

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

گردآوری: سیدابوذر نفیسی

به نام خدا

با شروع پاندمی کرونا که منجر به تعطیلی آموزش حضوری در مراکز آموزشی گردید و آموزش مجازی به اشکال مختلف به عنوان یک شیوه آموزش به طور جدی معرفی شد، بر آن شدم برای آن دسته از دانش آموزانی که به صورت صحیح آموزش مجازی دسترسی ندارند و همکارانی که بستر مناسبی برای تدریس مجازی در اختیار نداشتند، مجموعه‌ای شامل فیلم و جزوه برای درس حسابان ۲ آماده کنم تا شاید در آن ایام سخت کمکی هر چند ناچیز به آموزش مفهومی ریاضیات و گسترش عدالت آموزشی شده باشد. آن دوران تمام شد ولی دیگر آموزش‌های تلفیقی و ترکیبی جای آموزش‌های سنتی را گرفت و فصلی جدید در امر آموزش گشوده شد.

با توجه به حجم بالای کار و تهیه همزمان فیلم و جزوه برای این درس و درس‌های دیگر قطعاً اشتباهاتی در جزوه وجود دارد که از علاقه‌مندان پوزش‌می‌طلبم و خوشحال می‌شوم با شناسه شاد بنده به آدرس @seyedfazelian در میان بگذارند تا در ویرایش‌های بعدی اصلاح شود.

همانطور که خواهید دید جزوه به صورت جلسه‌ای و با قلم نوری تنظیم شده که فیلم هر جلسه در کانال آپارات

<https://www.aparat.com/s.a.fazelian> در دسترس می‌باشد.

در پایان یادآوری می‌شوم استفاده از این جزوه به هر صورت مجاز و هزینه آن فقط دعا برای عاقبت بخیری نگارنده است.

سیدابوالفضل فاضلیان

۱۴۰۲/۱/۱۱

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل اول: تابع

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس اول: تبدیل نمودار تابع

جلسه اول: صفحات ۲ تا ۱۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در این درس می‌خواهیم عددی مانند a را در دامنه و بر تاج f اثر دهیم و تغییرات f را بررسی کنیم.

الف) انتقال افقی و عمودی:

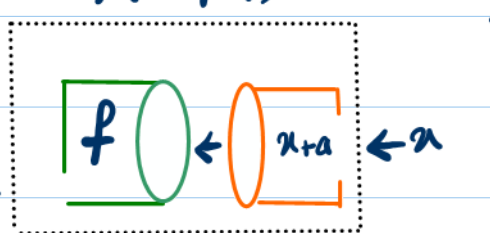
۱- $f(x \pm a)$: برای رسم نمودار $y = f(x+a)$ نمودار f را روی محور x ها

a واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $y = f(x-a)$ نمودار

f را روی محور x ها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال افقی)

همچنین نقطه $(x_0 - a, y_0)$ از نمودار تاج $y = f(x+a)$ مشابه با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y = f(x)$ است.

دامنه تاج $f(x+a)$ ، x های هشتاد و نه به سمت چپ می‌شوند.
عبارت $(x+a)$ اجازه ورود به f را پیدا کند.



$$h(x) = f(x+a) \Rightarrow h(x_0 - a) = f(x_0 - a + a) = f(x_0) = y_0$$

۲- $f(x) \pm a$: برای رسم نمودار $y = f(x) + a$ نمودار f را روی محور y ها

a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y = f(x) - a$ نمودار

f را روی محور y ها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال عمودی)

همچنین نقطه $(x_0 + a, y + a)$ از نمودار تابع $y = f(x) + a$ مشاطر با نقطه (x_0, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

ب) انقباض و انبساط (متی و عمودی):

۱- $f(ax)$: اگر $0 < a < 1$. باشد نمودار f را در راستای محور x ها با

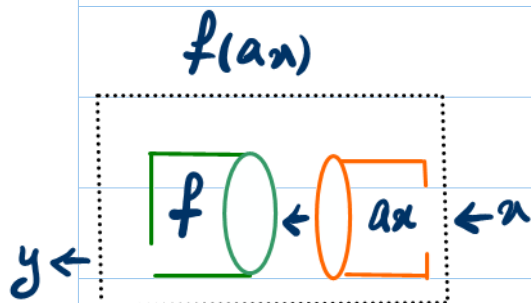
ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می کنیم. (رابطه افقی)

اگر $a > 1$ باشد نمودار f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض

می کنیم. (انقباض افقی)

همچنین نقطه $(\frac{x_0}{a}, y)$ از نمودار تابع $y = f(ax)$ مشاطر با نقطه (x_0, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

رابطه تابع $f(ax)$ ، x ها هستند که باعث می شوند $f(ax)$



اجازه ورود به f را بدهد.

$$h(x) = f(ax) \Rightarrow h\left(\frac{x_0}{a}\right) = f\left(a \times \frac{x_0}{a}\right) = f(x_0) = y.$$

نکته: در حالت انقباض و انقباض افقی x با طول نقاط f بر a تقسیم می شوند.

۲- $a f(x)$: اگر $a < 1$ باشد مقدار f را در راستای محور y ها با

ضرب a منقبض می‌کنیم. (انقباض عمودی)

اگر $a > 1$ باشد مقدار f را در راستای محور y ها با ضرب a منبسط

می‌کنیم. (انبساط عمودی)

همچنین نقطه (a, y) از نمودار تابع $y = a f(x)$ و مشاغل نقطه (x, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

نکته: در حالت انبساط و انقباض عمودی y یا عرض نقاط f در a ضرب می‌شوند.

پایان بخش:

۱- $-f(x)$: مقدار f را نسبت به محور x ها قعینه می‌کنیم.

۲- $f(-x)$: مقدار f را نسبت به محور x ها قعینه می‌کنیم.

نکته: در انبساط و انقباض ها اگر a منفی باشد ابتدا a را مثبت می‌گیریم و انبساط یا انقباض

لازم را در پی می‌دهیم، پس انقباض را اخیال می‌کنیم.

ت، ترکیبی:

اگر خواهیم نمودار تابعی به صورت $y = af(bx+c)+d$ را رسم کنیم،
اولویت تأثیرها را به صورت زیر رعایت می‌کنیم:

$c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d$

یعنی اول داخل پذیر تغییرات روی x را اعمال می‌کنیم بعد بیرون پذیر
تغییرات روی y . وقت‌کنید باز هم داخل پذیر اعمال عکس حال کاری داریم
می‌شوند یعنی اول انتقال افقی (c) و بعد انبساط یا انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{b}$.

در حالیکه در بیرون پذیر اول انبساط یا انقباض با ضریب a و بعد انتقال عمودی (d)

اعمال می‌شود (به یاد دارید در اولویت اعمال اولویت ضرب و تقسیم از جمع و تفریق)

بالاتر بود)

ث) تأثیر قدر مطلق:

۱- $|f|$: مقدار f را رسم می‌کنیم، قسمتی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارد را مثبت به محور x ها قدرتی می‌کنیم.

۲- $f(|x|)$: قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قدرتی قسمتی را که سمت راست محور y است مثبت به محور x رسم می‌کنیم.

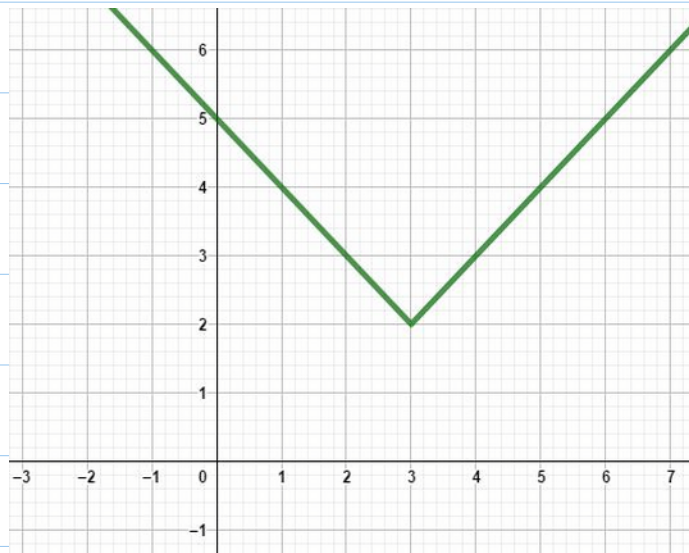
نکته: برای رسم نمودارهای تبدیلیافته کافی است تأثیرات را روی چند نقطه (نقاط شکستگی یا نقاط استبداد آنها یا تغییرات یا محل برضرب با محورها) اعمال کنید و با همایند نقطه نمودار را رسم کنید.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$|A| = |-A| \text{ یا دروری} \quad f(x) = |-x-3| + 2 \text{ دایف}$$

$$f(x) = |-(-x-3)| + 2 = |x-3| + 2$$

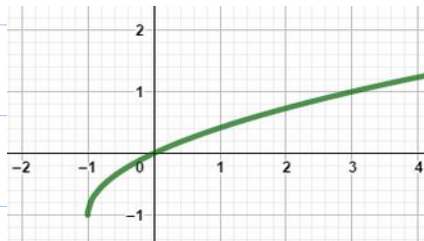
انتقال انتی ۳ واحد به سمت راست
انتقال خبری ۲ واحد به سمت بالا



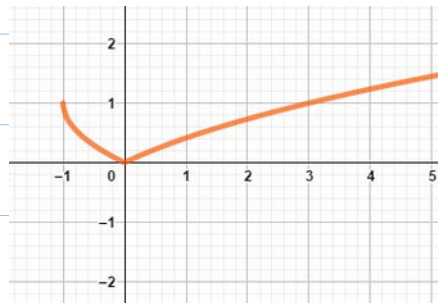
$$y = -|\sqrt{x+1} - 1|$$

انتقال از یک واحد به چپ و انتقال عمودی یک واحد به پایین

$$y = \sqrt{x+1} - 1$$

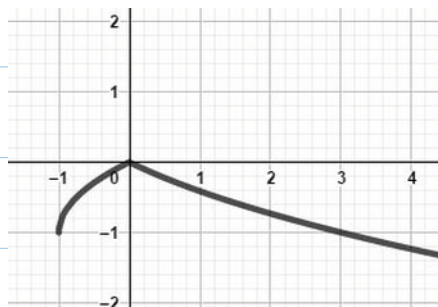


$$y = |\sqrt{x+1} - 1|$$



تأثیر قدر مطلق :
قسمتی که زیر محور است
به محور می‌تابد

$$y = -|\sqrt{x+1} - 1|$$

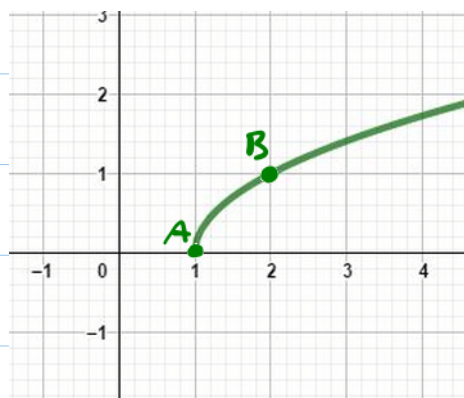


انعکاس :
بزرگوار را به محور می‌تابد

$$پ) y = \sqrt{2x-1} + 1$$

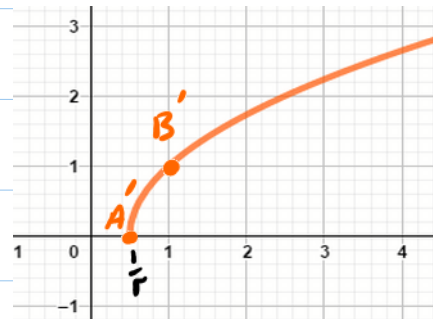
انتقال از منحنی یک واحد به سمت راست

$$y = \sqrt{2x-1}$$



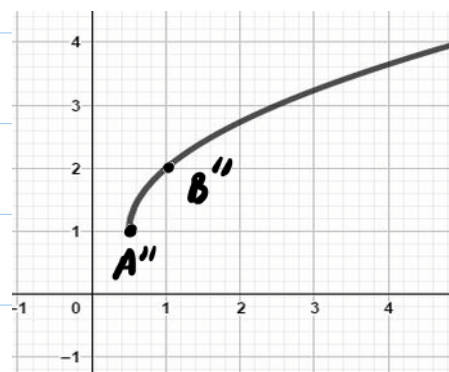
$$y = \sqrt{2x-1}$$

انتقال منحنی با ضرب $\frac{1}{2}$



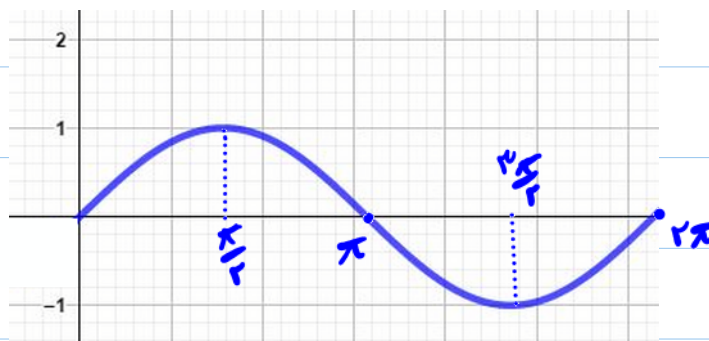
انتقال عمودی یک واحد به سمت بالا

$$y = \sqrt{2x-1} + 1$$

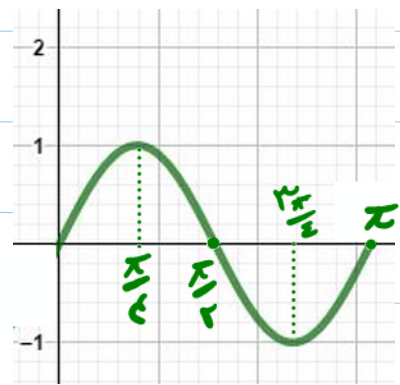


$$ث) y = |2\sin 2x - 1| \quad [0, \pi]$$

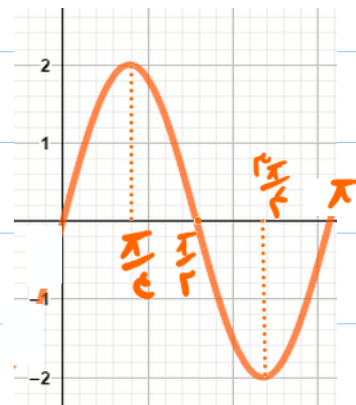
$$y = \sin x$$



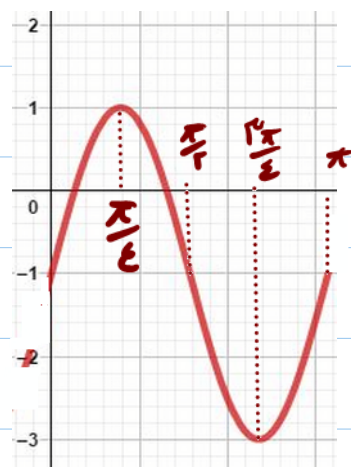
انقباض انتی با ضرب $\frac{1}{2}$ $y = \sin 2x$



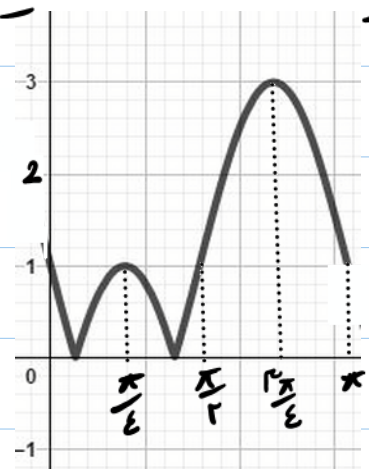
انساط عمودی با ضرب 2 $y = 2 \sin 2x$



انتقال عمودی با اضافه یا کسر 1 $y = 2 \sin 2x - 1$

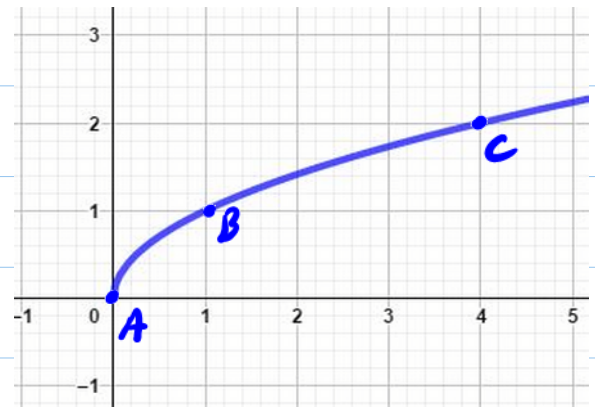


تأثیر مقدار سطح: قسمتی که زیر محور است قدرش می‌لیم. $y = |2 \sin 2x - 1|$



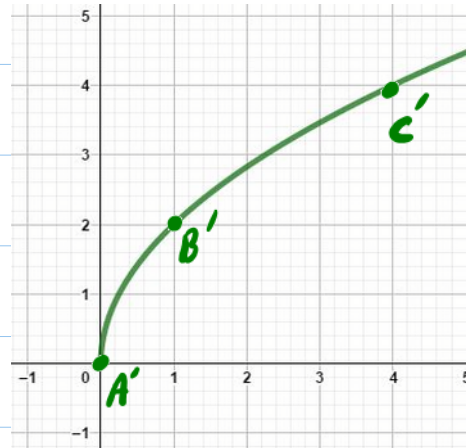
ث) $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$

$y = \sqrt{x}$



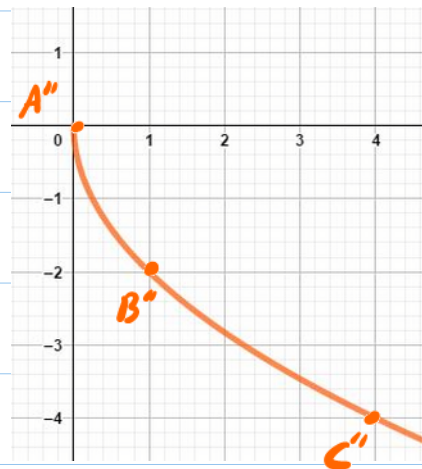
انبات صوری با ضرب ۲

$y = 2\sqrt{x}$



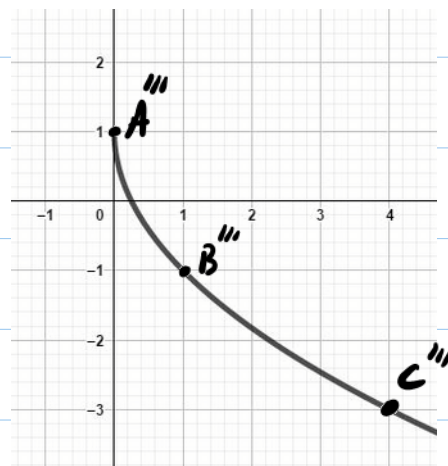
انعکاس نسبت به محور x ها

$y = -2\sqrt{x}$

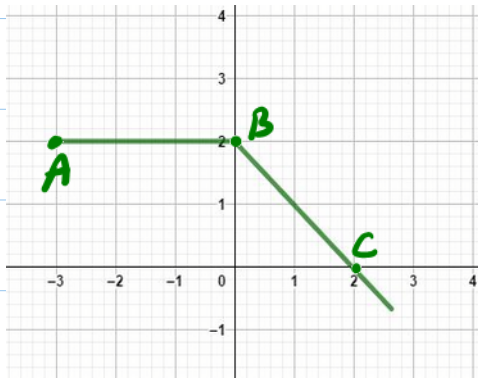


انتقال عمودی یک واحد به بالا

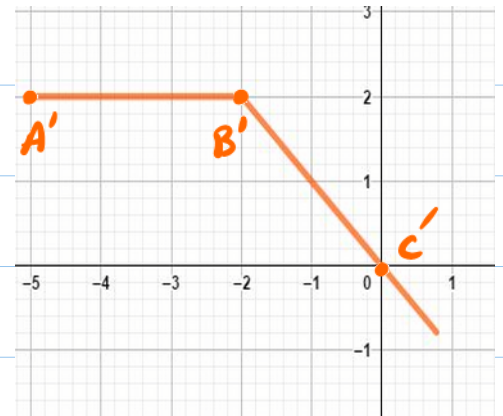
$f(x) = -2\sqrt{x} + 1$



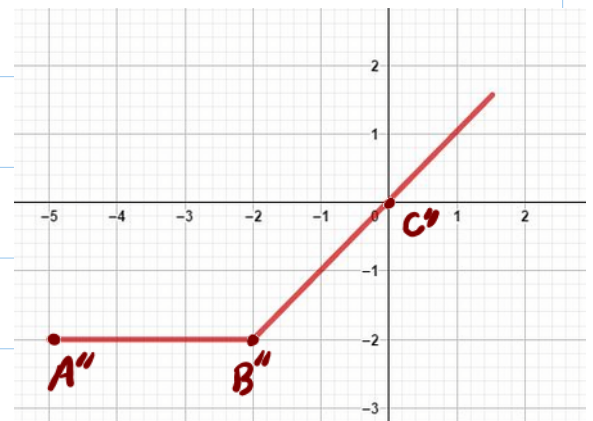
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = 1 - f(x+2)$ را رسم کنید.



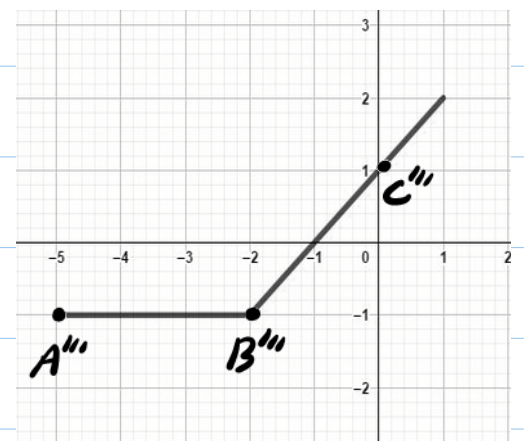
انتقال افقی ۲ واحد چپ $y = f(x+2)$



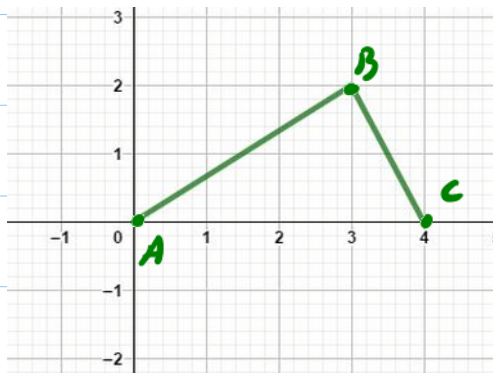
انعکاس نسبت به محور x ها $y = -f(x+2)$



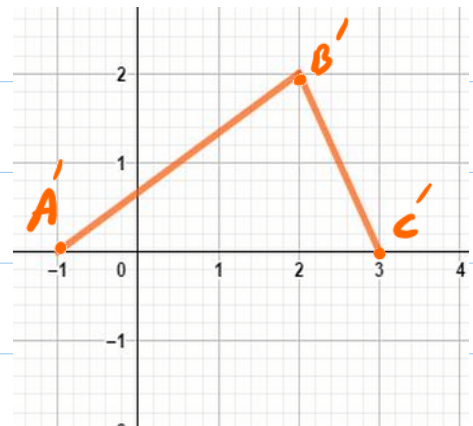
انتقال عمودی یک واحد به بالا $y = 1 - f(x+2)$



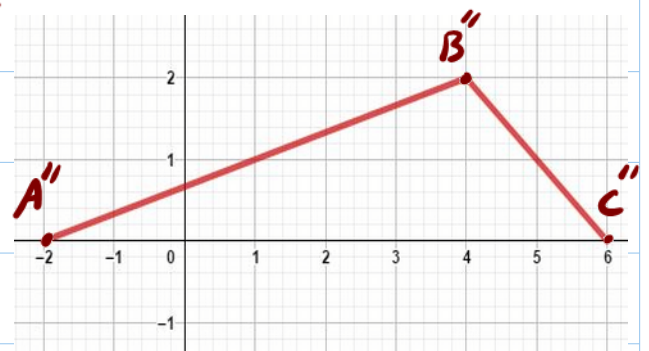
مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر است. نمودار $y = f(\frac{1}{2}x + 1)$ را رسم کنید.



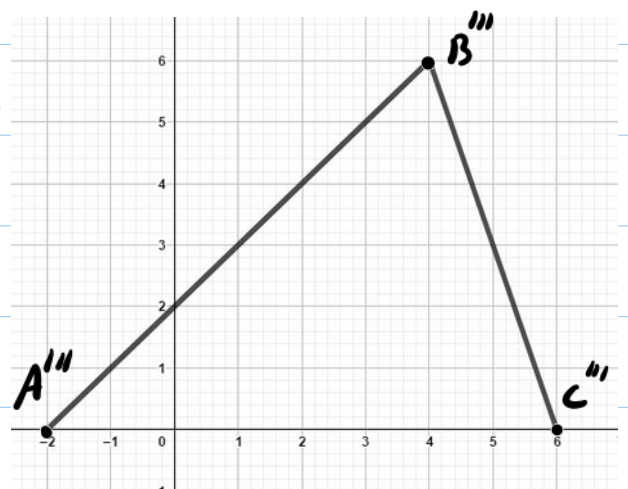
انتقال انحنای یک واحد به چپ
 $y = f(\frac{1}{2}x + 1)$



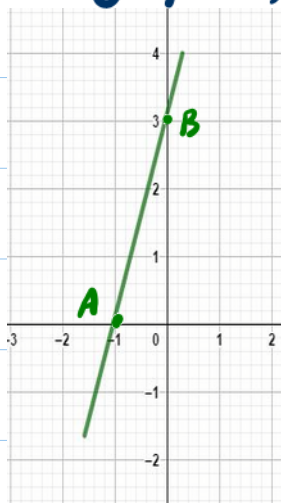
رابطه انحنای با ضرب $\frac{1}{2} = 2$
 $y = f(\frac{1}{2}x + 1)$



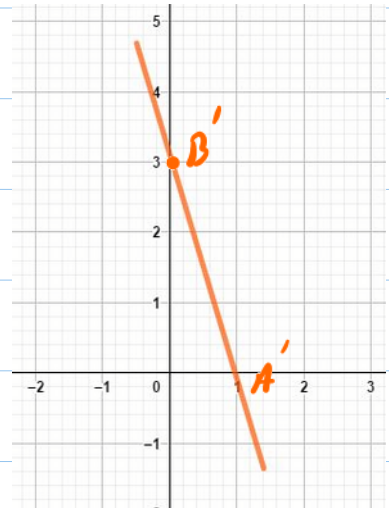
رابطه انحنای با ضرب 2
 $y = f(\frac{1}{2}x + 1)$



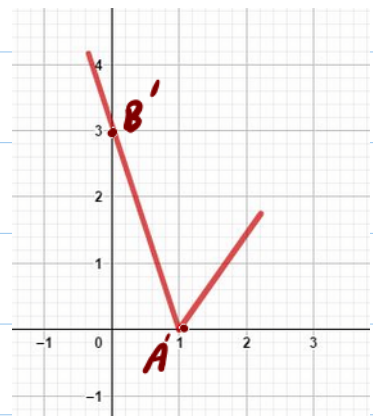
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = |f(-x)| - 2$ را رسم کنید.



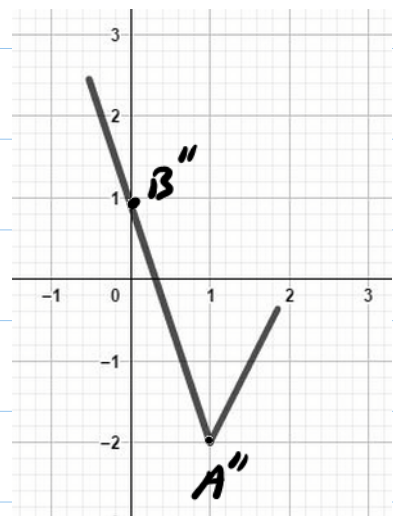
انعکاس: قدرینبت به محورها
 $y = f(-x)$



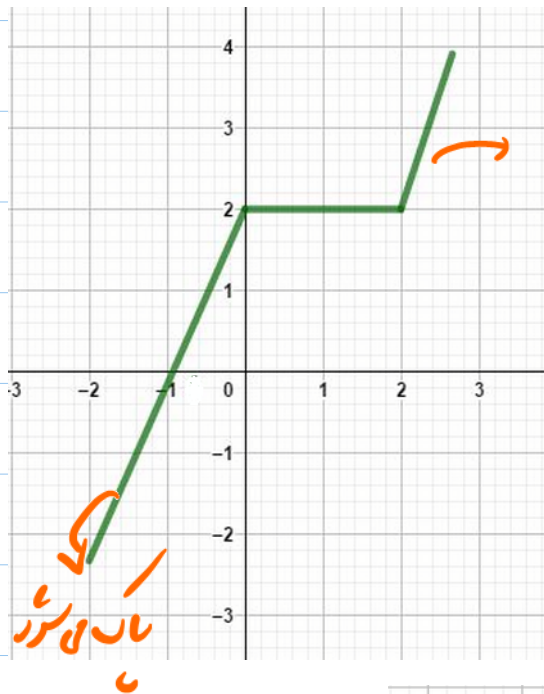
تأثیر قدر مطلق: قسمت‌های که زیر محور x است قدرینبت می‌شود.
 $y = |f(-x)|$



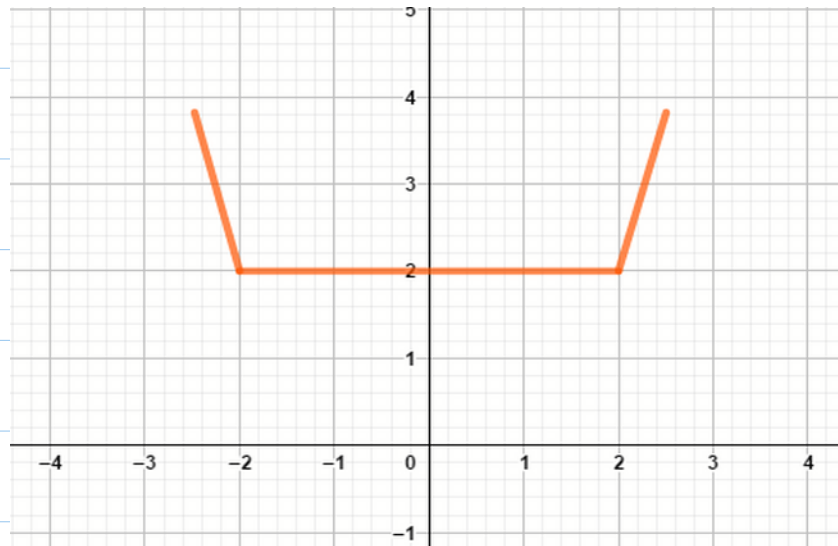
انتقال عمود بر x واحد پایین
 $y = |f(-x)| - 2$



مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = f(|x|)$ را رسم کنید.



$$y = f(|x|)$$



مثال: بدون نقاط نمودار تابع f را در دایره بری کنید. پس نمودار بدست آمده را یک واحد به چپ منتقل کنید.

ی کنید. منطبقه تابعی که نمودار آن رسم شده را بنویسید.

$$f\left(\frac{x}{4}\right) \rightarrow f\left(\frac{x+1}{4}\right) \Rightarrow y = f\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

مثال: مزد دار تابع $g(x) = 2f(3x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می کنیم.

پس طول عرض نقاط این مزد دار را نصف می کنیم. ضابطه تابعی که مزد دار آن بدست

آورده است را بنویسید.

$$2f(3(x-1)) = 2f(3x-3)$$

$$\rightarrow 2f(3x-3) + 2$$

$$\rightarrow \overset{\text{عرضها}}{\uparrow} \frac{1}{2} (\overset{\text{طولها}}{\uparrow} 2f(3(x-1)) + 2) = f(6x-3) + 1$$

$$\Rightarrow h(x) = f(6x-3) + 1$$

مثال: منحنی تابع $y = |x-2|$ را سه واحد به چپ انتقال داده و قدرش ثقل حاصل را ثبت

به کرد و حاصلش می کنیم و با ضرب ۲ انبساط عمودی می رهم پس قدرش را ثبت

به کرد و حاصلش می کنیم، حاصل منحنی جدید را بدست آوریم.

$$f(x+3) : y = |x+3-2| = |x+1|$$

$$f(1-x+2) : y = |1-x+1|$$

$$2f(1-x+3) : y = 2|1-x+1|$$

$$-2f(1-x+4) : y = -2|1-x+1| = -2|1-x|$$

سؤال: با احتمال مدار کدام گزینیم، نمودار $y = f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y = -\frac{1}{4}(1-x)$ شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای y نمی

۲) انتقال یک واحد به چپ، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای x می

۳) انتقال یک واحد به چپ، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای y نمی

۴) انتقال یک واحد به راست، قدریم ثبت به محور x ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای x می

گزینه ۲

$$y = -\frac{1}{4}(1-x)$$

انقباض x می به $\frac{1}{4}$ ←
 قدریم ثبت به محور x ها ←
 انتقال x می یک واحد چپ ←
 قدریم ثبت به محور x ها ←

موضوع: کثرت ریاضی ۹۹

قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

$$x = 2/5 \quad (۴)$$

$$x = 2 \quad (۳) \checkmark$$

$$x = 1/5 \quad (۲)$$

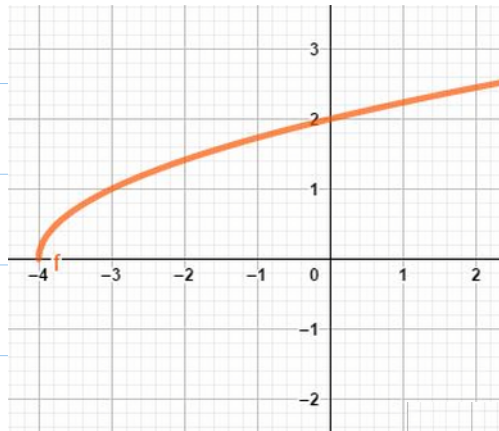
$$x = 1 \quad (۱)$$

$$f(-x) : y = \sqrt{-x}$$

$$f(-(x-4)) : y = \sqrt{-(x-4)} = \sqrt{-x+4} = \sqrt{4-x}$$

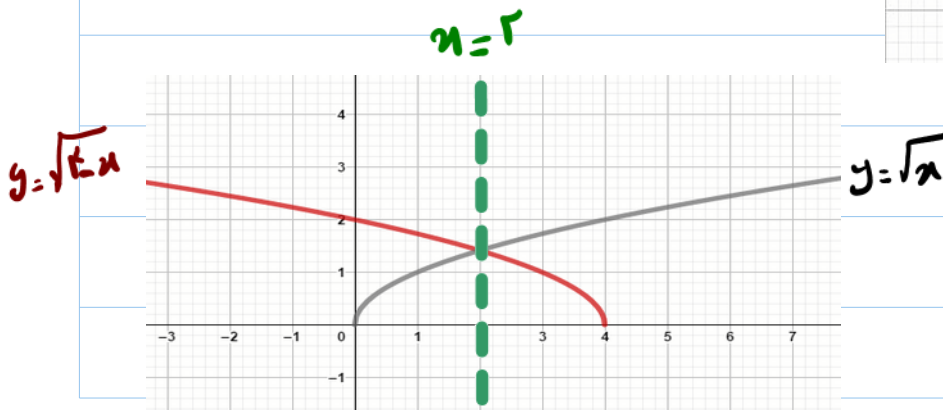
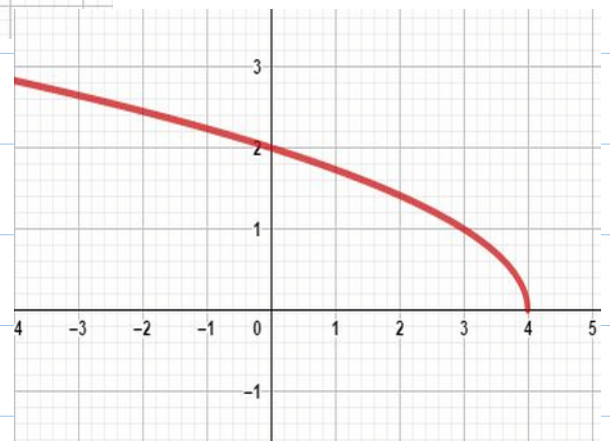
$$y = \sqrt{4-x}$$

۴ واحد به چپ



$$y = \sqrt{4-x}$$

انفکس: قرینه نسبت به محور y ها



قرینه ۴

مثال: کثرت ریاضی ۹۹ (خارج)

ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

$$-2, 1 \quad (4)$$

$$-1, 2 \quad (3)$$

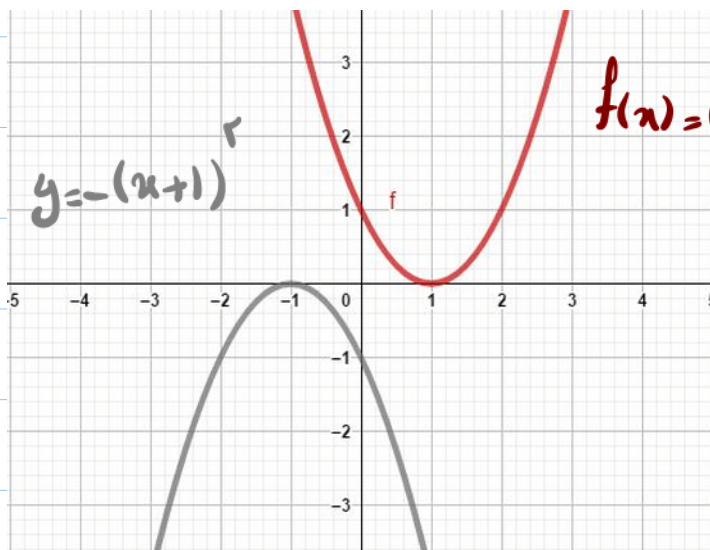
$$-1, 1 \quad (2)$$

$$0, 2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$$

$$-y = (-x-1)^2 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow y = -(x+1)^2 + \epsilon \quad g(x) = -(x+1)^2 + \epsilon$$



$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 = -(x+1)^2 + \epsilon \rightarrow (x-1)^2 + (x+1)^2 = \epsilon$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = \epsilon \rightarrow 2x^2 + 2 = \epsilon \rightarrow 2x^2 = \epsilon$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

گزین ۲: طول نقاط تلاقی

مثال: کسر تجوی ۹۹

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۶√۱۰ (۴)

۴√۱۷ (۳)

۶√۷ (۲)

۴√۱۵ (۱)

$$g(x) = \sqrt{x-12} + 2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2 \xrightarrow{\text{ترک ۲}} \cancel{x} = (\cancel{x-12}) + 4\sqrt{x-12} + 4$$

$$1 = 4\sqrt{x-12} \xrightarrow{\div 4} \frac{1}{4} = \sqrt{x-12} \xrightarrow{\text{ترک ۲}} \frac{1}{4} = x-12 \rightarrow x=16$$

$$f(16) = \sqrt{16} = 4 \quad \text{نقطه برخورد } A(16, 4)$$

$$OA = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{256 + 16} = \sqrt{272} = \sqrt{16 \times 17} = 4\sqrt{17}$$

گزینۀ ۳

مثال: کسر تجوی ۹۹ (خارج)

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$ ($x > 1$)، مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۲√۵ (۴)

۵√۲ (۳)

۶√۲ (۲)

۴√۵ (۱)

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 = (x-1)^2 - 1$$

فردینث به محور x ها : $-f(x) = -(x-1)^2 + 1$

انتقال محور را در حد ۱۶ : $g(x) = -(x-1)^2 + 1 + 16 = -(x-1)^2 + 17$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = -(x-1)^2 + 17$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \stackrel{\div 2}{\Rightarrow} (x-1)^2 = 9$$

$$\sqrt{\quad} \Rightarrow x-1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \rightarrow x=4 \\ x-1=-3 \rightarrow x=-2 \end{cases} \text{ غنقن ۲}$$

$f(4) = (4-1)^2 - 1 = 8$ $A(4, 8)$ نقطه بر خور

گزینه ۱ : $OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$

نکته: گاهی اوقات معادلات نقطه ای روی $f(x)$ داده می شود و معادلات نقطه مشاط با آن

در $a f(bx+c)+d$ خواسته می شود. در این حالت تمام مواردی که برای رسم بنویس.

رینم می راریم روی نقطه راره شده اعمال می کنیم. همچنین برای تأثیر داری می توانیم، نموداری

$$y = bn + c \text{ را بدست آوریم.}$$

مثال: نقطه $A(-1, 2)$ روی منحنی $y = f(x)$ است. نقطه مشاطر با آن روی منحنی

$$y = 2f(2x - 5) - 7 \text{ ، } A'(a, b) \text{ است. } a - b \text{ کدام است؟}$$

$$(1) -2 \quad (2) \checkmark \quad (3) 2 \quad (4) 4$$

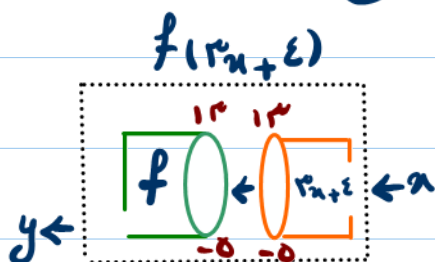
$$t = 2x - 5 \Rightarrow t + 5 = 2x \xrightarrow{\div 2} x = \frac{t+5}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2 = a$$

$$b = 2 \times 2 - 7 = -1 \Rightarrow A'(2, -1) \rightarrow a - b = 2 - (-1) = 3$$

گزینه ۳

نکته: در تابع $y = a f(bx + c) + d$ ، a ، d روی بر f ، b ، c روی دامنه f تأثیری ندارند.

مثال: اگر دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $(-5, 13)$ باشد دامنه تابع $y = f(3x + 4)$ را بیابید.



$$-5 < 3n + 2 < 12 \xrightarrow{-2} -7 < 3n < 10$$

$$\xrightarrow{\div 3} -2 < n < 3$$

$$D_{f(3n+2)} = (-2, 3)$$

نشان: اگر در بازه f بازه $(-2, 3)$ باشد، در بازه $g(x) = 3f(x+1) - 1$ ، نشان نشان

$$-2 < f(x) < 3 \xrightarrow{\times 3} -6 < 3f(x+1) < 9$$

$$\xrightarrow{-1} -7 < 3f(x+1) - 1 < 8 \Rightarrow -7 < g(x) < 8$$

$$R_{g(x)} = (-7, 8)$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع

یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

قسمت اول: تابع درجه سوم

جلسه دوم: صفحات ۱۳ تا ۱۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

توابع چندجمله‌ای :

توابعی که ضرایب آن‌ها به صورت $f(n) = a_n n^n + a_{n-1} n^{n-1} + \dots + a_1 n + a_0$ است و

آن a_n تا a_0 اعداد حقیقی و $a_n \neq 0$ است، تابع چندجمله‌ای درجه n نامیده می‌شود.

در مت‌کنید توان n ها باید اعداد حسابی باشند. بیشترین توان n ها درجه چندجمله‌ای است.

مثال: کدامیک از توابع زیر چندجمله‌ای است ؟

الف) $f(n) = \frac{1}{n}$ نیست

ب) $g(n) = 4n^2 + \sqrt{5}n - 1$ هست (تابع درجه دوم)

پ) $k(n) = \sqrt{n+2}$ نیست

ت) $q(n) = \sqrt{n} + \frac{1}{2}$ هست (تابع رنجی)

ث) $p(n) = 5$ هست (ثابت)

ج) $k(n) = n^{\frac{1}{2}} + 2n$ نیست

نکته: توابع خطی و هبانی، ثابت و درجه دوم، همگی تابع چندمجهدی هستند.

$$y = an^2 + bn + c \quad y = c \quad y = n \quad y = an + b$$

نکته: دامنه تمام توابع چندمجهدی $\mathbb{R}$ است. همچنین بردار تمام توابع چندمجهدی از درجه

فره هم $\mathbb{R}$ است.

تابع چندجمله‌ای درجه سوم:

هر تابع با ضابطه $f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ که در آن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$

باشد را یک تابع چندمجهدی از درجه سوم می‌نامیم.

مانند:

$$f(n) = 2n^3 - \frac{1}{5}n^2 + \sqrt{5}n + \pi$$

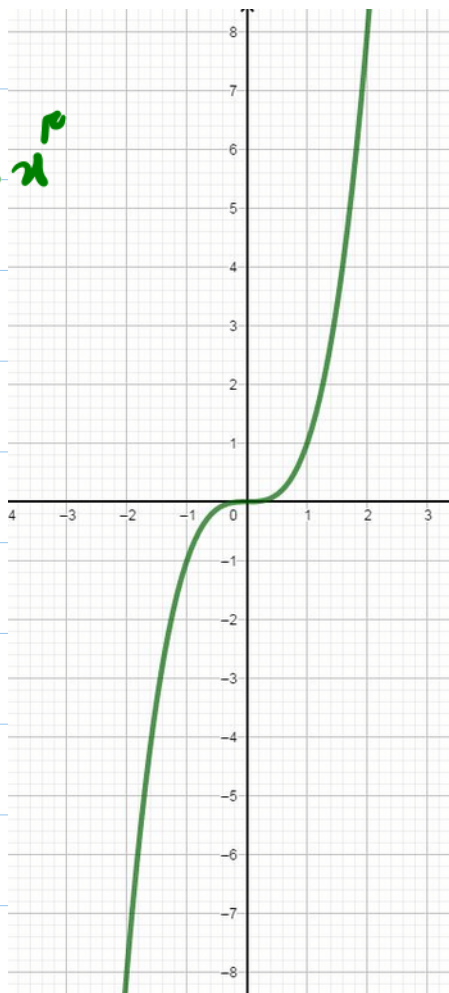
$$g(n) = 8n^3 + 1, \quad h(n) = 5n^3 - 7n^2$$

منو در توابع $y = n^3$ و $y = -n^3$

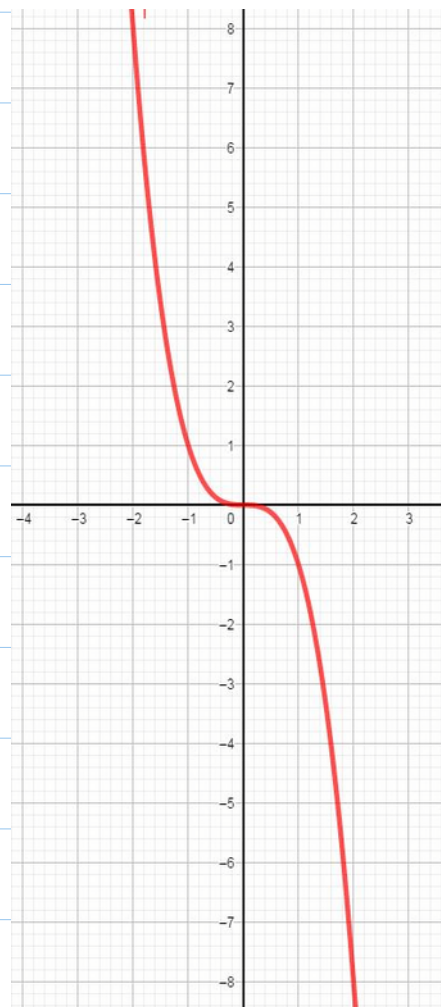
n	-1	0	1	2
$y = n^3$	-1	0	1	8

n	-1	0	1	2
$y = -n^3$	1	0	-1	-8

$$y = x^3$$



$$y = -x^3$$



هر دو مندرار نسبت به مبدأ مختصات متقارن اند

تذکر: برای رسم توابع درجه سوم از قوانین انتقال برای رسم مندرارها کمک می گیریم.

مثال: مندرار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ را رسم کنید.

باید تابع درجه سوم را به صورت $y = k(x-a)^3 + b$ در آوریم.

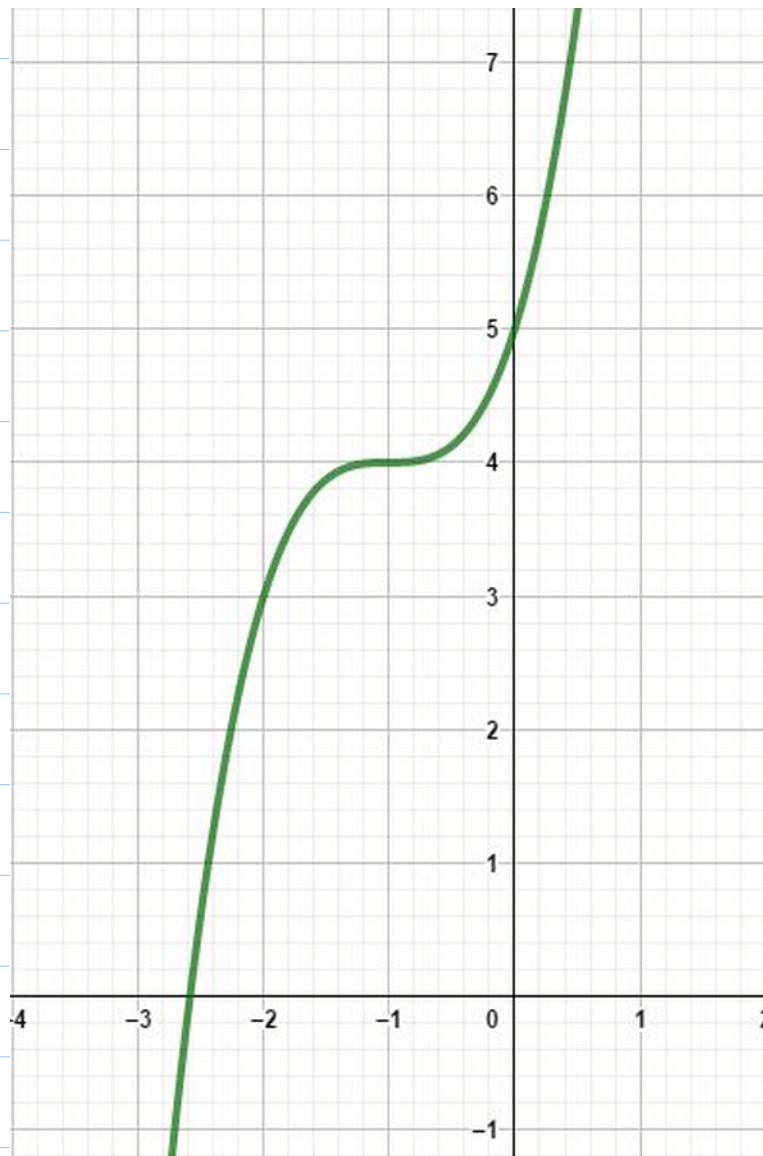
یادآوری: اتحاد ملب درجه ۳:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$f(n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 4 = (n+1)^3 + 4$$

انتقال

نمودار $y = n^3$ را چهار واحد به سمت بالا و یک واحد به سمت چپ انتقال می دهیم.



به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x-1)^3 + 2$ ۶

ب) $y = (x-2)^3$ ۹

پ) $y = -x^3 + 1$ ۸

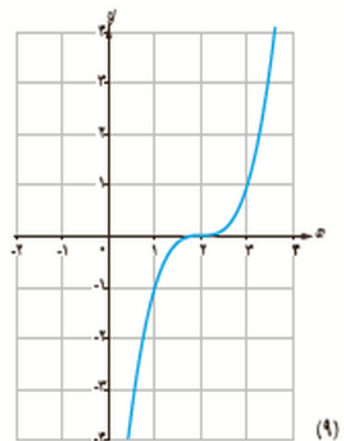
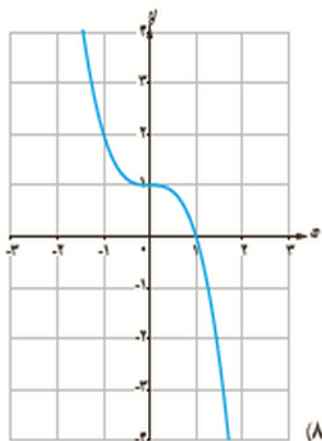
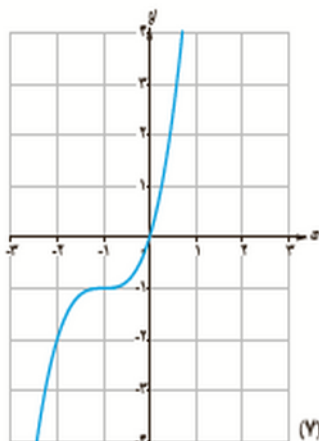
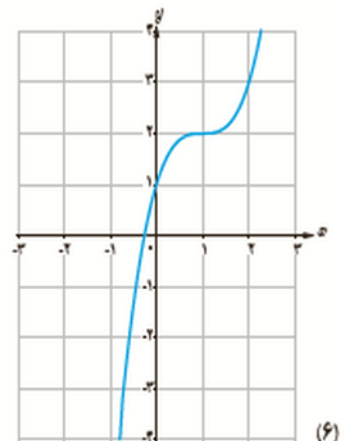
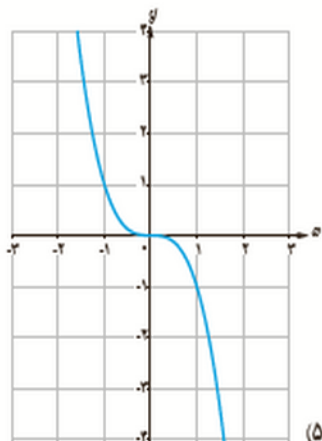
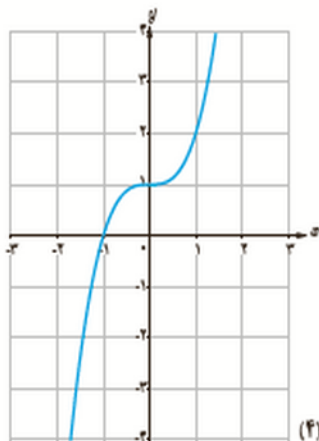
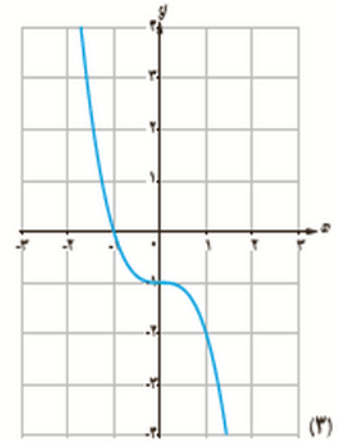
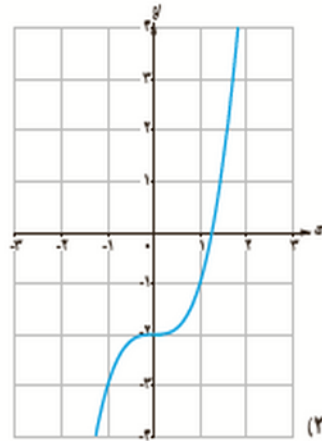
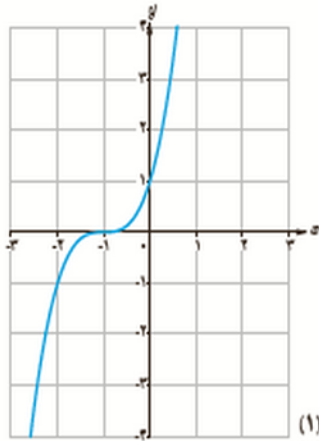
ت) $y = -x^3$ ۵

ث) $y = (x+1)^3$ ۱

ج) $y = x^3 + 1$ ۳

ح) $y = -x^3 - 1$ ۴

خ) $y = x^3 - 2$ ۲



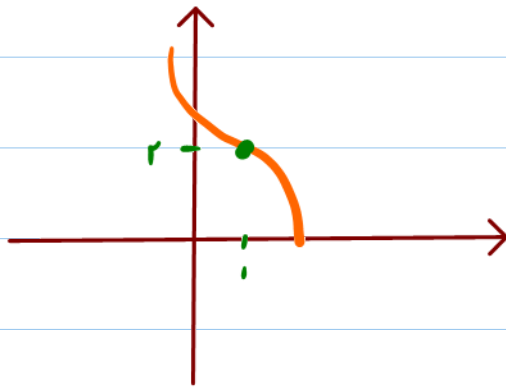
نکته: در توابع درجه سوم به صورت $y = k(x-a)^3 + b$ ، نقطه (a, b) مرکز تقارن

است. می توان از این نقطه در رسم سریع نمودار توابع درجه سوم کمک گرفت.

