زاویه مرکزی، وتر

دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه به فاصله یکسان هستند. نقطهٔ ثابت را مرکز دایره و فاصلهٔ یکسان را شعاع دایره می‌گویند.

هر دایره صفحه را به ۳ بخش افراز می‌کند:

الف) نقاط درون دایره: نقطه A داخل دایره‌ای به مرکز O و شعاع R قرار دارد اگر $\overline{OA} < R$

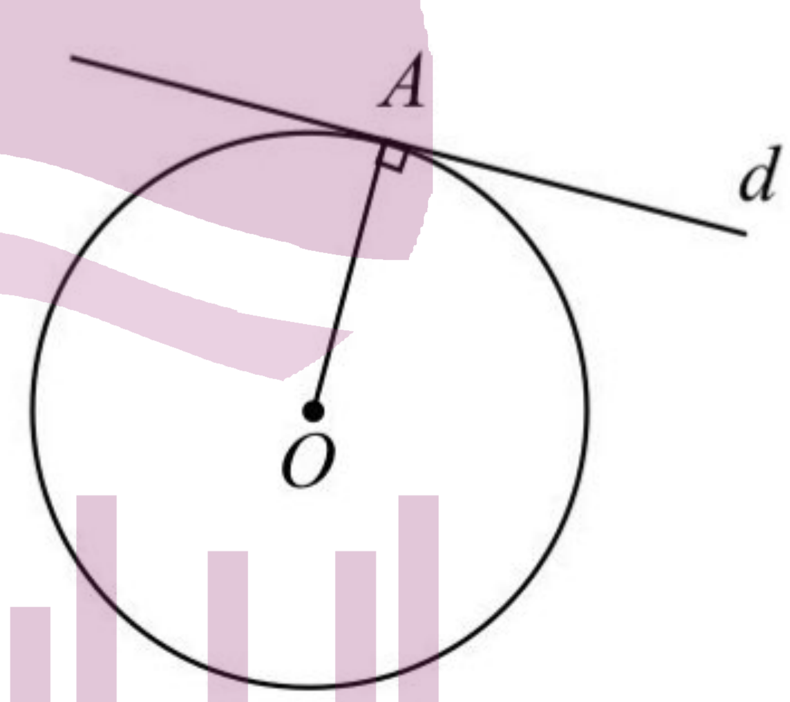
ب) نقاط روی محیط دایره: نقطه A روی محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع R قرار دارد اگر $\overline{OA} = R$

ج) نقاط خارج دایره: نقطه A خارج دایره‌ای به مرکز O و شعاع R قرار دارد اگر $\overline{OA} > R$

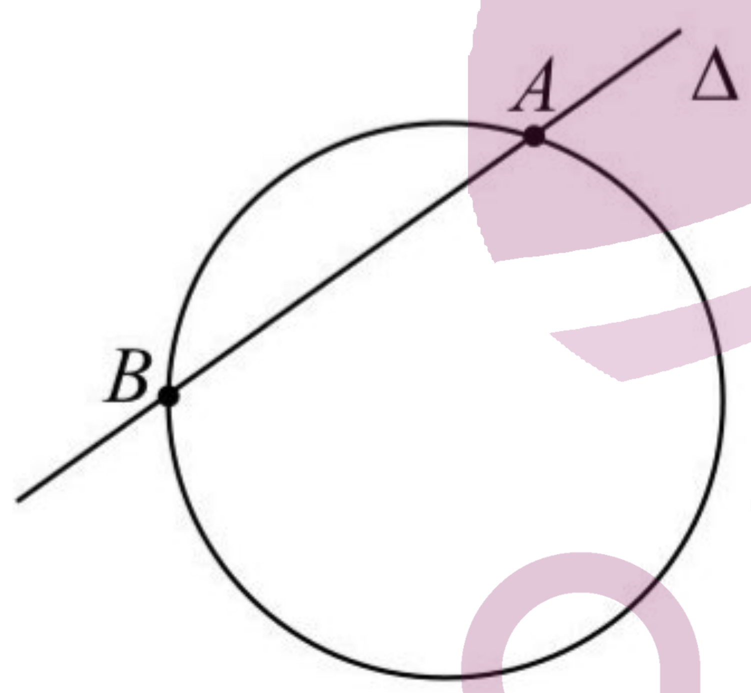
وضعیت نسبی یک خط و یک دایره

خط **قاطع** نسبت به دایره: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند.

خط **مماس** بر دایره: خطی که فقط در یک نقطه دایره را قطع می‌کند که در آن نقطه هم بر شعاع دایره عمود است.

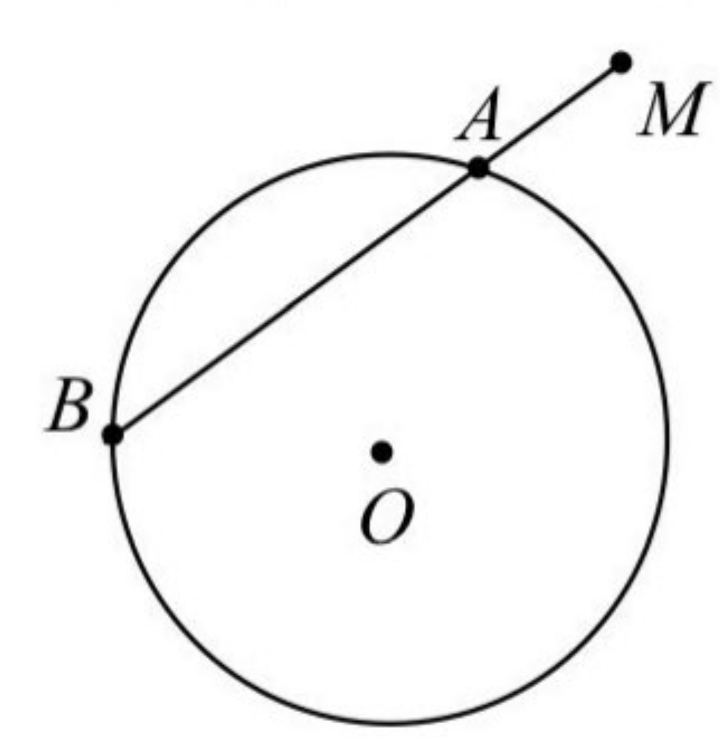


خط d : مماس بر دایره

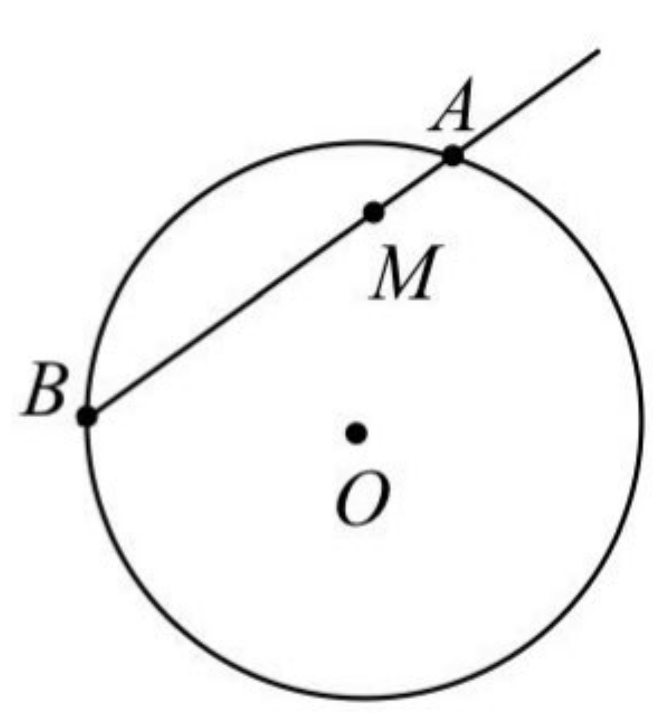


خط Δ : قاطع نسبت به دایره

اگر قاطع رسم شده از نقطه‌ی M واقع در صفحه‌ی یک دایره، آن دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند، آنگاه پاره‌خط‌های MA و MB را دو قطعه‌ی قاطع رسم شده از نقطه‌ی M و یا به صورت خلاصه، دو قطعه‌ی قاطع می‌نامند.



(نقطه‌ی M خارج دایره است)



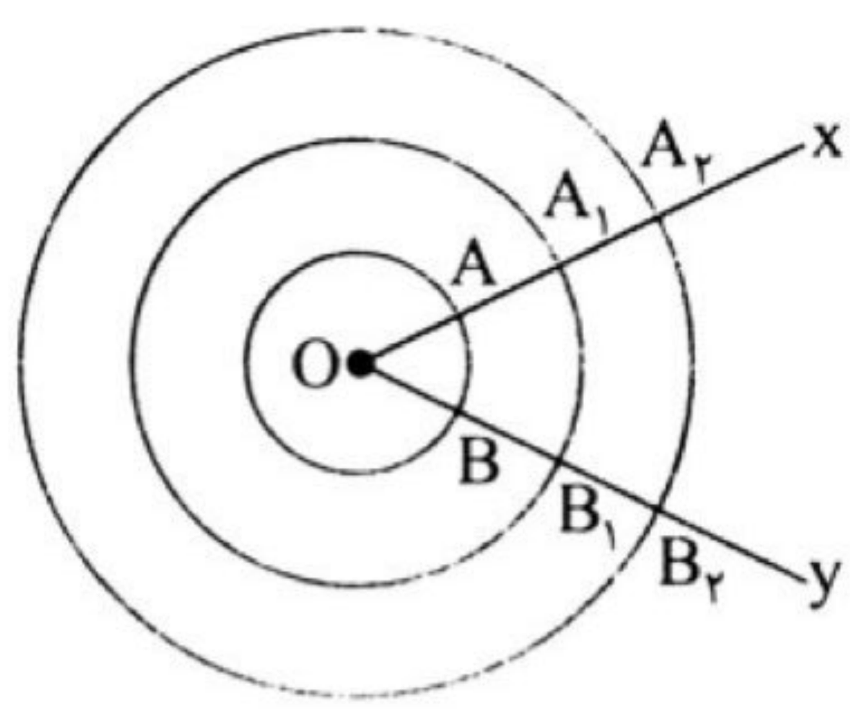
(نقطه‌ی M داخل دایره است)

شعاع: پاره‌خطی که مرکز دایره را به نقطه‌ای روی محیط دایره وصل می‌کند.

وتر: پاره‌خطی که دو نقطهٔ متمایز از محیط یک دایره را به هم وصل می‌کند.

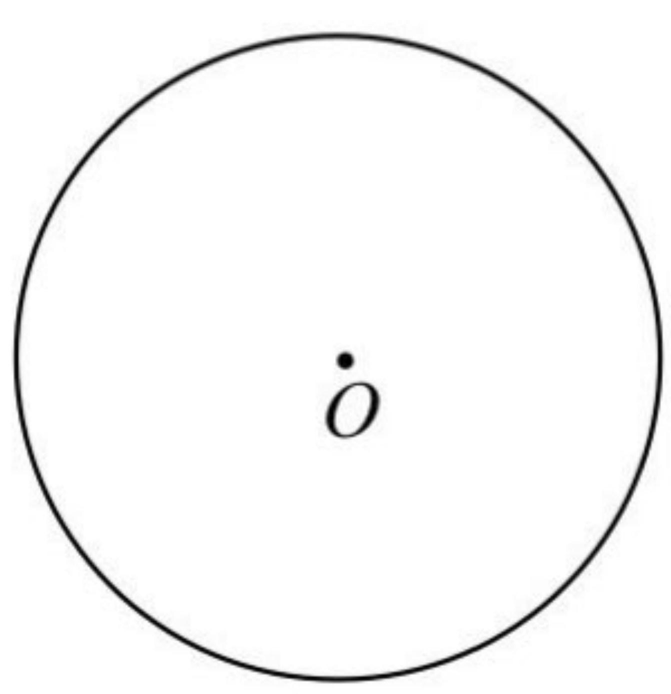
قطر: بزرگترین وتر دایره است که از مرکز دایره عبور می‌کند. هر قطر دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند. این کمان‌های مساوی را نیم‌دایره می‌نامند.

زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع آن، دو شعاع از دایره می‌باشند. این زاویه، روی محیط دایره، کمانی بوجود می‌آورد که به آن کمان نظیر آن زاویه‌ی مرکزی می‌گویند. بنا به قرارداد اندازه‌ی این کمان را با اندازه-ی زاویه‌ی مرکزی یکسان می‌گیرند.



تذکر: دقت کنید که نباید اندازهٔ یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت. برای درک این مطلب به شکل روبرو نگاه کنید. در این شکل سه دایرهٔ هم‌مرکز رسم شده است. با توجه به مطلب بالا، اندازهٔ کمان‌های AB ، A_1B_1 و A_2B_2 برابرند.

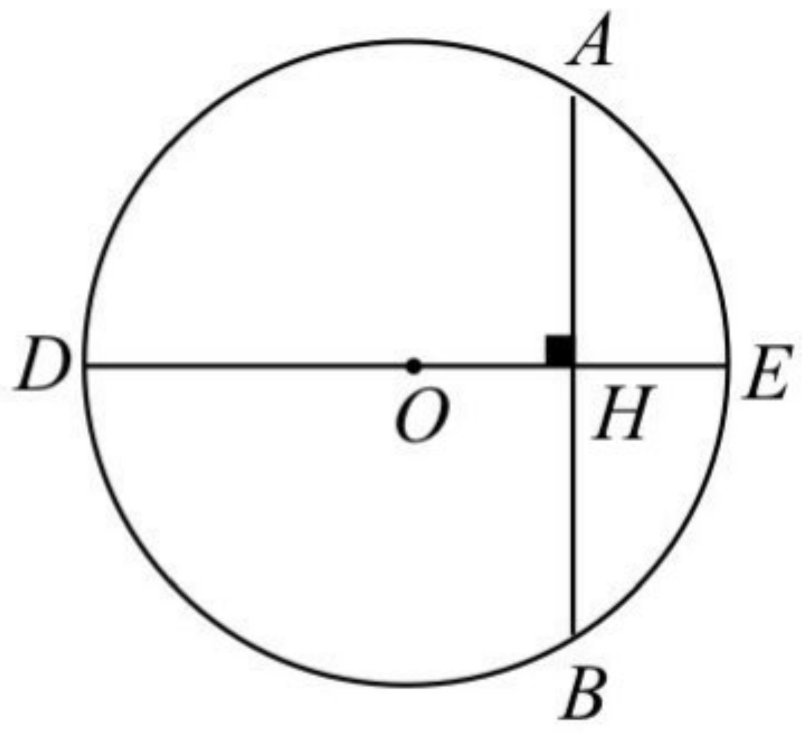
※**نکته:** الف) اندازهٔ طول کمان AB به صورت زیر محاسبه می‌شود:



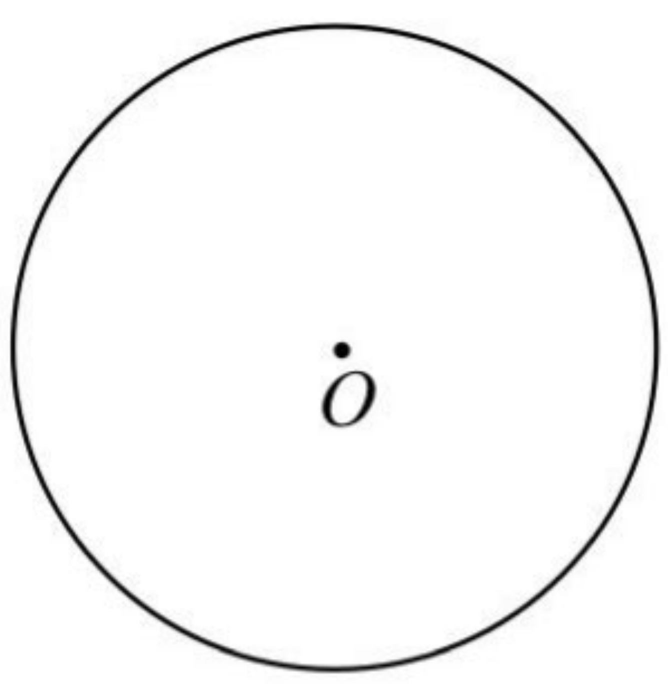
ب) اندازه مساحت قطاع حاصل از این کمان هم به صورت زیر می‌باشد:

قضیه: یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.

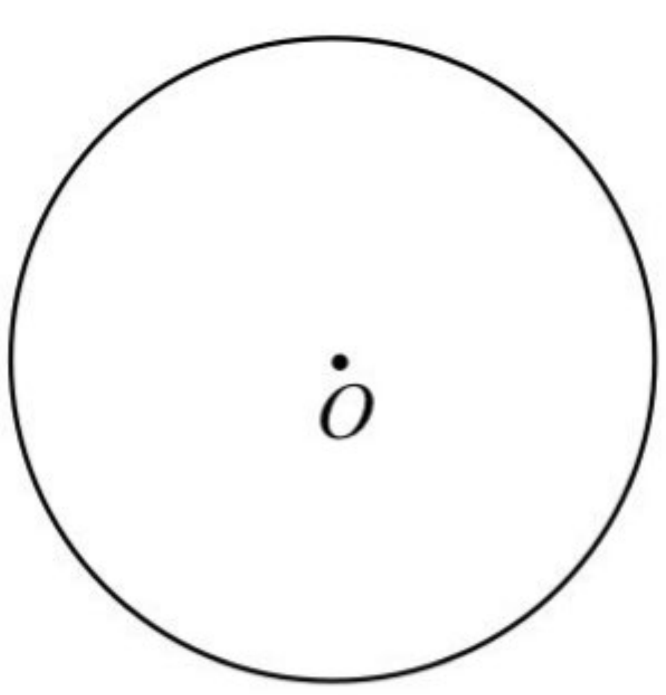
مسئله ۱: در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.



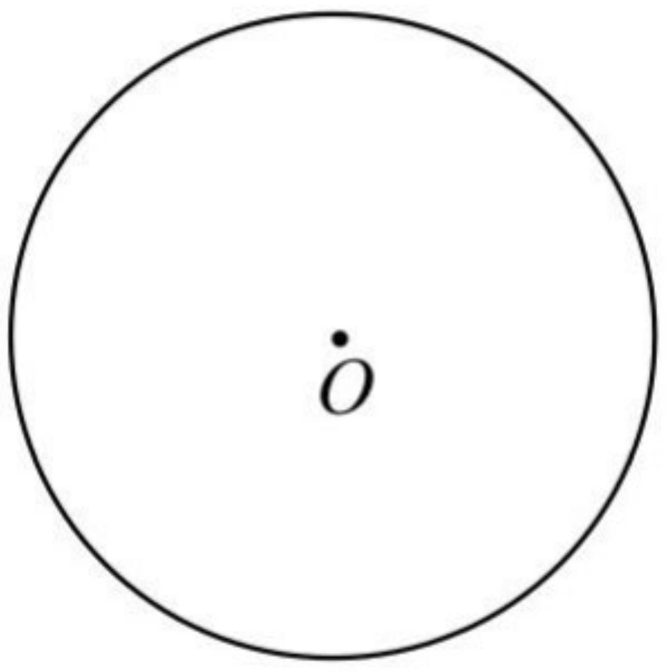
مسئله۲: ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.



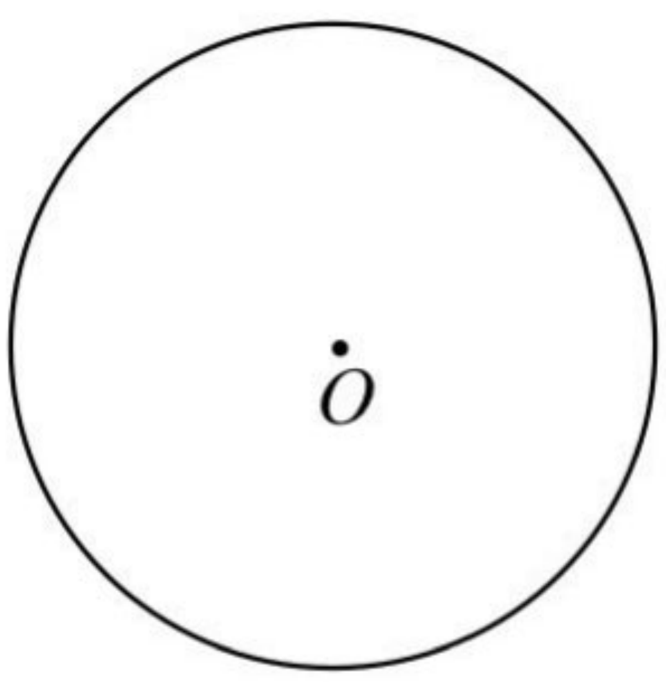
مسئله ۳: ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، عمودمنصف آن وتر است.



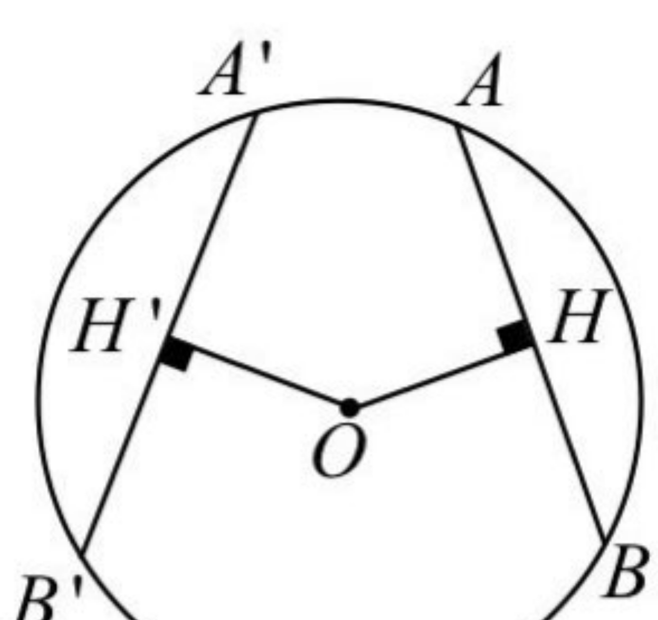
مسئله ۴: ثابت کنید خطی که وسط یک کمان و وسط وتر متناظر آن کمان را به هم وصل می‌کند، از مرکز دایره می‌گذرد.



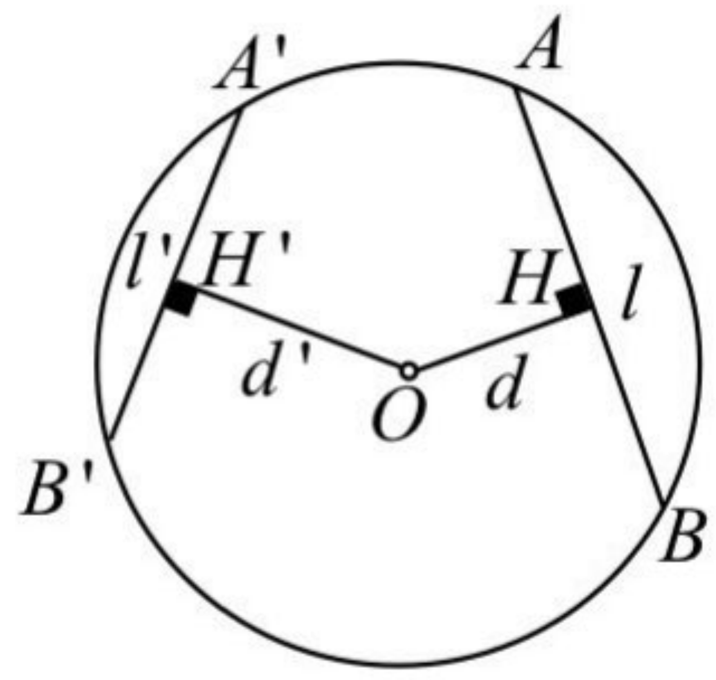
مسئله ۵: ثابت کنید در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی، باهم برابرند و برعکس.



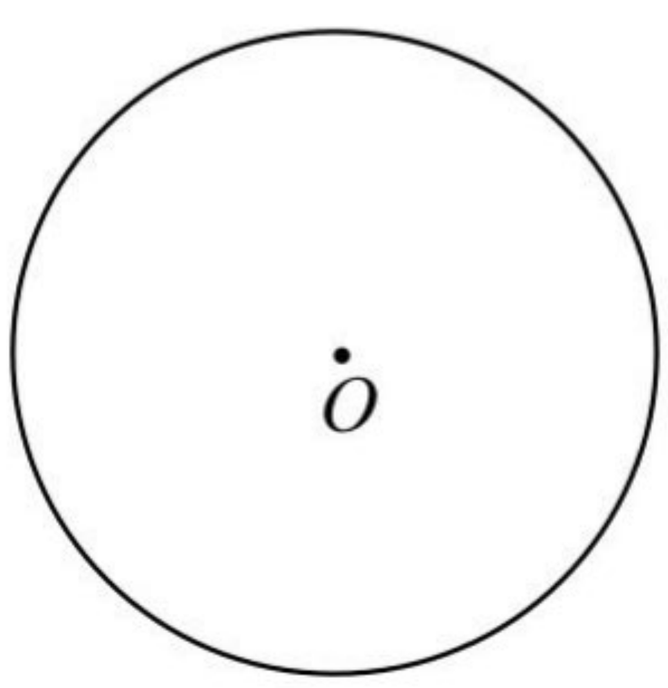
مسئله ۶: ثابت کنید در هر دایره، وترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.



مسئله ۷: ثابت کنید در یک دایره، اگر دو وتر نامساوی باشند، آنگاه وتری که بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس.



مسئله ۸: ثابت کنید، کوچکترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.



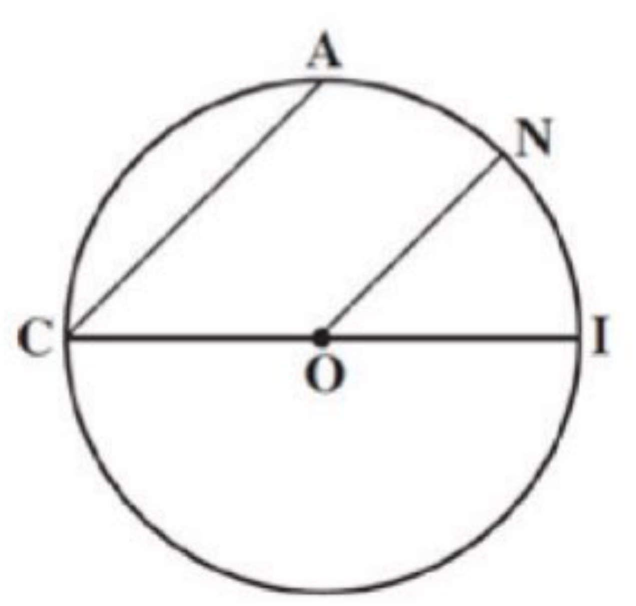
تمرین شماره (۱)

۱- با توجه به شکل‌های انتهای صفحهٔ یک ثابت کنید در هر دو حالت در بین نقطه‌های روی دایره، A نزدیک‌ترین نقطه به M و B دورترین نقطه به M است.

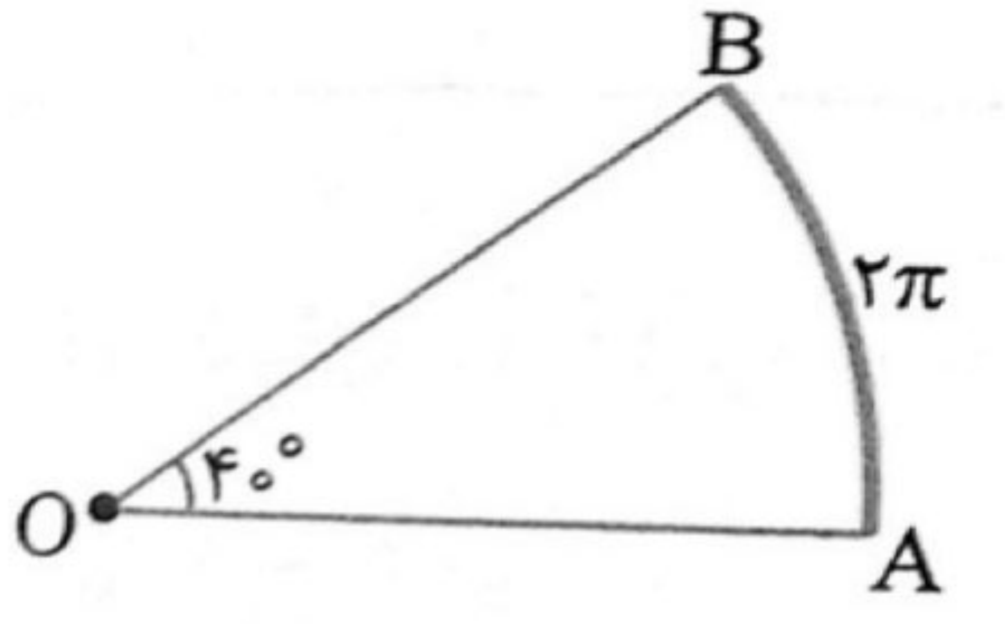
۲- در دایره‌ی $C(O,۲۶)$، فاصله‌ی وتر AB از مرکز دایره ۱۰ می‌باشد. طول وتر AB چقدر است؟

۳- در دایره‌ای به مرکز O و به قطر CI، داریم $CA \parallel ON$.

