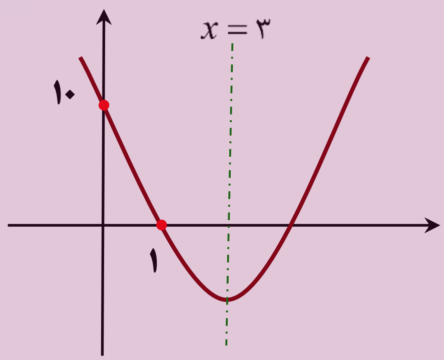
باسمه تعالی

حل سوالات مفهومی (بهار در بهار) نوروز ۱۴۰۳

درس : ریاضی۲

۱) در شکل مقابل نمودار سهمی و معادله‌ی خط تقارن آن داده شده است. معادله‌ی سهمی را بنویسید.



حل : چون معادله‌ی خط تقارن سهمی ، معلوم است. لذا به کمک نقطه برخورد سهمی با محور طول ها که برابر $x=۱$ است. می توان نقطه دیگر برخورد با محور طول ها را تعیین کنید.

$$x=\frac{\alpha+\beta}{۲}\xrightarrow{\alpha=۱\,,\ x=۳}\frac{۱+\beta}{۲}=۳\rightarrow\beta=۵$$

اکنون معادله‌ی سهمی را بدین شکل می توان تعیین کرد.

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\rightarrow f(x)=a(x-۱)(x-۵)$$

$$\xrightarrow{(۰,۱۰)}۱۰=a(۰-۱)(۰-۵)\rightarrow a=۲$$

و لذا :

$$f(x)=۲(x-۱)(x-۵)=۲x^{۲}-۱۲x+۱۰$$

---

۲) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲)$ از خط به معادله‌ی $۳x+۴y=k$ برابر ۲ است. مقدار k را بیابید.

حل:

معادله‌ی خط $۳x+۴y-k=۰$

$$AH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\rightarrow 2=\frac{|3(1)+4(2)-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\rightarrow |11-k|=10\rightarrow\begin{cases}11-k=10\rightarrow k=1\\ 11-k=-10\rightarrow k=21\end{cases}$$

---

۳) مثلث ABC با رئوس $A(2,0)$ و $B(2m+1,m+2)$ و $C(-2,3)$، در رأس C قائم الزاویه است. مقدار m را محاسبه کنید.

حل : چون مثلث در رأس C قائم الزاویه است. پس $AC\perp BC$. از این رو داریم : $m_{AC}\times m_{BC}=-1$

$$\begin{cases}m_{AC}=\dfrac{0-3}{2+2}=-\dfrac{3}{4}\\ m_{BC}=\dfrac{(m+2)-3}{(2m+1)+2}=\dfrac{m-1}{2m+3}\end{cases}\rightarrow\frac{m-1}{2m+3}\times\frac{-3}{4}=-1$$

$$\rightarrow\frac{m-1}{2m+3}=\frac{4}{3}\rightarrow 3m-3=8m+12\rightarrow 5m=-15\rightarrow m=-3$$

---

۴) سه ضلع مثلثی به معادلات $AB:2y-x=3$ و $AC:y-2x=5$ و $BC:2y+3x=6$ هستند.

معادله‌ی ارتفاع AH این مثلث را بنویسید.

حل :

$$\begin{cases}2y-x=3\\ y-2x=5\end{cases}\rightarrow A=\begin{bmatrix}-\frac{7}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$m_{BC}=-\frac{3}{2}\xrightarrow{AH\perp BC}m_{AH}=-\frac{2}{3}$$

$$b=y_0-mx_0=\frac{1}{3}-(\frac{2}{3})(-\frac{7}{3})=\frac{1}{3}+\frac{14}{9}=\frac{17}{9}$$

$$y=mx+b \to y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۱۷}{۹}$$

معادله خط AH $\quad \xrightarrow{\times ۹} ۹y=۶x-۱۷ \to ۶x-۹y=۱۷$

---

۵) اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{۳x+۱}{x^{۲}-۲ax+b}$ به صورت $R-\{۳,۴\}$ باشد، مقدار b و a را بیابید.