مثال: نمودار تابع $y = -(x-1)^3 + 2$ را رسم کنید.

پایه: $y = -x^3$

$(1, 2)$ مرکز تقارن



$y = x^2$

$y = x^3$

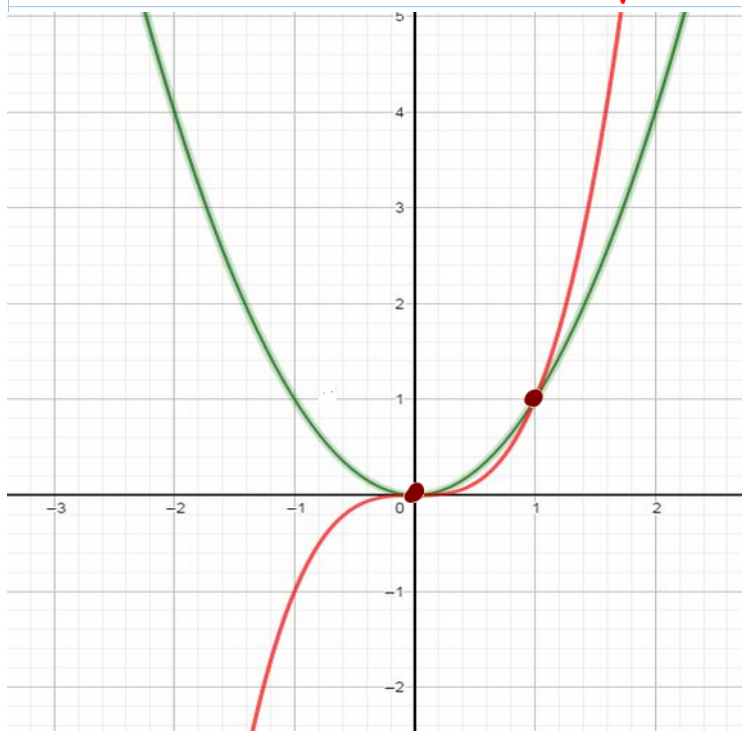
مقایسه نمودارهای $y = x^2$ و $y = x^3$:

۱- دو نمودار در نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ متقاطع اند.

۲- برای $x > 1$ ، $y = x^3$ بالای $y = x^2$ است.

۳- برای $0 < x < 1$ و $x < 0$ نمودار

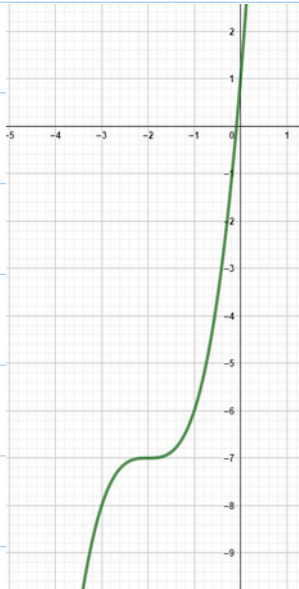
$y = x^2$ بالای $y = x^3$ است.



مثال: مقدار تابع $y = x^3 + 4x^2 + 12x + 1$ در کدام ناحیه محورها مختلف عبور نمی کند؟

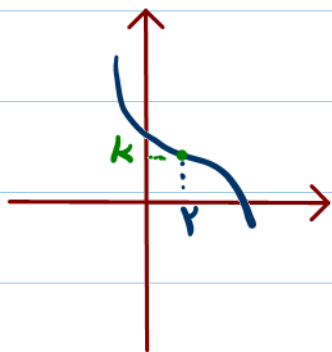
$$y = x^3 + 4x^2 + 12x + 1 = (x+2)^3 - 7$$

انتقال



از ناحیه چهارم عبور نمی کند.

مثال: مقدار تابع $g(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ به شکل زیر است. مقدار a, b را بیابید.



مکزقن (2, k)

ر برعكس : فریب x نمی یـ

$$g(x) = -(x-2)^3 + k = -(x^3 + 3x^2(-2) + 3x(-2)^2 + (-2)^3) + k$$

$$g(x) = -x^3 + 4x^2 - 12x + 8 + k = -x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-12 \end{cases}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع

یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

قسمت دوم: توابع صعودی و نزولی

جلسه سوم: صفحات ۱۵ تا ۱۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف تابع صعودی :

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

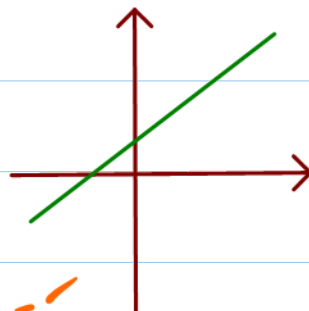
$$f(x_1) < f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع صعودی می نامیم.

به عبارت دیگر در تابع صعودی ، با افزایش x ، y افزایش می یابد یا ثابت می ماند.



با دقت از چپ به راست هیچگاه پائین نمی رویم →



مثال :

تعریف تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$$f(x_1) < f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع اکیداً صعودی می نامیم.

به عبارت دیگر در تابع اکیداً صعودی ، با افزایش x ، y هم افزایش می یابد.



مثال :

با دقت از چپ به راست همواره پامان می رویم →

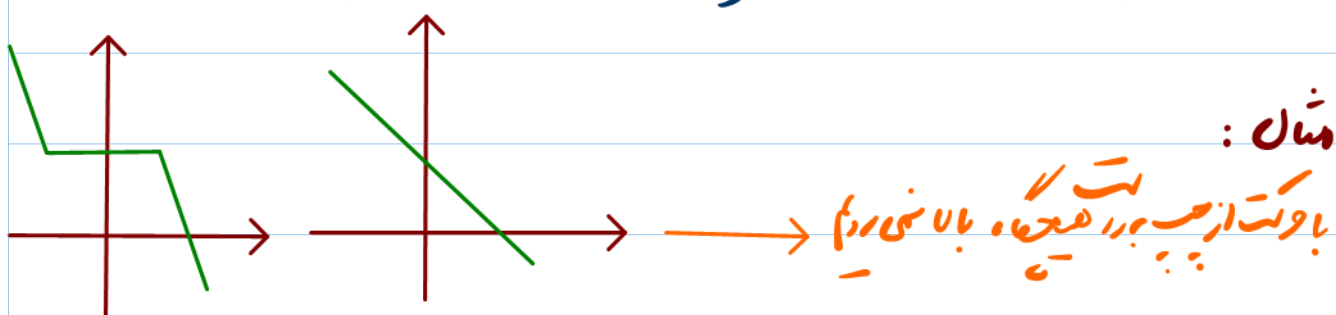
تعریف تابع نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع نزولی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع نزولی، با افزایش x یا کاهش y ثابت می‌ماند.



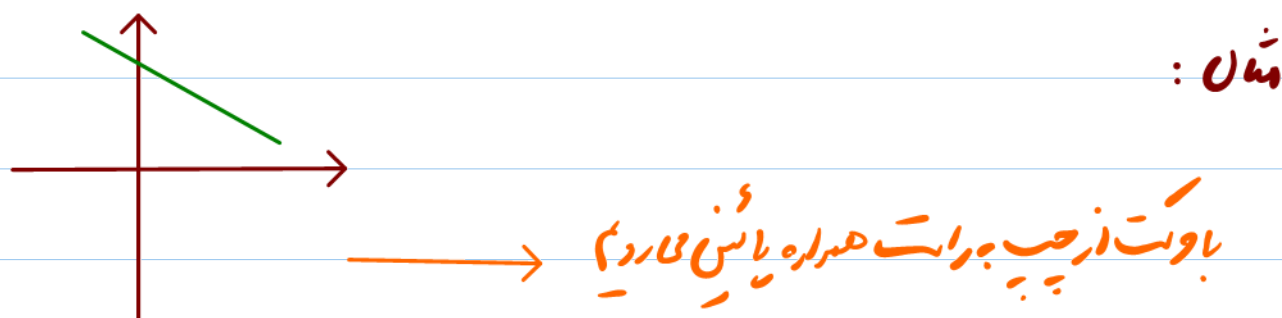
تعریف تابع اکیداً نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 < x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) > f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع اکیداً نزولی می‌نامیم.

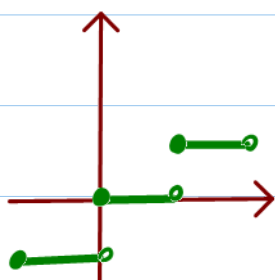
به عبارت دیگر در تابع اکیداً نزولی، با افزایش x ، y کاهش می‌یابد.



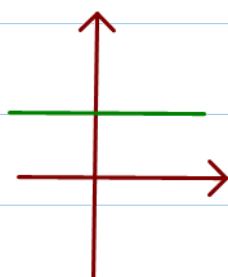
نکته: هر تابع اکسید صوری، صوری هم هست و هر تابع اکسید نزوی، نزوی هم هست.

ولی عکس این مطلب درست نیست.

مثال: تابع $y = [x]$ صوری است ولی اکسید صوری نیست.



نکته: اگر با افزایش x ، y ثابت بماند می‌گوئیم تابع ثابت است. تابع ثابت هم صوری است.



مثال:

درهم نزوی.

تعریف تابع اکسید کننده: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) اکسید صوری یا اکسید نزوی

باشد، می‌گوئیم تابع f روی مجموعه A اکسید کننده است.

تعریف تابع کاهنده: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) صوری یا نزوی باشد، می‌گوئیم

تابع f روی مجموعه A کاهنده است.

نکته: اگر در تابع با افزایش x حرکت از چپ به راست روی نمودار، y گاهی اوقات

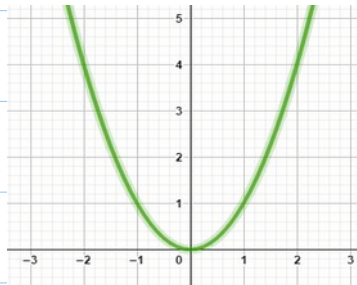
افزایش دهی اوقات کاهش یابد، این تابع را **فِرِیلِنْدِای** گوئیم.

وقت کند شدن است تابعی روی دامنه اش فِرِیلِنْدِا باشد ولی روی زیرمجموعه های

از دامنه اش کند یا باشد.

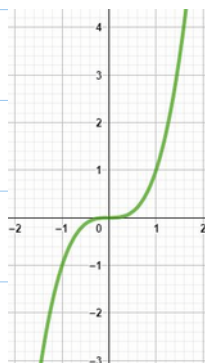
بررسی کندوای توابع معروف:

۱) $y = x^2$



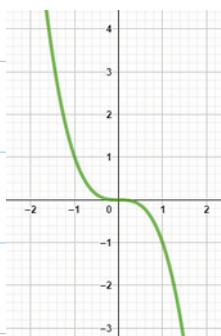
فِرِیلِنْدِا روی $[-\infty, 0]$ (کُندِا تری)
و در $[0, +\infty)$ (کُندِا تری)

۲) $y = x^3$



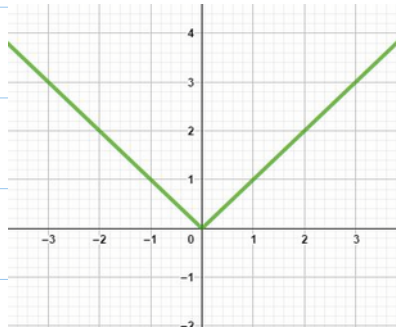
کُندِا کندِا (کُندِا تری)

۳) $y = -x^3$



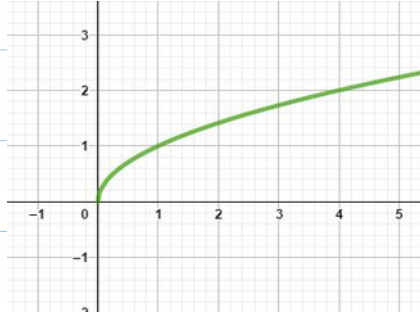
کُندِا کندِا (کُندِا تری)

$$۴) y = |x|$$



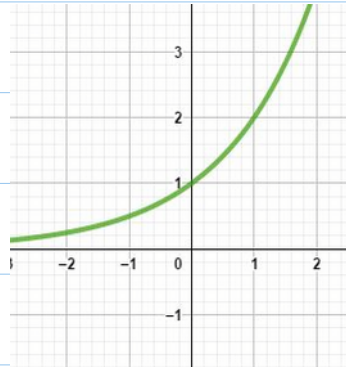
غیر منفرد
 در $[-\infty, 0]$ (کثیراً نزولی)
 و در $[0, +\infty]$ (کثیراً صعودی)

$$۵) y = \sqrt{x}$$



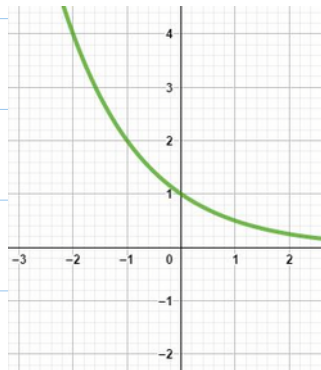
کثیراً منفرد (کثیراً صعودی)

$$۶) y = a^x \quad (a > 1)$$



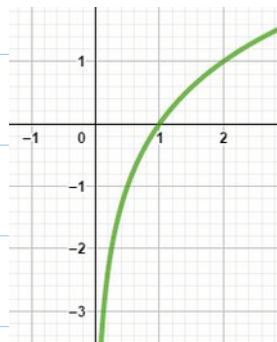
کثیراً منفرد (کثیراً صعودی)

$$۷) y = a^x \quad (0 < a < 1)$$



کثیراً منفرد (کثیراً نزولی)

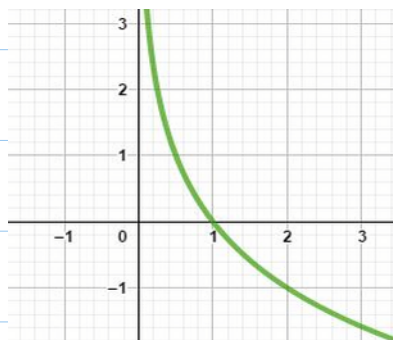
$$۸) y = \log_a x \quad (a > 1)$$



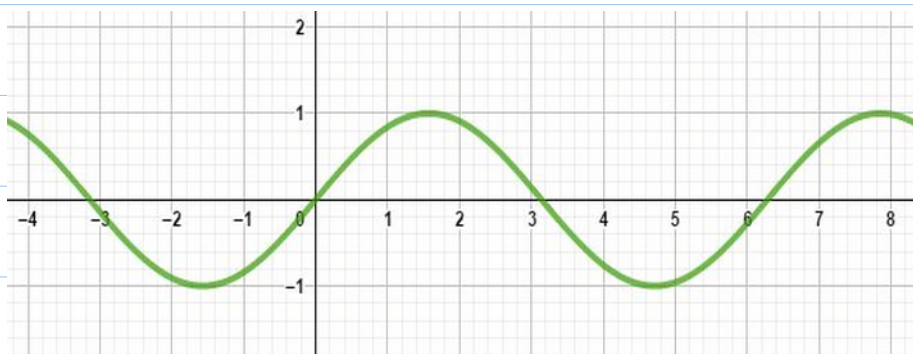
کثیراً منفرد (کثیراً صعودی)

۹) $y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$

اگر a بزرگتر از ۱ باشد (اگر a نزديک ۱ باشد)

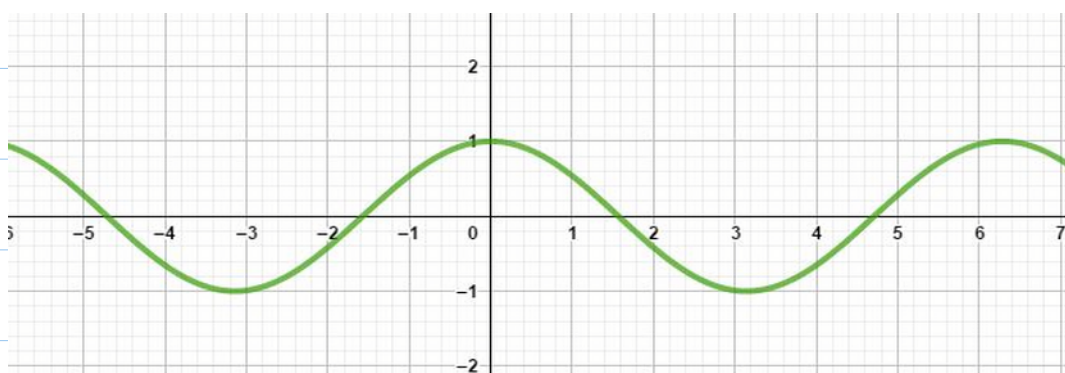


۱۰) $y = \sin x$



خوب بنگار دی شده در $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ تابع اگر نزديک ۱ باشد.

۱۱) $y = \cos x$

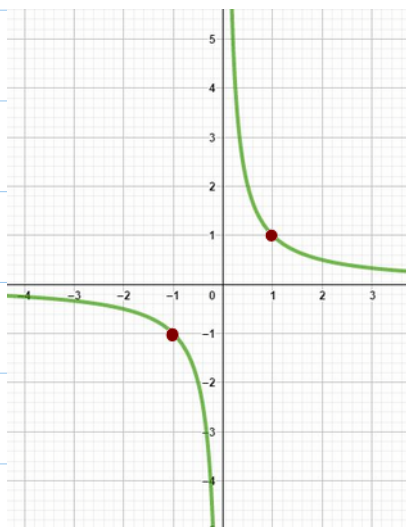


خوب بنگار دی شده در $[\pi, 2\pi]$ تابع اگر نزديک ۱ باشد.

$$۱۲) y = \frac{1}{x}$$

$$f(1) < f(-1) \rightarrow 1 < -1$$

محور

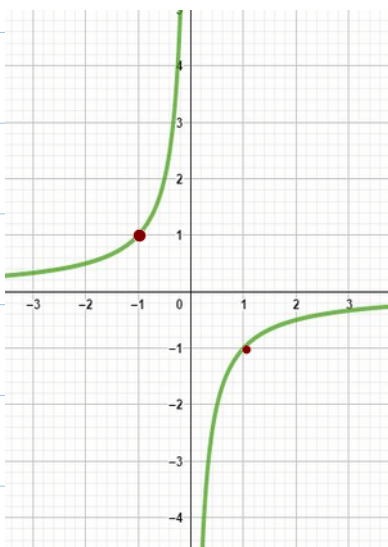


خیز یکنوا دی در $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$
اکسید نزدیکی است

$$۱۳) y = -\frac{1}{x}$$

$$f(1) > f(-1) \rightarrow 1 > -1$$

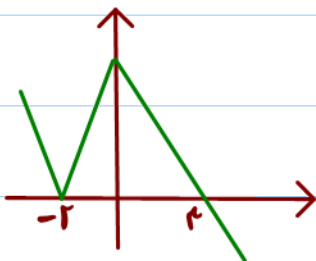
نزول



خیز یکنوا دی در $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$
اکسید محوری است

مثال: با توجه به نمودار تابع f ، یکنوایی آن را بررسی کنید.

الف)



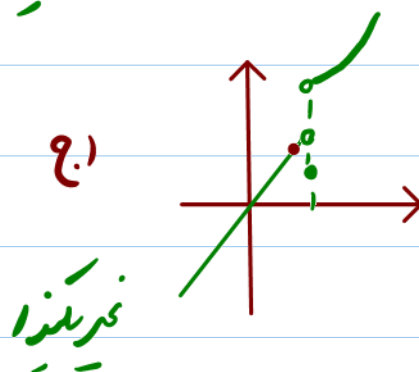
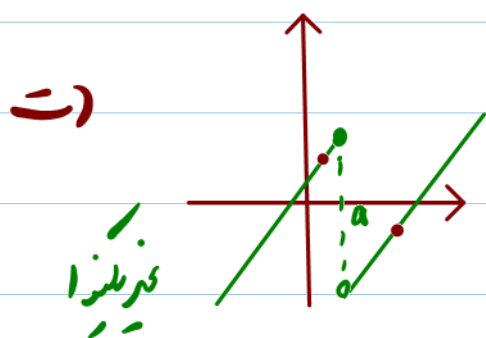
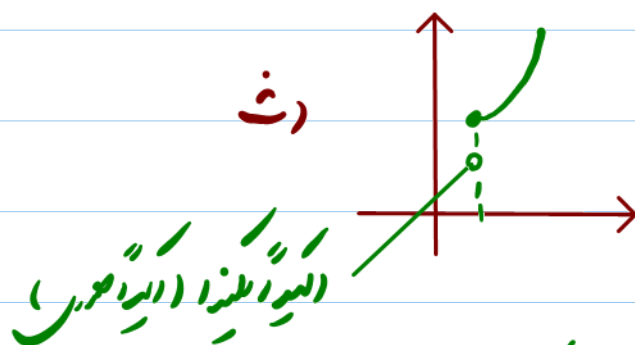
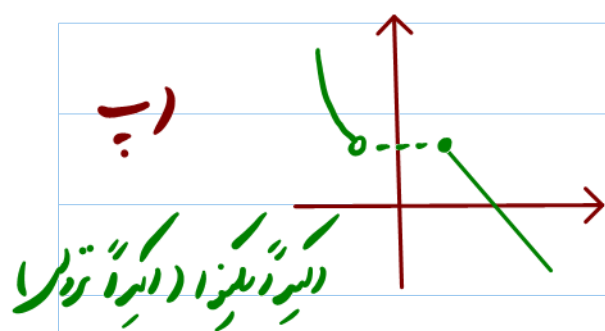
خیز یکنوا دی در $[-2, -\infty)$ و $(-\infty, +\infty]$

اکسید نزدیکی و در $[0, 2]$ اکسید محوری

ب)



یکنوا (نزدیکی)



مثال: تابع $f = \{(1, 2), (2, m-1), (3, 7-m)\}$ صوری است. عدد m را بیابید.

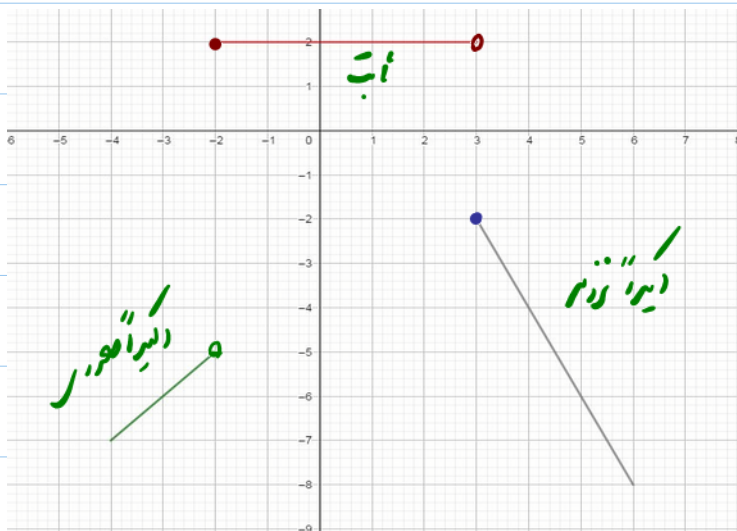
$$1 < 2 \rightarrow f(1) \leq f(2) \Rightarrow 2 \leq m-1 \Rightarrow 3 \leq m \quad (1)$$

$$2 < 3 \rightarrow f(2) \leq f(3) \Rightarrow m-1 \leq 7-m \Rightarrow 2m \leq 8 \rightarrow m \leq 4 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 3 \leq m \leq 4$$

مثال: تابع $y = \begin{cases} x-4 & x < -2 \\ 2 & -2 \leq x < 4 \\ -2x+4 & x \geq 4 \end{cases}$ روی بازه $(-\infty, a)$ صوری است.

بیشترین مقدار برای a را بیابید.

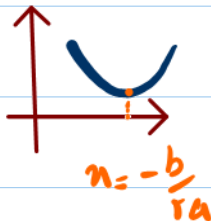


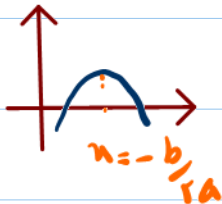
تangent decreasing: $(-\infty, 2)$

a

$$\Rightarrow a = 4$$

نکته: طبق رفته دیدیم tangent $y = ax^2 + bx + c$ روی R غیر یکنواخت دی

الف) $a > 0$  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ کمترتند و $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ کمیترتند

ب) $a < 0$  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ کمیترتند و $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ کمترتند

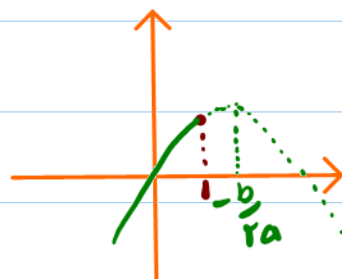
همچنین می توان گفت سعی در هر بازه ای که در آن همگی درون آن بازه باشد غیر یکنواخت

مثال: تابع درجه دوم $f(x) = (k+2)x^2 + x$ با دامنه $(-\infty, 1]$ صعودی است.

عدد k را بیابید.

$$(1) \quad a < 0 \Rightarrow k+2 < 0 \Rightarrow k < -2$$

$$a = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(k+2)} \geq 1$$



$$\frac{-1}{2(k+2)} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2(k+2)} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+2k+2}{2(k+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2k+3}{2(k+2)} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-2	$+\infty$
$2k+3$	$-$	0	$+$	$+$
$2(k+2)$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2k+3}{2(k+2)}$	$+$	0	$-$	$+$

$$-\frac{3}{2} \leq k < -2 \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) = -\frac{3}{2} \leq k < -2$$

مثال: تابع $y = (k-1)^x$ را برای k را بدست آورید.

$$a > 1 \Rightarrow k-1 > 1 \Rightarrow k > 2 \Rightarrow k > \sqrt{2} \text{ یا } k < -\sqrt{2}$$

قضیه: (الف) فرض کنید f را یک فاصله آیداً صوری باشد و a, b مقادیر باشند

باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a < b$.

(ب) فرض کنید f را یک فاصله آیداً نزولی باشد و a, b مقادیر باشند

باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a > b$.

اثبات: (الف) چون تابع f اکیدا صعودی است پس اگر $a > b$ آنگاه $f(a) > f(b)$.
 فرض کنیم

حال اگر یک نقطه این نوار به رسم داشته باشیم می‌پیرود:

اگر $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \leq b$ □

ب) به عنوان تمرین، حل شود.

تذکره: پس می‌توان گفت اگر تابع f (اکیدا) صعودی باشد و آن را از دو طرف نامیاری

حذف کنیم، جهت نامیاری تغییر نمی‌کند و اگر f (اکیدا) نزولی باشد، با حذف آن از

دو طرف، جهت نامیاری برعکس می‌شود.

مثال: اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد و $f(3a+2) > f(a^2-1)$ ، حد در a را بیابید.

$$f(a^2-1) > f(3a+2) \xrightarrow{f \text{ نزولی}} a^2-1 < 3a+2$$

$$a^2-3a-2 < 0 \Rightarrow (a+1)(a-4) < 0 \Rightarrow -1 < a < 4$$

مثال: بصریم جواب نامعادلات زیر را بنویسید.

الف $14^{2n-2} \geq 8^{2n-1}$

$$(2^3)^{2n-2} \geq (2^3)^{2n-1} \Rightarrow \cancel{2^{6n-4}} \geq \cancel{2^{6n-3}} \stackrel{a)}{=} 1n-1 \geq 1n-2$$

اینجا معکوس

$$1n-1 \geq 1n-2 \Rightarrow -1 \geq -2 \Rightarrow n \leq -1 \rightarrow \text{ج. ر.} = (-\infty, -1]$$

ب) $\log_{\frac{1}{2}}(n+1) > 2$ (1) $(n+1) > 0 \Rightarrow n > -1$ دانسته

$$\cancel{\log_{\frac{1}{2}}(n+1)} > \cancel{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2} \stackrel{a)}{=} n+1 < \frac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow n < \frac{1}{2} - 1$$

اینجا نزول

$$n < -\frac{1}{2} \quad (2) \quad (1) \cap (2) \quad -1 < n < -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ج. ر.} = (-1, -\frac{1}{2})$$

ج) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{n+1} > (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{n+2}$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{n+1} > ((\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1})^{n+2} \Rightarrow \cancel{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{n+1}} > \cancel{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-n-2}}$$

$$\stackrel{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{a)}{=} 1n+1 < -n-2 \Rightarrow 1n+n < -2-1 \Rightarrow 2n < -3$$

اینجا نزول

$$\Rightarrow n < -1 \rightarrow \text{ج. ر.} = (-\infty, -1)$$

نکته:

۱) اگر توابع f و g صوری باشند آنگاه $f+g$ هم صوری است.

۲) اگر توابع f و g نزدی باشند آنگاه $f+g$ هم نزدی است.

۳) اگر توابع f و g صوری باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $f \times g$ هم صوری است.

۴) اگر توابع f و g نزدی باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $f \times g$ هم نزدی است.

۵) اگر f صوری باشد آنگاه $f(x) - g$ نزدی است.

۶) اگر f نزدی باشد آنگاه $f(x) - g$ صوری است.

۷) اگر f صوری باشد و مقادیر f همگی مثبت و همگی منفی باشد آنگاه $f \pm g$ نزدی است.

۸) اگر f نزدی باشد و مقادیر f همگی مثبت و همگی منفی باشد آنگاه $f \pm g$ صوری است.

۹) اگر f صوری و g نزدی باشد و f صوری و g نزدی است.

مثال: اگر f تابعی نزولی با مقدار منفی باشد، کدام تابع نزودی است؟

✓ (۱) $y = x^n f(x)$ (۲) $y = \frac{f(x)}{x^n}$ (۳) $y = x^n + f(x)$ (۴) $y = x^n - f(x)$

تابع f تابعی نزولی با مقدار منفی است. پس تابع f - تابعی صعودی با مقدار مثبت است.

همچنین تابع x^n $y = x^n$ تابعی صعودی با مقدار مثبت است. پس ضرب این دو تابع منفی

$y = x^n \times (-f) = -x^n f$ تابعی صعودی است. پس $y = x^n f$ تابعی نزولی است.

مثال: اگر f و g توابعی نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشند، کدام تابع صعودی است؟

(۱) f (۲) g (۳) $-f$ (۴) $-g$ ✓

صعودی نزولی منفی نزولی نزولی نزولی

$$h = (f+g) + (g-f) = 2g \Rightarrow k = -\frac{1}{4}(2g) = -g$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع

یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

قسمت سوم: تقسیم و بخش پذیری

جلسه چهارم: صفحات ۱۸ تا ۲۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری:

در پایه‌های پائین‌تر با تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای آشنا شدید.

مراحل این تقسیم عبارت بودند از:

(۱) آنگاه در نوشتن مقسوم و مقسوم علیه.

(۲) تقسیم جمله اول مقسوم بر جمله اول مقسوم علیه و نوشتن حاصل آن در خارج قسمت و

ضرب آن در مقسوم علیه و کم کردن حاصل آن از مقسوم بدین یافتن مقسوم جدید.

(۳) تقسیم جمله اول مقسوم جدید بر جمله اول مقسوم علیه و انجام مرحله ۲.

(۴) تکرار مرحله ۲ تا جایی که درجه مقسوم جدید (جای باقی مانده) از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

نکته: اگر درجه مقسوم n و درجه مقسوم علیه m باشد ($n \geq m$)، درجه خارج قسمت $n-m$ و

درجه باقی مانده حداکثر $m-1$ خواهد بود.

مثال: چندجمله‌ای $x^4 + 2x^3 - 1$ را بر $x^2 - 2$ تقسیم کنید.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + 3x^3 - 1 \\
 - (2x^4 - 4x^3) \\
 \hline
 7x^3 + 3x^2 - 1 \\
 - (7x^3 - 4x^2) \\
 \hline
 11x^2 + 4x - 1 \\
 - (11x^2 - 8) \\
 \hline
 12x + 7
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r}
 x^2 - 2 \\
 2x^3 + 3x + 4
 \end{array} \right.$$

مقدمه $\rightarrow$ خارج نت $\rightarrow$ باقی مانده $\rightarrow$

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$$

$$\frac{3x^3}{x^2} = 3x$$

$$\frac{4x^2}{x^2} = 4$$

روش هدرز برای تقسیم چندجمله‌ای درجه n بر درجه یک به صورت $n+a$:

این روش را بابک مثال توضیح دهیم:

$$3x^3 + 11x^2 + 0x - 7 \quad \left| \quad x+2 \right.$$

ضرایب یک جمله‌ای مقدمه

رشته مقدمه کلیه $(x+2=0)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 & & 11 & & 0 & & -7 \\
 \downarrow & & & & & & \\
 3 & \xrightarrow{\times(-2)} & -6 & \xrightarrow{\times(-2)} & -12 & \xrightarrow{\times(-2)} & -24 \\
 & & 2 & \xrightarrow{\times(-2)} & -4 & \xrightarrow{\times(-2)} & -8 \\
 & & & & 1 & \xrightarrow{\times(-2)} & -2 \\
 & & & & & & -9
 \end{array}$$

باقی مانده $\rightarrow$

$$3x^2 + 2x + 1$$

خارج نت:

قصد تقسیم (الگوریتم تقسیم) برای چند جمله‌ای:

اگر $p(n)$ و $B(n)$ چند جمله‌ای باشند و درجه $B(n)$ از صفر بزرگتر باشد، آنگاه

چند جمله‌ای منقسمه $Q(n)$ و $R(n)$ وجود دارند به طوری که:

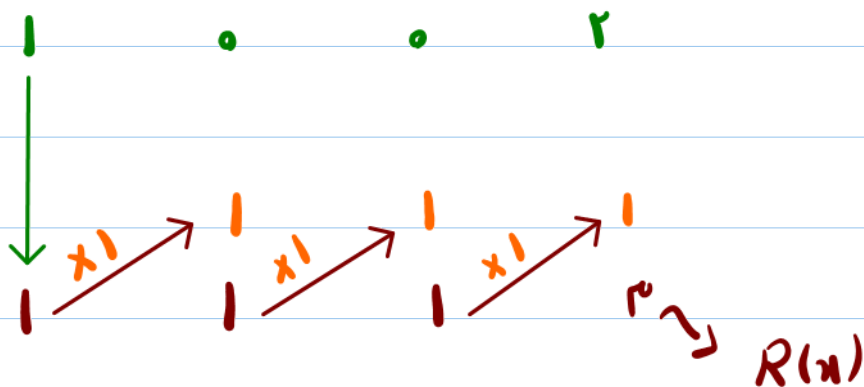
$$\begin{array}{r} p(n) \\ \hline B(n) \\ \hline Q(n) \\ \hline R(n) \end{array}$$

$$p(n) = B(n)Q(n) + R(n)$$

که در آن درجه $R(n)$ از درجه $B(n)$ کمتر است.

اگر $R(n) = 0$ باشد $p(n)$ بر $B(n)$ بخش پذیر است.

مثال: الگوریتم تقسیم را برای تقسیم $p(n) = n^3 + 1$ بر $B(n) = n - 1$ بنویسید.



$$Q(n) = n^2 + n + 1$$

$$n^3 + 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1) + 2$$

مقیه (۱): باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجه یک $ax+b$ برابر $p(-\frac{b}{a})$

است. یعنی برای یافتن باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجه یک کافی است

ریشه چندجمله‌ای درجه یک (معنوم علیه) را به جای متغیر $p(x)$ (معنوم) قرار دهیم.

اثبات: اگر $ax+b$ را بنویسیم، داریم:

$$p(x) = (ax+b)Q(x) + R$$

اگر به جای x ریشه معنوم علیه $(ax+b=0 \rightarrow ax=-b \rightarrow x=-\frac{b}{a})$ را قرار دهیم

داریم:

$$p(-\frac{b}{a}) = 0 \times Q(-\frac{b}{a}) + R \Rightarrow p(-\frac{b}{a}) = R \quad \square$$

سوال: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^5 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1$ بر $x-2$ را بیابید.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow p(2) = R$$

$$p(2) = 2^5 - 4(2)^3 + 3(2)^2 - 2 + 1 = 32 - 32 + 12 - 2 + 1 = 11$$

مثال: اگر چند جمله‌ای $p(x) = 3x^7 - 2ax - 5$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد، a را بیابید.

$$n-1=0 \rightarrow n=1 \rightarrow p(1)=0 \rightarrow p(1)=r(1)^V - \epsilon a(1) - 0 = 0$$

$$r - \epsilon a - 0 = 0 \rightarrow -\epsilon a = -r \rightarrow a = -\frac{1}{\epsilon}$$

مسائل: کنند، راضی ۹۴

به ازای مقداری از a چند جمله ای $p(x) = x^4 + ax^3 - 18x^2 + 25x - 1$ بر $x+2$ بخش پذیر است.

کو حیرتیں رہے گا کہ $p(0) = 0$ کیسے ہے ؟

$$-1-\sqrt{0} \quad 1 \quad -1-\sqrt{3} \quad 1 \quad 1-\sqrt{0} \quad 1 \quad 1-\sqrt{1} \quad 1$$

$$n+r=0 \rightarrow n=-r \rightarrow p(-r)=0 \Rightarrow p(-r)=(-r)+a(-r)-\lambda(-r)=0$$

$$14 - \lambda a + 14 = 0 \rightarrow -\lambda a = -14 \rightarrow a = 2$$

$$p(x) = x^2 + \epsilon x - \lambda x = 0 \Rightarrow x^2 + \epsilon x - \lambda x = (x + r) q(x)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & & 2 & & 0 & & -1 & & 0 & & -2 \\
 \downarrow & \nearrow x(-1) & -2 & \nearrow x(-1) & -\varepsilon & \nearrow x(-1) & 1 & \nearrow x(-1) & 0 & & \\
 1 & & 2 & & -\varepsilon & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & \varphi_1, \varphi_2 & &
 \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 + 7x - 12x + 0$$

بَابُ الْهَزْلِ

$$p(x) = (x+2)(x^3 + 2x^2 - 4x) = 0 \Rightarrow (x+2)x(x^2 + 2x - 4) = 0$$

$$\swarrow x+2=0 \rightarrow x = \underline{-2}$$

$$\rightarrow \underline{x=0}$$

$$\searrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 4 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 + 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 5$$

$$\sqrt{\quad} \Rightarrow x+1 = \pm \sqrt{5} \Rightarrow \underline{x = \sqrt{5} - 1}, \underline{x = -\sqrt{5} - 1} \quad \text{گزینہ ۱}$$

مثال: باقی مانده تقسیم چندجهای $x^4 - ax^3 + x^2 + b$ بر $x+1$ برابر 9 است. اگر

این چندجهای بر $x-2$ بخش پذیر باشد، a, b را بیابید.

$$x+1=0 \rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=9 \Rightarrow p(-1)=(-1)^4 - a(-1)^3 + (-1)^2 + b = 9$$

$$1+a+1+b=9 \Rightarrow a+b=7 \quad (1)$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \Rightarrow p(2)=0 \Rightarrow p(2)=2^4 - a(2)^3 + (2)^2 + b = 0$$

$$16 - 8a + 4 + b = 0 \Rightarrow -8a + b = -20 \quad (2)$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ -8a+b=-20 \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ 9a=27 \rightarrow a=3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \searrow \\ 3+b=7 \rightarrow b=4 \end{matrix}$$

مثال: کسور ۹۹ ریاضی خارج:

برای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $p(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x - 1$ بر $x-1$

بخش پذیر است. در این حالت باقی مانده $p(x)$ بر $x+2$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

$$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^4+a\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{2}\right)-1=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{8}a + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 0 \xrightarrow{\times 8} 1 + a + 4 - 12 = 0 \rightarrow a = 7$$

$$p(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x - 1 \Rightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2$$

$$p(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) - 1 = 32 - 56 + 8 + 6 - 1 = -1$$

گزینه ۱

مثال: اگر $f(x-1) = x-2$ باشد، باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-3$ را بیابید.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2) = R$$

باید عددی را جای x در $f(x-1)$ قرار دهیم که $f(2)$ بدست آید:

$$2n-1=3 \Rightarrow 2n=4 \rightarrow n=2$$

$$f(2n-1)=n-2 \xrightarrow{n=2} f(2(2)-1)=2-2 \rightarrow f(3)=-1=R$$

مثال: چند جمله‌ای $p(x)=x^4+3x^3+ax^2-9$ بر $x+3$ بخش پذیر است. باقی مانده

تقسیم چند جمله‌ای $p(x+1)$ بر $x+2$ کدام است؟

$$(1) -14 \quad (2) -2 \quad (3) -1 \quad (4) -8$$

$$x+3=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow p(-3)=0 \rightarrow p(-3)=(-3)^4+3(-3)^3+a(-3)^2-9=0$$

$$81-27+9a-9=0 \rightarrow 9a=9 \Rightarrow a=1 \Rightarrow p(x)=x^4+3x^3+x^2-9$$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2+1)=R \Rightarrow p(-1)=R$$

$$p(-1)=(-1)^4+3(-1)^3+(-1)^2-9=1-3+1-9=-10 \quad \text{گزینه ۴}$$

مثال: باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای‌های $p(x)+x$ و $Q(x)+x$ بر $x-2$ به ترتیب

۳، ۴ است. اگر چند جمله‌ای $k p(x)+Q(x)+1$ بر $x-2$ بخش پذیر باشد،

مقدار k کجاست؟

$$(1) -5 \quad (2) 0 \quad (3) -4 \quad (4) 4$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow p(2)+2=3 \Rightarrow p(2)=1$$

$$\rightarrow x=2 \rightarrow 2Q(2)=4 \rightarrow Q(2)=2$$

$$x=2 \rightarrow k p(2) + Q'(2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow k \cdot 1 + (2)' + 1 = 0 \rightarrow k + 0 = -1 \Rightarrow k = -1$$

گزینۀ ۱

روش یافتن باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای از درجه بزرگتر از یک :

اگر در تقسیم رای نویسیم. فقط وقت‌کنند درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر است.

مثلاً اگر مقسوم علیه از درجه دو باشد باقی مانده حداکثر از درجه یک است و همانند باقی مانده

راه صورت $ax+b$ بنویسیم. برای جی سه ضرایب باقی مانده باید کار کنیم $Q(x)$ حذف شود.

از رشتہ‌های معلوم علیه برای این کار استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر رشتہ‌های معلوم علیه

بابت تباری معلوم و باقی‌مانده می‌شود:

$$\begin{array}{r|l} p(n) & (n-\alpha)(n-\beta) \\ \hline & Q(n) \\ \hline R(n) & \end{array}$$

$$p(n) = (n-\alpha)(n-\beta)Q(n) + R(n)$$

$$n = \alpha \rightarrow p(\alpha) = (\cancel{\alpha-\alpha})(\alpha-\beta)\overset{0}{Q(\alpha)} + R(\alpha) \Rightarrow p(\alpha) = R(\alpha)$$

$$n = \beta \rightarrow p(\beta) = (\beta-\alpha)(\cancel{\beta-\beta})\overset{0}{Q(\beta)} + R(\beta) \Rightarrow p(\beta) = R(\beta)$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم $x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 1$ را بر $x^2 - 1$ بدست آورید.

$$x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 1 \quad \Big| \quad \begin{array}{l} x^2 - 1 \\ Q(n) \end{array}$$

$$\overline{R(n) = ax + b}$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow p(1) = 1^5 + 3(1)^4 + 5(1)^3 - 1 = R(1) = a(1) + b$$

$$\Rightarrow 1 + 3 + 5 - 1 = a + b \Rightarrow a + b = 8 \quad (1)$$

$$x = -1 \Rightarrow p(-1) = (-1)^5 + 3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 1 = R(-1) = a(-1) + b$$

$$\Rightarrow -1 + 1^2 + 0 - 1 = -a + b \Rightarrow -a + b = 4 \quad (2)$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ a + 7 = 1 \rightarrow a = 1 \end{matrix}$$

$$2b = 12 \rightarrow b = 7$$

$$R(n) = n + 7$$

مثال: سید ریاضی ۹۹

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(n)$ بر $n-1$ و $2n+1$ به ترتیب ۱ و ۵ است.

باقی مانده تقسیم $P(n)$ بر $2n^2 - n - 1$ کدام است؟

$$(1) -n+1 \quad (2) n+1 \quad (3) 2n+1 \quad (4) 2n-1$$

$$n-1=0 \rightarrow n=1 \rightarrow P(1)=1$$

$$2n+1=0 \rightarrow n=-\frac{1}{2} \rightarrow P(-\frac{1}{2})=5$$

$$\begin{array}{r} P(n) \overline{) 2n^2 - n - 1} \\ Q(n) \end{array}$$

$$R(n) = an + b$$

$$P(n) = (2n^2 - n - 1)Q(n) + (an + b)$$

$$P(n) = (n-1)(2n+1)Q(n) + (an + b)$$

$$x=1 \Rightarrow p(1) = \cancel{(1-1)} \cancel{(2+1)} Q(1) + (a+b) = 1 \Rightarrow a+b=1 \quad (1)$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow p(-\frac{1}{2}) = \cancel{(-\frac{1}{2}-1)} \cancel{(2 \times (-\frac{1}{2}) + 1)} Q(-\frac{1}{2}) + a(-\frac{1}{2}) + b = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}a + b = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a+b=1 \\ -\frac{1}{2}a+b=0 \end{cases} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \begin{cases} a+b=1 \\ -\frac{1}{2}a+b=0 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} a+b=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{b=\frac{1}{2}} a+\frac{1}{2}=1 \rightarrow a=\frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow R(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

نیزه ۳

مثال: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-4 ، x^2-9 به ترتیب $x+1$ ، $x+2$

است. باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-5x+6 کجاست؟

$$(1) \quad 2x+0 \quad (2) \quad 0x+2 \quad (3) \quad 0x-2 \quad (4) \quad 2x-0$$

$$p(x) = (x^2-4)Q_1(x) + (x+2) \Rightarrow p(2) = 2+2 = 4$$

$$p(x) = (x^2-9)Q_2(x) + (2x+1) \Rightarrow p(3) = 6 \times 3 + 1 = 19$$

$$p(x) = (x^2-5x+6)Q_3(x) + (ax+b) = (x-2)(x-3)Q_3(x) + (ax+b)$$

$$p(1) = (1-2)(1-4)Q(1) + (a(1)+b) = 1 \Rightarrow 2a+b=1$$

$$p(2) = (2-2)(2-4)Q(2) + (a(2)+b) = 12 \rightarrow 2a+b=12$$

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+b=12 \end{cases} \rightarrow 10+b=1 \rightarrow b=-9$$

$$a=0$$

$$R(n) = 0n - 9$$

گزین ۳ :

مثال: اگر باقی مانده تقسیم $f(n)$ بر $(n-1)(n-2)$ برابر $2n+5$ باشد، باقی مانده تقسیم $f(n)$ بر $n-3$ را می‌یابید.

$$f(n) = (n-1)(n-2)Q(n) + (2n+5)$$

$$n-2=0 \rightarrow n=2 \rightarrow f(2) = R$$

$$f(2) = (2-1)(2-2)Q(2) + (4+5) = 9 = R$$

نکته: اگر یک چندجهان بر حاصلضرب چند چندجهای بخش پذیر باشد، برحسب از این

چندجهای ها هم بخش پذیر خواهد بود.

مثال: اگر چندجهای $p(x) = x^5 + mx^2 + nx + 42$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر باشد، m, n را بیابید.

بر طبق نکته چون p بر $(x-2)(x+2)$ بخش پذیر است پس هم بر $x+2$ بخش پذیر

است هم بر $x-2$. (ارائه به عنوان تمرین).

روش دیگر برای یافتن باقی مانده تقسیم چندجهای $p(x)$ بر چندجهای درجه ۲

این روش را با حل یک مثال توضیح می دهیم.

می خواهیم باقی مانده تقسیم عبارت $x^5 + 4x^2 + 5x - 1$ را بر $x^2 - 1$ بیابیم.

مرحله اول: مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم: $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$

مرحله دوم: مقسوم را بر حسب x^2 مرتب می کنیم: $x^5 + 4x^2 + 5x - 1 = (x^2)^2 x + 4(x^2) + 5x - 1$

مرحله سوم: جای x^2 مقدارش را در مقسوم می نهانیم تا باقی مانده بدست آید:

$$x^r=1 \rightarrow R = 1 \times x + 4(1)^r + 0 \times 1 - 1 = x + 4 + 0 - 1 = x + 3$$

تذکره: گاهی اوقات نیاز است بر حسب نوع، ضرایب تکرار شود.

مثال: تکنیک ریاضی خارج ۴۴

اگر عبارت $x^4 + ax^3 - bx + c$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، a و b کماست؟

$$\begin{matrix} & & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ & & x & x & x & x & 1 \end{matrix}$$

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x^2 = 2x - 1$$

$$(x^4)^r + ax^3 - bx + c \Big|_{x^2=2x-1} = (2x-1)^2 + a(2x-1) - bx + c$$

$$= 4x^2 - 4x + 1 + 2ax - a - bx + c \Big|_{x^2=2x-1}$$

$$= 4(2x-1) - 4x + 2ax - a - bx + c = \underline{8x - 4} - \underline{4x} + 2ax - a - bx + c =$$

$$= 4x + 2ax - bx - a + 1 = x(4 + 2a - b) - a + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 4 + 2a - b = 0 \\ -a + 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ 4 + 2 - b = 0 \rightarrow b = 6 \end{matrix} \quad \text{پس } a=1, b=6$$

موضوع جذری کاربرد :

درس‌های گذشته با اتحاد و جمع، اتحادیان دلاغ را شناسید :

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x^2 \pm y^2 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

می‌خواهیم اتحادهای فوق را برای توان‌های بیشتر از ۲، تعمیم دهیم :

۱) تعمیم $\underbrace{x^n - y^n}_P$ بر $x - y$:

$$x - y = 0 \rightarrow x = y \rightarrow P(y) = y^n - y^n = 0 = R$$

پس $x^n - y^n$ همواره بر $x - y$ بخش پذیر است.

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}$$

۲) تعمیم $\underbrace{x^n - y^n}_P$ بر $x + y$:

$$x + y = 0 \rightarrow x = -y \rightarrow P(-y) = (-y)^n - y^n \stackrel{n \text{ زوج}}{=} y^n - y^n = 0$$

پس $x^n - y^n$ برای n های زوج بر $x+y$ بخش پذیر است.

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + x y^{n-2} - y^{n-1}) : n=2k$$

۳) تقسیم $x^n + y^n$ بر $x+y$:

$$x+y=0 \rightarrow x=-y \rightarrow p(-y) = (-y)^n + y^n$$

پس $x^n + y^n$ برای n های فرد بر $x+y$ بخش پذیر است.

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - x y^{n-2} + y^{n-1}) : n=2k+1$$

سوال: تحت چه شرایطی برای n ، $x^n + y^n$ بر $x-y$ بخش پذیر است؟

$$x-y=0 \rightarrow x=y \rightarrow p(y) = y^n + y^n \neq 0$$

هیچگاه $x^n + y^n$ بر $x-y$ بخش پذیر نیست.

مثال: کسرهای زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+x-2} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x+2)}{(x+2)\cancel{(x-1)}} = x+1$$

$$\text{ب) } \frac{(1-t+t^r-t^r+t^e)(1+t)}{1-t^{10}} = \frac{1+t^0}{1-t^{10}}$$

$$= \frac{1+t^0}{(1-t^0)(1+t^0)} = \frac{1}{1-t^0}$$

$$\text{ج) } \frac{(7^9+1)(0^9+0^{\wedge}+0^v+\dots+1)}{(0^{10}-1)(4^{\wedge}-4^v+4^f-\dots+1)}$$

$$7^9+1 = (7+1)(7^{\wedge}-7^v+7^f-\dots+1)$$

$$0^{10}-1 = (0-1)(0^9+0^{\wedge}+\dots+1)$$

$$\text{حاصل} = \frac{(7+1)(7^{\wedge}-7^v+\dots+1)(0^9+0^{\wedge}+\dots+1)}{(0-1)(0^9+0^{\wedge}+\dots+1)(7^{\wedge}-7^v-\dots+1)}$$

$$= \frac{v}{r}$$

سؤال: اگر $f(x) = \frac{x^{\wedge}-1}{(x^r+x)(x^f-x^e+x^r-1)}$ ، مقدار $f(-\frac{r}{r})$ کدام است؟

1) $-\frac{r}{r}$ 2) $-\frac{1}{r}$ 3) $-\frac{1}{r}$ 4) $-\frac{r}{e}$

$$\text{پاسخ} = x(x^r+1) \underbrace{((x^r)^r - (x^r)^r + x^r - 1)}_{\text{جان}} = x((x^r)^r - 1) = x(x^{\wedge}-1)$$

$$f(x) = \frac{\hat{x}-1}{x(\hat{x}-1)} = \frac{1}{x}$$

$$f(-\frac{r}{r}) = \frac{1}{-\frac{r}{r}} = -\frac{r}{r} \quad \text{نرخ ۱}$$

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

محل رسم: ششگ

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت اول: تناوب

جلسه اول: صفحات ۲۴ و ۲۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع متناوب :

اگر در تابعی برای هر مقدار از دامنه تابع، تساوی $f(x+\tau) = f(x)$ برقرار باشد،

حقی اضافه کردن τ ، اثری روی مقدار تابع نداشته باشد، می‌گوییم f متناوب است.

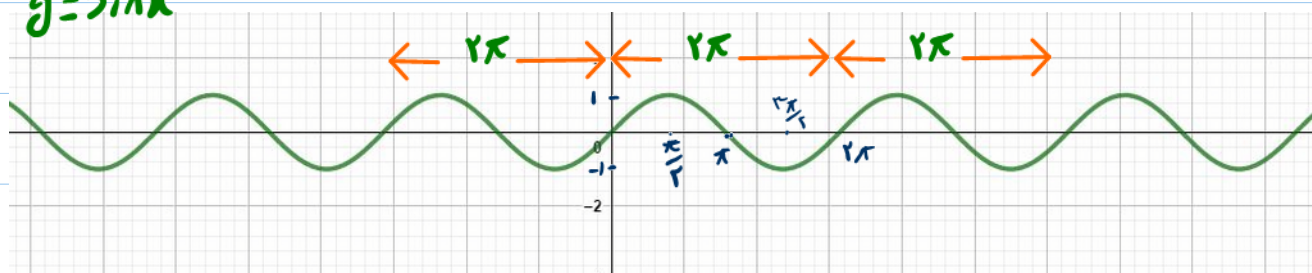
به کوچک‌ترین مقدار مثبت τ دوره متناوب می‌گوئیم.

به عبارت دیگر در توابع متناوب، قسمتی از نمودار در حال تکرار شدن است. به کوچک‌ترین

اندازه انفع این قسمت تکرار شونده دوره متناوب می‌گوئیم.