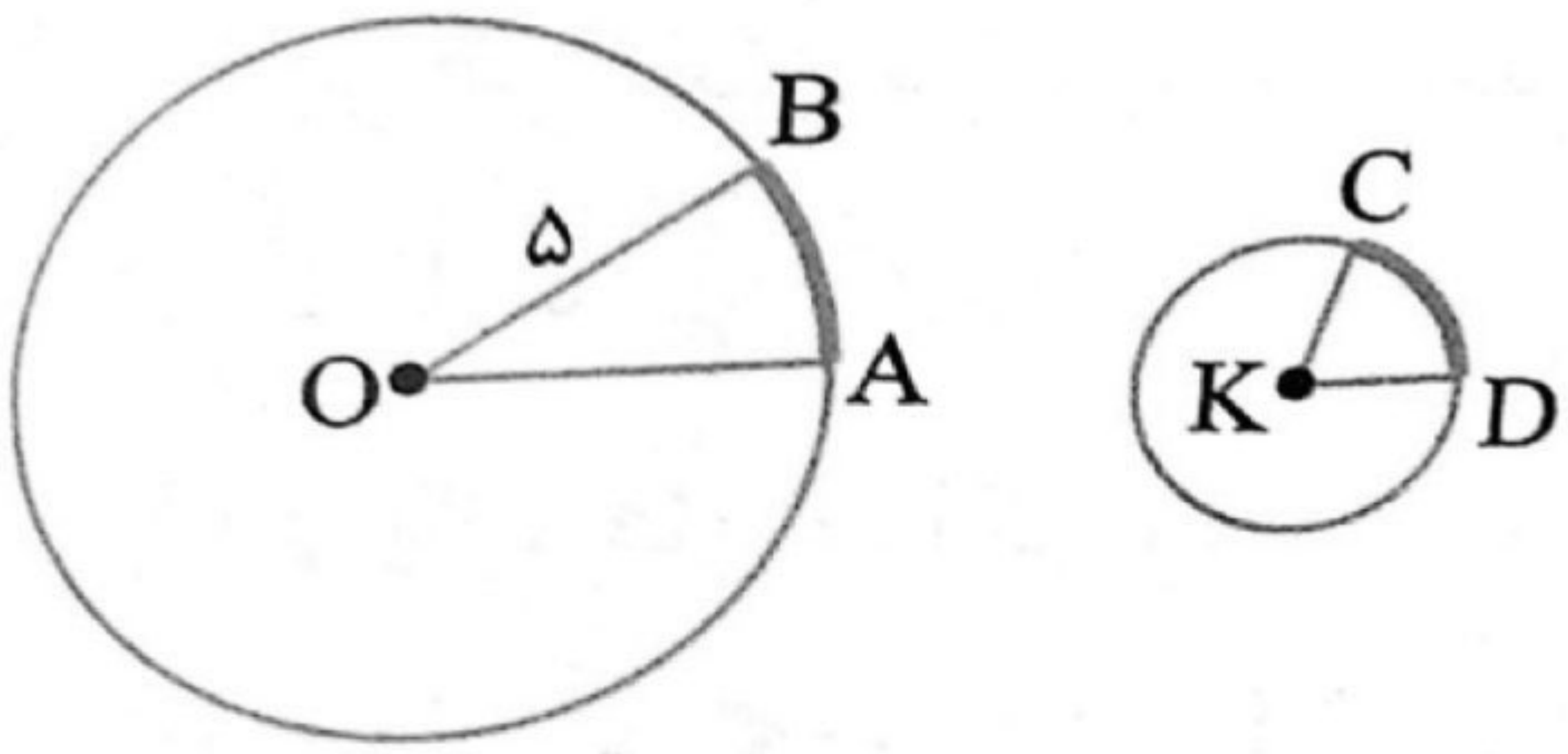
ثابت کنید $\widehat{AN} = \widehat{NI}$.



۴- در شکل مقابل اگر طول کمان AB برابر ۲π و زاویهٔ مرکزی نظیر آن ۴۰ درجه باشد، طول OA را بدست آورید.



۵- در دو دایرهٔ شکل مقابل، طول‌های دو کمان AB و CD برابرند. اگر شعاع دایره‌ها ۵ و ۲ و زاویهٔ $\hat{BOA}$ برابر ۳۰ درجه باشد، اندازهٔ زاویهٔ DKC چند درجه است؟



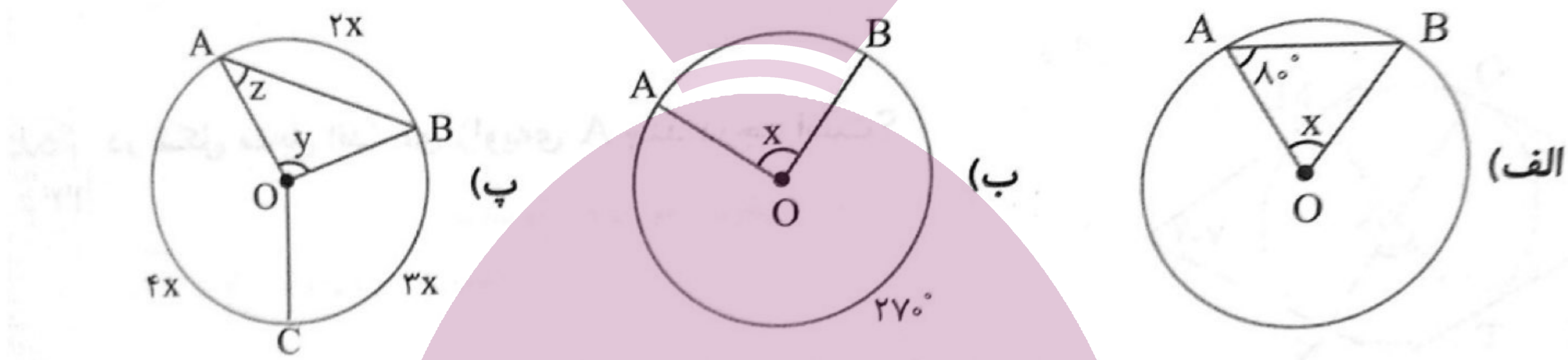
۶- ثابت کنید قطر دایره بزرگترین وتری است که می‌توان در دایره رسم کرد.

انواع زاویه در دایره

۱) زاویه مرکزی

تعریف (یادآوری): زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع آن، دو شعاع از دایره می‌باشند. این زاویه، روی محیط دایره، کمانی بوجود می‌آورد که به آن، کمان نظیر آن زاویه‌ی مرکزی می‌گویند. بنا به قرارداد اندازه‌ی این کمان را با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی یکسان می‌گیرند.

مثال: در هریک از دایره‌های زیر اندازه مقادیر مجهول را بدست آورید.

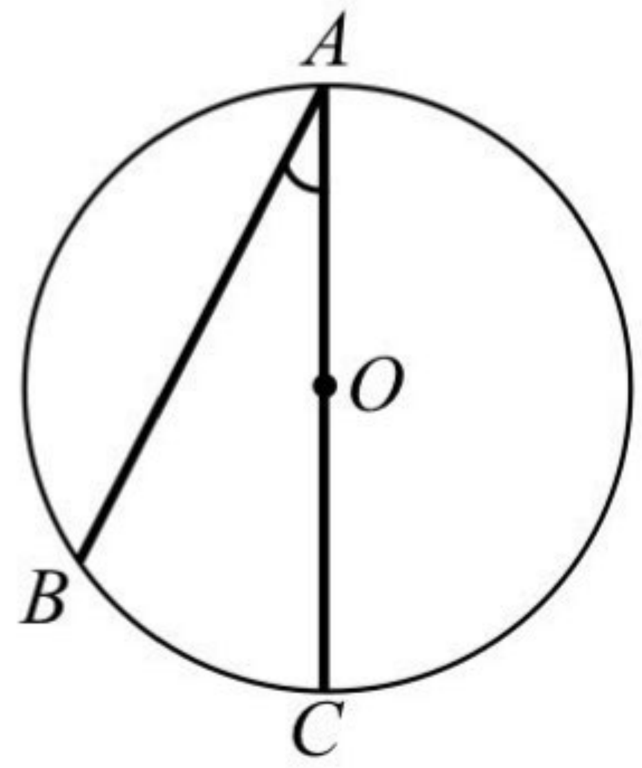


۲) زاویه‌ی محاطی

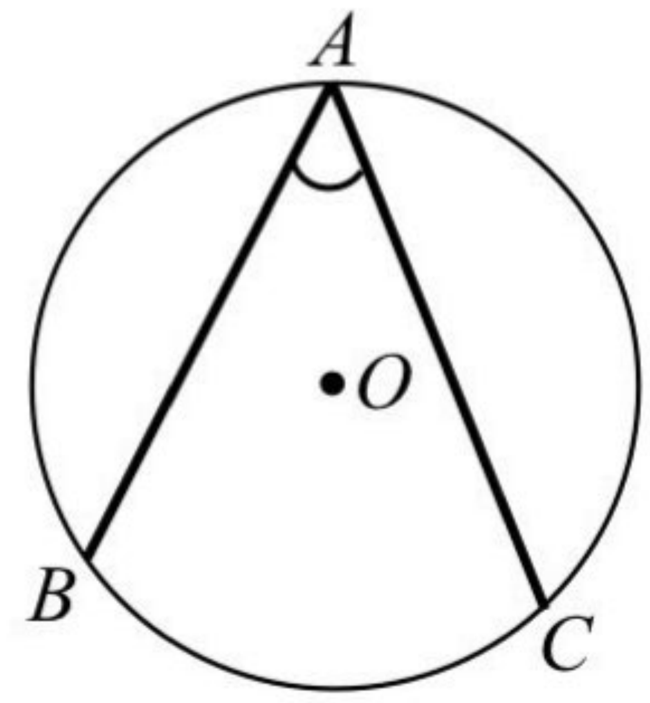
تعریف: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره باشند.

کمان‌هایی از دایره را که به دو ضلع زاویه‌ی محاطی محدود و در داخل زاویه واقع است، را **کمان روبرو به آن زاویه** می‌نامند.

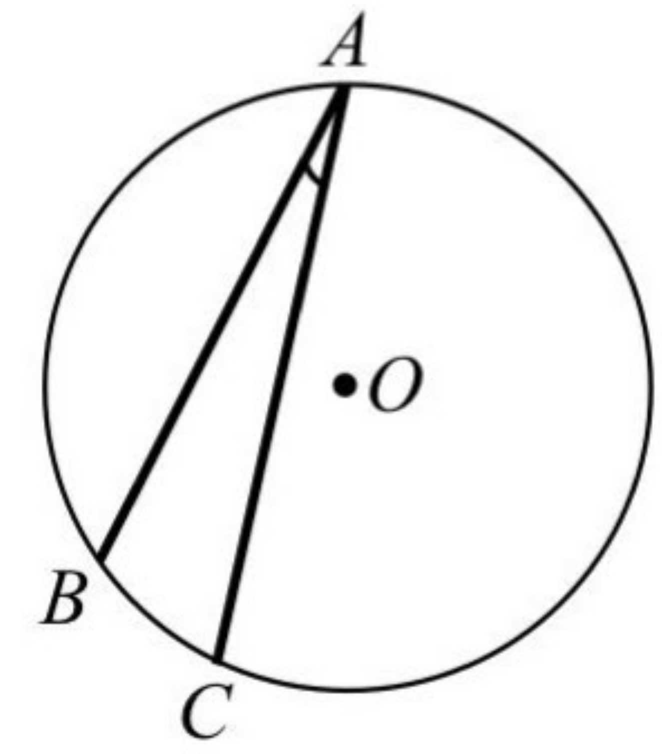
قضیه: اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر با نصف کمان روبرویش است.(برای اثبات اول باید از شکل ۱ شروع کرد، سپس سراغ ۲ شکل دیگر رفت. در ضمن باید بدانیم به غیر از این ۳ حالت، حالت دیگری وجود ندارد!)



(شکل ۱)

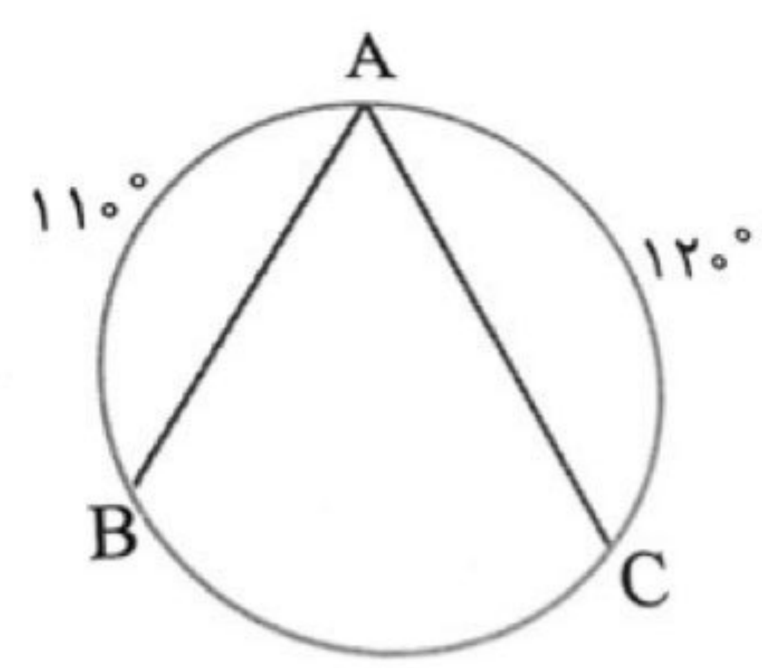


(شکل ۲)

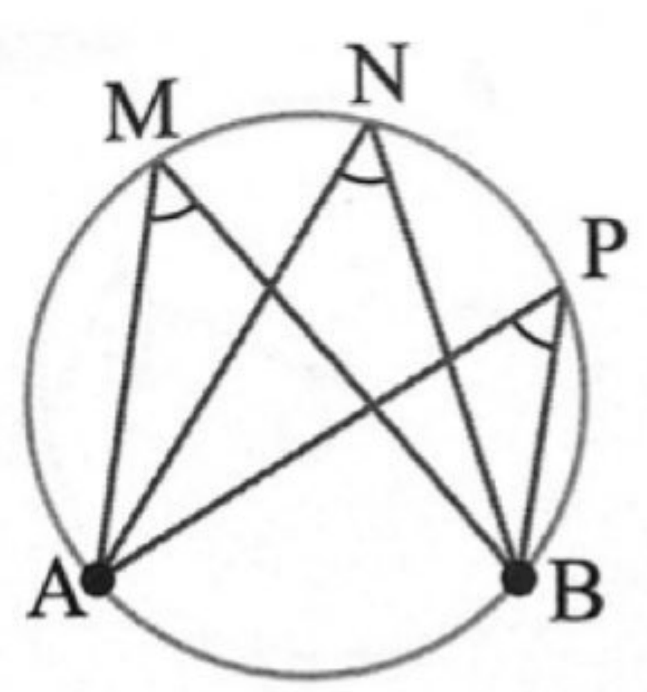


(شکل ۳)

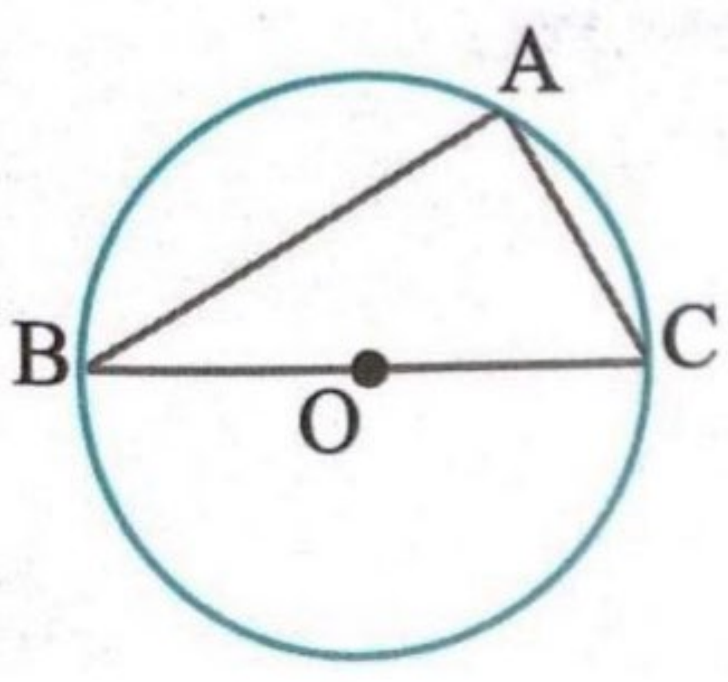
مثال: در دایره شکل مقابل اندازهٔ زاویه A را بدست آورید.



اثبات:



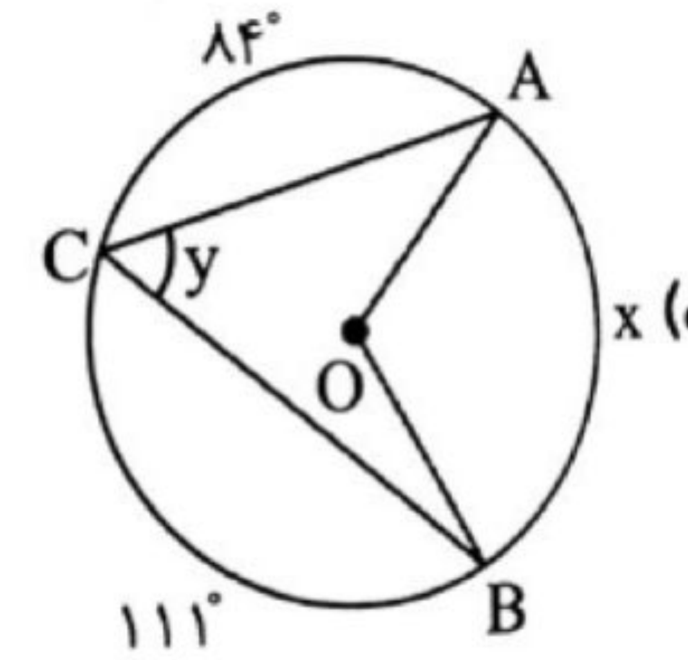
نتیجه ۱: در هر دایره، اندازهٔ زاویه‌های محاطی روبروی یک کمان، با هم برابرند.



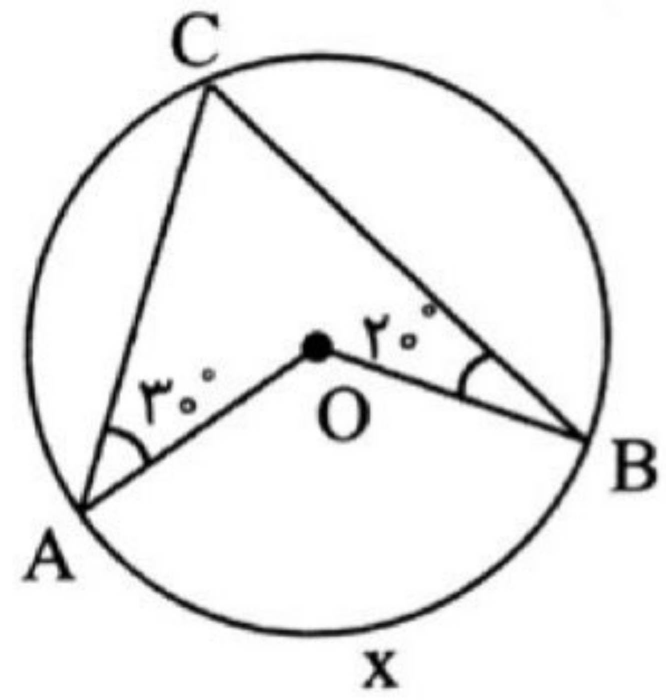
نتیجه ۲: زاویهٔ محاطی روبرو به قطر دایره ۹۰ درجه است. چون قطر دایره، دایره را به دو کمان ۱۸۰ درجه تقسیم می‌کند.

مثال: در هریک از دایره‌های زیر، اندازهٔ مقدارهای مجهول را بدست آورید.

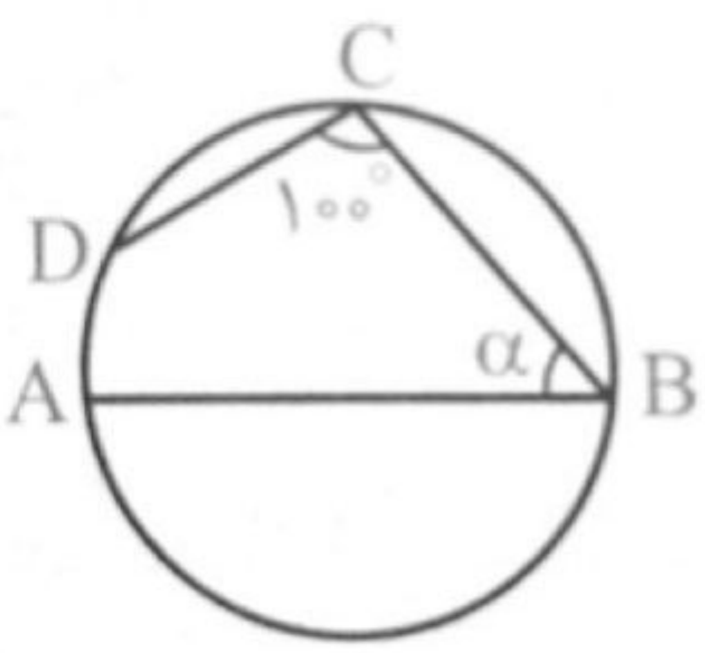
الف)



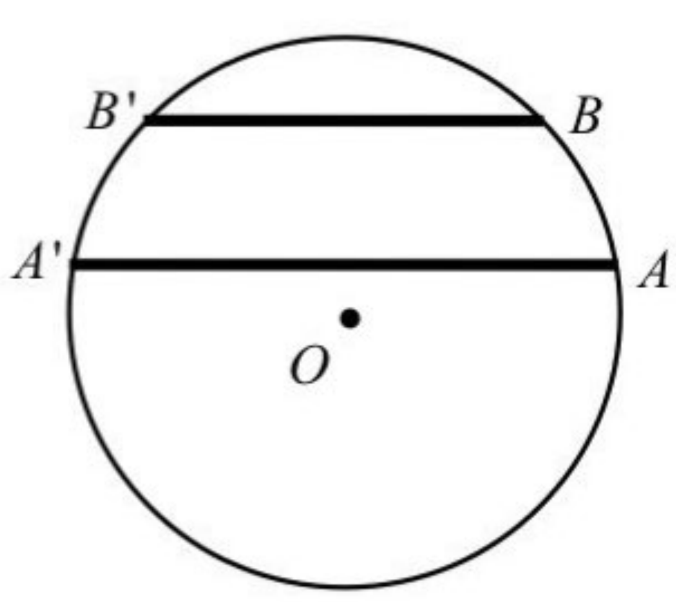
ب)



مثال: در دایره مقابل AB قطر و $CD = BC$ است. مقدار α چند درجه است؟



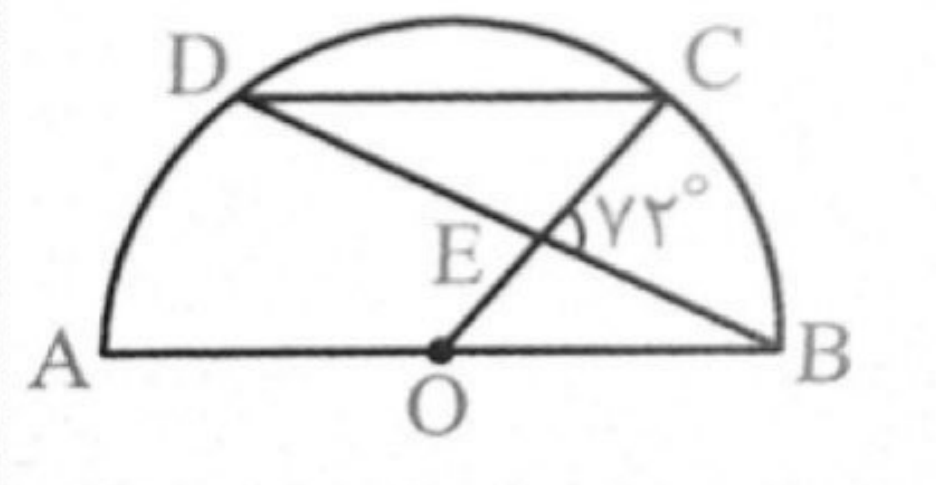
قضیه: در هر دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، باهم برابرند.(راهنمایی: از ویژگی زاویه محاطی یا قطر عمود بر وتر استفاده شود)



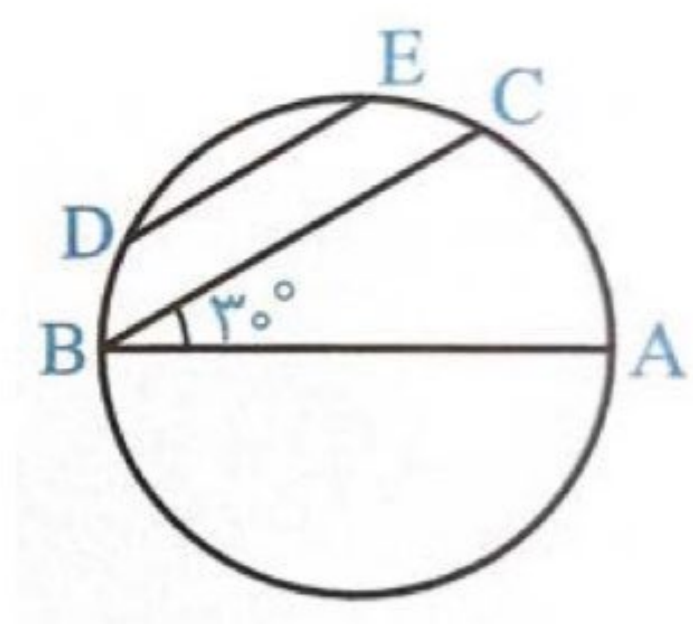
❄ عکس این قضیه صحیح است؟

تمرین: با استفاده از تعریف زاویه‌ی محاطی، نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

مثال: در شکل مقابل، AB قطر نیم‌دایره و O مرکز آن است. اگر CD موازی AB باشد.
اندازه کمان CD را بدست آورید.



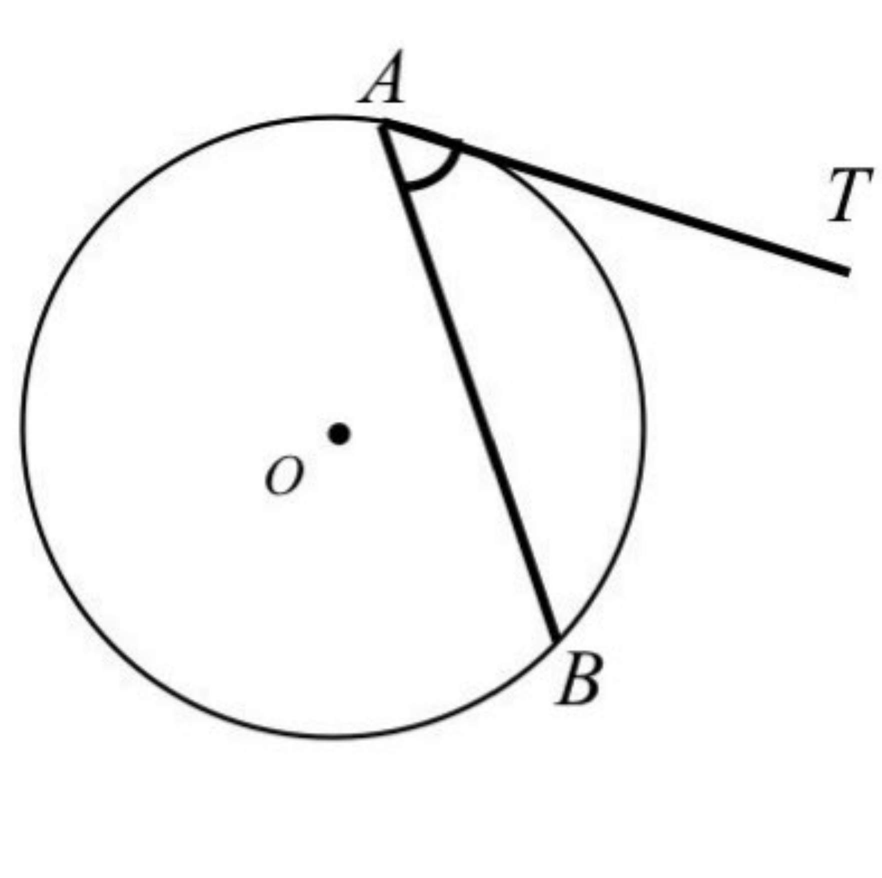
مثال: در شکل مقابل $DE \parallel BC$، AB قطر دایره و نسبت اندازه کمان‌های CE و AC برابر ۵ به ۶ است. اندازه کمان DE چند درجه است؟



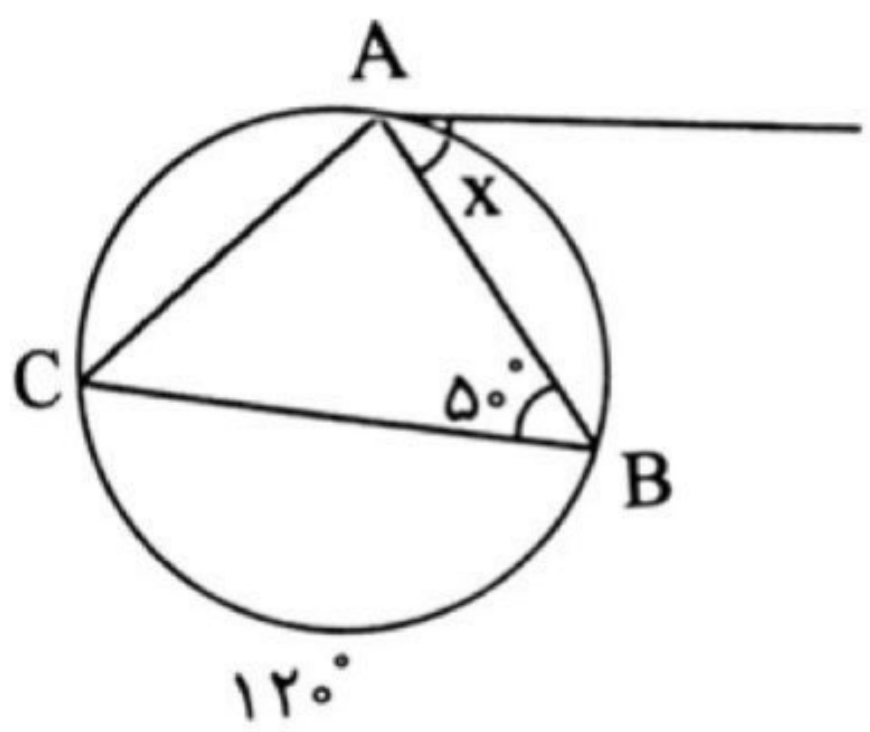
۳) زاویه‌ی ظلی

تعریف: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلعش وتری از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است.

