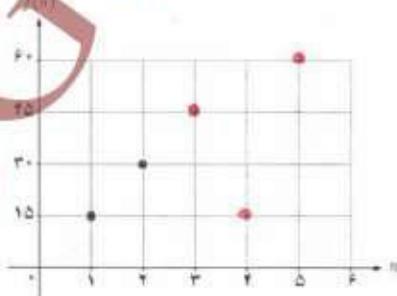
۱. یک جراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه شروع به کار ۲۵ ثانیه سر، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسکله را در ۴۵ ثانیه اول شروع به کار جراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.
اگر جراغ روشن سیز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد، عدد جراغ روشن در ثانیه ۱۰، با توجه به فرض:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ 2 & 25 \leq t < 30 \\ 3 & 30 \leq t < 45 \end{cases}$$
$$D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 45\}, R_f = \{1, 2, 3\}$$



۴۶

۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران بیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر $f(n)$ شماره ایستگاه، و $f(n)$ تعداد مسافران بیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، خصایطه، دامنه و پرد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۲۰	۴۵	۱۵	۶۰

$$f(n) = \begin{cases} \dots, 15, 20, 45, \dots & 1 \leq n \leq 3 \\ 15 + 45(n-4) & 4 \leq n \leq 5 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

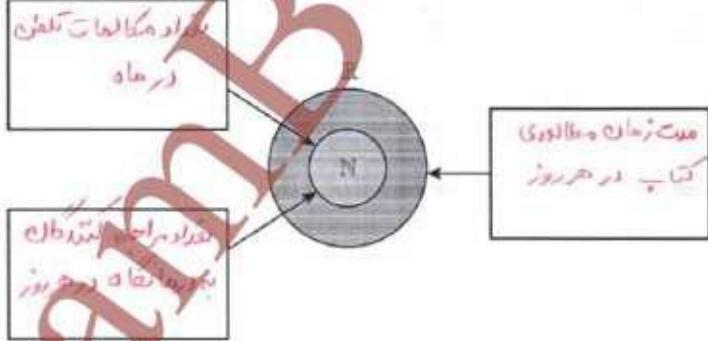
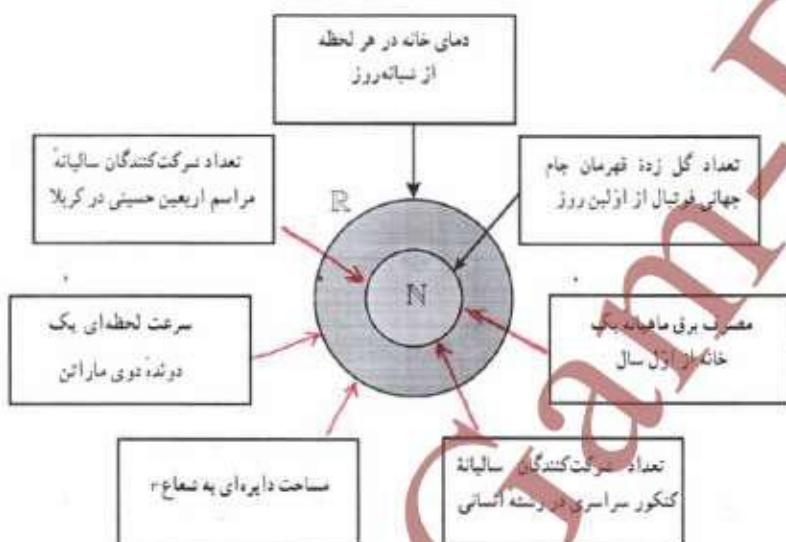
$$D_f = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 5\} \quad R_f = \{15, 20, 45, 60\}$$

بکی از تفاوت‌های تابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنه آنهاست. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنه تابع را من شروع به کار جراغ راهنمایی و رانندگی تا نایه ۴۵ آم است و تابع در تمامی این زمان، قابل تعریف است، پس دامنه تابع را بر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

در فعالیت دوم، دامنه تابع بیانگر شماره ایستگاه‌های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و... است. پس، دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

کار در کلاس

۱. اگر اتابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، مانند نمونه، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



در تعیین دامنه تعریف توابعی که باسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و nام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می کنیم.

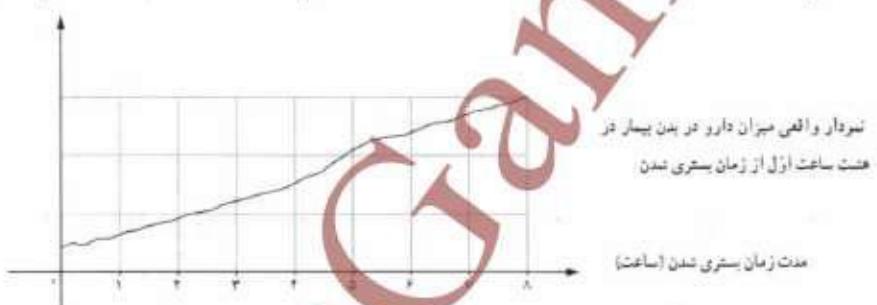


کاربردی دیگر از مجموعه اعداد طبیعی

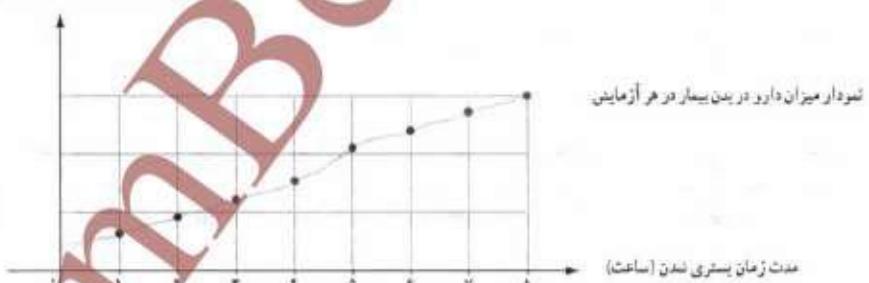
در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که واپسنه به زمان‌الد، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی امکان‌پذیر نباشد. در این حالت، با انتخاب تقاطعی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به طور تقریبی بررسی می‌کیم. برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می‌تواند میزان یک دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شباهه روز اندازه‌گیری کند اما در عمل او با قابلیت زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می‌کند.

به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می‌کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دوین آزمایش و...).

میزان دارو در بدن بیمار (میلی گرم)



میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش (میلی گرم)

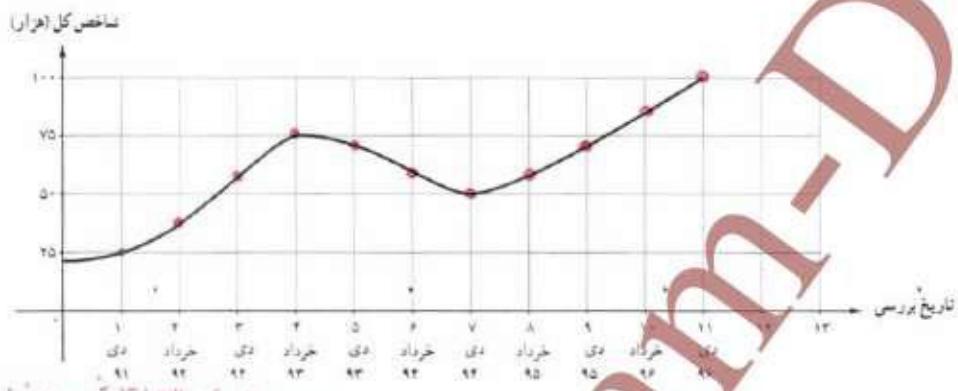


در فعالیت صفحه بعد، نمونه‌ای دیگر از همین کاربرد را می‌بینیم.



فعالیت

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می‌دهد:



از دی ۹۱ تا دی ۹۳ افزایشی، از دی ۹۳ تا دی ۹۶ افزایشی

- (الف) روی نمودار، نقاطی را منطبق اکنید که شاخص کل سهام را در تاریخ‌های نوشته شده معلوم کند. در سری زمانی بالا (الف)
- شاخص کل در چه فاصله‌ای روند کاهشی و در چه فاصله‌ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟
- (ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و ... و دی ۱۳۹۶ را بازدهی‌من تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را باتابع نشان دهیم. جدول زیر را کامل کنید.

n	نامین تاریخ بررسی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
f(n)	70	75	80	70	75	65	55	60	70	80	85	100
مقدار شاخص کل (هزار)												

- (ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۶ تا دی ماه ۱۳۹۴ (زمان تأثیف این برسن)، اگر رفتار نایاب (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(12)$ است؟ چرا؟

۱۲۵,۰۰۰ (۱) ۱۱۲,۵۰۰ (۲) ۱۰۵,۰۰۰ (۳) ۱۰۰,۰۰۰ (۴) ۹۵,۰۰۰ (۵)

- (د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.



خواندنی

«شاخص بورس تهران امروز با ۱۵۰۰ واحد افزایش به ۸۵۰۰ واحد رسید»، «شاخص بورس امروز ۵۰۰ واحد افت داشت»، اینها نمونه جملاتی است که بارها در اخبار اقتصادی شنیده‌ایم، اما این اعداد چه معنای دارند؟ باز بورس شاخص‌های مختلفی دارد اما شاید معروف‌ترین آنها - که در اخبار مطرح می‌شود - «شاخص کل» بورس باشد؛ همان شاخصی که نوادران در فعالیت پیش بررسی شد. این شاخص از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{\text{ارزش جاری بازار}}{\text{ارزش پایه سهام}} \times 100$$

در این تعریف، سال پایه سال ۱۳۶۹ در نظر گرفته شده است.

منظور از ارزش جاری بازار، مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در همان روز \times تعداد سهام در روز مورد بررسی» برای تک تک شرکت‌هایی است که در بازار بورس قرار دارند. منظور از ارزش پایه سهام، نیز مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در روز پایه \times تعداد سهام در روز بررسی» است. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید.
فرض کنید در بازار بورس فقط دو شرکت A و B وجود داشته باشند. شاخص سهام کل بازار بورس مثلاً در تاریخ ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ به کمک اطلاعات جدول زیر قابل محاسبه است.

شرکت	تعداد سهام شرکت در زمان ورود به بورس (۱۳۶۹)	قیمت سهام شرکت در تاریخ پایه	تعداد سهام شرکت در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶	قیمت سهام در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶
A	۱۰۰۰	۱۰	۱۲۰۰	۱۲
B	۵۰۰	۲	۱۵۰۰	۸

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{1200 \times 12 + 1500 \times 8}{1200 \times 45 + 1500 \times 30} \times 100 = \frac{192000}{99000} \times 100 = 193 \times 100 = 193$$

عدد ۱۹۳ به معنای ۱۹۳ برابر شدن ارزش بازار در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ نسبت به ۲۰ فروردین ۱۳۶۹ (۱۳۶۹) است. توجه داشته باشید که شاخص کل، واحد ندارد و این عدد به تهابی سود یا ضرر را انداخته دهد بلکه تغییرات آن هست دارد. برای مثال، اگر شما از سهام تمام شرکت‌های بورس یک سهم خریده باشید، در این صورت تغییرات شاخص کل بورس میزان بازدهی شماست؛ یعنی اگر شاخص کل بورس در یک سال از ۲۰۰۰ واحد به ۲۱۰۰ واحد بروید، یعنی ۵٪ رشد کند، میانگین بازدهی بورس طی یک سال برای شما ۵٪ بوده است.

^۱ فرمول بالا در روش محاسبه لاسپیوس (Laspeyres) معروف است.



ام سال های پیش با مفهوم الگو و باقاعدۀ جمله n م یک الگو آشنا شدیم.^۱ عموماً این الگوها را نیز می توانیم به کمک تابعی با دامنه اعداد طبیعی مدل سازی کنیم.

فعالیت

برای نویسنده جملات یک الگو در مثلث خیام^۲، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می کنیم:



اگر n شمارۀ هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

$$a_6 = 32$$

(الف) با محاسبۀ مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

(ب) بر اساس رابطۀ میان a_n و a_{n+1} و رابطۀ میان a_n و a_{n+2} و نیز a_n و a_{n+3} می توان مقداری a_n و a_{n+1} را مشخص کرد؟ چگونه؟

$$a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = 1$$

(ج) آیا به کمک قسمت ب، می توانیم رابطۀ میان هر دو جملة متولی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطۀ فقط جملات

الگوی بالا بدست می آید؟ جرا؟

$a_{n+1} = 2a_n + a_1 = 2a_n + 1$

(د) رابطۀ ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطۀ بازگشتی می نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطۀ ای را مکالمه می کنیم، بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنباله بالا را مشخص کند.

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

(ه) رابطۀ ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

(و) رابطۀ بازگشتی بدست آمده در قسمت (د) چه تفاوتی با اضابطه بدست آمده از قسمت «ج» دارد؟

در قسمت \rightarrow خوب هم، صحیح، قابل واسطه است. در قسمت \rightarrow خوب هم، صحیح، قابل واسطه است.

۱. کتاب ریاضی هفتم و هشتم
۲. خواندنی کتاب ریاضی هشتم





الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحه قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت سر هم قرار دارند دنباله اعداد حقیقی می‌نامند.
جملات دنباله عموماً به صورت $\dots, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نشان داده می‌شوند، a_m ام جمله دنباله می‌نامند که می‌تواند به دو صورت زیر مان شود:

(ا) رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشتی)

(ب) رابطه ای بر حسب $n \in \mathbb{N}$ (ضابطه تابعی دنباله).

برای مثال، در دنباله

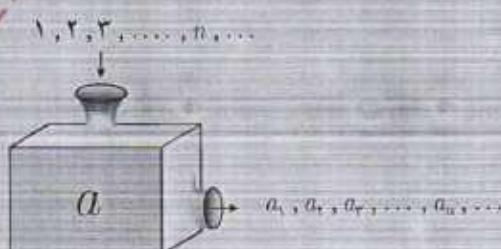
$$\begin{array}{ccccccc} 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \dots & \end{array}$$

با در نظر گرفتن $a_1 = 4$ ، بقیه جملات دنباله را اعتماد کردن عدد ثابت ۳ به جمله پیشین بدست می‌آید؛ یعنی:

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad (\text{رابطه بازگشتی دنباله})$$

و یا می‌توان الگوی جملات دنباله را با ضابطه $a_{n+1} = a_n + 3$ نمایش داد که در این رابطه، « عددی طبیعی است و با جای گذاری در تساوی داده شده، مقدار هر جمله به طور مستقیم بتوسط می‌آید.

تعریف دنباله: همان طور که مشاهده شد، اگر ۰ تابعی از $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد اضافی بود این تابع می‌تواند دنباله ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جمله اول آن را $a(0)$ ، جمله دوم را $a(1)$ ، جمله سوم را $a(2)$... و جمله n ام را $a(n)$ در نظر می‌گیریم.
عمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می‌دهند که آن را جمله n ام، جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می‌نامند.



کار در کلاس

با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

جمله اول	پنج جمله اول دنباله
$a_n = 3n - 4$	1, 4, 7, 10, 13
$b_n = n^2 - 1$	0, 2, 8, 15, 24
$c_n = \frac{1}{n}$..., $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\frac{1}{3}}, \frac{1}{\frac{1}{4}}, ...$
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	-1, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ...$

مثال) برای جملات دنباله زیر:

۲, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳

(الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

(ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

پاسخ:

(الف) برای نوشتند رابطه بازگشتی در اولین دنباله، رابطه میان جملات دنباله را بروزرسانی کنیم:

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 9 = 3a_1 \quad \text{و} \quad a_3 = 27 = 3 \times 9 = 27 \quad \text{و} \quad a_4 = 81 = 3a_3$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = 3$$

عنی، هر جمله دنباله ۳ برابر جمله پیشین است. بدینه است که تنها رابطه $a_n = 3a_{n-1}$ جملات دنباله را مشخص نمی کند و حتی باید یک جمله، مثلاً جمله اول آن (عنی $n=1$) نوشته شود.

(ب) در نوشتند ضابطه تابعی دنباله باید رابطه میان a_n, n را مشخص کنیم:

$$n=1 \rightarrow a_1 = 3 \quad (\text{اولین جمله})$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 9 = 3^2 \quad (\text{دومن جمله})$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = 27 = 3^3 \quad (\text{سومین جمله})$$

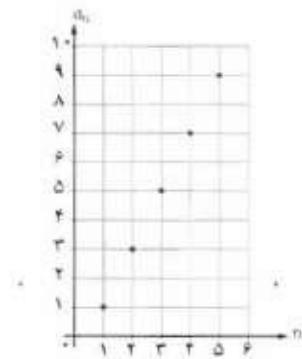
بس، ضابطه تابع به صورت $a_n = 3^n$ به دست می آید.



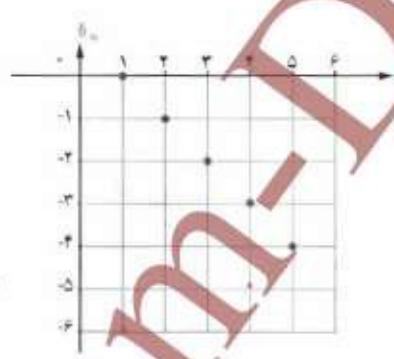
رسم دنباله

بروچه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی، نمودار آنها را نیز می‌توان رسم کرد:

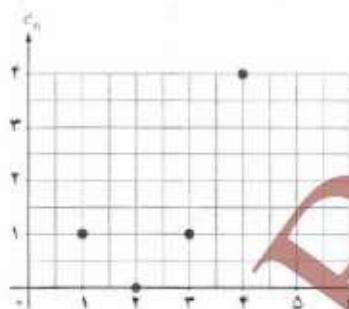
$$a_n = 4n - 1 \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$



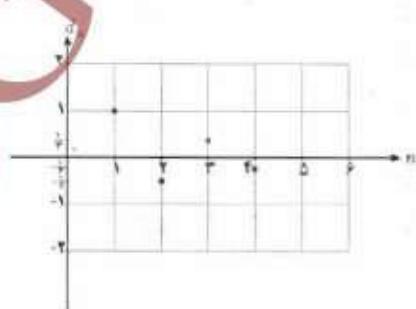
$$b_n = 1 - n \quad 0, -1, -2, -3, -4, \dots$$



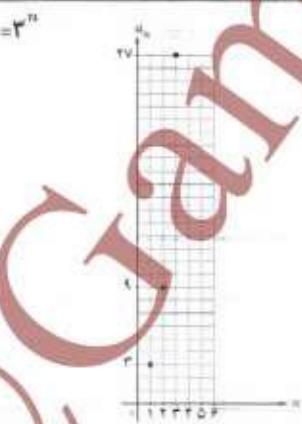
$$c_n = (n - 4)^2 \quad 1, 4, 9, 16, \dots$$



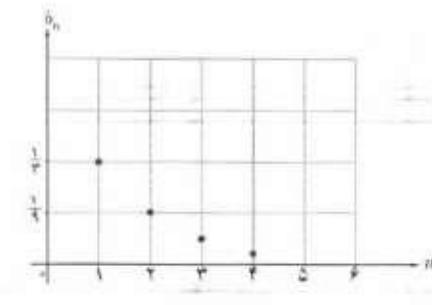
$$d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$



$$e_n = r^n$$



$$f_n = \left(\frac{1}{r}\right)^n$$



کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	فرمول بازگشتی	سابقه دنباله	نرودار دنباله
$1, \tau, 1, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{1}, \dots$	$a_{n+1} = \frac{1}{\tau} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \tau^{n-1}$	
$1, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{q}, \frac{1}{\tau^2}, \frac{1}{q^2}, \dots$	$a_{n+1} = \frac{1}{\tau} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = (\frac{1}{\tau})^{n-1}$	
$\tau, \omega, \sqrt{\tau}, \sqrt[3]{\tau}, \dots$	$a_{n+1} = a_n + \tau$ $a_1 = \tau$	$a_n = \tau n + \tau - 1$	
$1, 3, 6, 10, \dots$	$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$	$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$	
$1, -\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\delta}, -\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\tau}, \dots$	$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\tau n - 1}$	$a_n = (-1)^n$	
$-1, -\tau, -\delta, -\gamma, -1/\tau, \dots$	$a_{n+1} = -n^2$		
$1, 1, 2, \tau^2, \delta, \gamma, -1/\tau, \dots$	$a_{n+1} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$		

* دنباله موقی را دنباله فیبوناچی می‌نامند.