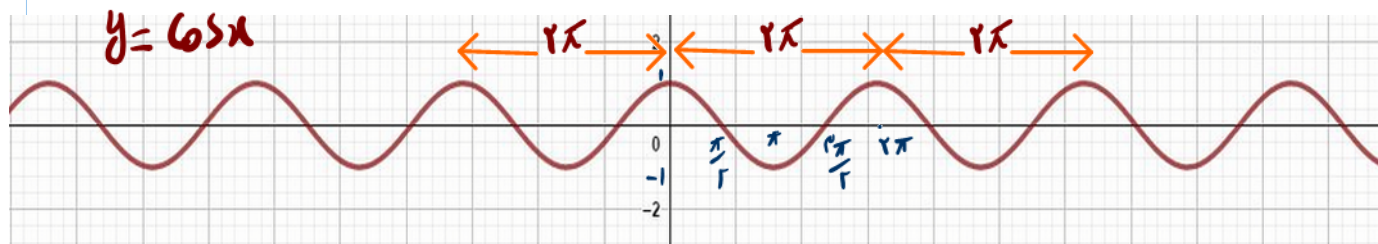
مثال: دوره متناوب توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را بیابید.

$$y = \sin x$$



$$\tau = 2\pi$$

$$y = \cos x$$



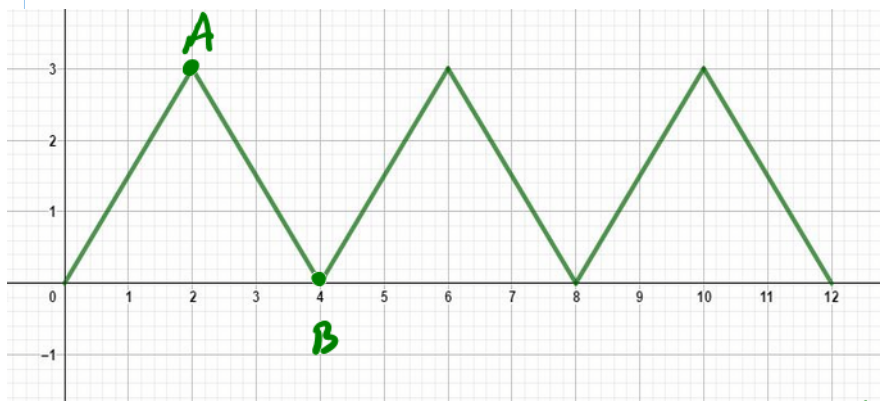
$$\tau = 2\pi$$

نکته: اگر f تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، اضافه یا کم کردن مقدار صحیح

$$f(n+kT) = f(n) \quad T, \text{ مقدار تابع را تغییر نمی دهد}$$

مثال: اگر قسمتی از نمودار تابع f به شکل زیر باشد، $f(1399)$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{3}{4} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \frac{5}{4}$$



$$T = 4$$

باید مغربی از ۴ را به ۱۳۹۹ اضافه یا کم کنیم تا قدری بین ۰ تا ۴ بدست آید.

$$f(1399) = f(1399 + (-349)4) = f(1399 - 1396) = f(3)$$

$$\text{خط } AB : A(2,3), B(4,0) \quad m = \frac{0-3}{4-2} = -\frac{3}{2}$$

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 6$$

$$f(3) = -\frac{3}{2}(3) + 6 = -\frac{9}{2} + 6 = \frac{3}{2} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال: ضابطه تابع مشابه f در بازه (a, b) به صورت $f(x) = k$ است. اگر دوره مشابه

تابع برابر k باشد، $f(-5, 4) = k$ کدام است؟

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

گزینه ۱ $f(-5, 4) = f(-5, 4 + 4(1)) = f(1, 4) = \sqrt{16} = 4$

نکته: اگر دوره مشابه $f(x)$ برابر T باشد، دوره مشابه $af(bx+c)+d$

برابر $\frac{T}{|b|}$ است. یعنی برای y به دوره مشابه فقط به ضرب x توسط $|b|$ می‌پردازیم.

سایر ضرایب و انتقال‌ها اثری روی دوره مشابه ندارند.

مثال: دوره مشابه $y = 2f(4x-1)+4$ برابر ۲ است. دوره مشابه $g(x) = -f(2x)-1$

را بیابیم. $y: 2 = \frac{T_f}{4} \Rightarrow T_f = 8$

$g: T_g = \frac{T_f}{2} = \frac{8}{2} = 4$

نتیجه: دوره شادب توابع $y = a \cos(bx+c) + d$, $y = a \sin(bx+c) + d$

برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال: اگر دوره شادب تابع $f(x) = k \cos(kx) + 3$ برابر π باشد، مقدار $f(0)$

کدام است؟ ۱۱ ۷ ۵ ۴

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{1} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k\pi = 2\pi \rightarrow k = 2$$

گزینه ۱ $f(x) = 2 \cos 2x + 3 \Rightarrow f(0) = 2 \cos 2 \times 0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$

نکته: گاهی اوقات لازم است با استفاده از روابط بین اینت های مثلثی، تابع را ساده

آحاد امکان ساده کنیم، پس دوره شادب را می بینیم.

مثال: دوره شادب تابع $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ کدام است؟

۲ ۴ ۲ ۱

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x (1 - \tan^2 x) = \cos^2 x \cos 2x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x \quad \text{یادآوری:}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{یادآوری:}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{\pi}{2} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال: اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sqrt{2} \cos^2(mx - \frac{\pi}{2})$ برابر $\frac{3\pi}{2}$ باشد، مقدار m کدام

می‌تواند باشد؟

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{۴}$$

$$\frac{\pi}{3} \quad \text{۳}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{۲}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{۱}$$

$$f(x) = \sqrt{2} \times \frac{1 + \cos 2(mx - \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \cos(2mx - \pi))$$

گزینه ۱

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{|2m|} \Rightarrow 2\pi|m| = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |m| = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{3}$$

نکته: دوره شادب. تابع $y = \tan x$, $y = \cot x$ $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.

مثال: دوره شادب. تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ کجاست؟

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\pi$$

$$2\pi$$

$$4\pi$$

$$f(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \quad \text{نکته}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت دوم: بررسی توابع مثلثاتی با

ضابطه $y = asinbx + c$ یا

$y = acosbx + c$

جلسه دوم: صفحات ۲۶ تا ۲۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

بررسی توابع مشتقات به صورت $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$

پارامتر a بهشت انبساط یا انقباض عمودی تابع سینوس و کسینوس می شود و پارامتر c یک انتقال عمودی

را نشانه می دهد. پس مقادیر ماکزیمم و مینیمم این گونه توابع عبارتند از:

$$y_{\max} = |a| + c$$

$$y_{\min} = -|a| + c$$

در درس قبلی هم دیدیم پارامتر a که بهشت انبساط یا انقباض افقی می شود در دوره شادب

$$\text{مژترات} \quad T = \frac{2\pi}{|b|}$$

مثال: مقادیر $\max$, $\min$ و دوره شادب توابع زیر را بیابید.

الف) $y = 4 - \cos\left(\frac{1}{8}x\right)$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{8}} = 16\pi$$

$$y_{\max} = 1 - 1 + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$y_{\min} = -1 - 1 + 4 = -1 + 4 = 3$$

ب) $y = -2 \sin(\pi x) + \sqrt{3}$

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$y_{\max} = 1 - 2 + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$$

$$y_{\min} = -1 - 2 + \sqrt{3} = -3 + \sqrt{3}$$

نکته: اگر نمودار تابع به صورت $y = a \sin bn + c$ یا $y = a \cos bn + c$

باشد، برای بدست آوردن ضابطه تابع غنی یا فاش یا دامنه ها a, b, c و تشخیص

سنوسی و کسنوسی بودن تابع به صورت زیر عمل می کنیم:

(۱) اگر معده y از $\max$ یا $\min$ نمودار عبور کند، تابع کسنوسی است در غیر این صورت سنوسی است.

(۲) با جمع و کم کردن روابط گفته شده برای مقادیر $\max$ و $\min$ داریم ..

$$y_{\max} = |a| + c \quad \Rightarrow \quad y_{\max} + y_{\min} = 2c \Rightarrow c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$$

$$y_{\min} = -|a| + c$$

$$\Rightarrow y_{\max} - y_{\min} = 2|a| \Rightarrow |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$$

(۳) برای یافتن b از دوره شتاب یک می گیریم $(T = \frac{2\pi}{|b|})$

(۴) برای تشخیص علامت a و b این گونه عمل می کنیم:

الف- در توابع سنوسی اگر نمودار بعد $x=0$ روند صعودی داشته باشد، a و b هم علامت

هستند غنی: $a \times b > 0$

و اگر نمودار عبور $n=0$ روند نزولی داشته باشد، a و b هر دو هم علامت اند غنی: $a \times b < 0$

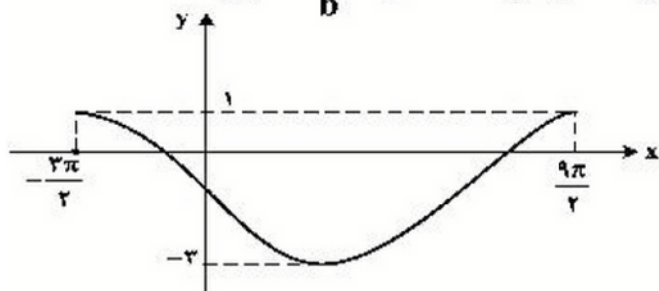
ب. در توابع گسسته اگر نمودار، ردی در y ها، ماکزیمم داشته باشد $a > 0$ است

و اگر مینیمم داشته باشد $a < 0$ است.

با توجه به رابطه $\cos(-x) = \cos x$ ، b می تواند مثبت یا منفی باشد.

مثال: گسسته سری ۹۹ بچری :

شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟



(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) -۴

(۴) -۶

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{12\pi}{2} = 6\pi \Rightarrow 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$|a| = \frac{1 - (-3)}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

چون عبور $n=0$ بهنج نزول است پس $a < 0$ و در حالت داریم :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} : \frac{a}{b} = \frac{-2}{\frac{1}{3}} = -6$$

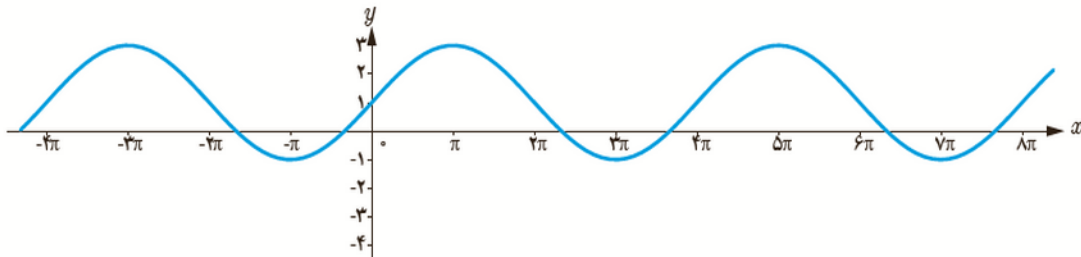
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} : \frac{a}{b} = \frac{2}{-\frac{1}{3}} = -6$$

گزینه ۴

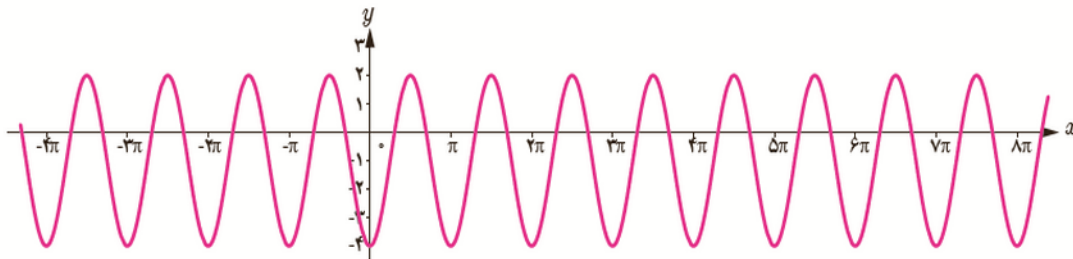
مثال: ضابطه تویج زیر به صورت $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ است.

ضابطه آینه را مشخص کنید.

الف)



ب)



تویج سینوسی است $T = 4\pi \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{4}$

$$|a| = \frac{3 - (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad c = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

بعد $x=0$ تویج رو به صورتی داریم پس $a > 0$:

ضابطه تویج: $y = 2 \sin \frac{1}{4}x + 1$ و $y = -2 \sin(-\frac{1}{4}x) + 1$

ب) $T = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$

تویج کسینوس

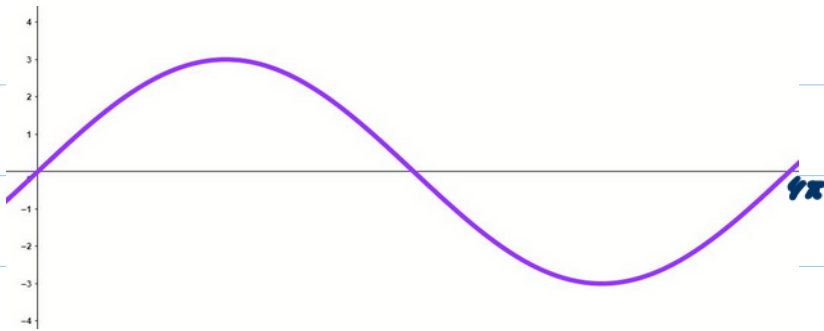
$$|a| = \frac{3 - (-2)}{2} = \frac{5}{2} = 2.5, \quad c = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

چون معرر و هاز $\min$ ندریس $a < 0$ یعنی ۳- است:

$$y = -3 \cos(2x) - 1 \quad \text{یا} \quad y = -3 \cos(2x) - 1$$

مثال: شکل زیر سوار تابع $f(x) = a \sin bx$ است. مقدار ab کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi |b| = 2\pi \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$|a| = \frac{3 - (-3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

هزار $n=0$ رند تابع معرر است $a > 0$ است:

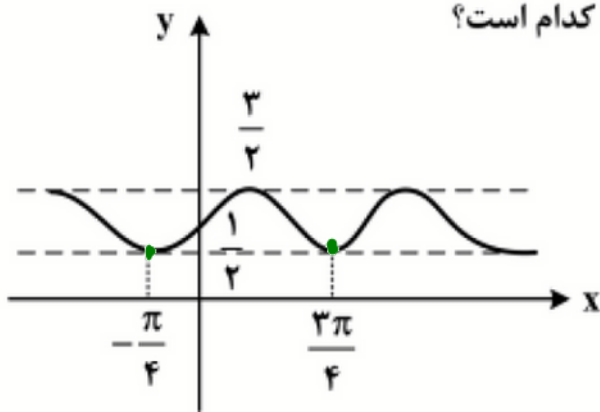
$$a = 3, b = \frac{1}{2} \Rightarrow ab = 3 \times \frac{1}{2} = 1.5$$

$$a = -3, b = -\frac{1}{2} \Rightarrow ab = -3 \times (-\frac{1}{2}) = 1.5$$

گزینه ۱

مثال: کنکور سراسری ۹۸ ریاضی:

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. کدام $a + b$ است؟



(۱) ۱

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۴) ۳

معرف دوره تناوب ضرب مزدوج Sin

$$y = 1 + a \sin bx \cos bx = 1 + \frac{1}{2} a \sin 2bx$$

$$T = \frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{4\pi}{4} = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow \pi |b| = \pi \Rightarrow |b| = 1$$

$$|\frac{1}{2}a| = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

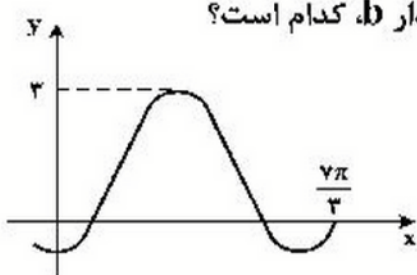
هذا از $n=0$ ریشه تابع صفر است پس $a > 0$ است:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad a+b=2, \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \quad a+b=-2$$

گزین ۳

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجرب

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(\frac{\pi}{4} + x)$ است. مقدار b ، کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۲

$$y = a + b \sin\left(\frac{x}{r} + \alpha\right) = a + b \cos \alpha$$

$$y_{\max} = 3 = |b| + a$$

چون محورها از min خبر برده است پس $b < 0$: (1) $a - b = 3$

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{r}}, 0\right) \xrightarrow{\text{ریشه}} 0 = a + b \cos \sqrt{\frac{\pi}{r}} \Rightarrow 0 = a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{r}\right)$$

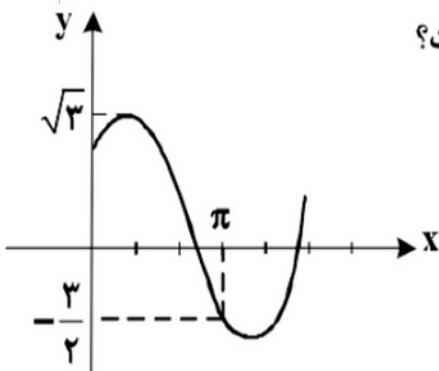
$$\Rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{r} \Rightarrow 0 = a + b \times \frac{1}{r} \Rightarrow a + \frac{b}{r} = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ a + \frac{b}{r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{r} = -3 \xrightarrow{\times \frac{r}{r}} b = -3r$$

$$\Rightarrow b = -2 \quad \text{نیز}$$

مثال: نمودار سری ۹۸ توی:

شکل روبه رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. b کدام است؟



$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$y_{\max} = |b| + a \Rightarrow |b| + a = \sqrt{4}$$

چون تابع معبار $n=0$ در نزد محور داریم b با یک (ضرب n) هم‌علامت و مثبت است:

$$a+b=\sqrt{3} \quad (1)$$

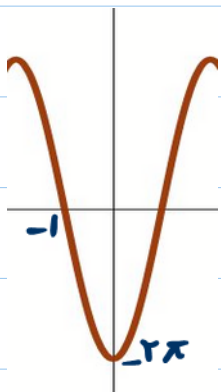
$$\left(\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \xrightarrow{\text{نقطه}} -\frac{\sqrt{3}}{2} = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow b + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3} \quad \text{گزینه ۳}$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = a \cos x$ به صورت زیر است. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟



$$-\sqrt{2}\pi \quad (4) \quad \sqrt{2}\pi \quad (3) \quad -\sqrt{2}\pi \quad (2) \quad \sqrt{2}\pi \quad (1)$$

$$y_{\min} = -|a| + 0 = -2\pi \Rightarrow |a| = 2\pi$$

چون محور y ما از $\min$ خبر گرفته پس $a < 0$ است:

$$\Rightarrow -a = 2\pi \Rightarrow a = -2\pi$$

چون $f(-1) = 0$ پس :

$$a = -2\pi \cos(-b) \Rightarrow \cos(-b) = 0 \Rightarrow -b = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$$

ادرس نقطه‌ای که تابع $\cos$ صفر از $n=0$ برابر $\frac{\pi}{2}$ شود است.

$$f(x) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} = -2\pi \times \sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}\pi$$

گزینه ۲

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس اول: تناوب و تانژانت

قسمت سوم: تانژانت

جلسه سوم: صفحات ۲۹ تا ۳۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تأثیرات در دایره مثلثاتی :

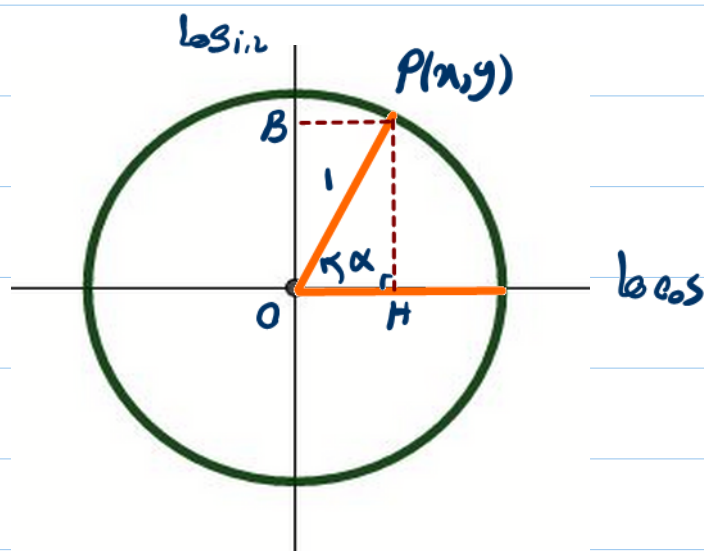
یادآوری : دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ مختصات است.

ضلع ابتدای هر زاویه در دایره مثلثاتی، بر قسمت مثبت محور x ها واقع است.

اگر اندازه زاویه $\alpha > 0$ باشد به اندازه α در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

دوران می‌کنیم و اگر $\alpha < 0$ باشد به اندازه α در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخیم.

اگر ضلع انتهایی زاویه محیط دایره را در نقطه $P(x, y)$ قطع کند داریم :



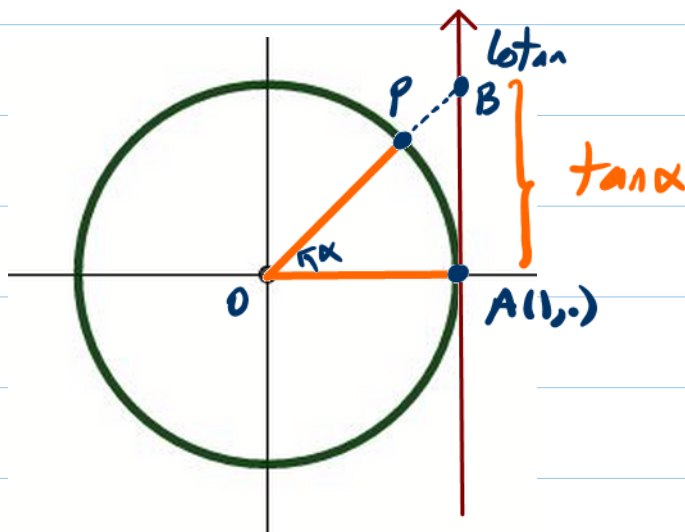
$$\triangle OHP : \sin \alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{PH}{1} \Rightarrow \sin \alpha = PH = BO \Rightarrow y_p = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{OH}{1} \Rightarrow \cos \alpha = OH \Rightarrow x_p = \cos \alpha$$

معدّر تانژانت ها را مولزی معدّر سینوس ها و کسینوس ها بر دایره ارتفاع $A(1,0)$

در نظری بگیریم. بعد از این معدّر $A(1,0)$ است و جهت مثبت آن مانند محور سینوس ها است.

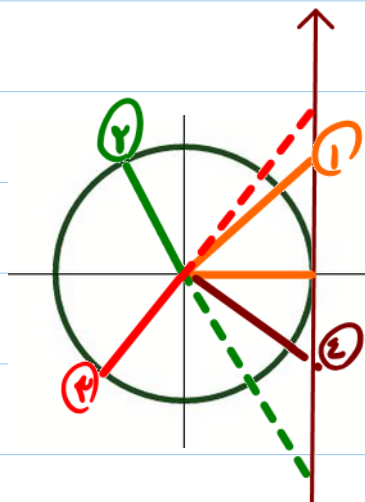
یعنی بالای A تانژانت مثبت و پائین A تانژانت منفی است.



اگر شعاع OP را امتداد دهیم، محور تانژانت ها در B قطع می کند.

$$\triangle OAB : \tan \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} \Rightarrow \tan \alpha = AB$$

توجه: علامت تانژانت در نواحی چهارگانه به صورت زیر است:

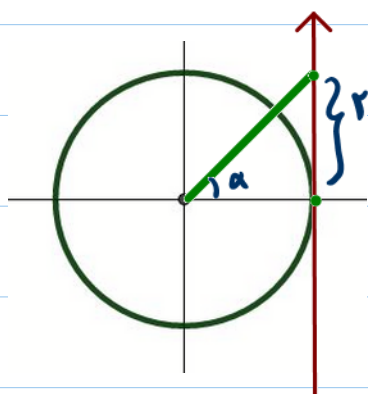


	اول	دوم	سوم	چهارم
$\tan$	+	-	+	-

نکته: در زاویه های $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و بجز یکی در مقابل و در $\frac{\pi}{4}$ ، هر دو مقدار را مقدار

دهم بعد از آن است هارا قطع نمی کند. در این زاویه ها تاثرات تعریف نشده است.

مثال: در شکل زیر $\cos \alpha$ کدام است؟

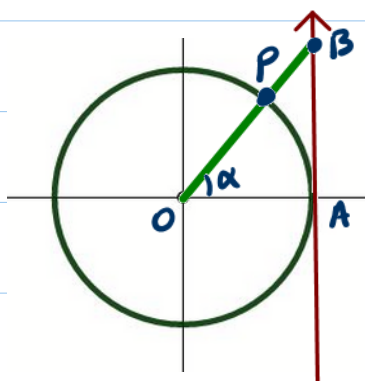


۱۱ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۱۲ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۱۳ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ۱۴ $\frac{\sqrt{5}}{10}$

$$\tan \alpha = 2, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{مثبت}} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{گزینه ۲}$$

مثال: با توجه به دایره شش ضلعی منتظم، اگر $P(2a-1, a)$ باشد، مساحت مثلث AOB چقدر است؟



۱۱ $\frac{2}{3}$ ۱۲ $\frac{5}{4}$ ۱۳ $\frac{2}{8}$ ۱۴ $\frac{1}{2}$

$$x_P = 2a - 1 = \cos \alpha$$

$$y_P = a = \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow a^2 + (2a-1)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 4a^2 - 4a + 1 - 1 = 0$$

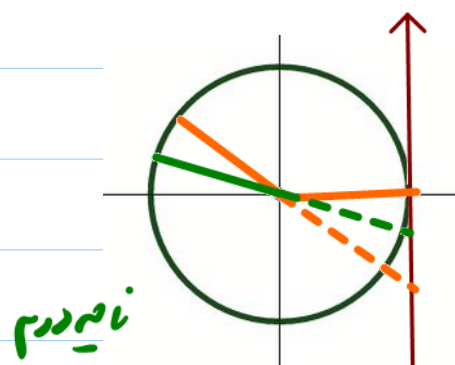
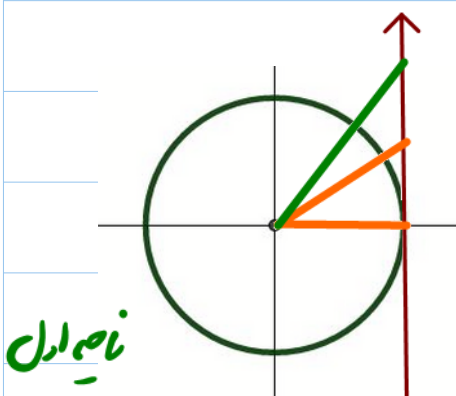
$$5a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(5a-4) = 0 \begin{cases} a=0 & \text{غیر ممکن} \\ 5a-4=0 \rightarrow a = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3} = AB$$

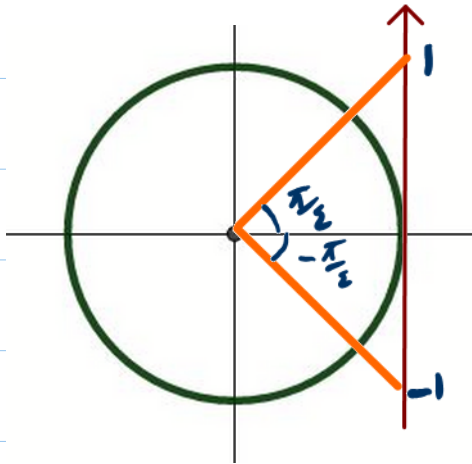
$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times AB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{گزینه ۲}$$

نکته: در تمامی نواحی چهارگانه با افزایش زاویه، مقدار آنژانت هم افزایش می‌یابد.



برای نواحی سوم و چهارم به صورت مشابه عمل کنید.

مثال: اگر $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ و $\tan \alpha = \frac{r_m - r}{\delta}$ باشد، محدوده m را بیابید.



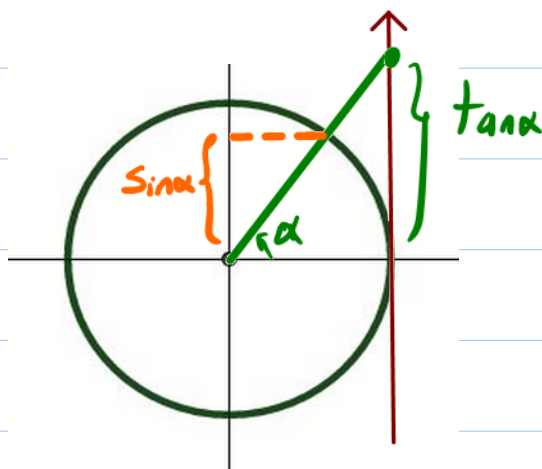
$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-1 \leq \tan \alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{r_m - r}{\delta} \leq 1 \quad \times \delta \Rightarrow -\delta \leq r_m - r \leq \delta$$

$$\overset{+r}{\Rightarrow} -1 \leq r_m \leq 1 \quad \div r \Rightarrow -1 \leq m \leq 1$$

نکته: بار شماره از دایره بیشتر می‌توان گفت: $|\sin \alpha| < |\tan \alpha|$



تابع تانژانت

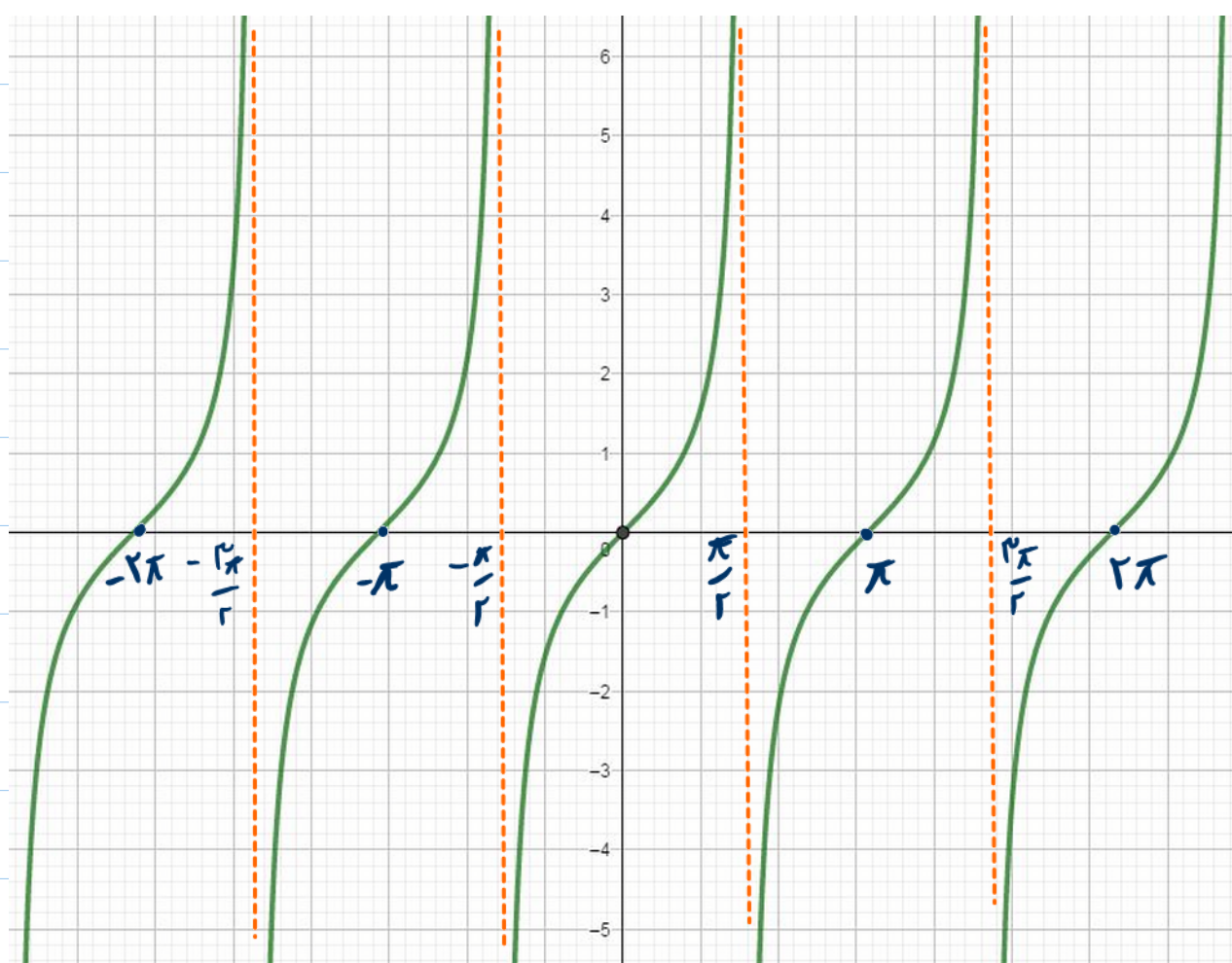
اگر x عددی حقیقی باشد و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، تابعی که به عدد x تانژانت آن را نسبت

$$x \neq (k+1)\frac{\pi}{2}$$



ی دهد تابع تانژانت نامیده می شود.

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \tan x$ با دنبال کردن روی داده مشخصات زیر به نمودار زیر رسم:



پس درباره تابع $f(x) = \tan x$ می‌توان گفت:

۱- $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

۲- $R_f = \mathbb{R}$

۳- تابع تناظر است، نامرشد است و $T = \pi$

۴- تابع تناظر است گویا است ولی درباره‌های که در آن ترف می‌شود یعنی بازه‌هایی

که شامل $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ها نباشد، اکیداً صعودی است.

تذکر: دوره‌شمار تابع $y = a \tan(bx + c) + d$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2})$ می‌تواند؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} \quad (1) \quad x \neq k \quad (2) \quad x \neq 2k+1 \quad (3) \quad x \neq 2k \quad (4) \quad \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi$$

$$\times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq k\pi \times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq 2k$$

گزینه ۴

مثال: اگر $f(x) = \tan x - \frac{1}{\tan x}$ ، دوره شادب-تج $\frac{1}{f}$ ، را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x}$$

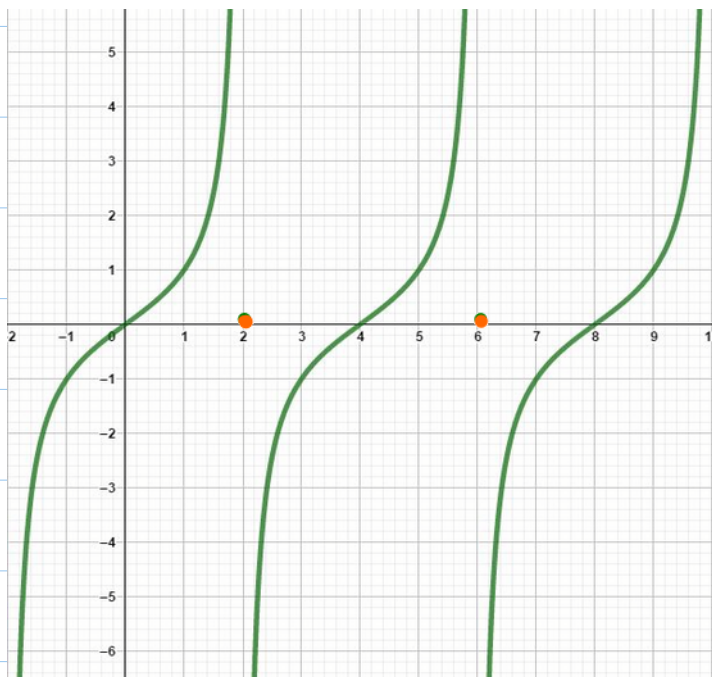
$$= -2 \cot 2x = -\frac{2}{\tan 2x}$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{2} \tan 2x \Rightarrow T_{\frac{1}{f}} = \frac{\pi}{2}$$

مثال: تج f با ضابطه $f(x) = \tan(\frac{\pi}{4}x)$ و دامنه $(2, 8)$ روی دایره نشان دهید.

حد اکثر مقدار a کدام است؟ 11 12 13 14

باید طول تمام نقاط بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم یا در $\frac{\pi}{4}$ ضرب شود:



حد اکثر مقدار برای a به جابجایی

تج در دایره $(2, 8)$ ایده آلودی

بسته 4 است پس نرینه 3 رت است.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت اول: معادلات سینوسی و کسینوسی

جلسه چهارم: صفحات ۳۵ تا ۴۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

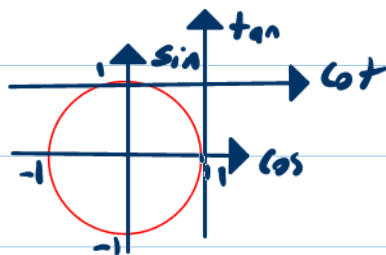
اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری:

۱۱ جدول ششای ششای زوای معروف:

	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	∞	۰	∞	۰
cot	∞	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰	∞	۰	∞



۱۲ جدول علامت ششای ششای:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

۱۳ ششای ششای زاویه (-α)

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

۴) دوزادیه متمم: α, β متمم اند. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ 90°

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \sin \beta = \cos \alpha$$

$$\tan \alpha = \cot \beta, \quad \tan \beta = \cot \alpha$$

مثال: $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵) نسبت های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$ $k \in \mathbb{Z}$

۱) اگر ضرب π طوری زوج باشد آنگاه از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می کنیم.

$$\sin(2k\pi \pm \alpha) = \sin(\pm \alpha)$$

$$\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos(\pm \alpha)$$

۲) اگر ضرب π طوری فرد باشد آنگاه از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می کنیم اما نسبت مثلثاتی را قیاس می کنیم.

$$\sin((2k+1)\pi \pm \alpha) = -\sin(\pm \alpha)$$

$$\cos((2k+1)\pi \pm \alpha) = -\cos(\pm \alpha)$$

۳) ضرب π چه زوج و چه فرد باشد آنگاه از کمان های $\tan$ و $\cot$ حذف می کنیم.

$$\tan(k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm \alpha)$$

$$\cot(k\pi \pm \alpha) = \cot(\pm \alpha)$$

مغرب وز $\frac{\pi}{2}$
 ۶) نسبت های مثلثاتی $((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$

همیشه فرض می کنیم α حاده است و ناحیه ای که زاویه $((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ در آن

است را مشخص می کنیم و علامت نسبت را مشخص می رهم. حال مغرب وز

$\frac{\pi}{2}$ را حذف کرده و اسم نسبت را به صورت زیر بخیر می رهم

$\sin \rightsquigarrow \cos$, $\cos \rightsquigarrow \sin$, $\tan \rightsquigarrow \cot$, $\cot \rightsquigarrow \tan$

$$\sin((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \sin \text{us} \cos \alpha$$

$$\cos((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos \text{us} \sin \alpha$$

$$\tan((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \tan \text{us} \cot \alpha$$

$$\cot((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cot \text{us} \tan \alpha$$

مثال: بسترهای مثلثاتی زیر را بحسب α بنویسید.

وز
 ۱) $\sin(185\pi - \alpha) = \overbrace{-\sin}^{-\sin \alpha}(-\alpha) = \sin \alpha$

وز
 ۲) $\cos(33\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

ز.و.
 ۳) $\cos(24\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$

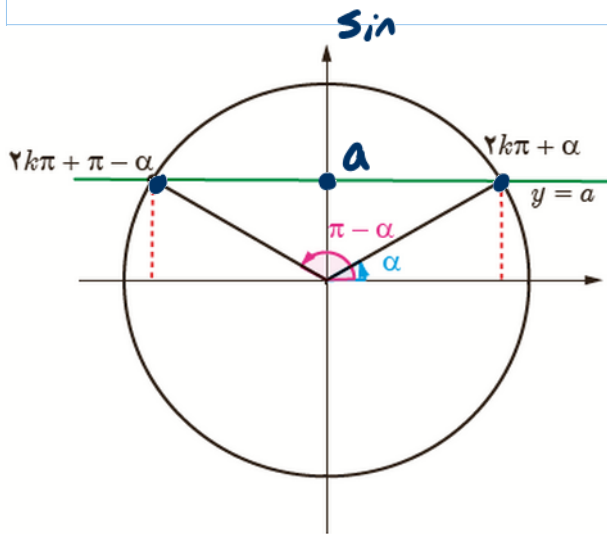
مغرب وز $\frac{\pi}{2}$
 ۴) $\sin(\frac{20\pi}{2} + \alpha) = \sin(\frac{24\pi + \pi}{2} + \alpha) = \sin(12\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha) = + \cos \alpha$

معادله سینوسی

به معادلاتی که مجهول در کنار سینوس قرار می گیرد، معادله سینوسی می گویند.

روش شعوری حل معادله $\sin \alpha = a$:

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$



روی دایره $\sin$ مقدار a را مشخص و از این

نقطه خطی بر دایره $\sin$ عمودی کنیم تا دایره

سینوسی را قطع کند. نقطه برخورد همان جواب

مورد نظر است. البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی α ، جواب کلی معادله است.

نتیجه :

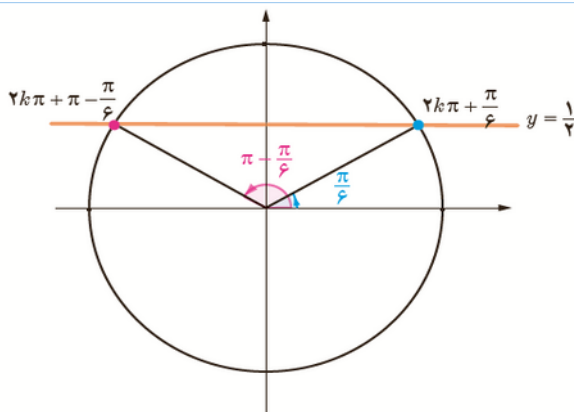
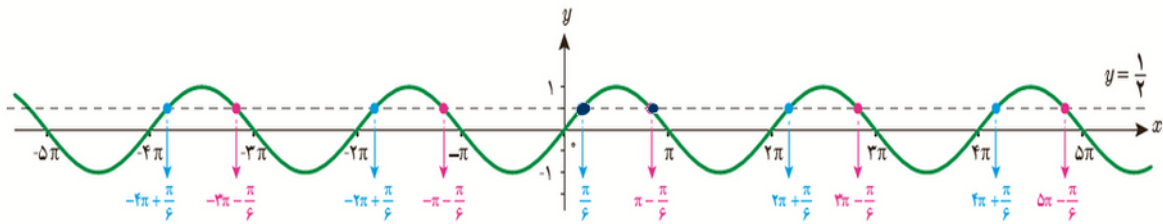
$$\sin \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \alpha \\ \alpha = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{قسم}} \sin 0 = \sin 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2k\pi + 0 \\ 0 = 2k\pi + (\pi - 0) \end{cases}$$

نکته مهم : اگر معادله به صورت استاندارد گفته شده بود، باید از روابط این سه تایی استفاده کرد.

عبارت و در صورت لزوم تغییر متغیر استفاده کرده و به شکل $\sin \alpha = \sin \alpha$ یا $\cos \alpha = \cos \alpha$ برسیم.

مثال: چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید.



$$\sin x = \frac{1}{4} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

ب) $4 \sin x + \sqrt{11} = 0$

الف) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

الف) $2 \sin x = \sqrt{3} \xrightarrow{\div 2} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$

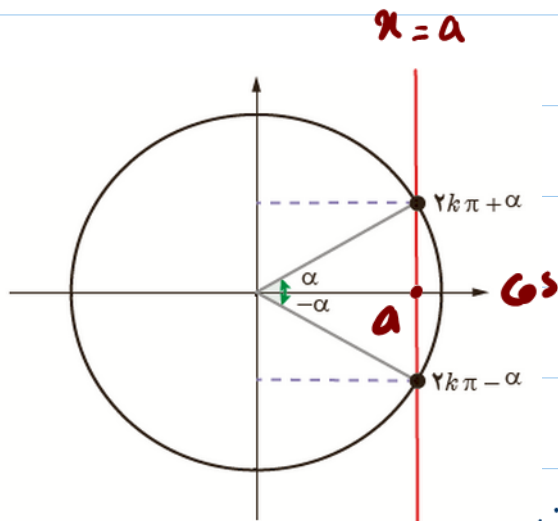
$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ب) $4 \sin x = -\sqrt{11} \xrightarrow{\div 4} \sin x = -\frac{\sqrt{11}}{4} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = \sin(-\frac{\pi}{4})$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{4}) = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

روش شعری حل معادله $\cos x = a$:



روی محور $\cos$ مقدار a را انتخاب و از این نقطه

خطی بر محور $\cos$ عمودی کنیم تا دایره مشتق

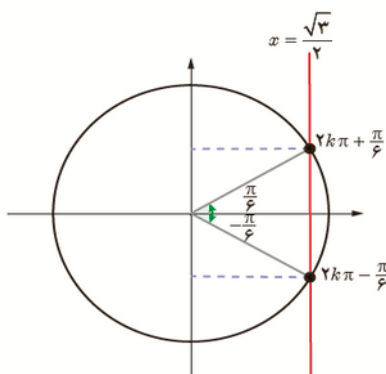
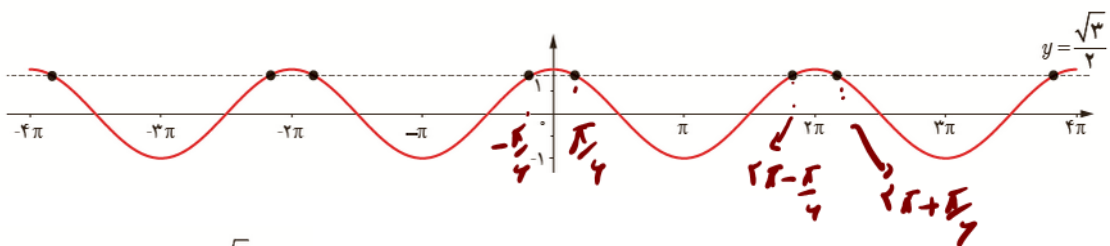
را قطع کند. نقطه برخورد a با جواب مدرج خواهد بود.

نتیجه:

$$\cos x = \cos a \Rightarrow x = 2k\pi \pm a$$

مثلاً $\cos 0 = \cos \square \Rightarrow 0 = 2k\pi \pm \square$

مثال: چند زاویه که مقدار کسین آنها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است مثال بزنید.



$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{جواب عمومی (مکملی)}$$

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{3}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

$$\cos x = \frac{1}{3} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

k	-1	0
x	$-2\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{3}$

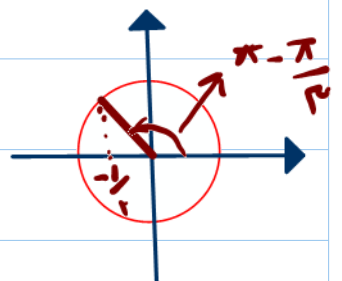
مثال: معادله مثلثاتی $2\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$$

$$\Delta = 81 - (4 \times 2 \times (-5)) = 81 + 40 = 121$$

$$\cos x = \frac{9 \pm 11}{4} \begin{cases} \frac{9+11}{4} = 5 \quad \times \\ \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2} \quad \checkmark \end{cases} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

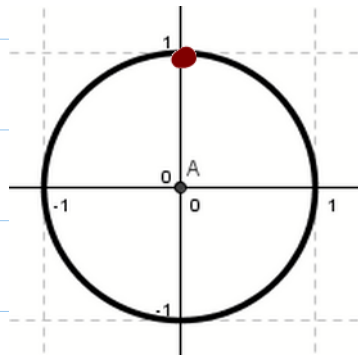
$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$



$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

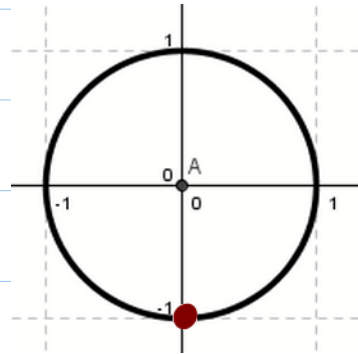
مقادیر خاص :

$$\sin \alpha = 1$$



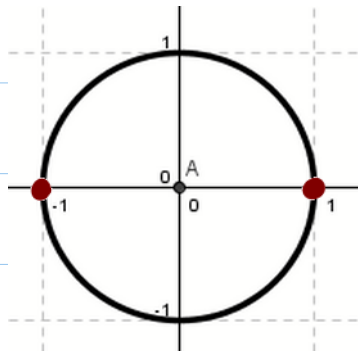
$$\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha = -1$$



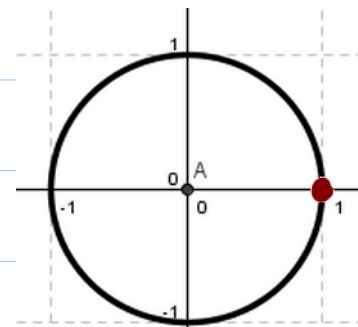
$$\alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha = 0$$



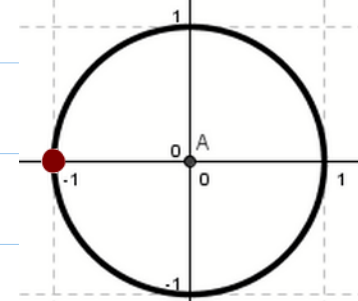
$$\alpha = k\pi$$

$$\cos \alpha = 1$$



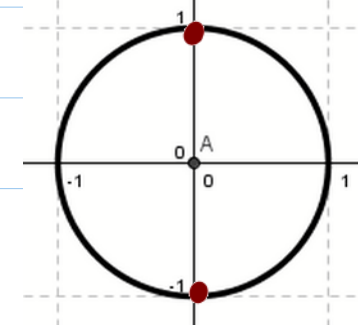
$$\alpha = 2k\pi$$

$$\cos \alpha = -1$$



$$\alpha = (2k+1)\pi$$

$$\cos \alpha = 0$$



$$\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

الف) $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 3x \rightarrow 1 = \sin 3x$ **حالت خاص**

$$3x = 3k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 3} x = \frac{3k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (2\cos x - 1) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

پ) $\cos x = \cos 3x$

$$3x = 2k\pi \pm x$$

$$3x = 2k\pi + x \rightarrow x = k\pi$$

$$3x = 2k\pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{ت) } \cos^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \rightarrow 1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$-2 \sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0 \quad \Delta = 9 - (4 \times (-2)(2)) = 9 + 16 = 25$$

$$\sin x = \frac{2 \pm 5}{-2} \begin{cases} \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \times -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -\frac{7}{-2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \quad \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{ث) } \cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{4} = 0$$

$$-\sin^2 x - \sin x + \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - (4 \times (-1)(\frac{3}{4})) = 1 + 3 = 4$$

$$\sin x = \frac{1 \pm 2}{-2} \begin{cases} \frac{3}{-2} \times -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{ج) } \sin x - \cos^2 x = 0$$

$$\sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - (4 \times 2 \times (-1)) = 1 + 8 = 9$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \\ -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

مثال: معادله ی مثلثاتی $2\sin x + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ را حل کنید.

$$2\sin x = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \xrightarrow{:\sqrt{2}} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال: جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

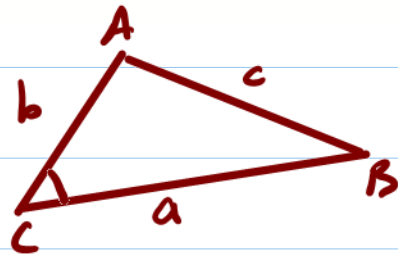
$$2\sin x \cos x = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin 2x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{:\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{:\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۲ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

$$S = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \hat{C}$$



$$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \hat{C} \rightarrow 3 = 6 \sin \hat{C}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{\pi}{6} \checkmark \\ \hat{C} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{5\pi}{6} \checkmark \end{cases}$$

دو مثلث

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: مثلثات

درس دوم: معادلات مثلثاتی

قسمت دوم: معادلات تانژانتی و رابطه

تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه

جلسه پنجم: صفحات ۴۱ تا ۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

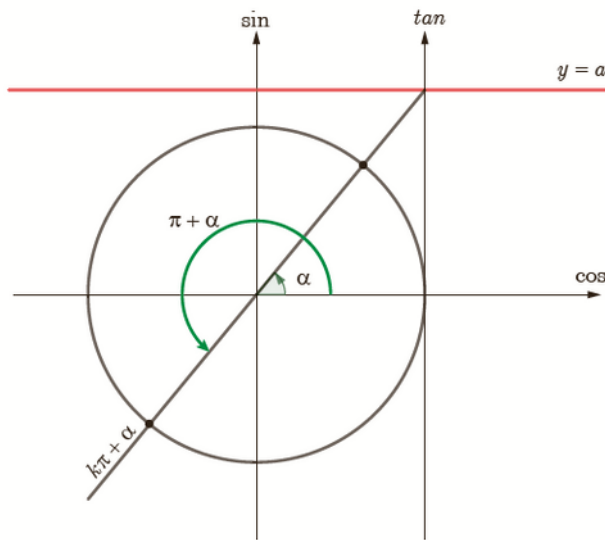
اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

روش شعری حل معادله $\tan x = a$



روی محور $\tan$ مقدار a را مشخص می‌کنیم.

x های که اندازشان به a برخورد می‌کند

جواب معادله هستند.

برای حل معادله $\tan x = a$ ابتدا زاویه‌ی راجع به اینکه تاثر انت‌گون برابر a شود.

اگر گون زاویه α باشد، بر یافتن جواب‌های کلی این معادله داریم:

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

مثال: جواب‌های صحیح معادلات زیر را بدست آورید.

$$1) \tan x = -1 \Rightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$2) \tan^2 x = \tan^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \Rightarrow x = k\pi$$

$$3) \tan x - \cot x = 0 \Rightarrow \tan x - \frac{1}{\tan x} = 0 \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 1}{\tan x} = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2 u - 2 = 0 \Rightarrow \tan^2 u = 2 \Rightarrow \tan u = \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan u = \tan\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow u = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

نکته مهم: از آنجایی که دایره از آنجایی منحرف شده است، باید جواب درست

گرفته را در دایره چک کرد. همچنین در حل دایره از مشتق گیری و درستی

هم باید به دانه توجه کرد.

مثال: جواب های دایره $\cos^2 u = 2 \cot u + \tan u$ در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید.

$$\text{نکته: } \cot u - \tan u = 2 \cot u$$

$$\cot u - \tan u + \tan u = \cos^2 u \rightarrow \cot u = \cos^2 u$$

$$\rightarrow \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{\cos^2 u}{1} \rightarrow \cos^2 u (\sin u) = \cos u$$

$$\rightarrow \cos^2 u (\sin u) - \cos u = 0 \rightarrow \cos u (\sin u (\cos u - 1)) = 0$$

$$\cos u = 0 \rightarrow u = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{در این زمان } \tan \text{ تعریف نمی شود}$$

$$\sin u (\cos u - 1) = 0 \rightarrow \frac{1}{4} \sin^2 u - 1 = 0 \rightarrow \frac{1}{4} \sin^2 u = 1 \rightarrow \sin^2 u = 4$$

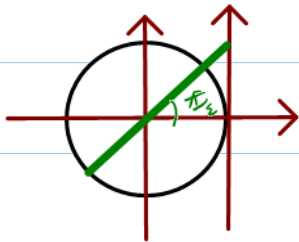
جواب ندارد $\sin u \in [-1, 1]$

پس در این جواب ندارد

مثال: معادله جواب های دارد $\sqrt{\sin u} = \sqrt{\cos u}$ را باید.

بر توان ۲
 $\Rightarrow \sin u = \cos u \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\cos u}{\cos u}$

$\Rightarrow \tan u = 1 \Rightarrow \tan u = \tan \frac{\pi}{4} \rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{4}$



معمای که در ربع سوم هستند نمی توانند جواب دارد باشند

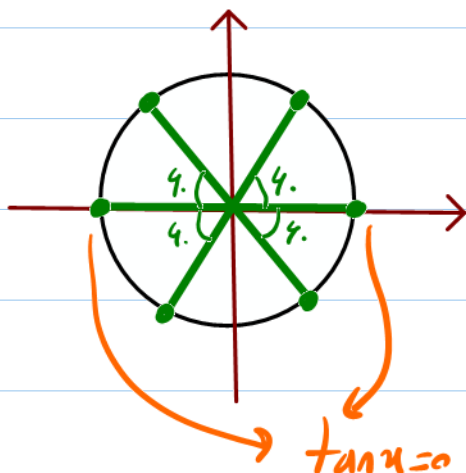
زیرا $\sin$ و $\cos$ در ربع سوم منفی هستند و زیر رادیکال نمی توانند منفی باشند.