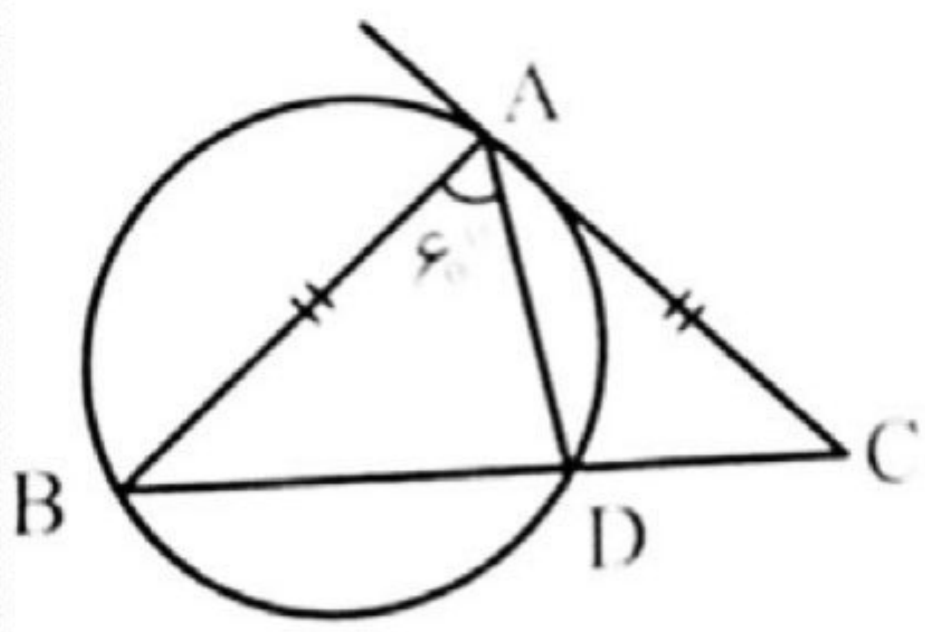
قضیه: اندازهٔ هر زاویه‌ی ظلی برابر است با نصف کمان روبرویش. ($T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$)



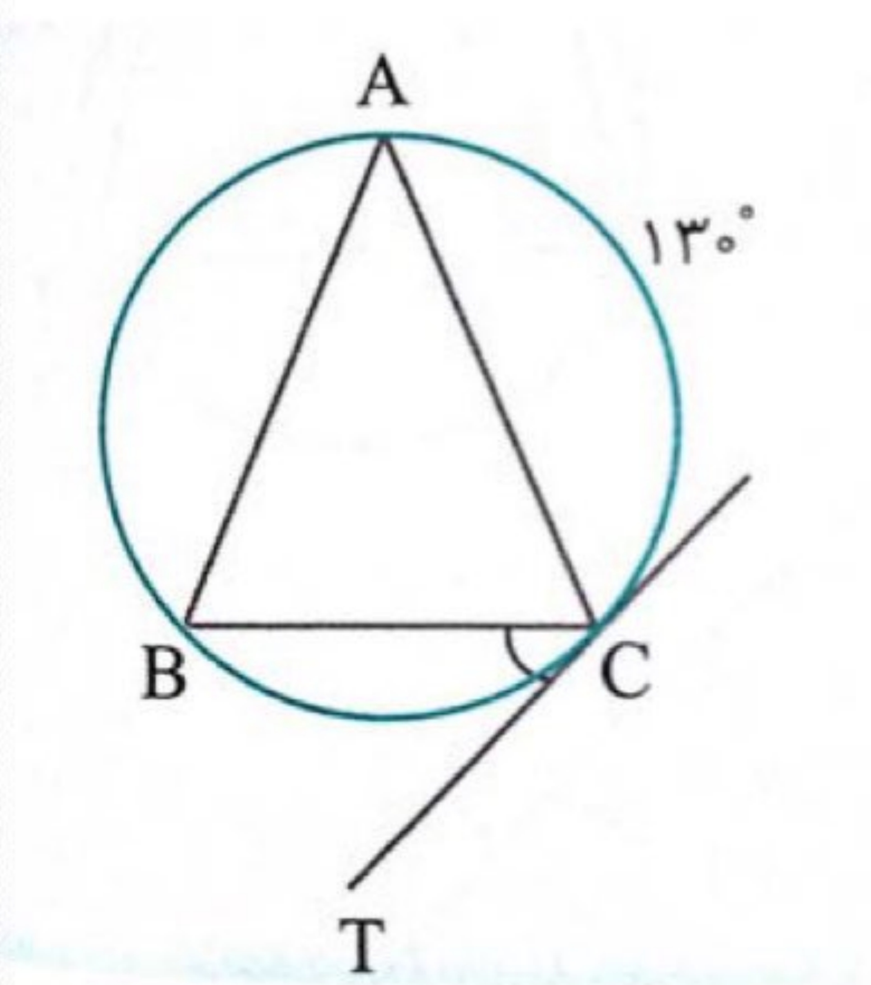
مثال: در دایرهٔ زیر مقدار مجهول را بدست آورید.



مثال: در شکل مقابل، AC در نقطهٔ A بر دایره مماس، $AB = AC$ و $B\hat{A}D = ۶۰^\circ$ است. اندازه $D\hat{A}C$ کدام است؟

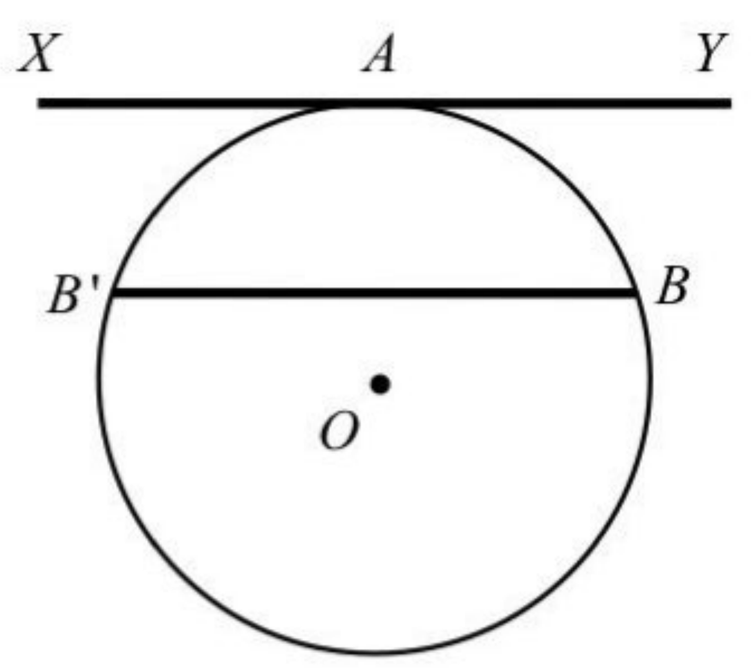


مثال: در شکل روبرو $AB = AC$ و $\widehat{AC} = ۱۳۰^\circ$ و CT در نقطهٔ C بر دایره مماس است. اندازه زاویه BCT چقدر است؟

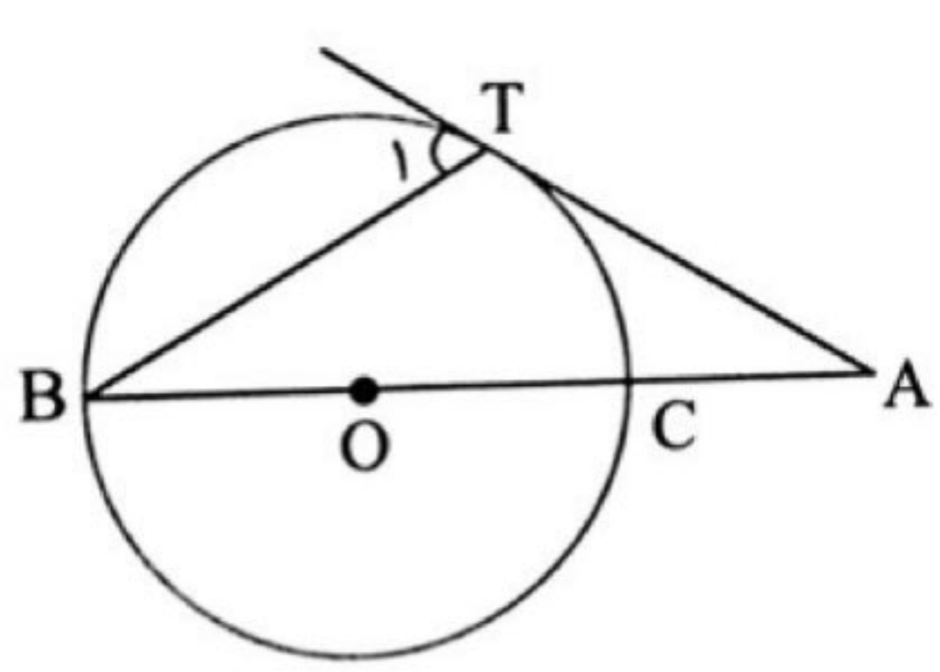


تمرین: دو روش دیگر برای اثبات رابطه زاویه ظلی به شرح زیر است: (۱) با استفاده از ویژگی قطر عمود بر AB (۲) با استفاده از خطی موازی AT از نقطه‌ی B

مسئله: خط XY در نقطه‌ی A بر دایره مماس است. وتر BB' را موازی XY رسم کرده‌ایم. ثابت کنید : $\widehat{AB} = \widehat{AB'}$

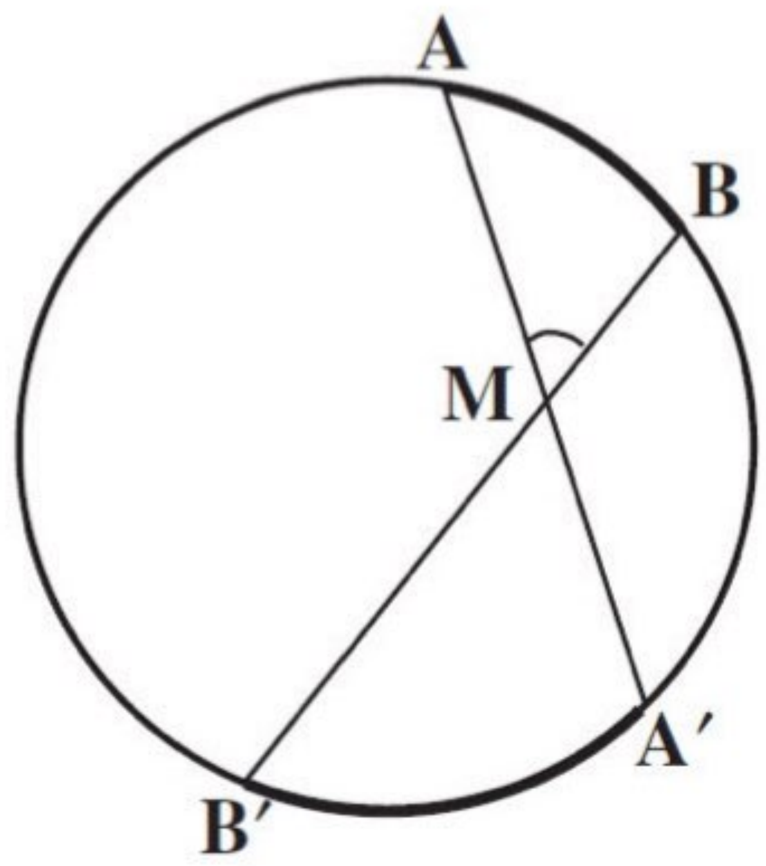


مثال: در دایره مقابل با مرکز O اگر AT مماس بر دایره و $\hat{A} = \hat{B}$ باشد، اندازه‌ی کمان TC کدام است؟

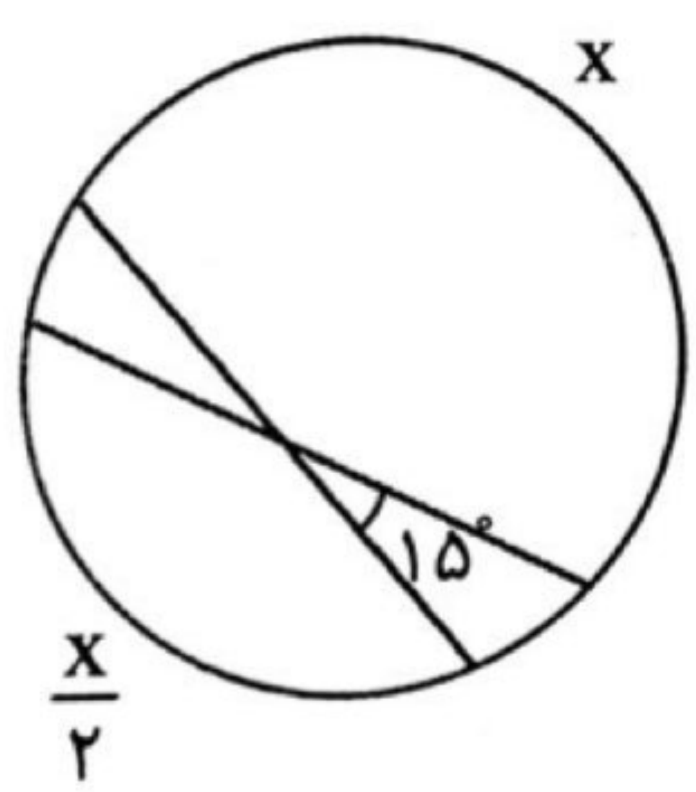


۴) زاویه‌ی بین دو وتر و بین امتداد دو وتر

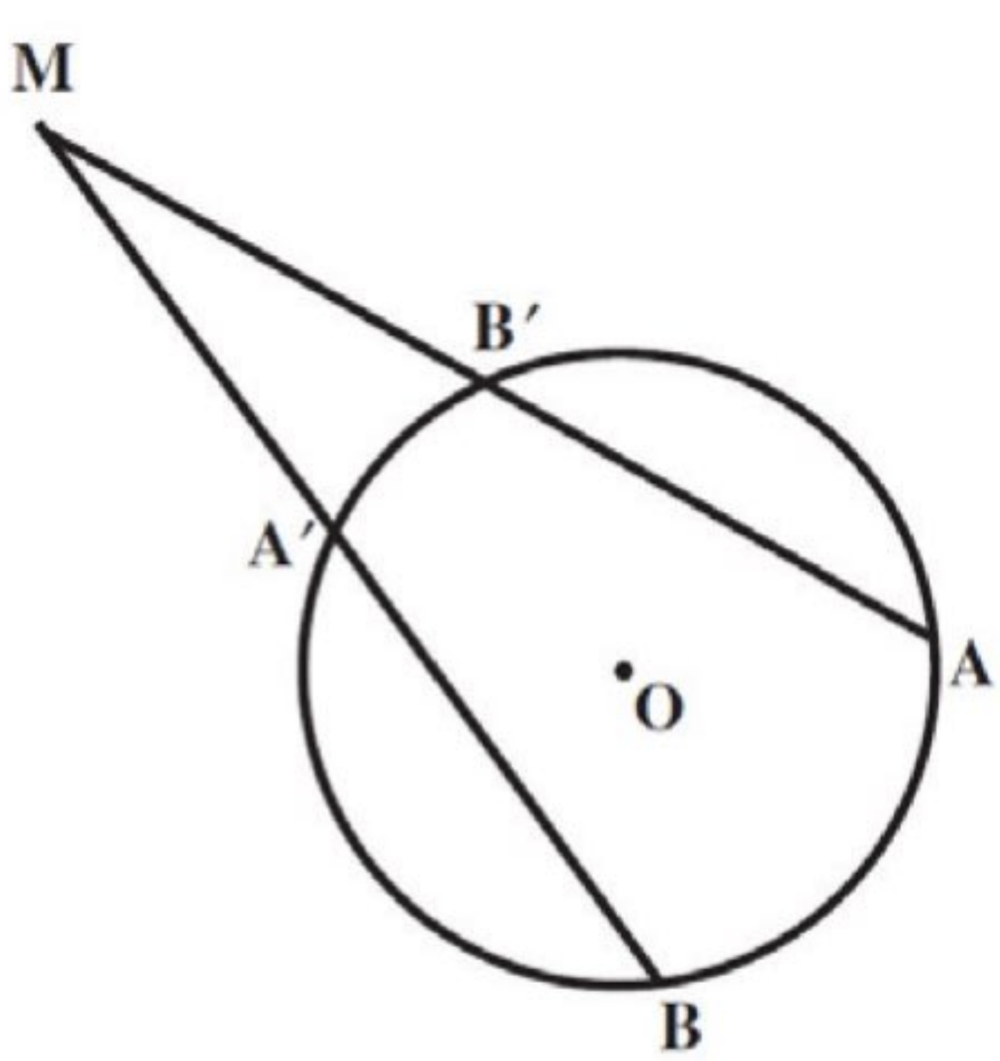
قضیه: اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود برابر نصف مجموع دو کمانی از دایره است که به اضلاع و امتداد اضلاع زاویه محدودند. ($A\widehat{M}B=\dfrac{\widehat{AB}+\widehat{A'B'}}{2}$)



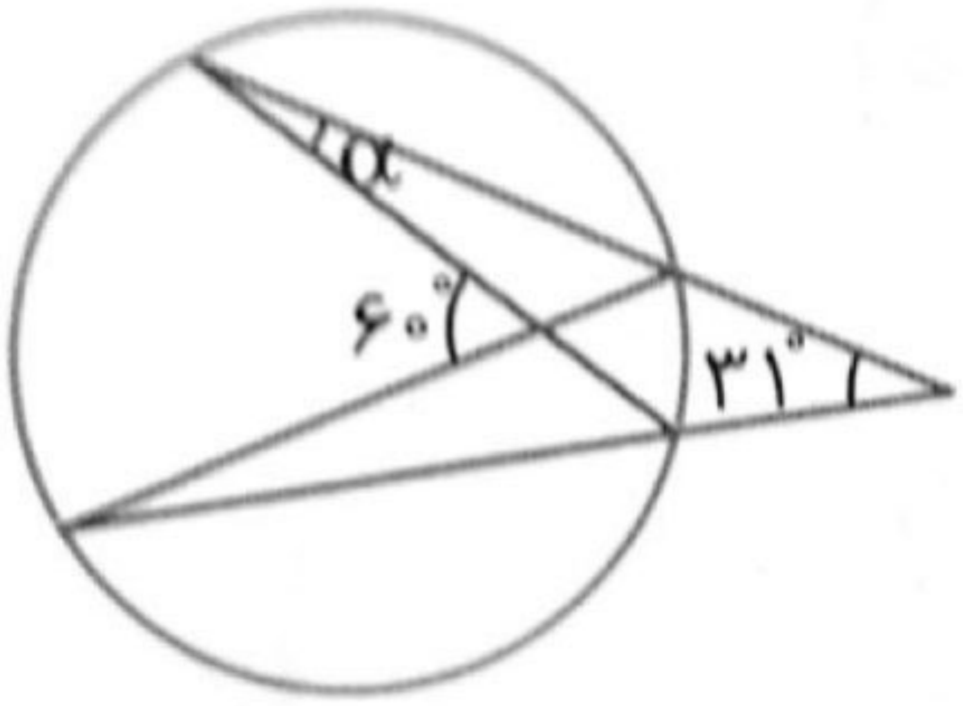
مثال: در شکل زیر اندازه x را محاسبه کنید.



قضیه: اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از دایره ایجاد می‌شود، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به اضلاع آن زاویه محدودند.($A\widehat{M}B=\dfrac{\left|\widehat{AB}-\widehat{A'B'}\right|}{2}$)

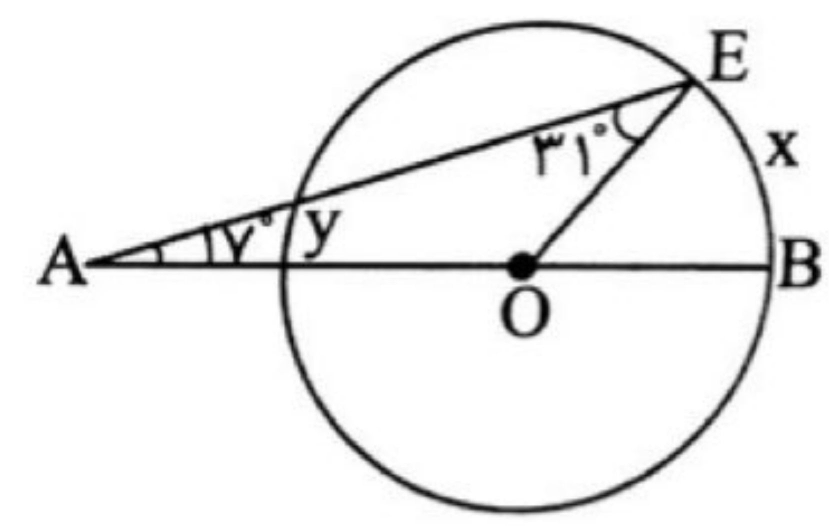


مثال: در شکل مقابل اندازه زاویه α را بدست آورید.

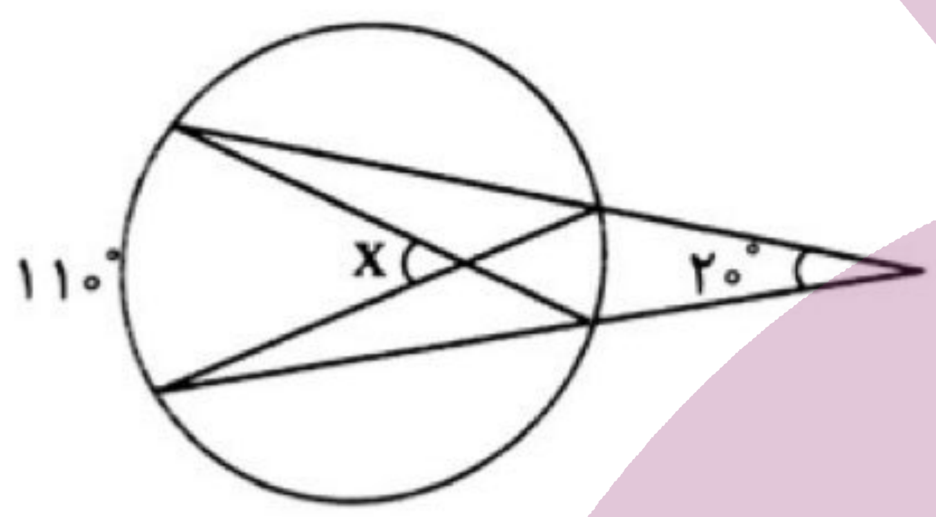


مثال: در هر دایره اندازه مقادیر مجهول را تعیین کنید.

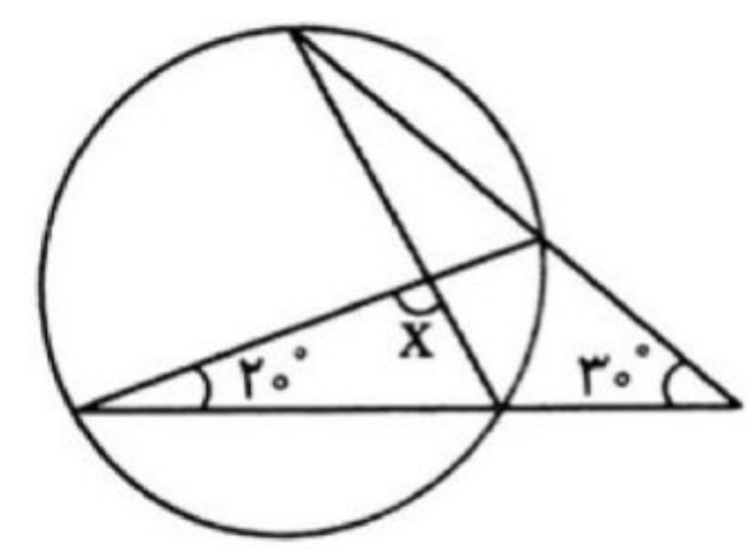
الف)



ب)



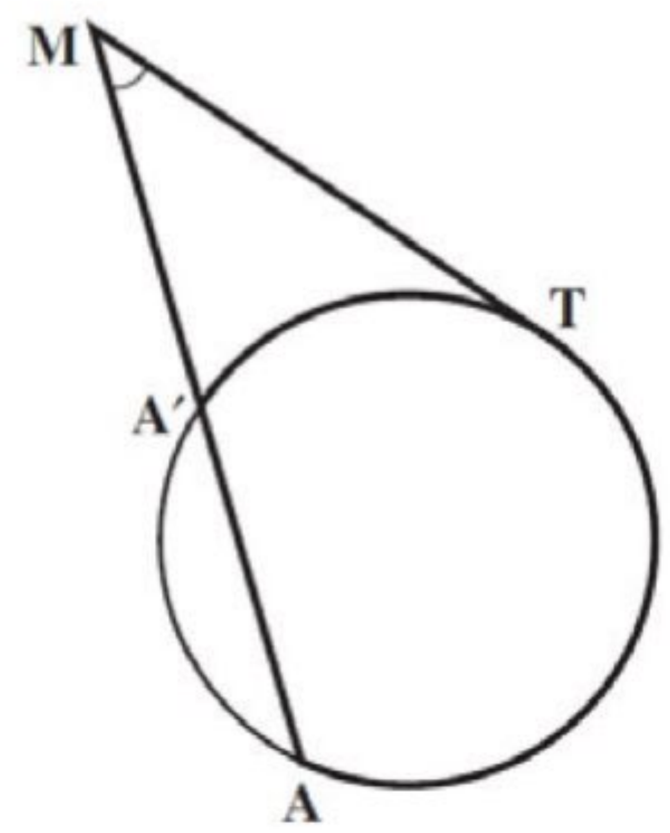
پ)



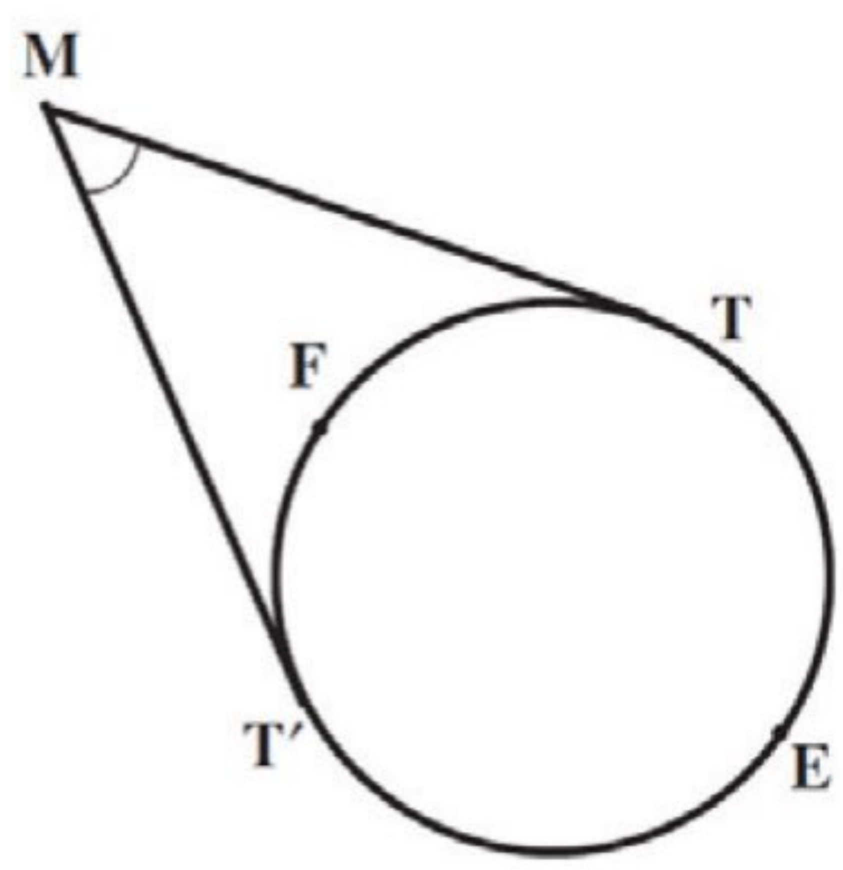
۵) زاویه بین مماس و وتر و بین دو مماس

مسئله: خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T امتداد وتر AA' از دایره را در نقطه‌ی M قطع کرده است. ثابت کنید :

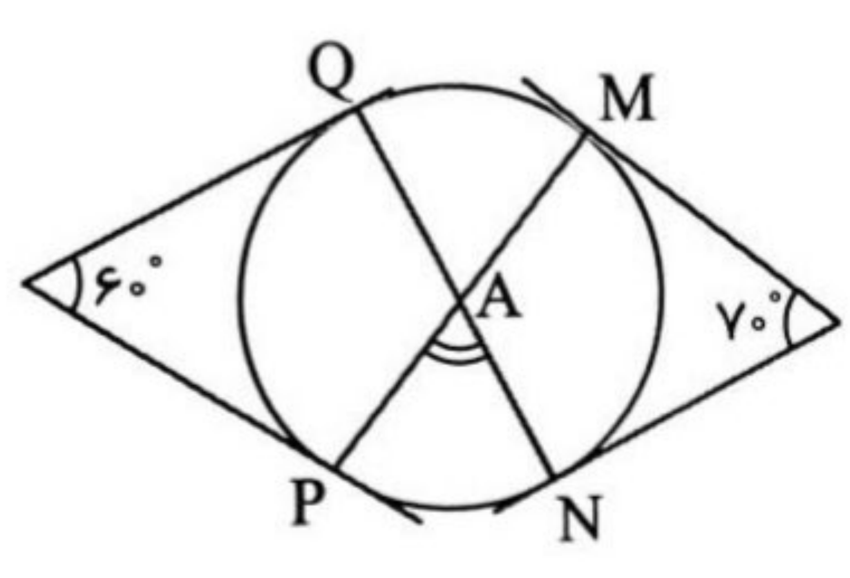
$$A\widehat{M}T = \frac{\widehat{AT} - \widehat{A'T}}{2}$$



مسئله: ثابت کنید زاویه‌ی بین دو خط مماس رسم شده از دو نقطه‌ی T و T' بر یک دایره، برابر قدرمطلق نصف تفاضل دو کمان ایجاد شده بین نقاط T و T' است.