تمرین

۱. برای محاسبه قبض آب (آب‌ها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب‌ها محاسبه می‌شود:
هزینه هر متر مکعب با توجه به طبقه مصرف × میانگین مصرف = آب‌ها^۱

جدول ۱. محاسبه آب‌ها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)
$x \leq x < 5$	۱/۴۱۹	$45 \leq x < ۲۰$	۸/۴۹۶
$5 \leq x < ۱۰$	۲/۱۲۲	$۲۰ \leq x < ۲۵$	۱۱/۵۸۰
$10 \leq x < ۱۵$	۲/۸۲۷	$۲۵ \leq x < ۳۰$	۱۵/۴۴۴
$15 \leq x < ۲۰$	۲/۷۰۲	$30 \leq x < ۵۰$	۲۲/۴۶۲
$20 \leq x < ۲۵$	۵/۴۰۰	$x \geq ۵۰$	۶۶/۹۲۴

الف) نمودار «طبقه مصرف – آب‌ها» جدول بالا رسم کنید و ضایعه و دامنه و برد تابع را بدست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۲ در تهران در یک ماه $20/490^{\text{۳}}$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار جه تابعی، آب‌ها را مشخص می‌کند؟

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

ب) میزان استفاده دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت

ج) حجم مکعبی به ضلع x

د) تغیرات سطح دریاچه ارومیه در بیست سال اخیر

ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی

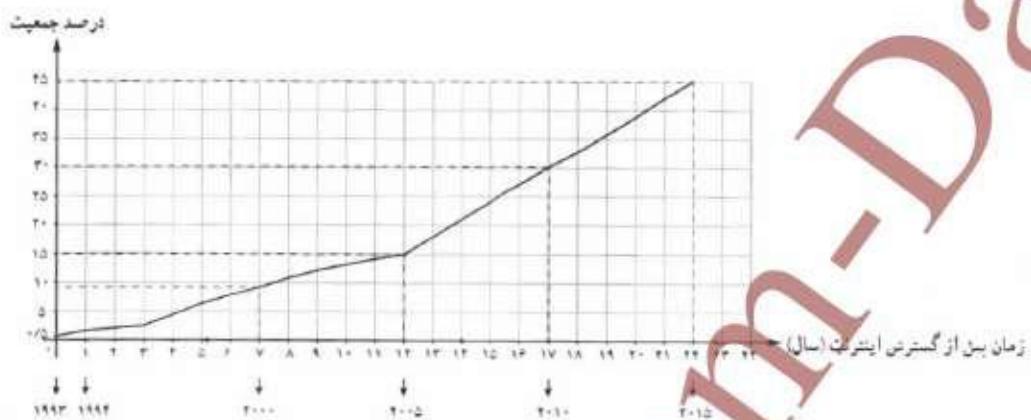
۱. اطلاعات بالا از www.rpwu.ir استخراج شده است. در جدول والمعنی این از محاسبه حاصل ضریب گفته شده بر اساس طبقه مصرف عددی بات از عدد به دست آمده، کم می‌شود.

با توجه به میانگین مصرف آب در هر واحد مسکونی، منطقه کلان تهران^۴ هزینه‌العنی تولید آب را می‌بردارند. هزینه آب در مقایسه با گشتوهای منطقه، بسیاری از کشورهای دنی جهان در ایران بسیار پایین است.

۲. الگوی مصرف برای هر واحد مسکونی در تهران^۵ است.



۲) نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند:



الف) اگر $y=f(x)$ درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان، x سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(7)$ و $f(7)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با بدست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y=4x-1$ بروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.
ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه روابطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n - 1$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، $b_n = (-\frac{1}{3})^{n+1}$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را بدست آورید.

الف) $a_1 + b_1$

ب) $c_1 - d_1$

ج) $b_1 + d_1$

۶. جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

(الف) $a_n = \frac{1}{3} a_{n-1}$ ، $a_1 = -1$

(ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ، $a_1 = 1$

ج) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ، $a_1 = 1$



۷) جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...			
۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...			
$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$			
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$			

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج} \\ 3a_n + 1 & \text{فرد} \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

(الف) $a_1 = 11$

(ب) $a_1 = 25$

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $5 \leq n \leq 10$ رسم کنید.

$$a_n = -\frac{1}{2}n + 3 \quad (\text{الف})$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad a_1 = 2 \quad (\text{ج})$$

$$a_n = \begin{cases} (-\frac{1}{2})^n & \text{زوج} \\ \frac{1}{n} & \text{فرد} \end{cases}$$

۱۰. محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل – با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می‌توانیم طرز سگفت انگیزی به جذر عدد k یعنی \sqrt{k} تردیک نویم.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{k}{a_n}) \quad a_1 = k$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و درین النهرين) است.

به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_1 را تقریبی برای \sqrt{k} در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{3}$

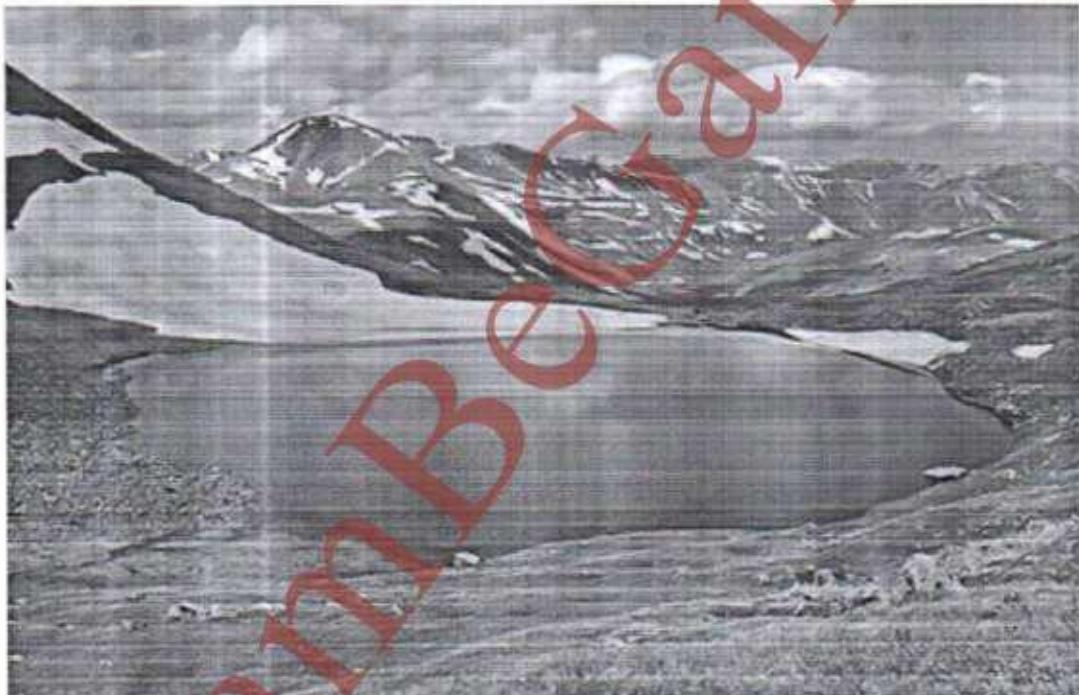
ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزبوری بر استفاده از مانعین حساب دارد؟ جرا؟





۶۰



دریاچه گهر، لرستان

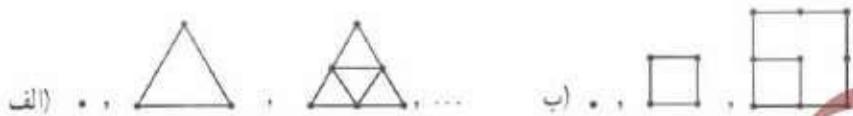
بازی و ریاضی

آیا می توانید ده جمله اول دنباله زیر را مشخص کنید؟

$$a_n = a_{2 \cdot n - 1} + a_{n \cdot n}, \quad a_1 = a_0 = 1$$

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ...

۱۱. جملات دنباله بازگشتی $a_1 = 1$ ، $a_n = a_{n-1} + (n+1)$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می کند؟



۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پس مند های صنعتی کارخانه ها به یک دریاچه، ۲۵٪ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالیانه ۱۰٪ فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خشی وی اثر می کند. سازمان محیط زیست با وضع موافقن جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵٪ تن در سال کاهش داده است. اگر $P_0 = ۲۵$ ٪ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با توجه یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.



$$f(x) / x \quad x$$

$$f(x) / x \quad x$$

$$f(x) / x \quad x$$

$$[, /) \cup [/ , /) \cup \dots \cup [/ ,) \quad [,)$$

$$f(/) / / /$$

N	R	
	✓	
✓		
	✓	
✓		
✓		

$f()$ / $f()$

t		
$f(t)$		

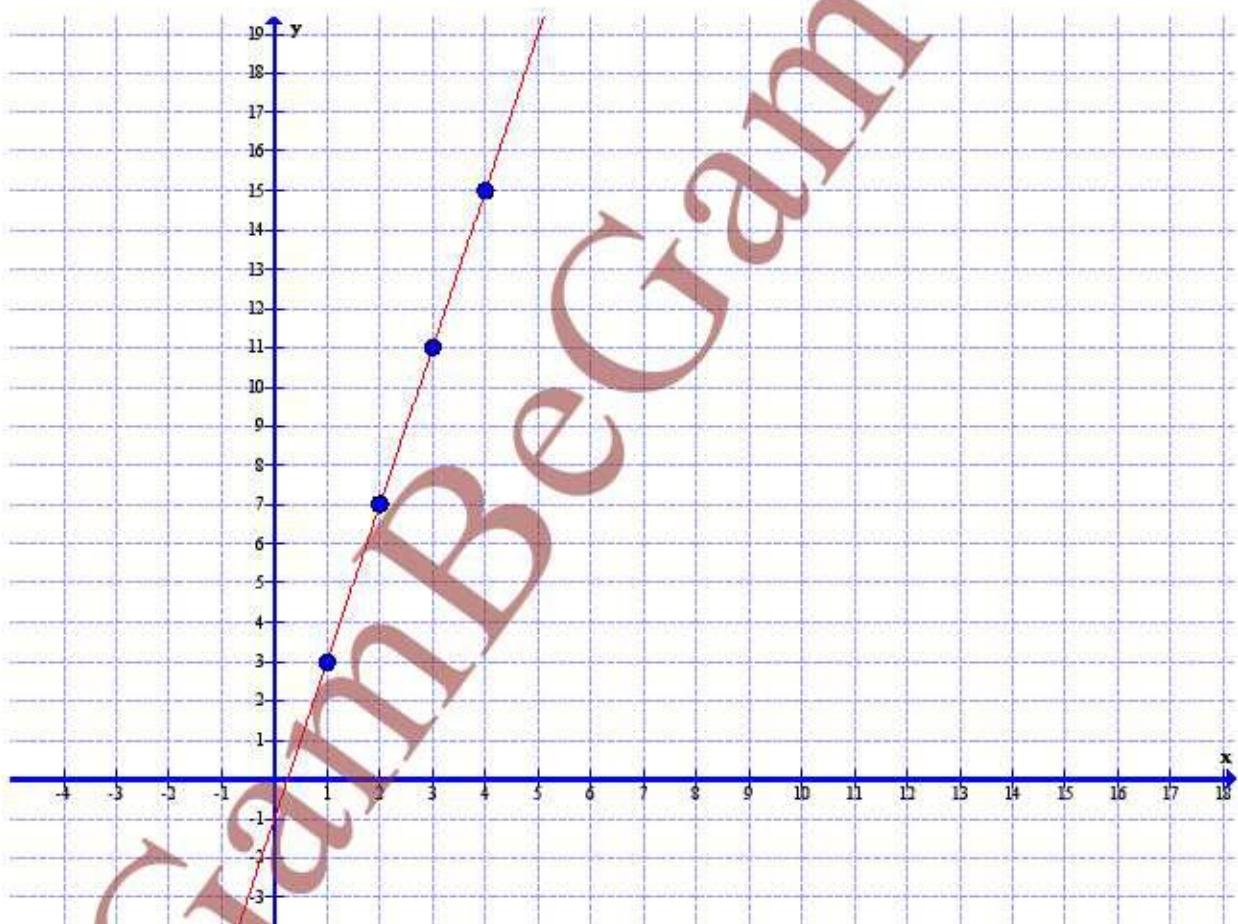
$$\begin{array}{ccccccc}
 m & & & & & & \\
 h & y_0 & mt_0 & () & & & \\
 y & mt & h & y & t & & \\
 f() & () & & & f(t) & t &
 \end{array}$$



Darsı

	y	x
x		
y		

	a_n	n
n		
a_n		



a_n n

a_n a_n

m

a_n a_n m



$$a - b = (-) -$$

$$c - d = (\overline{(-)}) - (+) -$$

$$b - d = (-) - (+) -$$

$$a_n - a_n ; a$$

$$a$$

$$a - a - (-) -$$

$$a - a - (-) -$$

$$a_n - \overline{a_n} ; a$$

$$a$$

$$a - \overline{a} - - -$$

$$a - \overline{a} - - -$$

$$a - \overline{a} - - -$$

$$a_n - a_n - a_n ; a - a - a$$

$$a - a - a - a - a$$

$$n - a - a - a - a$$

Matematik Darsi

$$a_n - a_n \cdot (-)^n ; a$$

a

$$n - a - a \cdot (-) - (-)$$

$$n - a - a \cdot (-)$$

$$n - a - a \cdot (-) - (-)$$

$$n - a - a \cdot (-)$$

$$\frac{a_n - a_n}{a_n - n} ; a$$

$$a_n - a ; a$$

$$a_n - a ; a$$

$$\frac{a_n}{n}$$

$$\frac{a_n}{n} - \frac{n}{n}$$

$$a_n - \frac{n}{n}$$



a

n *a* *a* ()

n *a* *-a* -()

n *a* *a* ()

n *a* *-a* -()

n *a* *a* ()

a

n *a* *a* ()

n *a* *-a* -()

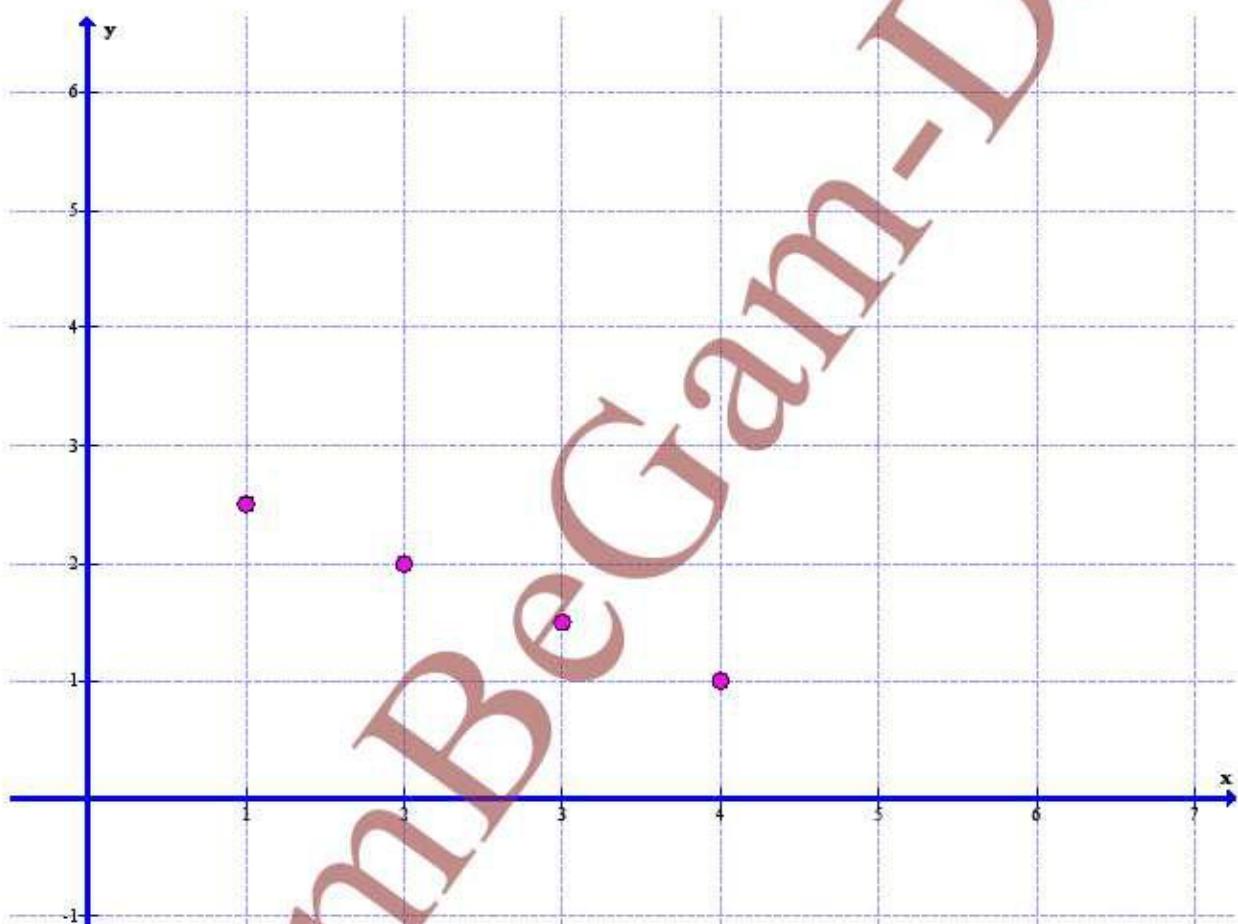
n *a* *a* ()