$u = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$

مثال: جواب می دارد $\frac{\tan 2u + \tan u}{\tan u} = 1$ را باید.

$\tan 2u + \tan u = \tan u \Rightarrow \tan 2u = 0 \rightarrow 2u = k\pi$

$\Rightarrow u = \frac{k\pi}{2}$



در $\tan u, u = k\pi$ که در یو جابت، می باشد

پس باید ریشه را از جواب می که کرد:

$u = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

یادآوری :

سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان :

$$1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$2) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

نسبت های مثلثاتی (دو برابر کمان) (2α)

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

تangent مجموع و تفاضل دو کمان

$$1) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$2) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

(اثبات ۱)

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

صورت راسخ را بر مخرج تقسیم کنیم :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \square$$

رابطه ۲ به طریقی ثابت می شود.

مثال: $\tan 100^\circ$ و $\tan 10^\circ$ را بیابید.

$$\tan 100^\circ = \tan(90^\circ + 10^\circ) = \frac{\tan 90^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 90^\circ \tan 10^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

$$\tan 10^\circ = \tan(90^\circ - 80^\circ) = \frac{\tan 90^\circ - \tan 80^\circ}{1 + \tan 90^\circ \tan 80^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

مثال: مقدار جواب هر یک از معادلات $\tan 2x + \tan x + \sqrt{3} \tan 2x \tan x = \sqrt{3}$ را بیابید.

($0, \pi$) کدام است ؟ ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵ ۵

$$\tan \pi_n + \tan u = \sqrt{r} - \sqrt{r} \tan \pi_n \tan u$$

$$\tan \pi_n + \tan u = \sqrt{r} (1 - \tan \pi_n \tan u)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \pi_n + \tan u}{1 - \tan \pi_n \tan u} = \sqrt{r} \Rightarrow \tan(\pi_n + u) = \sqrt{r}$$

$$\Rightarrow \tan \varepsilon_n = \tan \frac{\pi}{r} \Rightarrow \varepsilon_n = k\pi + \frac{\pi}{r}$$

$$\Rightarrow u = \frac{k\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{1r}$$

k	0	1	2	3
u	$\frac{\pi}{1r}$ ✓	$\frac{\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{1r} = \frac{r\pi}{1r}$ ✓	$\frac{2\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{1r} = \frac{7\pi}{1r}$ ✓	$\frac{3\pi}{\varepsilon} + \frac{\pi}{1r} = \frac{10\pi}{1r}$

$$\begin{aligned} \tan \pi_n &= \tan 3 \times 1 \cdot \frac{\pi}{1r} \\ &= \tan \alpha \times \frac{5\pi}{r} = \tan \frac{5\pi}{r} \end{aligned}$$

توی این

جواب نزنه ۳ است.

تأثیرات دو برابر شدن :

$$\tan r\alpha = \frac{r \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan r\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{r \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \square \quad \text{نشان دهنده}$$

مثال: اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{4}$ و انتهای کمان x در ربع اول باشد، مقدار $\tan 2x$ را بیابید.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\frac{5}{16}} = \frac{16}{5} \rightarrow \tan^2 x = \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5}$$

$\sqrt{\Rightarrow} \tan x = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2 \times \frac{4}{\sqrt{5}}}{1 - \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}$

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{\frac{8}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{16}{5}} = \frac{\frac{8}{\sqrt{5}}}{-\frac{11}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \times \frac{5}{-11} = \frac{40}{-11\sqrt{5}} = -\frac{8\sqrt{5}}{11}$$

مثال: اگر $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{5}$ و $\tan x$ را بیابید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{2} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{2} \tan x}$$

$$= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan x = 5 - 5 \tan x \Rightarrow 6 \tan x = 4 \Rightarrow \tan x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \left(\frac{2}{3}\right)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4 \times 9}{3 \times 5} = \frac{12}{5}$$

مثال: معادله $\tan 2u = r \tan u$ را به ازای $(0, \frac{\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

$$\tan 2u = \frac{r \tan u}{1 - \tan^2 u} = r \tan u$$

$$\Rightarrow \frac{r \tan u}{1 - \tan^2 u} - r \tan u = 0 \Rightarrow \tan u \left(\frac{r}{1 - \tan^2 u} - r \right) = 0$$

$$\tan u = 0 \rightarrow u = \pi, 2\pi$$

$$\frac{r}{1 - \tan^2 u} - r = 0 \rightarrow \frac{r}{1 - \tan^2 u} = r \Rightarrow \frac{1 - \tan^2 u}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow 1 - \tan^2 u = \frac{1}{r} \rightarrow 1 - \frac{1}{r} = \tan^2 u \rightarrow \frac{1}{r} = \tan^2 u$$

$$\sqrt{} \rightarrow \tan u = \pm \frac{1}{\sqrt{r}} = \pm \frac{\sqrt{r}}{r} = \tan\left(\pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow u = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

k	0	1	2
u	$\frac{\pi}{4}$ ①	$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ (۲) $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (۳)	$2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ (۴) $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ (۵)

۷ جواب دارد.

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل سوم: حد

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت اول: یادآوری مفهوم حد و قضایای حد

جلسه اول

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

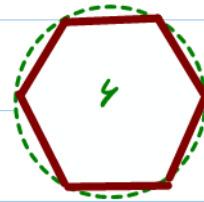
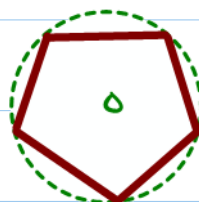
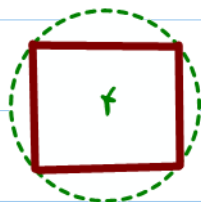
گروه ریاضی
استان همدان

قبل از اینکه تعریف دقیق حد یک تابع را بگیریم، لازم است با مفاهیم زیر آشنا شویم.

(۱) فزاینده‌ی:

- در شکل‌های زیر در هر مرحله یک ضلعی منتظم درون دایره قرار داریم. اگر n را زیاد کنیم

مساحت n ضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود.



...

پس می‌توانیم بگوییم مساحت چند ضلعی‌های داخلی را به همان اندازه که خود هم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه مقدار اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

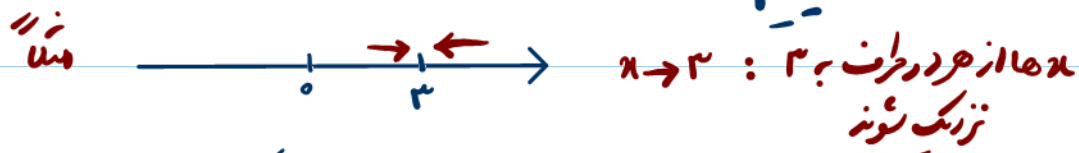
- دنباله $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ را در نظر بگیرید. اگر n خیلی بزرگ را بزرگ و بزرگتر کنیم، عبارت دنباله کوچکتر شده و به صفر نزدیک می‌شود.

مثال‌ها را بالا بنویسید ای از فزاینده‌های حدی هستند.

۱۲) میل کردن :

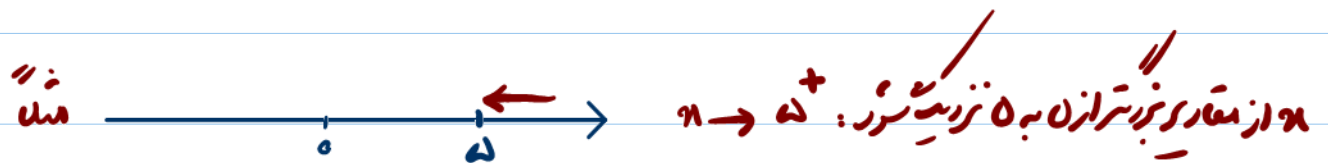
وقتی می‌گوئیم a به a میل می‌کند یعنی x بسیار به عدد a نزدیک می‌شود ولی هرگز

برابر عدد a نمی‌شود و می‌نویسیم $a \rightarrow x$.



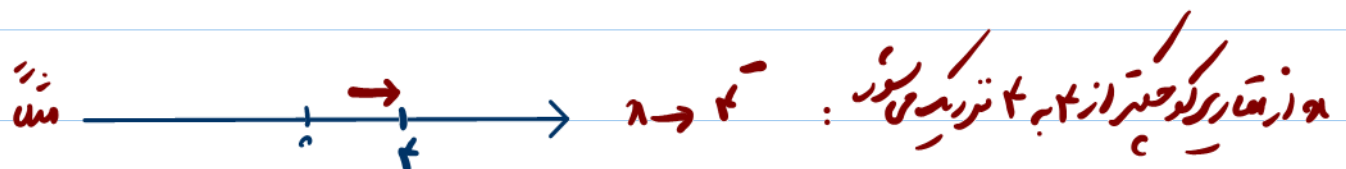
وقتی می‌نویسیم $a^+ \rightarrow x$ یعنی x از مقادیر بزرگتر از a ، به a بسیار نزدیک می‌شود. در این

حالت می‌گوئیم x از سمت راست به a میل می‌کند.



وقتی می‌نویسیم $a^- \rightarrow x$ یعنی x از مقادیر کوچکتر از a ، به a بسیار نزدیک می‌شود. در این

حالت می‌گوئیم x از سمت چپ به a میل می‌کند.



۱۳) همسانی :

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل a را یک همسانی می‌گوئیم.



یک‌هنگامی x_0 در (a, b)



مثال: بازه $(5, 8)$ یک‌هنگامی عدد ۶ است.

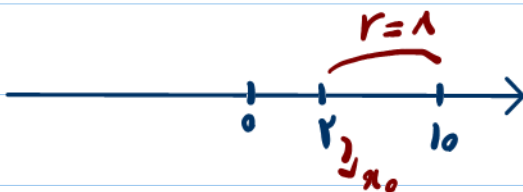
اگر عدد x_0 از همسایگی (a, b) حذف کنیم یعنی $(a, b) - \{x_0\}$ به مجموعه بدلت رسیده



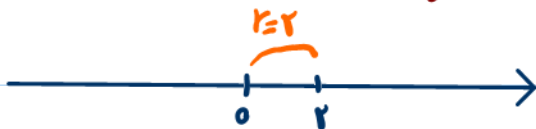
یک‌هنگامی معذوف x_0 می‌گیریم.

اگر $r > 0$ باشد بازه باز $(x_0 - r, x_0 + r)$ را یک‌هنگامی راست عدد x_0 و بازه باز

$(x_0 - r, x_0)$ را یک‌هنگامی چپ x_0 می‌گیریم.



مثال: $(1, 10)$ یک‌هنگامی راست ۲



$(0, 2)$ یک‌هنگامی چپ ۲

حال می‌توانیم تعریف حد را بیان کنیم.

تعریف حد تابع:

فرض کنید تابع $y = f(x)$ در یک‌هنگامی معذوف a تعریف شده باشد (یعنی در حوزه تعریف خود

یا نشود (مربع ندارد). می‌گوئیم حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر عدد L است هرگاه

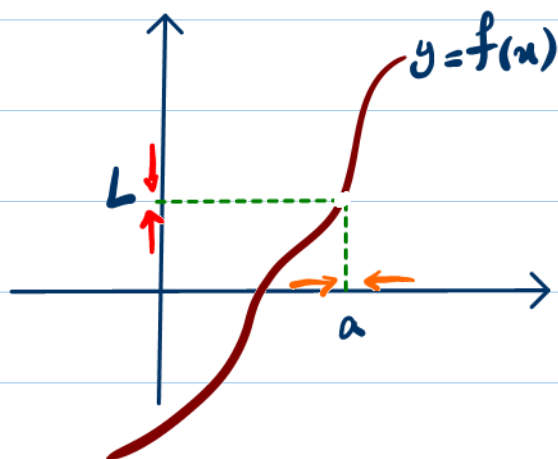
با نزدیک شدن x به a مقادیر تابع f (هنگامها) به L نزدیک شوند و این را می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

تعریف بالا را به این صورت هم می‌توان گفت:

حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ برابر L است هرگاه مقادیر تابع f (هنگامها) را به هر اندازه

را بخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود.



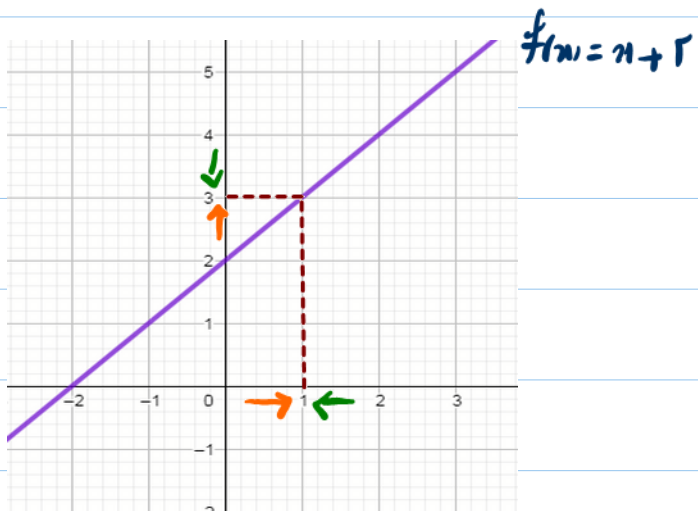
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

مثال: تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول و نمودار، حد تابع را وقتی $x \rightarrow 1$

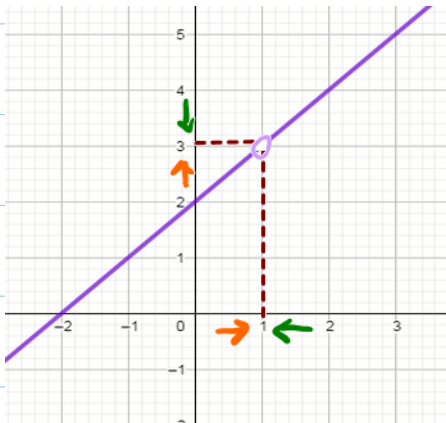
در دست آورید.

x	0	.0	.9	.99	$\rightarrow 1$	$\leftarrow 1.1$	1.1	1.0	1
$y = x + 2$	2	2.0	2.9	2.99	$\rightarrow 3$	$\leftarrow 3.1$	3.1	3.0	3

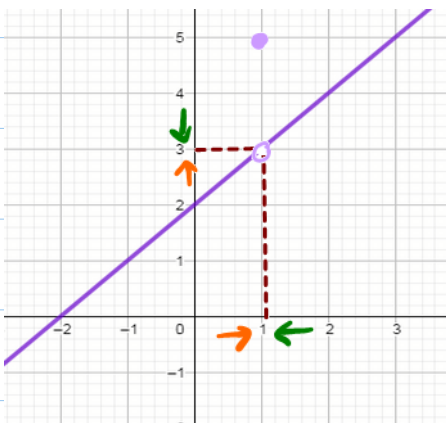
$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$$



در دو حالت زیر هم حد تابع در $x=1$ برابر 3 است.



$$g(x) = x + 2, \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$



$$h(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$

تعریف حد راست:

اگر تابع f در یک همگرایی راست a تعریف شده باشد و گوئیم حد راست تابع f در نقطه $a = x_0$

برابر L است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد،

به شرط آنکه x درست راست به قدر کافی به a نزدیک شود و می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

تعریف حد چپ:

اگر تابع f در یک همگرایی چپ a تعریف شده باشد و گوئیم حد چپ تابع f در نقطه $a = x_0$

برابر L است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد،

به شرط آنکه x درست چپ به قدر کافی به a نزدیک شود و می نویسیم:

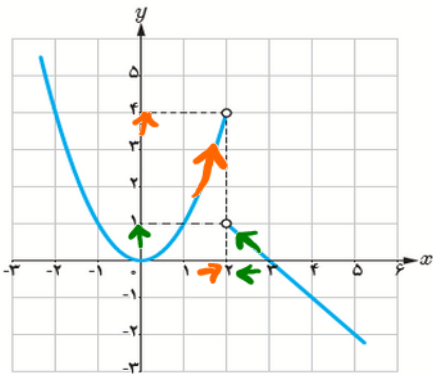
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

نکته: حد تابع f در $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد راست و چپ تابع در $x=a$

موجود و برابر باشند یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x > 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت روبه رو است :



آیا تابع f در نقطه $x=2$ حد دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$$

تابع در $x=2$ حد ندارد زیرا $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

مثال: با توجه به نمودار f ، حدهای خواسته شده را، در صورت وجود، به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 3$$

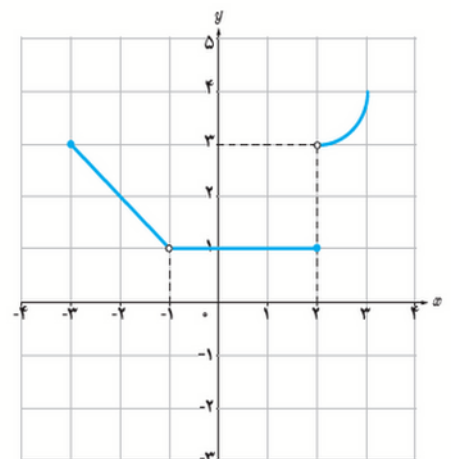
$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

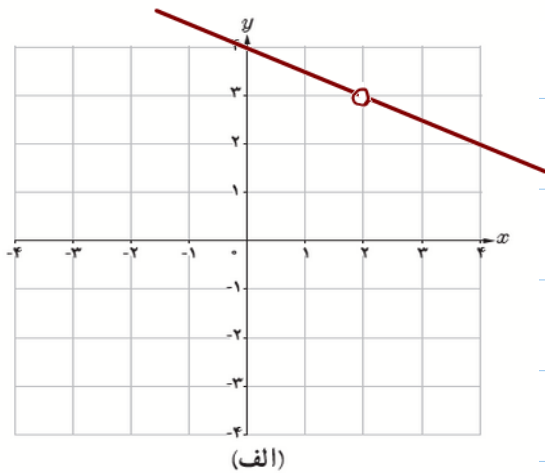
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$



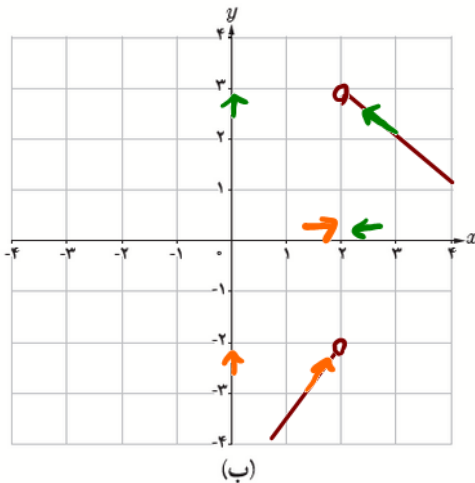
مثال: نموداری از یک تابع رسم کنید که:

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

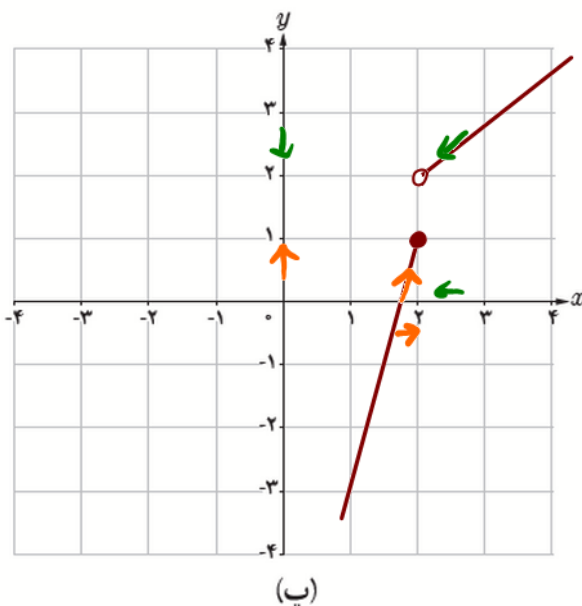
$$x \rightarrow 2^+$$

در $x=2$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$$

$$x \rightarrow 2^-$$

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

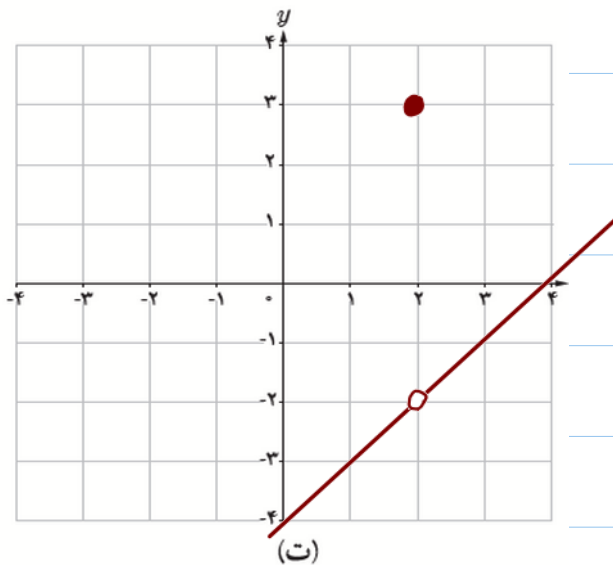
$$x \rightarrow 2^+$$

در $x=2$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$x \rightarrow 2^-$$

(ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



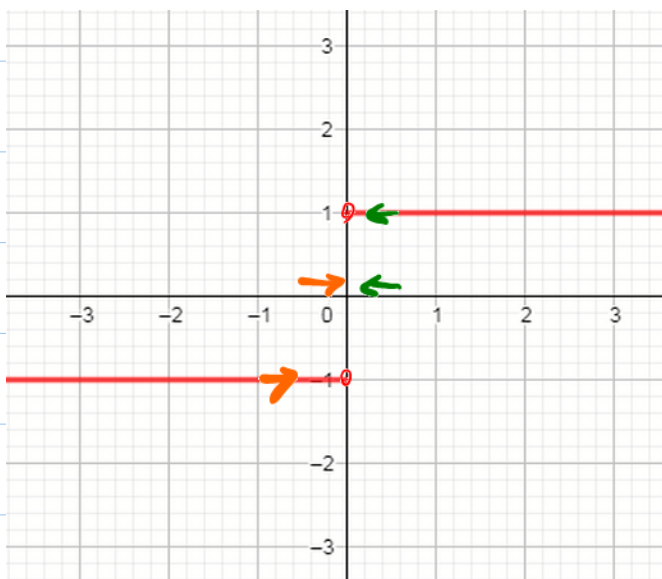
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$$

$$f(2) = 3$$

مثال: عدهای زیر را با اشاره از رسم نموداری بسنجید.

الف $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

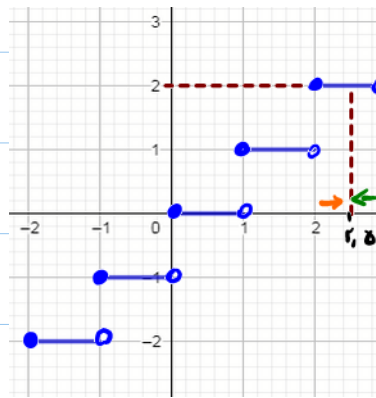


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

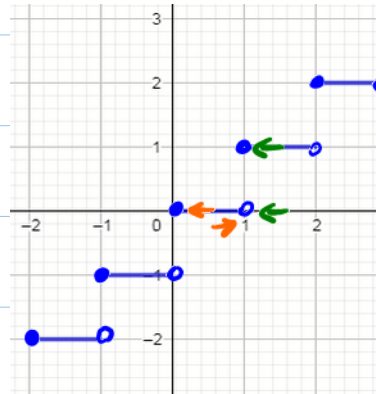
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

تابع در $x=0$ حد ندارد.

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} [x] = 2$



ب) $\lim_{x \rightarrow 1} [x] = \text{حد ندارد}$

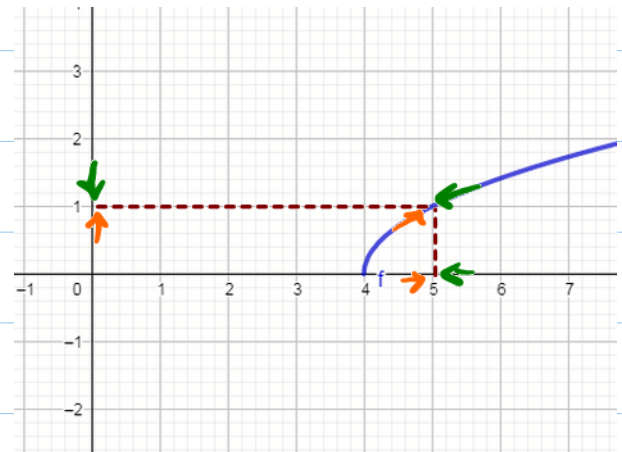


$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$

$x \rightarrow 1^-$

ث) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-4} = 1$

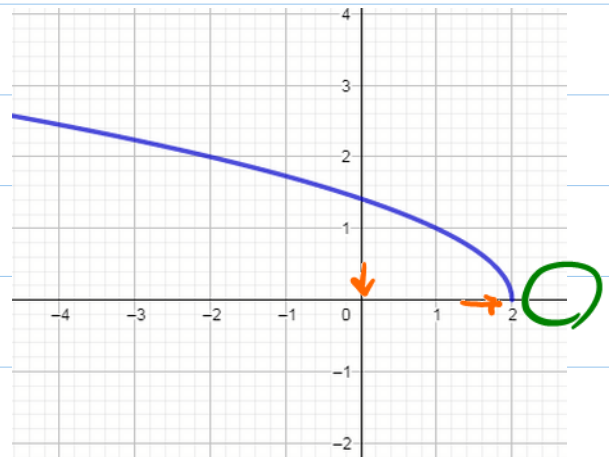


ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2-x} = \text{حد ندارد}$

تابع درجه یک است ۲ تعریف نشده است پس:
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2-x} = \text{محدود نیست}$

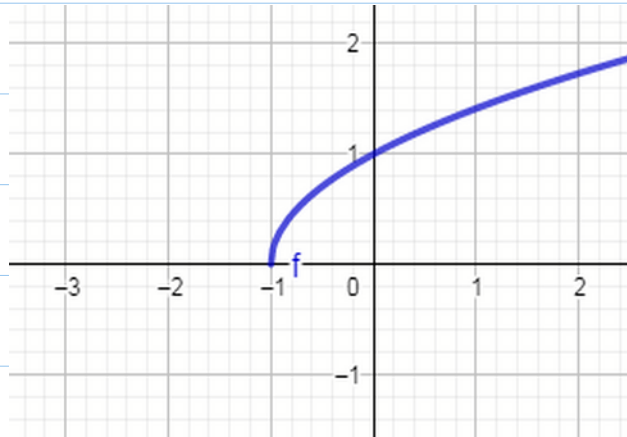
$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = 0$

$x \rightarrow 2^-$



ج. $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x+1} =$ حد ندارد

زیرا تابع در $x = -1$ تعریف نشده است.

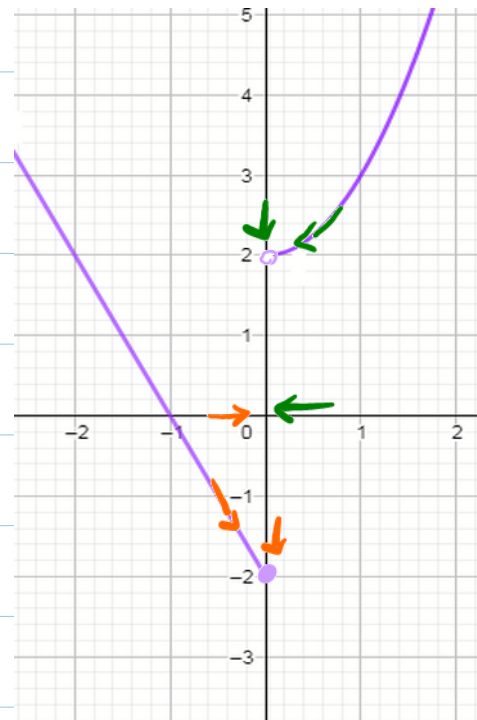


مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$

تابع در $x = 0$ حد ندارد.



برای محاسبه حد توابع از قنیه‌های زیر کمک می‌گیریم:

قنیه ۱) حد تابع ثابت $f(x) = c$ در هر عدد دلخواه a ، همان مقدار ثابت c است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

مثال $\lim_{x \rightarrow 5} 3 = 3$

قنیه ۲) حد تابع همانی $f(x) = x$ در هر عدد دلخواه a ، برابر a می‌شود یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

مثال $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

قنیه ۳) فرض کنید توابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

آنگاه

(الف) مجموع و تفاضل حاصل ضرب این دو تابع در $x = a$ حد دارند و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm \frac{1}{x} g(x)) = L_1 \pm \frac{1}{x} L_2$$

ب) اگر $L_2 \neq 0$ باشد، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در $x = a$ حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۲) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $c \in \mathbb{R}$ باشد آنگاه

مثال $\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 2 \times 2 = 4$

الف) $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cL$

مثال $\lim_{x \rightarrow 2} (x)^3 = 2^3 = 8$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = L^n$

قضیه ۵) اگر $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای باشد حد تابع در $x=a$ با مقدار تابع در a برابر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

قضیه ۶) اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$:

الف) اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همگرایی نقطه a تعریف شده باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \sin(f(x)) = \sin L$, $\lim_{x \rightarrow a} \cos(f(x)) = \cos L$

نتیجه: اگر تابع f در همگرایی a تعریف شده باشد و a بجای x در تابع $\sin$ یا $\cos$

حد در اشخاص برسم، مقدار حد سین و کسین خواهد شد، جز مواردی که به آن اشاره می‌کنم.

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (7g(x) - \frac{1}{2}f(x)) = 7 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 7 - 1 = 6$$

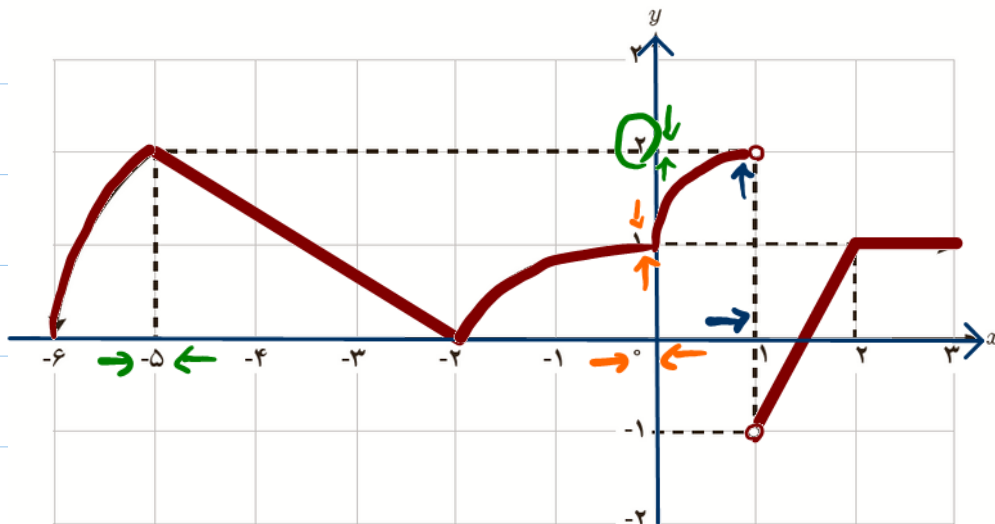
$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1 + f(x))g(x)}{g(x) + 2} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} 1 + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)) \lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) + \lim_{x \rightarrow 2} 2}$$

$$= \frac{(1 + 2) \times 1}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + \frac{2}{f(x)})^3 = (1 + \frac{2}{1})^3 = (1 + 2)^3 = 3^3 = 27$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{5x-1} + \frac{f(x)}{g(x)}) = \sqrt{5 \times 2 - 1} + \frac{2}{1} = \sqrt{9} + 2 = 3 + 2 = 5$$

مثال: نمودار تابع f داده شده است. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید:



$$1) \lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{x}{5} - 1\right)^2 \times f(x) = \left(-\frac{5}{5} - 1\right)^2 \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = (-2)^2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}}{x^2 + f(x)} = \frac{\sqrt{4-0}}{0^2 + \lim_{x \rightarrow 0} f(x)} = \frac{2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x - (f(x))^2) = 1^2 + 1 - (\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x))^2 = 1 + 1 - (2)^2 = 2 - 4 = -2$$

مثال: حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (2x^4 - x^3 - 5x^2 + 4) = 2(-1)^4 - (-1)^3 - 5(-1)^2 + 4$$

$$= 2 - (-1) - 5 + 4 = 2 + 1 - 5 + 4 = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 (x^2 - 6x) = \left(1 + \frac{4}{2}\right)^2 (4^2 - 6 \times 4) = 3^2 (16 - 24)$$

$$= 9(-8) = -72$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^0} (5x^3 - 6|x| + 1) = 5(1^3) - 6 \times 1 + 1 = 5 - 6 + 1 = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{\lambda x^r + r x^r + r x}{r x + 1} = \frac{\lambda \left(\frac{1}{r}\right)^r + r \left(\frac{1}{r}\right)^r + r \times \frac{1}{r}}{r \times \frac{1}{r} + 1} = \frac{\lambda \times \frac{1}{\lambda} + r \times \frac{1}{r} + 1}{r + 1}$$

$$= \frac{1 + 1 + 1}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{r}}{1 - \cos \frac{\pi}{r}} = \frac{1 + 1}{1 - 0} = \frac{r}{1} = r$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{r}} (r \sin x + \cos^r x) = r \sin\left(-\frac{\pi}{r}\right) + \cos^r\left(-\frac{\pi}{r}\right)$$

$$= -r \sin \frac{\pi}{r} + \cos^r \frac{\pi}{r} = -r \times \frac{1}{r} + \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^r$$

$$= -r + \frac{r}{r} = \frac{-r + r}{r} = \frac{-0}{r}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{0x - 9} = \sqrt{0 \times 0 - 9} = \sqrt{0 - 9} = \sqrt{-9} = r$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi \cos x}{x} = \frac{\pi \cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{\pi \cos \pi}{-\pi} = \frac{\pi \times (-1)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

موارد خاص :

۱) توابع چندضابطه‌ای : اگر حد تابع در نقطه‌ای که ضابطه تابع تغییری کند (نقطه‌ای)

خواسته شده باشد باید حد چپ و حد راست از ضابطه‌ها مربوط به آن می‌شوند.

مثال: حد تابع f را در نقطه a (در صورت وجود) بیابید

$$۱) f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ x - 2 & x < 0 \end{cases}, \quad a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

$0 \neq 0$ پس تابع در $x=0$ حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2) = 0 - 2 = -2$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} 5 & x < 3 \\ x + 2 & x > 3 \end{cases}, \quad a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

$5 = 5$ پس تابع در $x=3$ حد دارد

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$$

$$۳) f(x) = \begin{cases} ۳-x & x < ۲ \\ -۱ & x = ۲ \\ x^۲ - ۴ & x > ۲ \end{cases}, \quad a = ۲$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^+} (x^۲ - ۴) = ۲^۲ - ۴ = ۴ - ۴ = ۰$$

۱. $\neq ۰$ پس تابع در $x=۲$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} (۳ - x) = ۳ - ۲ = ۱$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} (a+۱)x + ۳ & x > -۲ \\ -۲x^۲ + ۱ & x < -۲ \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطه $x = -۲$ حد داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^+} (a+۱)x + ۳ = \widehat{(a+۱)(-۲)} + ۳ = -۲a - ۲ + ۳ = -۲a + ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow -۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^-} -۲x^۲ + ۱ = (-۲)(-۲)^۲ + ۱ = -۸ + ۱ = -۷$$

$$\lim_{x \rightarrow -۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^-} f(x) \Rightarrow -۲a + ۱ = -۷ \Rightarrow -۲a = -۸ \Rightarrow a = ۴$$

۱۲ حد توابع شامل رادیکال با فرض زوج :

در این توابع باید بررسی شود عبارت رادیکالی در همگی نقطه تعریف شده است یا خیر.

اگر تعریف شود مقدار تابع حد تابع خواهد بود اگر نه حد موجود نیست.

در این توابع هم برای نتایجی که رسم داخل رادیکال هستند حد چپ و راست را می‌نویسیم.

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{2x+4}$$

x	-2
$2x+4$	$- \quad 0 \quad +$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{2x+4} = \sqrt{2(2)+4} = \sqrt{8} = 2.828$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{2x+4} = \text{حد ندارد}$$

تابع در همگی چپ
-2 تعریف نمی‌شود

پس این حد موجود نیست.

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2+3x}$$

x	-0	0	$+0$
x^2+3x	$+$	0	$- \quad +$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+3x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2+3x} = \text{حد ندارد}$$

پس این حد موجود نیست.

$$۳) \lim_{n \rightarrow ۵} \sqrt{۴-n}$$

$$D: ۴-n \geq 0 \Rightarrow -n \geq -۴ \Rightarrow n \leq ۴$$

$$D = (-\infty, ۴]$$

تابع در مسائلی که در ۵ طرف نمی شود پس در این نقطه حد ندارد.

۳) حد توابع شامل خیزه صحیح :

بی رانیم اگر $a^+ \rightarrow n$ یعنی $n > a$ و اگر $a^- \rightarrow n$ یعنی $n < a$ است. در محاسبه حد

توابع شامل خیزه صحیح از این نکته استفاده کرده حدت داخل خیزه صحیح را می سازیم و

مقدار عبارت خیزه صحیح را در مسائلی a می بینیم تا ببینیم با کدام تابع ثابت برابر

می شود. پس با جی گذاری این مقدار در تابع، حد را بدست می آوریم.

مثال: حدهای زیر را می بینید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow ۰} (x + ۳) [x]$$

$$\lim_{n \rightarrow ۰^+} (n + ۳) [n] = (۰ + ۳) \times ۰ = ۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+3) [x] = (0+3) \times (-1) = -3$$

۳-۵ این حد موجود نیست

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x}{[x] + 1} = \frac{2^2 + 3 \times 2}{[2] + 1} = \frac{10}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$$

$\swarrow$
 $1 < x < 2$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1^-} [-2x] : \quad x < 1 \xrightarrow{x(-2)} -2x > -2$$

در نتیجه جابجاست $-2x$ - بزرگتر از -2 - و نزدیک آن است پس $-2 < -2x < -4$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [-2x] = -2$$

باید دقت کرد هم به همین نتیجه می رسیم.

$$۴) \lim_{x \rightarrow 2} x + \left[\frac{x}{2} \right]$$

پس $\frac{x}{2}$ بزرگتر از یک و نزدیک آن است. $x \rightarrow 2^+ : x > 2 \Rightarrow \frac{x}{2} > 1$

$$1 < \frac{x}{2} < 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} x + \left[\frac{x}{2} \right] = 2 + 1 = 3$$

پس $\frac{n}{m}$ از یک نزدیک تر می شود به ۱ : $\frac{n}{m} < 1 \xrightarrow{n \rightarrow m^-} \frac{n}{m} < 1$: $n \rightarrow m^-$

$$0 < \frac{n}{m} < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow m^-} n + \left[\frac{n}{m} \right] = m + 0 = m$$

۳ ≠ ۴ پس این صورت درست نیست.

$$۵) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\sqrt{2-2}}{[2^+]+2} = \frac{0}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$۶) \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} n[n] = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$\frac{1}{2} < n < 1$

$$۷) \lim_{n \rightarrow \frac{0}{2}} r[n] = 2 \times 2 = 4$$

$2 < n < 2$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت دوم: رفع ابهام صفر صفر

جلسه دوم

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

اگر $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n)}{g(n)}$ خدسته نده باشد و عدد از قرار دار a به چپ a ، صدمت و صبح

نزدیک صفر

هر دو صفر شوند با توجه به نوع صفر و حالت خور هم را بک

صفر ها در دسته اند : ۱- صفر مطلق (خرد صفر) ۲- صفر نسبی یا جدی (∞)

نوع اول : $\frac{0}{0}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد و صدمت ندارد

نوع دوم : $\frac{\infty}{\infty}$ مخرج کسر صفر مطلق پس حد و صدمت ندارد

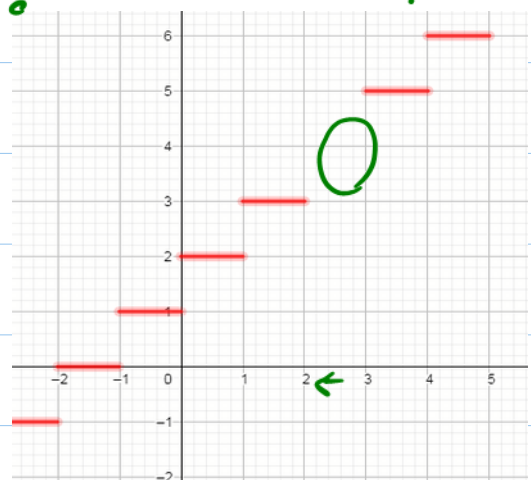
نوع سوم : $\frac{0}{\infty}$ صدمت صفر مطلق و مخرج خرد صفر (صفر جدی) پس حد کسر صفر است

نوع چهارم : $\frac{\infty}{\infty}$ به این حالت ، حالت مبهم میگویند و باید رفع ابهام شود

مثال : صدهای زیر را محاسبه کنید

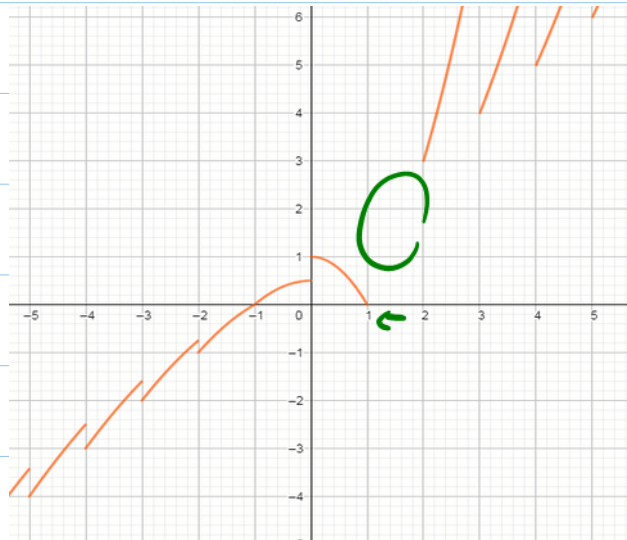
حد و صدمت ندارد

$$\lim_{n \rightarrow 2^+} \frac{[n]^2 - 4}{[n] - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

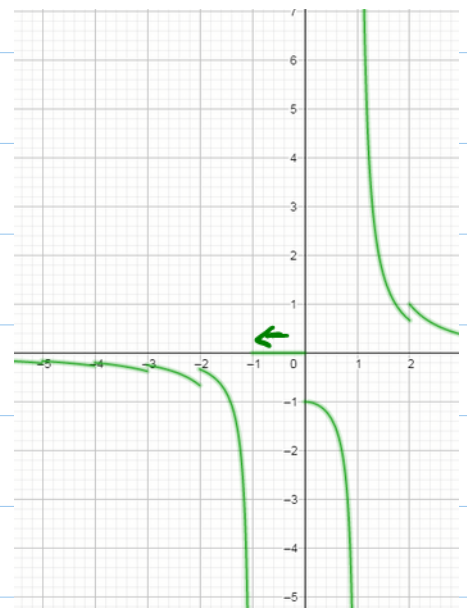


$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{[x] - 1} = \frac{1^+ - 1}{1 - 1} = \frac{0^+}{0}$$

حد موجود نیست



$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{[x] + 1}{x^2 - 1} = \frac{-1 + 1}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$



سؤال: کشور تجربی ۹۹

حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) -1 (۳) صفر (۴) ۱

(۴) ۱

✓ (۳) صفر

$$\frac{-1 + 3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$

گزینه ۳

رنج اهام $\frac{0}{\pm}$

چون $n \rightarrow a$ و صورت و مخرج هر دو صفر شده اند پس هم صورت و هم مخرج

صل $(n-a)$ را دارا هستند. به $(n-a)$ صل اهام یا صفر نشده می نویسم

الف) رنج اهام $\div$ وقتی صورت و مخرج هر دو چند مجهولی باشند.

با استفاده از روش های تجزیه (فاکتورگیری در کدها) صل اهام را در صورت و مخرج

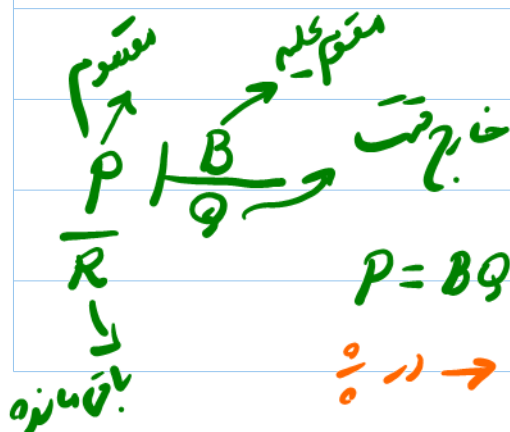
ایجاد و با یکدیگر حذف می کنیم تا حد قابل محاسبه باشد.

بصره: هرگاه نتوانیم باری کدها یا فاکتورگیری صل اهام را انجام دهیم، چاره ای

جز به تقسیم آن عبارت بر صل اهام نداریم. در این صورت به جای آن عبارت

حاصل ضرب $(n-a)$ (ها) مقسوم علیه در خارج قسمت را می نویسم.

یادآوری



$$P = BQ + R$$

صل اهام

$$R = 0 \rightarrow P = BQ$$

۱۱ رابطه تقسیم:

۱۲) تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + x^2 + 1 \quad | \quad \frac{x+1}{2x^2 - x + 1} \\
 \underline{-(2x^3 + 2x^2)} \\
 -x^2 + 1 \\
 \underline{-(-x^2 - x)} \\
 x + 1 \\
 \underline{-(x + 1)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

روش اول:

$$\frac{-x^2}{x} = -x$$

$$\frac{x}{x} = 1$$

روش دوم (رودن هورن): برای تقسیم درجه n بر درجه m

ضرایب مقوم

2	1	0	1
2	1	0	1
2	1	0	1

ریشه مقسوم علیه $\rightarrow -1$

باقی مانده $\rightarrow$

$-1 \times 2 + 1 = -1$
 $-1(-1) + 0 = 1$
 $-1(1) + 1 = 0$

خارج قسمة: $2x^2 - x + 1 \rightarrow 2x^2 - 1x + 1$

سؤال: حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \frac{0}{0}$ $\text{فاکتورگیری: } (x - (-3)) : (x + 3)$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{x} = \frac{-3-3}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

۲) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6} = \frac{0}{0}$ $\text{فاکتورگیری: } (x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+6} = \frac{1+1}{1+6} = \frac{2}{7}$$

۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{7}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} = \frac{0}{0}$ $\text{فاکتورگیری: } (x - \frac{1}{7})$

$$8x^3 - 1 = 8(x^3 - \frac{1}{8}) = 8(x - \frac{1}{7})(x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{49})$$

رویش هوریز	$\frac{1}{7}$	-5	1
	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}x^2 - 5 = -5$	$\frac{1}{7}x(-5) + 1 = 0 \rightarrow \text{ریشه!}$

باقی: $4x - 2$

$$8x^3 - 5x + 1 = (x - \frac{1}{7})(4x - 2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{\lambda(n - \frac{1}{r})(n^r + \frac{1}{r}n + \frac{1}{\varepsilon})}{(n - \frac{1}{r})(7n - r)} = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{\lambda(n^r + \frac{1}{r}n + \frac{1}{\varepsilon})}{r(rn - 1)}$$

$$= r \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}}{\frac{r}{r} - 1} = \frac{r}{\frac{1}{r}} = 4$$

$$\star) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4} = \frac{0}{0} \quad \text{[L'Hôpital's Rule]} \quad (x+4)$$

$$x^3 + 4x^2 - 4 = (x+4)(x-1)$$

در صورتی که	-4	1	4	1	4
	1	$-4x + 4 = 0$	$-4x + 1 = 1$	$-4x + 4 = 0$	

$$x^3 + 4x^2 + 1 = x^3 + 1$$

اینجا 0!

$$x^3 + 4x^2 + x + 4 = (x+2)(x^2+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow -4} \frac{(n+4)(n-1)}{(n+4)(n^2+1)} = \lim_{n \rightarrow -4} \frac{n-1}{n^2+1} = \frac{-4-1}{14+1} = \frac{-5}{15}$$

$$0) \lim_{x \rightarrow -r} \frac{|x^r - r|}{x + r} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & \xrightarrow{\text{orange}} r & \xleftarrow{\text{green}} r & \\ \hline x^r - r & & + & - & + \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{-(x^r - r)}{x + r} = \lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{-(x - r)(x + r)}{x + r} = -(-r - r) = r$$

$$\lim_{x \rightarrow -r^-} \frac{x^r - r}{x + r} = \lim_{x \rightarrow -r^-} \frac{(x - r)(x + r)}{x + r} = -r - r = -r$$

∴ $\lim_{x \rightarrow -r} \frac{x^r - r}{x + r} \neq -r$

با رفع ابهام به وقتی صورت یا مخرج و یا هر دو شامل عبارات رادیکالی هستند:

در این حالت از مخرج گویا کردن و اتحادهای مزدوج یا حلق دلاغر استفاده می‌کنیم. به این صورت که

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی (برای فرضیه‌های ۱) یا عبارت حلق عبارت رادیکالی

(برای فرضیه‌های ۲)، عامل ابهام را ایجاد می‌کنیم.

مثال: حدود زیر را بیابید

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

($n-2$) عامل ابهام

$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n - \sqrt{3n-2}}{n^2 - 4} \times \frac{n + \sqrt{3n-2}}{n + \sqrt{3n-2}} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - (3n-2)}{(n-2)(n+2)(n+\sqrt{3n-2})}$$

$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 3n + 2}{(n-2)(n+2)(n+\sqrt{3n-2})} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{(n-2)(n-1)}{(n-2)(n+2)(n+\sqrt{3n-2})}$$

$$= \frac{2-1}{(2+2)(2+\sqrt{4-2})} = \frac{1}{4(4)} = \frac{1}{16}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{نقطهٔ مبهم: } (x-4)$$

روش فاکتوریزاسیون

x^2	-10	-16
4	$4 \times 4 - 10 = 6$	$16 - 16 = 0$

خارج قسمت: $4x + 4$

باقی‌مانده: 0

$$x^2 - 10x + 16 = (x-4)(4x+4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(4x+4) \times \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1 \times \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(4x+4)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$$

مخرج را ساده می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(4x+4)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\cancel{\sqrt{x}} - 2)(\sqrt{x} + 2)(4x+4)(\sqrt{x} + 1)}{-(\cancel{\sqrt{x}} - 2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{4} + 2)(12 + 4)(\sqrt{4} + 1)}{-1} = -112$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2} = \frac{0}{0} \quad n: \text{مربع}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{3n+4}-2} \times \frac{\sqrt{2n+1}+1}{\sqrt{2n+1}+1} \times \frac{\sqrt{3n+4}+2}{\sqrt{3n+4}+2}$$

مربع مضروب

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(2n+1-1)(\sqrt{3n+4}+2)}{(3n+4-4)(\sqrt{2n+1}+1)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2n(\sqrt{3n+4}+2)}{3n(\sqrt{2n+1}+1)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2+2}{1+1} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$۳) \lim_{n \rightarrow r^-} \frac{|x^r - n - r|}{r_n - \sqrt{x^r + 1r}} \quad \text{مربع (n-r)}$$

$x^r - n - r$	$\frac{-1}{0} \rightarrow \frac{r}{0}$
	$+\quad -\quad +$

$$= \lim_{n \rightarrow r^-} \frac{-(x^r - n - r) \times r_n + \sqrt{x^r + 1r}}{r_n - \sqrt{x^r + 1r} \times r_n + \sqrt{x^r + 1r}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow r^-} \frac{-(n+1)(n-r)(r_n + \sqrt{x^r + 1r})}{r_n^r - (n^r + 1r)}$$

$\underbrace{r_n^r - (n^r + 1r)}_{=x^r - 1r}$

$$= \lim_{n \rightarrow 2^-} \frac{-(n+1)(n-2)(2n + \sqrt{n^2+12})}{\frac{3n^2-12}{2(n^2-4)}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 2^-} \frac{-(n+1)(\cancel{n-2})(2n + \sqrt{n^2+12})}{2(\cancel{n-2})(n+2)} = \frac{-(2+1)(2+2)}{2(2+2)} = \frac{-3 \times 4}{2 \times 4} = -2$$

یادآوری ریاضی دجانه لاغر :

$$\underbrace{(a-b)}_{\text{لاغر}} \underbrace{(a^2+ab+b^2)}_{\text{چاق}} = a^3 - b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

خواه ساختن عبارت چاق از روی عبارت لاغر :

۱- محب اول چاق : مبع (توان دوم) محب اول لاغر

۲- محب دوم چاق : حاصل ضرب محب اول در دوم لاغر با علامت مثبت

۳- محب سوم چاق : مبع محب دوم لاغر

مثال: سندر بوی ۹۸

حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow -8$ ، کدام است؟

(۴) -۶

(۳) -۱۲

(۲) -۱۸

(۱) -۲۴

طرح اول $(n+8)$

$$\lim_{n \rightarrow -8} \frac{(n+8)(n+2) \times (4 - 2\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2})}{4(2 + \sqrt[3]{n}) \times (4 - 2\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2})}$$

جان $\xrightarrow{\text{در}}$

$$= \lim_{n \rightarrow -8} \frac{(n+8)(n+2)(4 - 2\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2})}{4(8+n)}$$

$\swarrow$ $\searrow$
 2^3 $(\sqrt[3]{n})^3$

$$= \frac{(-8+2)(4 - 2\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{64})}{4} = \frac{-6(4 - 2(-2) + 4)}{4}$$

$$= -1 \times 12 = -12$$

گزینه ۳

مثال: شکر ریاضی ۹۹

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$ ، کدام است؟

-۰/۶ (۴)

-۰/۸ (۳)

-۱/۲ (۲)

-۱/۵ (۱)

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{2n+0-\sqrt{2n}}{2n-\sqrt{3n+1}} = \frac{0}{0} \quad \text{نیل ایام (n-1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{2n+0-\sqrt{2n}}{2n-\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+0+\sqrt{2n}}{2n+0+\sqrt{2n}} \times \frac{2n+\sqrt{3n+1}}{2n+\sqrt{3n+1}}$$

نزدیک صفر

نزدیک صفر

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(2n+0)^2 - 2n}{(2n^2 - (3n+1))(2n+0+\sqrt{2n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(4n^2 + 0 \cdot n + 0 - 2n)(2n+\sqrt{3n+1})}{(4n^2 - 3n - 1)(2n+0+\sqrt{2n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(4n^2 - 2n)(2n+\sqrt{3n+1})}{(4n^2 - 3n - 1)(2n+0+\sqrt{2n})}$$

نیل ایام

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(4n^2 - 2n)(2n+\sqrt{3n+1})}{(4n^2 - 3n - 1)(2n+0+\sqrt{2n})}$$

نیل ایام

$$= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\cancel{(n-1)}(t_n - r_0)(r_n + \sqrt{r_{n+1}})}{\cancel{(n-1)}(t_n + 1)(r_n + 0 + \sqrt{r_n})}$$

$$= \frac{(t - r_0)(r + r)}{(t + 1)(r + 0 + \sqrt{r})} = \frac{-21 \times 4}{0 \times 14} = \frac{-8 \times 2}{0} = \frac{-6}{0} = -1,2$$

گزینہ ۱

پایانخ ایهام : وقتی صورت یا مخرج یا هر دو توابع مشتقی باشند:

با استفاده از روابط مشتقی می توان ایهام را برطرف کنیم.