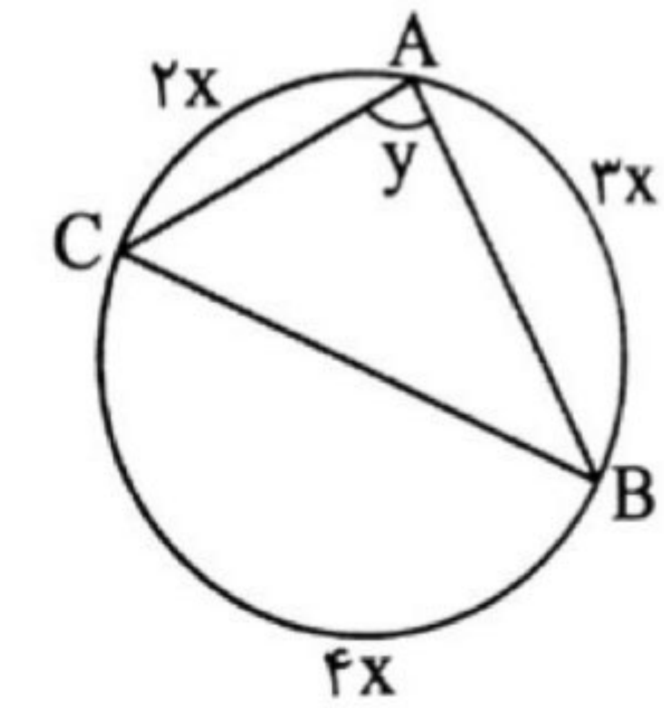
مثال: در شکل مقابل اندازه زاویه A چند درجه است؟



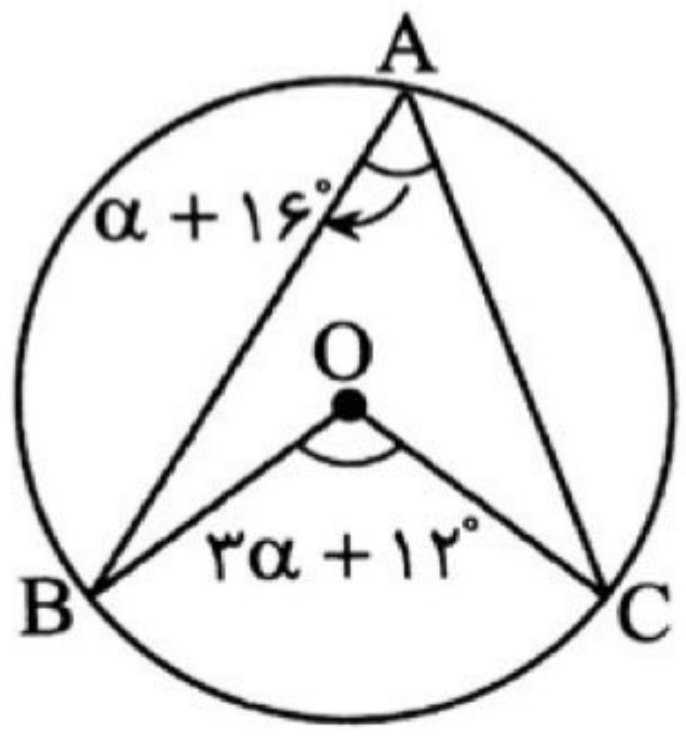
تمرین شماره (۲)

۱) در دایره‌های زیر به مرکز O مقدارهای مجهول را بدست آورید.

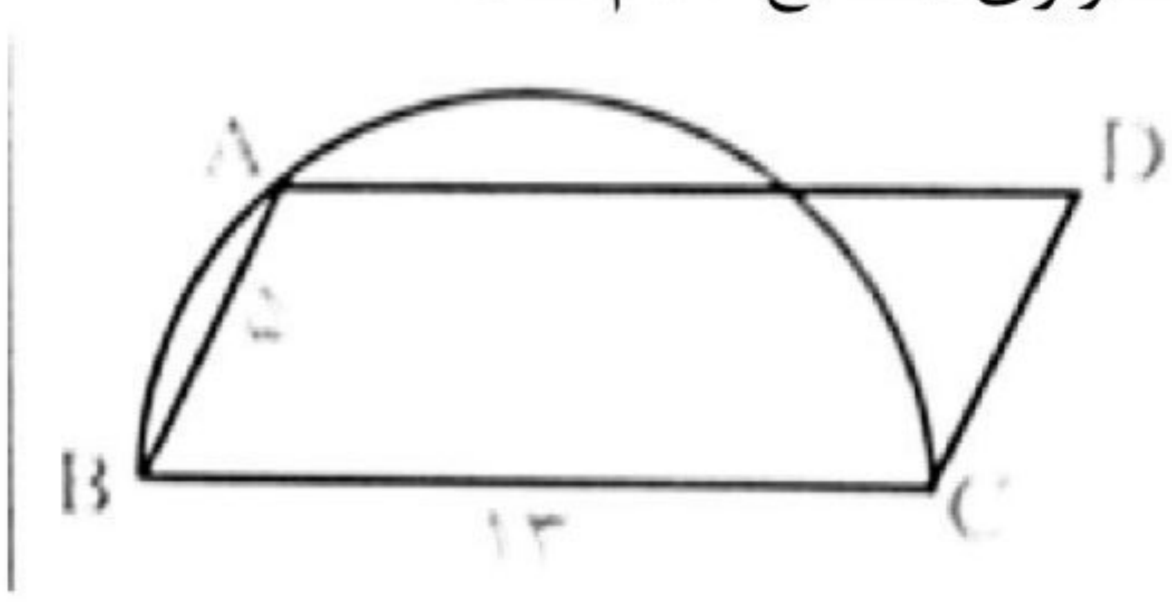
الف)



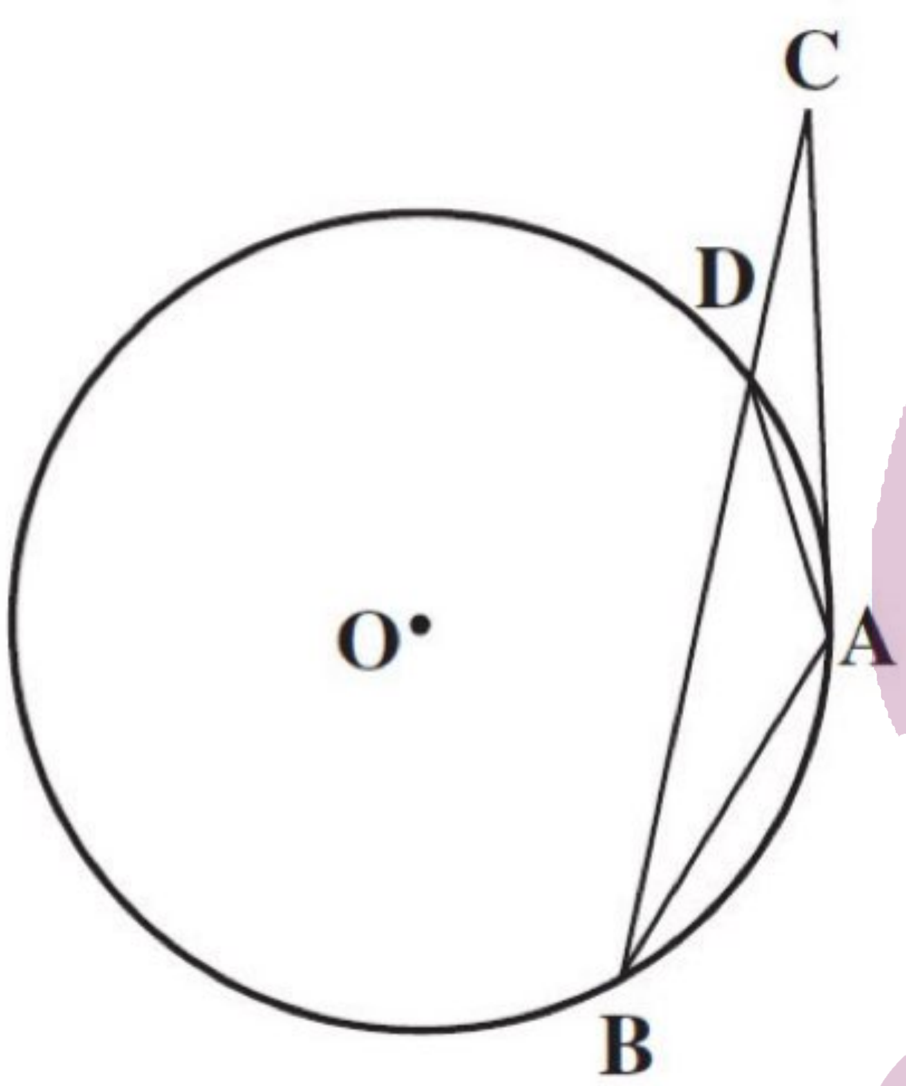
ب)

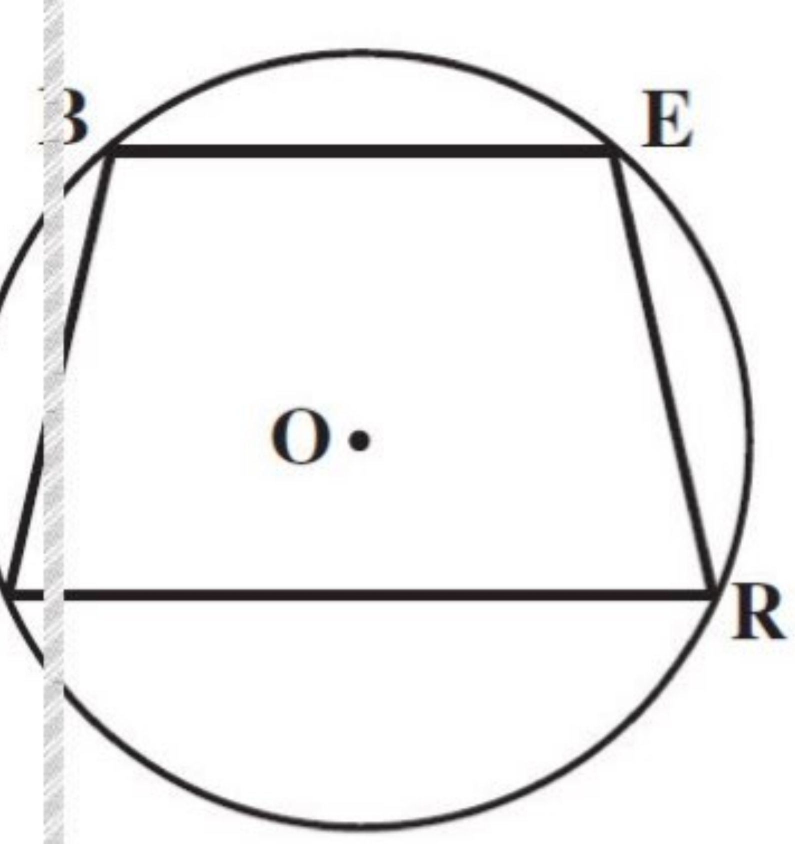


۲) در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع و BC قطر نیم‌دایره است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

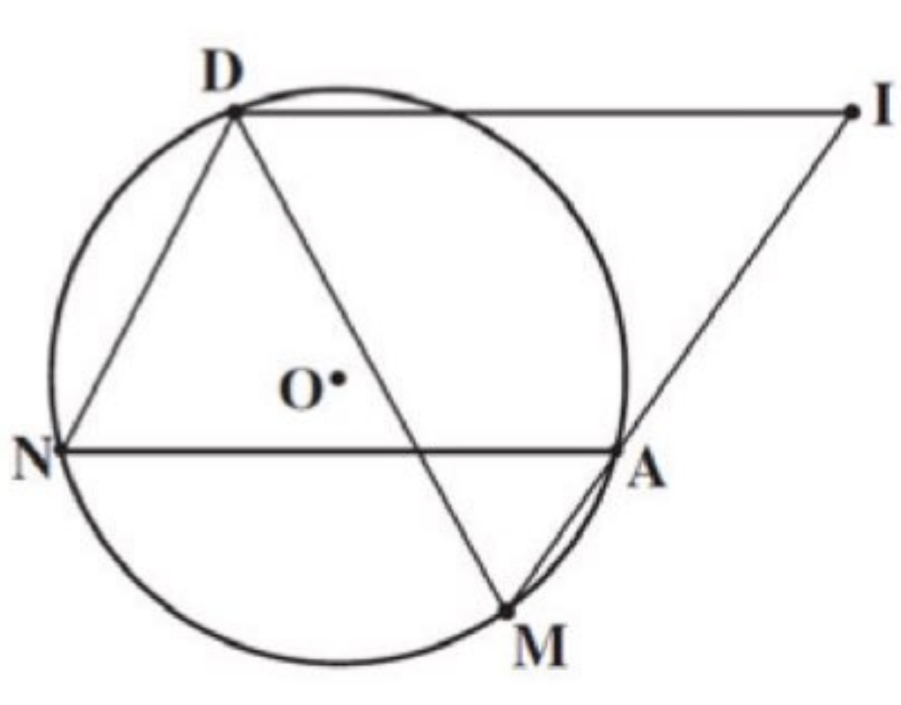


۳) مماس AC با وتر AB برابر است.
ثابت کنید مثلث DCA متساوی‌الساقین است.

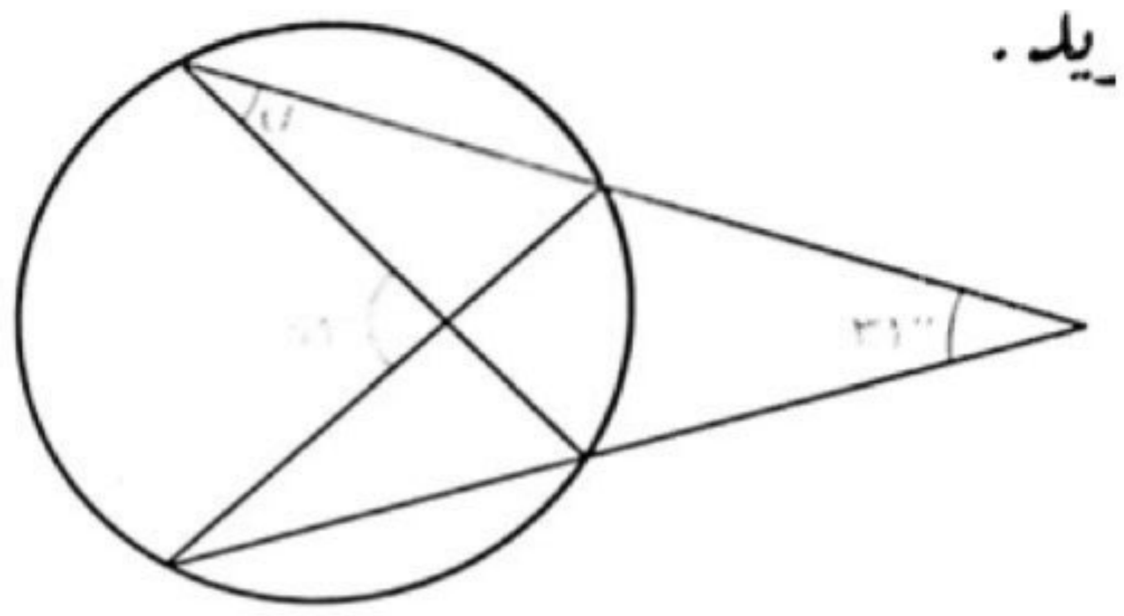




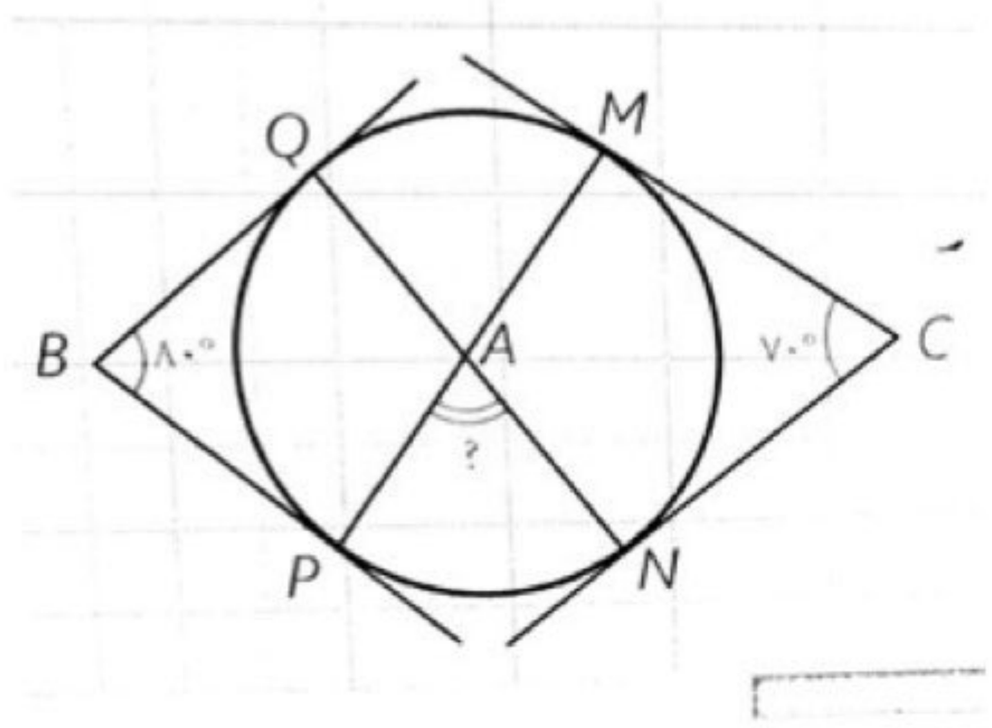
۵) $DIAN$ متوازی‌الاضلاع است.
نقاط I، A و M روی یک خط راست هستند.
ثابت کنید : $DM = DI$



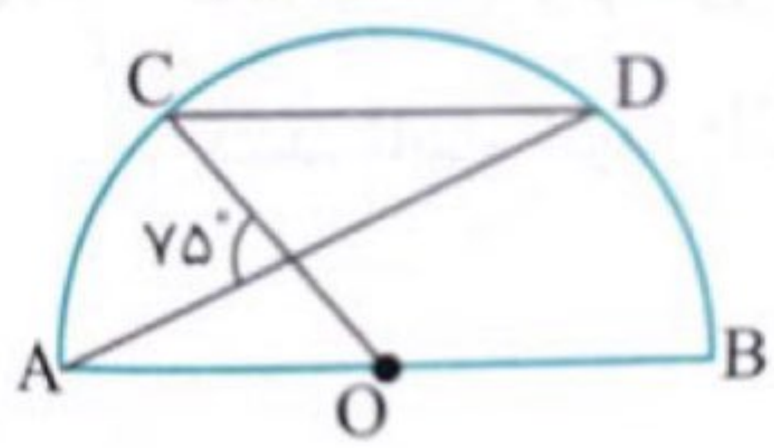
۶) در شکل مقابل اندازه زاویه α را بدست آورید.



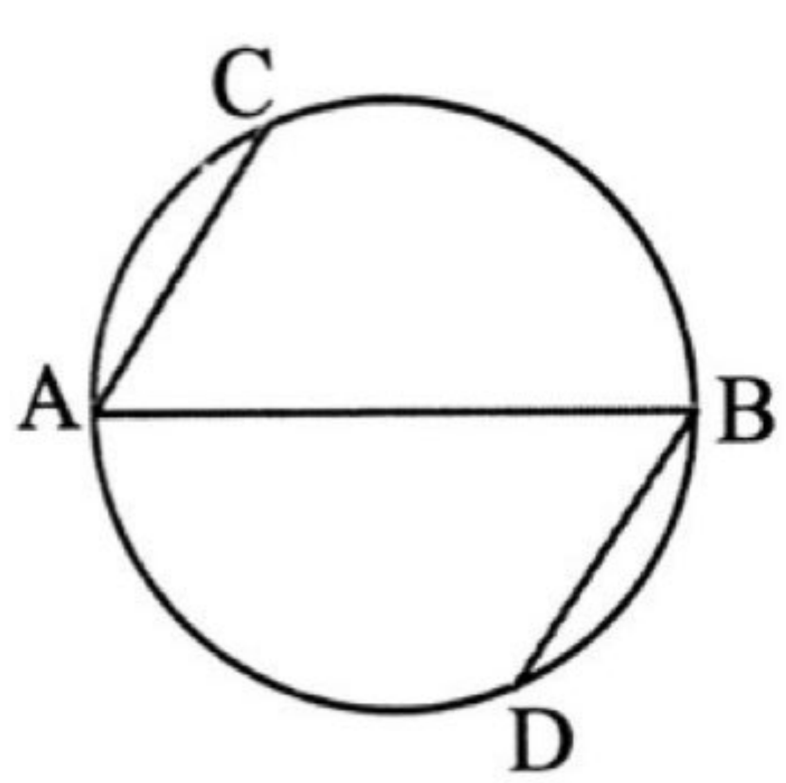
۷) در شکل زیر اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



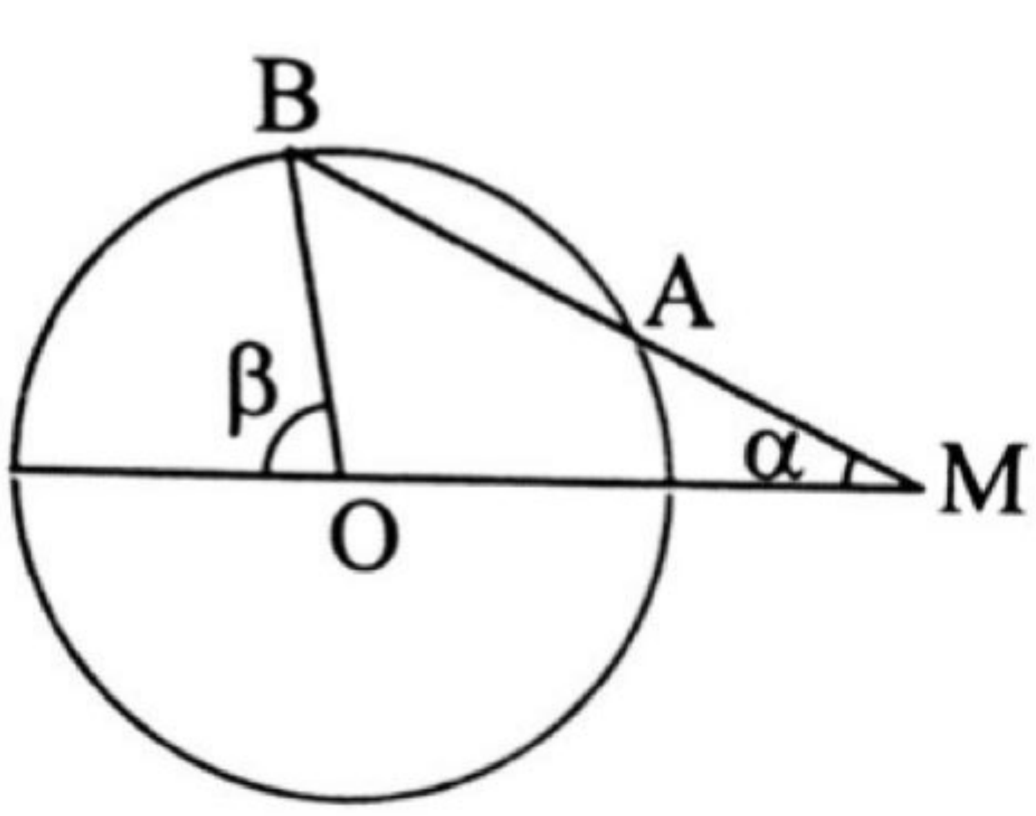
۸) در شکل روبرو، O مرکز نیم‌دایره است و $AB \parallel CD$. اندازه کمان CD را بدست آورید.