n ~~*a*~~ *-a* -() —

n *a* *a* (—) —

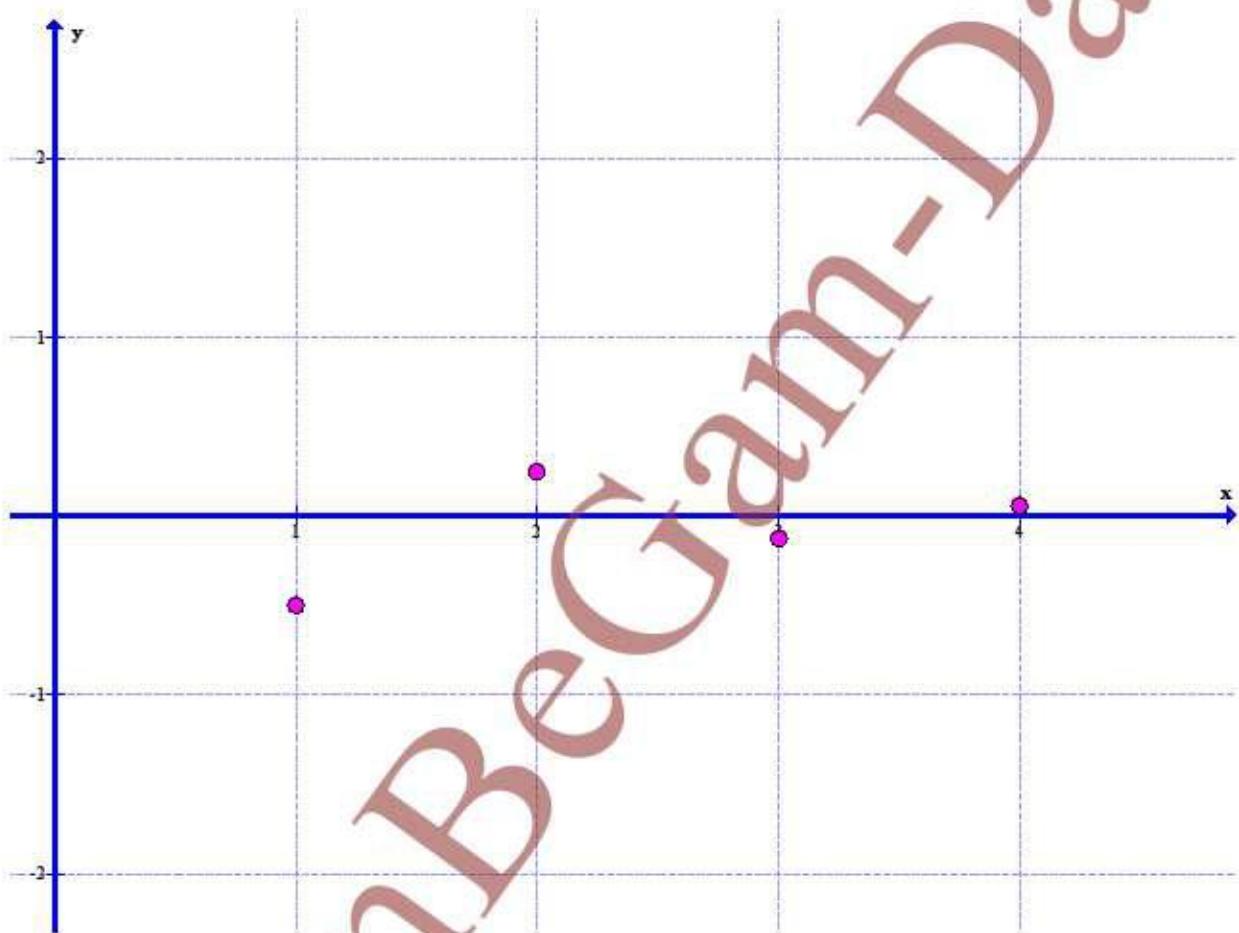
— —

	a_n	$-n$		
n				
a_n	-		-	



@Game

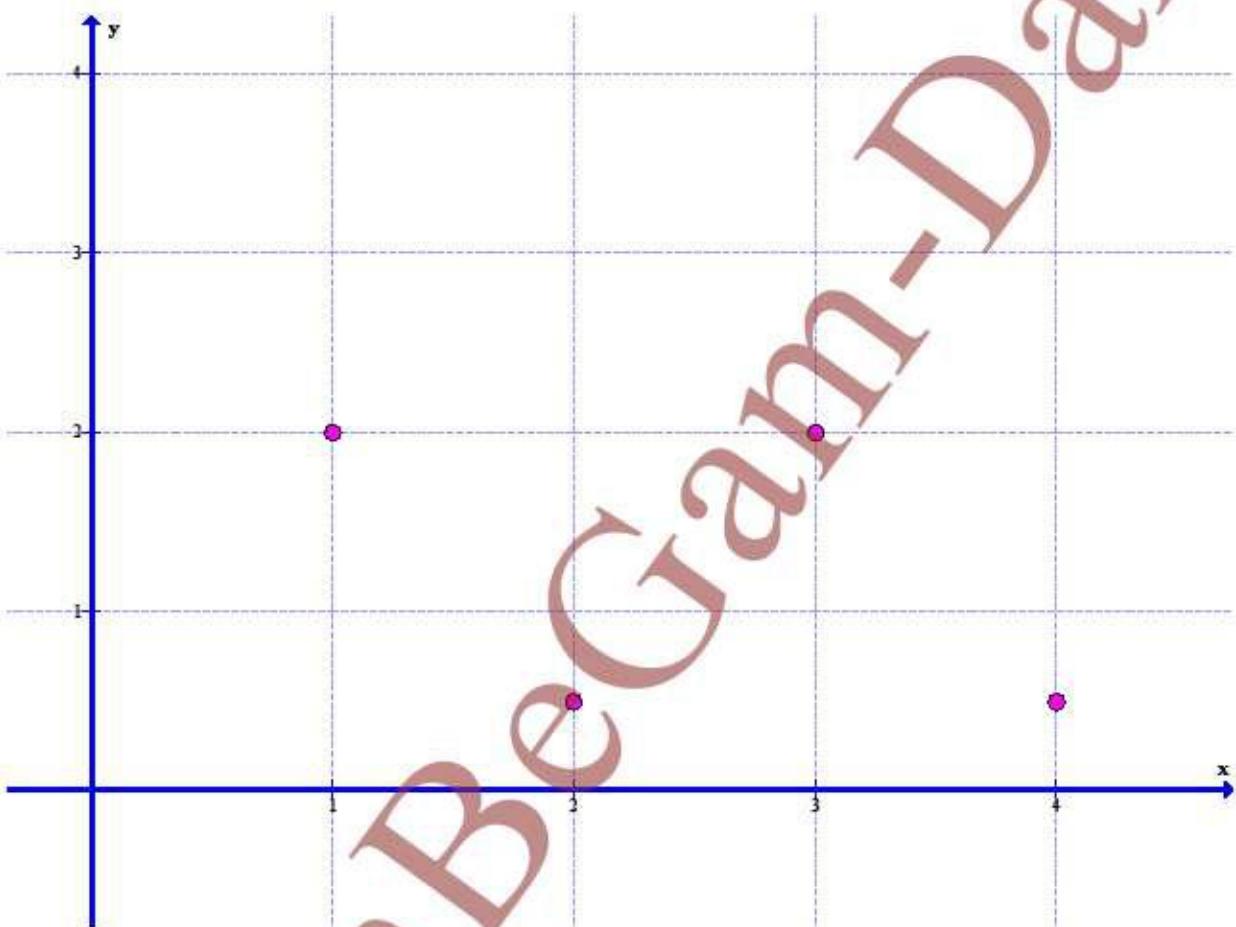
a_n	$(-)^n$
n	
a_n	- - - -



@GamBegam-Darsi

$$a \quad a \quad - \quad a \quad - \quad a \quad - \quad a \quad -$$

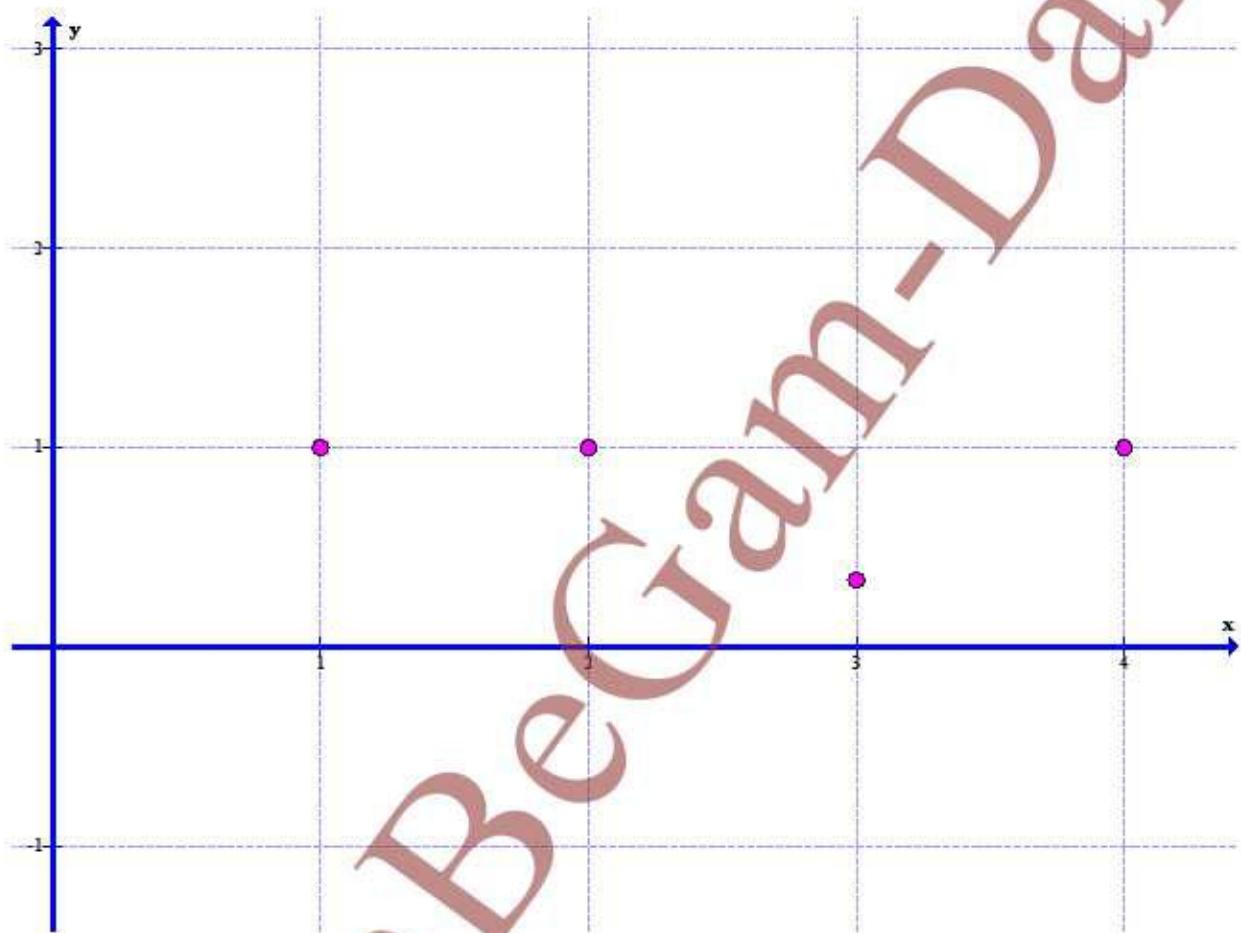
n					
a_n		-			-



@GamBeGam-Darsi

$$a \quad a \quad a \quad - \quad a$$

n				
a_n			-	



$$a_n \quad -(a_n \quad \overline{a_n}) ; \quad a$$

$$a \quad -(a \quad \overline{a}) \quad -(- \quad \overline{-}) \quad -$$

$$a \quad -(a \quad \overline{a}) \quad -(- \quad \overline{-}) \quad -(- \quad \overline{-}) \quad - \quad - \quad -$$

ایران توشه



k

$$a_n - (a_n \overline{a_n}) ; a$$

$$a - (a \overline{a}) - (-) - (-)$$

$$a - (a \overline{a}) - (-) - - - /$$

$$a_n - (a_n \overline{a_n}) ; a$$

$$a - (a \overline{a}) - (-) - (-)$$

$$a - (a \overline{a}) - (-) - - - /$$

$$a_n - a_n (n-) ; a$$

$$a$$

$$n - a a ()$$

$$n - a a ()$$

@GammBegainiDarsi

$p_n - p_n = p_n$; p

$n - p = p - p = -()$

$n - p = p - p = -()$

$n - p = p - p = -() / /$

$n - p = p - p = / - (/)$

$n - p = p - p = / - (/)$

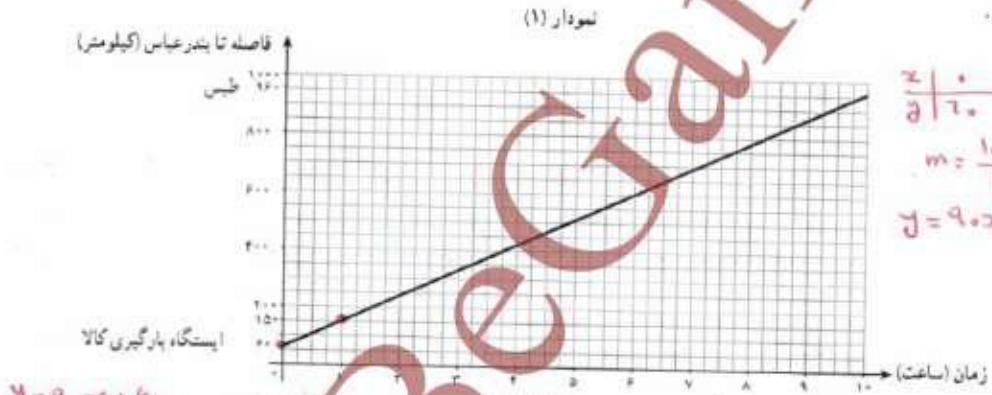
@GamBegam-Darsi

درس ۲

دبیله‌های حسابی

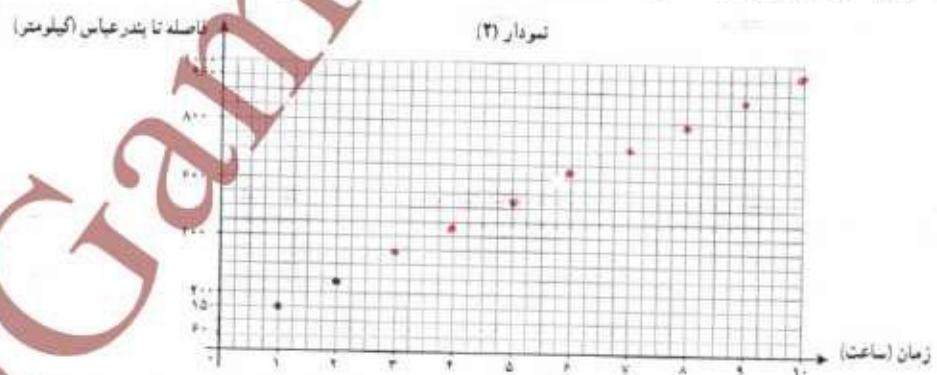
فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۷۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان - زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طبس حرکت می‌کند.



$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= 6 \\ 8 &= 6t + 70 \\ m &= \frac{100 - 70}{1 - 0} = 6 \\ y &= 6x + 70 \end{aligned}$$

- (الف) ضایعه تابع و دامنه و برد آن را بدست آورید.
ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد بس از حرکت، مسافت طی شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.



ج) ضایعه و دامنه و برد نمودار (۲) جه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

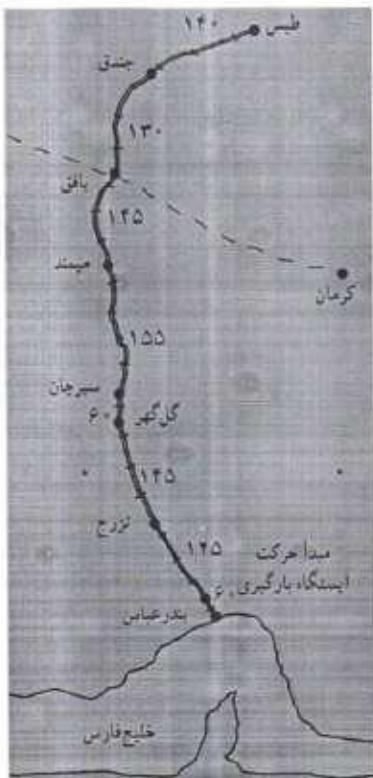
دامنه و برد نمودار (۱) زیر مجموعه از اعداد حقیقی
 DAMNE AND BOUND OF TRAIN 1 ARE SUBSETS OF REAL NUMBERS.
دامنه و برد نمودار (۲) زیر مجموعه از اعداد طبیعی است.



د) جدول ۱ را به کمک نفشه داده شده کامل کنید.

جدول ۱

نام در ایستگاه متوازن	مسافت	فاصله تا بدر عباس
ایستگاه بارگیری - ترچ	۱۲۵	$۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵$
ترچ - گل گهر	۱۴۵	$۱۸۵ + ۱۶۵ = ۳۵۰$
گل گهر - سرخان	۹۰	$۳۳۰ + ۶۰ = ۳۹۰$
سرخان - میندن	۱۵۰	$۳۹۰ + ۱۵۰ = ۵۴۰$
میندن - بافق	۱۴۵	$۵۴۰ + ۱۴۵ = ۶۸۵$
بافق - جندق	۱۳۵	$۶۸۵ + ۱۳۵ = ۸۲۰$
جندق - طبس	۹۰	$۸۲۰ + ۹۰ = ۹۱۰$



ه) با فرض اینکه n مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

جدول ۲

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$a_1 = ۷۰ + ۹۰ = ۱۶۰$	$a_2 = a_1 + ۹۰ = ۱۶۰ + ۹۰ = ۲۵۰$	$a_3 = a_2 + ۹۰ = ۲۵۰ + ۹۰ = ۳۴۰$	$a_4 = a_3 + ۹۰ = ۳۴۰ + ۹۰ = ۴۳۰$	$a_5 = a_4 + ۹۰ = ۴۳۰ + ۹۰ = ۵۲۰$
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$a_6 = ۵۲۰ + ۹۰ = ۶۱۰$	$a_7 = a_6 + ۹۰ = ۶۱۰ + ۹۰ = ۷۰۰$	$a_8 = a_7 + ۹۰ = ۷۰۰ + ۹۰ = ۷۹۰$	$a_9 = a_8 + ۹۰ = ۷۹۰ + ۹۰ = ۸۸۰$	$a_{10} = a_9 + ۹۰ = ۸۸۰ + ۹۰ = ۹۷۰$

و) با مقایسه جدول های ۱ و ۲، کدام ایستگاهها محل تعاس راهبر قطار بوده اند؟ چرا؟

ایستگاه بافق - مقایسه مسافت و فاصله

از دو جدول

۶۲

$a_v = ۷۹۰$
فاصله ۷۹۰ کیلومتری

ایران توشه



زیرا توجه به جدول ۲، آبتدآ تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + \dots \\ a_2 = a_1 + \dots \times q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + \dots \\ a_3 = a_2 + \dots \times q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_4 = a_3 + \dots \\ a_4 = a_3 + \dots \times q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_1 + \dots \\ a_{11} = a_1 + \dots \times q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = a_4 + \dots \\ a_5 = a_4 + \dots \times q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_6 = a_5 + \dots \\ a_6 = a_5 + \dots \times q \end{cases}$$

(۱۸-۱۹)

از روابط بالا می توان نتیجه گرفت:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times q \quad (1)$$

$$a_n - a_{n-1} = \dots \quad (\text{رابطه بازنگشی})$$

$$a_n - a_m = (n-m) \times q$$

ح) کدام ویژگی دنباله a_n باعث برقراری روابط بالا شده است؟ **اما داده دست داشته بود** **برای تفسیر اینجا بخوبی**

ط) رابطه (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با صفتی تابع به دست آمده در قسمت «الف» دارد؟

$$a_n = a_1 + (n-1)(q)$$

$$\rightarrow a_n = a_1 + q \cdot n - q$$

$$a_1 = 15 \rightarrow a_n = q \cdot n + 9$$

$$q = 15 + 7$$

دنباله حسابی^۱

نکته قابل توجه در دنباله مطرح شده در فعالیت، یعنی دنباله «مسافت طی شده در هر گزارش»، این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به گونه ای که براساس هر دو جمله متوالی، جمله بعدی مشخص می شود. متن دنباله هایی که هر جمله آنها به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می آید، دنباله های «حسابی» نامیده می شوند.