مثال: حدی زیر را بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cancel{\cos x + \sin x})}{\cancel{\cos x + \sin x}}$$

$$= \cos \overset{\pi - \frac{\pi}{4}}{\frac{3\pi}{4}} - \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cancel{\sin x} \cos x}{\cancel{\sin x}} = 2 \cos 0 = 2 \times 1 = 2$$

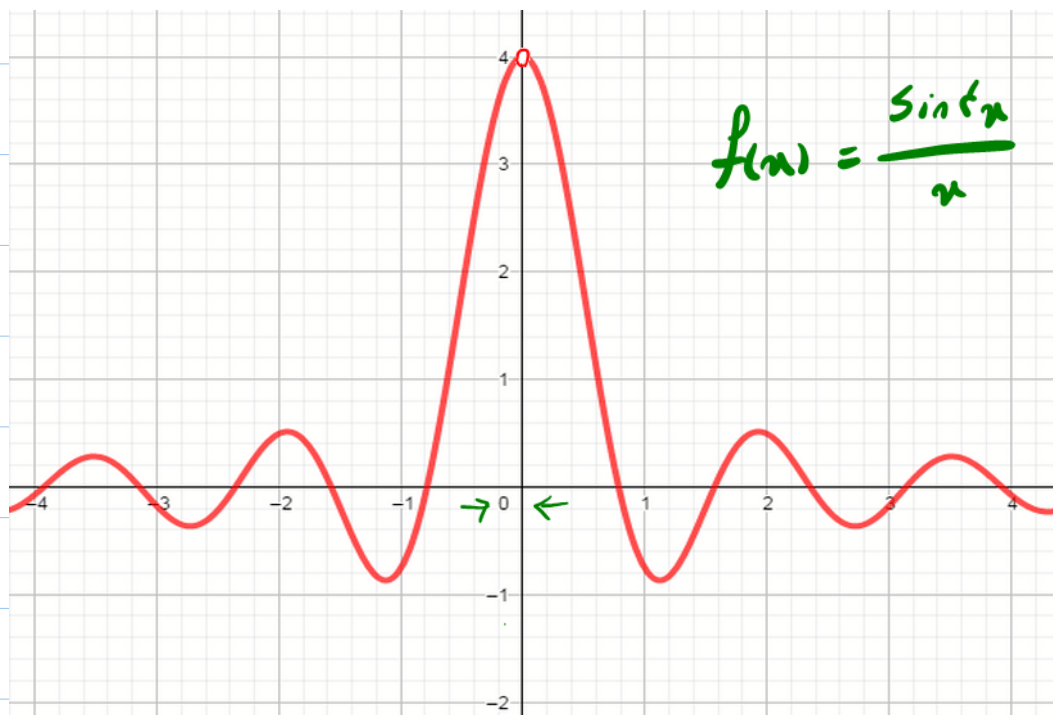
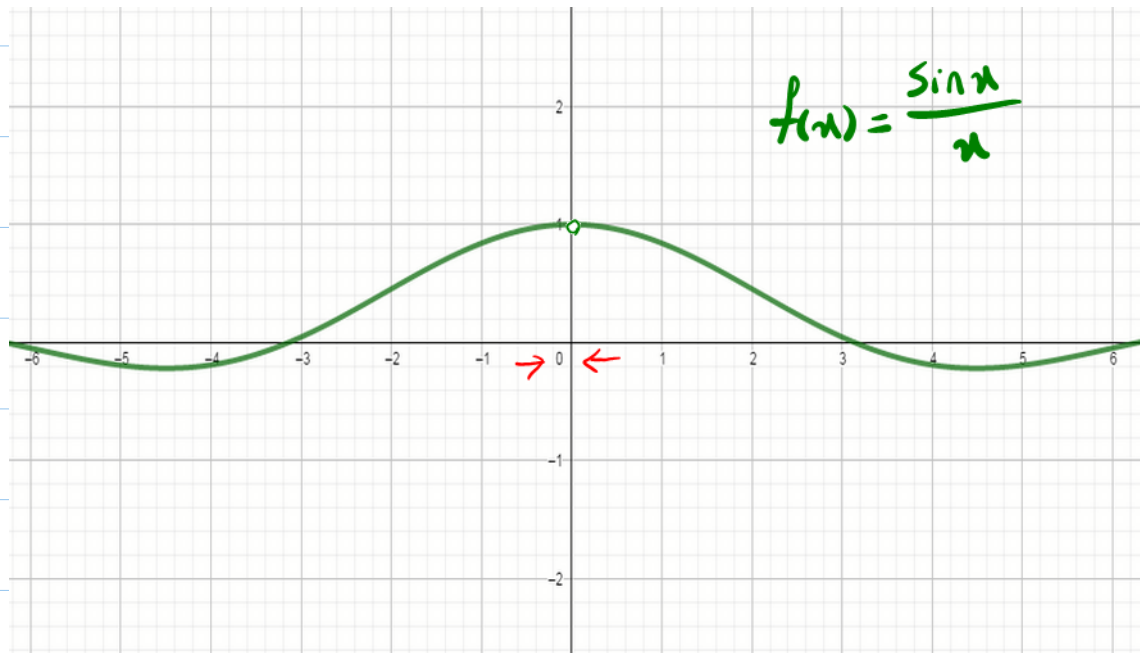
$$3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\cancel{2 \sin^2 x} \cos^2 x)}{2 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cancel{2 \sin^2 x} \cos^2 x}{\cancel{2 \cos^2 x}} = 2 \sin^2 \pi = 2 \times 1 = 2$$

نکته: با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

در حالت کلی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = m$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = m$$

سؤال: حد زیر را بیابید.

الف) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2n}{n^2}$

$$\cos 2n = 1 - 2\sin^2 n$$

ضرب کنیم $2\sin^2 n = 1 - \cos 2n$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 n}{n^2} = 2 \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 = 2 \times 1^2 = 2 \times 1 = 2$$

ب) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2n)(1 + \cos n)}{n \sin n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 n (1 + \cos n)}{n \sin n}$

صورت و مخرج
بر n^2 تقسیم کنیم $\rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{2\sin^2 n}{n^2} (1 + \cos n)}{\frac{n \sin n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 (1 + \cos n)}{\frac{\sin n}{n}}$

$$= \frac{2 \times 1 \times (1 + 1)}{1} = 2$$

ج) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2n} - \sqrt{\cos n}}{n^2} \times \frac{\sqrt{\cos 2n} + \sqrt{\cos n}}{\sqrt{\cos 2n} + \sqrt{\cos n}}$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\cos 2n - \cos n}{n^2 (\sqrt{\cos 2n} + \sqrt{\cos n})}$$

$\sqrt{\cos 0} + \sqrt{\cos 0} = 1 + 1 = 2$

$$= \frac{1}{r} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 - r \sin^r \frac{r_n}{r}) - (1 - r \sin^r \frac{n}{r})}{n^r}$$

$$= \frac{1}{r} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{r \sin^r \frac{n}{r} - r \sin^r \frac{r_n}{r}}{n^r}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^r \frac{n}{r}}{n^r} - \frac{\sin^r \frac{r_n}{r}}{n^r} \right) = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\sin \frac{n}{r}}{n} \right)^r - \left(\frac{\sin \frac{r_n}{r}}{n} \right)^r \right)$$

$$= \left(\frac{1}{r} \right)^r - \left(\frac{r}{r} \right)^r = \frac{1}{r} - \frac{r}{r} = -\frac{1}{r} = -r$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} \left([rn] + [-rn] \right) \frac{1 - \cos^r n}{1 - \sqrt{1 + n^r}}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} [rn] + [-rn] = 0 - 1 = -1$$

$$n \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} [rn] + [-rn] = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} [rn] + [-rn] = -1 + 0 = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^r n}{1 - \sqrt{1 + n^r}} \times \frac{1 + \sqrt{1 + n^r}}{1 + \sqrt{1 + n^r}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos n)(1 + \cos n + \cos^r n)(1 + \sqrt{1 + n^r})}{1 - (1 + n^r)}$$

حاجه لازم

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(r \sin^r \frac{n}{r}) (1 + \cos n + \cos^r n) (1 + \sqrt{1+n^r})}{-n^r}$$

$$= -r \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^r \frac{n}{r}}{n} \right)^r \times (1+1+1)(1+1) = -r \times \left(\frac{1}{r} \right)^r \times 4 = -r^{\frac{1}{r}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} \left([r n] + [-r n] \right) \frac{1 - \cos^r n}{1 - \sqrt{1+n^r}} = -1 \times (-r) = r$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n^r - |n| \sin^r n}{r n^r - |n| \sin^r n} = \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n^r - (-n) \sin^r n}{r n^r - (-n) \sin^r n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n^r + n \sin^r n}{r n^r + n \sin^r n} \xrightarrow{\div n^r} \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{\frac{n^r}{n^r} + \frac{n \sin^r n}{n^r}}{\frac{r n^r}{n^r} + \frac{n \sin^r n}{n^r}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{\sin^r n}{n}}{r + \frac{\sin^r n}{n}} = \frac{1+4}{r+1} = \frac{5}{r}$$

مثال: تکثیر ریاضی ۹۹ (خارج)

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، کدام است؟

۲ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$-\sqrt{2}$ (۲)

-۲ (۱)

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3n} - \sqrt{2-n}}{\sqrt{2\sin^2 \frac{n}{r}}} \times \frac{\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n}}{\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{2+3n - \overbrace{(2-n)}^{-2+n}}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{n}{r} \right| (\sqrt{2+3n} + \sqrt{2-n})} = \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{4n}{\sqrt{2} (-\sin \frac{n}{r})} \times \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

($n \rightarrow 0^-$: $\frac{n}{r}$ رادیان $\rightarrow \sin \frac{n}{r} < 0$)

$$= -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{n}{\sin \frac{n}{r}} = -\lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{\sin \frac{n}{r}}{n}} = -\frac{1}{\frac{1}{r}} = -r$$

گزینه ۱

روش تغییر متغیر برای رفع ابهام ÷

در این روش عامل صفرکننده را برابر متغیر جدیدی مانند t می‌گیریم و با عوض کردن متغیر

حد را ساده می‌سازیم.

مثال: حد های زیر را می‌سازیم.

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{2x - \pi}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = t \quad \text{عامل ابهام}$$

$$(x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \rightarrow 0)$$

$$\begin{cases} x = t + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2t + \frac{\pi}{2} \\ 2x - \pi = 2t - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t + \frac{\pi}{2}) - 1}{2t + \frac{\pi}{2} - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - 1}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{(1 - \cos 2t)}{2t}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 t}{t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \sin t$$

$$= -\frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\sin rn}{\cos rn}$$

$$r \text{ u } 0 \text{ u } n - \frac{\pi}{r} = t$$

$$(n \rightarrow \frac{\pi}{r} \Rightarrow t \rightarrow 0)$$

$$\begin{cases} n = t + \frac{\pi}{r} \\ rn = rt + \pi \\ rn = rt + r\frac{\pi}{r} \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(rt + \pi)}{\cos(rt + r\frac{\pi}{r})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin rt}{\sin rt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin rt}{t}}{\frac{\sin rt}{t}} = \frac{-r}{r}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

درس اول: حدهای نامتناهی

قسمت سوم: تعریف حد بی نهایت

جلسه سوم: صفحات ۴۶ تا ۵۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف همسایگی: اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوئیم.



(a, b) یک همسایگی x_0

$(1, 4)$ یک همسایگی عدد ۲



تعریف همسایگی فذوف: اگر x_0 را از همسایگی بازش خارج کنیم، همسایگی محذوف x_0 می‌دست



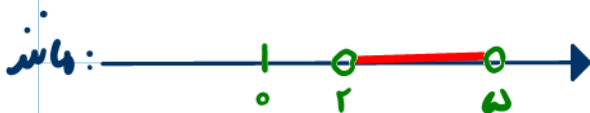
می‌آید. یعنی: $(a, b) - \{x_0\}$



تعریف همسایگی راست و چپ: اگر r عددی حقیقی مثبت باشد بازه $(x_0, x_0 + r)$ را

یک همسایگی راست x_0 و بازه $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی

چپ x_0 می‌نامیم.



$(2, 5)$ یک همسایگی راست برای ۳



$(0, 2)$ یک همسایگی چپ برای ۲

مثال: اگر بازه $(a-3, 2a+1)$ همسایگی عدد یک باشد، عدد a را بیابید.

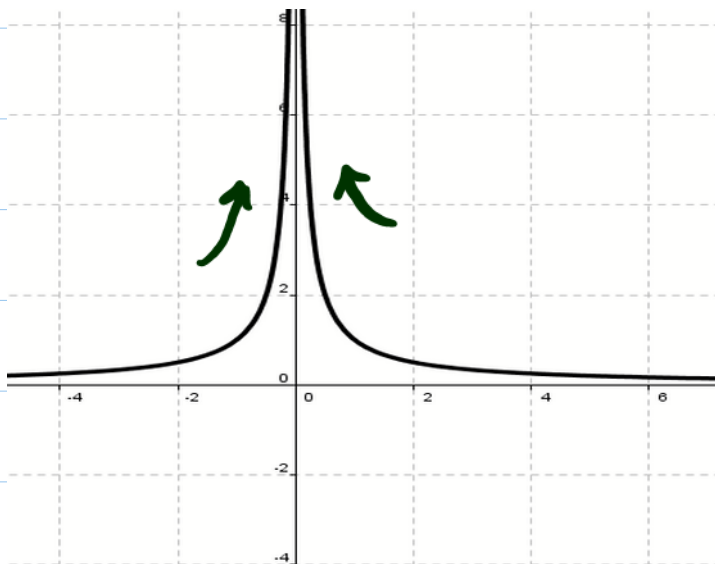
$$a-3 < 1 < 2a+1$$

$$\begin{cases} a-3 < 1 \rightarrow a < 4 \\ 2a+1 > 1 \rightarrow 2a > 0 \rightarrow a > 0 \end{cases} \quad \cap \rightarrow 0 < a < 4$$

می‌خواهیم حد تعجب $f(x) = \frac{1}{|x|}$ را در $x=0$ بررسی کنیم. تابع در $x=0$ تعریف نمی‌شود.

رنگ همسایگی حذف و وجود دارد.

x	-1/5	-1/1	-1/2	-1/3	$\rightarrow 0$	1/3	1/2	1/1	1/5
$y = f(x)$	2	100	1000	10000	$+\infty$	$+\infty$	10000	1000	2



تعریف: فرض کنید f در یک همسایگی معدوم a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f با x

و y های x که a را از دورتر می‌کنند، به شریک

مقادیر متغیر x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشند می‌نویسم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

در این صورت می‌گوییم تابع f در a حد نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) دارد

تذکره: اگر باشد a تعریف بالا:

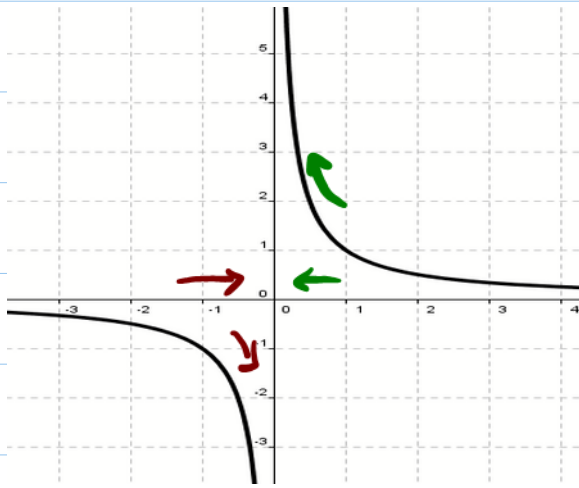
۱- مقادیر تابع f با x و y ها که همیشه باید می‌نویسم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

۲- f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد، مقادیر تابع f که a را از دورتر می‌کنند

به ترتیب می‌نویسم: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

۳- f در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد، مقادیر تابع f که a را از دورتر می‌کنند

به ترتیب می‌نویسم: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$



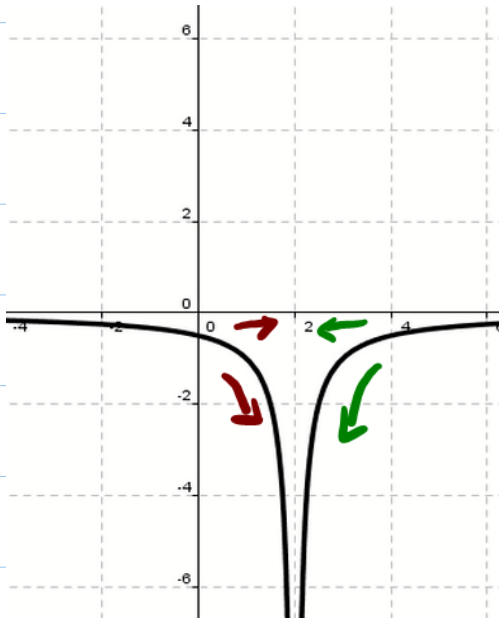
: $\dot{u}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

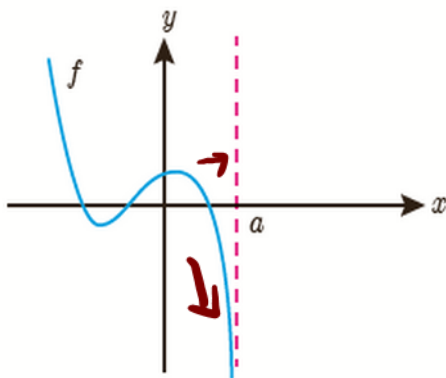


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 2^+$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow a^-$$

محاسبه حدی بنهایت :

اگر $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = L \neq 0$ و $\lim_{n \rightarrow a} g(n) = 0$ آنوقت $y = \frac{f(n)}{g(n)}$ در نقطه a حدناهی

یا حدی بنهایت دارد. علامت ی بنهایت با توجه به علامت L و علامت منفی حدی y

در یک همسایگی معزوف a قس می شود. این نکته برای حد چپ و حد راست هم درست است.

پس : $\frac{\infty}{0} = \infty$ (در حدی بنهایت به بی نهایت محدود می کنند و جواب حدی بنهایت می شود.)

نکته : برای تشخیص علامت منفی حدی با توجه به علامت y معجز از حد گذری مقارن

نزدیک a یا جدول قس علامت در صورت اینم y مثلاً y باشد از زاویه مثلاً y

استفاده می کنیم. همچنین در صورتی که حد چپ و راست در علامت منفی متفاوت باشد باید هر یک

را جداگانه بررسی کرد.

کار در کلاس

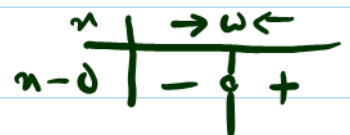
۱) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{5-5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

4.9

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{5^+-5} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

5.1

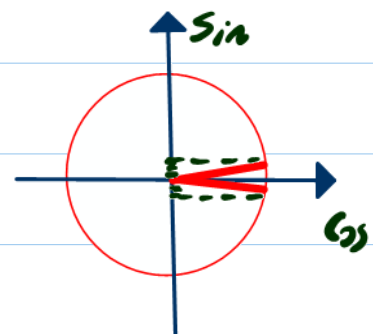


$$پ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(0^{\pm})^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$ت) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^{\pm}|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$ث) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{-1}{|0^{\pm}|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$ج) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(0^{\pm})^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



مثال: حدهای زیر را بیابید.

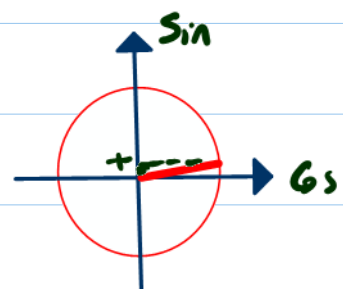
$$۱) \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{n-1}{n-n^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$x(1-x^2)$ ✓ $\begin{array}{c|c|c|c|c} - & 0 & - & 0 & + \\ \hline + & - & + & - & + \end{array}$

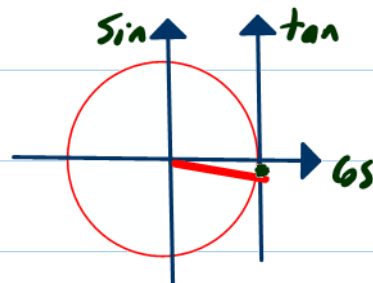
$$۲) \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{2n-1}{(n-2)^2} = \frac{2 \times 1 - 1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$\swarrow$
 $1, 9$

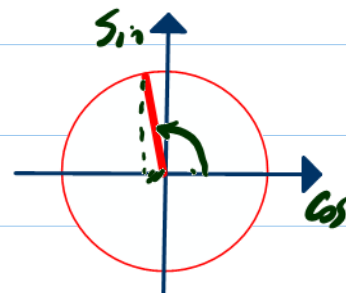
$$۳) \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1+\cos n}{\sin n} = \frac{1+1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$



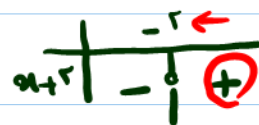
$$f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 1}{\tan x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$



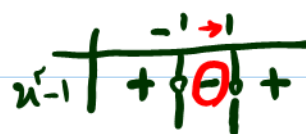
$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^+} \frac{\cos x - 1}{\cos x} = \frac{\cos \frac{\pi}{r} - 1}{0} = \frac{\cos \pi - 1}{0} = \frac{-1 - 1}{0} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$



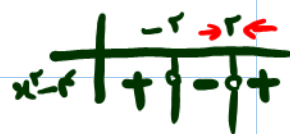
$$7) \lim_{x \rightarrow -r^+} \frac{x+1}{x+r} = \frac{-r+1}{-r+r} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$



$$v) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]-1}{x^r-1} = \frac{0-1}{(1^-)^r-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$



$$1) \lim_{x \rightarrow r} \frac{-[x]-1}{x^r-r} \begin{cases} x \rightarrow r^+ : \frac{-r-1}{0^+} = -\frac{r}{0^+} = -\infty \\ x \rightarrow r^- : \frac{-1-1}{0^-} = -\frac{r}{0^-} = +\infty \end{cases}$$



$$9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \frac{\tan x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{(0^+)^r} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$1.) \lim_{x \rightarrow r} \frac{-x}{x^r-0x+7} = \frac{-r}{0} \begin{cases} x \rightarrow r^+ : \frac{-r}{0^-} = +\infty \\ x \rightarrow r^- : \frac{-r}{0^+} = -\infty \end{cases}$$



$$11) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{0}{0}$$

کامل اولی (x-1)

روش هورنر: برای تقسیم درجه درجه درجه

$$x^3 - x^2 - x + 1 \overline{) x^3 - 3x + 2}$$

شماره مقسوم علیه

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

باقی مانده $1x(-1) + 1 = 0$
 $1x0 - 1 = -1$
 $1x1 - 1 = 0$

درم اولی یک واحد
 ← شماره از مقسوم
 خارج قسمت: $x^2 + 0x - 1 = x^2 - 1$
 ← لفظ طبری: ضرب - جمع

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{1-2}{0} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

مثال: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، a و b را بیابید.

$$\frac{2-3}{0^+} = -\infty$$

۲ رشته مفاعف معزج است پس:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &= x^2 + ax + b \\ x^2 - 4x + 4 &= x^2 + ax + b \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \end{cases}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

درس دوم: حد در بی نهایت

جلسه چهارم: صفحات ۵۹ تا ۶۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

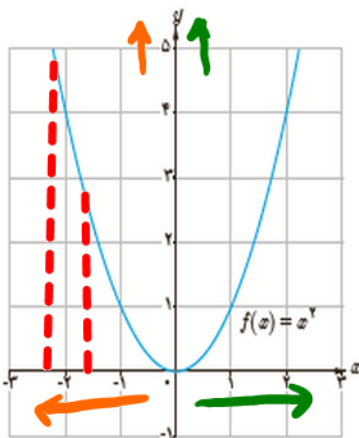
گروه ریاضی
استان همدان

نکته: در برخی توابع، وقتی به سمت بی نهایت میل می‌کنند، مقدار تابع خیلی بزرگ یا خیلی کوچک می‌شود.

دلخواه بزرگ یا کوچک می‌شود، یعنی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. به این حالت حد نامشخصی در بی نهایت می‌گویند.

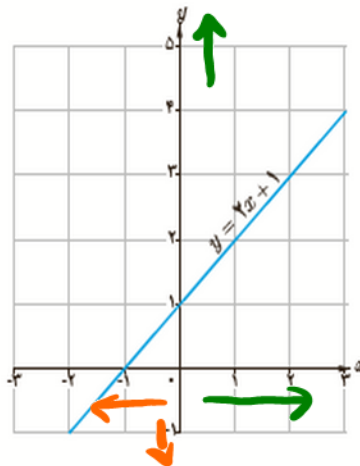
کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



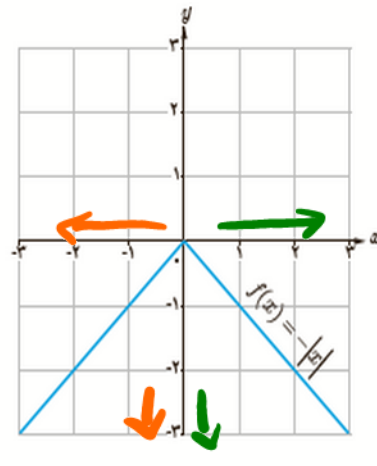
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$



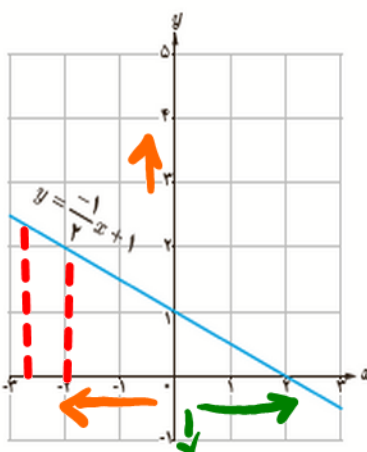
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$



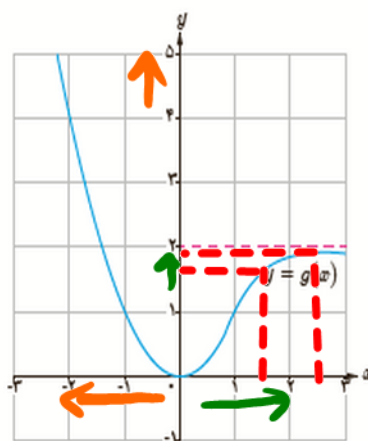
پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



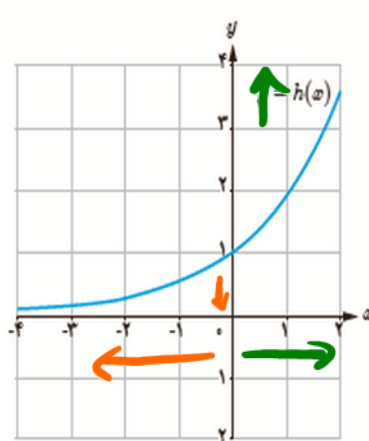
ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x+1}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x+1}\right) = -\infty$



ث) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$



ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

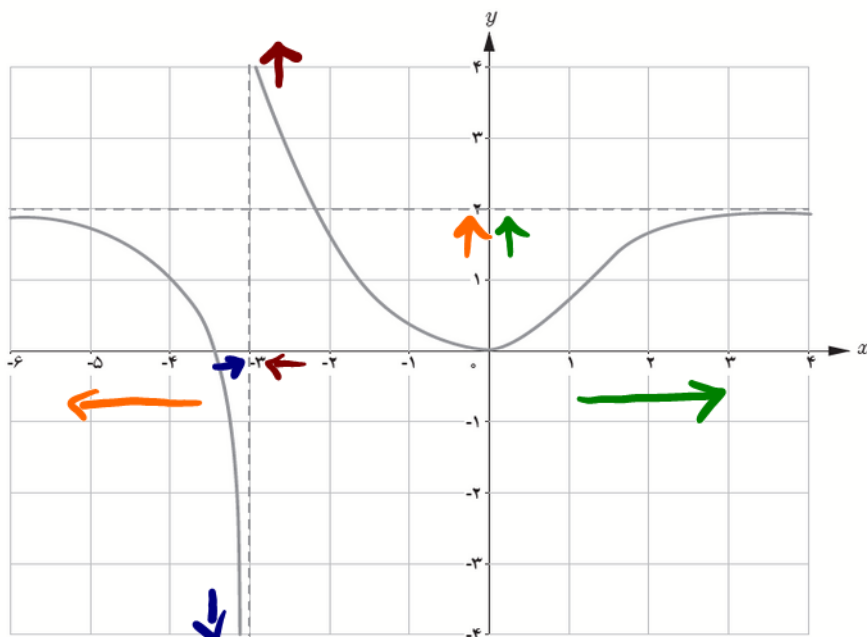
مثال: با توجه به نمودار توابع داده شده حدود خواسته شده را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = -\infty$$

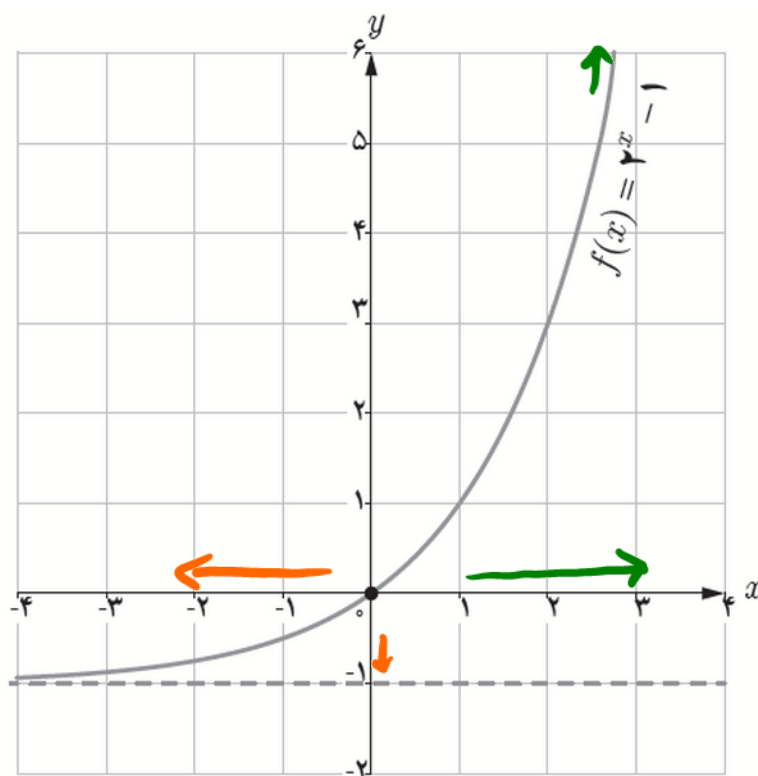
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$



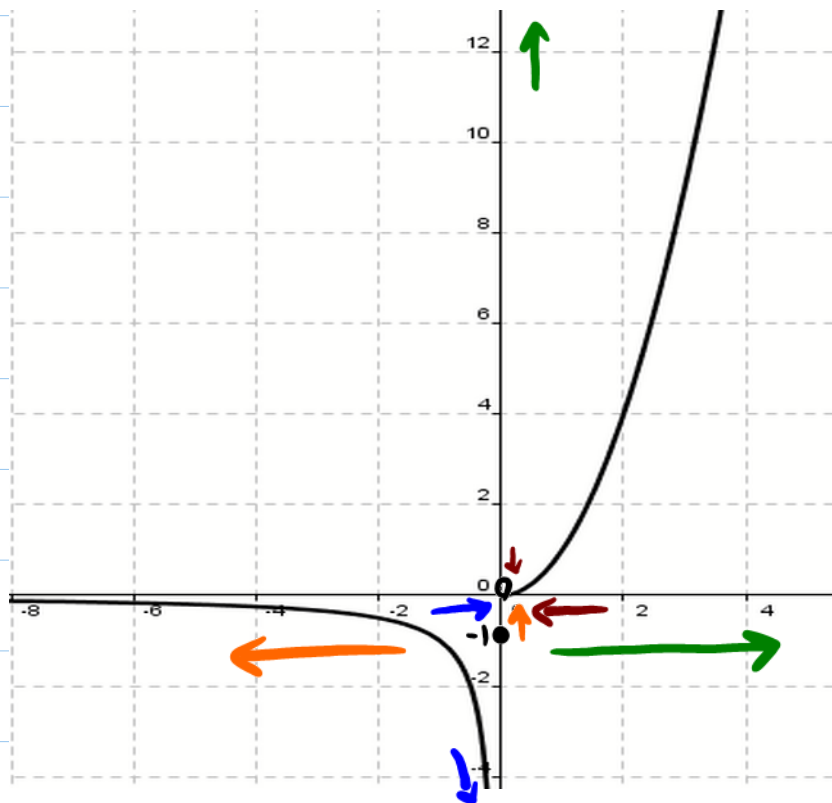
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بیابید.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases} : \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

محاسبه حد در بی نهایت از روی ضابطه :

۱۱) از قاعده های زیر، حد از جایگزینی $+\infty$ ، $-\infty$ به جای x ، در محاسبه حد در بی نهایت حاصل استفاده می کنیم. $(a \in \mathbb{R} - \{0\})$

$$۱) \quad a \times \infty = \infty$$

$$۲) \quad a + \infty = \infty$$

$$* ۳) \quad \frac{a}{\infty} = 0$$

$$۴) \quad \frac{\infty}{a} = \infty$$

$$۵) \quad (\infty)^a = \infty \quad (a \in \mathbb{N})$$

$$۶) \quad +\infty + \infty = +\infty$$

$$۷) \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$۸) \quad \infty - \infty : \text{حالت مبهم}$$

$$۹) \quad \infty \times \infty = \infty$$

$$۱۰) \quad \frac{\infty}{\infty} : \text{حالت مبهم}$$

$$۱۱) \quad \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$$۱۳) \quad a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\rightarrow 2^{+\infty} = +\infty$$

$$۱۴) \quad a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$$

$$\rightarrow 2^{-\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

۱۲) در محاسبه حد در بی نهایت چند جمله ای های درجه n ، از محباتی که توان متغیرنا کمتر از n است صرف نظر می کنیم.

۱۳) برای محاسبه حد در بی نهایت توابع گسری که صورت و مخرج چند جمله ای هستند، ابتدا از نکته ۲

(شماره می کنیم و از درجات کمتر صرف نظر می کنیم. سه حالت رخ می دهد:

الف) درجه صورت از مخرج بیشتر است. در این حالت حد نامتناهی می شود یعنی $+\infty$ یا $-\infty$.

ب) درجه صورت و مخرج برابر هستند. در این حالت با تقسیم ضرایب متغیر، مقدار حد محاسبه می شود.

ج) درجه مخرج از صورت بیشتر است. در این حالت مقدار حد صفر می شود.

۱۴) هدف از صورت یا مخرج عبارت رادیکالی داشتیم، از درجات کوچکتر از درجه عبارت

زیر رادیکال صرف نظر می کنیم و در صورت امکان عبارت بر توان را از زیر رادیکال خارج می کنیم.

کار در کلاس

۱) مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x-1}$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t}$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-3x}$

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$ ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-5t^2}{t^2} = -5$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-3x} = 0$ $\frac{1}{-\infty} = 0$

$$\text{الف)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{-n+2} = -1$$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد
ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر 100 باشد.

$$\text{ب)} \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{100n}{n+4} = 100$$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید :

$$\text{الف)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{\sqrt{x^3 - 1} \sqrt{x^2 - 6x}}$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$$

$$\text{پ)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$$

$$\text{الف)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{\sqrt{n^3}} = \frac{2}{\sqrt{1}}$$

$$\text{ب)} \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{5n}{n^3} = 0 \quad \frac{5}{\infty} = 0$$

$$\text{پ)} \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-4n^7}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow -\infty} -2n^4 = -2 \times (+\infty) = -\infty$$

مثال: حدهای زیر را بیابید

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + x + 1}{x^3 - x + 3} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{5n^3}{n^3} = 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow -\infty} n = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-n^3}{2n^3} = -\frac{1}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^r - 1)(x+1)}{x^r - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r}{n^r} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{rx^r + 1}}{rx - r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{rn^r}}{rn} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{r}|n|}{rn} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^r + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{|n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

$$v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{rx^r - \sqrt{x - r}}{\omega x^r - \sqrt{x + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{rn^r}{\omega n^r} = \frac{r}{\omega}$$

$$\wedge) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r + \sqrt{x^r + rx + 1}}{\omega x^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r + \sqrt{n^r}}{\omega n^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^r + n^{\frac{r}{2}}}{\omega n^r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r n^{\frac{r}{2}}}{\omega n^r} = \frac{r}{\omega}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: حدهای نامتناهی -

حد در بی نهایت

جلسه پنجم: مجانب‌ها

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تعریف جانب یک منتهی :

خطی است که فاصله منتهی از آن در بی نهایت به هم نزدیک می شود.

۱) جانب قائم :

خط $x=a$ را جانب قائم بنزد f می نامیم هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر

برقرار باشد :

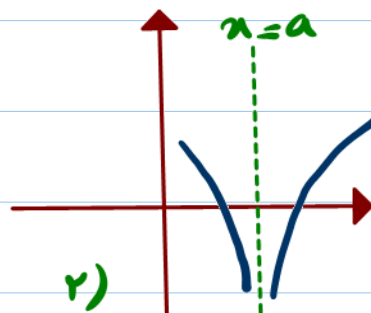
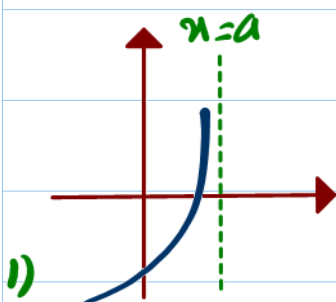
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مانند :



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

مثال: جانب قائم مندر را تابع $f(n) = \frac{n}{(n+1)^2}$ را بدست آورید.

حد تابع را در $n = -1$ یعنی ریشه منفرجه حساب می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow -1} f(n) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

مندرجه از این تابع اطراف جانب قائم مانند (۲) است.

نکته: در توابع گسری ریشه منفرجه مسقط جانب قائم بودن هستند. اگر حد تابع در این نقاط

بی نهایت شود رنگه خط (ریشه منفرجه $n =$) جانب قائم است.

تذکره (۱): در توابع گسری که صورت و منفرجه ضربه دارند، اگر ضربه تابع را ساده کنیم به طوری

که حاصل مشترک در صورت و منفرجه نباشد، به طریقی قطع ریشه منفرجه جانب قائم

هستند.

مثال: مندر را تابع $f(n) = \frac{n^2 - 4n + 4}{(n^2 - n - 6)(n - 4)}$ چند جانب قائم دارد؟

$$f(n) = \frac{(n-1)(n-4)}{(n-4)(n+2)(n-6)} = \frac{n-1}{(n+2)(n-6)}$$

پس $x = -2$ و $x = 4$ مجانب‌های قائم‌اند.

تذکره ۱۲ در توابع گوی که صورت یا مخرج چند جمله‌ای نیستند، اگر در نقطه‌ای حد مخرج محدود

حد صورت عددی غیر صفر شود، نمودار در آن نقطه مجانب قائم ندارد. دقت کنید

برای این که حد صورت و مخرج تعریف شود باید تابع حداقل درست یک بار از آن نقطه

تویند باشد.

مثال: نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)}$ چند مجانب قائم دارد؟

فقط یک مجانب قائم $x = 0$ دارد. دقت کنید چون $D = (0, +\infty)$ پس تابع

در اطراف $x = -2$ تویند نشده است.

مثال: به ازای چه مقدار a تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2+ax+9}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

دو حالت داریم:

۱) معجزه رخ می‌دهد و می‌تواند داشته باشد: $a^2 - 4 \times 9 = 0 \Rightarrow a = \pm 6$

۱۳ فقط یکی از ریشه‌های معادله با صورت برابر باشد تا بعد از ساده کردن صورت، معادله یک

ریشه برای معادله باقی بماند.

پس $n=1$ باید ریشه معادله هم باشد،
 $n=1 : 1^2 + a(1) + 9 = 0 \Rightarrow a = -10$

$$f(n) = \frac{n-1}{n^2-10n+9} = \frac{n-1}{(n-1)(n-9)} \Rightarrow n=9 \text{ صفت مخرج}$$

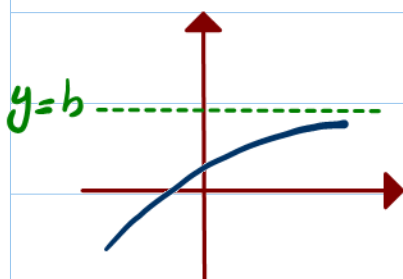
پس برای $a = -10, a = \pm 6$ این مخرج فقط یک صفت مخرج دارد.

۱۲ صفت انتی:

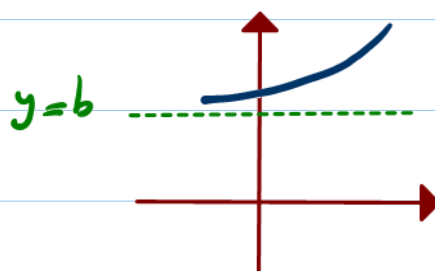
خط $y=b$ را صفت انتی می‌نامند، اگر تابع f از نیمه راست یا چپ هرگاه صفت انتی یکی از دو حالت زیر را داشته باشد:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = b, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = b$$

مانند:



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = b$$



$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = b$$

پس برای یافتن معیباتی تابع f کافی است معیبات f را وقتی $n \rightarrow \pm\infty$ حساب کنیم.

مثال: معیباتی تابع $f(n) = \frac{n}{2n - |n-1|}$ را بیابید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n}{2n + (n-1)} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$$

پس نمودار تابع دو معیباتی $y=1$ و $y=\frac{1}{3}$ دارد.

مثال: نمودار تابع $f(n) = \frac{n-1}{n+4}$ در مجرای معیباتی n چگونه است؟

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f(n) = 1 \rightarrow y=1$$

$$f(n) = \frac{n-1}{n+4} = \frac{n+4-5}{n+4} = 1 - \frac{5}{n+4}$$

نمودار پستی معیباتی: $f(n) < 1 \rightarrow \frac{5}{n+4} \rightarrow 0^+ : n \rightarrow +\infty$

نمودار بالای معیباتی: $f(n) > 1 \rightarrow \frac{5}{n+4} \rightarrow 0^- : n \rightarrow -\infty$

پس افکار $y=1$ و $y=0$ را بررسی می‌کنیم : 

مثال: مقدار تابع $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 2}$ را برای $x \rightarrow \pm\infty$ محاسبه کنید.

پس باید بررسی کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \rightarrow y=0$$

پس باید بررسی کنیم که آیا $f(x) = 0$ جواب نداشته باشد یا نه. اگر $y=0$ را قطع نکند :

$$\frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 2} = 0 \rightarrow x^2 + mx + 1 = 0 : \Delta = m^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow -2 < m < 2$$

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

محل حرم: مشق

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

قسمت اول

جلسه اول: صفحات ۷۲ تا ۷۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

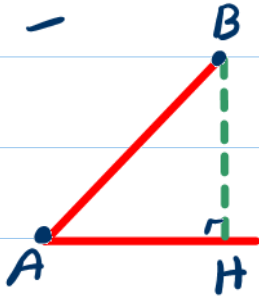
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

آپنه تابه حال در باره شیب داشته ایم :

مفهوم فیزیکی شیب: نسبت افزایش ارتفاع به مسافت افقی طی شده را شیب سطح شیبدار می گوئیم.



$$\text{شیب} = \frac{BH}{AH}$$

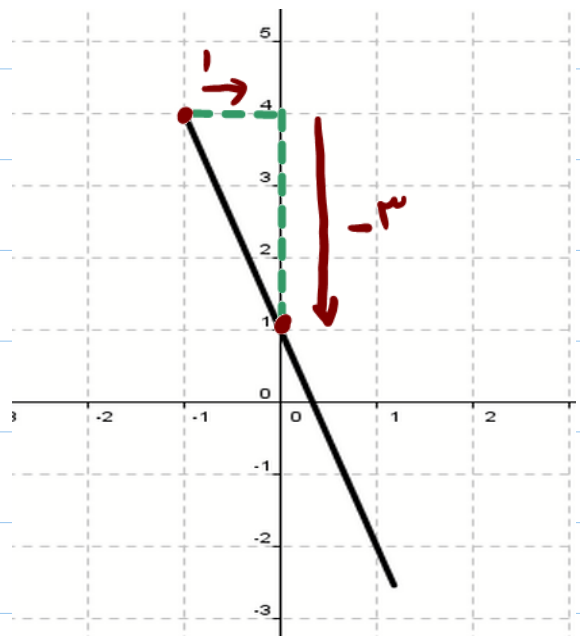
شیب خط: وقتی می گوئیم شیب خطی m است یعنی به ازای افزایش یک واحد متغیر x

متغیر y به اندازه m واحد افزایش یا کاهش می یابد.



الف)

$$m=2$$



ب)

$$m=-3$$

نکته: الف) هرگاه دوی محور x ها از چپ به راست حرکت کنیم و دوی خط به سمت بالا

برویم، شیب خط مثبت خواهد بود.

ب) هرگاه دوی محور x ها از چپ به راست حرکت کنیم و دوی خط به پائین سرخیزیم

شیب خط منفی خواهد بود.

ج) اگر خط موازی محور x ها باشد شیب خط صفر است (خطهای افقی)

د) اگر خط موازی محور y ها باشد شیب خط تعریف نشده است (خطهای قائم)

یافتن شیب خط با داشتن دو نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط l باشند، شیب این خط برابر

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{است! :}$$

نوشتن معادله خط با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن :

اگر $A(x_1, y_1)$ نقطه‌ای از خط l باشد و شیب m باشد معادله این خط

از رابطه زیر جهت می‌گیرید :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه به مختصات $(1, -6)$ و $(-4, -2)$ بگذرد

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 + 6}{-4 - 1} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5} \rightarrow y + 6 = -\frac{4}{5}(x - 1)$$

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{4}{5} - 6 \rightarrow y = -\frac{4}{5}x - \frac{26}{5}$$

رابطه شیب خط و تانژانت: تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ‌ها می‌سازد برابر شیب خط است.

تذکره: (الف) به معادله‌های به شکل $y = mx + h$ معادله رستخوار خطی می‌گویند که m شیب خط و h عرض از مبدأ (عل برضر خط با محور y ‌ها) است.

(ب) به معادله‌های به شکل $ax + by + c = 0$ صورت کلی خطی می‌گویند که شیب از $-\frac{a}{b}$ به دست می‌آید.

مثال: شیب خط‌های زیر را بیابید.

۱) $x = 1 \rightarrow m$: تعریف نشده

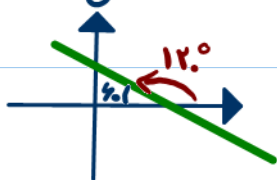
۲) $y = \sqrt{3}x - 4 \rightarrow m = \sqrt{3}$

۳) $y = -2 \rightarrow m = 0$

۴) $4x + 12y - 10 = 0 \rightarrow m = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

۵) $5x = 3y + 1 \rightarrow 3y = 5x - 1 \xrightarrow{:3} y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \rightarrow m = \frac{5}{3}$

۶)



$$m = \tan 12^\circ = \tan(18.4^\circ) = -\tan 4^\circ = -\sqrt{3}$$

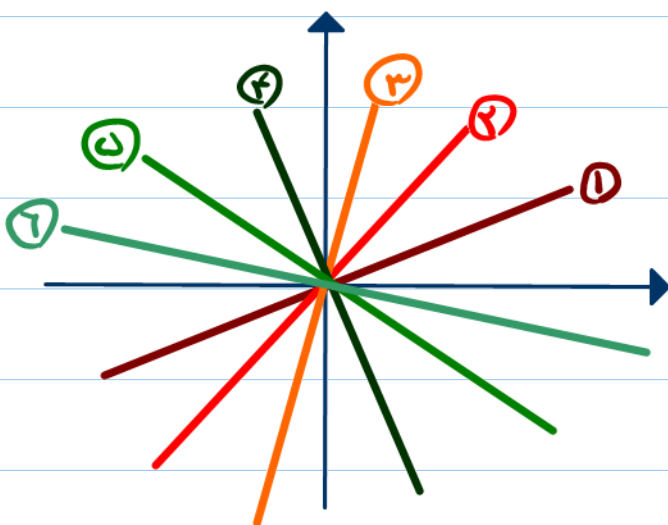
نکته: در خط‌های با شیب مثبت، هر چه خط به محور y ها نزدیک‌تر شود، شیب آن

بیشتری شود و در خط‌های با شیب منفی، هر چه خط به محور x ها نزدیک‌تر شود

شیب آن افزایش می‌یابد.

مثال: شیب خط‌های داده شده، به‌صورت $\{1, 2, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1\}$ است.

هر شیب مربوط به کدام خط است؟



$$m_1 = \frac{1}{2}$$

$$m_4 = -2$$

$$m_2 = 1$$

$$m_5 = -1$$

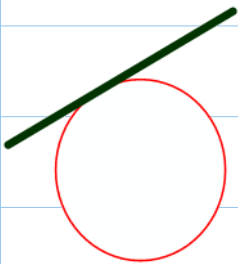
$$m_3 = 2$$

$$m_7 = -\frac{1}{2}$$

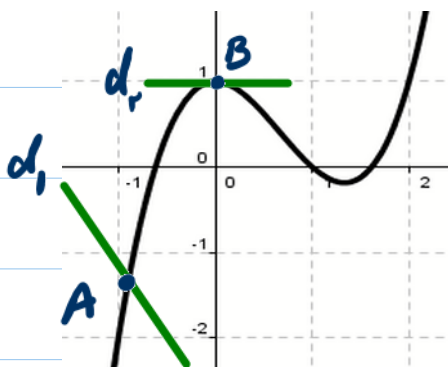
خط مماس بر منحنی :

در هندسه ، خط مماس بر دایره ، خطی تعریف می شود که دایره را فقط در یک نقطه قطع می کند .

ولی این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی ها صادق نیست .



همواره تابع زیر را در نظر بگیرید .



وزن خط احساسی خط d_2 در B

بر تابع مماس است ولی خط d_1 در A

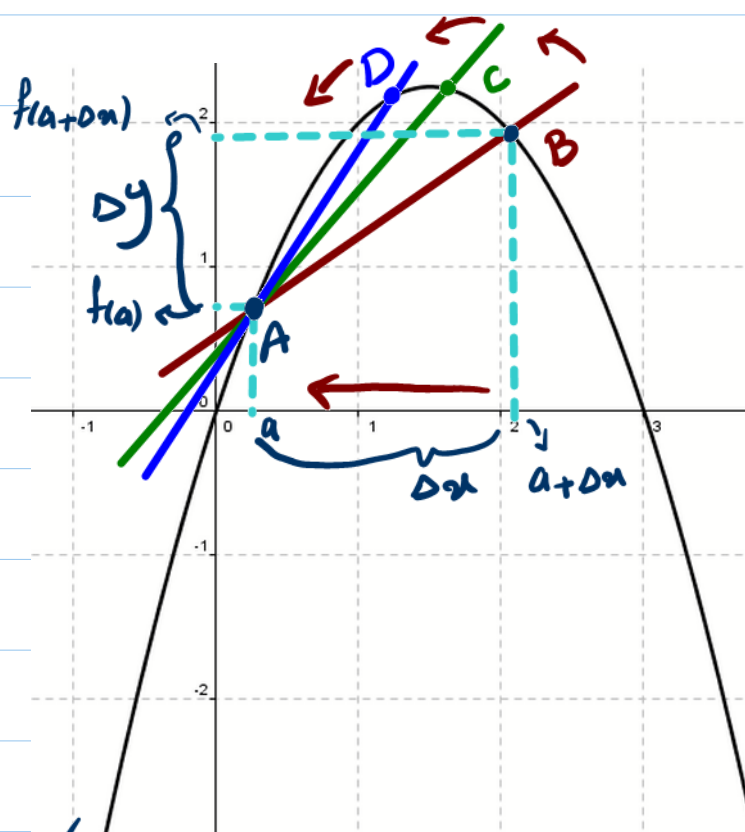
بر منحنی تابع مماس نیست .

تعریف فیردقیق از خط مماس :

خط راستی است که منحنی تابع را در آن نقطه فقط لمس می کند . به صورت فیردقیق

خطی ترف می شود که از دو نقطه واقع بر منحنی که بی نهایت به یکدیگر نزدیک اند می گذرد.

مثال: تابع $y = -x^2 + 3x$ را از نظر بگیرید.



هر خطی که از دو نقطه منحنی می گذرد

را خط قاطع می گوئیم مانند:

AB, AC, AD .

فرض کنید نقطه A ثابت باشد و نقطه B را به نقطه A نزدیک و نزدیک تر می کنیم.

این عمل به دل این است که $\Delta x \rightarrow 0$. ضمن انجام این عمل، خط قاطع حول

نقطه ثابت A گردش می کند. این خط قاطع را رای بد و ضمیمه حری است.

همین ضمیمه حری است که ما می خواهیم خط مماس بر منحنی را در نقطه A باشد.

حال اگر شیب خط قاطع AB را $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در نظر بگیریم. بار دیگر این عمل حدی شیب

خط قاطعی که به نقطه A بسیار نزدیک است به صورت: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ خواهد بود.

تعریف دقیق خط مماس:

فرض کنید تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه

$A(a, f(a))$ عبارت است از خطی که از نقطه A می‌گذرد و دارای شیب است

که از می به حد زیر بدست می‌آید:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرحی که این حد موجود باشد.

تذکره مهم: اگر حد بالا نامتناهی شود یعنی: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$ آنگاه خط مماس، خط

$x=a$ تعریف می‌شود.

نکته: اگر هیچکدام از حالت‌های بالا برقرار نباشد آنگاه خط مماس در A وجود ندارد.

سؤال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

$$a = x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7 \rightarrow A(-2, 7)$$

نقطه مماس

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-2 + \Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((-2 + \Delta x)^2 + 3) - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 3 - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x - 4)}{\cancel{\Delta x}} = 0 - 4 = -4$$

$$y - 7 = -4(x + 2)$$

$$y = -4x - 8 + 7 \rightarrow y = -4x - 1 :$$

معادله خط مماس در نقطه $A(-2, 7)$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

قسمت دوم

جلسه دوم: صفحات ۷۷ تا ۸۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در حله قبل با تعریف خط مماس آشنا شدیم. حال به بحث اصلی یعنی مشتق می پردازیم.

تعریف مشتق:

اگر $a \in D_f$ باشد مشتق تابع f در نقطه a را با $f'(a)$ نشان می دهیم و این گونه تعریف می کنیم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

همانطور که می بینید شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a, f(a))$

دقیقاً برابر مشتق تابع f در $x = a$ است. به حد بالا شیب منحنی در a هم گفته می شود.

نکته: اکثر اوقات از h به جای Δx (استفاده می شود و تعریف مشتق به این صورت

نوشته می شود:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: اگر $f(x) = 3x^2 + 7$ باشد، مشتق تابع f را در نقطه $x = a$ بیابید.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{3(a+h)^2 + 7}^{f(a+h)} - \overbrace{(3a^2 + 7)}^{f(a)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a^2 + 2ah + h^2) + 7 - 3a^2 - 7}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 - 3a^2}{h}$$

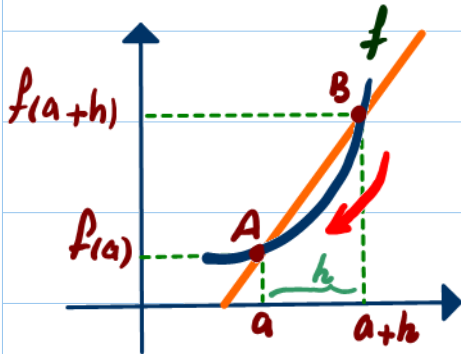
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 6ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h + 6a)}{h}$$

$$= 3 \cdot 0 + 6a = 6a$$

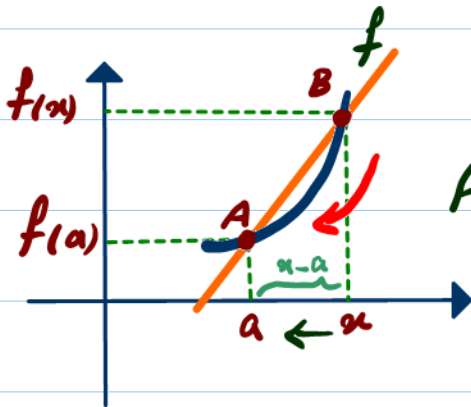
$$f'(a) = 6a$$

حال می‌خواهیم با تعیری در بناگذاری ها تعریف دیگر از مشتق ارائه دهیم. به شکل های

زیر دقت کنید



$$A \text{ در } f' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$$A \text{ در } f' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف دیگر برای مشتق:

اگر $a \in D_f$ باشد، مشتق تابع f در $x=a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

مثال: عرّف $f(x) = -x^2 + \ln x$ ، $f'(1)$, $f'(0)$: نريد

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= -0^2 + \ln 0 \\ &= -0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + \ln x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x^2 - \ln x + 0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x-0)^2}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} -(x-0) = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= -1^2 + \ln 1 \\ &= -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + \ln x - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - \ln x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(x+1)$$

$$= -(1+1) = -2$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-5)$ را در نقطه $x=5$ حساب کنید.