حل:

$$D_f=R-\{۳,۴\} \to (x-۳)(x-۴)=\circ \to x^{۲}-۷x+۱۲=\circ$$

یعنی عبارت مخرج تابع داده شده به صورت $x^{۲}-۷x+۱۲$ است. از این رو می نویسیم.

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{۳x+۱}{x^{۲}-۲ax+b} \\ f(x)=\dfrac{۳x+۱}{x^{۲}-۷x+۱۲} \end{cases} \to x^{۲}-۲ax+b \equiv x^{۲}-۷x+۱۲$$

$$\to -۲a=-۷ \to a=\frac{۷}{۲} \qquad , \qquad b=۱۲$$

---

۶) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A=\sqrt{۳}\cot\frac{۱۰\pi}{۳}+\sqrt{۲}\cos\frac{۷۹\pi}{۴}$$

حل:

$$A=\sqrt{۳}\cot\frac{۱۰\pi}{۳}+\sqrt{۲}\cos\frac{۷۹\pi}{۴}=\sqrt{۳}\cot(۳\pi+\frac{\pi}{۳})+\sqrt{۲}\cos(۲۰\pi-\frac{\pi}{۴})$$

$$\to A=\sqrt{۳}\cot(\frac{\pi}{۳})+\sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱+۱=۲$$

---

۷) مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\dfrac{x^{۳}-۸}{x-۲}=۸x-۱$ کدام است؟

حل:

$$\frac{x^{۳}-۸}{x-۲}=۸x-۱ \rightarrow \frac{(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)}{x-۲}=۸x-۱$$

$$\rightarrow x^{۲}+۲x+۴=۸x-۱ \rightarrow x^{۲}-۶x+۵=۰$$

$S=-\frac{b}{a}=۶$ مجموع ریشه ها

$P=\frac{c}{a}=۵$ حاصل ضرب ریشه ها

---

۸) نشان دهید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد. سپس فقط یکی از ضابطه‌های آن را طوری تغییر دهید که در این نقطه هم حد داشته باشد و هم پیوسته شود.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x>۲ \\ ۳ & x=۲ \\ ۲x-۱ & x<۲ \end{cases}$$

حل:

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}(x^{۲}-۱)=۳$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}(۴x+۷)=۱۵$

مقدار $f(۲)=۳$

و چون $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)\neq \lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)$ ، پس تابع در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد. برای تغییر ضابطه‌ی تابع، باید روی ضابطه‌ی سوم فکر کنیم و طوری این ضابطه را تغییر دهیم که حد چپ تابع در این نقطه برابر حد راست شود. برای مثال می‌توان نمونه‌ی زیر را نوشت؛

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x>۲ \\ ۳ & x=۲ \\ ۴x-۱ & x<۲ \end{cases}$$

حال چون $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)$ ، پس تابع در نقطه‌ی $x=۲$، هم حد دارد و هم پیوسته است.

---

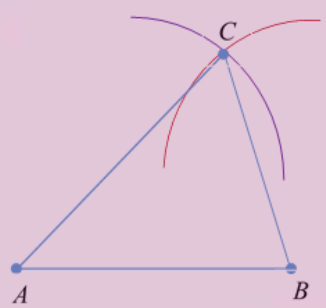
۹) به کمک خط کش و پرگار

الف : مثلثی رسم کنید که اندازه‌ی اضلاع آن ۲ و ۳ و ۴ باشد.

ب : یک مثلث متساوی الساقین رسم کنید که طول قاعده‌ی آن ۳ و طول ساق های آن ۴ باشند.

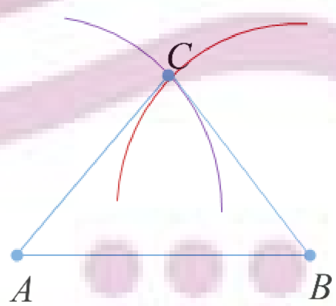
پ : مثلث متساوی الاضلاعی رسم کنید که اندازه‌ی ضلع آن ۳ سانتی متر باشد.