پنجم دنباله حسابی، دنباله ای به صورت:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d اختلاف مشترک جملات دنباله است. جمله n ام این دنباله با

رابطه $d(n-1)$ معرفی می شود.

« d را اختلاف مشترک دنباله حسابی می نامند: زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند و اینه اختلاف آنها مقدار ثابت است.

^۱. Arithmetic Sequence
Common Difference



کار در کلاس

$$a_{n+1} - a_n = d$$

۱) ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

۲) مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک» d ، چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟

آگر d مثبت، a_1, a_2, \dots, a_n افزایشی و آگر d منفی باشد، a_1, a_2, \dots, a_n کاهشی خواهد

۳) جدول زیر را کامل کنید.

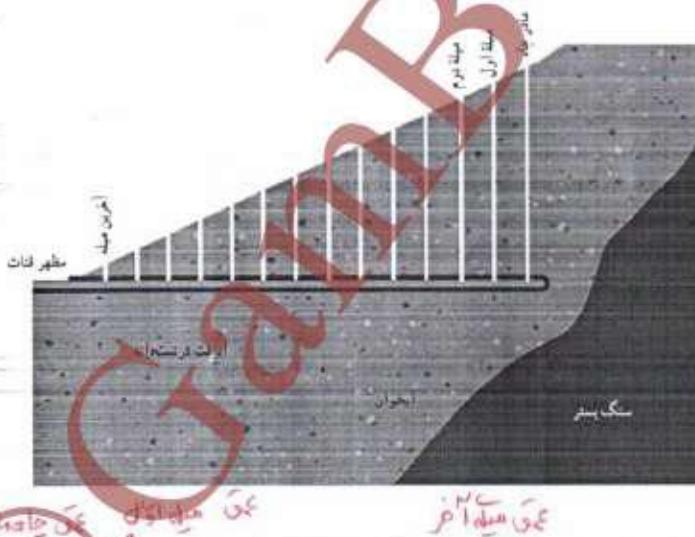
دیگر d همراه، جملات متساوی نیست.

جمله اول	اختلاف مشترک	بنج جمله اول	a_n
a	d	$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d$	$a_n = a + (n-1)d$
۲	۳	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...	$a_n = 2 + 3(n-1)$
۴	-۳	۴, ۱, -۲, -۵, -۸, ...	$a_n = 4 + (n-1)(-3)$
-۴	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots, \frac{2n-1}{2}$	$a_n = \frac{1}{2} + (n-1)(-\frac{1}{2})$
-۳	۵	-۳, ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ...	$a_n = -3 + 5(n-1)$

کار در کلاس

قفات با کاربر، راه آب با کانالی است که در زیرزمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «عادرچاه» بددست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌گردد. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقنی در خارج کردن خاک‌های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعبیر قفات حفر می‌شوند.

در یک منطقه، مقنی پس از حفر چاه در عمق ۲۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قفات کرده است. با توجه به شبیت نسبت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میله اول $20/5$ متر و میله دوم $20/5$ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله $1/5$ متر باشد، این مقنی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟



۱) مقنی به کسی می‌گویند که کانال را حفر می‌کند.

$$n = \text{تعداد چاهها}$$

$$\rightarrow -29 = -\frac{1}{5}n \rightarrow n = 58$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

$$a_n = a_1 + (n-1)(-\frac{1}{5})$$

$$\rightarrow 1, 5 = 30 + (n-1)(-\frac{1}{5}) \rightarrow 1, 5 - 30 = -\frac{1}{5}n + 30 \rightarrow -28 = -\frac{1}{5}n \rightarrow n = 58$$

ایران توشه



آذین

خواندنی

سی کهن در دل خاک

اگرچه به نظر می‌رسد مدیریت منابع طبیعی، رشته‌ای نوبای، مهم و حیاتی در بسیاری از دانشگاه‌های دنیاست، با نگاهی به تاریخ گذشته سوز مینمان متوجه می‌شویم که جگونه ایرانیان از هزاران سال پیش با فرهنگ ساختن کاریز و قنات، به استفاده بیش از منابع طبیعی توجه داشته‌اند. جان که در سفرنامه ناصرخسرو به قنات گتاباد اشاره شده است؛ قناتی با عمق مادر چاه پیش از سیصد متر و ارتفاع یک برج ۱۰۰ طبقه و با عمری سه هزار ساله.

حفر صدھا جاده و ایجاد هزاران متر کanal قنات برای انتقال آب حتی با وسائل امروزی، آن هم در مسیرهای خشک و کویری و در گرمای طاقت‌مندا، کاری بس عظیم و بی‌همناست که نه تنها شناس از صبر و شکیبای دارد، بلکه نایاب پیش از هر چیز بیانگر عشق سازان ما به زندگی و نلائش برای تداوم آن در نسل‌های آینده‌شان است.

انسان‌هایی که معضل عیشه بی‌آبی را نه تنها علی برای کوچ نمی‌دانستند، بلکه با داشتن و تفکر و هوشمندی و برنامه‌ریزی بلندمدت، آرام آرام ده‌ها هزار سرمهکب خاک را از اعماق زمین جایه جا کردند تا دسترسی به منبع حیات را برای نسل‌های بعدی شان فراهم سازند. نهایتاً نگاهی به کسی از قنات‌های موجود در ایران، مانند قنات زارج بزد که برای ایجاد آن پیش از هشتاد هزار متر کanal و جاه در دل کویر احفر شده است و با دانستن اینکه یک مقنی شاید در طول یک روز پیش از دو یا سه متر حفاری انعام نمی‌داده است، مخصوص می‌شود که حتی با یک گروه حفاری، اتمام این قنات به چندین ده سال کار بی‌وققه نیاز داشته است. کاری دشوار که هر روز و هر لحظه آن جدال مستقیم با مرگ بوده است؛ زیرا باریش خاک به ویژه در زمین‌های سست کویری و در عمق حدودین ده متر از سطح زمین، کمترین احتمالی برای زندگاندن مقنی قابل تصور نبوده است. این گونه بوده است که این افراد کاره روزمره را بالای سفید و اشهد گویان سروع می‌کرده‌اند.

فرهنگ ایجاد کاریز افزون بر موارد فوق، نشان دهد که جنبه‌های هوشمندی ایرانیان نیز دارد. نخست، با ایجاد سیسی ملائم هنگام حفر کanal و به کمک گرانش زمین نیازی به وجود بست برای انتقال آب نبود و سایل مهندسی امروزی برای جهت‌یابی و تعیین زاویه حفر، انجام دادن این عمل در



گذشته بسیار دشوار بوده است. دوم، فرهنگ ایجاد کاریز، ذخیره‌سازی آب در عمق زمین و درون جاه‌های را ممکن می‌ساخته است. آن‌ها در که در سده‌های آبی مقادیر زیادی از آب در معرض خورشید تخریب می‌شود، پیشینیان ما باستن آب در انتهایی یکی از میله جاه‌ها، آب را توسط چاه‌های قنات در اعماق زمین از تابش مستقیم آفتاب حفاظت می‌کرده‌اند؛ به بیانی دیگر، قنات‌های سدهایی زیرزمینی بوده‌اند.

در گزارش سازمان خواربار و کشاورزی مملکت متحده (فان) با عنوان «اهمیت سیستم سیستم‌های سنتی کشاورزی»^۱ سال ۲۰۱۴ ضمن به رسمیت شناختن این میراث در سطح جهانی و حفظ آن جهت نیل به توسعه بادار، نوشته شده است: «قدمت فناوری و دانش سیستم آبیاری سنتی در ایران، و حفر کاریز، دست کم به ۸۰ سال پیش از میلاد می‌رسد و تزدیک به سه هزاره زنده مانده است. شبکه آبیاری سیستم قنات توانسته است به طور بادار، امنیت غذای و معیشت خانوارهای کشاورزان را فراهم آورد».

پیش از ۴۰ هزار قنات در ایران منابع بادار با ارزشی هستند که توجه دوباره به آنها نایاب بخواهد. راه حل سازگاری با اثرباری اقلیمی کشاورزان در جهت تأمین منابع آب باشد؛ منابعی که امروز برای ایجاد دوباره آنها نیاز به هزار میلیارد تومان سرمایه و هزاران ساعت کار انسانی است. میراثی با ارزش که نایابان باشکیبای و عشق برای ما به باد کار گذاشته‌اند.

۱. طبق گزارش‌های رسمی، مانگن بازش جوی کشور ۴۱۳ میلیارد متر مکعب است که تزدیک به ۲۹۶ میلیارد متر مکعب آن در سال پیش می‌رسد. اگر محوت منابع آب زیرزمینی و ذخیره‌سازی آن بوسطه قنات‌ها نهاده درصد از تغییر آب را کاهش دهد، به طور مانگن تزدیک به ۳۰ میلیارد متر مکعب به حجم آب مورد استفاده افزوده می‌شود که عددی بسیار چشمگیر است.



فعالیت

$$n=1 \rightarrow a_1 = 3+2(1-1) = 3+0 = 3$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = 9$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 3+2(2-1) = 3+2 = 5$$

$$n=5 \rightarrow a_5 = 11$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = 3+2(3-1) = 3+2 = 7$$

الن) با محاسبه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادله خطی را که از دو نقطه اول و دوم می‌گذرد، بدست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط بدست آمده صدق می‌کنند؟

$$m = \frac{5-3}{4-1} = 2$$

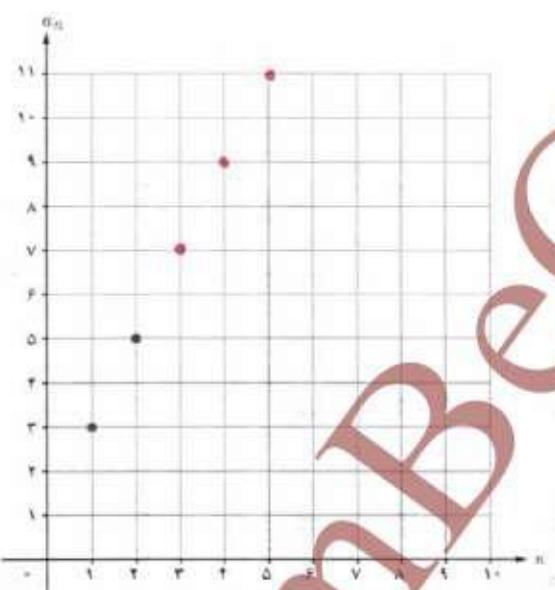
$$y = 2x + 1$$

برای خطا

ج) نسبت خط بدست آمده چه ارتباطی با (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟

$$d = m = 2$$

مساویند.



اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را بتوسیم، یک معادله خط خواهد شد. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که نسبت خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می‌کند.



کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

فایده تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهار جمله اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 4x - 1$	$a_n = 4n - 1$	۱, ۳, ۵, ۷	
$y = -x + 4$	$a_n = -n + 5$	۴, ۳, ۲, ۱, ۰, ...	
$y = x - 2$	$a_n = n - 2$	-۱, ۰, ۱, ۲, ...	
$y = \frac{1}{r}x$	$a_n = \frac{1}{r}n - \frac{a}{r}$	-۴, -۳, -۲, -۱	

خط های مماس
 $y = mx + b$
 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

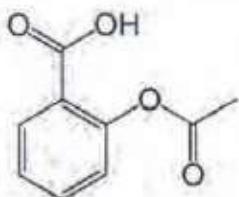
عرض از پردازش
 $b = y_1 - mx_1$

سوالات

ایران توشه



فعالیت



پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعانی ثابت صورت می‌شود.^۱ اگر شخصی که سابقه سکته قلبی دارد با مصرف یک فروض آسپرین، ۲۵۰ میلی گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی گرم دارو در سطح خونش کاهش یابد:

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳۰ میلی گرم می‌شود؟

ب) نمودار «سطح دارو در بدن - زمان» مستقله بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن را ۱۳۰ میلی گرم خواهد شد؟

کار در کلاس

درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۲۰۰,۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و باید این اضافه کاری مالیات برد اخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانه او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید).

با توجه به فرض مستله مبنی بر دریافت ۱۱ هزار تومان اضافه کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه کاری از یک دنباله عددی بیرونی می‌کند؛ ازیرا:



بنابراین، اگر a_1 میزان دریافتی شخص بدون اضافه کاری و پس از کسر مالیات باشد، جمله $\sum a_i$ دنباله باید برابر با مبلغ تومان باشد؛ یعنی در رابطه

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

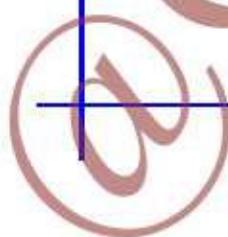
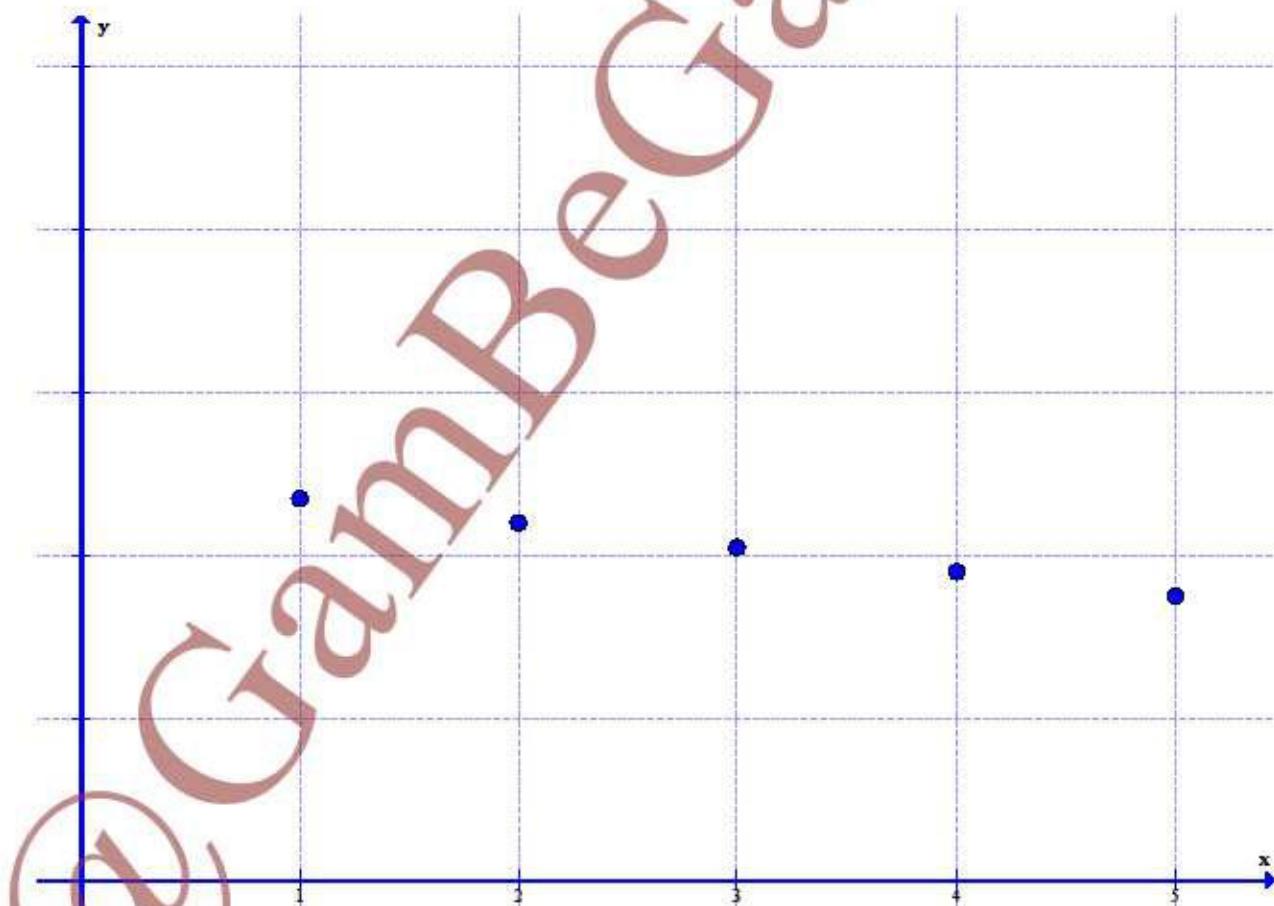
باید

^۱ این داروها را در داروسناسی Zero Order Kinetics می‌نامند.



a	a	a	\dots					

$a_n \quad n \quad a_n \quad n \quad n \quad n$



n							
b_m							

$b \quad b \quad b \quad \dots$
 $b_n \quad m \quad b_m \quad m \quad m \quad m \quad / \quad /$



				n
a_n	n	a_n	n	n



مجموع «جمله اول یک دنباله عددی

در فعالت «محاسبه تعداد چاههای قنات» مشخص شد که قنات موردنظر ۵۸ چاه دارد که عمن آنها دنباله حسابی $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ را تشکیل می‌دهد. فرض کنید یک مقتني در هر روز بتواند ۲ متر چاه حفر کند. می‌خواهیم بدانیم این مقتنی به حد روزانه زیارت دارد تا مجموع چاههای گفته شده را حفر کند.

(الف) ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ چاه حفر شده چند متر است.

برای این کار، مجموع عمق چاههای را یک بار از عمیق‌ترین تا کم عمق‌ترین چاه و بار دیگر از کم عمق‌ترین تا عمیق‌ترین چاه با یکدیگر جمع می‌نماییم:

$$\begin{aligned} S_{58} &= ۳۰ + ۲۹/۵ + ۲۹ + \dots + ۲/۵ + ۱ + ۱/۵ \\ S_{58} &= ۱/۵ + ۲ + ۲/۵ + \dots + ۲۹ + ۲۹/۵ + ۳ \\ ۲S_{58} &= ۳۱/۵ + ۳۱/۵ + \dots + ۳۱/۵ + ۳۱/۵ \end{aligned}$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 \text{ m}$$

(ب) با توجه به اینکه مقتنی روزانه ۲ متر چاه حفر می‌کند:

$$\text{روز} = \frac{913/5}{2} = 456/25 = 456/25 \text{ = تعداد روز برای پایان کار}$$

بنابراین، مقتنی بدون حتی یک روز استراحت تقریباً به ۱۵ ماه زیمان نیاز دارد تا قنات موردنظر را تحويل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع a_1, a_2, \dots, a_n و محاسبه مجموع «نام» برای تعیین S ، روش جالبی است که می‌توانیم به کمک آن، مجموع «جمله اول یک دنباله حسابی» را بدست آوریم:

مجموع «جمله اول یک دنباله حسابی d » $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + (n-1)d$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه بالا را در محاسبه مجموع چاههای حفر شده می‌توانیم مشاهده کنیم؛ زیرا:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{58} = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$$



کار در کلاس

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$d = 5$

a_1, a_2, \dots, a_{199} و $\dots, a_4, a_3, a_2, a_1$ (الف)

۱. مجموع دنباله‌های حسابی زیر را بدست آورید.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$199 = -1 + (n-1)(5) \rightarrow 200 = 5n - 5 \rightarrow n = \frac{205}{5} = 41$$

$$S_{41} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{41}{2}(-1 + 199) = 5000$$

ب) $a_{n+1} = a_n + d$, $a_1 = -2$ $S_n = ?$

$$-2, 5, 12, 19, \dots$$

$n = 10$

$d = 5$

(راهنمایی: ایندی به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2(-2) + (10-1)(5)) = 5(-4 + 45) = 50$$

۲. مجموع سی جمله اول اعداد فرد را بدست آورید.

$$a_1 = 1 \quad a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(2) = 2n - 1$$

$$a_{15} = 2(15) - 1 = 29$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = 15(1 + 29) = 450$$

۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص شده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow 870 = \frac{n}{2}(30 + 3n - 3) \rightarrow 1740 = n(27 + 3n) \rightarrow 3n^2 + 27n - 1740 = 0$$

با توجه به معلوم بودن $S_n = 870$ برای بدست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطه

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + (n-1)d)$$

$n = ?$

با جایگذاری $a_1 = 30$, $d = 3$, $S_n = 870$ در رابطه بالا $n = 30$ بدست می‌آید.

$$n^2 + 29n - 1740 = 0 \rightarrow (n-20)(n+29) = 0 \quad \begin{cases} n = 20 \\ n = -29 \end{cases}$$

نحوه حل داده شده طبقه‌بندی شده



تمرین

۱. بازگشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

$$(الف) \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad a_1 = 2$$

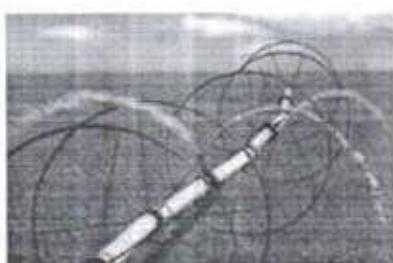
$$(ب) \quad a_{n+1} = a_n + 5 \quad a_1 = -1$$

$$(ج) \quad a_{n+1} = 5a_n + 1 \quad a_1 = -1$$

$$(د) \quad a_{n+1} - a_n = n$$

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵ و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

۳. بازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲. جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی ام این دنباله را مشخص کنید.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که دو آن سوراخ هایی برای بخش آب تعیینه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌جرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه ساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار خارد.)