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)\dots(x-5) - 0}{x-5}$$

$$f(5) = (5-1)(5-2)\dots(5-5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال: اگر $f(2) = 0$ و $f'(2) = -3$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2}$ را بیابید.

از اتحاد فرابج استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - f(2))(f(x) + f(2))}{(x-2)(x+2)}$$

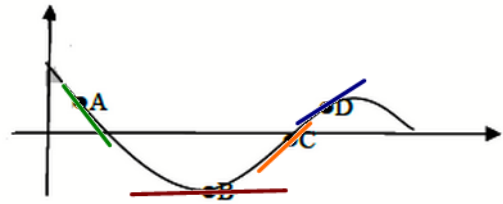
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + f(2)}{x+2}$$

$$= f'(2) \times \frac{f(2) + f(2)}{2+2} = -3 \times \frac{2 \times 0}{4} = -3 \times \frac{0}{4}$$

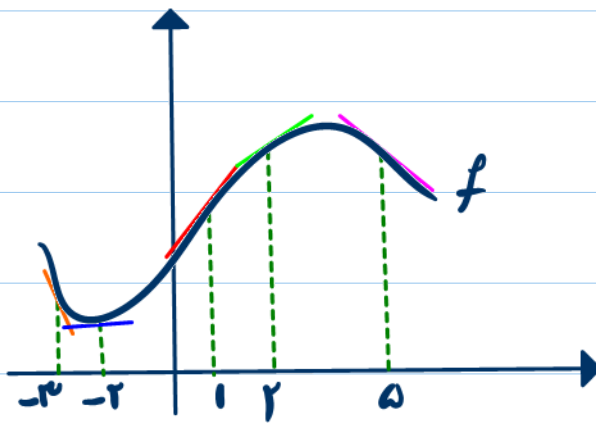
$$= -\frac{15}{2}$$

مثال: نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های داده شده در جدول نظر کنید.

شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه	C	B	D	A



مثال: با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.



درست زیرا خط مماس در $x = -2$ عمودتر است $f'(1) > f'(-2)$ (درست)

درست زیرا خط مماس در $x = 5$ عمودتر است $f'(5) > f'(-3)$ (ب)

نادرست زیرا $f'(-2) < f'(5)$ عدد منفی $\neq$ (ب)

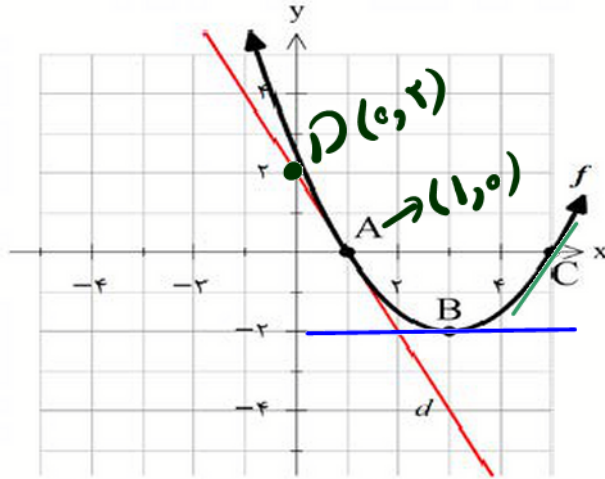
درست. $f'(-3) < f'(-2) < f'(1) < f'(2) < f'(5)$ (ب)

مثال:

در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = 1$ بر نمودار مماس شده است:

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



شیب خط مماس بر f در نقطه $A = f'(1)$ (الف)

$$m_d = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2 \rightarrow f'(1)$$

ب) یک محاسبه
 $m_C > m_B$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

جلسه سوم: حل تمرین

صفحات ۸۱ و ۸۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2}$$

$3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 12 - 4 + 1 = 9$

$3x^2 - 2x - 8 \div x - 2$

درج هدر

۳	-۲	-۸
۳	$2 \times 3 - 2 = 4$	$2 \times 2 - 8 = -4$

باقی‌مانده: $3x + 4$

باقی‌مانده

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = 3 \times 2 + 4 = 10$$

$m = f'(2) = 10$ $A(2, f(2)) \Rightarrow A(2, 9)$

مماس

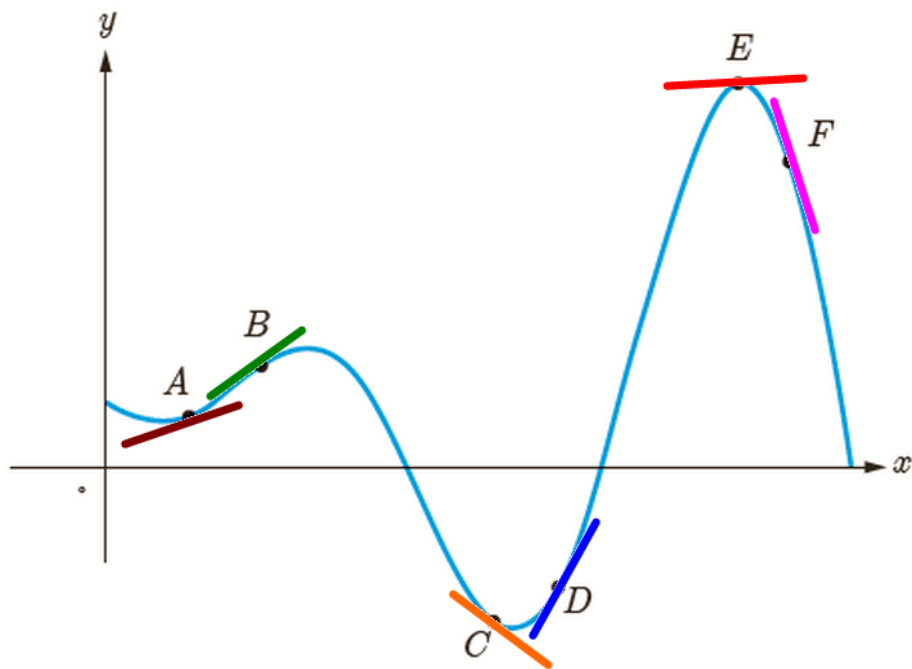
$$y - 9 = 10 \cdot (x - 2)$$

$$y = 10x - 20 + 9 \Rightarrow y = 10x - 11$$

معادله خط مماس

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف»

تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) m_1 : شیب نمودار در نقطه A

ب) m_2 : شیب نمودار در نقطه B

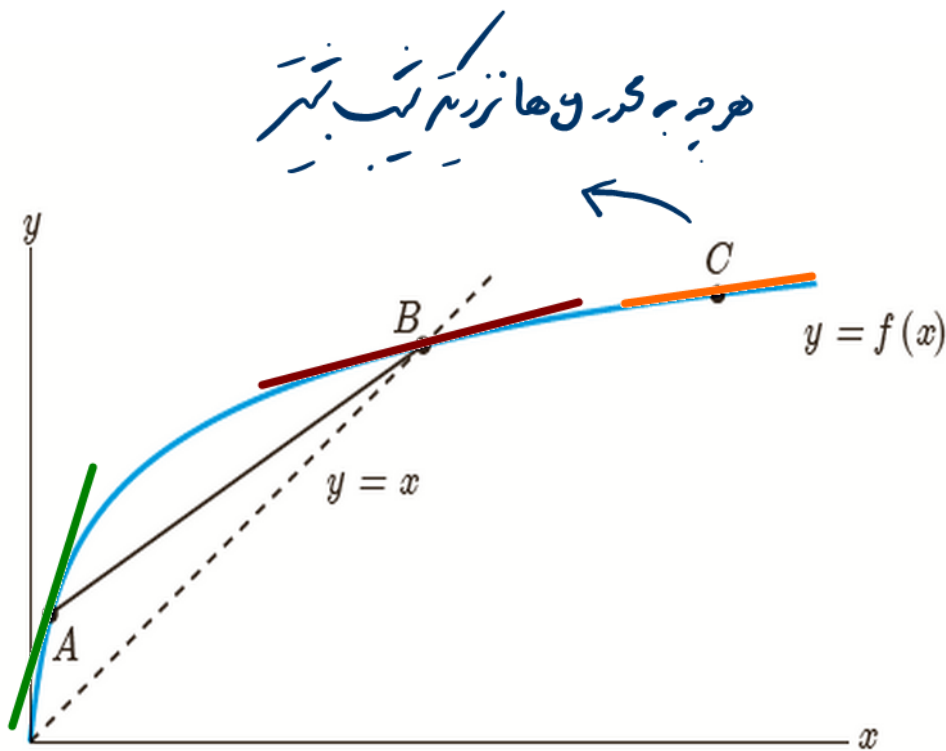
پ) m_3 : شیب نمودار در نقطه C

ت) m_4 : شیب خط AB

ث) $m_5 = 0$: شیب خط $y = 2$

ج) $m_6 = 1$: شیب خط $y = x$

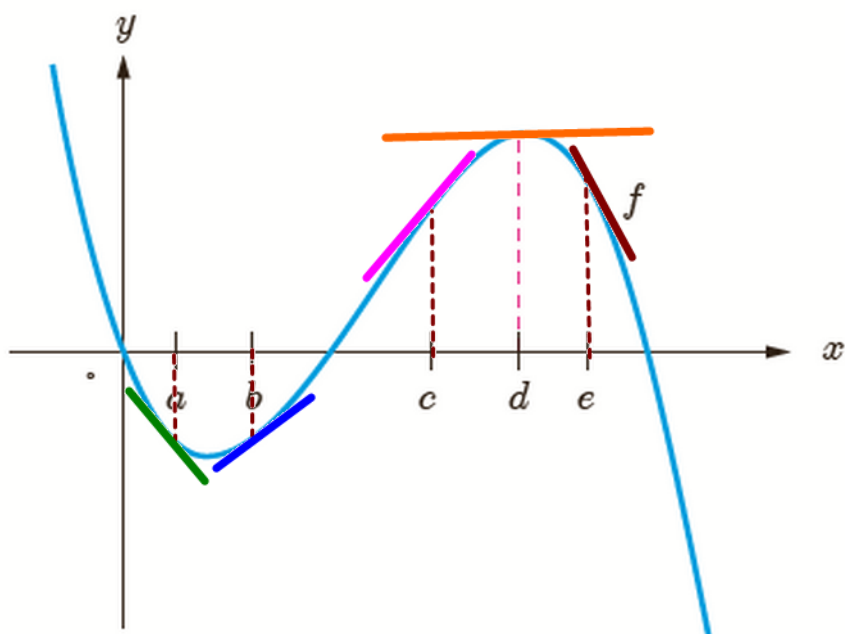
شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_1, m_2, \dots, m_6$ در نظر بگیرید.



$$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$$

با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	-۰/۵
e	-۲



۵ نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) A ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

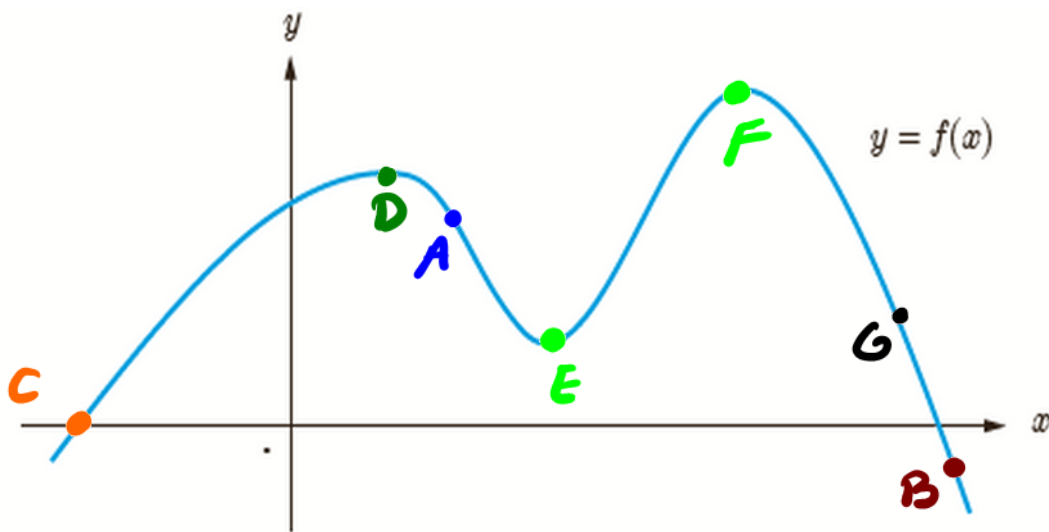
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x) = x^3 - 2$ ، $f'(-1)$ را به دست آورید.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 - (-3)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1}$$

$$= (-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

۷ نقاط A, B, C, D, E, F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک

نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. **نادرست**

ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را m_A با نمایش داده‌ایم) **نادرست**

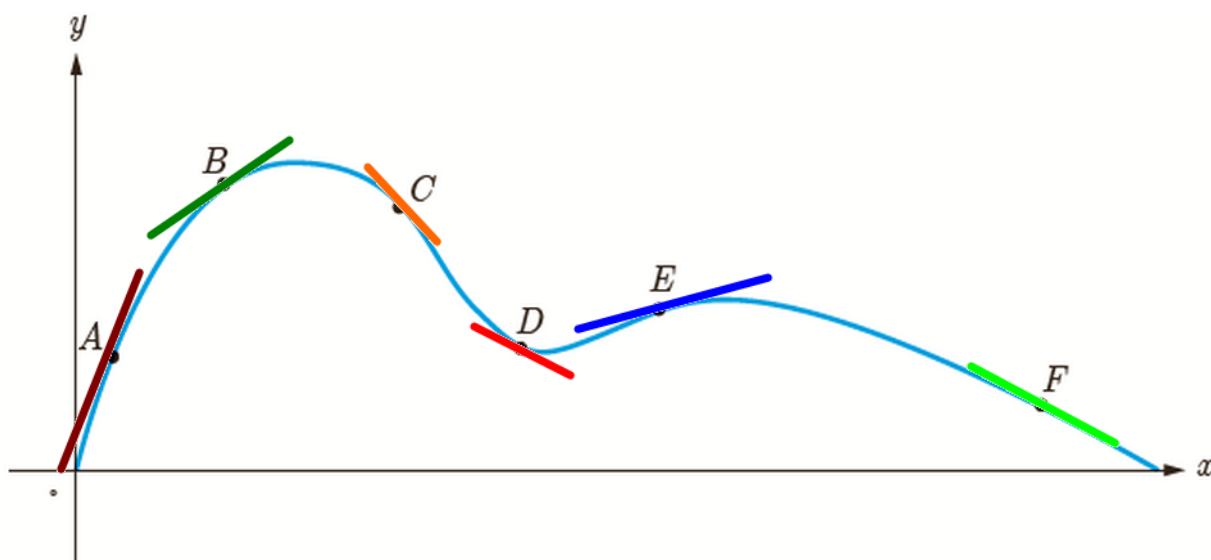
پ) $m_E < m_B < m_A$ **درست**

ت) شیب منحنی در نقاط D, F و C منفی است. **درست**

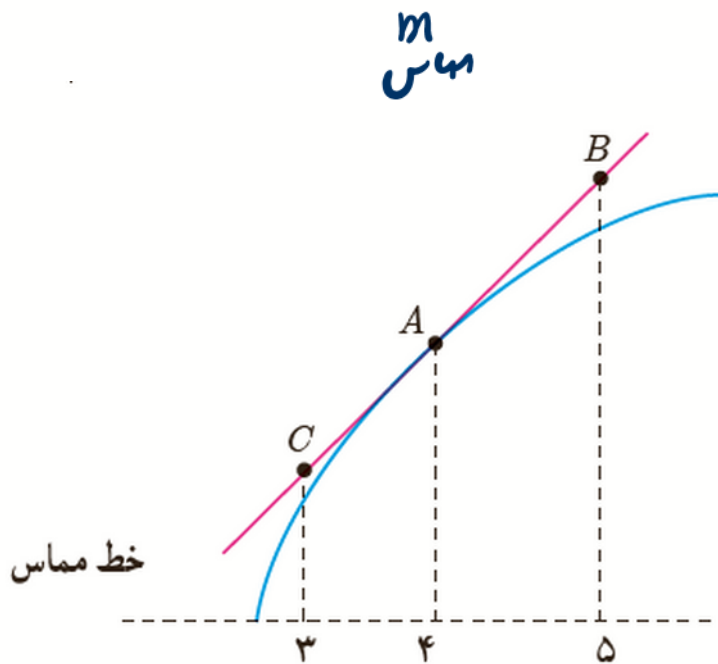
ث) $m_F < m_D < m_C$ **نادرست** ←

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$ **درست**

درست این می‌باشد: $m_C < m_D < m_F$



۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4)=1/5$ و $f(4)=25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



$$A(4, f(4)) \rightarrow A(4, 25)$$

معادله خط مماس بر f در A :

$$y - 25 = 1,5(x - 4)$$

$$y = 1,5x - 6 + 25 \rightarrow y = 1,5x + 19$$

$$x_B = 5 \xrightarrow[\text{B}]{\text{روی خط مماس}} y_B = 1,5 \times 5 + 19 = 7,5 + 19 = 26,5$$

$$x_C = 3 \xrightarrow[\text{C}]{\text{روی خط مماس}} y_C = 1,5 \times 3 + 19 = 4,5 + 19 = 23,5$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت اول

جلسه چهارم: صفحات ۸۴ تا ۸۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

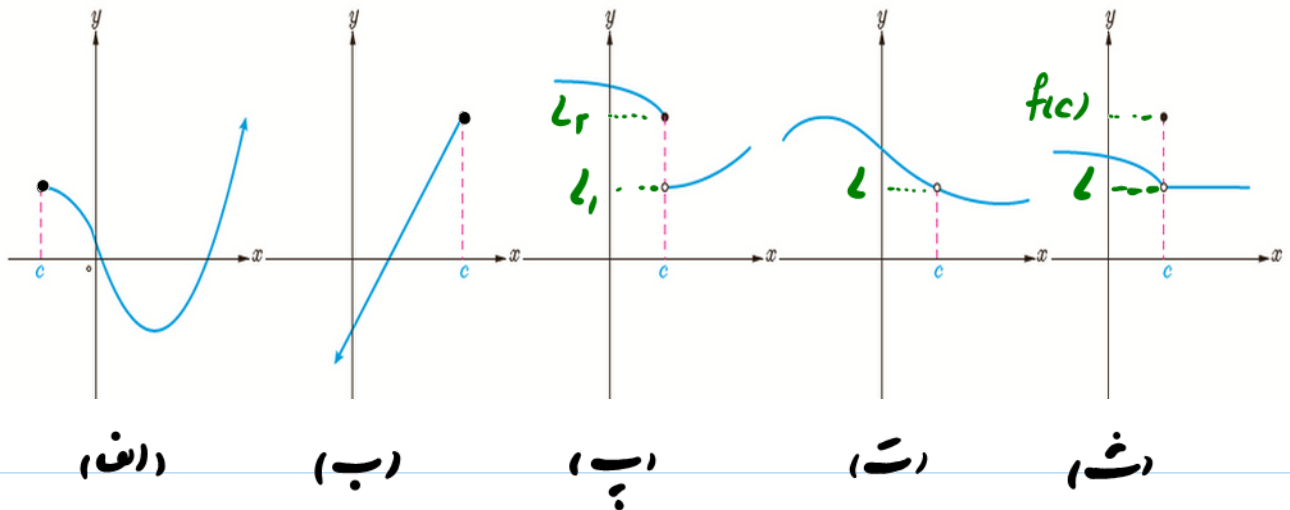
گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری :

تعریف پیوستگی : تابع f را در $x=c$ پیوسته گوئیم هرگاه : $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

یعنی مقادیر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود و با هم برابر باشند .

مثال :



(الف) $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

(ب) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

(پ) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ پس $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

(ت) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود دارد ولی $f(c)$ موجود نیست پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست .

(ث) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجودند ولی با هم برابر نیستند پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

مشتق یک طرفه:

$$x=a, \text{ مشتق راست } f, \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق را با $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم.

$$x=a, \text{ مشتق چپ } f, \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق را با $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: مشتق چپ و راست تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ x^2 + 5 & x < 2 \end{cases}$$

با $x=2$ باید.

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 5 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 2 = 4$$

دقت کنید مقدار $f(2)$ برای مشتق چپ و راست از ضابطه اول بدست می‌آید.

حال من خور هم دارد بحث مشتق پذیری توکم، یعنی بدانیم که تابع در چه نقطه ای مشتق دارد و در چه نقطه ای مشتق ندارد.

تعریف: تابع f را در a مشتق پذیر می گوئیم اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد.

تذکر: وجود $f'(a)$ این معناست که مشتق های چپ و راست موجود، مشخص و برابر باشند.

تفسیر: اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است.

اثبات: بنا به فرض f در a مشتق پذیر است پس $f'(a)$ وجود دارد یعنی:

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n - a} \quad \text{وجود دارد}$$

شرط مورد بودن $f(a)$ برقرار است زیرا در زیر این صورت حد باقی معنات.

حد متناهی را در نظر بگیرد:

$$\lim_{n \rightarrow a} (f(n) - f(a))$$

$$= \lim_{n \rightarrow a} \left((n-a) \times \frac{f(n) - f(a)}{(n-a)} \right) = \lim_{n \rightarrow a} (n-a) \times \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n-a}$$

$$= 0 \times f'(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow a} (f(n) - f(a)) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow a} f(n) - \lim_{n \rightarrow a} \overbrace{f(a)}^{f(a)} = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow a} f(n) = f(a)$$

نتیجہ: اگر تابع f در $a = a$ یوستہ بندہ در a مشتق پذیر نہیست.

تذکر: عکس قضیہ با درست نہیست. یعنی اگر f در $a = a$ یوستہ بندہ لزوماً

در a مشتق پذیر نہیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 2 \\ 1-x & x \geq 2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-1) = 0, \quad \underline{f(2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0 \quad \text{پی تابع } f \text{ در } 2 \text{ یوستہ است}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

پی تابع f در $x=2$ مشتق پذیر نہیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

در حد $x=1$ داریم $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ ، $f(1) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وجود ندارد.

چون تابع در $x=1$ پیوسته نیست لذا مشتق پذیر هم نخواهد بود.

مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x \geq 2 \\ x^2+b & x < 2 \end{cases}$ در $x=2$ مشتق پذیر باشد، a و b را بیابید.

شرط پیوستگی: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^+} (ax+1) = 2a+1$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2+b) = 4+b$ ، $f(2) = 2a+1$

$$\Rightarrow 2a+1 = 4+b \rightarrow 2a+1-4=b \rightarrow b=2a-3$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax+1 - (2a+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax+1-2a-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(x-2)}{x-2} = a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+b - (2a+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2a - 3 - 2a - 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2+2 = 4$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow a = 4 \rightarrow b = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$a = r, b = 0$$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x^r & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f_+(0)$, $f_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

بجز در $x=0$ پیوسته است $\rightarrow \underline{f(0)=0}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^r = 0^r = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^r-0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ موجود نیست.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت دوم

جلسه پنجم: صفحات ۸۶ تا ۸۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مشق نپذیری

رشته اول: همانطور که در جلسه قبلی دیدیم تابع در نقاطی که در آن ها پیوسته نیست

مشق نپذیر نیست.

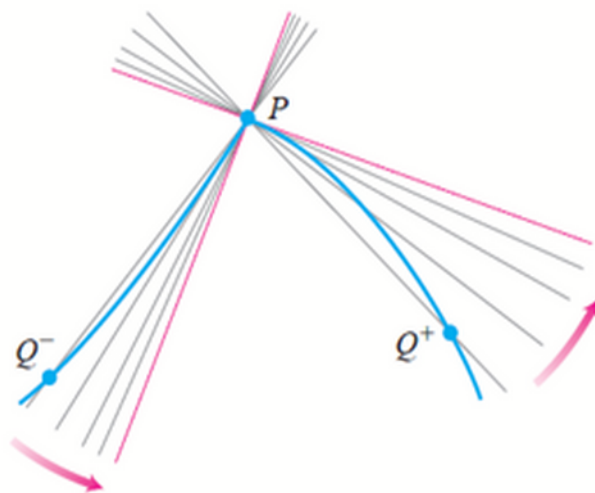
رشته دوم: اگر f در a پیوسته باشد، چنانچه مشق های چپ و راست

موجود، مشابه و نابرابر باشند و یا حد از ترکیبی از مشق های چپ و راست

نا مشابه باشد، f در a مشق نپذیر نیست. به این نقطه، نقطه گوشه ای

یا زاویه دار می گوئیم.

تذکر: در نقاط گوشه ای دو نیم مساحت بر تابع قابل رسم است.



مثال: به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

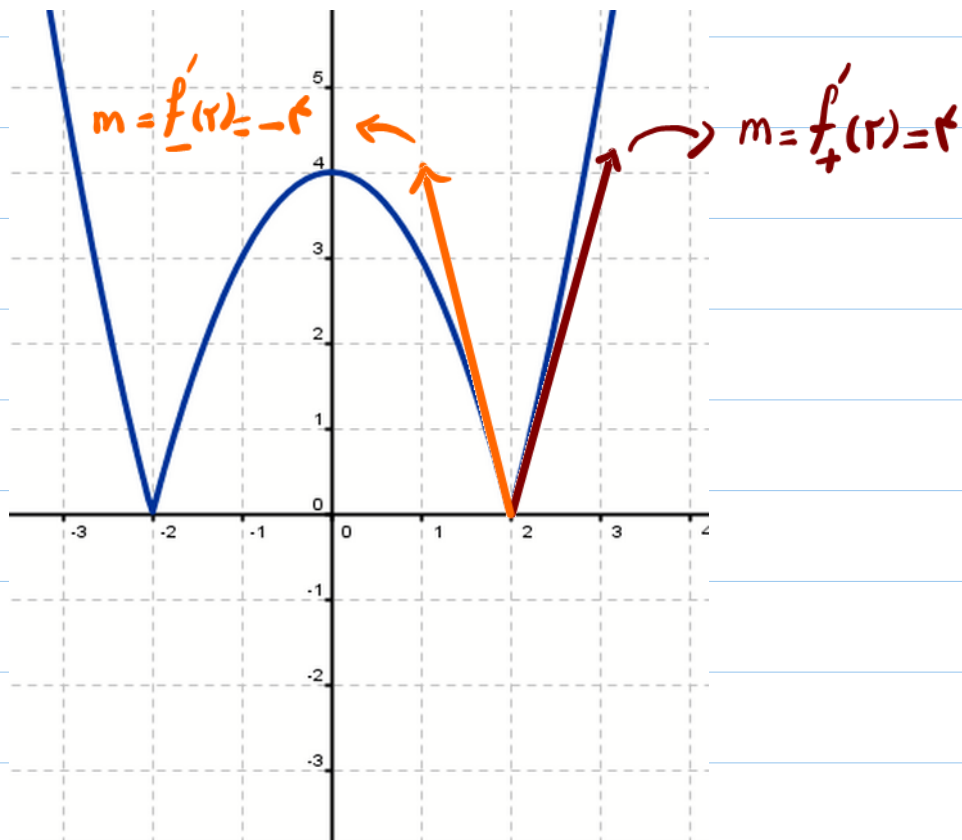
$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

	$x \rightarrow 2^+$	$x \rightarrow 2^-$
$x^2 - 4$	+	-
$x - 2$	+	-

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ ، مشتق پذیری در این نقطه برقرار نیست.



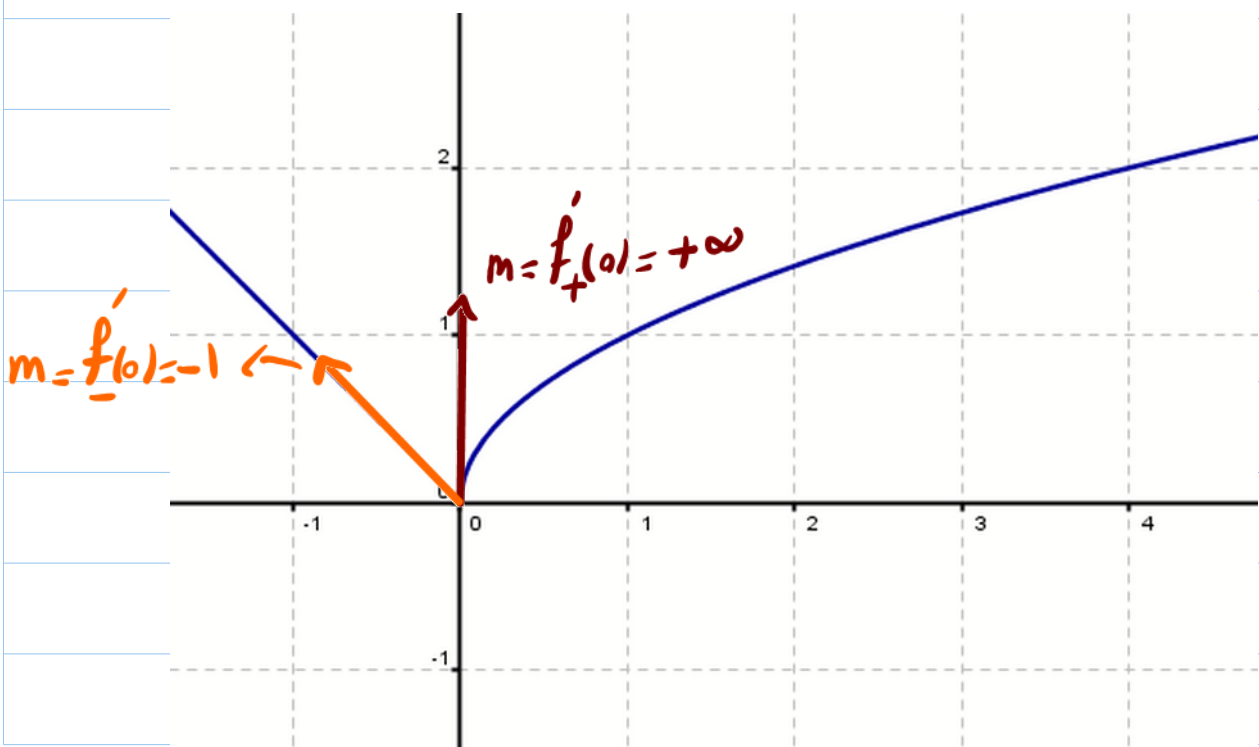
مثال: نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ در نقطه گسسته دارد.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \overset{x \times \sqrt{x}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

چون $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ در $x=0$ مشتق یک‌پارچه در این نقطه نقطه گسسته است.



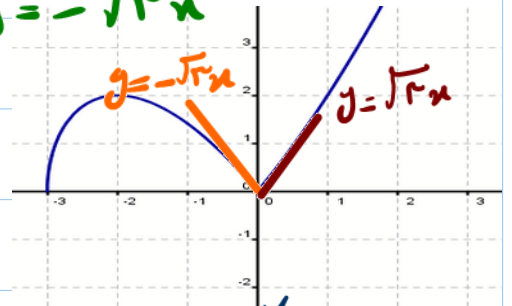
مثال: معادله نیم‌مماس‌های تابع $f(x) = |x|\sqrt{x+4}$ را در $x=0$

بدست آورید.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt{x+4} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x+4}}{x} = \sqrt{4}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|\sqrt{x+4} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{x+4}}{x} = -\sqrt{4}$$

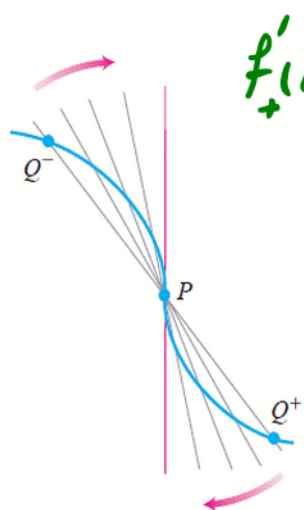
نیم‌مماس راست: $y - 0 = \sqrt{4}(x - 0) \rightarrow y = \sqrt{4}x$ $A(0,0)$
نیم‌مماس چپ: $y - 0 = -\sqrt{4}(x - 0) \rightarrow y = -\sqrt{4}x$



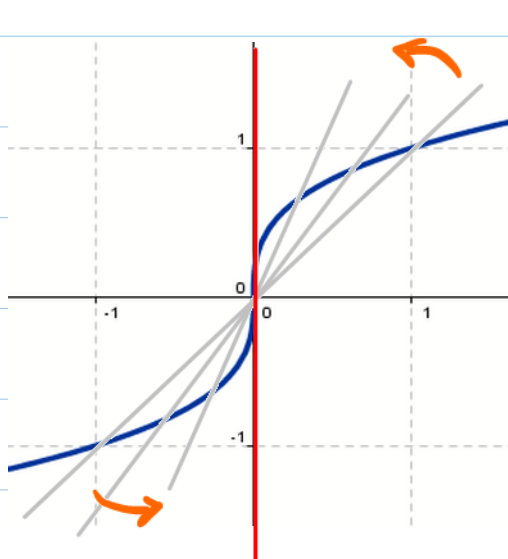
دسته سوم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست در a نامساوی

رسم‌یافت باشند، f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست.

نکته: در این حالت تابع در این نقطه دارای **مماس قائم** با معادله $x=a$ است.



$$f'_+(a) = f'_-(a) = -\infty$$



$$f'_+(a) = f'_-(a) = +\infty$$

مثال: مشتق پذیری تابع $g = \frac{\sqrt[n]{x-1}}{x}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

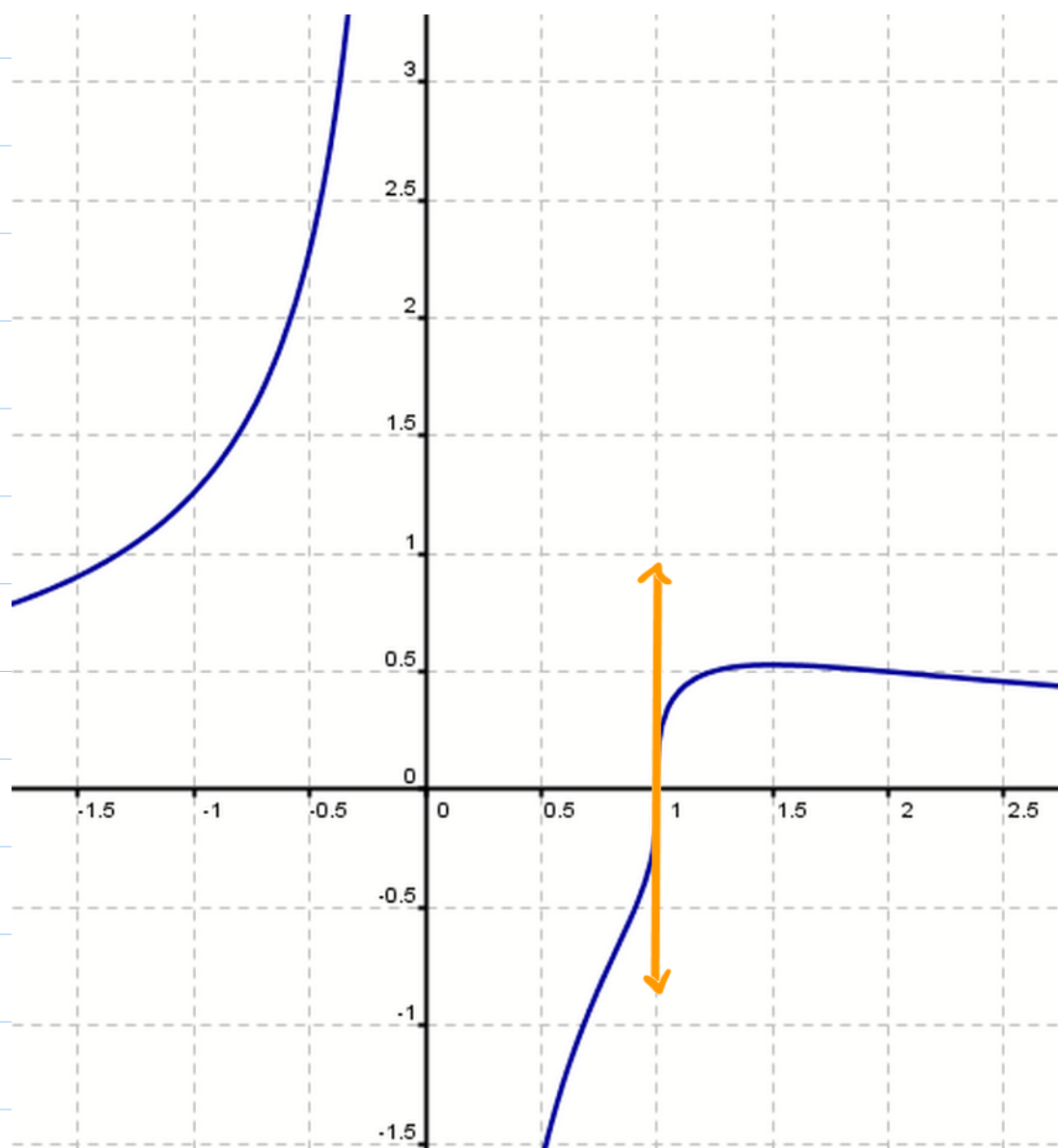
$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\sqrt[n]{x-1}}{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[n]{x-1}}{x(x-1)} \times \frac{\sqrt[n]{(x-1)^r}}{\sqrt[n]{(x-1)^r}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{\sqrt[n]{(x-1)^n}}}{x \cancel{(x-1)} \sqrt[n]{(x-1)^r}} = \frac{1}{1 \times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)}{x(x-1) \sqrt[n]{(x-1)^r}} = \frac{1}{1 \times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

به طریقی که :

چون تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست و تابع در این نقطه مماس قائم دارد.

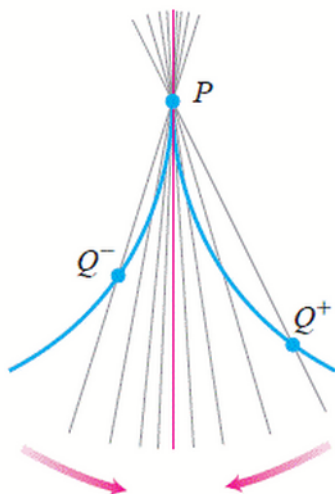


رسته چهارم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق چپ در a ناشی و

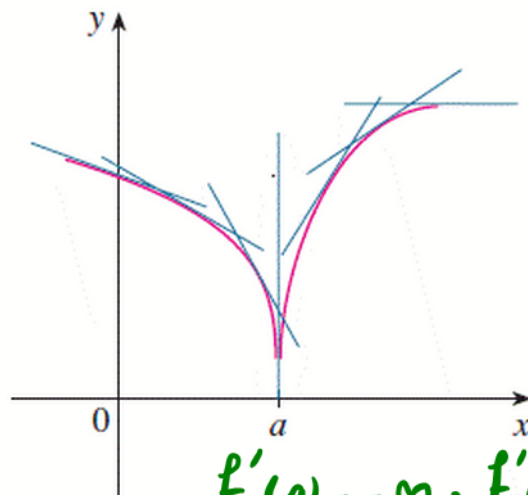
خیز هم داشته باشد، f در a مشتق پذیر نیست. به این نقطه، نقطه

بازگشت گفته می شود.

نکته: در نقطه بازگشت مسائل قلم بر بایع قابل رسم است.



$$f'_-(a) = +\infty, f'_+(a) = -\infty$$



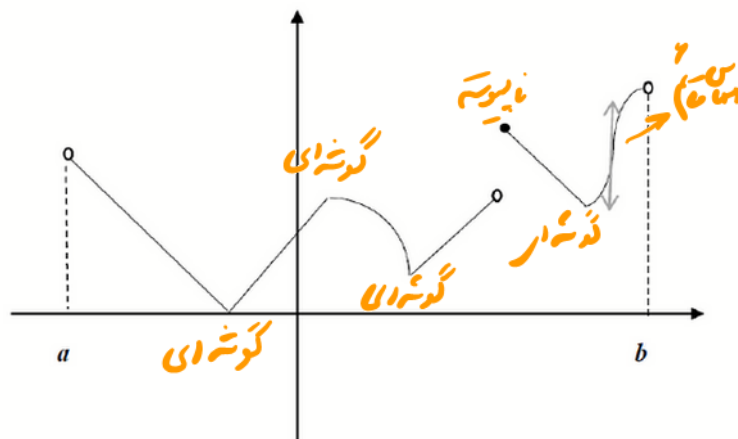
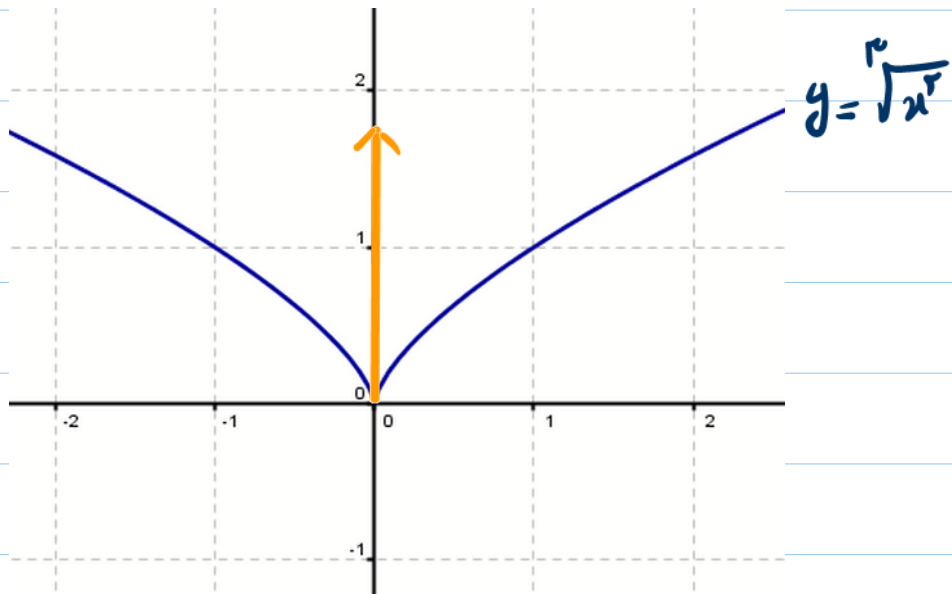
$$f'_-(a) = -\infty, f'_+(a) = +\infty$$

مثال: نشان دهید که $y = \sqrt{x}$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

به طریقی



مثال: نمودار تابع f با دامنه (a, b) به شکل مقابل است.

این تابع در چند نقطه از دامنه اش مشتق پذیر نیست؟

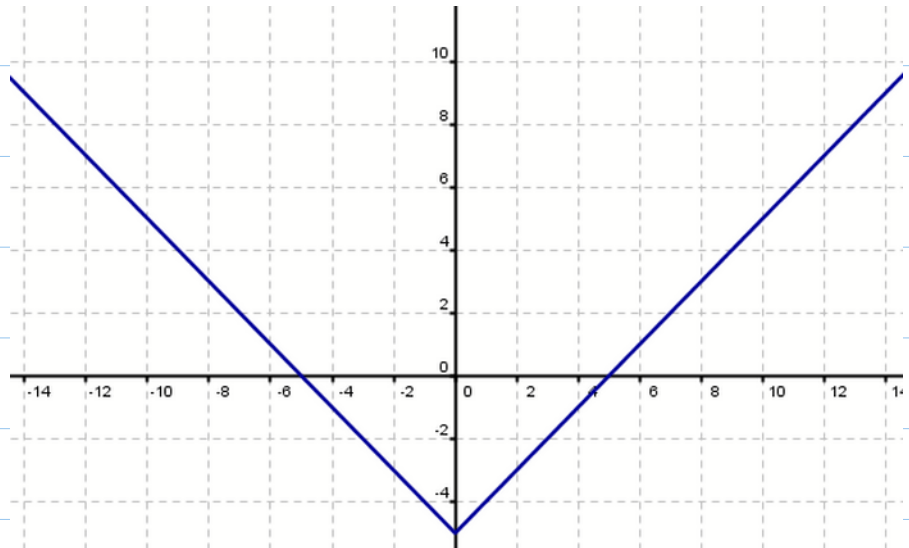
- | | |
|---------------|--------------|
| (۱) چهار نقطه | (۲) پنج نقطه |
| (۳) شش نقطه | (۴) هفت نقطه |

مثال: توابع زیر در چه نقطه مشتق پذیر نیستند.

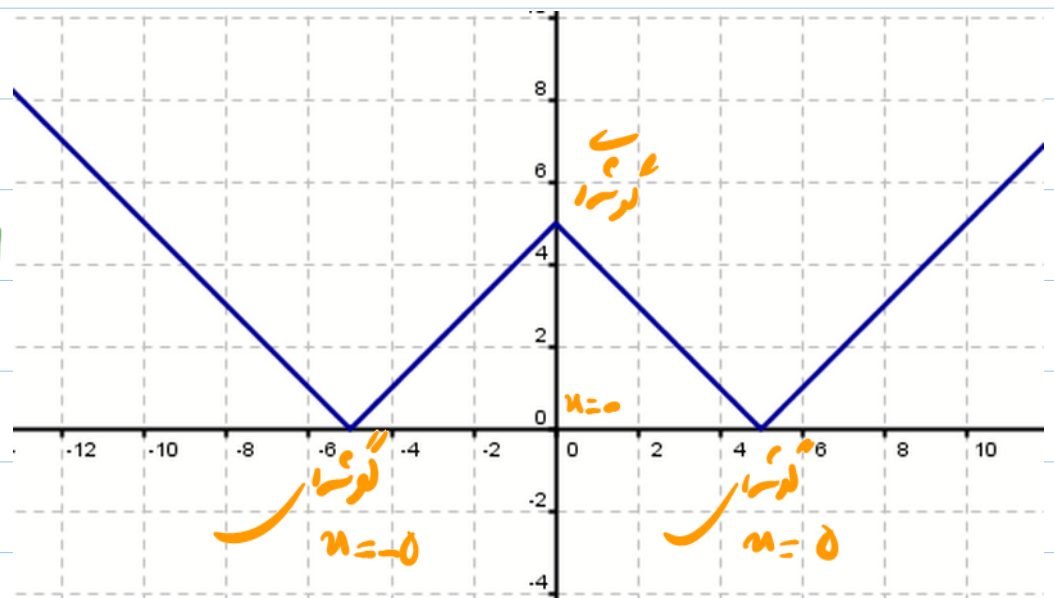
الف) $f(x) = ||x| - 5|$

ب) $g(x) = |2x - |x - 3||$

الف $f_1(x) = |x| - 5$



$f_1(x) = ||x| - 5|$



در سه نقطه

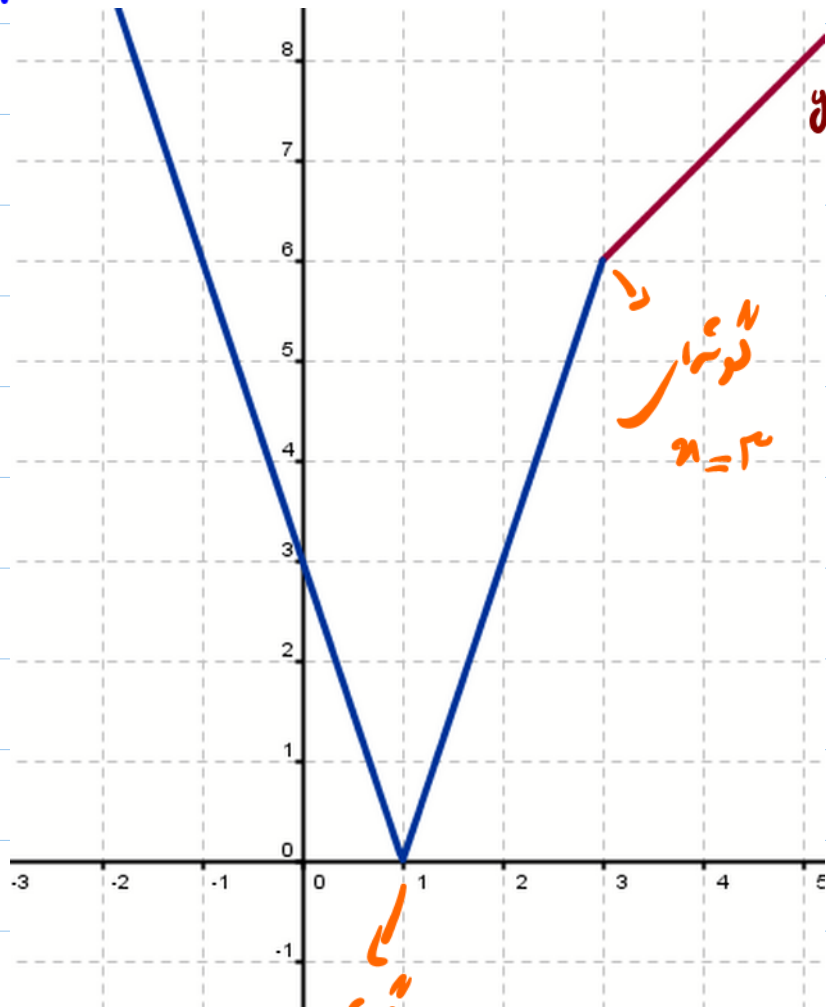
$$\text{بـ) } g(x) = |2x - |x - 3||$$

$$x > 3 \rightarrow g(x) = |2x - x + 3| = |x + 3| = x + 3$$

$$x < 3 \rightarrow g(x) = |2x - (-(x - 3))| = |2x + x - 3| = |3x - 3|$$

$$g(x) = \begin{cases} |3x - 3| & x \leq 3 \\ x + 3 & x > 3 \end{cases}$$

$$y = |3x - 3|$$



نقطه زانو $x=1$

در دو نقطه

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت سوم

جلسه ششم: صفحات ۹۰ تا ۹۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

تابع مشتق :

تعریف: تابع مشتق f' که با f نه تنها در دامنه مشترک تابعی است که دامنه مشتق معبره

همه تقاطع است که تابع در آنجا مشتق پذیر است و مقدار آن در نقطه a از

دامنه مشتق برابر است با :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: تابع مشتق، $f(x) = \sqrt{x}$ را بدست آورید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

همانطور که تا بحال دیدیم یافتن مشتق یک تابع با استفاده از تعریف، خیلی زمان بر

است. مانند آنچه در مثال قبل برای تابع $f(x) = \sqrt{x}$ دیدیم، می توانیم

قواعدی را بیان کنیم که با استفاده از آنها مشتق توابع را بیابیم.

قواعد مشتق گیری

۱. مشتق تابع ثابت صفر است.

مثال:

$$f(x) = 0 \rightarrow f'(x) = 0$$
$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = 0$$

۲. مشتق تابع $f(x) = ax^n$ برابر است با حاصل ضرب، ضریب عددی در توان متغیر در

متغیر به توان یک واحد کمتر یعنی: $f'(x) = anx^{n-1}$

مثال:

$$y = x \rightarrow y' = 1 \times x^{1-1} = 1 \times x^0 = 1 \times 1 = 1$$

$$y = 4x \rightarrow y' = 4x^0 = 4$$

$$y = x^3 \rightarrow y' = 3x^{3-1} = 3x^2$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

حالت خاص:

$$(x)' = 1$$

$$(ax)' = a$$

۳. مشتق جمع یا تفریق چند تابع برابر است با جمع یا تفریق مشتق تک تک آنها.

مثال: $f(x) = 9x^4 - 2x^2 + \frac{1}{x} + 7x - \sqrt{2}$

$$f'(x) = 04x^3 - 2x + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} x^{\frac{1}{x}-1} + 7 + 0$$

$$f'(x) = 04x^3 - 2x + \frac{1}{x^2} + 7$$

۴. مشتق ضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در خود دومی بعلاوه مشتق دومی در خود

اولی یعنی: $(f \times g)'(x) = f'g + g'f$

مثال: $f(x) = (\sqrt{x} + 2)(x^3 + 4x^2 + x)$

$$f'(x) = (\sqrt{x})(x^3 + 4x^2 + x) + (2x^2 + 12x + 1)(\sqrt{x} + 2)$$

۵. مشتق تقسیم دو تابع برابر است با مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در

خود صورت تقسیم بر خود مخرج به توان دو یعنی: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

مثال: $f(x) = \frac{\sqrt{x}-9}{x^2+2x}$

$$f'(x) = \frac{(21x^2)(x^2+2x) - (2x^2+2)(\sqrt{x}-9)}{(x^2+2x)^2}$$

1) $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ 2) $(\frac{a}{x})' = -\frac{a}{x^2}$: خاص

3) $(\frac{ax+b}{cx+d})' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

مثال: $y = \frac{1}{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$

$y = \frac{2x+6}{3x-4} \rightarrow y' = \frac{2(-4)-6(3)}{(3x-4)^2} = \frac{-26}{(3x-4)^2}$

۶. مشتق توابع رادیکالی با فرجه دو برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر دو برابر خود

رادیکال یعنی اگر $f(x) = \sqrt{u}$ که u تابع بر حسب x باشد آنگاه $f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

مثال: $f(x) = \sqrt{3x^2-x+1} \rightarrow f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$

$g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$

$h(x) = \sqrt{(x^2+2x)(1-4x+\frac{1}{x})}$

$h'(x) = \frac{(2x+2)(1-4x+\frac{1}{x}) - (-4-\frac{1}{x^2})(x^2+2x)}{2\sqrt{(x^2+2x)(1-4x+\frac{1}{x})}}$

خاص: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۷. مشتق توابع رادیکالی با فرجه سه برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر سه برابر خود

رادیکال به توان دو یعنی اگر $f(x) = \sqrt[3]{u}$ که u تابع بر حسب x باشد آنگاه

$$f'(x) = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-8}{x+1}} \rightarrow g'(x) = \frac{\frac{2-(-8)}{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2x-8}{x+1}\right)^2}}$$

حالت خاص: $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۸. مشتق هر تابع تواندار برابر است با حاصلضرب ضریب عددی (در صورت وجود) در

توان تابع در خود تابع با توان یک واحد کمتر در مشتق تابع بدون توان یعنی:

$$(au^n)' = anu^{n-1}u'$$

مثال: $y = 4(3x^4 - 7x + 1)^5$

$$y' = 20(3x^4 - 7x + 1)^4(12x^3 - 7)$$

$$y = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}x^2 \right)^3$$

$$y' = 3 \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}x^2 \right)^2 \times \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{2}x \right)$$

۹. مشتق توابع مثلثاتی:

مشتق سینوس یک کمان برابر است با مشتق کمان در کسینوس همان کمان.

مشتق کسینوس یک کمان برابر است با منهای مشتق کمان در سینوس همان کمان.

مشتق تانژانت یک کمان برابر است مشتق کمان در یک بعلاوه مربع تانژانت همان کمان.