۹) در شکل زیر AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید $AC = BD$

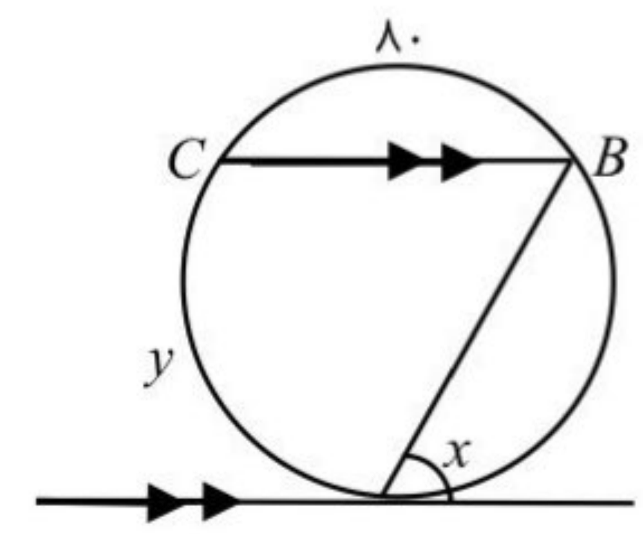


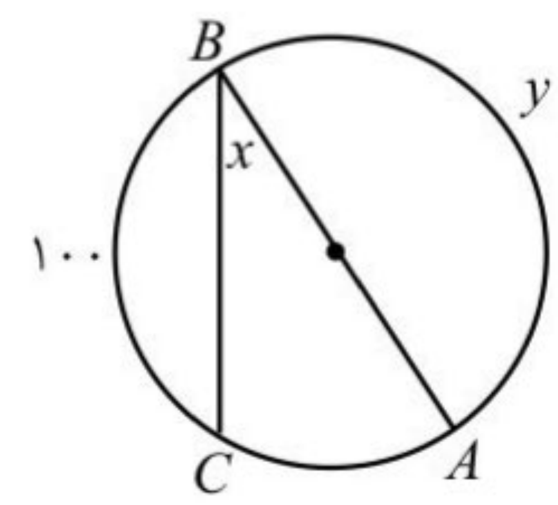
۱۰) دایرهٔ C(O,R) مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و $MA = R$ نشان دهید $\beta = ۳\alpha$

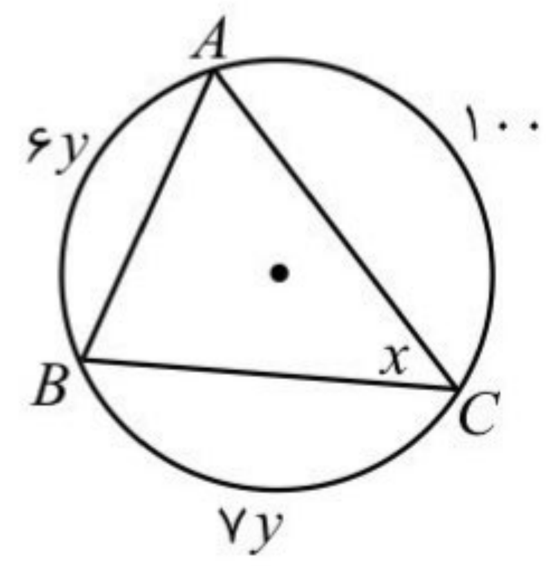


تمرینات تکمیلی

۱) در هر یک از اشکال زیر، x و y را بدست آورید.





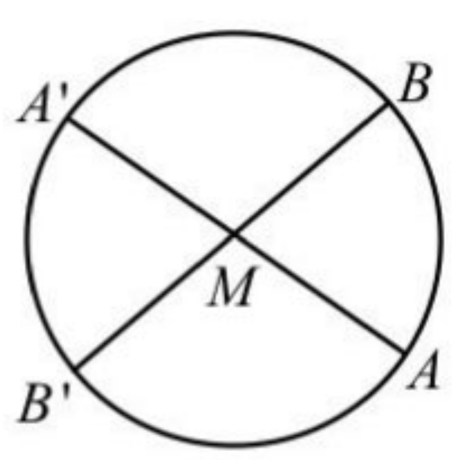


۲) از نقطه‌ی M خارج دایره، مماسی بر دایره رسم کنید.

۳) در درون مثلث ABC، نقطه‌ای مانند M چنان پیدا کنید که $A\widehat{M}B = B\widehat{M}C = C\widehat{M}A$ باشد.

۴) از مثلث ABC، معلومات $BC = a$، $\widehat{A} = \alpha$ و r شعاع دایره‌ی محاطی را داریم. این مثلث را رسم کنید.

۵) با توجه به شکل روبرو، هر یک از موارد زیر را تعیین کنید.

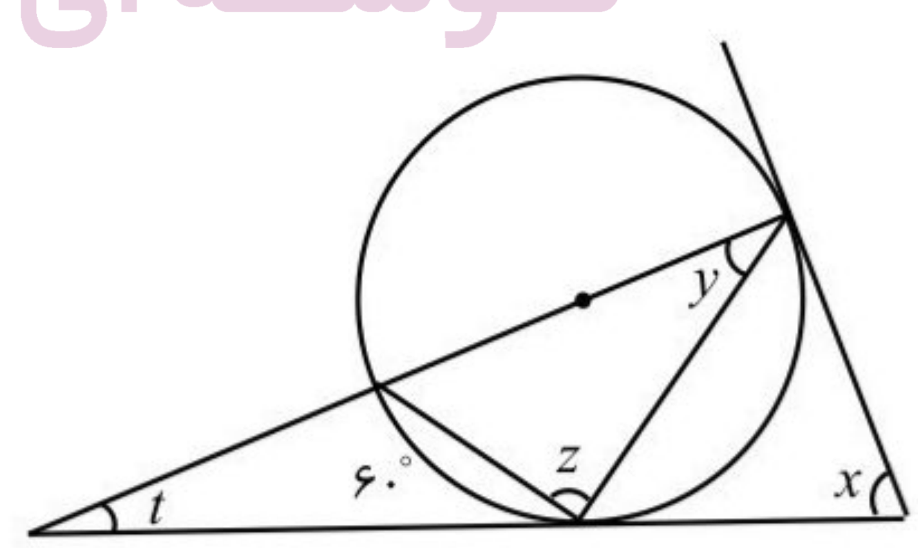


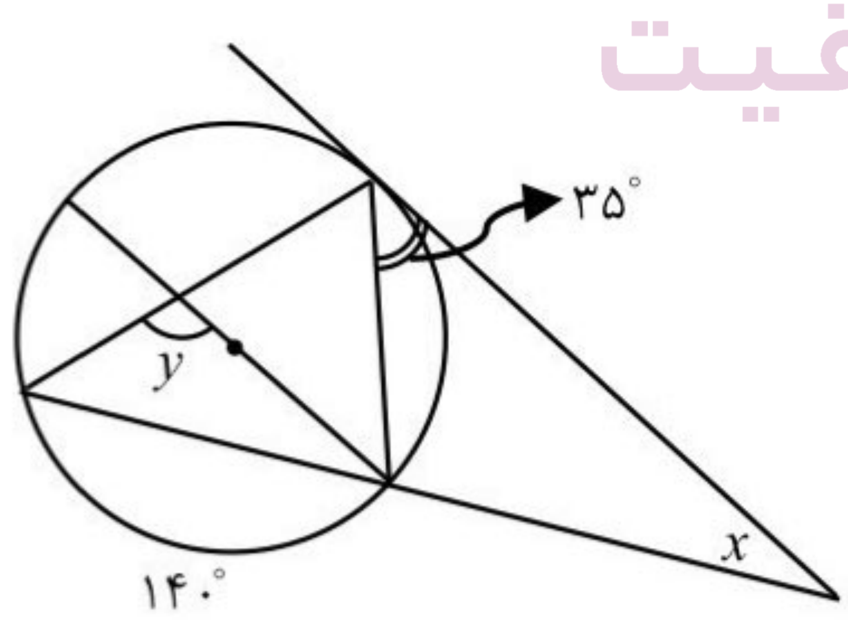
الف) اگر $A\widehat{M}B = ۶۵^\circ$ باشد، اندازه‌ی $\widehat{A'B} + \widehat{AB'}$ را بدست آورید.

ب) اگر $\widehat{AB'} = ۱۶۰^\circ$ و $A\widehat{M}B = ۶۰^\circ$ باشد، اندازه‌ی $\widehat{A'B}$ را بدست آورید.

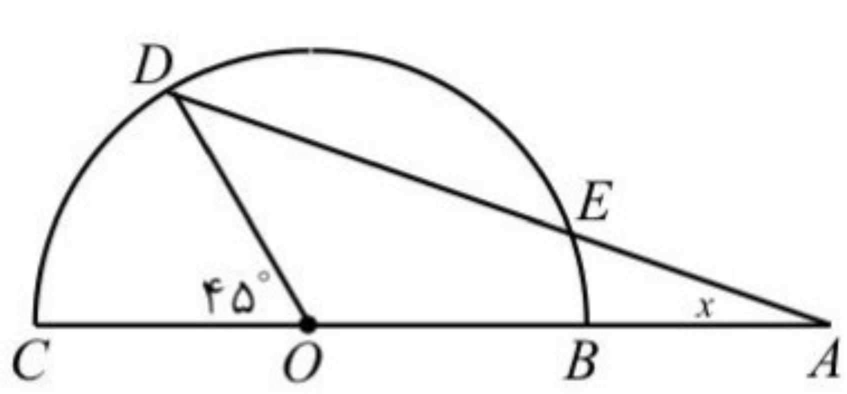
ج) اگر $A'\widehat{M}B = ۱۲۰^\circ$ و $\widehat{AB} = ۲\widehat{A'B'}$ باشد، اندازه‌ی $\widehat{AB}$ را بدست آورید.

۶) در شکل‌های زیر، مجهولات خواسته شده را بدست آورید.



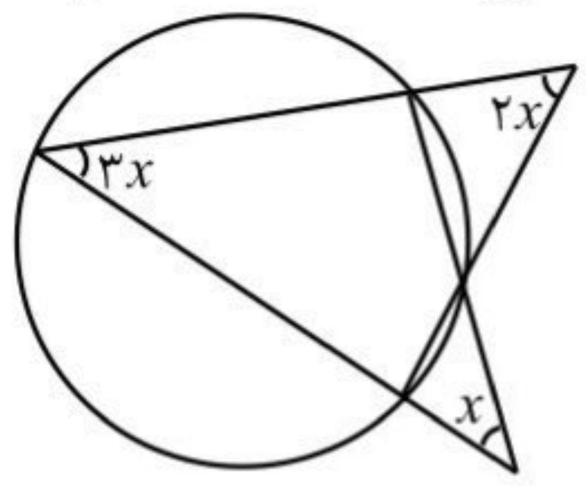


۷) در شکل زیر، O مرکز دایره و $OC = AE$ است. مقدار x را بدست آورید.

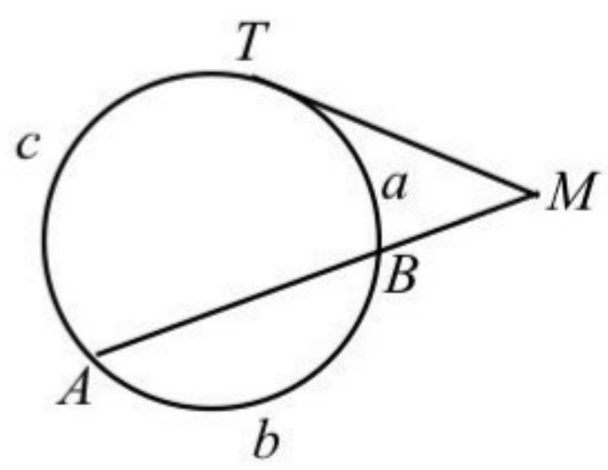


۸) خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB، در نقطه‌ی M متقاطعند. اگر اندازه‌ی کمان‌های $\widehat{BA}$، $\widehat{TB}$ و AT به ترتیب با اعداد ۱، ۴ و ۷ متناسب باشند، اندازه‌ی زاویه‌ی M چقدر است

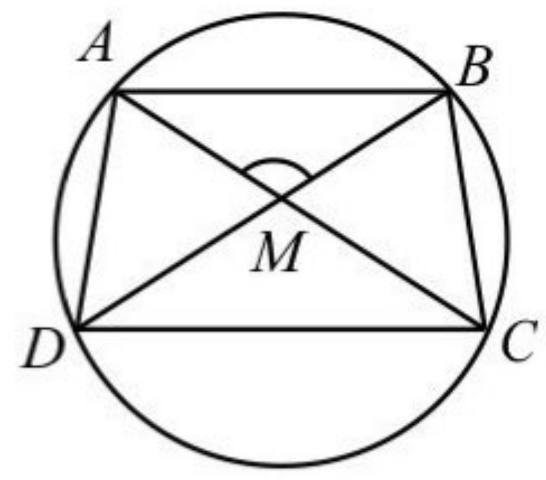
۹) با توجه به شکل x را بدست آورید.



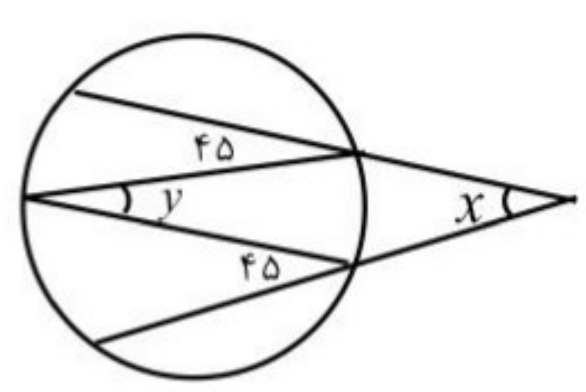
۱۷) در شکل زیر اگر $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۵}$ باشد، $\widehat{M}$ کدام است؟



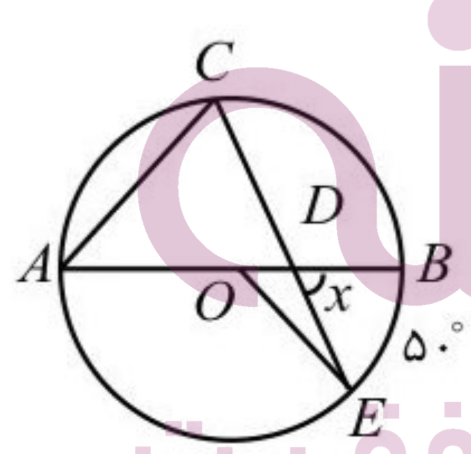
۱۸) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی محاط در دایره است. اگر کمان‌های نظیر قاعده‌ی کوچک و ساق آن به ترتیب ۵۰ و ۷۰ باشد، زوایای بین دو قطر و امتداد ساق‌ها به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



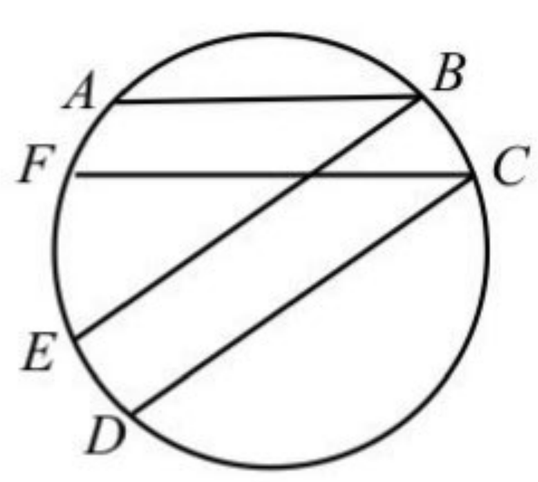
۱۹) در شکل زیر حاصل $x+y$ کدام است؟



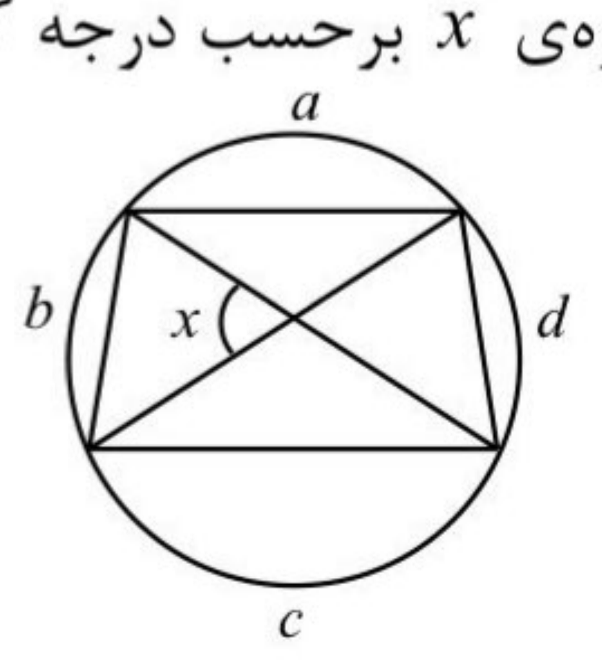
۲۰) در شکل زیر O مرکز دایره است. اگر $\widehat{A}=۳۰^\circ$ و $A\widehat{O}E=۱۳۰^\circ$ باشد، اندازه‌ی $B\widehat{D}E$ کدام است؟



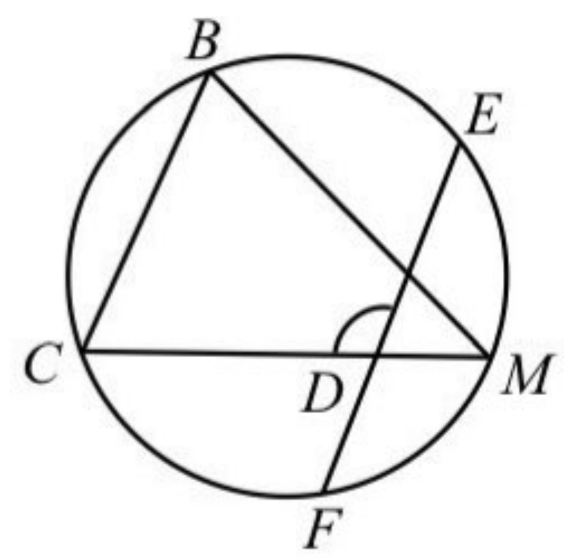
۱۰) در شکل مقابل اگر $AB \parallel FC$ ، $BE \parallel CD$ ، $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$ ، $\overset{\frown}{CD}=۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF}=۱۱۰^\circ$ باشد، آنگاه زاویه‌ی $F\widehat{C}D$ چند درجه است؟



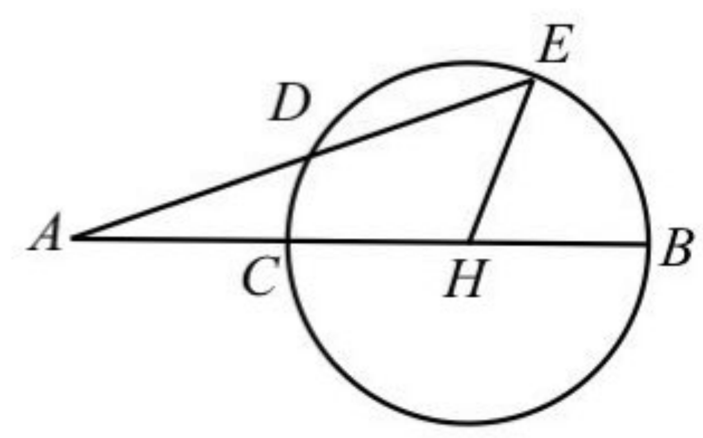
۱۱) در شکل زیر اگر a ، b ، c و d به ترتیب با اعداد ۸ ، ۹ ، ۱۲ و ۷ متناسب باشند، اندازه‌ی x برحسب درجه کدام است؟



۱۲) در شکل زیر M وسط کمان $\overset{\frown}{EF}$ و $\overset{\frown}{BC}=۵۰^\circ$ است. اندازه‌ی $\hat{B}+\hat{D}$ چند درجه است؟

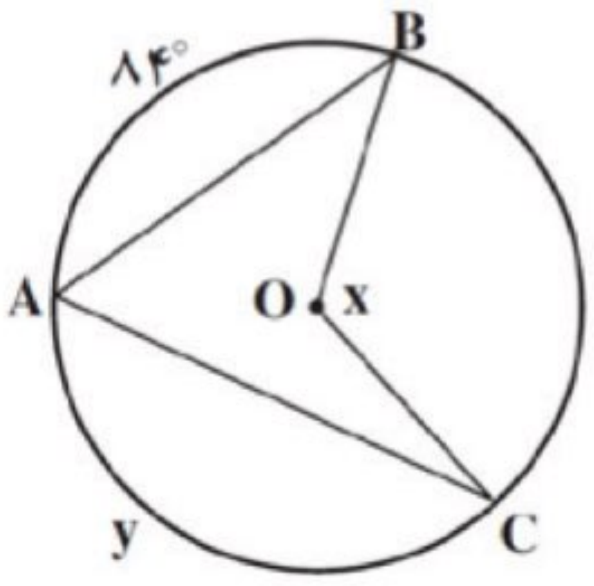


۱۳) در شکل زیر $\hat{A}=۱۷^\circ$ ، $\hat{E}=۳۱^\circ$ و H وسط قطر CB می‌باشد. کمان $\overset{\frown}{CD}$ چند درجه است؟



۱۴) در دایره‌ای به مرکز O، قطر AB و وتر AC از آن مفروض‌اند. نیمساز $C\hat{A}B$ را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌ی D قطع کند. تفاضل دو زاویه‌ی $A\hat{C}D$ و $C\hat{A}D$ کدام است؟

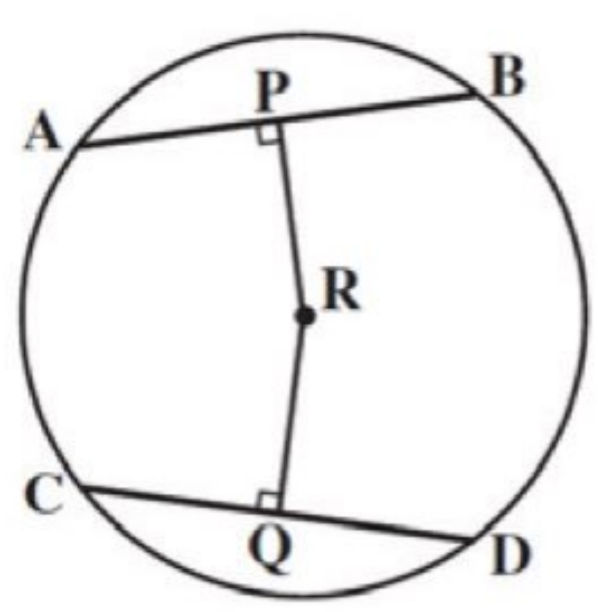
۱۵) با توجه به شکل روبرو :



الف) اگر $\overset{\frown}{y}=140^\circ$ ، آنگاه اندازه‌ی x را بدست آورید.

ب) اگر $\hat{x}=165^\circ$، آنگاه اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{y}$ را بدست آورید.

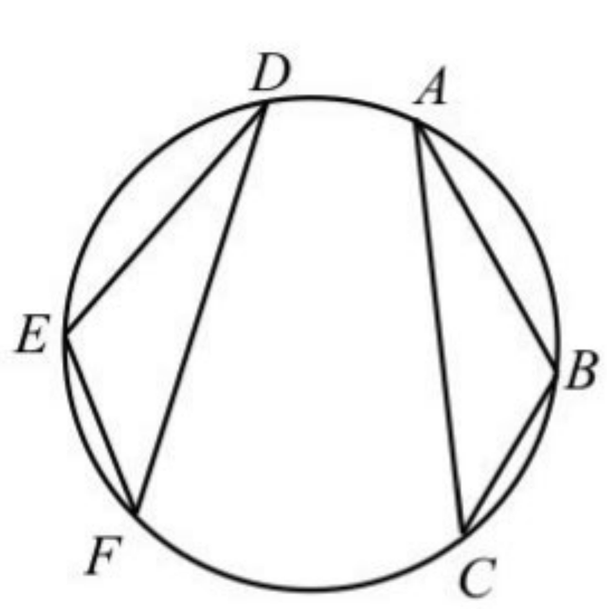
۱۶) با توجه به شکل روبرو :



الف) اگر طول شعاع ۱۰ و $PR=6$، آنگاه طول AP و AB را بدست آورید.

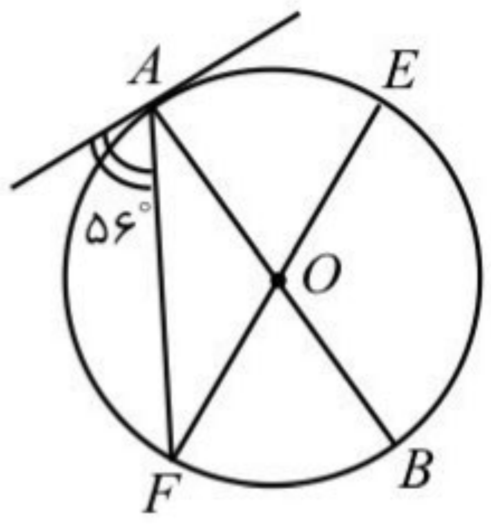
ب) اگر $RC=\sqrt{2}$ و $CQ=RQ$، آنگاه طول پاره‌خط‌های CQ، DQ و CD را بدست آورید.

۱۷) در شکل زیر، اگر $AB=DE$ و $BC=EF$ باشد، ثابت کنید : $DF=AC$



۱۸) در دایره‌ای به قطر AB وتر CD موازی قطر AB رسم شده است. اندازه‌ی $\widehat{ACD}-\widehat{ADC}$ کدام است؟

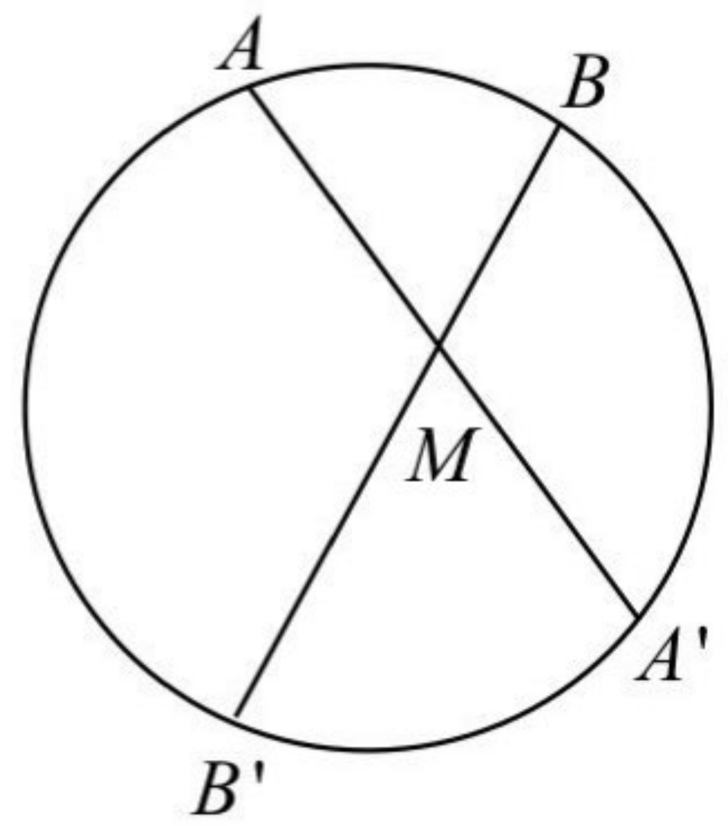
۱۹) در شکل زیر O مرکز دایره و $\hat{A} = ۵۶^\circ$ است. کمان $\widehat{AE}$ چند درجه است؟



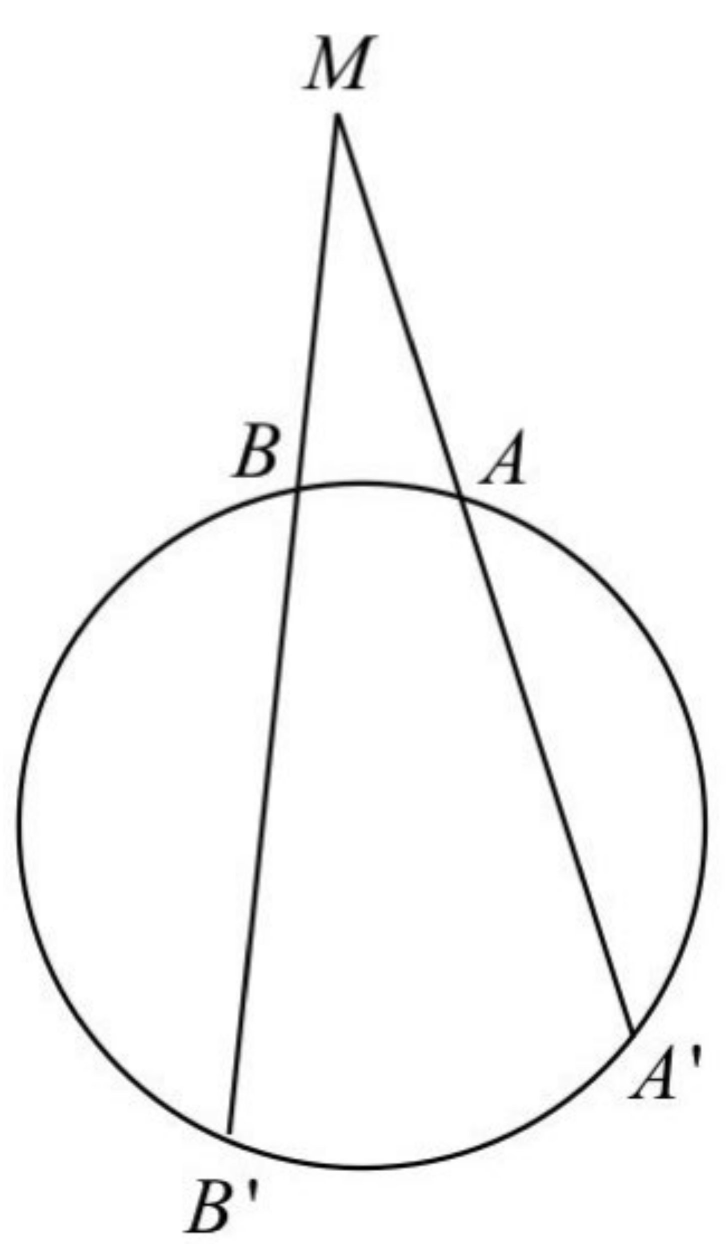
«درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره»

روابط طولی در دایره

قضیه: دو وتر AA' و BB' یکدیگر را داخل دایره در نقطه M قطع می‌کنند. ثابت کنید : $MA \times MA' = MB \times MB'$