۵. در یک کارخانه سنگبری برای صیقل‌دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از چند هفته استفاده مداوم وزن صفحه جقدر است؟

۶. میان دو عدد a و b عدد را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهد. تابت کنید اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $\frac{b-a}{n+1} = d$ بدست می‌آید. (توجه داشته باشید که نعداد کل جملات $(n+1)$ جمله است.)

۷. براساس رابطه به دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد ۱ و ۱۷ قرار دهد تا یک دنباله حسابی تشکیل دهدند.

۸. مجموع عددهای زیر را بدست آورد.

$$12 + \dots + 85 + 89 \quad (ب)$$



ج) ۲۲,۳۵۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

د) ۴۷,۲۰۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

الف) ۶۹۶ چاه شامل یک مادرجه و ۶۹۵ میله

ب) مجموع طول چاهها در یک مسیر $29858/4$ متر و مجموع طول چاهها در کل قنات 8940.6 متر

پاسخ:

مطهر قنات مطهر قنات

$$a_{11} = 78^m$$

$$a_1 = 84/6^m$$

مطهر قنات

مطهر قنات



۹. باع داران برای جیدن میوه ها از نرده بان های استفاده می کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نرده بان که در رخت تکیه داده می شود، برای جایه جایی آسان تر و تکیه گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نرده بان 125 سانتی متر و عرض آخرین پله آن 45 سانتی متر در نظر گرفته شود و هر پله 1 سانتی متر کوتاه تر از پله پیشین باشد، این نرده بان چند متر خواهد داشت؟ برای ساخت پله ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

۱۰. ارزش امروزی قنات زارج طولانی ترین قنات ایران - عمق مادرجه قنات زارج $84/6$ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. ذکر تعداد شاخه های هر سه شاخه قنات برابر و عمق بنجاه و شستمین چاه (مبله 155 م) 78 متر باشد، با فرض اینکه شبیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو مبله بکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (مبله 12) 12 سانتی متر در نظر گرفته شود :

(الف) هر شاخه قنات دارای چند مبله است؟

(ب) مجموع طول چاه های حفر شده در یک مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه های حفر شده در کل قنات چقدر است؟

(ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حرث، مصالح و دیوار چینی) 25 هزار تومان باشد، هزینه حفر چاه های قنات در حال حاضر چقدر است؟

(د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارج در مجموع طول کل کanal قنات 71 کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه 25 هزار تومان برای حفر کanal قنات، ارزش کل قنات زارج چقدر است؟ (بر احتسابی: a_n را عمق چاه n ام تا کanal قنات و a_1 را عمق مادرجه در نظر بگیرید).

n	a	a

$a \quad k$

$k \quad k \quad k \quad k \quad k \quad k \quad k$

$a_n \quad a \quad (n-1)d \quad n \quad n \quad (n-1)(n) \quad n$

$a_n \quad a \quad (n-1)d \quad a \quad a \quad d \quad a \quad d$

$(a-d) \quad (a-d) \quad a \quad \quad d \quad d$

$a \quad d \quad d \quad a \quad \quad a$

$a_n \quad a \quad (n-1)d \quad a \quad (n-1)(n)$

a	a	a		

$$a_n = a + (n-1)d \quad a = ()()$$

$$S = () /$$

$$a$$

$$a$$

$$a$$

$$a$$

$$d \quad a$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a = ()()$$

$$b \quad a$$

$$m \quad a \quad b \\ n \quad m$$

$$\frac{a}{a_n} \quad \frac{a}{b} \quad \frac{a_n}{a} \quad a \quad b \quad a \quad (a - (n-1)d) \quad a \quad b \quad a$$

$$(n-1)d \quad b \quad a \quad d \quad \frac{b-a}{n-m} \quad d \quad \frac{b-a}{(m-n)} \quad \frac{b-a}{m}$$

$$d \quad \frac{b-a}{m} \quad d \quad \underline{\quad}$$

$$b - a \quad (n -)d$$

$$n \frac{b - a}{d}$$

$$n \frac{b - a}{d} \quad \underline{\quad}$$

$$S \quad \underline{n(a - b)} \quad -(\quad)$$

$$n \frac{b - a}{d} \quad \underline{\quad}$$

$$S \quad \underline{n(a - b)} \quad -(\quad)$$

$$n \frac{b - a}{d} \quad \underline{\quad}$$

$$S \quad \underline{n(a - b)} \quad -(\quad)$$

@GamBeGammDarsi

فصل ۳- الگوهای غیر خطی

دبالة هندسی

درس ۱

توانهای گویا

درس ۲

تابع نمایی

درس ۳

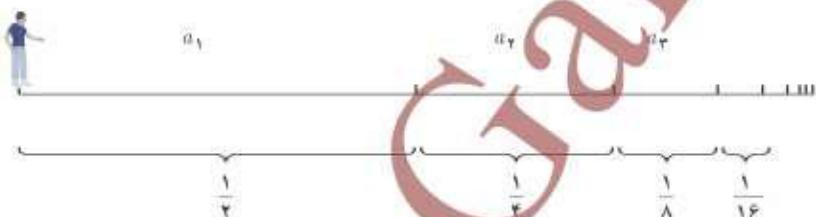
تابع نمایی در مدل سازی سیاری از پدیده های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیواکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل ها، سیاری های واگردان، شدت اصوات و زلزله ها کاربرد دارد.

درس ۱

دبالة هندسی

آیا ممکن است س از پایان کلاس ریاضی امروز و شنبه صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می‌شود و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟ این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی، زنو، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می‌شود تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کند و سپس نصف مسیر باقی مانده را طی می‌کند و به همین ترتیب، نصف مسیر باقی مانده و... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهد رسید! زیرا هر چند هر کدام از فاصله‌ها نصف فاصله پیشین است، هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهد شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود. به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a ، زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت $\frac{a}{4}$ به زمان $\frac{t}{4}$ نیاز داریم. بنابراین:

$$T = t + \frac{t}{4} + \frac{t}{4^2} + \dots$$

و چون جملات دنباله $\dots + \frac{t}{4^n}$ به در خروجی نمی‌شوند، پس T از مجموع عیشوار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیزی نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا این تناقض باسخ قطعی داده شود^۳. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد ساخته‌ای به نام «سری‌های هندسی و محاسبه مجموع آنها» انجامید که در ادامه این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می‌شود و در می‌باید که چرا به در خروجی کلاستان خواهد رسید.

۱. Geometric Sequence

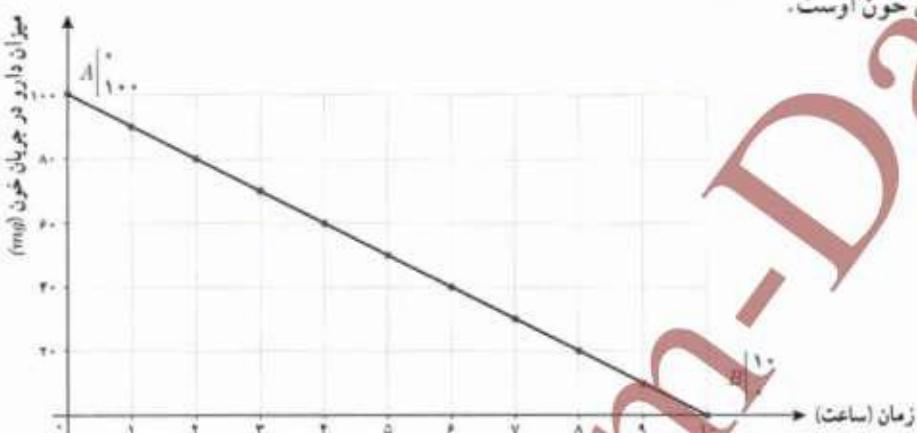
۲. Zeno's Paradox

۳. در سال ۱۸۶۲ گاؤس و به دنبال او گوشی س از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش ریاضی‌دان‌های مانند مرکانور، برونکور، بیوت و اوبلر از اواخر قرن هفدهم شروع کردند بودند، تابعی دقیق برای حل این مسائل پاختند.



فعالیت

همان‌طور که در فعالیت صفحه ۶۸ گفته شد، پس از مصرف بعضی از داروها، ماده مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می‌شود. برای مثال، اگر قرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف ۱۰۰ میلی‌گرم از داروی A، در هر ساعت ۱۰ میلی‌گرم آن را حذف می‌کند، نمایش دنباله کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظه مصرف دارو تا لحظه تمام شدن دارو در جریان خون است.



اگر a_0 میزان مصرف دارو در بدن شخص n ساعت پس از مصرف باشد، با توجه به کاهش 10 میلی‌گرم دارو در بدن شخص در هر ساعت:

$$a_1 = 90 \quad a_{n+1} = a_n - 10$$

پس، برای تعیین ضابطه تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده:

نوبه کننده:

$$m_{AB} = \frac{100 - 10}{10 - 0} = -10 \quad h = 100 - 10 = 90 \quad \Rightarrow \quad a_n = -10 \cdot n + 100$$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ضابطه تابعی دنباله را به کمک رابطه d $a_n = a_1 + (n-1)d$ (جمله عمومی دنباله) نیز می‌توان مشخص کرد؛ زیرا:

$$a_1 = 90 \quad a_n = 90 + (n-1)(-10) \Rightarrow a_n = 90 + (n-1) \times (-10) \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

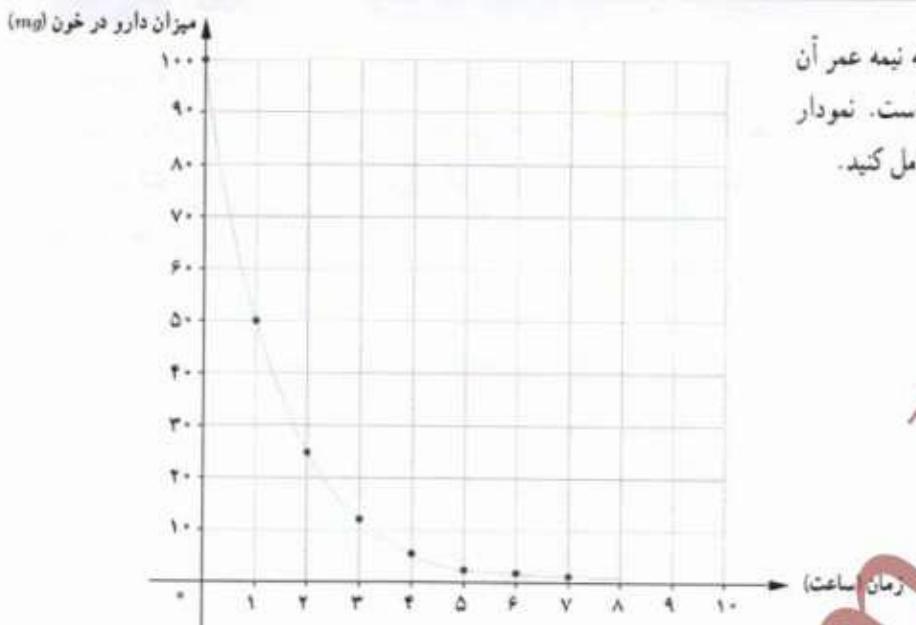
میزان حذف دارو و ماده مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف می‌شود و در تعداد زیادی از داروها ماده مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر ماده مؤثر» دارو در بدن کاهش می‌باید. فعالیت صفحه ۶۸، تأثیر مفهوم نیمه عمر را در ضابطه تابعی دنباله مشخص می‌کند.

۱. از این دارو را First Zero Kinetics می‌نامند.

۲. نیمه عمر یک دارو (Half-life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش منتهی شود. نیمه عمر دارو را با نشان می‌دهند.



فعالیت



شخصی ۱۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار **اعیز** [دارو در خون - زمان] را کامل کنید.

الف) میزان دارو در بدن شخص بس از حد نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ جواب این از نیمه عمر - مضر - با افزایش زمان میزان

ب) اگر^{۱۰} میزان داروی موجود در بدن شخص پس از آمین بشه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

با توجه به تعریف دنباله، و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت ... در جمله پیشین به دست می آید؛ یعنی:

$$a_1 = 0 \quad \dots \quad a_{i+1} = \dots \dots \quad a_n$$

ج) ضابطة تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 = \delta^0 \quad a_2 = \frac{1}{1} \times \delta^0 \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1} \times \delta^0 \right) = \left(\frac{-1}{2} \right)^1 \times \delta^0 \quad a_4 = \dots$$

$\Rightarrow a_n = \frac{n-1}{n} \times \delta^0$

خواندنی

دانستن نیمه عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال:

در درمان بیماری‌های عفونی، آنتی‌بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با مینان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.

در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شباهنروز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.

- کسانی که برای خواب بهتر در نسب از قرص‌های آرام‌بخش استفاده می‌کنند باید در طول روز شاداب و سرحال باشند و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.



دنباله هایی از اعداد که هر جمله شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می آید،
دنباله هندسی گفته می شود. عدد ثابت را نسبت مشترک^۱ می نامند و عموماً با r نشان می دهد.

یک دنباله هندسی، دنباله ای به صورت

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن a جمله اول و r نسبت مشترک دنباله است.

جمله ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید

جمله اول	نسبت مشترک	بنج جمله اول	ضابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{2}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$	$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{4}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{64}, \frac{1}{48}, \frac{1}{32}, \frac{1}{24}$	$a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n$ $a_1 = \frac{1}{81}$	$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{81}\right)$
$a_1 = -4$	$r = -\frac{1}{4}$	$-4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}$	$a_{n+1} = -\frac{1}{4} a_n$ $a_1 = -4$	$a_n = (-\frac{1}{4})^{n-1}$
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{5}$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
$a_1 = 100$	$r = \frac{1}{4}$	$100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ $a_1 = 100$	$a_n = 100 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

۲. با توجه به جدول بالا، در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $r > 0$

- الف) اگر $r < 1$ ، دنباله a_n ، دنباله هندسی است.
- ب) اگر $r > 1$ ، دنباله a_n ، دنباله هندسی است.
- ج) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n ، دنباله هندسی است.

\ Common ratio



n		n	
۱	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.10 \Rightarrow 1.00/10$	۵	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.10 \Rightarrow 1.00/10$
۲	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.10 \Rightarrow 0.90/10$	۶	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.10 \Rightarrow 0.81/10$
۳	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.10 \Rightarrow 0.81/10$	۷	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.10 \Rightarrow 0.729/10$
۴	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.10 \Rightarrow 0.729/10$	۸	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 0.10 \Rightarrow 0.6561/10$

ادامه قسمت د

هشت سال پس از خرید $\Rightarrow n > 7$

کار در کلاس

ضابطه بازگشته دنباله هندسی $\dots, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5$ را مسحص نماید.

$$a_{n+1} = r a_n \quad a_1 = a$$

کار در کلاس

(هزینه استهلاک)^۱ — شخصی بک بخجال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این بخجال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر n ارزش بخجال فریزر در سال n ام باشد:

الف) ضابطه تابعی دنباله a_n را به دست آورید.

با توجه به هزینه استهلاک $a_n = 960,000$ ارزش بخجال فریزر در هر سال ۹۰٪ سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$$a_1 = 960,000 \quad a_2 = 960,000 \times \frac{9}{10} = 864,000 \quad a_3 = 864,000 \times \frac{9}{10} = 777,600 \quad a_n = 960,000 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

ب) بیشترین کاهش ارزش بخجال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟ با توجه به اینکه ارزش بخجال در هر سال ۱۰٪ کاهش می‌باشد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان ۱۰٪ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین $a_n = 960,000 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ کاهش ارزش بخجال منتهی است.

ج) جرا ارزش بخجال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش بخجال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطه a_n

را به گونه‌ای بنویسید که ارزش بخجال فریزر پس از ده سال صفر بود، دنباله a_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

چون $a_n = a_1 r^{n-1}$ برای هر عدد غیر صفر، صفر نیست، $a_1 = 960,000$ و $r = \frac{9}{10}$ — حسابی

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد بخجال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

(راهنمایی: با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹۶۰ هزار تومان، نصف ارزش آن ۴۸۰ هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $960,000 \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 480,000$ را تأمین می‌کند، مشخص کیم.)

ه) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

$$a_{n+1} = a_n - k \quad a_{n+1} = k a_n$$

۱. Depreciation Cost
بیانگر دنباله حسابی است.

فرمایش K واحد سر تردد صکن است یعنی از قدرات دنباله افزایش ترکیب داشته باشد.

که K در صورت سر تردد، متغیر جملات است که دنباله هندسی اما صیغه $a_n = K^n$ نیست.



کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه عمر ماده کافین برای یک شخص بالغ و سالم نش ساعت است. اگر بک لیوان بزرگ چای سیاه یا بک فنجان قهوه $8 \times$ میلی‌گرم کافین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند جای با قهوه مصرف کند (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافین در بدن کمتر از 5% میلی‌گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود).

$$r = \frac{1}{2} \quad a_n = M \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

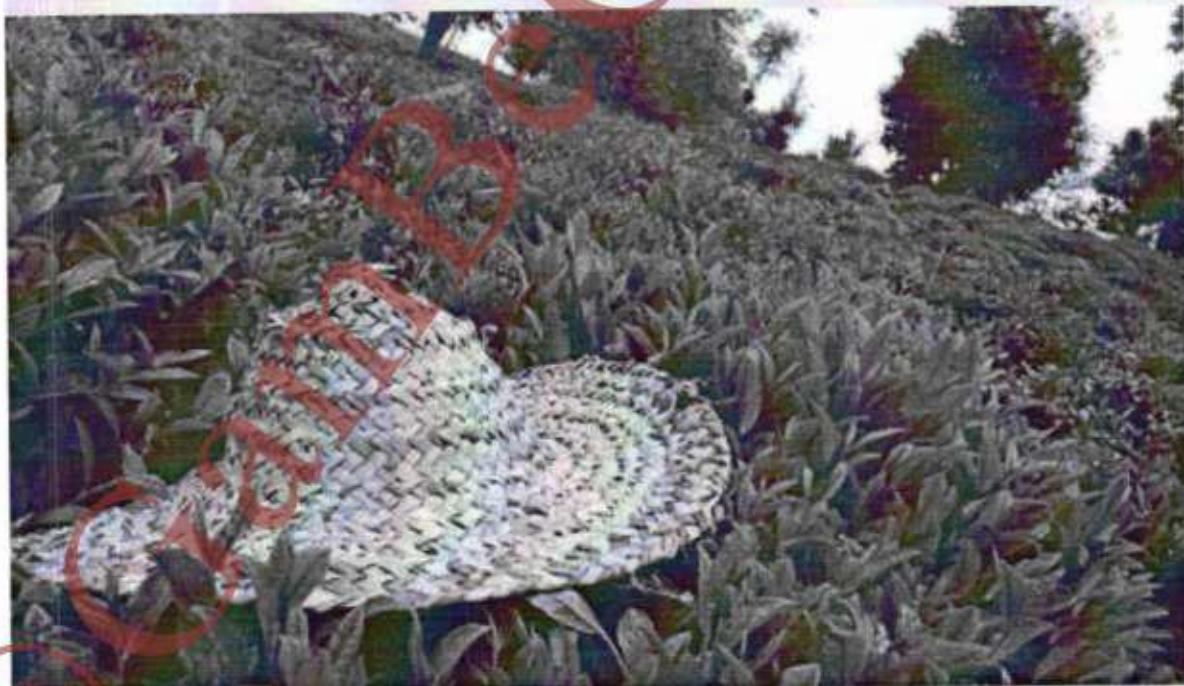
$$8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0.05 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{0.05}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{1600}$$

برای بدست آوردن چند نیمه عمر می‌توان مانند کار در کلاس قبلی جدول تشکیل داد

امروزه چای و قهوه از محظوظ ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز پیشتر، جلوگیری از حواس آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به‌سبب وجود ماده کافین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف مبالغه‌گرای نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن پیش از اندازه کافین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی خوابی و... می‌گردد. مصرف پیش از اندازه آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند، دچار مشکلاتی جون سردرد می‌شوند.

یکی از دلایل نوصیه برشکان به برھیز از نوشیدن چای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن پیش از اندازه آنهاست.

توجه به نیمه عمر ماده کافین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.



$$\frac{a}{a^4} \Rightarrow 2^{n-1} > 1 \cdot 2^4 \Rightarrow 2^{n-1} > 0 \times 2^0 \Rightarrow 2^{n-4} > 0 > 2^0$$

$$n-4 > 0 \Rightarrow n > 4$$

نیمه عمر با سیزده
۹۸۴ = ۵۶ ساله با سیزده

ایران توشه



فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، بزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حامل 80 میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در بابان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص‌ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

ب) با این رابطه بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

ج) آیا می‌توانند میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه‌ای مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)

د) پا جای گذاری مقادیر $A=80$ و $n=6$ در رابطه به دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

الف) اگر S_n میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض‌های مسئله:

تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی‌گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰:۰۰ پامداد	$S_1 = A = mg$
۲	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰:۰۰ صبح	$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + A = \frac{1}{2}mg + mg = 40 + 80 = 120$
۳	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰:۰۰ بعد از ظهر	$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + A = \frac{1}{2}(120) + 80 = 60 + 80 = 140$
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰:۰۰ پامداد	$S_4 = \frac{1}{2}S_3 + A = \frac{1}{2}(140) + 80 = 70 + 80 = 150$
۵	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰:۰۰	$S_5 = \frac{1}{2}S_4 + A = \frac{1}{2}(150) + 80 = 75 + 80 = 155$
۶	۱۷ بهمن	۰۰:۰۰:۰۰ پیش از غذا	$S_6 = \frac{1}{2}S_5 + A = \frac{1}{2}(155) + 80 = 77.5 + 80 = 157.5$

ب) با توجه به نحوه کامل کردن جدول بالا، رابطه بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$S_{n+1} = A + \frac{1}{2}S_n, \quad S_1 = A.$$

ج) برای نوشتن ضابطه تابعی دنباله S_n بر حسب n ، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را $A=80$ میلی‌گرم در نظر بگیریم (در این مسئله است)، با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت ب:

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{2}S_1 = A + \frac{1}{2}A = \frac{3}{2}A$$

$$S_3 = A + \frac{1}{2}S_2 = A + \frac{1}{2}(A + \frac{1}{2}A) = A + \frac{1}{2}A + (\frac{1}{2})^2A$$

\vdots

نمایه گشته:

گروه ریاضی مقطع دوم منسطه، استان خوزستان



به همچنین صورت برای محاسبه S₂:

$$S_p = A + \frac{1}{\gamma} A + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 A + \cdots + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{p-1} A$$

پس برای محاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف :

$$S_n = A + \frac{1}{\gamma} A + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 A + \cdots + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-1} A \quad (1)$$

اگر طرفن رابطه (۱) را در ضرب $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{k} S_n = \frac{1}{k} A + (\cancel{\frac{1}{k} A}) + \dots + (\cancel{\frac{1}{k} A}) \quad (1)$$

با تفاضل رابطه (۱) از (۲) رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{\gamma} S_n &= A - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^n A \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\gamma} S_n = A \left(1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^n\right) \\ \Rightarrow \quad S_n &= \gamma A \left(1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^n\right) \end{aligned}$$

بنابراین، با فرض این مستقله $A = 10^{-mg}$ ، مجموع میزان آنتی بیوتیک پس از n بار مصرف:

$$S_n = 15 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

د) با توجه به رابطه به دست آمده برای S_1 :

$$S_1 = 15 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^1\right) = 15 \times \frac{3}{4} = 11.25$$

$$S_1 = 1 \otimes x_1^T = 1 \otimes$$

$$S_2 = 140 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} r^2\right) = 140 \cdot \left(\frac{9r^2}{4r}\right)$$

$$= \frac{140 \cdot 9r^2}{4r} = 126r^2$$

مطابق با شیوه که در این فعالیت رای محاسبه نموده اند. مجموع ۲۲ جمله اول یک دنالة هندسی را میتوانیم

مشخص کنیم:

اگر جملہ عمومی یک دنبالہ هندسی بہ صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad (r \neq 1)$$

از دانسته:

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} \xrightarrow{a_n = ar^{n-1}} S_n = \frac{a - ra}{1-r}$$

پہ دست می آیدے۔

کار در کلاس

در فعالیت صفحه پیش :

الف) مقادير ۲ و ۳ را مشخص کنید.

ب) ضایعه‌های دنیاله‌های a_1 و S_1 را بنویسید. با توجه به این ضایعه معنای a_1 و S_1 چیست؟

$$a_n = n \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

$$A) S_n = A \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^n}{1 - \frac{1}{q}} \right)$$

ایران تفیل می باشد از هر ۲۴ ساعت بیش از ۱۴ ساعت صورت گرفت که

$$* S_3 = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^3}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \left(\frac{8-1}{8} \right) = \frac{5}{12}$$

$$* S_4 = \frac{2}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4 \right) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{16-1}{16} = \frac{15}{64}$$

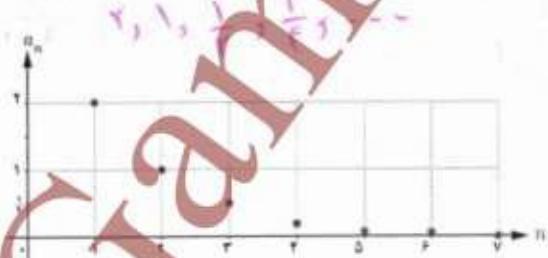
جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماتریس حساب استفاده شود.)

جملات دنباله	a_1 (جملة اول)	r (نسبت مشترک)	مجموع n جملة اول
$\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{3})^5)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{21}{16}$ $S_6 = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6 \right) = \frac{160}{405}$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{4}$	$S_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4 \right) = \frac{1}{4} \times \frac{15}{4} \left(\frac{16-1}{16} \right)$ $S_5 = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5 \right) = \frac{15}{4} \times \frac{15}{16} \left(\frac{16-1}{16} \right)$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{2}$	$S_4 = \frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right) = \frac{2}{5} \times \frac{15}{16} \left(\frac{16-1}{16} \right)$ $S_5 = \frac{2}{5} \times \frac{15}{16} \left(\frac{15}{16} \right) = \frac{105}{128}$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = 5$	$S_5 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - 5^5}{1 - 5} \right) = \frac{2}{5} \times 5 \times \frac{3124-1}{4}$ $= 1024$

۲. نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی :

الف) جملة عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) حاصل S_6 را به دست آورید.



$$r = \frac{1}{2} \quad a_1 = 2$$

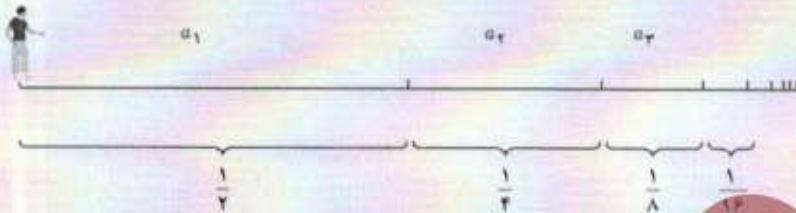
$$a_n = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$S_6 = 2 \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^6}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \times 2 \left(\frac{63-1}{63} \right) = \frac{124}{63}$$

۸۲



چو اب تناقض (بارا دوکس) زنو



همان طور که حوانده شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به دست می‌آید. زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد، مقدار دنباله بسیار بسیار کوچک می‌شود و می‌توانیم در حالتی که مجموع بی‌شمار جملات دنباله هندسی خواسته می‌شود، از مقدار آن صرف نظر کنیم. بنابراین:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \quad \xrightarrow{\text{در حالتی که } n \text{ عدد}} \quad S_n = a_1 \frac{1-r^{\cancel{n}}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

خیلی بزرگ باشد

اکنون یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال رجوتوجه کنید. اگر مطابق گفته او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از

رابطه ... $T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$ به دست آید که یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ است:

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots = \text{زمان رسیدن به در خروجی کلاس}$$

$$t(1 - (\frac{1}{2})^n)$$

جون n ، تا بینهاست ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{2})^n$ در بینهاست بسیار ناچیز است، از مقدار $(\frac{1}{2})$ می‌توان صرف نظر کرد:

$$\frac{t(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{t(1 - (\frac{1}{2}))}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$$

عنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده‌اید، با فرض ثابت بودن سرعت ثابت، بقیه مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت را در $2t$ ثانیه طی می‌کنید.

در واقع، اشتباه زنو این بود که می‌پندشت اگر بی‌شمار جمله با هم جمع شوند، حاصل این بی‌شمار جمله باشد بینهاست شود!

نیمه گشته:

گروه ریاضی هفدهم دوره متوسطه، اسناد خوزستان



تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد.

$$1) a_{n+1} = (a_n)^2 \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$2) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad a_1 = 1$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$\checkmark 1) a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$$

$$\checkmark 2) a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = 1$$

$$1, 2, 4, \dots$$

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a, b و c سه جمله متولی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه $b^2 = ac$ است. a) a, b, c را واسطه هندسی میان a و c می نامند.

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac$$

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ سه جمله متولی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

$$x(x+3) = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 3x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$$

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول ها در بدن ایجاد می شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بدن سلول های سرطانی استفاده می شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می شود و هر بار درصدی از سلول های سرطانی از بین می رود.

(الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار $\frac{1}{10}$ سلول های سرطانی فردی را از بین برد و اگر توده سرطانی او در ابتدای 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چله تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می ماند؟

(ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدایا باید تعداد سلول های سرطانی اش به کمک شیمی درمانی کسر از 10^7 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی مانده سلول های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

$$10^{12} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^6 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6}$$

۵. میان دو عدد a, b عدد را طوری قرار می دهیم که جملات دنباله شروع از a و خاتمه b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله های هندسی از رابطه $\frac{b}{a} = r^{n+1}$ به دست می آید. (اعتباری: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۶. جمله سوم یک دنباله هندسی 27 و جمله پنجم همین دنباله 243 است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

$$6) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots \Rightarrow r^2 = \frac{243}{27} \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow a_3 = ar^2 = ar^2 \times r^2 = a_1 \times r^4 = 243 \times 9 = 2187$$

قسمت الف سوال ۴

$$a_n = 10^{12} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = 10^{12} \times 10^{(n-1)\log_{10} \frac{9}{10}}$$

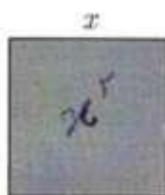
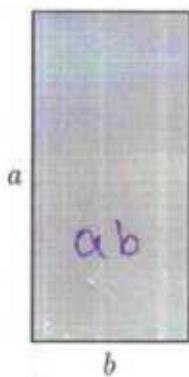
n	a_n	n	a_n
۱	$\left(\frac{9}{10}\right)^{1-1} < 7 \times 10^{-6}$	۱	$\left(\frac{9}{10}\right)^{1-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{12} \times 10^{(1-1)\log_{10} \frac{9}{10}} < 10^{12} \times 10^{-6}$
۲	$\left(\frac{9}{10}\right)^{2-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{-1} < 10^{-6}$	۲	$\left(\frac{9}{10}\right)^{2-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{12} \times 10^{(2-1)\log_{10} \frac{9}{10}} < 10^{12} \times 10^{-6}$
۳	$\left(\frac{9}{10}\right)^{3-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{-2} < 10^{-6}$	۳	$\left(\frac{9}{10}\right)^{3-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{12} \times 10^{(3-1)\log_{10} \frac{9}{10}} < 10^{12} \times 10^{-6}$
۴	$\left(\frac{9}{10}\right)^{4-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{-3} < 10^{-6}$	۴	$\left(\frac{9}{10}\right)^{4-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{12} \times 10^{(4-1)\log_{10} \frac{9}{10}} < 10^{12} \times 10^{-6}$
۵	$\left(\frac{9}{10}\right)^{5-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{-4} < 10^{-6}$	۵	$\left(\frac{9}{10}\right)^{5-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{12} \times 10^{(5-1)\log_{10} \frac{9}{10}} < 10^{12} \times 10^{-6}$
۶	$\left(\frac{9}{10}\right)^{6-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{-5} < 10^{-6}$	۶	$\left(\frac{9}{10}\right)^{6-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{12} \times 10^{(6-1)\log_{10} \frac{9}{10}} < 10^{12} \times 10^{-6}$
۷	$\left(\frac{9}{10}\right)^{7-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{-6} < 10^{-6}$	۷	$\left(\frac{9}{10}\right)^{7-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 10^{12} \times 10^{(7-1)\log_{10} \frac{9}{10}} < 10^{12} \times 10^{-6}$

بعد از ۱۴ بار

ایران توشه



$$8) a_n = 15000 \left(\frac{15}{100} \right)^{n-1} \Rightarrow a_5 = 15000 \left(\frac{15}{100} \right)^{5-1} = 15000 \times 0.052200625 = 7830 / 0.9375$$



۸. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است.

اگر معنی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله های

$$\text{زیرتکیل یک دنباله هندسی می دهد؟} \quad x^2 = ab$$

(الف) a, b, x

(ب) a, x, b

(ج) b, x, a

(د) a, b, x

۹. واسطه هندسی میان

a و b است سیز دنباله

هندسی کان a, x, b باشد

۸. یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود. پس از گذشت بیخ دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می ماند؟

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر بذریز رک و چهار مادر بذریز رک و ... دارد.

(الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی جمیع بوده اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید).

(ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (عنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

۲, ۴, ۸, ...

$$a_1 = 2 \quad r = 2$$

$$(الف) \quad a_n = 2^n$$

$$a_{10} = 2^{10} = 1024$$



$$S_n = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2}$$

$$= -2 + 2^{11} = -2 + 2048 = 2046$$

$$= 2044$$

$$S_n = \frac{a_1 r a_n}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{1 - 2 \times 1024}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = 2047$$

(الف) $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024$

۱۰. مجموع های زیر را به دست آورید.

$$a_1 = 1 \quad r = 6$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{6^n}$$

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \times 2^n}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} \times 2^n - 1}{5 \times 2^n} = \frac{2^n - 1}{5 \times 2^n} = \frac{2^n}{5 \times 2^n} = \frac{1}{5}$$

۱۱. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۲۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{4}$ است. کدام جملة دنباله برابر ۶ است؟ مجموع

جملات این دنباله از ۱۵۲۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

$$a_1 = 1526 \quad r = \frac{1}{4} \quad a_n = 6 \quad n = ?$$

$$(\text{الف}) \quad a_n = 1526 \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \Rightarrow \frac{6}{1526} = \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{254} = \frac{1}{4^{n-1}} \Rightarrow$$

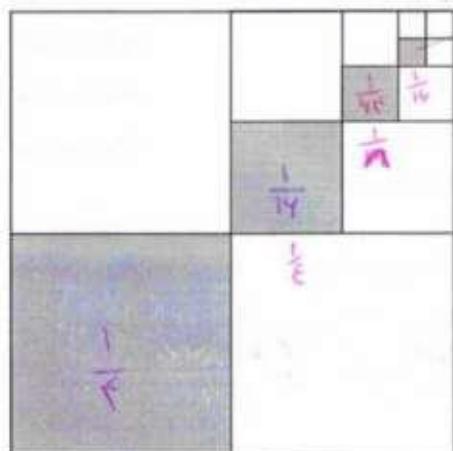
$$\frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{254} \Rightarrow 4^{n-1} = 254 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

$$(\text{ب}) \quad S_n = \frac{1526 - \frac{1}{4^9}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1526 - \frac{1}{262144}}{\frac{3}{4}} = \frac{1526 - 0.0038}{\frac{3}{4}} = \frac{1525.9962}{\frac{3}{4}} = 2034.66$$

ایران توشه



۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک مترا به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) حوار دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل

کنید؟
مساحت هر مشترک از ضرب مساحت مثبت

ب) اگر روند رنگ آمیزی تکثیر شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع

$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)}$$

ب) پس از شش مرحله رنگ آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

$$S_6 = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^6 \right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \left(\frac{99}{104} \right) = \frac{13405}{4096}$$

بازی و ریاضی

مربع‌های زیر را با اعداد مثبت به گونه‌ای پر کنید
که هر سطر و هر ستون جدول رو به رو یک دنباله
هندسی تشکیل بدهد.

$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$	$\frac{128}{1}$	$\frac{256}{1}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$	$\frac{128}{1}$	$\frac{256}{1}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$	$\frac{128}{1}$	$\frac{256}{1}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$	$\frac{128}{1}$	$\frac{256}{1}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$	$\frac{128}{1}$	$\frac{256}{1}$



درس ۲

«بیشہ ۱۰۰ م و توان گویا»

تاکنون با مفهوم توان های صحیح اعداد و نحوه ریشه گیری دوم و سوم آنها آشنا شده اید.

فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون درباره اعداد توان دار و ریشه‌های دوم و سوم اعداد یاد گرفته‌اید، با مفهوم ریشه‌های چهارم، پنجم و... اعداد حقیقی و نحود محاسبه آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\Phi^r = \Phi^f$$

$$(\mathbb{F})^{-\gamma} = \frac{1}{(\mathbb{F})^\gamma}$$

$$(-) = \frac{14}{4 \pi G}$$

$$VR^1 = \sqrt{V}$$

$$(-\mathbf{r})^+ = \textcolor{red}{v} \times \mathbf{q}$$

-3-

$$(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{16})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = (\frac{1}{4})^1 = \frac{1}{4}$$

۲. الف) مانند نموده، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان دار بتوانید و در جدول در جای مناسب فرار دهید. m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند)

$$(-3^2)^4 + 4^4 = \left(\frac{-3^2}{4}\right)^4 + (4/1)^4 = (-9/4)^4 + (4/1)^4 = (-9^4/4^4) + (4^4/1^4) = (-81/16) + (256/1) = 256 - 81/16 = 256 - 5.0625 = 250.9375$$

$$(-\frac{t}{v})^{\alpha} \times (-\frac{t}{v})^{\beta} = \left(\frac{-t}{v}\right)^{\alpha + \beta} = \left(\frac{t}{v}\right)^{-\alpha - \beta} = \left(\frac{v}{t}\right)^{\alpha + \beta} = (1 + \frac{v}{t})^{\alpha + \beta} = 1.$$

$$(-\epsilon)^{\alpha}(-\delta)^{\beta} = (-\epsilon - \delta)^{\alpha + \beta} = r^{\alpha + \beta}$$

تہذیب

گروه دیاضی مقطع دوم هنرستان، استان خوزستان



$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(\frac{y}{1})^x \times (\frac{y}{1}) \times (\frac{y}{1})^t = (\frac{y}{1})^{1+x+t}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(\frac{y}{1})^x \div (\frac{y}{1})^n = (\frac{y}{1})^{x-n} = (\frac{y}{1})^{x+(-n)}$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$(-y)^x \times (-z) = (-y \times -z)^x = (-yz)^x$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$(-3x)^{x+y} = (-\frac{3x}{1})^y = (-3)^y$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(-1)^q = 1 \times -1 = -1$

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها با مثال‌های زیر، رابطه با مثال متناظر بنویسید.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$5^{11} \div 5^4 = 5^{11-4} = 5^7$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$(-2)^4 \times (-3)^4 = (-2 \times -3)^4 = 2^4 \times 3^4$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$12^5 \div 3^5 = (\frac{12}{3})^5 = 4^5$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^2)^4 = 2^{2 \times 4} = 2^8$

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ رشته‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، رشته‌های دوم عدد a همان رشته‌های معادله درجه دوم $x^2 = a$ هستند. برای مثال، رشته‌های دوم عدد 16 رشته‌های معادله $x^2 = 16$ می‌باشند و جون $x^2 = 16$ و $x^2 = 4$ است. پس $\sqrt{16} = 4$ و $-\sqrt{16} = -4$. رشته‌های دوم عدد 16 هستند. همچنین رشته سوم عدد حقیقی مانند a ، رشته معادله $x^3 = a$ است. برای مثال، رشته سوم عدد 27 رشته معادله $x^3 = 27$ است که برای $x = 3$ می‌باشد. با همین استدلال، رشته پنجم عدد -32 ، پاسخ معادله $-x^5 = 32$ است که برای $x = -2$ و رشته‌های سیم عدد 64 ، رشته‌های معادله $x^6 = 64$ هستند که برای $x = 2$ و $x = -2$ می‌باشند. جدول صفحه بعد را مانند نمونه کامل کنید.

-۶۴	۶۴	(a) عدد
وجود ندارد	$\sqrt[۳]{64}, -\sqrt[۳]{64}$	ریشه‌های چهارم
وجود ندارد	$\sqrt[۴]{64}$	$\sqrt[۴]{a}$
$\sqrt[۴]{-64}$	$\sqrt[۴]{64}$	ریشه پنجم
$\sqrt[۵]{-48}$	$\sqrt[۵]{48}$	$\sqrt[۵]{a}$
وجود ندارد	$\sqrt[۶]{48} = 2, \sqrt[۶]{-48} = -2$	ریشه‌های ششم
وجود ندارد	$\sqrt[۷]{48} = 2$	$\sqrt[۷]{a}$
$\sqrt[۸]{48}$	$\sqrt[۸]{48}$	ریشه های هشتم
$\sqrt[۹]{48}$	$\sqrt[۹]{48}$	$\sqrt[۹]{a}, \dots$

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، آن‌ها که ریشه n ام عدد a می‌نامیم، هرگاه: $b^n = a$ همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است، ریشه n ام مثبت عدد a است.

در حالت کلی‌تر، درباره ریشه‌های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a می‌توان گفت:

$a \geq 0$	زوج باشد n	$a^{\frac{1}{n}} =$ ریشه n ام $\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	فرد باشد n	$a^{\frac{1}{n}} =$ ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	زوج باشد n	ریشه ندارد
$a < 0$	فرد باشد n	$a^{\frac{1}{n}} =$ ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$

کار در کلاس

۱- با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال‌های می‌توانید به کمک ماشین حساب بدست آورید.

$$\text{ریشه‌های چهارم عدد } 81 \Leftrightarrow \sqrt[4]{81} = 3, \sqrt[4]{81} = -3$$



$a \geq 0$ عدد n : $a = 25$, $n = 8 \Rightarrow -\sqrt[8]{25} = 1/25 = -1/25 = -1/25$ رشته های زوج است و

$a \geq 0$ فرد است و $n : a = 4^3$, $n = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{4^3} = 4$ رشته سوم زوج است

$a < 0$ زوج است و $n : a = -4^3$, $n = 3 \Rightarrow -\sqrt[3]{4^3} = -4$ رشته سوم نزدیک زوج است

$a < 0$ فرد است و $n : a = -27$, $n = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$ رشته سوم نزدیک فرد است

۱. با توجه به اینکه $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ و $\sqrt[n]{a^n} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است؛ یعنی:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج است} \\ a & n \text{ فرد است} \end{cases}$$

برای مثال، $\sqrt[5]{(-5)^5} = 5 = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3 = \sqrt[5]{(-15)^5} = -15$ همچنین

توان های گویا

سهامداران یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه ریزی برای توسعه شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال های قبل را آرائه کند. مدیر عامل در جلسه ارائه گزارش اعلام کرد که طی سال های قبل، سود سالانه شرکت ۲ درصد بوده است و پیش بین کرد که این سود در سال های آینده نیز محقق شود.

اگر سرمایه شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن را ۲٪ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهامداران شرکت می توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال های آینده برآورد کنند:

$$\text{بلابرگ سال} \rightarrow 100 \times (1/2)^1 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)}$$



توضیحات:

گروه امنی مالک فون موسسه، آستانه خوزستان

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می توان سرمایه شرکت را به صورت زیر حساب کرد:

$$100 \times (1/2)^1 = 120 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)}: \text{پس از گذشت یک سال}$$

$$120 \times (1/2)^2 = 144 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)}: \text{پس از گذشت ۲ سال}$$

حال اگر سهامداران این شرکت می‌خواستند سرمایه شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد، محاسبه کنند چگونه می‌توانستند این کار را انجام دهند؟

$$a_n = 100 \times (1.12)^n$$

تا اینجا شما با توان‌های صحیح و نحوه کاربرد آنها در محاسبات آشنای شدید اماده حل و مدل‌سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان‌های غیر صحیح همانند توان‌های گویاست. در ادامه، با مفهوم توان‌های گویا و نحوه استفاده از آنها در محاسبات آشنا می‌شوید.

فعالیت



۱. پدر محمد رئیس‌دانشگاه است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشانش داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. لطفاً نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	—	۸
جرم (گرم)	$1^1 = 2$	$2^2 = 4$	$4^3 = 8$	$8^4 = 16$	$16^5 = 32$	$32^6 = 64$	$64^7 = 128$	—	۲۵۶

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً باید تا بایان ساعت منظر سویم و نمی‌توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به دست آوریم؟ برای مثال، جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟ پدر محمد: نظر خودت درباره جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چیست؟ محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می‌زنم که ۲۲ گرم شود، اما مقدار ۲۲ را نیز دارم چقدر می‌شود؟ چون تمام توان‌هایی که ما ناگفته‌ایم، توان‌های صحیح بوده‌اند.

پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود و او را با توان‌های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم جرم باکتری‌ها در هر نیم ساعت «برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a^1 = a \times a = a^2$ می‌شود، با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم: $a^1 = 2$ یعنی $\sqrt{2} = a$. (زیرا a مثبت است). بنابراین پس از نیم ساعت جرم باکتری‌ها $\sqrt{2}$ گرم خواهد شد.

حالا می‌خواهیم بدایم آیا می‌توانیم $\sqrt{2}$ را به صورت توانی از ۲ بنویسیم.
معادله $2^0 = \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم مقدار a را به دست آوریم.

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{طوفان زا بیوان ۲ می رسانم} \quad (\sqrt{2})^2 = (2^{\frac{1}{2}})^2 \Rightarrow 2 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2} \Rightarrow 2^1 = 2^{\frac{1}{2} \cdot b} \Rightarrow 2^1 = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

بنابراین، داریم: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

پس جرم باکتری ها بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت)، $2^{\frac{1}{2}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست است. حالا بعد از پانزده دقیقه، جرم باکتری ها چند گرم خواهد شد؟

محمد: چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است، پس $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$ گرم خواهد بود.
حالا شما مانند محمد جرم باکتری هارا در زمان های داده شده بدست آورید.

$$2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \text{بس از } 2^{\circ} \text{ دقیقه } \left(\frac{1}{2} \text{ ساعت}\right) = 2^{\frac{1}{4}} = \text{بس از } 1^{\circ} \text{ دقیقه } \left(\frac{1}{4} \text{ ساعت}\right)$$

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $a^{\frac{1}{n}}$ عدد حقیقی منبسط a را جنبین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی کنیم. برای مثال، عبارت هایی مانند $2^{\frac{1}{2}}(-2)$ و $3^{\frac{1}{2}}(-1)$ را تعریف نمی کنیم. همچنین، هرجا عبارت های $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می شود، a را عددی مثبت در نظر می گیریم.

۲. در خصوص توان های صحیح اعداد دیدید که: درباره توان های گویای اعداد نیز می توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم:

$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2 \times 1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$\sqrt[5]{4} = \sqrt[5 \times 1]{4} = (4^5)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4^5}$$

و به طور کلی، داریم:

هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی m و n ، $a^{\frac{m}{n}}$ را جنبین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n} \cdot a^m$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

بنابراین، $a^{\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می شود:



اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بتوانید.

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$$

$$6^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{6^7}$$

$$12^{-\frac{7}{11}} = \frac{1}{\sqrt[11]{12^7}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^5}}$$

$$(0.001)^{\frac{11}{14}} = \sqrt[14]{(0.001)^{11}} =$$

روابطی که در ابتدای درس درباره توان های صحیح اعداد پادآوری شد، در خصوص توان های گویا و حقیقی^۱ اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

(۱) اعداد حقیقی و (۲) اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

توضیحات:

گروه ریاضی مقطع دوم متوجه، استان خوزستان

کار در کلاس

۱. هر یک از عبارت های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت توان دار بتوانید.

$$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$$

$$7^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{7}$$

$$\sqrt[7]{25} = 5^{\frac{1}{7}}$$

$$\sqrt[17]{2/\sqrt{7}} = (2/\sqrt{7})^{\frac{1}{17}}$$

$$(1/21)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{1/21}$$

$$\sqrt[7]{1} = 1^{\frac{1}{7}}$$

۲. با توجه به مسئله بیان شده در ابتدای معرفی توان های گویا، سرمایه شرکت مذکور را ماتم معرفه در هر یک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

$$100 \times (1/2)^1 = 100 \times \sqrt{1/2}$$

$$200 : (1/2)^{\frac{1}{2}} = 200 \times \sqrt{1/2}$$

$$100 \times (1/2)^{\frac{1}{2}} = 100 \times \sqrt{1/2}$$

$$100 \times (1/2)^{\frac{1}{3}} = 100 \times \sqrt[3]{1/2}$$

۱ در این کتاب، تمام توان های اعداد، گویا هستند.

توضیحات:

گروه ریاضی مقطع دوم متوجه، استان خوزستان



$$(-3^x)^3 \times (-3^y)^2 \times (-3^z)^{-1} = (-3^x)^{3+2} = (-3^x)^5 \Rightarrow -x+2=5 \Rightarrow x=-3$$

۳. در هر یک از نساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$$8^x \times 8^5 = 8^8 \times 8^y \Rightarrow 8^{x+5} = 8^{8+y} \Rightarrow x=3$$

اشتباه چاپی

جواب در پایین صفحه

$$(-2^6)^3 \times (-2^6)^2 \times (-2^6)^{-6} = (-2^6)^7$$

$$\frac{(-2^6)^5 \times 10^3}{(-2^6)^3 \times (-2^6)^2} = 2^8 \Rightarrow \frac{(-2^6)^{10} \times 10^3}{(-2^6)^8} = 2^8$$

$$\Rightarrow 2^{10} \times 10^3 = 2^8$$

۴. همان طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (۷) حجم کره (به دست می‌آید).

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم V را از فرمول زیر به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(\frac{3(\frac{4}{3}\pi r^3)}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4\pi r^3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = (r^3)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{3}{3}} = r^1 = r$$

ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

$$r = \left(\frac{3(\frac{4}{3}\pi)}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{32\pi}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \times \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$$

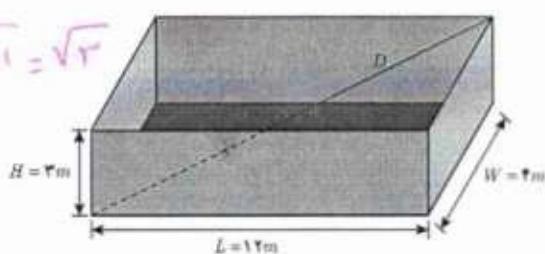
۵. اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق نابع $D = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$ (۸) طول L ، عرض W و ارتفاع جعبه (به دست می‌آید).

$$D = \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3+9} = \sqrt{14} = 13$$

الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

ب) اگر اندازه $L=W=H=1m$ باشد، اندازه D را به دست آورید.

$$D = \sqrt{(1+1+1)} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$



$$4) (2^x)^5 = \frac{1}{2^5} \Rightarrow 2^{5x} = 2^{-5} \Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{5} \Rightarrow x = -1$$



درس ۳

تابع نمایی

فعالیت

«بنیاد ملی بازی های رایانه ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی - اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت های موجود صنعت بازی های رایانه ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده و تاکنون تولیدات خوبی داشته است. یکی از تولیدات این بنیاد، «مجموعه بازی های سبز» است که قرار است دانش آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله اول، یکی از عوامل آلوده کننده محیط زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می گیرد. در مرحله دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط زیست می شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می گیرد و به همین ترتیب در مرحله بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحله بعد از آن ۸۱ امتیاز و ... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می شود که بازیکن به امتیاز ۴۲۰ چهل و ۶۷۲۱ برسد. اگر کنون به سوالات زیر پاسخ دهید

۱. فکر می کنید در مرحله ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت
برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱

میزان امتیاز های کسب شده	تعداد مراحل بازی
$3^0 = 1$	۰
$3^1 = 3$	۱
$3^2 = 9$	۲
$3^3 = 27$	۳
$3^4 = 81$	۴
$3^5 = ?$	۵
$3^6 = ?$	۶
$3^7 = ?$	۷
$3^8 = 243$	۸
$3^9 = 729$	۹
$3^{10} = 2187$	۱۰

$$S_n = \text{میزان امتیازات شده} \quad (\text{مکارهای مراحل بازی})$$

۲. در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟ مرحله هشتم
 ۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه‌ای به دست آورید.
 آنچه به دست آمده در قسمت قبل، آیا می‌توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و با مرحله ۴۰ام را به دست آورید؟

$$a_1 = 3^1 = 0.9 \times 9$$

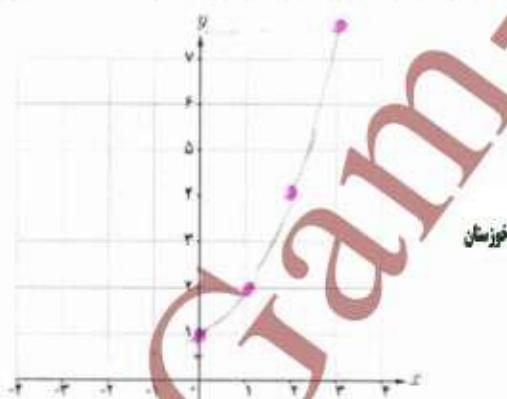
$$a_2 = 3^2 = 3^2 \times 9 = 81$$

$$a_n = 3^n$$

فعالیت

- در بخش دنباله‌ها با توجه به مثال خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوریدم که به عنوان نایع از ضابطه $f(n) = 2^n$ پیروی می‌کرد. دوباره به این فعالیت برمی‌گردیم:
۱. مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.

n	y
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
⋮	⋮



نوبه گندم:
گروه ریاضی هفدهم دوره متوسطه، استان خوزستان

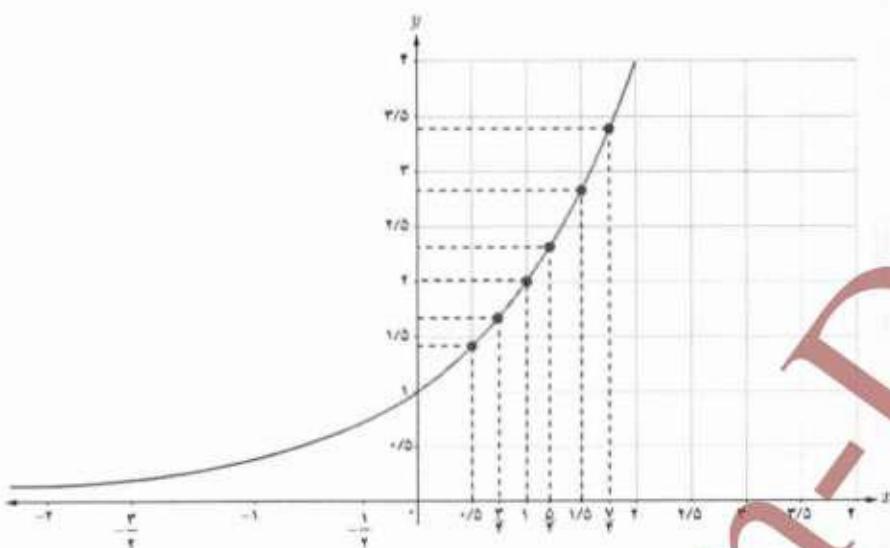
۲. جدول زیر را با مانیعن حساب کامل کرده‌ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	y
۰	۱
$-\frac{1}{2}$	-0.707
-1	-0.500
$-\frac{3}{2}$	-0.250
-2	-0.125

۹۷



۳. اگر مقادیر تابع $f(x) = 2^x$ را برای x -های دیگر نیز به دست آوریم، نمودار تابع $y = 2^x$ به صورت زیر خواهد بود:



هر تابع به صورت $y = a^x$ که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی^۱ نامیده می‌شود.

تذکر: حرف a معرف پایه و حرف x معرف نمایان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می‌توان تابع نمایی f را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

منظور از \mathbb{R}^+ ، مجموعه $\{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ است.