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$$

مثال:

$$y = \sin(4x + 5\sqrt{x})$$

$$y' = \left(4 + 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cos(4x + 5\sqrt{x})$$

$$y = \cos\left(\frac{2x+1}{x^2-4x}\right)$$

$$y' = - \frac{2(x^2-4x) - (2x+1)(2x-4)}{(x^2-4x)^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2-4x}\right)$$

$$y = \tan\left(2x + \frac{1}{x}\right)$$

$$y' = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \tan^2\left(2x + \frac{1}{x}\right)\right)$$

مثال: مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱) $f(x) = (x^2 + 1)^3 (5x - 1)$

$$f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 (2x) (5x - 1) + (5)(x^2 + 1)^3$$

۲) $g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

$$g'(x) = \frac{(9)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۳) $f(x) = \left(\frac{x^2}{3x - 1}\right)^5$

$$f'(x) = 5\left(\frac{x^2}{3x - 1}\right)^4 \times \frac{2x(3x - 1) - (3)x^2}{(3x - 1)^2}$$

$$r) \quad g(x) = (\sqrt{rx+r})(x^r + 1)$$

$$g'(x) = \left(\frac{r}{2\sqrt{rx+r}} \right) (x^r + 1) + (rx^r)(\sqrt{rx+r})$$

$$o) \quad f(x) = \frac{r \sin\left(\frac{x}{r}\right)}{x^r + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(r \times \frac{1}{r} \cos \frac{x}{r}\right)(x^r + \sqrt{x}) - \left(rx + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(r \sin \frac{x}{r}\right)}{(x^r + \sqrt{x})^2}$$

$$4) \quad g(x) = \sin^r(\Delta x)$$

$$g'(x) = r \sin^{r-1}(\Delta x) \times \Delta \cos \Delta x$$

$$v) \quad g(x) = r \tan^r x + \cos x^r$$

$$g'(x) = r \tan^{r-1} x (1 + \tan^2 x) + (-rx) \sin x^{r-1}$$

$$1) \quad g(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$g'(x) = \frac{(-\cos x)(\cos x) - (-\sin x)(1 - \sin x)}{\cos^2 x}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت چهارم

جلسه هفتم: صفحات ۹۶ تا ۹۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

مثال: اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(3f + 2g)'(1)$ برابر است.

نکته: $(kf)' = k f'$

$$(3f + 2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1)$$

$$= 3 \times 3 + 2 \times 5 = 9 + 10 = 19$$

مثال: اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ باشد، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

یادآوری: نوشتن معادله خط مماس بر f در نقطه A :

۱- تعیین مختصات نقطه A : $(A, f(A))$

۲- $m = f'(A)$

۳- معادله خط مماس: $y - f(A) = m(x - A)$

$$f'(x) = 6x - 2 \rightarrow f'(2) = 6(2) - 2 = 10 \rightarrow m = f'(2) = 10$$

$$x = 2 \rightarrow y = f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 12 - 4 + 1 = 9 \rightarrow (2, 9)$$

$$y - 9 = 10(x - 2) \rightarrow y = 10x - 20 + 9 \rightarrow y = 10x - 11$$

مثال: اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 1$ ، $g(2) = -3$ و $g'(2) = 2$ ، مقادیر $(fg)'(2)$ و $(f+g)'(2)$ را به دست آورید.

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 1 \times (-3) + 2 \times 3 = -3 + 6 = 3$$

$$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 1 + 2 = 3$$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

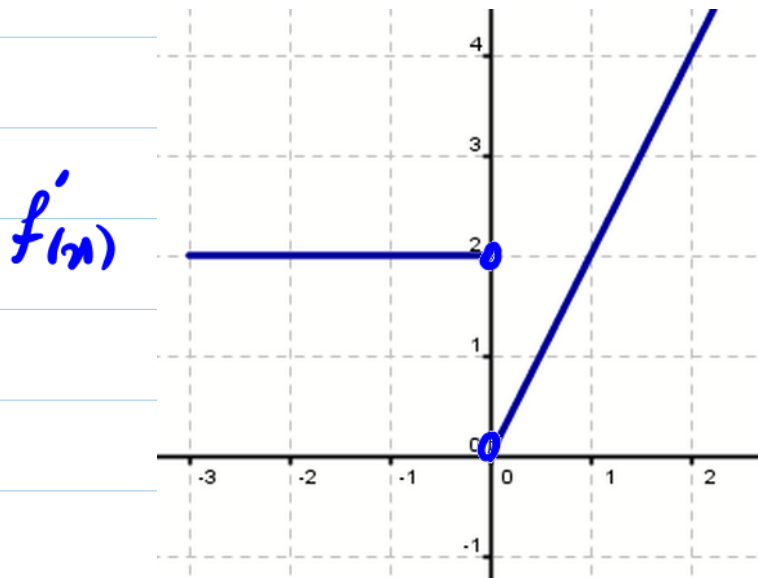
الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

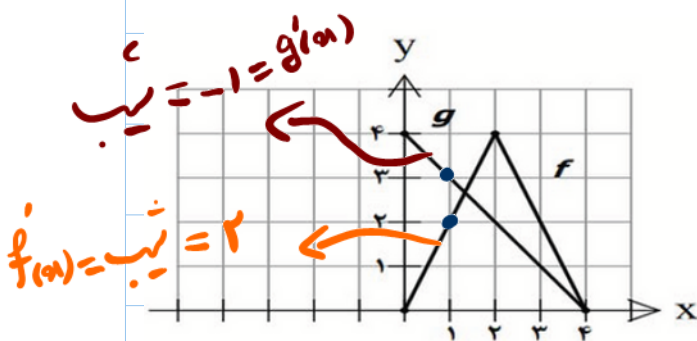
$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ \text{وجود ندارد} & x = 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

تابع در هر مشتق در ریت $f'_-(0) = 2 \neq 0$, $f'_+(0) = 2 \times 0 = 0$



مثال: نمودار تابع f, g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(1)$ را بیابید.



$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \rightarrow h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

چون تابع f به یک خط راست، شیب خطها همان تابع مشتق شود.

رَبْخَو
 $g(x) = ax + b \rightarrow g'(x) = a :$

$$h'(1) = \frac{2 \times 2 - (-1) \times 2}{3^2} = \frac{7+2}{9} = \frac{1}{9}$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ ، کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{7}{12}$ (۳) ✓

$\frac{5}{12}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(5-2x) - (-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}$$

$$f'(4) = \frac{\frac{1}{2}(5-1) + 2 \times 2}{(5-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2} + 6}{4} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{12}{2}}{4} = \frac{\frac{11}{2}}{4}$$

$$= \frac{11}{2 \times 4} = \frac{11}{8}$$

مثال: مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3$ در نقطه $x = 2$ ، کدام است؟

$-\frac{15}{4}$ (۴) ✓

$-\frac{5}{2}$ (۳)

$-\frac{5}{4}$ (۲)

$-\frac{3}{4}$ (۱)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-x)^3 - 3(x^2-x)^2(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(n) = \frac{(n^r - n)^r ((r+1)(n^r - n) - r(r+1)(n^r + r))}{(n^r - n)^4}$$

$$f'(n) = \frac{(r+1)(n^r - n) - r(r+1)(n^r + r)}{(n^r - n)^4}$$

$$f'(2) = \frac{(4)(2) - 2(4)(1)}{2^4} = \frac{12 - 8}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

مثال: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{3}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{3}$ (3) ✓ $-\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (1)

شرط پیوستگی:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} -\frac{1}{3}x^2 + bx + c = -2 - 2b + c$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{5-2x} = \sqrt{5-2(-2)} = \sqrt{9} = 3 = f(-2)$$

$$\Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \rightarrow -2b + c = 5 \quad (1)$$

برابری مشتق در $x = -2$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} & x < -2 \\ -x + b & x > -2 \end{cases}$$

$$f'_+(-2) = -(-2) + b = 2 + b$$

$$f'_{-}(-2) = \frac{-2}{2\sqrt{0+4}} = \frac{-1}{2}$$

$$f'_{+}(-2) = f'_{-}(-2) \Rightarrow 2+b = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$

شرط پیوستگی

$$(1) \rightarrow -2b + c = 0 \rightarrow -2(-\frac{5}{2}) + c = 0$$

$$c = 0 - \frac{14}{2} \rightarrow c = -7$$

مثال: مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[m]{\left(\frac{2x-x^2}{2x+5}\right)^n}$ در نقطه $x = -2$ ، کدام است؟

۶ (۴) ✓ ۵ (۳) ۴ (۲) ۳ (۱)

$$(\sqrt[m]{u^n})' = \frac{n u^{n-1} u'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

نکته:

$$f'(x) = \frac{2 \frac{(2-2x)(2x+5) - 2(2x-x^2)}{(2x+5)^2}}{2 \sqrt[2]{\left(\frac{2x-x^2}{2x+5}\right)^{2-2}}}$$

$$f'(-2) = \frac{2 \frac{4(-1) - 2(-4)}{1}}{2 \sqrt[2]{\frac{-4}{-1}}} = \frac{2(-4+4)}{2\sqrt{4}} = \frac{2 \times 1 \times 1}{4} = 0$$

مشتق تابع مرکب: (قاعده زنجیری)

اگر f, g دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه: $(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$

نماد دیگر: $y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

مثال: اگر $f(x) = x^2 - x + 1$ و $g(x) = 2 - x^2$ ، مقدار $(g \circ f)'(1)$ را بیابید.

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) g'(f(1))$$

$$f'(x) = 2x - 1 \rightarrow f'(1) = 2 - 1 = 1, \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$g'(x) = -2x \rightarrow g'(f(1)) = g'(1) = -2 \times 1 = -2$$

$$(g \circ f)'(1) = 1 \times (-2) = -2$$

مثال: اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)'(2) = 4$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱) ✓

$$(f \circ g)'(2) = 4 \rightarrow g'(2) f'(g(2)) = 4 \quad (1)$$

$$g'(x) = \frac{-2-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = \frac{-3}{1} = -3$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} (-1) f'(0) = 4 \rightarrow f'(0) = \frac{4}{-1} = -4$$

مشتق مرتبه دوم :

اگر تابع مشتق $y = f(x)$ مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم را با $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم. در برای محاسبه آن از مشتق اول یعنی $f'(x)$ یک بار دیگر مشتق می‌گیریم.

مثال: مشتق مرتبه دوم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 12x$

$$f'(x) = 15x^2 - 14x + 12$$

$$f''(x) = 30x - 14$$

ب) $f(x) = \sqrt{3x+1} \rightarrow f(x) = (3x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (3x+1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} (3x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) (3x+1)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4} (3x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-9}{\sqrt[3]{(3x+1)^4}} \rightarrow f''(x) = \frac{-9}{\sqrt[3]{(3x+1)^4}}$$

مشتق پذیری روی بازه :

الف) تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

ب) تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد

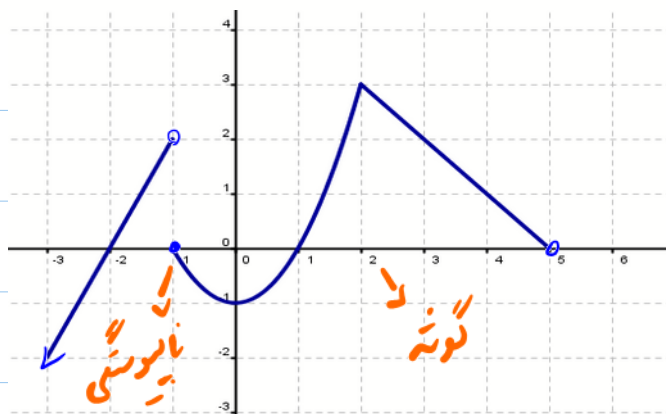
و در $x=a$ مشتق راست در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

پ) مشتق پذیری روی بازه های (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$

$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ به طر مشابیه قریب شود.

کار در کلاس

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 \leq x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه های $[-1, 1]$, $(2, 5)$ و $[0, 2]$ بررسی کنید.



مشتق چپ : $[-1, 1]$
مشتق چپ : $(2, 5)$

مشتق چپ زیر $x=1$: $[0, 2]$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و

آهنگ لحظه‌ای تغییر

جلسه هشتم: صفحات ۱۰۲ تا ۱۰۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

آهنگ متوسط و کلمه ای تغییر

اگر ماشینی مسافت ۱۸ کیلومتر را در ۱۵ دقیقه طی کند سرعت متوسط آن $90 = \frac{18}{\frac{1}{2}}$ کیلومتر بر ساعت است. یعنی در این بازه زمانی به طور متوسط در هر ساعت ۹۰ کیلومتر را طی می کند. اگر بازه زمانی را خیلی کوچک کنیم سرعت متوسط به سرعت کلمه ای نزدیک می شود. یا وقتی می گوئیم آهنگ متوسط رشد یک کودک در بازه [۶ ماه، ۱ ساله] ، دو سانی متر بر ماه است یعنی در طی این ۶ ماه، رشد متوسط قد کودک ۲ سانتی متر در هر ماه است. به جز مثال های بالا، در مطالعه پدیده های گوناگونی، کمیت های دگر در دارند به تغییر یکی وابسته به تغییرات دیگری است مانند تغییرات دما در زمان های مختلف، تغییرات یک دایره وقتی شعاع آن تغییری کند یا تغییر جدیت در زمان های مختلف.

اگر رابطه بین دو متغیر x و y به صورت $y = f(x)$ باشد، نسبت تغییرات y (تغیروا) به تغییرات x (متغیر مستقل)، در آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x می گوئیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_r - y_1}{x_r - x_1}$$

تعریف: آهنگ غیرمتوسط تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

شیب خط مقطع

تذکره: اگر بازه را به صورت $[x_1, x_1 + \Delta x]$ بنویسیم، تعریف آهنگ متوسط غیر بعضی زیر می‌شود

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

تعریف: آهنگ خطای غیرمتوسط تابع f در $x = x_1$ برابر است با مشتق تابع f در x_1 .

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

شیب خط مماس

مثال: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

$$\text{آهنگ غیرمتوسط} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{7+2} - \sqrt{2+2}}{5} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

مثال: جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است، که معادله ارتفاع آن از سطح زمین به صورت $f(t) = -2t^2 + 10t$ می‌باشد. سرعت لحظه‌ای این جسم را در $t = 2$ به دست آورید.

$$f'(t) = -4t + 10 \rightarrow f'(2) = -4(2) + 10 = -8 + 10 = 2$$

سؤال: یک توده ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است.

الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه ی زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه ی $t = 3$ چقدر است؟

$$\text{الف) } \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{\sqrt{4} + 2(4)^2 - (\sqrt{3} + 2(3)^2)}{1} = 2 + 128 - \sqrt{3} - 54 = 74 - \sqrt{3}$$

$$\text{ب) } x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t \rightarrow x'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 4(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 12$$

سؤال: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده

شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(5^2 - 5 + 10) - (0^2 - 0 + 10)}{5} = \frac{20 - 10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$f'(t) = \text{سرعت متوسط} = 2 \rightarrow 2t - 1 = 2 \rightarrow 2t = 3 \rightarrow t = 1.5$$

سؤال: آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه $[5, 6]$ برابر آهنگ تغییر لحظه ای این تابع، با کدام مقدار

x است؟

$$2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad (4) \quad 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad (3) \quad 3 + 2\sqrt{2} \quad (2) \quad 4 + \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 36} + 24 - (\sqrt{21 - 25} + 20)}{1} = 3 - 4 = -1$$

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = -1 \rightarrow \sqrt{21 - x^2} + 4x = x - 2$$

برابر $21 - n^2 + 4n = n^2 - 4n + 4$

$\rightarrow 2n^2 - 8n - 17 = 0 \rightarrow \Delta = 64 - 4(2)(-17) = 64 + 136 = 200$

$n = \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = \frac{8 \pm 10\sqrt{2}}{4} < \begin{cases} \frac{8+10\sqrt{2}}{4} = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \checkmark \\ \frac{8-10\sqrt{2}}{4} = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2} \times \end{cases}$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن

در $x = \frac{3}{2}$ ، چقدر کمتر است؟

۰/۰۶ (۴)

۰/۰۵ (۳)

۰/۰۴ (۲) $\checkmark$

۰/۰۳ (۱)

رشد متوسط $= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\sqrt{2(4)+1} + \frac{1}{4+1} - (\sqrt{2(0)+1} + \frac{1}{0+1})}{4}$

$= \frac{2 + \frac{1}{5} - 1 - 1}{4} = \frac{1 + \frac{1}{5}}{4} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

رشد لحظه‌ای: $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} + \frac{-1}{(x+1)^2}$

$f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1}} - \frac{1}{(\frac{3}{2} + 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}}$

$= \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25 - 8}{50} = \frac{17}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{34}{100}$

$\frac{34}{100} - \frac{3}{10} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

فصل پنجم: کاربرد مشتق

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکستریم‌های یک تابع و

توابع صعودی و نزولی

قسمت اول: آزمون یکنوایی

جلسه اول: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

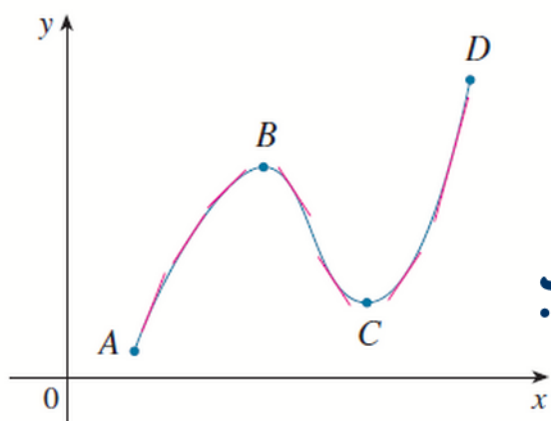
معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در فصل اول با توابع مثلثاتی آشنا شدید و کنیزای تابع را با توجه به نمودارش بررسی می کردیم.

به نمودار مقابل و خط های مماس رسم شده دقت کنید:



در بازه های که تابع صعودی است تیب خط های مماس مثبت
و در بازه های که تابع نزولی است تیب خط های مماس منفی است.

۱) آزمون کنیزای تابع :

الف) در یک بازه از دامنه f اگر f صعودی و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر f صعودی و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیدا نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر f برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

به عبارات دیگر برای بررسی کنیزای تابع مشتق داریم f' ، از آن مشتق می گیریم و مشتق

را با رسم جدول، تعیین علامت می کنیم. به این جدول چنین علامت، جدول تغییرات

تابع می گوئیم. اگر علامت مشتق در بازه ای مثبت باشد، تابع در آن بازه اکیدا صعودی

و اگر علامت مشتق در بازه ای منفی باشد تابع در آن بازه اکیدا نزولی است و عکس.

مثال: گویای تابع $y = x^3 - 3x^2 + 2$ را بررسی کنید.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

در بازه‌ها $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$ تابع ابتدا صعودی و در بازه $(2, +\infty)$ نزاعی است.

مثال: تابع $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ در بازه $[a, b]$ صعودی است. حد اکثر مقدار $b-a$ را

بدست آورید.

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$-x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

✓
 $\Rightarrow a = -1, b = 1 \Rightarrow b-a = 1+1 = 2$

نکته: در توابع پویسته اگر مشتق تابع در نقطه‌ای جدا از هم در یک بازه منفی شود باز هم تابع

روی آن بازه می‌تواند اکیداً صعودی یا نزولی باشد.

مسئله: کمترین تابع $f(x) = x^2$ را بررسی کنید.

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f			

تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

مسئله: به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x) = -x^3 + mx^2 - 12x + 1$ روی $\mathbb{R}$ الگای نزول است؟

$$f' < 0 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2mx - 12 < 0$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(-12)(-12) \leq 0$$

$$4m^2 - 576 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 144 \Rightarrow -12 \leq m \leq 12$$

$$m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$$

نکته: آزمون کنونی برای تابع پوسته برقرار است. پس در تابع گری، در بازه های تکرانی

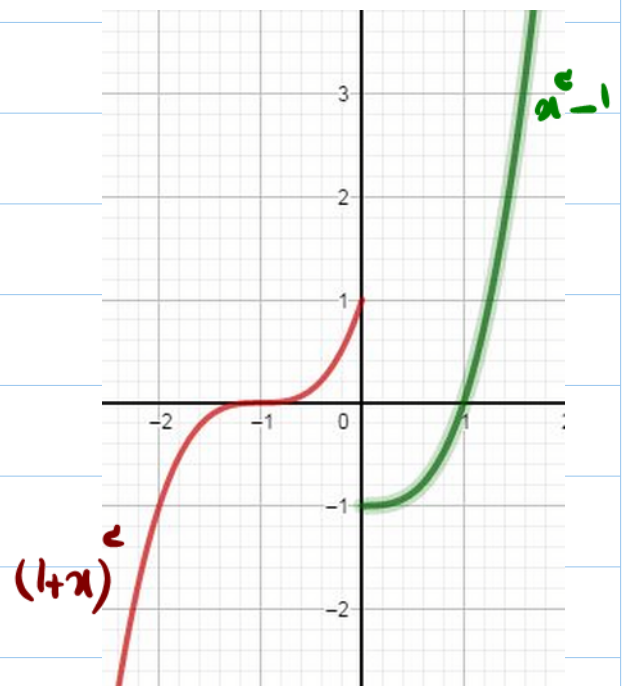
از این آزمون استفاده کنی که شامل رسم میخ نباشد. در تابع صند صند صند هم در نقاط

عزیز همین نکته را داریم.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ (1+x)^2 & x < 0 \end{cases}$ در کدام بازه صعودی است؟

(۱) (۱، ۲) (۲) (-۱، ۲) (۳) (-۲، ۱) (۴) (۰، ۲)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ \text{موجبات} & x = 0 \\ 2(1+x) & x < 0 \end{cases}$$



تابع در $(-\infty, 0)$ اکبر صعودی است ولی برای رسیدن به عافه نیز باید تدریج کند. تابع در

$(0, +\infty)$ هم اکبر صعودی است. پس تابع فقط در بازه $(0, 2)$ که شامل منفرجه صعودی است

مثال: تابع $f(x) = \frac{5}{x^2 - 2x}$ روی کدام بازه منفرد است؟

۱) $(1, 2)$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $(0, 2)$ ۴) $(2, 2)$

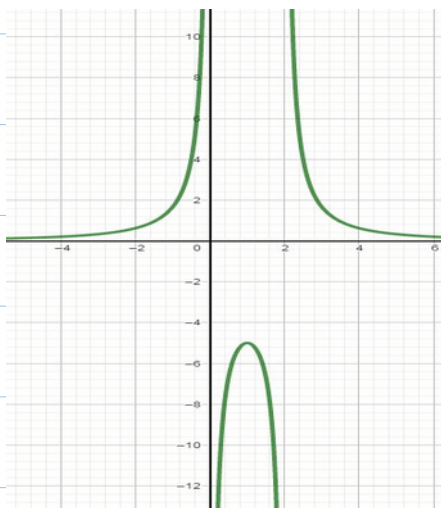
$$f'(x) = \frac{0 - 5(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-10x + 10}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$-10x + 10 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		+		+	0	-	-		
f									

باید بازه ای را انتخاب کنیم که مشتق در آن یک علامت داشته باشد و مثال ریم

منفی نباشد که فقط گزینه ی بازه $(2, 2)$ مورد درگی را دارد.



به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکستریم‌های یک تابع و

توابع صعودی و نزولی

قسمت دوم: نقطه بحرانی، اکستریم‌های نسبی

جلسه دوم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۲) دسته‌های نسبی تابع :

الف) تابع f در نقطه‌ای به طول c **ماکزیمم نسبی** دارد، هرگاه یک همایگی از آن مانند $f \in I$ باشد

که برای هر $n \in I$ داشته باشیم: $f(c) \geq f(n)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی f می‌نامیم.

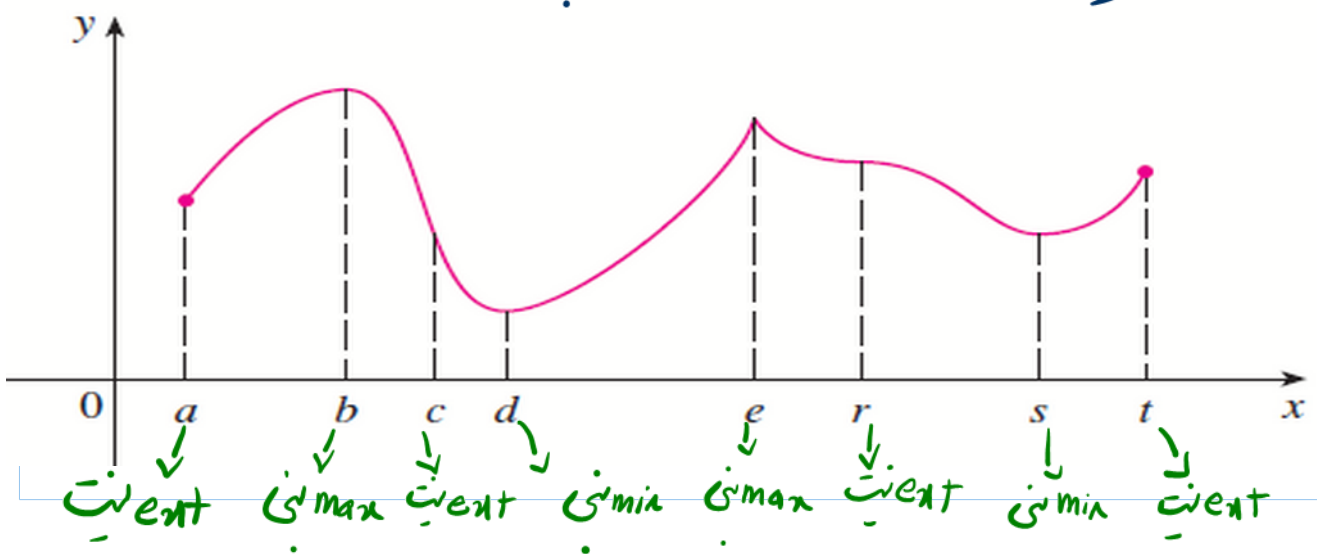
ب) تابع f در نقطه‌ای به طول c **مینیمم نسبی** دارد، هرگاه یک همایگی از آن مانند $f \in I$ باشد

که برای هر $n \in I$ داشته باشیم: $f(c) \leq f(n)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی f می‌نامیم.

به عبارت دیگر اگر عرض نقطه‌ای نسبت به نقاط اطرافش کوچکتر یا مساوی باشد به آن

$\min$ نسبی و اگر بزرگتر یا مساوی باشد به آن $\max$ نسبی می‌گوئیم.

مثال: در نمودار زیر کدام یک از نقاط مشخص شده اکتریم نسبی هستند؟



چند نکته درباره اکسترم های نسبی :

فرض کنید $x=c$ طول نقطه اکسترم نسبی تابع f باشد در این صورت :

(۱) نقطه ابتدای دامنه نمی تواند نقطه اکسترم نسبی باشد.

(۲) f می تواند در این نقطه پیوسته نباشد.

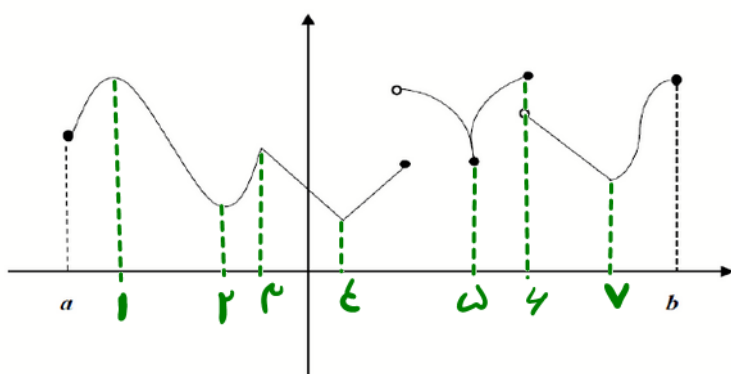
(۳) f می تواند در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

(۴) اگر f در این نقطه مشتق پذیر باشد گفته : $f'(c)=0$.

(۵) نقطه $(c, f(c))$ روی نمودار تابع f قرار دارد یعنی مختصات این نقطه در معادله

تابع صدق می کند.

(۶) در تابع ثابت تمام نقاط هم $\max$ نسبی هستند هم $\min$ نسبی.



مثال : تابع متغیر در بازه $[a, b]$

چند نکته اکسترم نسبی دارد ؟ نکته

مشکل تکرار ۹۸ تعویذ :

در تابع با ضابطه $f(x) = x|x-4|$ ، فاصله دو نقطه ماکسیمم نسبی و می نیمم نسبی آن، کدام است؟

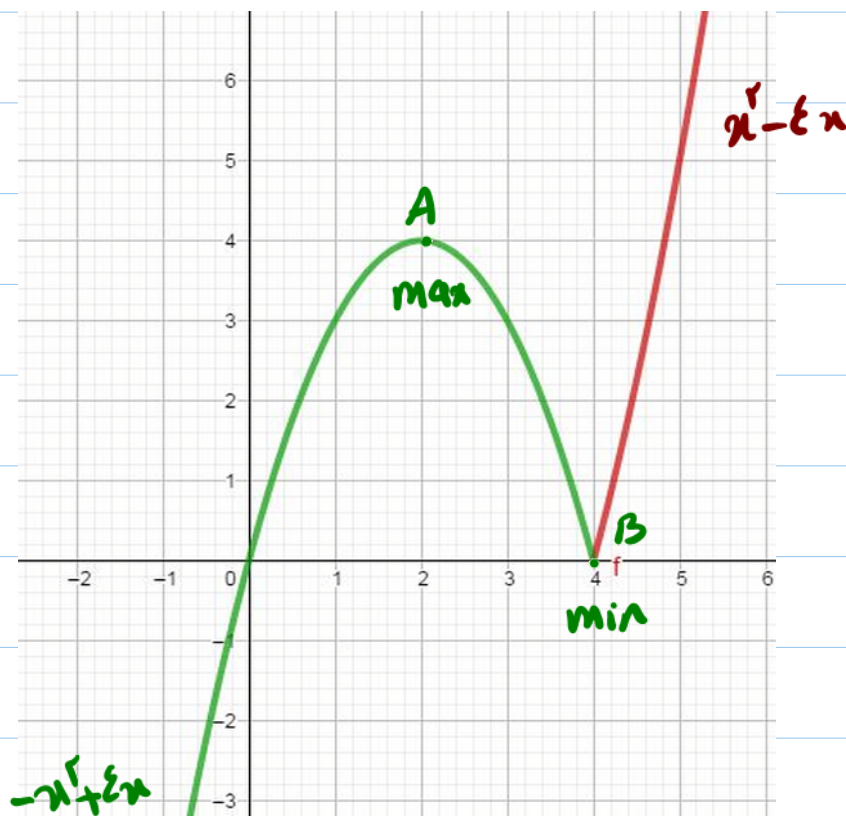
$$2\sqrt{5} \quad (4)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases}$$



$A(2, 4)$: می نیمم

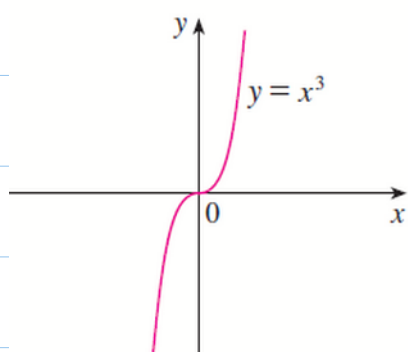
$B(4, 0)$: ماکسیمم

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad \text{گزینه ۴}$$

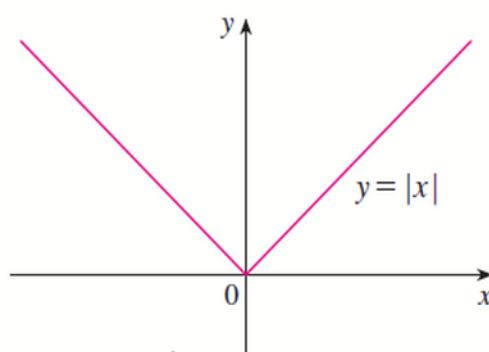
نقطه گردنی :

نقطه‌ای به طول c از دامنه f است که در آن $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مانند :

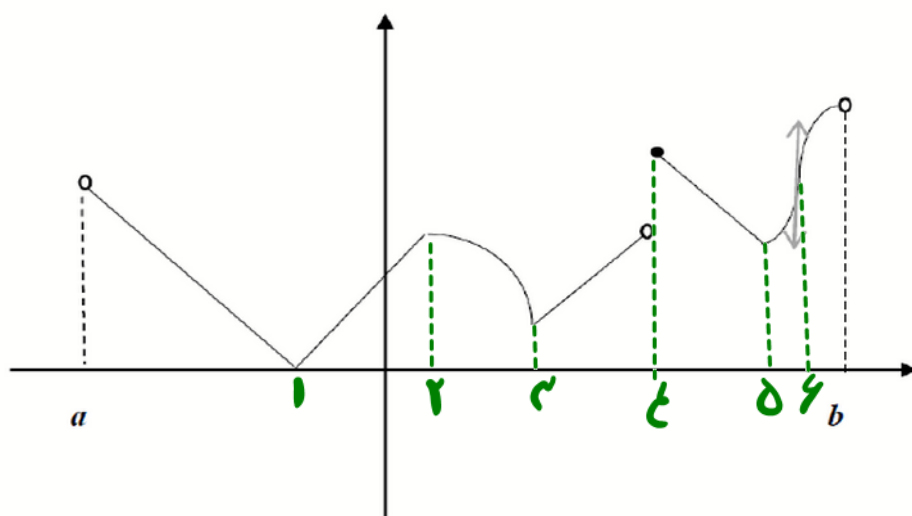


$f'(0) = 0$ ، $x=0$ جوابی



$f'(0)$ موجود نیست ، $x=0$ جوابی

مثال : تابع f با نمودار زیر در بازه (a, b) چند نقطه گردنی دارد ؟



در ۴ نقطه

نکته: هر نقطه اکسترمس مبنی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

وی عکس آن درست نیست یعنی هر نقطه بحرانی، اکسترمس مبنی نیست.

توجه: نقاط استدار انتهایی دامنه، نقطه بحرانی هستند.

مثال: تابع $f(x) = 4x^2 - 12x$ در بازه $[0, 4]$ ضد نقطه بحرانی دارد؟

$$f'(x) = 8x - 12 = 0 \Rightarrow 8(x - 1.5) = 0 \Rightarrow x = 1.5$$

چون $x = 1.5$ در دامنه تابع نیست پس بحرانی نیست.

نقاط بحرانی $x = 0$ ، $x = 4$ است.

مثال: نقاط بحرانی تابع زیر را بیابید.

۱) $f(x) = x^2(x+2)^3$

$$f'(x) = 2x(x+2)^3 + 3(x+2)^2 x^2 = x(x+2)^2(2(x+2) + 3x) = 0$$

$$\Rightarrow x(x+2)^2(5x+4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2, x = -\frac{4}{5}$$

$$r) g(x) = \frac{x^r}{(1-x)^r}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g'(x) = \frac{r x^{r-1} (1-x)^r - r(1-x)(-1)x^r}{(1-x)^{2r}}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x^r(1-x)(r(1-x) + r) = 0 \Rightarrow x^r(1-x)(-x+2) = 0$$

$$x=0, x=1, x=2 \Rightarrow \begin{matrix} \rightarrow \notin D_f \\ \end{matrix} \quad x=2, x=0 \text{ برای } x=2$$

$$g'(x) = \text{موجب} \Rightarrow (1-x)^2 = 0 \Rightarrow x=1 \notin D_f$$

$$r) f(x) = \begin{cases} x^r - r x & -r < x \leq r \\ x^r - 1 x & r < x < \varepsilon \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} r x^{r-1} - r & -r < x < r \\ \text{موجب} & x = r \\ r x^{r-1} - 1 & r < x < \varepsilon \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow r x^{r-1} - r = 0 \Rightarrow x^{r-1} - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \in (-r, r)$$

$$\Rightarrow r x^{r-1} - 1 = 0 \Rightarrow x^{r-1} - \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[r-1]{\frac{1}{r}} \begin{cases} \sqrt[r-1]{\frac{1}{r}} \in (r, \varepsilon) \\ -\sqrt[r-1]{\frac{1}{r}} \notin (r, \varepsilon) \end{cases}$$

f' و $n=2$ بحریت سے $\{-1, 1, 2, 4\}$ نقاط بحرانی ہوں گے۔

۴) $h(x) = x|x^2 - 1|$

$$\begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 1 & +\infty \\ \hline x^2-1 & + & 0 & 0 & + \end{array}$$

$$h(x) = \begin{cases} x(x^2 - 1) & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x(x^2 - 1) & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x^3 + x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ \text{بحریت} & x = 1 \\ \text{بحریت} & x = -1 \\ -3x^2 + 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

نہیں
 میں درجہ اولیٰ حالت نقاط بحرانی
 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} > -1$ و $x = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

$$\Rightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

در این ضابطه هر دو کدر در مابزه (۱، ۱-) قرار دارند پس عبارت می‌اند.

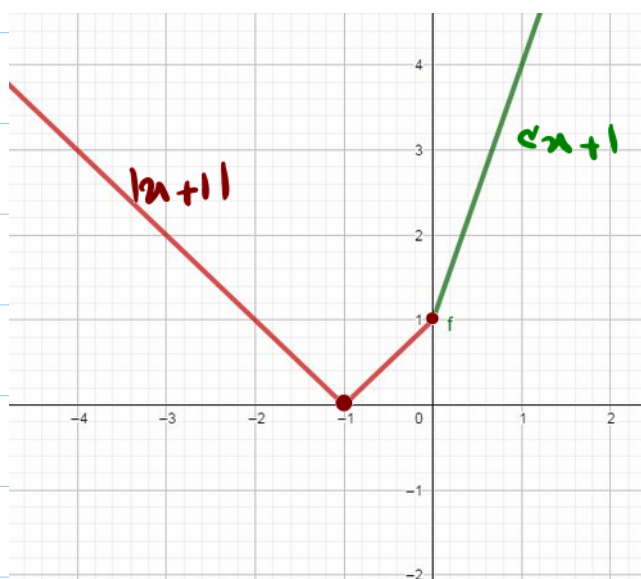
بنابراین $\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \right\}$ نقاط عبارت می‌اند.

$$۵) f(x) = |2x + |x| + 1|$$

$$f(x) = \begin{cases} |2x + x + 1| & x \geq 0 \\ |2x - x + 1| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 0 \\ |x + 1| & x < 0 \end{cases}$$

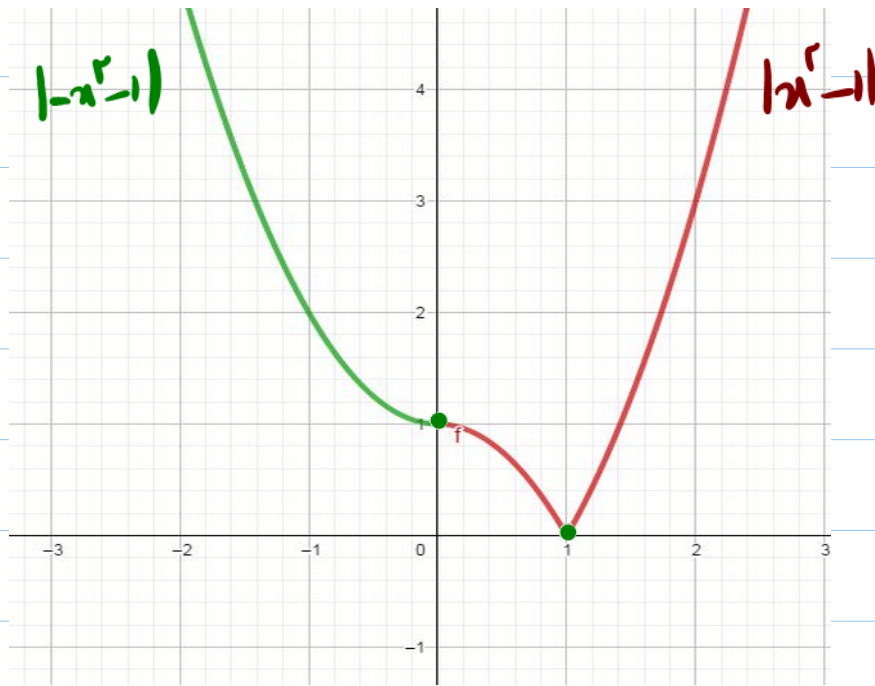
در $x = -1$ و $x = 0$

مشق مورد نیاز است این نقاط عبارت می‌اند.



$$۶) g(x) = |x|x| - 1|$$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x) - 1| & x \geq 0 \\ |x(-x) - 1| & x < 0 \end{cases} = g(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & x \geq 0 \\ |1 - x^2| & x < 0 \end{cases}$$



در $x=1$ مشتق موجود نیست. در $x=0$ مشتق موجود است. پس $\{0, 1\}$
نقاط بحرانی هستند.

$$v) f(x) = (x-2)x^{\frac{5}{3}}$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5x^{\frac{2}{3}}}{3} - \frac{10}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x - 10}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5x - 10}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 5x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

پس $\{2, 0\}$ نقاط بحرانی اند. $f'(x)$ موجود نیست $\rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

$$1) f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{3 - 3x^2}{3\sqrt[3]{(3x - x^3)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) : \text{موجبات} \Rightarrow 3\sqrt[3]{(3x - x^3)^2} = 0 \Rightarrow 3x - x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x(3 - x^2) = 0 \xrightarrow{x=0} 3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

و $\{\pm 1, 0, \pm\sqrt{3}\}$ نوازل بحرانی اند.

$$9) f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$D_f: 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_f = [-2, 2]$$

$$f'(x) = \frac{-x}{2\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -x = 0 \rightarrow x = 0$$

۲- نقاط انتهای دامنه و ریشه معین هم هستند پس چرا اند

معبره نقاط بحرانی باطل‌های: $\{0, \pm 2\}$

$$1.) f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$D_f: -1 \leq x \leq 1 \rightarrow x > 1 \rightarrow x > 0 \rightarrow x > 1$$

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

پس تابع در $x=1$ و $x=-1$ نقطه بحرانی دارند.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس $\{0, \pm 2\}$ معبره طول‌های نقاط بحرانی است.

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکستریم‌های یک تابع و

توابع صعودی و نزولی

قسمت سوم: آزمون مشتق اول

جلسه سوم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

آزمون مشتق اول برای تشخیص اکسترم‌های نسبی :

فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و f در c

همگی معدوم c مشتق پذیر است :

الف) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در c ، $\max$ نسبی دارد.

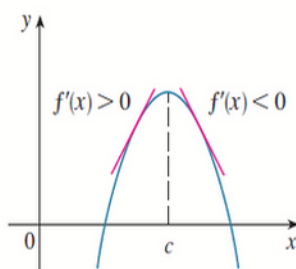
x		c	
f'	+		-
f			

ب) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در c ، $\min$ نسبی دارد.

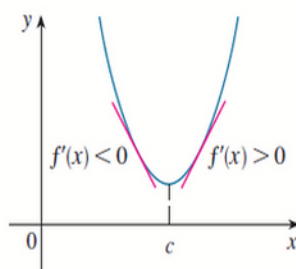
x		c	
f'	-		+
f			

پ) اگر f در c غیرصاف باشد و f در c ، $\max$ و $\min$ نسبی ندارد.

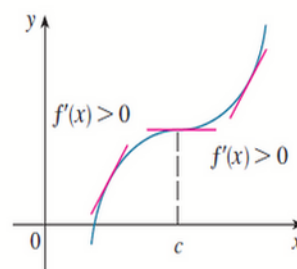
به شکل زیر دقت کنید :



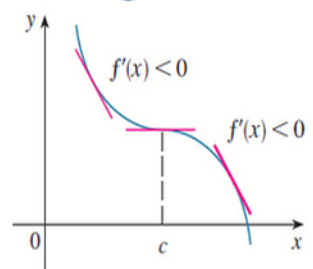
(a) Local maximum



(b) Local minimum



(c) No maximum or minimum



(d) No maximum or minimum

مثال: نقطه اترسیمی تابع $f(x) = x^3 - 5x^2$ را بیابید.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 3x^2(1 - \frac{10}{3}x) = 0 \quad \begin{cases} 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ 1 - \frac{10}{3}x = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{10}} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{c}$	0	1	$\sqrt{c}$	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$
f						

$\nearrow$ $\searrow$ $\searrow$ $\nearrow$

max min

مثال: فاصله نقطه min می تابع $y = x^3 - 12x + 12$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$y' = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$	$-r$	r	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y					$-\varepsilon$	

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

max min

$A(2, -4)$ $(0, 0)$ $(-2, 16)$

$$OA = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

مثال: تابع $y = \frac{x+1}{x^2-2x}$ چند لگاریسم نپی دارد؟

$$y' = \frac{1(x^r - rx) - (rx - r)(x+1)}{(x^r - rx)^r} = \frac{x^r - rx - r(x-1)(x+1)}{(x^r - rx)^r}$$

$$= \frac{x^r - rx - rx^r + r}{(x^r - rx)^r} = \frac{-x^r - rx + r}{(x^r - rx)^r}$$

$$y' = 0 \rightarrow -x' - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \times (-1) \times (1) = 1 + 4 = 5$$

$$u = \frac{r \pm \sqrt{r}}{-r} = \frac{r \pm r\sqrt{r}}{-r} = \begin{cases} -1 + \sqrt{r} \\ -1 - \sqrt{r} \end{cases}$$

موریت : $(u^r - ru)^r = 0 \rightarrow u = 0, r$

x	$-\omega$	$-1/\sqrt{r}$	0	$1/\sqrt{r}$	r	$+\omega$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y						

$\swarrow$
 $\searrow$
 $\swarrow$
 $\searrow$
 $\swarrow$

$\min$
 $\max$

نمبر ۱۳

مثال کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ ، کدام است؟

$1 + \sqrt{3}$ (۴)

$-1 + \sqrt{3}$ (۳)

$1 + \sqrt{5}$ (۲)

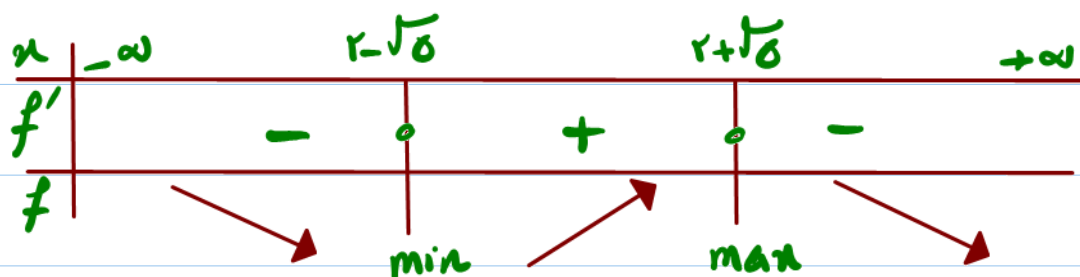
$-1 + \sqrt{5}$ (۱)

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^3+x+1-x^3-2x^2+3x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(-x^2+4x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 : -x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(-1)(1) = 20$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{-2} = 2 \pm \sqrt{5}$$



$$f(2+\sqrt{5}) = \frac{(2+\sqrt{5})^2 + 2(2+\sqrt{5}) - 3}{(2+\sqrt{5})^2 + 1} = \frac{4+8+4\sqrt{5} + 4+2\sqrt{5} - 3}{4+8+4\sqrt{5} + 1}$$

$$= \frac{10+4\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}} = \frac{5+2\sqrt{5} \times 5-2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5} \times 5-2\sqrt{5}} = \frac{25-10\sqrt{5}+10\sqrt{5}-20}{25-20}$$

$$= \frac{-5 + 5\sqrt{5}}{5} = -1 + \sqrt{5}$$

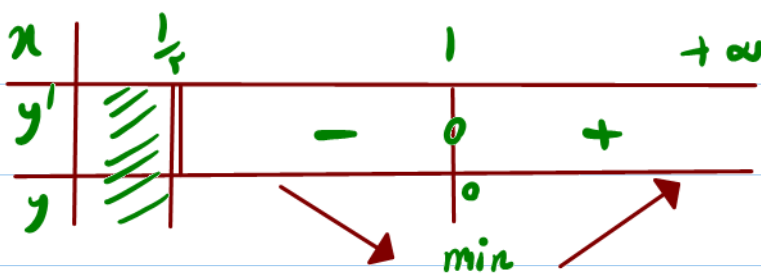
گزینہ ۱

مثال: نقطہ انتزاعی تابع $y = x - \sqrt{2x-1}$ را بدست آورید.

$$y' = 1 - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{2x-1}} \quad D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$y' = 0 : \sqrt{2x-1} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \rightarrow 2x-1 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$y' = 0 : \sqrt{2x-1} = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$



min : $(1, 0)$

مثال: طول نقطه max تابع $f(x) = (x-1)^2 \sqrt{x}^2$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} (x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (x-1)^2 + 2(x-1) x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{r}{r} \frac{(x-1)^r}{\sqrt[r]{x}} + r(x-1) \frac{1}{\sqrt[r]{x^r}} = \frac{r(x-1)^r + r(x-1)x}{r\sqrt[r]{x}}$$

$$= \frac{r(x-1)(x-1+x)}{r\sqrt[r]{x}} = \frac{r(x-1)(2x-1)}{r\sqrt[r]{x}}$$

$$f' = 0 \rightarrow r(x-1)(2x-1) = 0 \rightarrow x = 1, \frac{1}{2}$$

$$f' = 0 \rightarrow r\sqrt[r]{x} = 0 \rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$r(x-1)(2x-1)$	+	+	0	-	+
$\sqrt[r]{x}$	-	0	+	+	+
f'	-	0	+	-	+
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		min	max	min	

گزینه ۱

مثال: اگر $(1, 1)$ نقطه اکстрیم نباشد، $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 1$ ، a, b, c را بیابید.

$$(1, 1) \xrightarrow{\text{نقطه اکتریم نباشد}} f(1) = 1 + a + b + 1 = 1 \rightarrow a + b = -1$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 4 + 2a + b = 0$$

$$\rightarrow 2a + b = -4$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ a = -3 \end{cases} \rightarrow b = 2$$

مثال: تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + x - 1$ فاعده اقلترسم بنی است. حدود a را بیابید.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$$

f' باید همواره مثبت یا همواره منفی باشد.

ولی چون ضرب x^2 ، مثبت است پس f' همواره مثبت است:

$$f' \geq 0 : \quad 5 \leq 0 : \quad 4a^2 - 12 \leq 0 \rightarrow a^2 \leq 3$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و

توابع صعودی و نزولی

قسمت چهارم: اکسترمم‌های مطلق

جلسه چهارم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

۱۴) دسته‌های مطلق تابع :

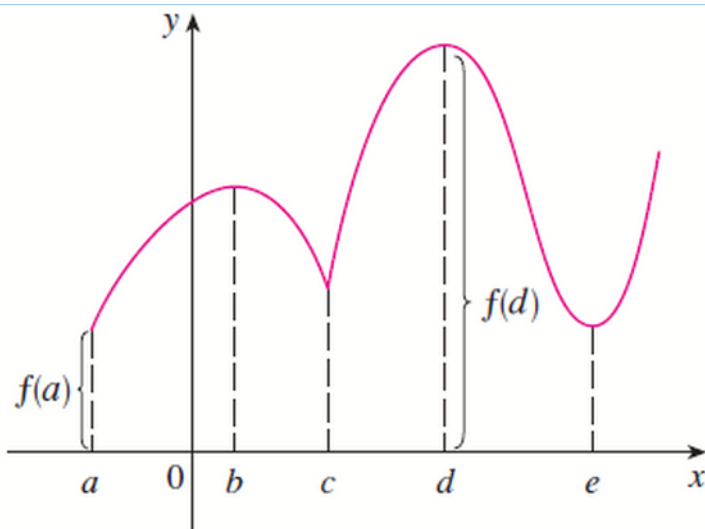
الف) تابع f در D_f ، $x=c \in D_f$ ، **ماکزیمم مطلق** دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f

داشته باشیم : $f(x) \leq f(c)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f می‌گوئیم .

ب) تابع f در D_f ، $x=c \in D_f$ ، **مینیمم مطلق** دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f

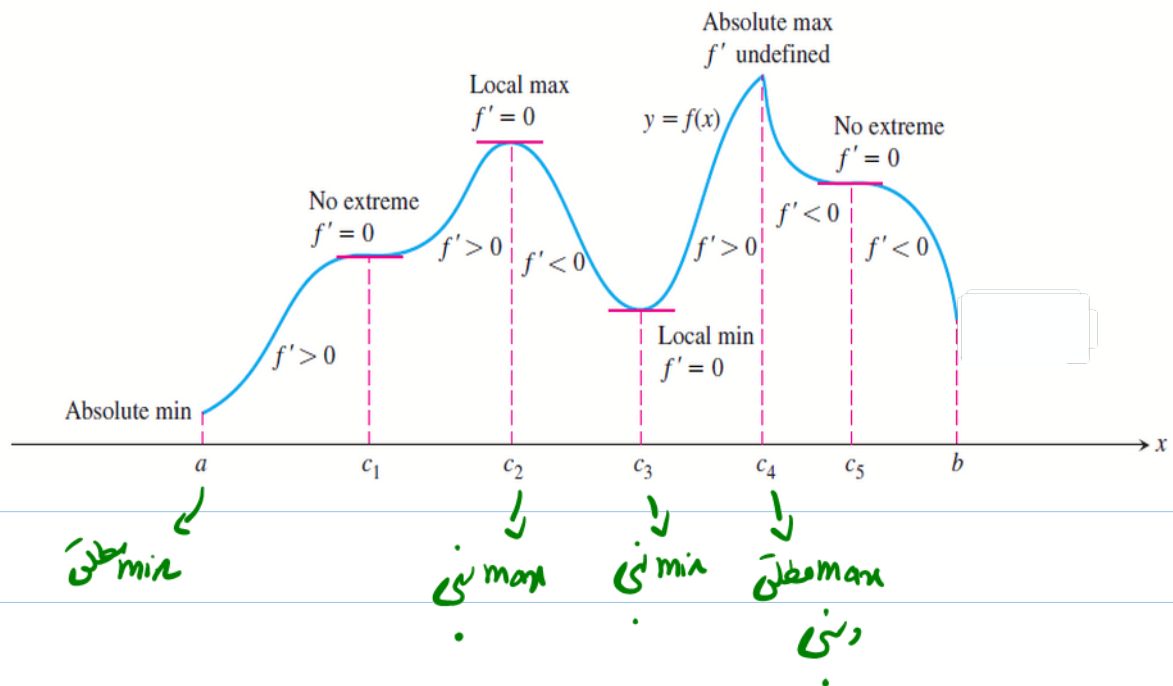
داشته باشیم : $f(x) \geq f(c)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f می‌گوئیم .

در مواردی زیر داریم :



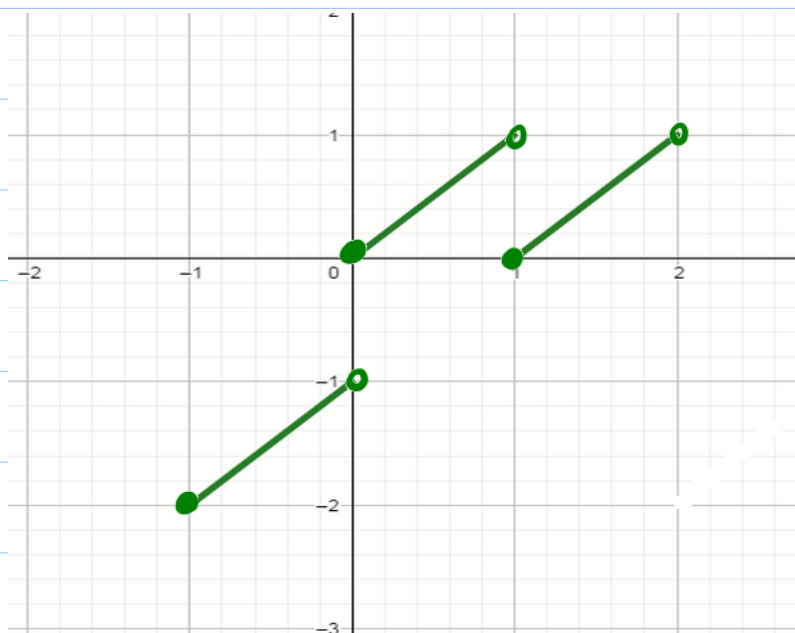
در $x=a$ ، $\min$ مطلق داریم .