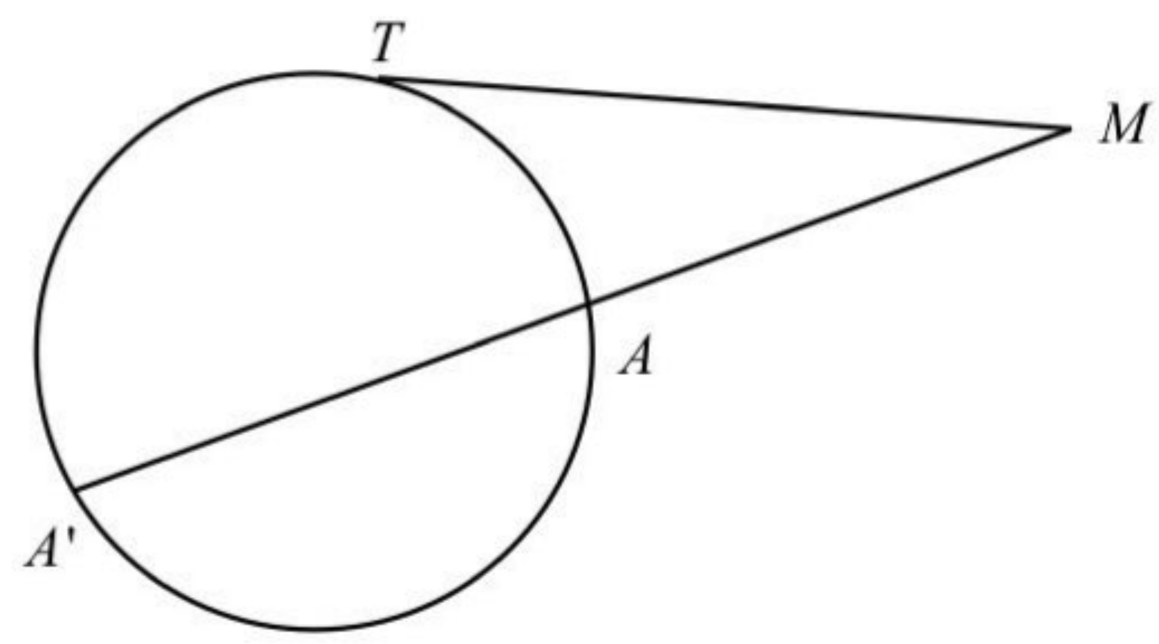
قضیه: امتداد دو وتر AA' و BB' یکدیگر را خارج دایره در نقطه M قطع می‌کنند. ثابت کنید : $MA \times MA' = MB \times MB'$



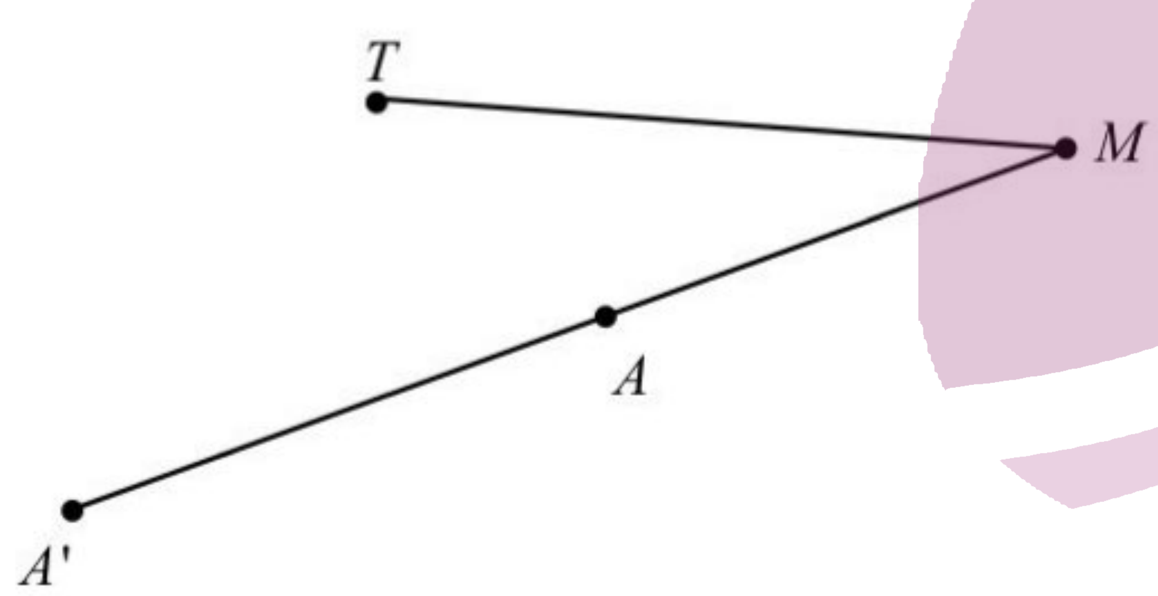
عکس قضیه: اگر دو پاره‌خط AA' و BB' در نقطه‌ی M یکدیگر را طوری قطع کنند که $MA \times MA' = MB \times MB'$،

آنگاه چهار نقطه‌ی A، A'، B و B' روی یک دایره‌اند.

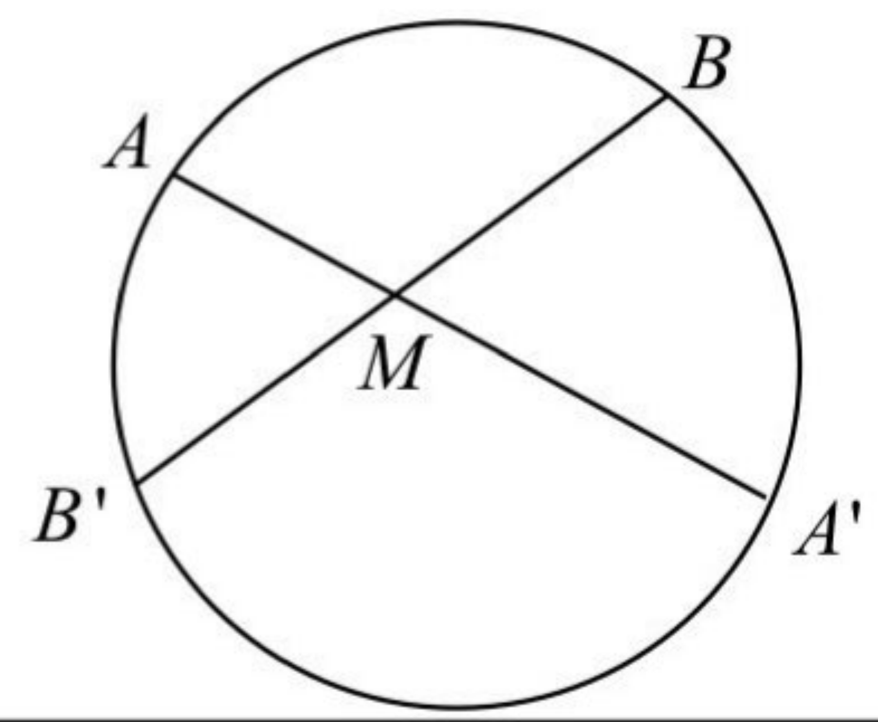
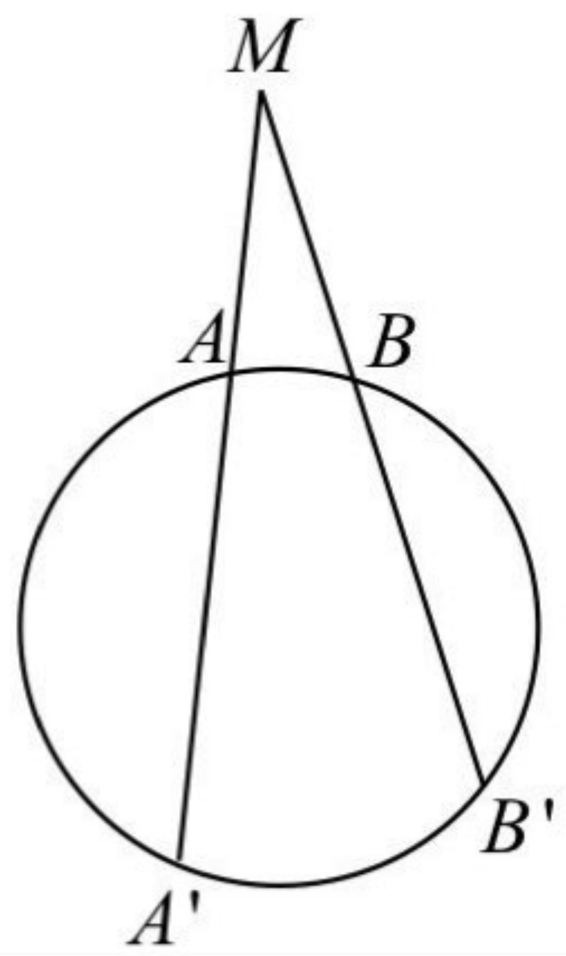
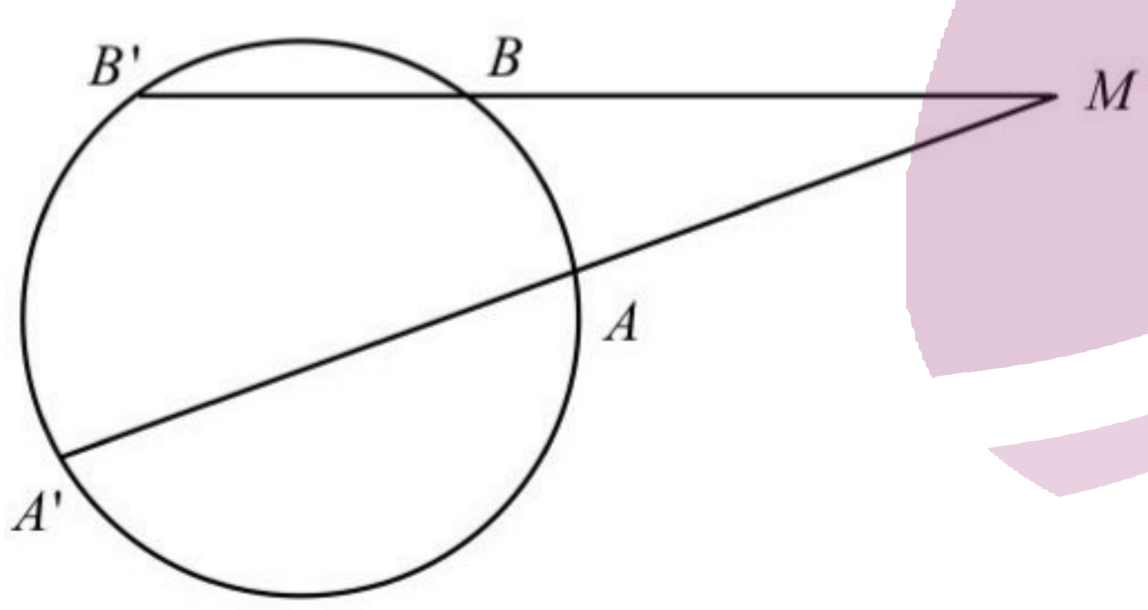
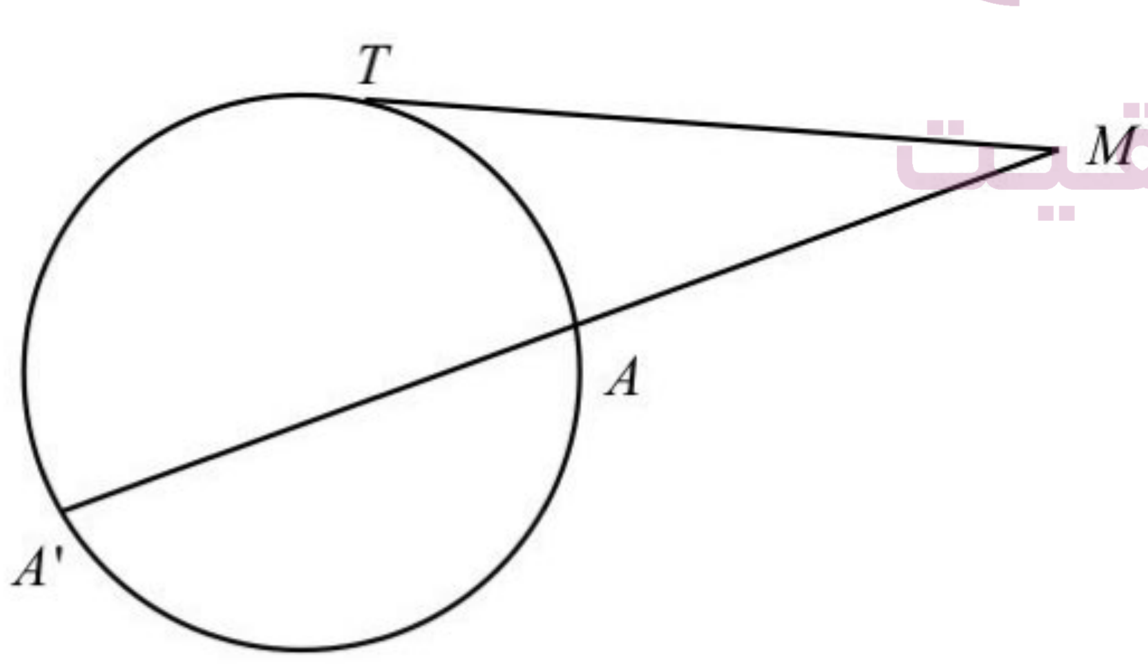
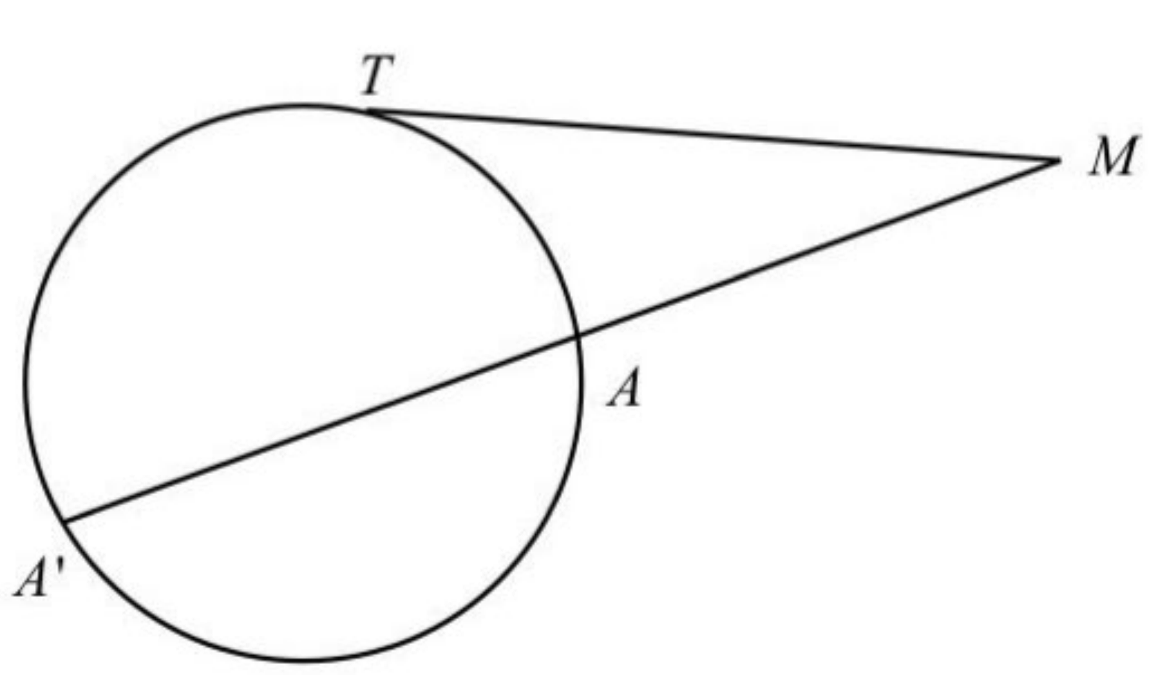
قضیه: اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از خط مماس محصو بین آن نقطه و نقطه‌ی تماس، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی قاطع است.

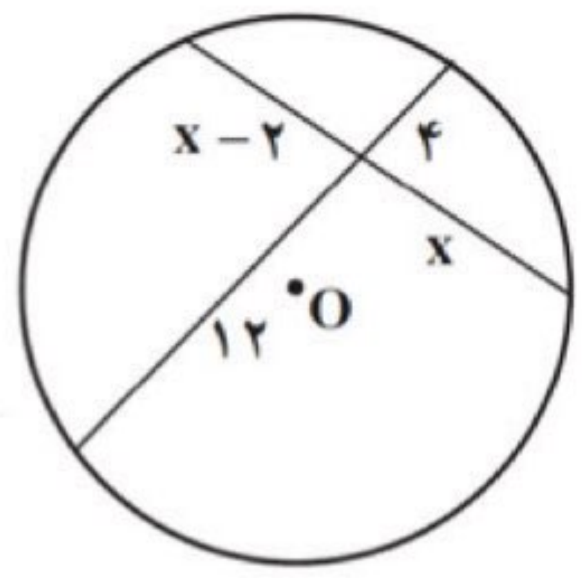
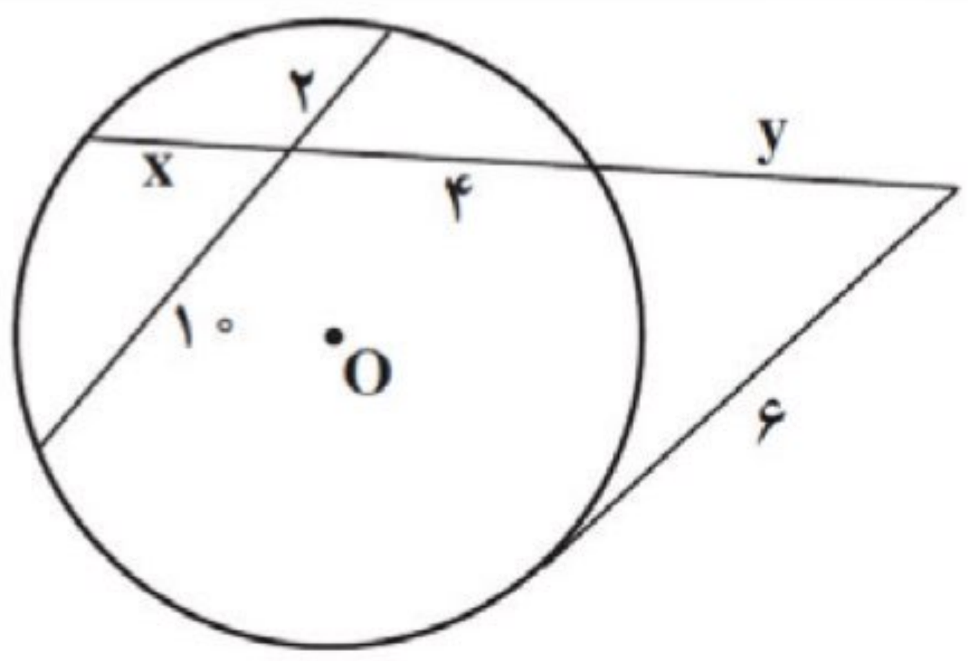
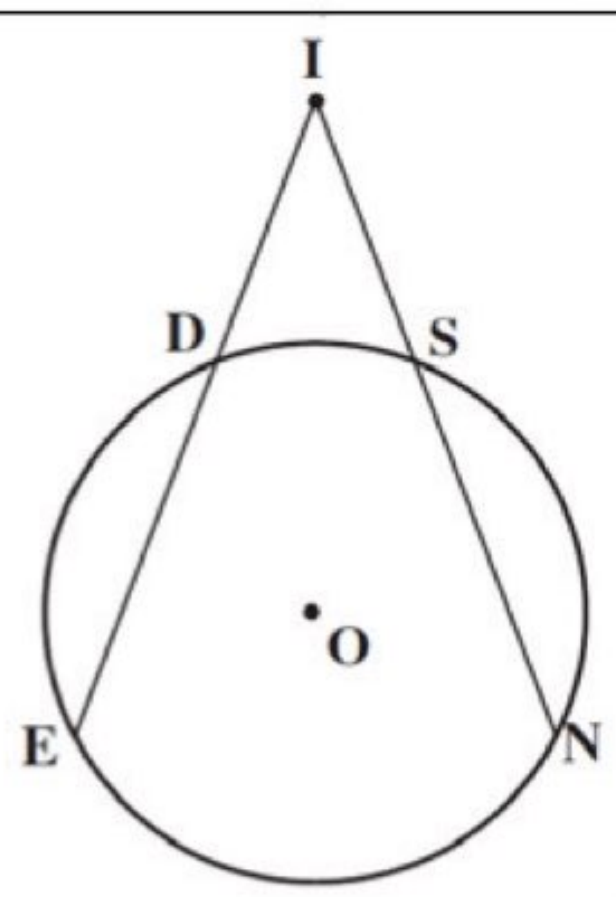


عکس قضیه: سه نقطه‌ی M، A و A' روی یک خط و نقطه‌ی T خارج آن قرار دارند. اگر $MT^2 = MA.MA'$ باشد، از سه نقطه‌ی A، A' و T دایره‌ای می‌گذرد که در نقطه‌ی T بر خط MT مماس است.

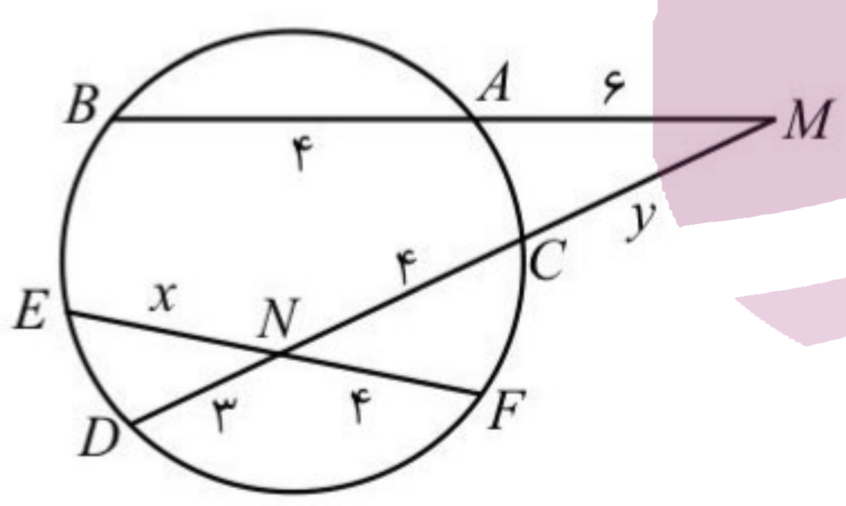


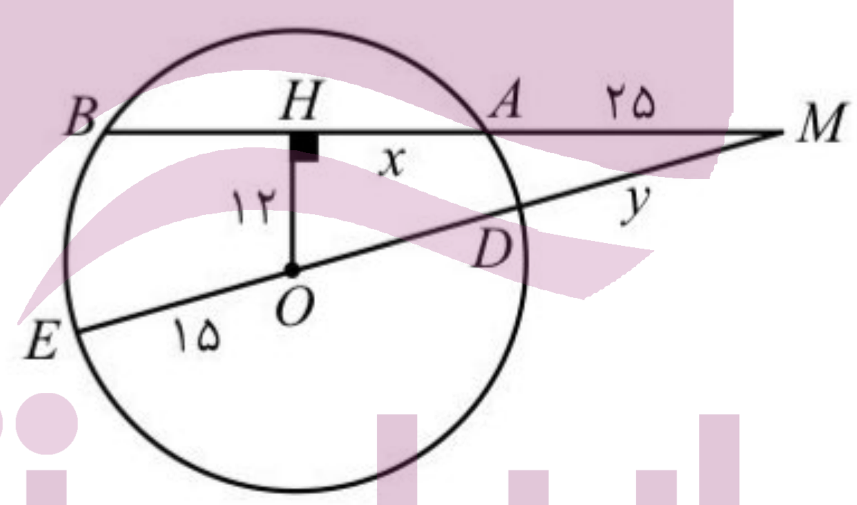
مثال: مقادیر مجهول را بدست آورید.

$MA=۴\ ,\ MB=۳\ ,\ MA'=۶\ ,\ BB'=?$	
$AA'=۳۲\ ,\ MB=۱۰\ ,\ BB'=۲۲\ ,\ MA=?$	
$AA'=۱۰\ ,\ MA=۶\ ,\ BM=۸\ ,\ BB'=?$	
$AA'=۵\ ,\ MA=۴\ ,\ MT=?$	
$MA'=۱۸\ ,\ MT=۱۲\ ,\ AA'=?$	

$x=?$	
$x, y=?$	
در شکل زیر $IN=IE$ ، ثابت کنید : $IS=ID$	

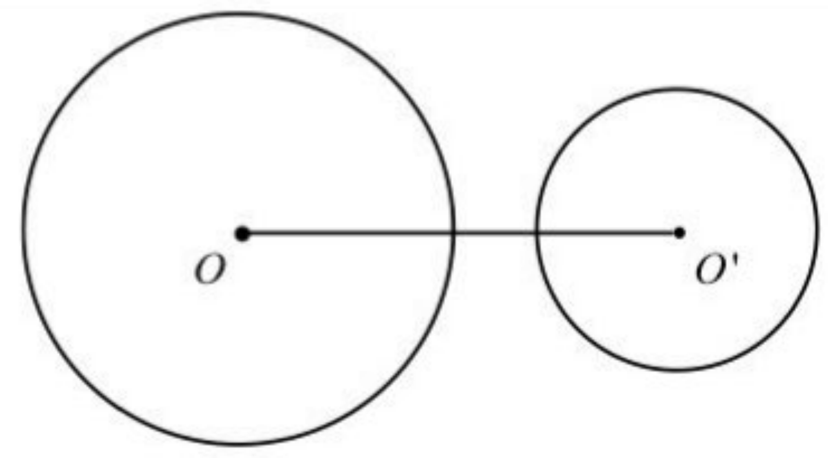
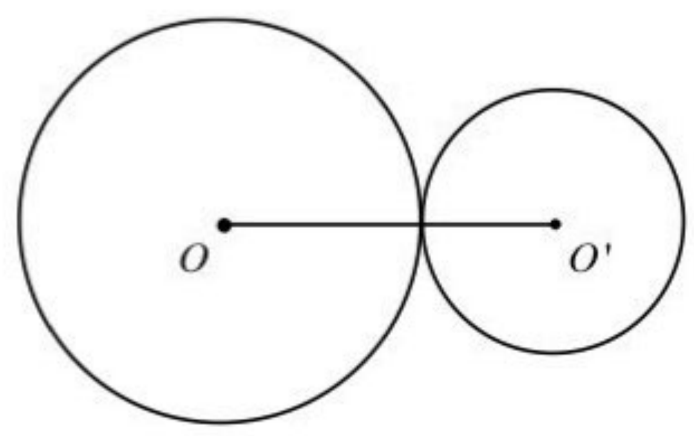
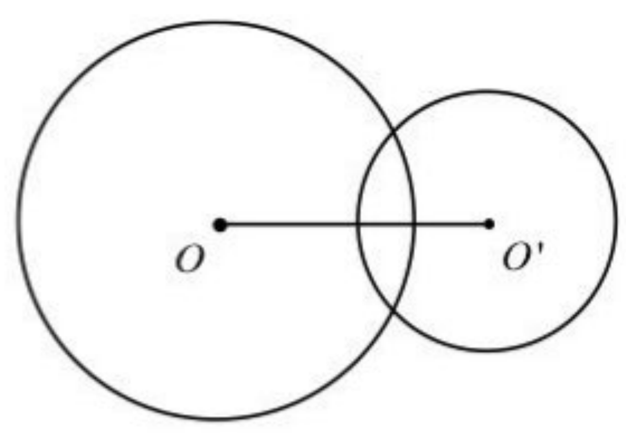
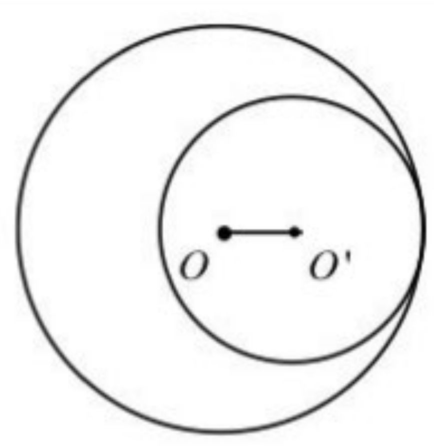
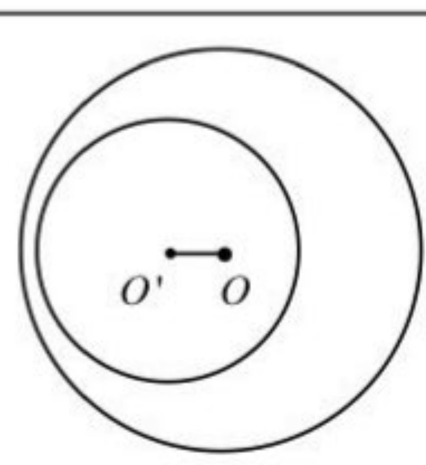
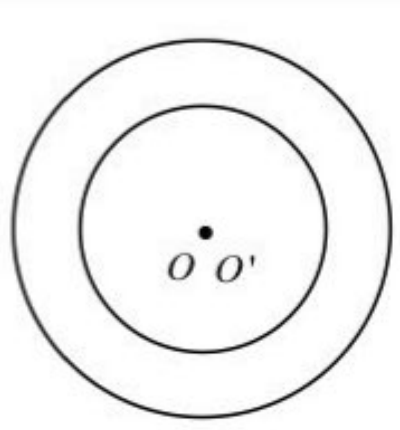
مثال: اندازه‌های x و y را در هر یک از شکل‌های زیر بدست آورید.