حل:

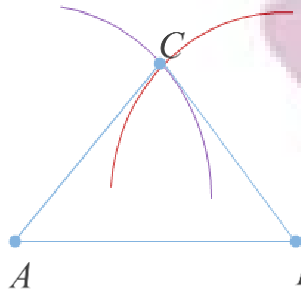


الف) ابتدا پاره خطی به طول ۴ واحد رسم می کنیم و آن را AB می نامیم.
در ادامه از نقطه‌ی A یک کمان به شعاع ۳ واحد و سپس از نقطه‌ی B کمان دیگری به شعاع ۲ واحد می کشیم. اگر محل تلاقی این دو کمان را C مثلث ABC جواب مسئله است.

ب) ابتدا پاره خطی به طول ۴ واحد رسم می کنیم و آن را AB می نامیم.
در ادامه از نقاط B و A دو کمان به شعاع ۳ واحد می کشیم. اگر محل تلاقی این دو کمان را C مثلث ABC جواب مسئله است.



پ) ابتدا پاره خطی به طول ۳ واحد رسم می کنیم و آن را AB می نامیم. در ادامه از نقاط B و A دو کمان به شعاع ۳ واحد می کشیم. اگر محل تلاقی این دو کمان را C مثلث ABC جواب مسئله است.



---

۱۰) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\log_{۲}^{x-۱} \times \log_{x-۱}^{۴} = x^{۲}$$

حل:

$$\log_{۲}^{x-۱} \times \log_{x-۱}^{۴} = x^{۲} \to \log_{۲}^{۴} = x^{۲} \to ۲ = x^{۲} \to x = \pm\sqrt{۲}$$

پاسخ $x = -\sqrt{۲}$ عضو دامنه‌ی تابع لگاریتم نیست و لذا غیر قابل قبول است.

---

۱۱) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\log\tan ۱۶^{\circ} + \log\tan ۲۴^{\circ} + \log\tan ۶۶^{\circ} + \log\tan ۷۴^{\circ}$$

حل:

$$\log\tan ۱۶^{\circ} + \log\tan ۲۴^{\circ} + \log\tan ۶۶^{\circ} + \log\tan ۷۴^{\circ}$$

$$= \log(\tan ۱۶^{\circ} \times \tan ۲۴^{\circ} \times \tan ۶۶^{\circ} \times \tan ۷۴^{\circ}) = \log(\tan ۱۶^{\circ} \times \tan ۲۴^{\circ} \times \cot ۲۴^{\circ} \times \cot ۱۶^{\circ})$$

$$= \log(۱) = ۰$$

---

۱۲) معادله‌ی $۵^{[x]+[-x]} - ۵^{\log_{۲}^{۲x}} = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$۵^{[x]+[-x]} - ۵^{\log_{۲}^{۲x}} = ۰ \to ۵^{[x]+[-x]} = ۵^{\log_{۲}^{۲x}} \to [x]+[-x] = \log_{۲}^{۲^{x}}$$

$$IF\ x \in Z \to [x]+[-x]=0 \to \log_2^{2^x}=0 \to 2^x=1 \to x=0$$

$$IF\ x \notin Z \to [x]+[-x]=-1 \to \log_2^{2^x}=-1 \to 2^x=2^{-1} \to x=-1$$

توجه کنید که جواب $x=-1$ غیر قابل قبول است. زیرا در حالتی این جواب بدست می آید که دامنه‌ی بحث ما اعداد غیرصحیح می باشد.

---

۱۳) معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ریشه های آن باشند.

حل:

$$S=x_1+x_2=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=10$$

$$P=x_1\times x_2=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1$$

$$x^2-Sx+P=0 \to x^2-10x+1=0$$

موفق و پیروز باشید.

گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

جابر عامری / امیر عباس زاده / هوشنگ افشین /آزاده حاجی هاشمی