فعالیت

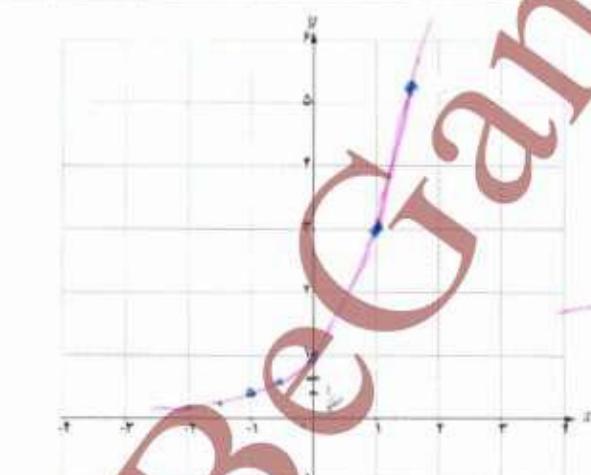
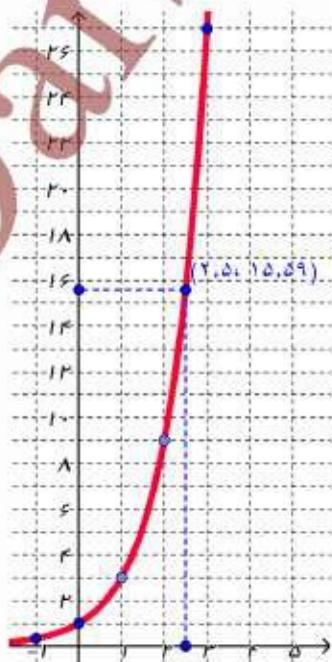
الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = 3^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحه بعد را روی محورهای مختصات به دست آورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.

۱- این نام به این علت نمایی نامیده می‌شود که منفرد x در نمایان توان قرار دارد.



جدول ۲

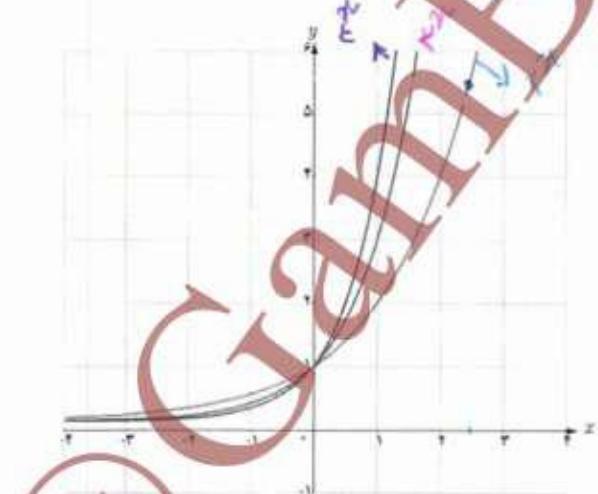
x	3^x	y	محاسبه y با استفاده از ماتریس حساب تاسه رقم اعشار
-۲	3^{-2}	$\frac{1}{9}$	۰/۱۱۱
$-\frac{3}{2}$	$3^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	۰/۱۹۲
-۱	3^{-1}	$\frac{1}{3}$	۰/۲۲۳
$-\frac{1}{2}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰/۵۷۷
۰	3^0	۱	۱
$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3}$	۱/۷۳۲
۱	3^1	۳	۲
$\frac{3}{2}$	$3^{\frac{3}{2}}$	$3\sqrt{3}$	۵/۱۹۶
۲	3^2	۹	۹



همان‌گونه که دیده می‌شود، نمودار تابع $y = 3^x$ در نقطه یک محور لغایه را قطع می‌کند.

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$ ، مقدار تقریبی عدد $3^{\frac{1}{2}}$ را به دست آورید.

پ) نمودار توابع $y = 2^x$, $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بینگرهای از تابع فوق است. سپس، تفاوت‌ها و شباهت‌های بین این سه تابع را بیان کنید.



تفاوت

در نتیجه 3^x برعایقان سلسه مرتبی دارد.

میزان افزایش مقدار عرضه‌ایشان با هم متفاوت است

سبابات

۱- هر سه نموداری هارانقله (اره) تقعیه می‌کنند

۲- هر سه تابع صعودی هستند

۳- هر سه نموداری هم‌دورنی نیستند

ایران توشه



فعالیت

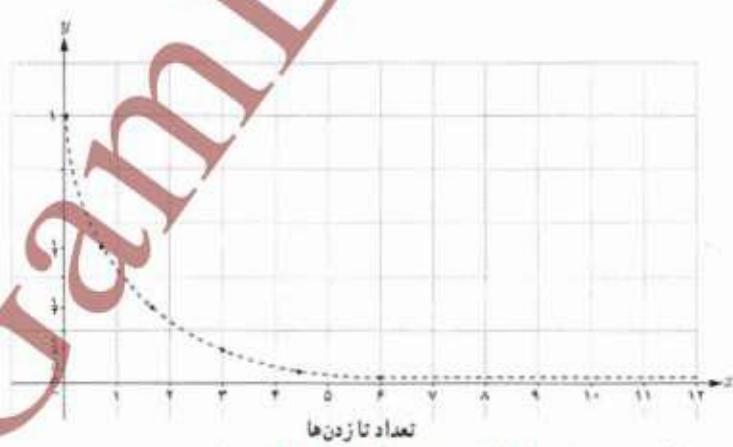
یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تازدن، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تازدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. در جدول ۳ جگونگی تغییر مساحت ناحیه‌های که بر اثر تازدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند، نشان داده شده است.

جدول ۳

میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها	تعداد تازدن‌ها
۱	۰
$\frac{1}{2}$	۱
$\frac{1}{4}$	۲
$\frac{1}{8}$	۳
$\frac{1}{16}$	۴
$\frac{1}{32}$	۵
\vdots	\vdots
$\frac{1}{512}$	۸
$\frac{1}{1024}$	۹

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می‌توانید پیشنهاد دهید؟ در نمودار زیر، رابطه تعداد تازدن‌ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها تابش داده شده است.



نقطه تقاطع منحنی با محور y ها چیست؟ $y = 1/a$ \rightarrow مقطع (۱۰۰)



فعالیت

۱. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۴

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	y	محاسبه y با ماشین حساب تا ۳ رقم اعشار
-۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	۴	۴
$-\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 1^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{8}$	۰.۱۸۲۸
-۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	۲	
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}$	۰.۷۰۷
۰	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	۱	
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	۰.۷۰۷
۱	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{1}{2}$	۰.۵
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 1^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$	۰.۱۸۲۸
۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	۰.۲۵	

۲. نقاط به دست آمده در جدول بالا روی صفحه مختصات به دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می‌توانید به کمک نمودار،

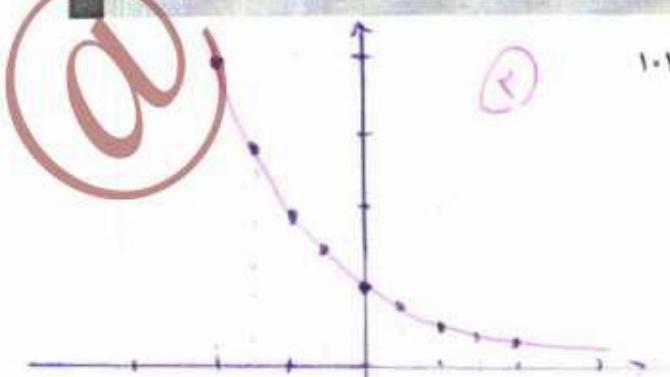
مقدار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟ بله

۳. نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را با نمودار تابع $y = 2^x$ ، که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین

این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟ $y = 2^x$ تابع صعودی و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ تابع نازلی است.

در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $a < 1$ باشد، وقته x بزرگ می‌شود، مقدار y کم می‌شود و برای x ‌های کوچک تر

از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.



۱۰۱

ایران توشه

iranTooshe.ir



تابع نمایی $y = a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد $a > 1$ ، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ را در همان صفحه مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را باهم مقایسه کنید.

$$a = 2$$

$$f(n) = 2^n$$

$$g(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

حد و درخشش را در این دوران هر اقطع می‌کست
هر دو با محور x دارای رخدانی کنند
راسته هر دو در R از هم جدا شوند

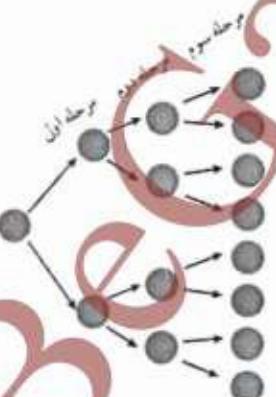
تمرین

(۱۰+۰۰) است. در (۰۰) معوره (۰۰) و فرولی است.

۱. در بیوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.

نهیه گشته:

گروه ریاضی مقطع دوم هنوزستان، استان خوزستان



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده $2 \cdot 48 = 2^6 \cdot 48 = 2^6 \cdot 2^5 = 2^{11}$ می‌شود؟

ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

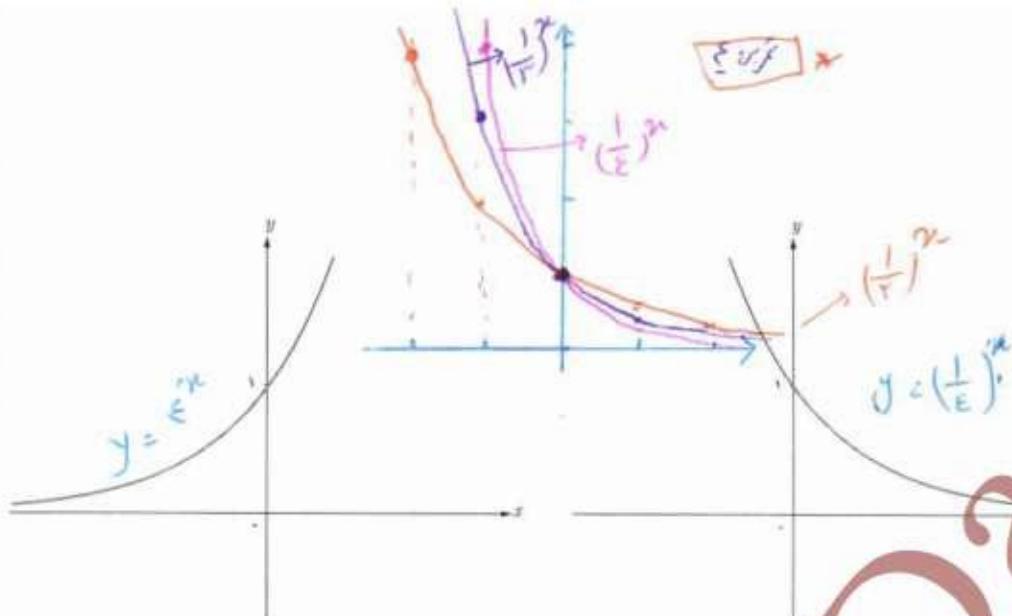
پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

شماره ۳۷) \rightarrow تعداد سلول ها

۲. یک نمونه واقعی (نسبه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پروری کند.

۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو نوع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.

آندر



* ۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحة مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشعرید.

هر سه بخوبی هستند، هر سه نزولی هستند. هر سه بخوبی هستند، هر سه نازل هستند، هر سه بخوبی هستند، هر سه نازل هستند، هر سه بخوبی هستند، هر سه نازل هستند.

۵. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

اما میزان کاهش مقدار عرضه‌ایشان با هم فرق دارد

رشد و زوال نمایی

در این قسمت یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی را بررسی می‌کنیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

فعالیت

احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان بزای او سرمایه‌گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرموده رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام نگذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکننده کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در باسخ به اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی الحساب به آنان برداخت خواهد کرد. جدول زیر را در نظر بگیرید:

جدول ۵

سن احسان	مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت تولیدی
۱۷	۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان
۱۸	$10,000,000 \times 1.14 = 11,400,000$
۱۹	$11,400,000 + 1.14 = 12,994,000$
⋮	
۲۲	$100,000,000 \times (1.14)^4 = 219,697,224$

۱۰۳

هر درجه دار محدود ندارد (از این‌جهه سرکشی است)

هر درجه دارها بزموده می‌گشته



باید تکمیل جدول بالا، ابتدا مبلغ سرمایه گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان (یک سال بعد از سپرده گذاری در شرکت) را بدست آورید.

$$10,000,000 + \left(\dots \times \frac{14}{100} \right) = 10,000,000 + 1,400,000 = 11,400,000$$

بنابراین، در جدول شماره ۵، باید در سطر دوم عدد ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ گذاشته شود.

اکنون سطر سوم جدول را محاسبه کنید.

در واقع، باید مرا ان مبلغ سپرده گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان را در نظر بگیریم و بر اساس سود ۱۴ درصد، مبلغ جدید سپرده گذاری شده

را در ۱۹ سالگی او (دو سال پس از سرمایه گذاری اولیه) بدست آوریم:

$$11,400,000 + \dots + \frac{14}{100} \times 11,400,000 = 12,992,000$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، میزان موجودی در ۱۹ سالگی احسان به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$10,000,000 \times (1/14)^t = 12,996,000$$

با توجه به فرمول فوق، میزان موجودی را در ۲۳ سالگی احسان به دست آورید و جدول صفحه قبل را کامل کنید.

معادله کلی رشد نمایی، به صورت $f(t) = (1 + r)t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، t بیانگر مقدار اولیه،

r بیانگر میزان رشد (تفاوت بر حسب اعشار)، t بیانگر زمان است.

بنابراین در فعالیت قبل، معادله کلی که بیانگر مبلغ سرمایه گذاری پس از t سال است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(t) = 10,000,000 \times (1 + 0.14)^t$$

کار در کلاس

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین به حدود میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می‌توانید وضع جمعیت کره زمین را در هر دوره زمانی ۳۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\begin{aligned} t &= 30 \quad f(t) = 5/2 \times (1 + 0.02)^{30} = 9,412 \\ t &= 35 \quad f(t) = 5/2 \times (1 + 0.02)^{35} = 10,348 \end{aligned}$$

تعزیزی در مردم ۳۵ سال دوباره بیشتر
زوال نمایی

اگر مقدار تابع پس از گذشت زمان کاهش باید، به آن مسئله زوال می‌گوییم. حال اگر تابع مورد نظر تابع نمایی باشد، می‌توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله کلی زوال نمایی، به فرم $f(t) = c(1 - r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، t بیانگر میزان تزول بر حسب اعشار و r بیانگر زمان است.

$$\begin{aligned} t &= 40 \quad f(t) = 20 / 1748 \\ 20 &\times (1 - 0.02)^{40} = 0.12 \times 3,99 = 20 / 1748 \\ 20 &\times (1 - 0.02)^{40} = 0.12 \times 7,99 = 41 / 5048 \end{aligned}$$



مثال: جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل: با حاکی گذاری $r = 0.01$ و t در معادله کلی زوال نمایی، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی برابر است با:

$$y = 40,000,000 \times (1 - 0.01)^{18} = 2,328,600$$

تمرین

۱. در یکی از فعالیت‌های بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهامداران این شرکت، در سال ۱۹۹۷ مبلغ جهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه‌گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهامدار اضافه خواهد شد؟

۲. جمعیت تهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت 6% درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

۳. جزیره‌ای پر از موش شده بود. مستوان انتصافی گفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها ۲۲۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با مرغ $1/8$ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵۷۸۶ بود که پا نرخ $1/8$ درصد در سال رو به کاهش گذاشت.

(الف) در یک جدول، جمعیت موش‌هارا در 10 سال متواتی انجام دهد. در صفحه بعد

(ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی 10 سال متواتی انجام دهد.

(پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟ سال چه بود $\rightarrow f(10) > g(10)$

(ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟ بین 9 سال و 10 سال

(ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟ سریع‌تر باز مردم موش‌ها کم و گفتار می‌شوند.

$$\textcircled{1} \quad y = 1,000,000 \times (1 + 0.06)^{10} = 1,790,847$$

پیویگذرهای:

$$\textcircled{2} \quad y = 1,000,000 \times (1 - 0.01)^{10} = 1,790,847$$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\textcircled{3} \quad \begin{aligned} \text{موش} \quad f(t) &= 1,790,847 (1 - 0.02)^t \\ \text{گربه} \quad g(t) &= 1,078,47 (1 + 0.06)^t \end{aligned}$$



۱۰۵

پ) $f(9) > g(9)$
 $f(10) < g(10)$

پس بین 9 سال و 10 سال برای
ماشین.

ایران توشه

iranTooshe.ir



$$f(1) = ۱۵۰\text{v}^4 \times \left(\frac{-19\text{v}^3}{19\text{v}^2}\right)^1 = ۱۴۹\text{v}^4, ۴$$

$$f(2) = ۱۵۰\text{v}^4 \times \left(\frac{-19\text{v}^3}{19\text{v}^2}\right)^2 = ۲۳۲۹\text{v}^1, ۲$$

$$f(3) = ۱۵۰\text{v}^4 \times \left(\frac{-19\text{v}^3}{19\text{v}^2}\right)^3 = ۲۱۴۸۹, ۹۲$$

$$f(4) = ۱۵۰\text{v}^4 \times \left(\frac{-19\text{v}^3}{19\text{v}^2}\right)^4 = ۲۱۲۱\text{v}, ۴$$

$$f(5) = ۱۵۰\text{v}^4 \times \left(\frac{-19\text{v}^3}{19\text{v}^2}\right)^5 = ۱۷\text{v}^4, ۸۸$$

$$f(6) = ۱۵۰\text{v}^4 \times \left(\frac{-19\text{v}^3}{19\text{v}^2}\right)^6 = ۱۰\text{v}^4, ۵۹, ۱۴$$

$$f(7) = ۱۵۰\text{v}^4 \times \left(\frac{-19\text{v}^3}{19\text{v}^2}\right)^7 = ۱۹, ۰۴\text{v}^1, ۱۸$$

$$f(8) = ۱۵۰\text{v}^4 \times \left(\frac{-19\text{v}^3}{19\text{v}^2}\right)^8 = ۱۹, ۰۴\text{v}^1, ۰۴$$

$$f(9) = ۱۵۰\text{v}^4 \times \left(\frac{-19\text{v}^3}{19\text{v}^2}\right)^9 = ۱۸, ۴۴\text{v}^1, ۰۴$$

$$f(10) = ۱۵۰\text{v}^4 \times \left(\frac{-19\text{v}^3}{19\text{v}^2}\right)^{10} = ۱۸, ۱۰\text{v}^1, ۰۴$$

۱۰/۱۱

$$\bar{g}(x) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^x = ۱۴\text{v}^4, ۰۸$$

$$g(1) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^1 = ۱۱, ۰۴\text{v}$$

$$g(2) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^2 = ۱۴\text{v}^4, ۰۸$$

$$g(3) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^3 = ۱۰\text{v}^4, ۰۴\text{v}^1, ۰۴$$

$$g(4) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^4 = ۱۰\text{v}^4, ۰۴\text{v}^1, ۰۴$$

$$g(5) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^5 = ۱۰\text{v}^4, ۰۴\text{v}^1, ۰۴$$

$$g(6) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^6 = ۱۰\text{v}^4, ۰۴\text{v}^1, ۰۴$$

$$g(7) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^7 = ۱۰\text{v}^4, ۰۴\text{v}^1, ۰۴$$

$$g(8) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^8 = ۱۰\text{v}^4, ۰۴\text{v}^1, ۰۴$$

$$g(9) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^9 = ۱۰\text{v}^4, ۰۴\text{v}^1, ۰۴$$

$$g(10) = ۱۰\text{v}^4 \times \left(\frac{11-18}{19-19}\right)^{10} = ۱۰\text{v}^4, ۰۴\text{v}^1, ۰۴$$

@

GamBeGan