در $x=d$ ، $\max$ مطلق داریم .



مثال: مقادیر $\min$, $\max$ مطلق تابع $f(x) = x - [x]$ را روی بازه $(-2, 2)$ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & -1 < x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

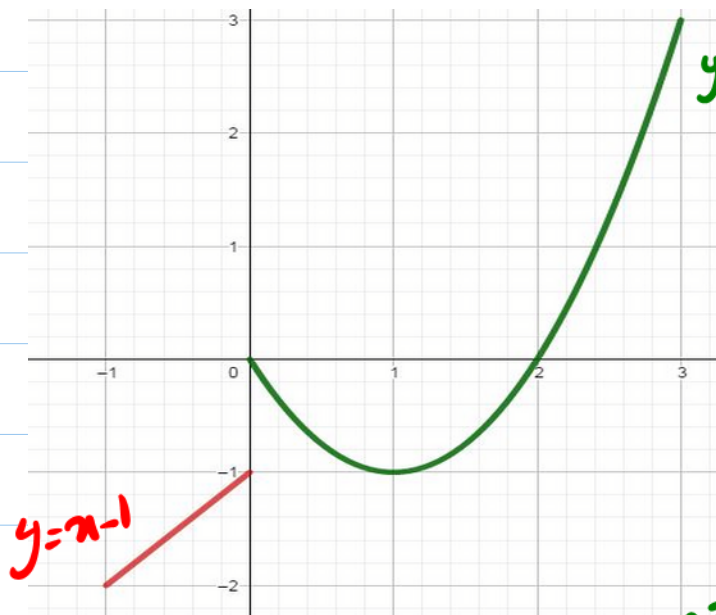


$\max$ مطلق ندارد.

$\min$ مطلق دارد، $x = -1$

کمترین مقدار آن $-2 = f(-1)$ است.

مثال: مقدار $\min, \max$ مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & 0 \leq x \leq 3 \\ x - 1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ را بیابید.



$\max$ مطلق در $x = 3$ ؛

مقدار $f(3) = 3$.

$\min$ مطلق در $x = 1$ به مقدار -1 ؛ $f(1) = -1$.

نقشه: اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه $\min, \max$ مطلق دارد.

روش یافتن اکثر کم‌های مطلق توابع پیوسته در بازه $[a, b]$:

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازه $[a, b]$ می‌یابیم. سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی حساب

می‌کنیم. بهترین مقدار $\max$ مطلق و کمترین مقدار $\min$ مطلق تابع f در بازه هستند.

مثال کنکور تجربی ۹۸

مقدار $\min, \max$ مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 10x$ را روی بازه $[-4, 4]$ بیابیم.

(۱) -۱۱ و ۲۴ (۲) -۲۵ و ۲۷ (۳) -۳۶ و ۲۷ (۴) -۲۷ و ۳۶

$$f'(x) = x^2 - 2x - 10 = 0 \rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \quad \begin{cases} x=5 \notin D_f \\ x=-2 \checkmark \end{cases}$$

بین پنج نقطه چهار $x=-2, x=-4$ و $x=3$

x	-4	-2	3
y	$\frac{78}{4}$	$\frac{27}{4}$	$-\frac{45}{4}$

max
min

$x=3$ را در.

$$f(-4) = \frac{1}{4}(-4)^4 - (-4)^2 - 10(-4) = -\frac{72}{4} - 16 + 40 = \frac{-72 - 64 + 160}{4} = \frac{24}{4}$$

$$f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^4 - (-2)^2 - 10(-2) = -9 - 4 + 40 = 27$$

$$f(3) = \frac{1}{4}(3^4) - (3)^2 - 10(3) = 9 - 9 - 40 = -40$$

گزینه ۲

مثال: حداکثر مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ در بازه $(\frac{1}{4}, 1]$ چقدر از کمترین مقدار

آن در این بازه بیشتر است؟

$$\frac{19}{21} \quad (2)$$

$$\frac{5}{7} \quad (3)$$

$$\frac{6}{7} \quad (4)$$

$$\frac{16}{21} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{-(2x-1) \cdot 1}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x+1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	$-\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r}$	1
y	$\frac{\epsilon}{\sqrt{r}}$	$\frac{\epsilon}{\sqrt{r}}$	1
	$\searrow$ min	$\searrow$ max	

$$f(-\frac{1}{r}) = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{r} + 1} = \frac{1}{\frac{1+r+\epsilon}{\epsilon}} = \frac{\epsilon}{\sqrt{r}}$$

$$f(\frac{1}{r}) = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{r} + 1} = \frac{1}{\frac{1-r+\epsilon}{\epsilon}} = \frac{\epsilon}{r}, \quad f(1) = \frac{1}{1-1+1} = 1$$

$$\text{max} - \text{min} = \frac{\epsilon}{r} - \frac{\epsilon}{\sqrt{r}} = \frac{r-1}{r} = \frac{14}{21}$$

نتیجه

مثال: مقادیر min, max تابع $f(x) = x\sqrt{\epsilon - x^2}$ را بیابید.

$$f'(x) = 1 \times \frac{\sqrt{\epsilon - x^2}}{1} + \frac{-2x}{2\sqrt{\epsilon - x^2}} \times x = \frac{\epsilon - x^2 - x^2}{\sqrt{\epsilon - x^2}} = \frac{-2x^2 + \epsilon}{\sqrt{\epsilon - x^2}}$$

$$D_f: \epsilon - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq \epsilon \rightarrow -\sqrt{\epsilon} \leq x \leq \sqrt{\epsilon} \rightarrow D_f = [-\sqrt{\epsilon}, \sqrt{\epsilon}]$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + \epsilon = 0 \rightarrow x^2 = \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$$

x	$-\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$	$\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$	ϵ
y	0	$-\frac{\epsilon}{2}$	$\frac{\epsilon}{2}$
		$\searrow$ min	$\searrow$ max

$$f(x) = f(-x) = 0$$

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{4-2} = -2$$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4-2} = 2$$

مقدار $\max$ مطلق = 2 ، مقدار $\min$ مطلق = -2

مثال: حاصل مرتب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ کدام است؟

$$0 \leq x \leq 5$$

$$1. \text{ (1)}$$

$$2. \text{ (2)}$$

$$3. \text{ (3)}$$

$$D_f : \text{ (1) } x \geq 0$$

$$\text{ (2) } 5-x \geq 0 \rightarrow x \leq 5$$

$$D_f = \text{ (1) } \cap \text{ (2) } = [0, 5]$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} - \sqrt{x} = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x}$$

$$\frac{f'(x)}{1} \quad f'(0-x) = x \rightarrow 2. - \epsilon x = x \rightarrow -2x = -2. \rightarrow x = 1$$

x	0	1	0
y	$\sqrt{0}$	0	$2\sqrt{0}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	
	min	max	

$$f(0) = 0 + \sqrt{0} = 0$$

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$\max x \times \min = 0 \sqrt{0} \quad \text{نقطه}$$

$$f(0) = 2\sqrt{0} + 0 = 0$$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = (2x-1)\sqrt{x}$ را در فاصله $(0,1)$ بیابیم؟

$$\frac{-1}{x} \quad 1$$

$$\frac{-2}{x} \quad 1$$

$$\frac{-2}{x} \quad 1$$

$$\frac{-2}{x} \quad 1$$

$$f(x) = (2x-1)x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x-1) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f'(x) = 0 : \text{نقطه} \quad 2\sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0$$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
y	4	0	$-\frac{3}{2}$	1
	$\nearrow$ max		$\searrow$ min	

$$f(-1) = -2 \times (-1) = 2 \qquad f(0) = (-1) \times 0 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \qquad f(1) = 1 \times 1 = 1$$

گزینه ۲

نکته: برای یافتن اتریم‌های مطلق تابع f روی بازه (a, b) ، در روش بالا به جای

$f(a)$ ، $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ و به جای $f(b)$ ، $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر بیشترین

یا کمترین مقدار، در این مقادیر حدی اتفاق افتد آن‌گاه تابع در این بازه max

یا min مطلق خواهد داشت. در مورد بازه‌های $(a, b]$ ، $[a, b)$ ، $(-\infty, a)$ ،

$(-\infty, a]$ ، $(a, +\infty)$ ، $[a, +\infty)$ ، $(-\infty, +\infty)$ هم به این شکل عمل می‌کنیم.

مثال: تابع $f(x) = x^2 - 2x$ در بازه $(-1, 4)$ مفروض است. اتریم‌های مطلق آن را

در صورت وجود می‌یابید.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \xrightarrow{\div x} x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$$

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 1 - 12 = -11, \quad f(-1) = -1 - 3 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 2x^2 = 0 - 0 = 0$$

x	-1	0	2	4
f	-4	0	-11	16

چون مقدار max در حد جمع دهنده $x \rightarrow 4$

اشتراکات بین max و min مطلق در $f(-1) = f(2) = -11$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ روی بازه $(0, +\infty)$ چقدر است؟

11 17 12 12 10 13 9 14

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + \frac{16}{0^+} = 0 + \infty = +\infty \quad \text{فاصله max مطلق است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

در $x=2$ min مطلق برابر:

نیز $f(2) = 4 + 8 = 12$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: اکستریم‌های یک تابع و

توابع صعودی و نزولی

قسمت پنجم: بهینه سازی

جلسه پنجم: صفحات ۱۱۲ تا ۱۲۴

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

بهنه سازی :

هدف از بهینه سازی پیدا کردن بهترین یا کمترین مقدار یک تابع است.

در اکثر سوالات بهینه سازی، ضابطه تابع به ما داده نمی شود و باید با توجه به داده های ارائه شده

تابع هدف را بسازیم. مراحل زیر را برای حل اینگونه سوالات دنبال می کنیم :

۱- در صورت لزوم شکل مناسبی رسم می کنیم.

۲- اگر تابع هدف بیش از یک متغیر داشته باشد با استفاده از شرط سوال (رابطه کپی)

آن را بر حسب یک متغیر بنویسیم.

۳- از تابع هدف مشتق می گیریم و مساوی صفر قرار می دهیم. مقدار اکثر هم تابع هدف را محاسبه می کنیم.

مثال: اگر x و y دو عدد مثبت باشند که $xy=4$ ، مقدار مینیمم عبارت $P=2x+4y$

را محاسبه کنید. // رابطه معکوس : $xy=4 \rightarrow y=\frac{4}{x}$

تجربہ $p = 2u + 2 \times \frac{4}{u} \Rightarrow p(u) = 2u + \frac{18}{u}$

$p'(u) = 2 - \frac{18}{u^2} = 0 \Rightarrow \frac{18}{u^2} = 2 \rightarrow 2u^2 = 18 \rightarrow u^2 = 9 \Rightarrow u = 3$

$y = \frac{4}{u} = 2$

$p_{\min} = 2 \times 3 + 2 \times 2 = 4 + 4 = 8$

مثال: اگر $u + y = 4$ باشد، کمترین y و u کیا ہے؟

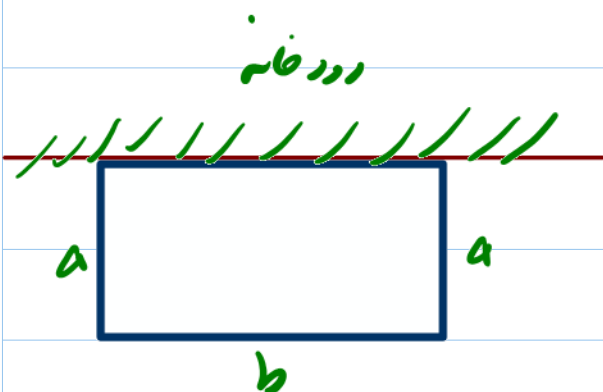
$y = 4 - u : p = u^2 y \Rightarrow p(u) = u^2 (4 - u) = 4u^2 - u^3$

$p'(u) = 8u - 3u^2 = u(8 - 3u) = 0 \begin{cases} 8u = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow \min \\ 8 - 3u = 0 \rightarrow u = \frac{8}{3} \rightarrow \max \end{cases}$

$y = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} : p_{\max} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \times \frac{4}{3} = \frac{256}{9}$

مثال: بیشترین مساحت مستطی که بوسیله یک جانب به طول ۴۸ متر درخاسته یک درختانه

می توان محصور کرد، چند متر مربع است؟



$48 = 2a + b$

رابطه کنی

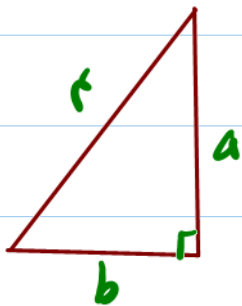
$\rightarrow b = 48 - 2a$

$$S = a \times b = a(48 - 2a) = 48a - 2a^2 \quad \text{تابع هدف:}$$

$$S'(a) = 48 - 4a = 0 \rightarrow 4a = 48 \rightarrow a = 12 : b = 48 - 24 = 24$$

$$S_{\max} = 12 \times 24 = 288$$

مثال: طول درشت قائم الزاویه برابر است. بیشترین مساحت آن را بیابید.



$$a^2 + b^2 = 14^2 : \text{رابطه نیخترس}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{14^2 - a^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ab \Rightarrow S = \frac{1}{2}a\sqrt{14^2 - a^2}$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 - a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{14^2 - a^2}} \times \frac{1}{2}a$$

$$S'(a) = \frac{14^2 - a^2 - a^2}{2\sqrt{14^2 - a^2}} = \frac{14^2 - 2a^2}{2\sqrt{14^2 - a^2}} = \frac{14^2 - a^2}{\sqrt{14^2 - a^2}}$$

$$S'(a) = 0 \rightarrow 14^2 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 14^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{14^2 - 14} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{14} \times \sqrt{14} = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

مثال: کنسرت ۹۹

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

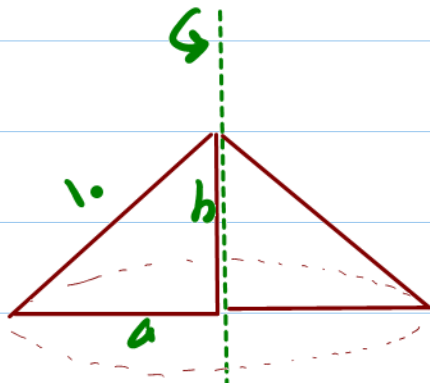
$$\frac{\sqrt{2}}{1} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{1} \quad (۱)$$

اگر یک مثلث قائم‌الزاویه را حول یک ضلع قائم دوران دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود که شعاع قاعده و ارتفاعش برابر اضلاع قائم مثلث اند.



$$V = \frac{1}{3} \pi a^2 b$$

رابطه کس: $a^2 + b^2 = 100 \rightarrow a^2 = 100 - b^2$: رابطه حذف

$$V = \frac{1}{3} \pi (100 - b^2) b = \frac{1}{3} \pi (100b - b^3)$$

$$V'(b) = \frac{1}{3} \pi (100 - 3b^2) = 0 \rightarrow 3b^2 = 100 \rightarrow b = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$a^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}}} = \sqrt{2} \quad \text{نیز}$$

مثال: کمترین فاصله ۹۹:

کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است؟

(۴) $3\sqrt{2}$

(۳) ۵

(۲) $4/5$

(۱) ۴

نقطه $B(x, y)$ را روی تابع در نظر بگیریم. فاصله $A(5, 0)$ تا B را تابع هدف

می‌نامیم که باید $\min$ شود:

رابطه کسری $y = \sqrt{2x+7}$ $AB = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}$

تابع هدف $AB = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$

$$(AB)' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow x=4$$

گزینه ۱ $(AB)_{\min} = \sqrt{4^2 - 8 \times 4 + 32} = \sqrt{16} = 4$

مثال: کمترین مساحت ۹۸:

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله

$y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

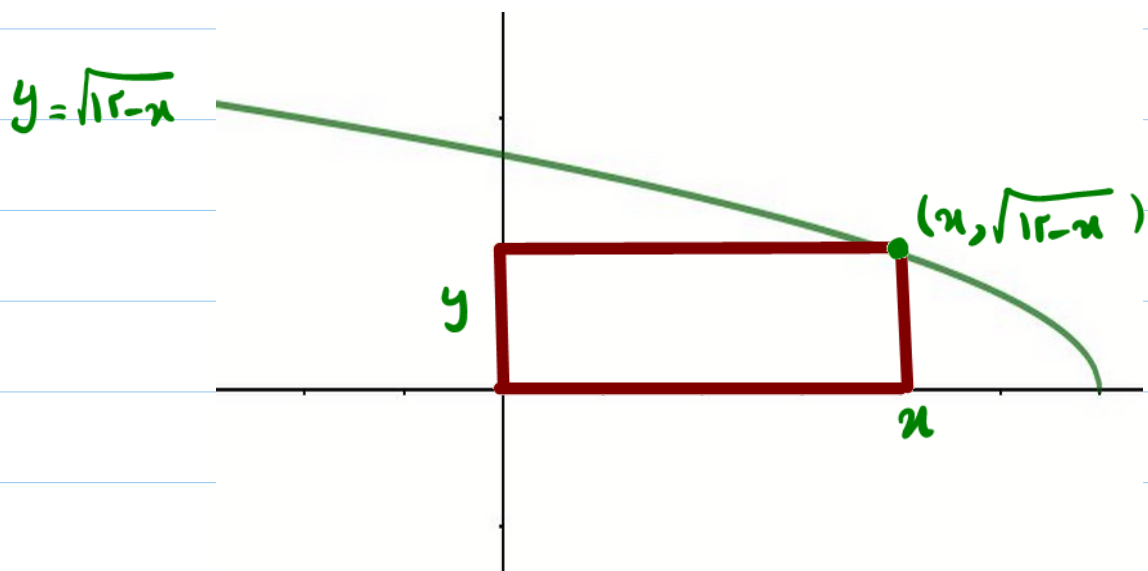
(۱) $8\sqrt{2}$

(۴) ۱۸

(۳) ۱۶

(۲) $8\sqrt{3}$

(۱) $8\sqrt{2}$



$$S = xy = x\sqrt{12-x} = \sqrt{12x^2 - x^3}$$

$$S'(x) = \frac{24x - 3x^2}{2\sqrt{12x^2 - x^3}} \rightarrow S' = 0 \rightarrow 24x - 3x^2 = 0$$

$$3x(8-x) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \text{ غلط} \\ x=8 \checkmark \end{matrix} \quad y = \sqrt{12-8} = \sqrt{4} = 2$$

$$S_{\max} = 8 \times 2 = 16 \quad \text{گزینه } \text{ع}$$

مثال: شعاع به ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

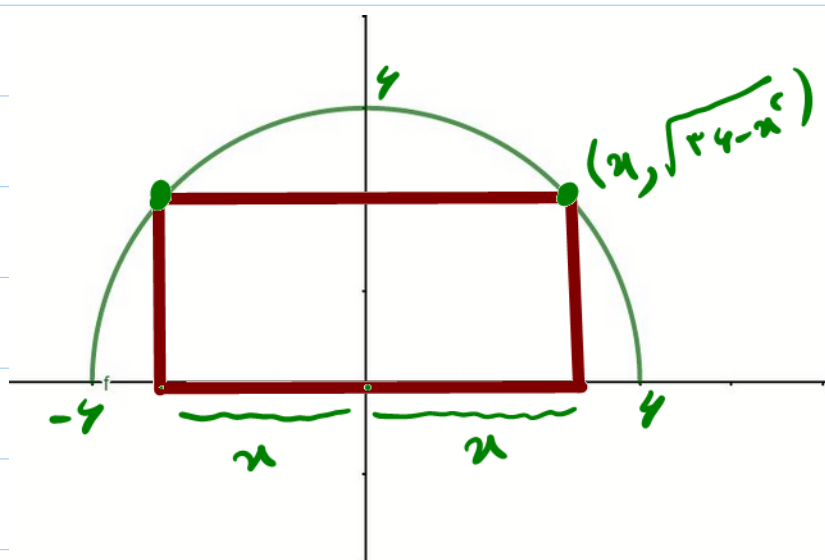
بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

۳۶ (۴)

۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)



$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{معادله دایره}$$

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$S = 2x \times y = 2x \sqrt{16 - x^2} = 2\sqrt{32x^2 - x^4}$$

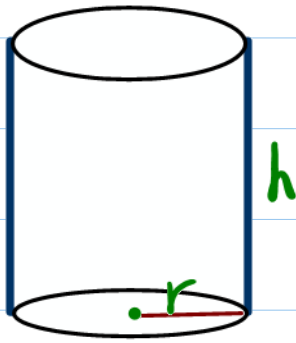
$$S'(x) = 2 \frac{\sqrt{32 - 4x^2}}{2\sqrt{32x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow \sqrt{32 - 4x^2} = 0$$

$$4x(8 - x^2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{8} \checkmark \\ x=-\sqrt{8} \end{cases} \quad y = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8}$$

$$S_{\max} = 2 \times \sqrt{8} \times \sqrt{8} = 2 \times 8 = 16 \quad \text{گزینه ۴}$$

مثال: می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌شکل بازم که گنجایش آن 2π لیتر باشد. ارضاع

استوانه چه قدر باشد تا هزینه فنر به کار رفته در تولید آن کمینه شود؟



$$V = \pi r^2 h = r\pi \Rightarrow r^2 h = r$$

القوله

$$\Rightarrow h = \frac{r}{r^2}$$

رابطه می

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{پایه}} + S_{\text{جانب}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$S_{\text{کل}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{r}{r^2} = 2\pi \left(r^2 + \frac{r}{r} \right)$$

تابع هدف

$$S'(r) = 2\pi \left(2r - \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

$$\frac{2r^3 - 1}{r^2} = 0 \rightarrow 2r^3 - 1 = 0 \rightarrow r^3 = \frac{1}{2} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$h = \frac{r}{r^2} = \frac{r}{1} = r$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع
و نقطه عطف آن

جلسه ششم: صفحات ۱۲۷ تا ۱۳۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

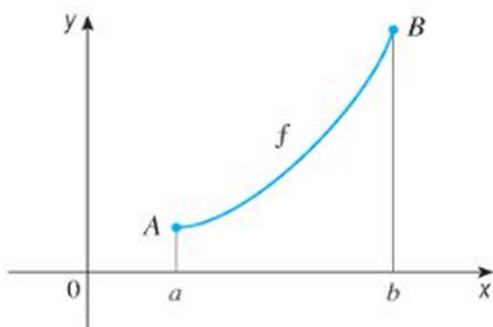
اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

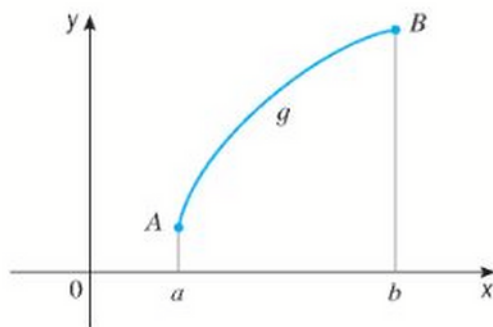
جهت تقریب:

اگر در یک بازه، همه خط‌ها را به سمت بالا منحنی قرار گیرند، می‌گویم تقریب بالا است.

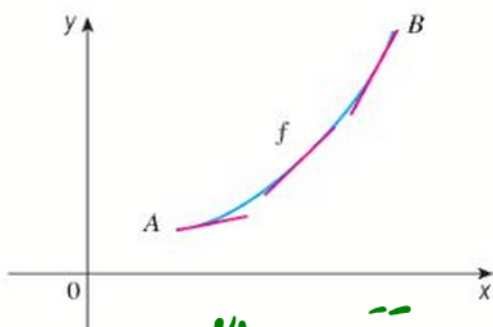
اگر در یک بازه، همه خط‌ها را به سمت پایین منحنی قرار گیرند، می‌گویم تقریب پایین است.



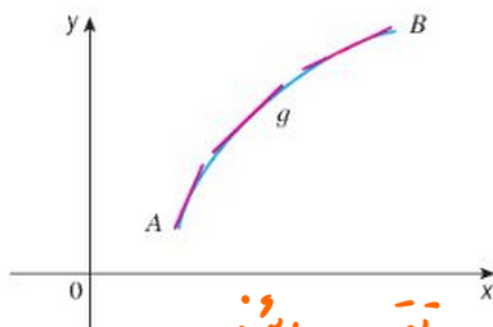
(a)



(b)

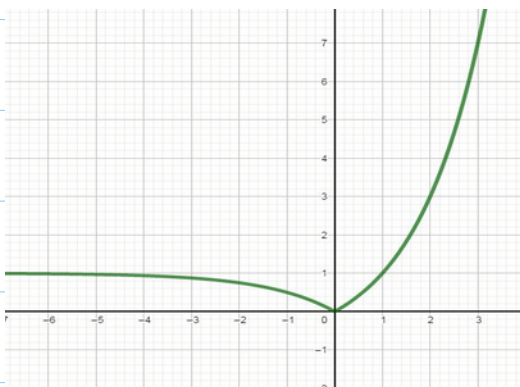


تقریب بالا



تقریب بالا

مثال: جهت تقریب تابع $f(x) = 12 - x^2$ را تعیین کنید.



در $(0, +\infty)$ تقریب بالا

در $(-\infty, 0)$ تقریب پایین

یافتن جهت تقریبی بدن رسم نمودار :

به شکل های تریف با در حالت تقریبی بدن وقت کنند. شبیه به این بر منحنی از

چپ به راست در حال کاهش است و می دانیم شبیه به این بر منحنی منحنی مشتق.

پس مشتق تابع در حال کاهش است. به عبارت دیگر مشتق آن نزود است و اگر یک تابع نزود

باشد، مشتق آن منفی است پس داریم :

$$f' < 0 \Rightarrow f' < 0 \Rightarrow \text{مشتق منفی است} \Rightarrow f \text{ نزودی}$$

برای تقریبی با هم به نتیجه مشابهی می رسم.

نکته: فرض کنید f به از هر نقطه از بازه باز I منحصر باشد :

۱- اگر برای هر x از I : $f'(x) > 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقریبی با f دارد.

۲- اگر برای هر x از I : $f'(x) < 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقریبی با f دارد.

۳- اگر برای هر x از I : $f'(x) = 0$ باشد آنگاه f در I یک خط افقی است.

نکته: برای تعیین جهت تقعر تابع f باید مشتق دوم را تعیین و مثبت کنیم.

مثال: جهت تقعر تابع $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ را مشخص کنید.

$$f'(x) = \frac{1(1+x^2) - x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2) \times 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{2x(1+x^2)(-(1+x^2) - 2(1-x^2))}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{2x(-1-x^2-2+2x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^4}$$

$$2x(x^2-3)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f''		$-$	$+$	$-$	$+$
f					

مثال: به ازای چه مقاری از a ، تفریبی $f(x) = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2$ همواره درجه بالاتر؟

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 3x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 3 > 0 \quad \xrightarrow{+} \quad 4x^2 + 2ax + 1 > 0$$

$$\Delta < 0 : \quad \Delta = 4a^2 - 4 < 0 \rightarrow 4a^2 - 4 < 0 \rightarrow a^2 < 4$$

$$\Rightarrow -2 < a < 2$$

مثال: چه به نقای که تفریبی از تابع $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2} \cos x$ ، $0 \leq x \leq 2\pi$

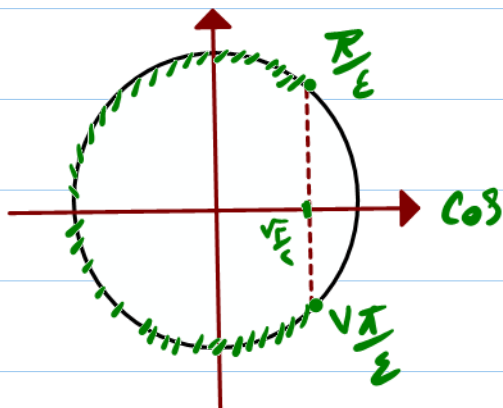
درجه بالاتر، درجه بازه است؟

$$f'(x) = 2x - 2\sqrt{2} \sin x : f''(x) = 2 - 2\sqrt{2} \cos x > 0$$

$$-2\sqrt{2} \cos x > -2 \Rightarrow \cos x < \frac{-2}{-2\sqrt{2}} \rightarrow \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تفریبی به $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ درجه است.



نقطه عطف:

نقطه $(a, f(a))$ را نقطه عطف می‌نامند اگر تابع f در آن نقطه تغییر کند.

۱۱. تابع در این نقطه خط مماس داشته باشد.

۱۲. جهت تغییر مندرار در این نقطه تغییر کند.

نکته: وقتی که توابع f در $(a, f(a))$ خط مماس دارد، حتی در این نقطه مشتق مشخصی

دارد یا در این نقطه پیوسته است، مشتق نامشخص دارد.

مثال: نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} - 10\sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+2) = \frac{10}{9} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$x = -2$ (بالا)
 $x = 0$ (پایین)

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f''		-	+	+
f		$\cap$	$\cup$	$\cup$

تابع در $x = -2$ نقطه عطف دارد زیرا در این نقطه بهای رسم است

و مشتق دوم تغییر علامت می دهد.

$$۲) g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \times x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

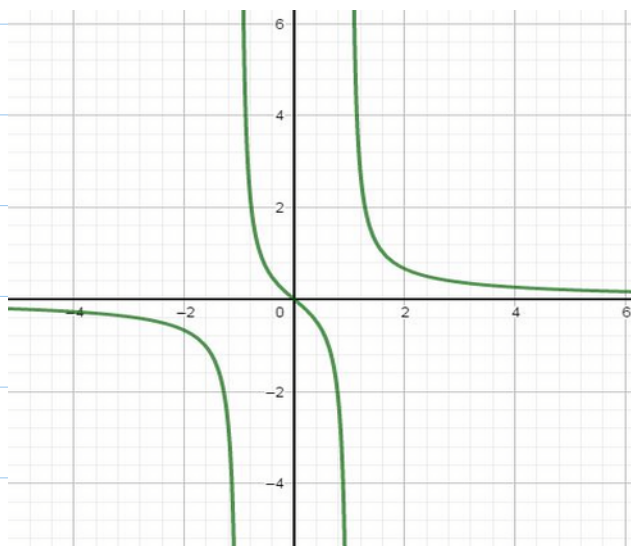
$$g''(x) = \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)2x(-x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 - 1)(-x^2 - 1) - 2x(-x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{2x(x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^3} \rightarrow \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
g''	-	+	0	-	+
g					

عطف

در $x = 0$ نقطه عطف دارد.



چند نکته درباره نقطه عطف:

۱- خط مماس بر نمودار تابع در نقطه عطف تابع از نمودار تابع عبور می کند.

۲- نزدیکی نمودار تابع در نقطه عطف مشتق دوم داشته باشد. مثلاً تابع $y = x^3$ در $x=0$.

۳- در نقطه عطف، اگر مشتق دوم وجود داشته باشد، برابر صفر است.

۴- هر نقطه که مشتق دوم تابع در آن صفر باشد لزوماً نقطه عطف نیست. مثلاً تابع $y = x^4$

در $x=0$.

$$f'(x) = 4x^3 : f''(x) = 12x^2 : f''(0) = 0$$

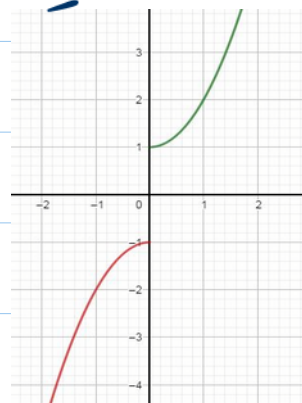
۵- $12x^2$ است پس f'' اطراف $x=0$ تغییرات غیر صاف نمی دهد پس $x=0$ عطف نیست.

۵- هر نقطه که جهت تغییر نمودار تابع در آن تغییر کند، لزوماً نقطه عطف نیست. این نقطه

ممکن است نقطه ناپایداری یا مشتق ناپذیری باشد.

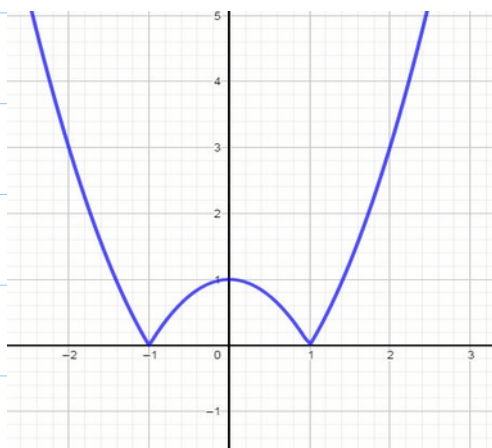
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۶- $x=0$ عطف نیست زیرا در این نقطه تابع برگشت نیست.



مثلاً:

$$g(x) = |x^2 - 1|$$



$x = -1$, $x = 1$ نقطه نینسند زیرا در این نقاط دو نیمه ی تابع رسم می شود

مثال: کنگر ریاضی ۹۷

خط راستی بر منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 3x$ مماس شده و از آن عبور می کند.

شیب این خط کدام است؟ $(1, -\frac{2}{3})$ $(2, \frac{1}{3})$ $(3, \frac{4}{3})$ $(4, \frac{5}{3})$

پس در نقطه عطف بر تابع مماس رسم شده است.

$$\text{عطف} \quad x = \frac{2}{3} \Rightarrow y'' = 6x - 4 = 0 : y' = 4x^3 - 4x + 3$$

$$\text{شیب خط مماس در نقطه عطف} : y'(\frac{2}{3}) = 4(\frac{2}{3})^3 - 4 \times \frac{2}{3} + 3$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 3 = \frac{-4}{3} + 3 = \frac{5}{3} \quad \text{گزیده}$$

سؤال: اگر $A(1, -11)$ نقطه عطف نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

۶۱۴

۵۱۳

۴۱۲

۲۱۱

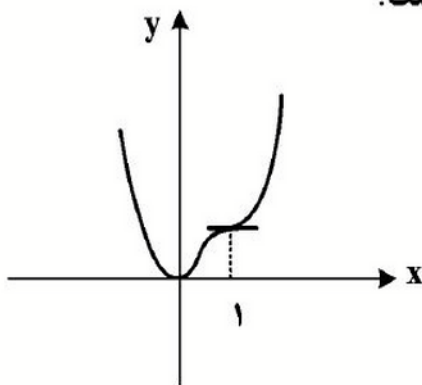
① $f(1) = -11$: نقطه عطف روی تابع : $f(1) = 1 + a + b = -11 \Rightarrow a + b = -12$

$f''(1) = 0$: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$: $f''(x) = 6x + 2a$

$f''(1) = 6 + 2a = 0 \rightarrow a = -3$ ① $-3 + b = -12 \Rightarrow b = -9$

گزینه ۲ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$: $f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$

سؤال: نمودار تابع $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx^2 + cx$ کدام است؟



(۱) -۸

(۲) -۷

(۳) -۵

(۴) -۴

در $x=1$ نقطه عطف داریم پس $f''(1) = 0$.

در $x=1$ هم از انحنای داریم پس $f'(1) = 0$.

$$f'(0) = 0 \text{ (Extremum, } x=0 \text{)}$$

$$f'(x) = 0 : f'(x) = 12x^2 + 7ax^2 + 7bx + c$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0 + 0 + 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$f'(1) = 0 : f'(1) = 12 + 7a + 7b + 0 = 0 \rightarrow 7a + 7b = -12$$

$$f''(1) = 0 : f''(x) = 24x + 14a + 7b$$

$$f''(1) = 24 + 14a + 7b = 0 \rightarrow 7a + b = -18$$

$$\begin{cases} 7a + 7b = -12 \\ 7a + b = -18 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Subtract} \\ \hline b = 6 \end{array} \quad 7a + 6 = -18 \rightarrow 7a = -24 \rightarrow a = -\frac{24}{7}$$

1. $f''(1) > 0$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس سوم: رسم نمودار تابع

جلسه هفتم: صفحات ۱۳۷ تا ۱۴۳

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

رسم نمودار توابع :

برای رسم نمودار یک تابع مراحل زیر را انجام می دهیم :

۱- دامنه تابع را می یابیم .

۲- معاینه های تابع را در صورت وجود دیت می رویم .

۳- مشتق اول تابع را پیدا می کنیم و جدول تغییرات تابع را می یابیم .

۴- مشتق دوم تابع را پیدا می کنیم و جهت تقعر تابع را می یابیم .

۵- محل برخورد نمودار تابع را با محور مختصات در صورت امکان تعیین می کنیم .

۶- با استفاده از اطلاعات دیت روده ، نمودار تابع را رسم می کنیم .

نکته : اگر مرحله حساب زبانی داشت یا بدیهی بود ، از برخی مراحل صرف نظر می کنیم .

مثال : نمودار تابع $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ را رسم کنید .

$$D = \mathbb{R}$$

:

فاصله معاینه

$$f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \rightarrow 3x(x+1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$
f			0	-1



$\max$



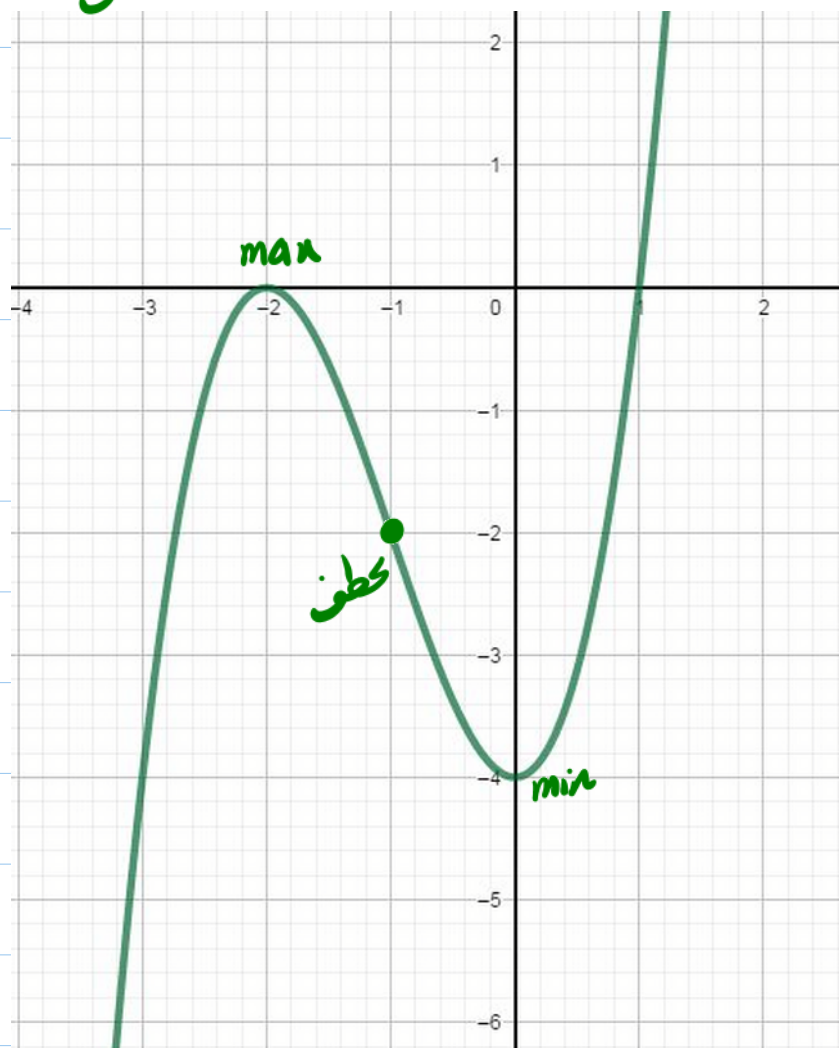
$\min$



$$f''(x) = 6x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
f''	-	0	+
f	$\cap$	$\cup$	

كطف



چند نکته درباره نمودار تابع درجه سوم :

اگر صورت کلی تابع درجه ۳، $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ باشد :

۱- اگر $a > 0$ باشد، نمودار از ناحیه سوم شروع و به ناحیه اول ختم می‌شود و اگر $a < 0$ باشد

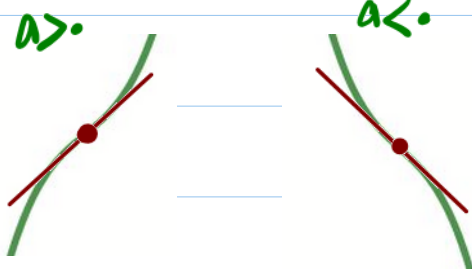
نمودار از ناحیه دوم شروع و به ناحیه چهارم ختم می‌شود.

۲- مشتق اول تابع درجه سوم به صورت $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ است که یک تابع

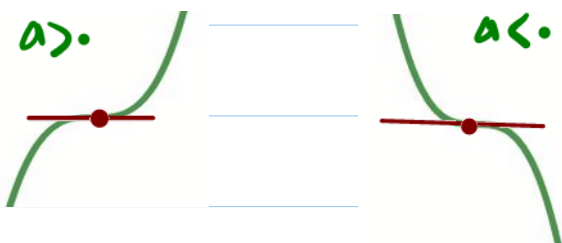
درجه دوم است. ریشه مشتق به شرطی که f در آنجا تغییر حالت دهد نقاط ext تابعی f محسوب می‌شود.

$$\Delta_{f'} = 4b'^2 - 4(3a)(c) = 4(b'^2 - 3ac)$$

الف) اگر $\Delta_{f'} < 0$ باشد، f فاقد ext تابعی است.

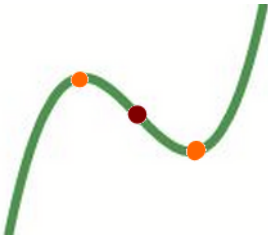


ب) اگر $\Delta_{f'} = 0$ باشد، f فاقد ext تابعی است ولی در ریشه مشتق همگرایی بر تابع قابل مشاهده است.

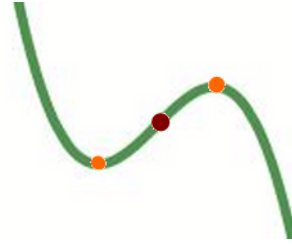


پ اگر $a > 0$ باشد، f دارای یک $\min$ و یک $\max$ است.

$a > 0$.



$a < 0$.



۳- مشتق دوم تابع درجه دوم به صورت $f''(x) = 2ax + 2b$ است. پس تابع همواره

یک نقطه عطف دارد: $2ax + 2b = 0 \rightarrow 2ax = -2b \rightarrow x = -\frac{2b}{2a}$

$$\Rightarrow x_{\text{عطف}} = -\frac{b}{a}$$

۴- در حالتی که f ، ext است، نقطه عطف وسط پاره خطی است که ext است.

راه هم وصل می کنه.

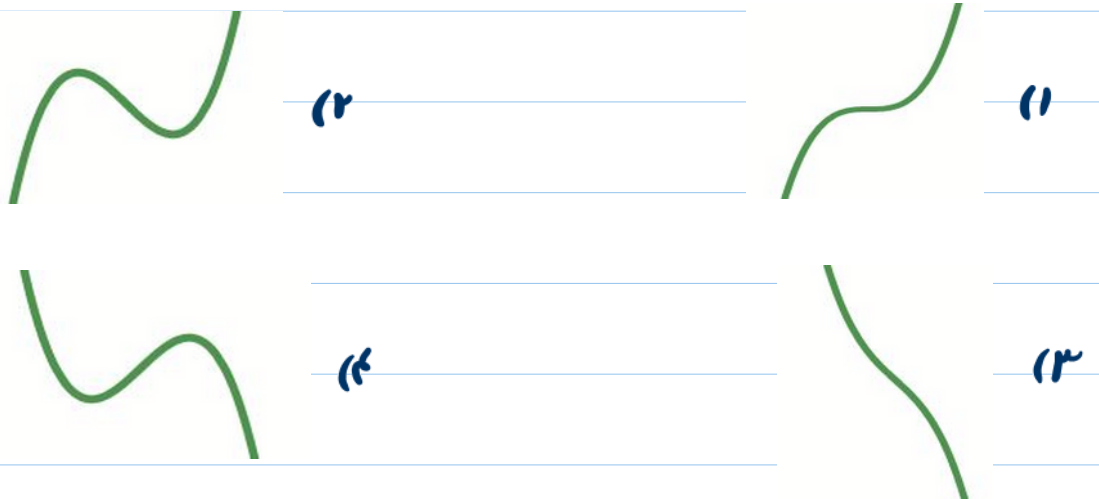
مثال: اگر مجموع مقادیر $\min, \max$ تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - m$ مساوی دو باشد.

$$\frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = y_{\text{عطف}} \Rightarrow \frac{2}{2} = y_{\text{عطف}} \Rightarrow y = 1$$

$$x_{\text{عطف}} = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3 \times 1} = 1 \quad (1, 1) \text{ عطف}$$

$$f(1) = 1 - 4 + 1 - m = 1 \Rightarrow m = -2 \quad \text{مثال (۱، ۱)}$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$ به کدام صورت است؟



نمودار از ناحیه سوم شروع و به ناحیه اول ختم می شود: $a = \frac{1}{3} > 0$

$$\text{فاصله } x \text{ بین است دی} \quad \Delta_{f'} = 4 - 4 \times 1 \times 1 = 0 : f'(x) = x^2 - 2x + 1$$

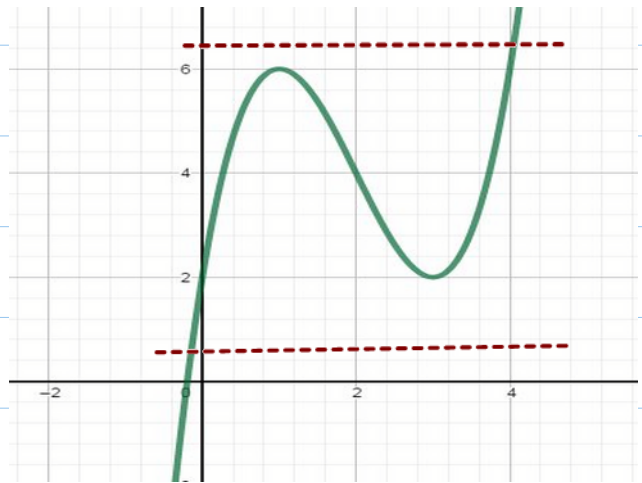
در عطف مسائل انتی است. پس گزینه ۱ درست است.

مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ بازاری چه مقادیری از m دارد

$$f(x) = m \text{ فقط یک ریشه حقیقی دارد؟}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, 3$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		Max	min		



$$m < 2 \leq m > 4$$

مثال: سوزار ربع $f(x) = \frac{x-1}{1-x}$ را رسم کنید. $f(x) = \frac{x-1}{-x+1}$

$$D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$x=1$ به جانب قائم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{1-x} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow y = -1 \quad \text{به جانب افقی}$$

$$f'(x) = \frac{1(1) - (1-1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

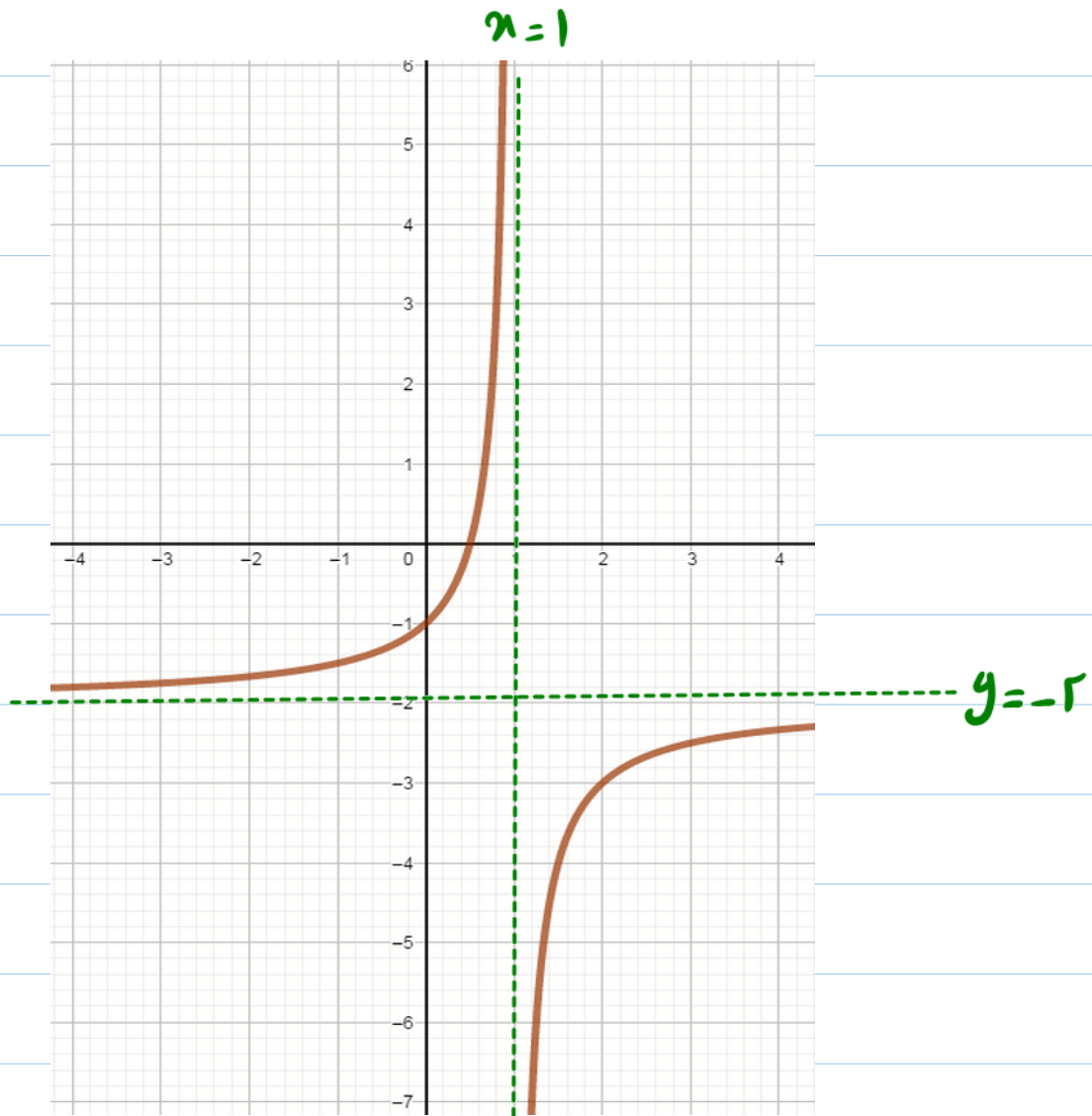
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f'		$+$	$+$	
f	-1	$\nearrow +\infty$	$\searrow -\infty$	-1

$$x=0 \rightarrow y = \frac{2x_0-1}{1-0} = -1$$

معن بر خیزد با محور y ها:

$$y=0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

معن بر خیزد با محور x ها:

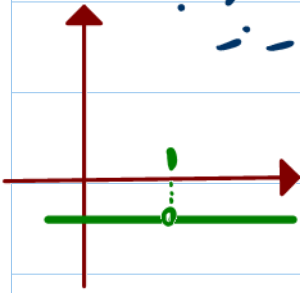


نکته: توابع به فرم کلی $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ را تابع هیپرکزیفیک می گویند، به شرطی $c \neq 0$ باشد

(اگر $c=0$ باشد تابع خطی می شود) و $ad-bc \neq 0$ باشد. (اگر $ad-bc=0$ باشد

تابع ثابت $y = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ می شود)

مثال: اگر مزدار تابع $y = \frac{au+2}{2u+b}$ به صورت زیر باشد، a, b را بیابید.



مزدار تابع ثابت است پس: $ab - 2(2) = 0 \Rightarrow ab = 4$

$u=1$ ریشه منخرج است پس $2(1)+b=0 \Rightarrow b=-2$

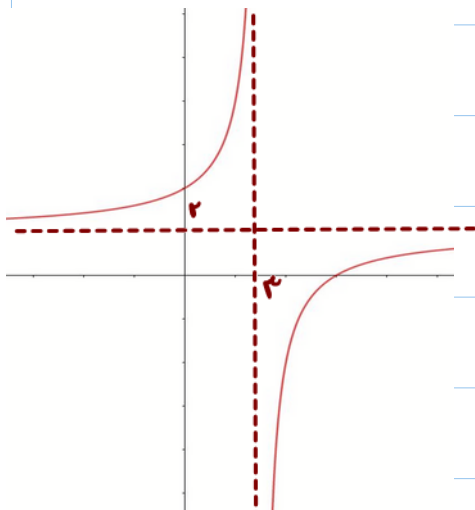
$$a(-2) = 4 \Rightarrow a = -2$$

تذکر: تابع معکوس فاکتور $xy = c$ و نقطه عطف است و دارای یک مجانب قائم

$x = -\frac{d}{c}$ و یک مجانب انحنای $y = \frac{a}{c}$ است، که نقطه تقاطع مجانب ها به نقطه

$(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ مرکز تقاطع تابع است.

مثال: مزدار تابع $f(x) = \frac{ax+4}{bx+1}$ به صورت زیر است. a, b را بیابید.



$x=2$ مجانب قائم: پس $u=2$ ریشه منخرج:

$$2b+1=0 \rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$y=2$ مجانب انحنای:

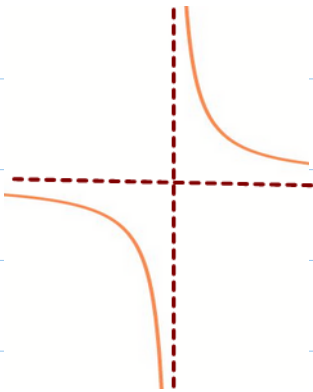
$$\frac{a}{b} = 2 \rightarrow a = 2b = 2(-\frac{1}{2}) = -1$$

نکته: می دانیم مشتق تابع هدرامیک به صورت $f'(m) = \frac{ad-bc}{(cn+d)^2}$ است. این تابع ردی

دانش پذیرگی است دی در دو طرف معادله $ad-bc$ به صورت

یا که آهردی یا که آزدی است.

سوال: اگر هدرامیک $f(m) = \frac{mn+1}{n-2}$ به صورت زیر باشد، هدر m را بیابید.

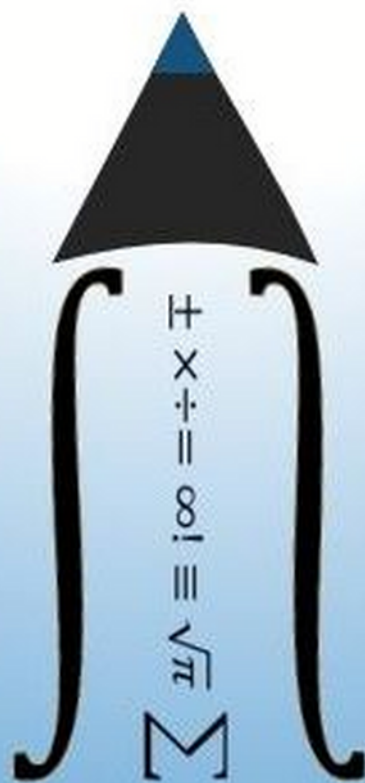


$n=2$ معادله $f(m)$ است، پس در بازه $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$

تابع آزدی است پس f' منفی است ($ad-bc < 0$)

$$m(-2) - (1)(1) < 0 \Rightarrow -2m - 1 < 0$$

$$\Rightarrow -2m < 1 \rightarrow m > -\frac{1}{2}$$



گروه ریاضی دوره دوم متوسطه استان همدان

@riazihmd1

@riazihmd2

ریاضی و تجربی

انسانی و فحک