وضعیت دو دایره نسبت به هم

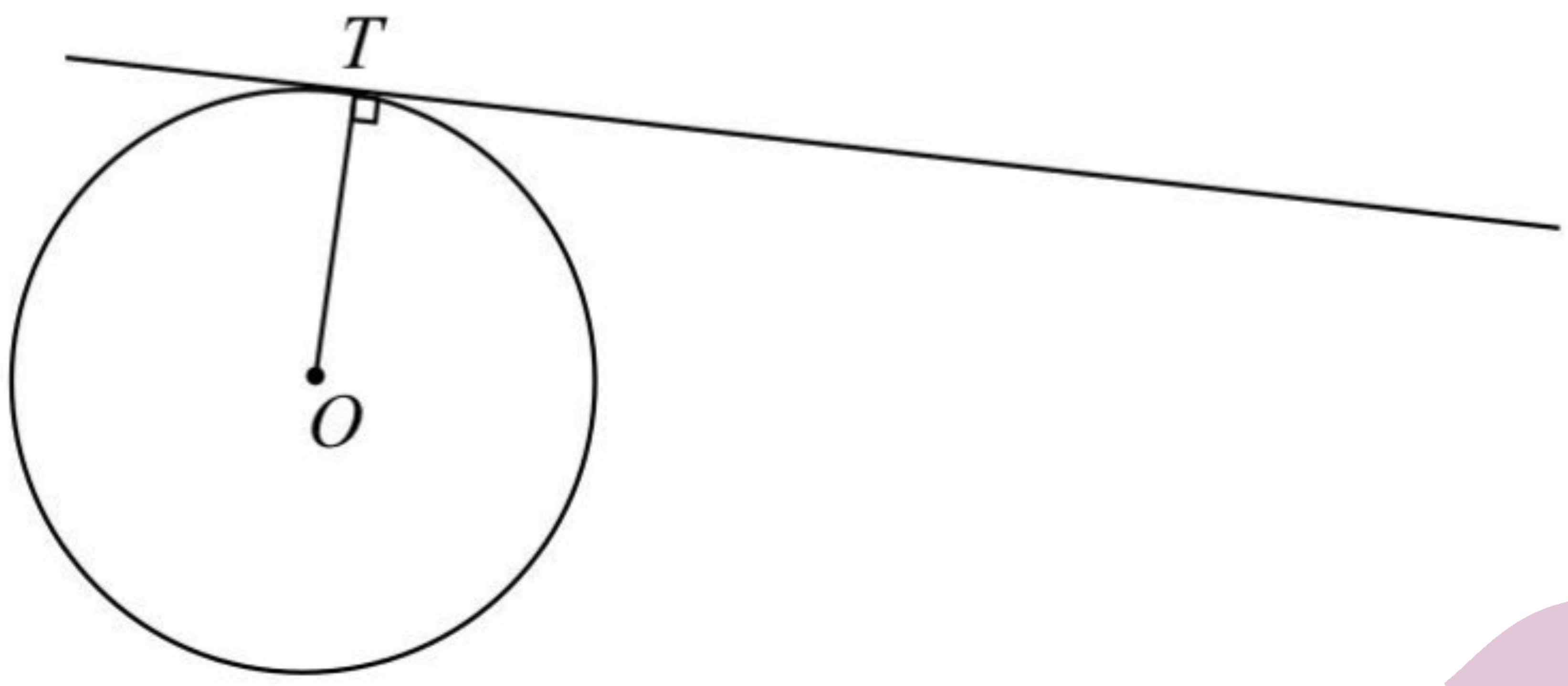
وضع ۲ دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R>R'$ و $OO'=d$، می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی کرد.

دو دایره‌ی متخارج(برون هم)	$d>R+R'$	
دو دایره‌ی مماس خارج	$d=R+R'$	
دو دایره‌ی متقاطع	$R-R'<d<R+R'$	
دو دایره‌ی مماس داخل	$d=R-R'$	
دو دایره‌ی متداخل	$d<R-R'$	
دو دایره‌ی متحدالمرکز(هم مرکز)	$d=0$	

مثال: طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس داخل ۵ و مساحت ناحیهٔ بین دو دایره 85π است. محیط هر یک از دایره‌ها را بدست آورید.

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج از دایره

مسئله: چگونه می‌توان از نقطه مفروض M خارج از دایره C(O,R) مماس MT را بر دایره رسم کرد؟

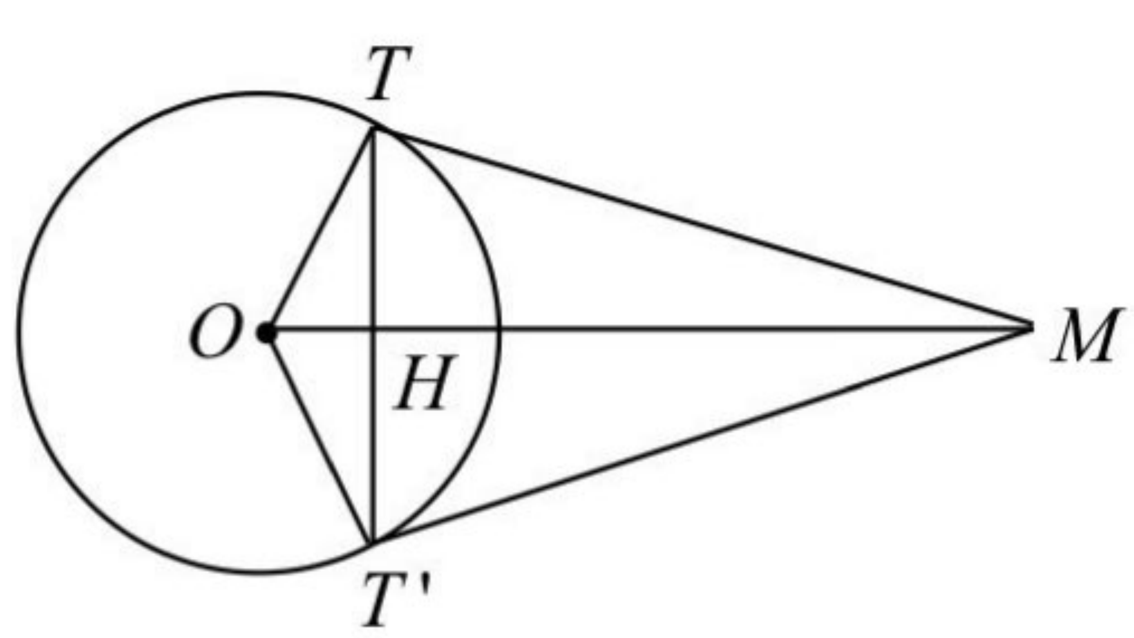


خط‌های مماس نسبت به دایره

از هر نقطه خارج دایره می‌توان ۲ مماس بر دایره رسم کرد.

قضیه: طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه‌ی خارج آن باهم برابرند.

مسئله: دو خط MT و MT' در نقاط T و T' بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماسند. H نقطه‌ی برخورد وتر TT' با خط OM است. ثابت کنید:



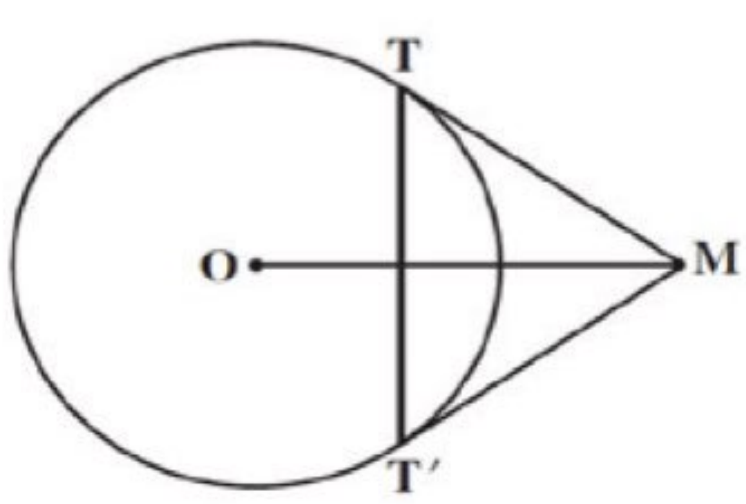
الف) خط OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.

ب) خط OM عمودمنصف پاره‌خط TT' است.

ج) $OH.OM = R^2$

د) $TT'^2 = 4OH.HM$

هـ) $TT'.OM = 2R.MT$



مثال: دایره‌ی $C(O,6)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱۲ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خط‌های MT و MT' بر این دایره مماسند.(T و T' نقاط تماسند.)

الف) طول مماس‌های MT و MT' را تعیین کنید.

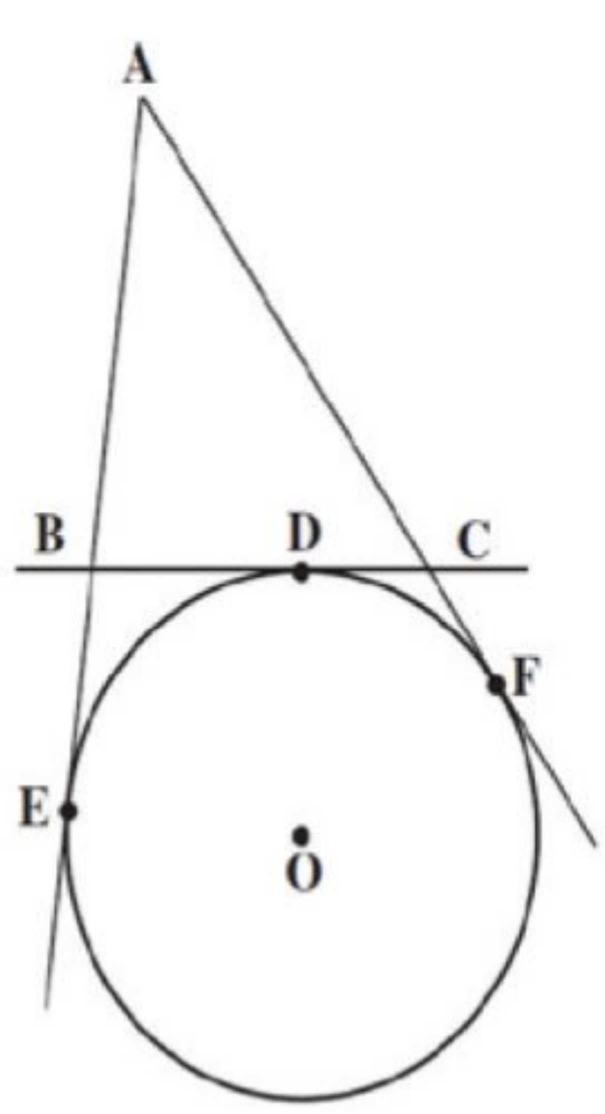
ب) طول وتر TT' را بدست آورید.

ج) اندازه‌ی زاویه‌ی TMT' و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.

مثال: دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ مفروض‌اند. وتری از دایرهٔ بزرگتر مماس بر دایرهٔ کوچکتر است. اگر دو مماس مرسوم از دو سر این وتر بر دایرهٔ بزرگتر در نقطهٔ M متقاطع باشند. آنگاه فاصلهٔ M تا مرکز دایره‌ها کدام است؟

مثال: از نقطهٔ A دو مماس بر دایرهٔ C(O,R) رسم شده است. اگر زاویهٔ بین دو مماس ۱۲۰ درجه باشد، نسبت $\frac{R}{OA}$ چقدر است؟

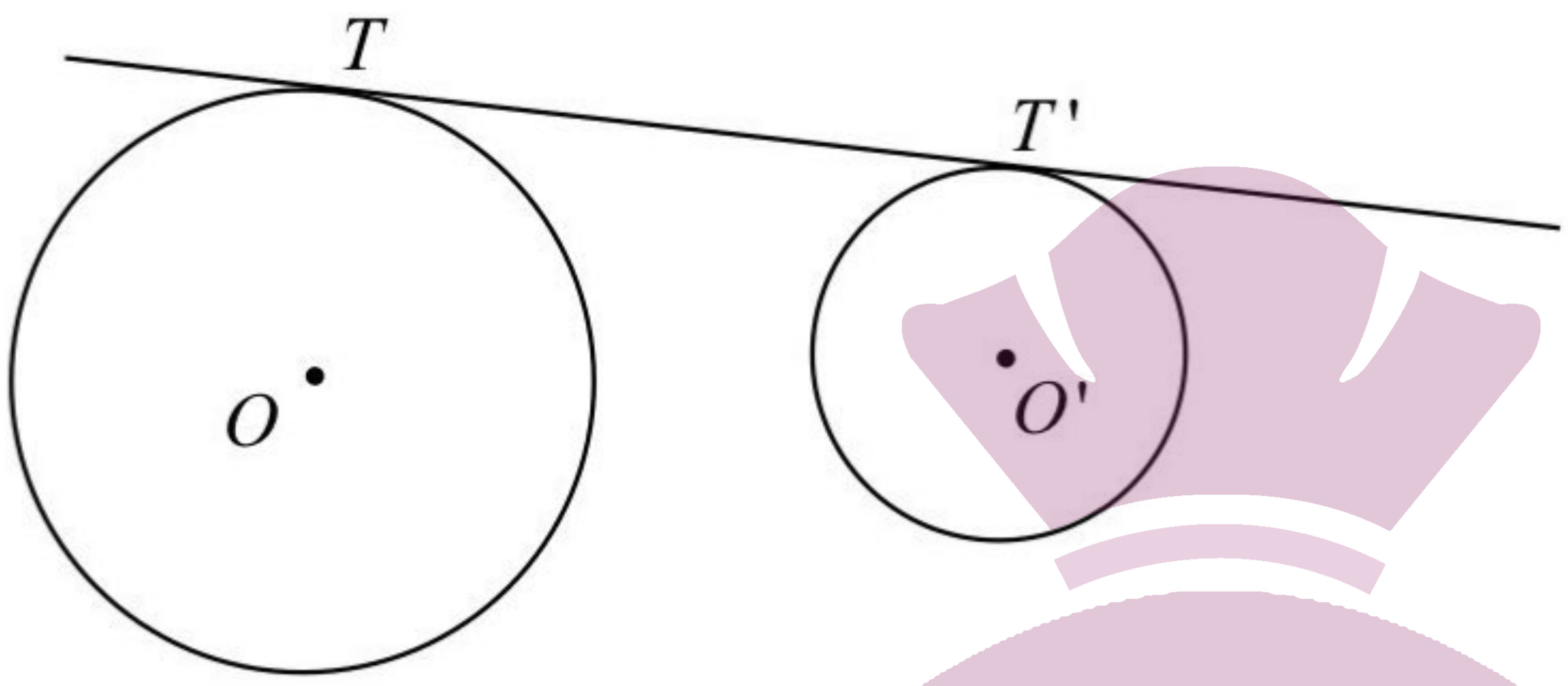
مثال: خطوط AE، AF و BC به ترتیب در نقاط E، F و D بر دایره‌ای مماس هستند. مماس BC، خطوط AE و AF را به ترتیب در نقاط B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییرمکان نقطه‌ی D روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت E و F، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.



مماس‌های مشترک دو دایره

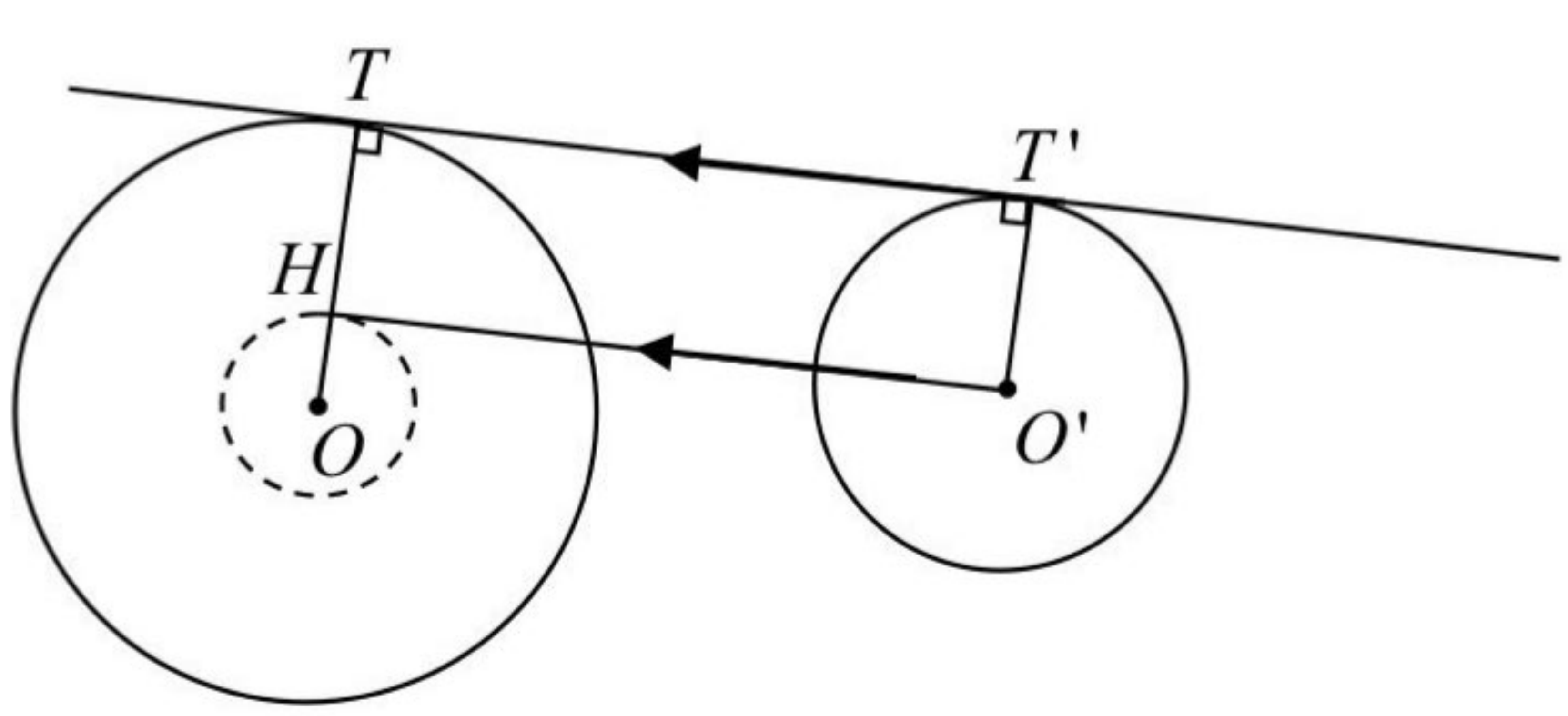
مماس مشترک دو دایره خطی که بر هر دو دایره مماس می‌شود.

۱) مماس مشترک خارجی: اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط، مماس مشترک خارجی دو دایره نامیده می‌شود.

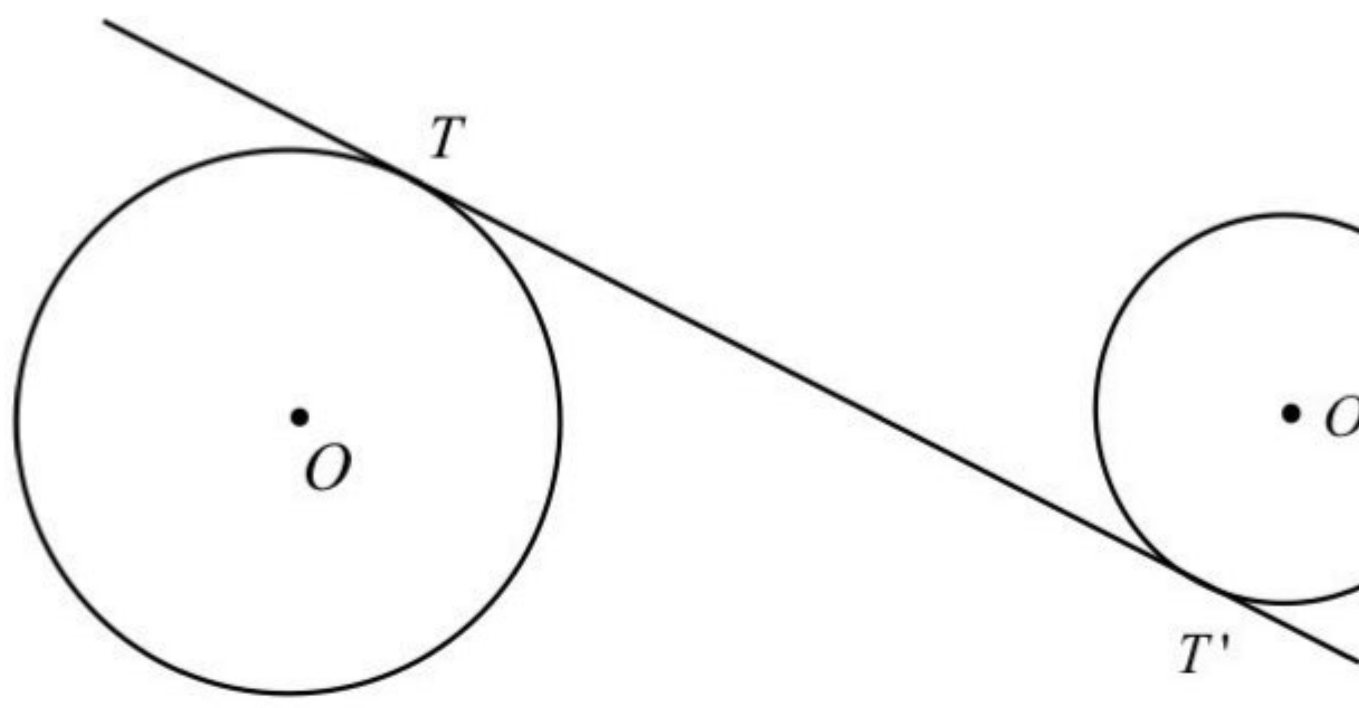


مسئله: طول پاره‌خط TT' را محاسبه کنید.

طریقهٔ رسم: ابتدا مساله را حل شده فرض می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم TT' مماس مشترک خارجی دو دایره باشد. از O' خطی موازی TT' رسم کرده تا OT را در H قطع کند. چهارضلعی $O'T'TH$ مستطیل است.(فکر!) پس $TH = T'O' = R'$ و $OH = OT - TH = R - R'$. حال برای ترسیم ابتدا به مرکز O و به شعاع $R - R'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم، سپس از O' مماس $O'H$ را بر این دایره رسم می‌کنیم. حال از O به H وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی (C) را در نقطه‌ی T قطع کند. از T موازی $O'H$ رسم کرده تا دایره‌ی C' را در T' قطع کند. با معلوم شدن T و T'، مماس مشترک TT' رسم می‌شود.

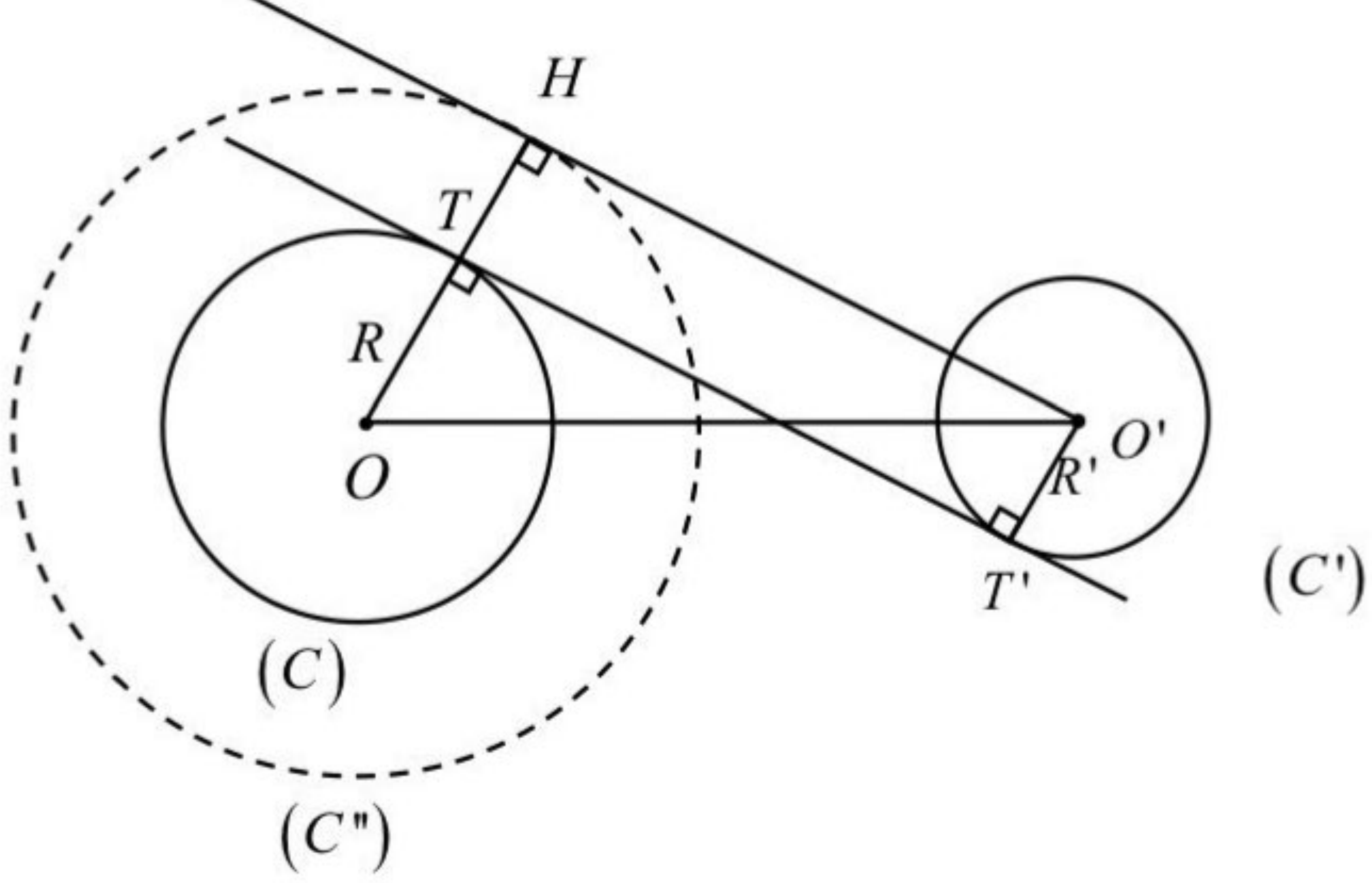


۲) مماس مشترک خارجی: اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، این خط، مماس مشترک داخلی دو دایره نامیده می‌شود.



مسئله: طول پاره‌خط TT' را محاسبه کنید.

طریقهٔ رسم: ابتدا مساله را حل شده فرض می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم TT' مماس مشترک داخلی دو دایره باشد. از O' خطی موازی TT' رسم کرده تا امتداد OT را در H قطع کند. چهارضلعی $O'HTT'$ مستطیل است.(فکر!) پس $TH=T'O'=R'$ در نتیجه $OH=R+R'$. حال برای ترسیم ابتدا به مرکز O و به شعاع $R+R'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم، سپس از H به O وصل کرده تا دایره‌ی (C) را در T قطع کند. سپس از T موازی $O'H$ رسم کرده تا دایره‌ی (C') را در T' قطع کند، با مشخص شدن T و T' و وصل کردن آنها به هم، مماس مشترک داخلی TT' رسم می‌شود.



طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره به شعاع‌های R و R' و طول خط‌المرکزین $OO'=d$: $TT'=\sqrt{d^2-(R\pm R')^2}$

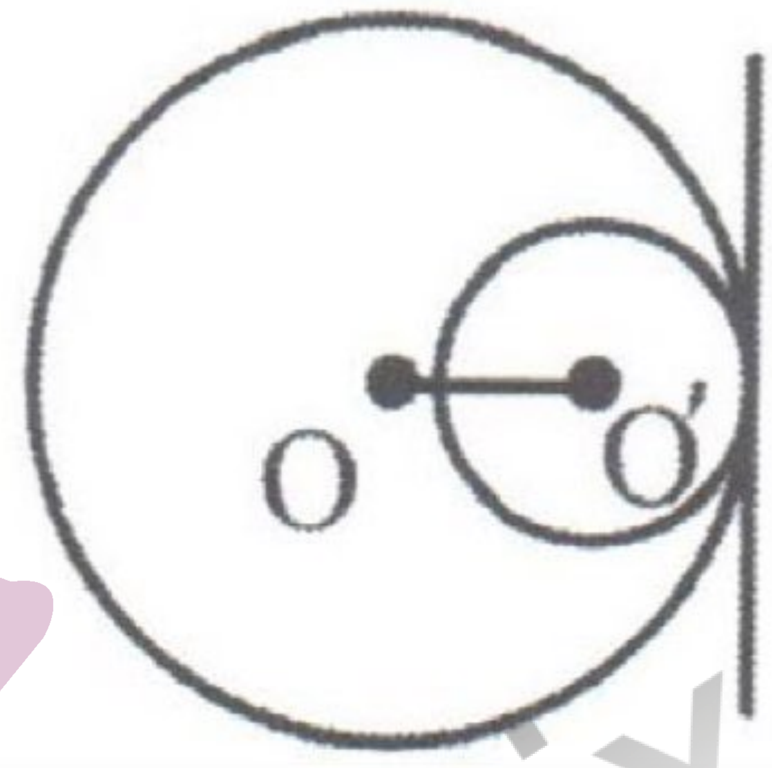
مثال: دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۹ و طول خط‌المرکزین ۲۱ مفروض‌اند. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.

مثال: شعاع‌های دو دایره ۲ و ۱۰ و طول خط‌المرکزین و طول مماس مشترک خارجی آنها به ترتیب $4x+1$ و $3x+3$ است. مقدار x و طول خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.

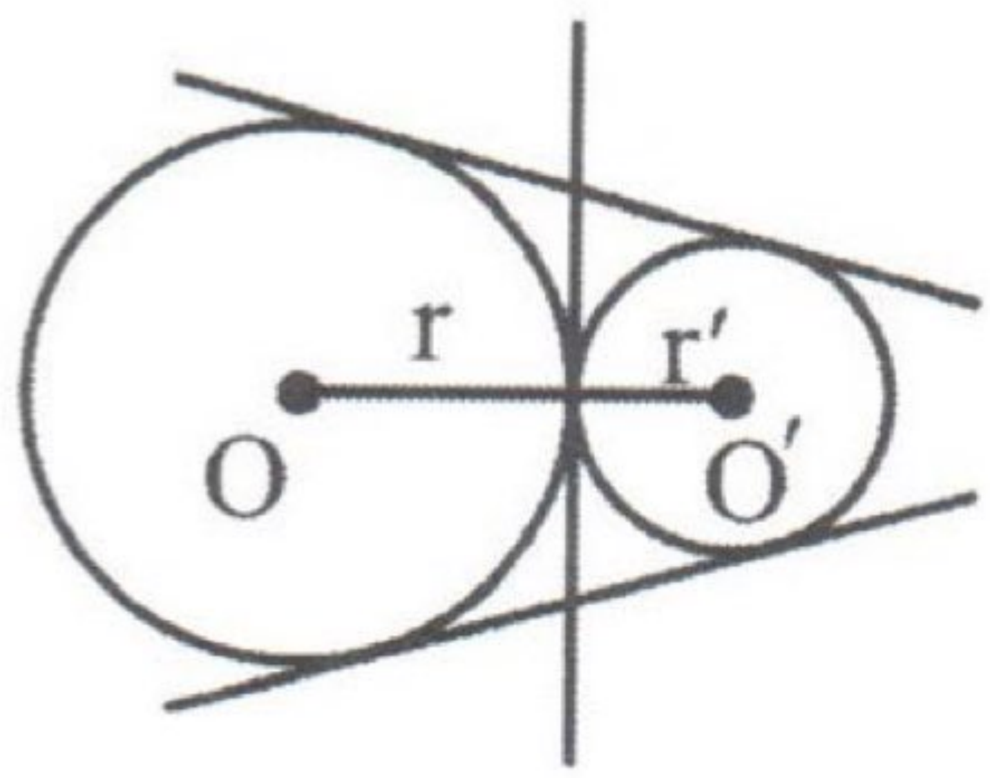
مثال: دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ و طول خط‌المرکزین ۹ مفروض است. اندازهٔ مماس مشترک داخلی آن را بدست آورید.

مثال: اندازه‌های مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره به ترتیب $\sqrt{24}$ و $\sqrt{48}$ است. حاصل ضرب شعاع‌های این دو دایره کدام است؟

۳) دو دایرهٔ مماس: دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می‌نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دو طرف این مماس باشند، آن دو دایره مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می‌نامند.



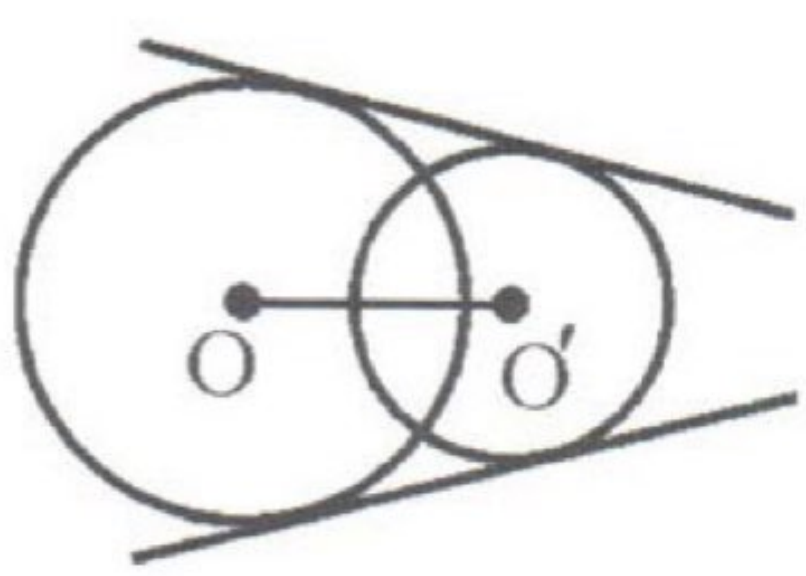
مماس داخل‌اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.
$OO' = |R - R'|$



مماس خارج‌اند؛
سه مماس مشترک دارند.
$OO' = R + R'$

مسئله: نشان دهید در دو دایره طول مماس مشترک خارجی $TT' = 2\sqrt{RR'}$ خواهد بود.

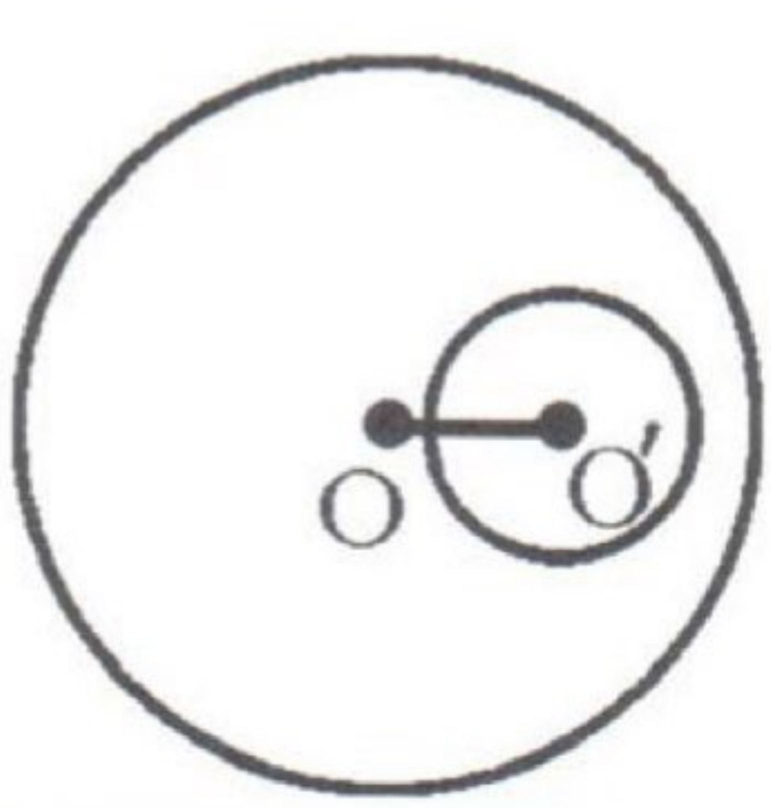
۴) دو دایره متقاطع: دو دایره را که فقط دو نقطهٔ مشترک داشته باشند متقاطع می‌نامند. در این حالت دو دایره تنها دو مماس مشترک دارند.



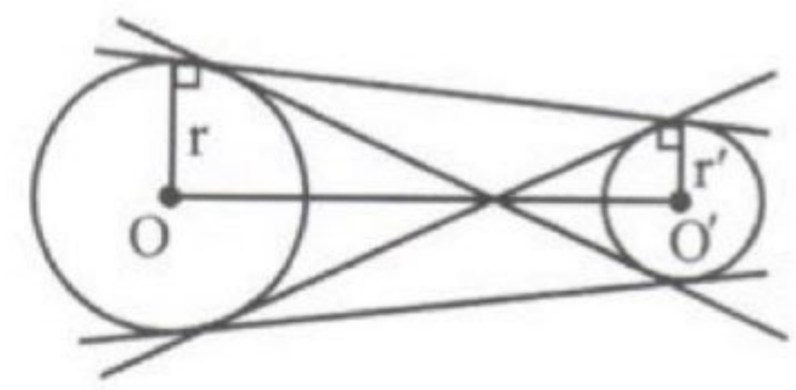
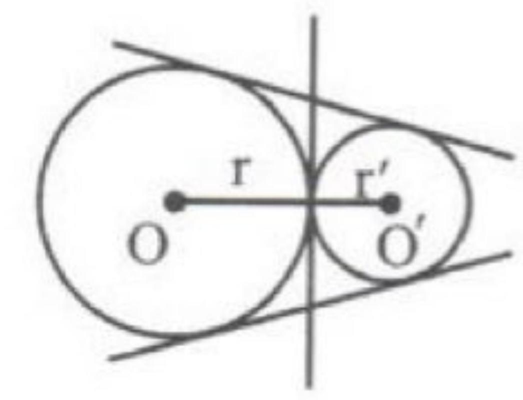
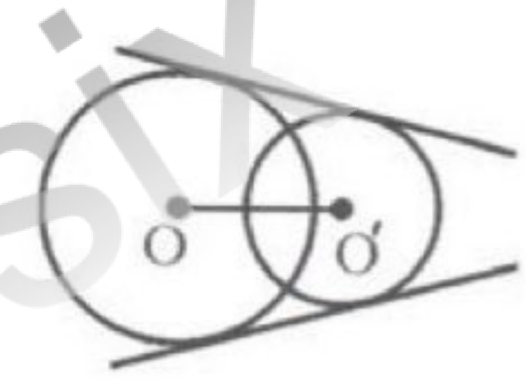
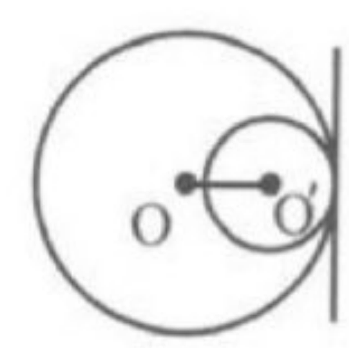
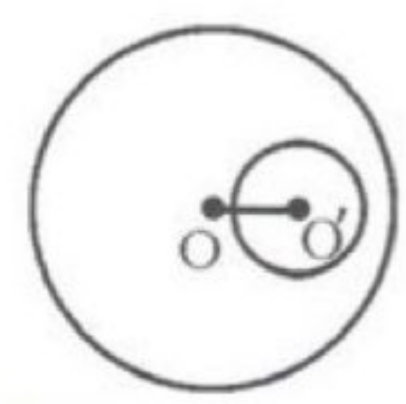
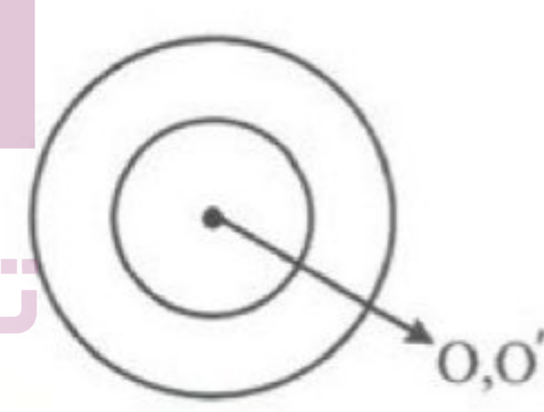
$$|R - R'| < OO' < R + R'$$

پاره‌خطی که دو سر آن روی دو سر دایره قرار دارد، وتر مشترک دو دایره متقاطع است. پاره‌خط OO' عمود منصف این وتر مشترک می‌باشد.

۵) دو دایره متداخل: دو دایره که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می‌نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترکی ندارند. و در آنها $OO' < |R - R'|$



اوضاع نسبی دو دایره و تعداد مماس‌های مشترکشان

شکل	تعداد مماس مشترک	شرط	وضعیت دو دایره	
	٤	$OO'>r+r'$	متخارج	۱
	۳	$OO'=r+r'$	مماس خارج	۲
	۲	$\|r-r'\|<OO'<r+r'$	متقاطع	۳
	۱	$OO'=\|r-r'\|$	مماس داخل	٤
	صفر	$OO'<\|r-r'\|$	متداخل	٥
	صفر	$OO'=0$	هم مرکز	٦

مثال : به ازای چه مقادیری از m دو دایره به شعاع‌های $m+۲$ و $m-۲$ و با خط‌المرکزین $۱۲-۳m$ دارای دقیقاً ۳ مماس مشترک هستند؟

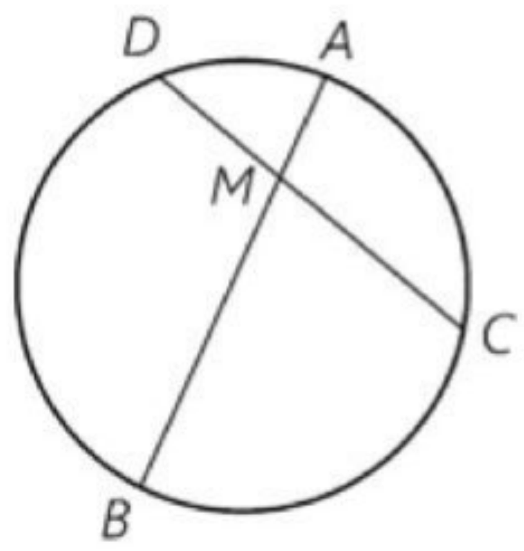
مثال: اندازه‌ی مماس مشترک خارجی و داخلی دو دایره‌ی $C(O,7)$ و $C'(O',1)$ با فرض $OO'=10$ چقدر است؟

مثال: دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آنها چقدر است؟

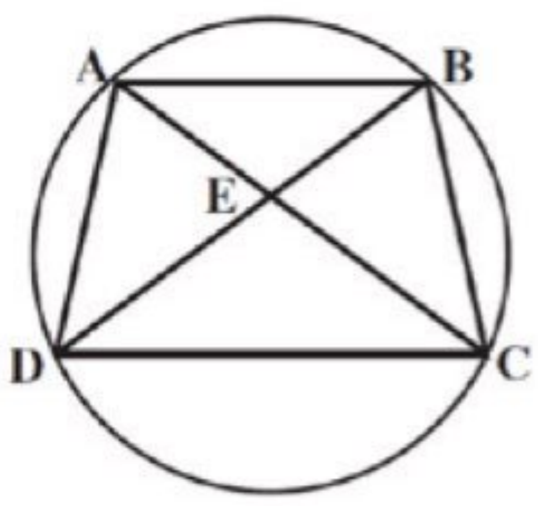
مثال: مقدار a را چنان بیابید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۸ و خط‌المرکزین $d=13$، برابر با $5a-3$ باشد.

مثال: شعاع‌های دو دایره‌ی هم‌مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگتر را که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است پیدا کنید.

تمرین شماره (۳)



۱) در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11cm$، آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

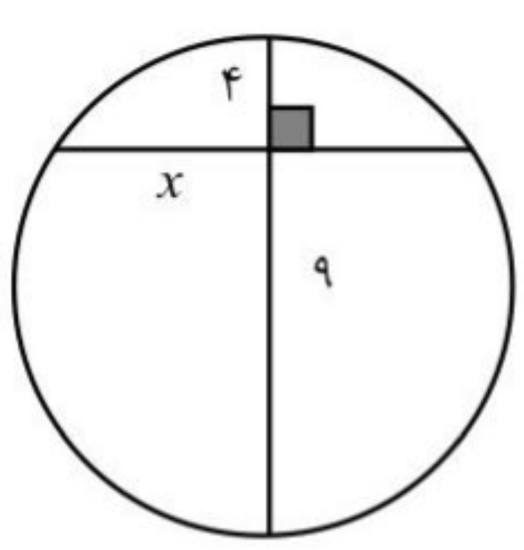


۲) با توجه به شکل نشان دهید:

الف) اگر $AD = BC$، آنگاه $AC = BD$.

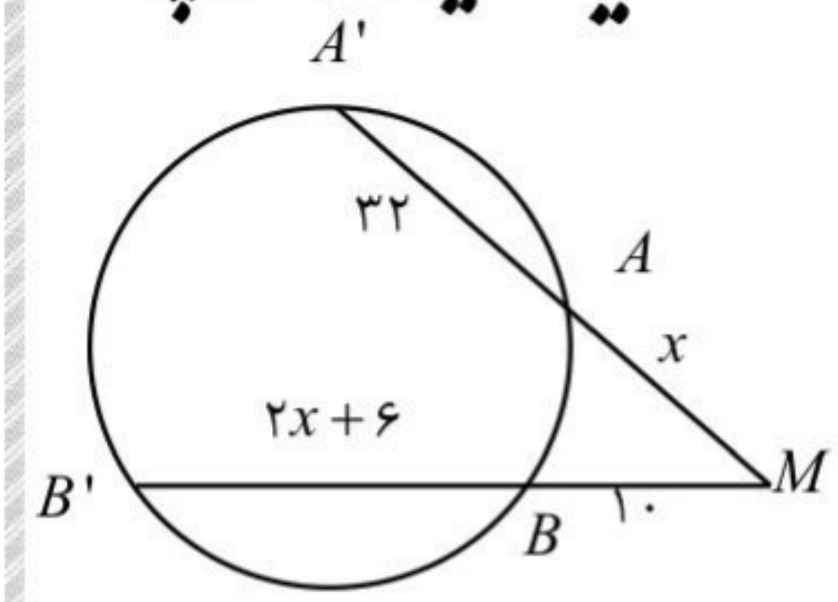
ب) اگر $AC = BD$، آنگاه $AD = BC$.

۳) نقطه‌ی C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه‌ی C کدام است؟

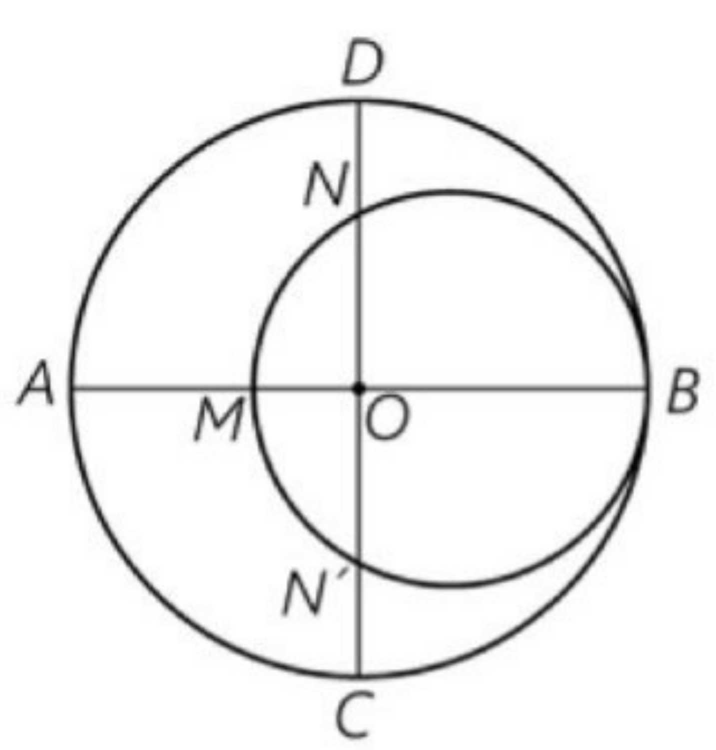


۴) با توجه به شکل زیر، مقدار x کدام است؟

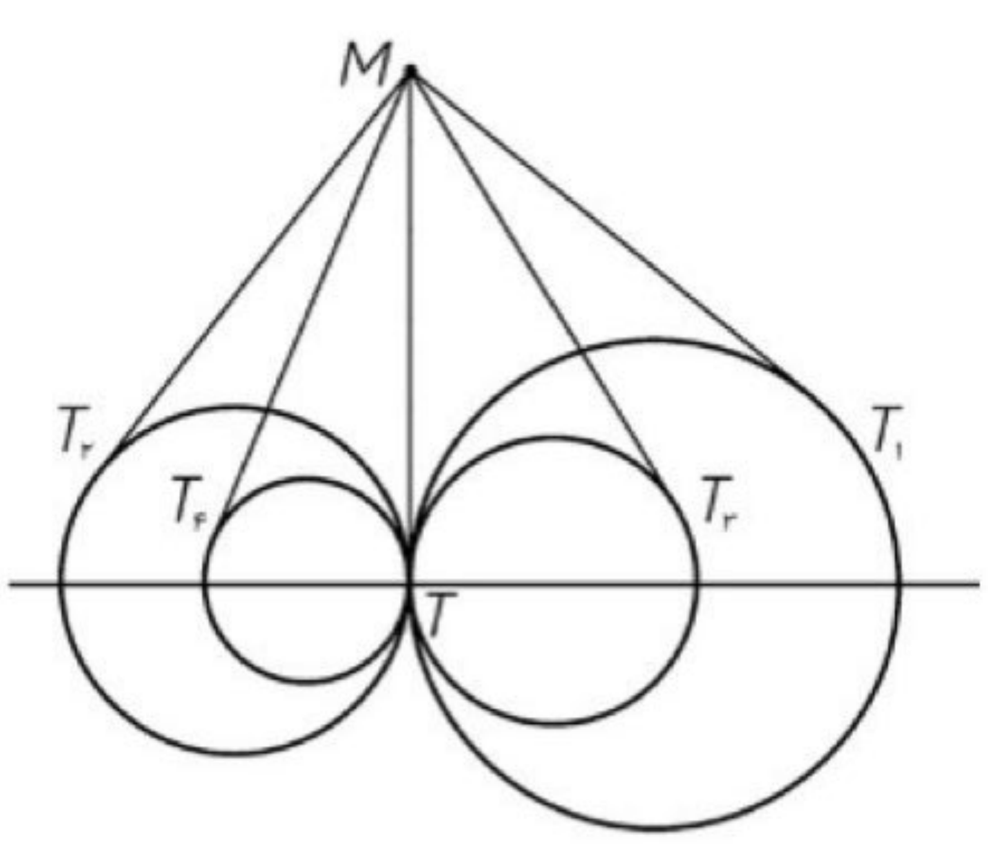
۵) در شکل زیر x کدام است؟



۶) از نقطهٔ P در خارج از دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و BC=۲۰. طول‌های PB و PC را بدست آورید.



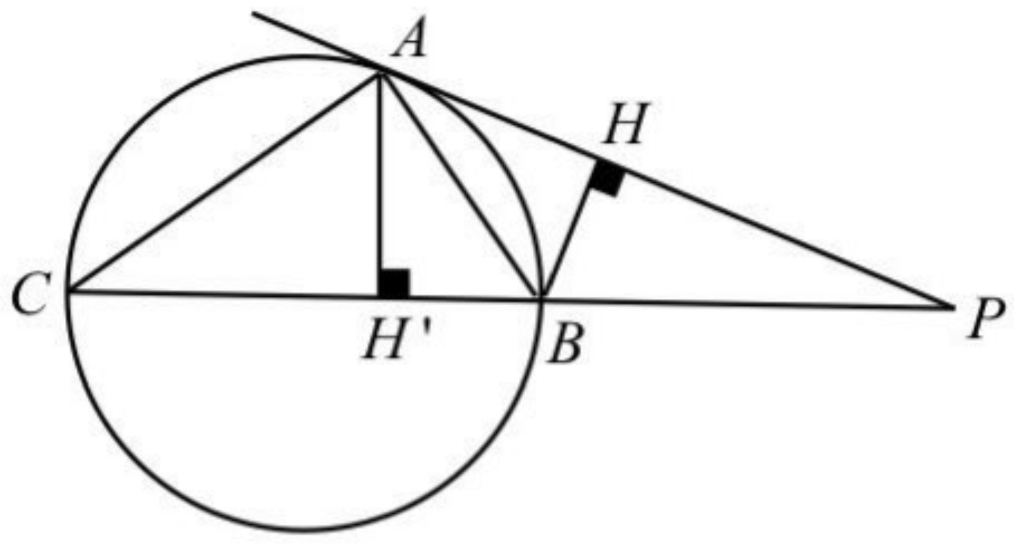
۷) در شکل مقابل دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر AM=۱۶ و ND=۱۰، شعاع‌های دو دایره را محاسبه کنید.



۸) مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T بر هم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید:

$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$

۹) در شکل زیر مساحت مثلث PAB برابر مساحت مثلث ACB است و پاره‌خط BP برابر واحد می‌باشد. ارتفاع وارد بر BC در مثلث ACB چقدر است؟ ($BC = ۳$)



۱۰) طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

۱۱) طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آنها 16π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را بدست آورید.

۱۲) نقطه‌ی P بیرون دایره‌ای به شعاع ۶ قرار دارد. فاصله‌ی P تا نزدیکترین نقطه‌ی دایره، ۴ واحد است. اندازه‌ی مماسی که از P بر دایره رسم شود، چقدر است؟

۱۳) دو دایره‌ی متقاطع به شعاع‌های ۵ و ۳ مفروض‌اند. اگر زاویه‌ی بین مماس مشترک‌های خارجی ۶۰° باشد، طول خط‌المرکزین این دو دایره کدام است؟

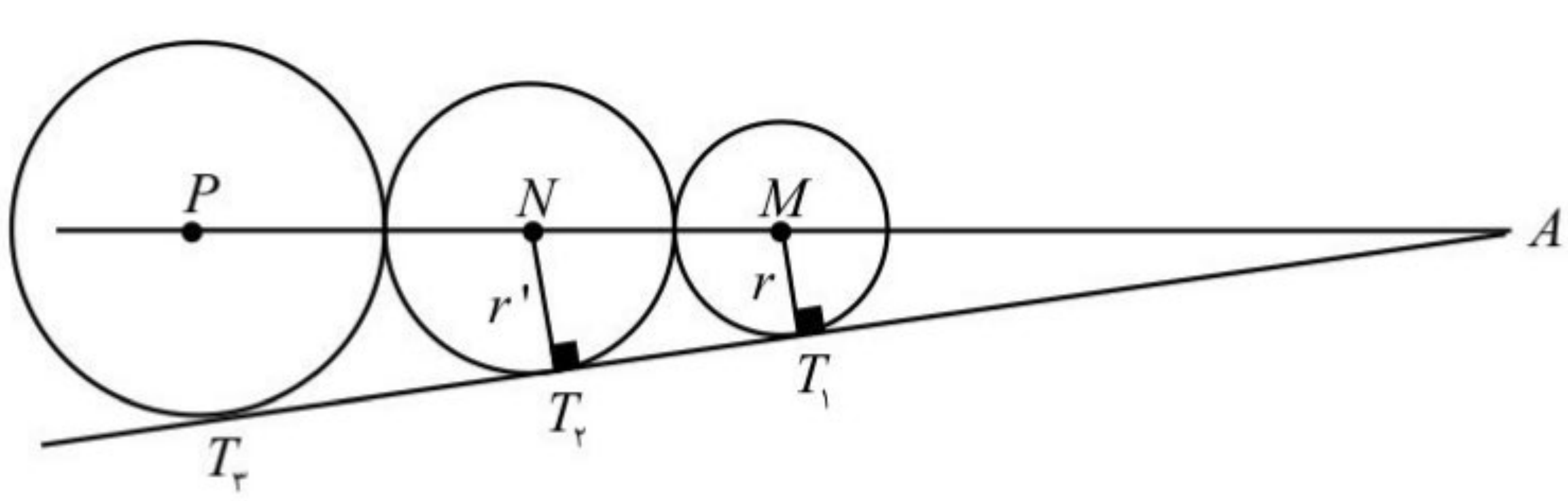
۱۴) شعاع دو دایره خارج هم به ترتیب ۲۲/۵ و ۷/۵ است. اگر زاویه‌ی بین مماس مشترک داخلی و خط‌المرکزین ۳۰° باشد، طول خط‌المرکزین کدام است؟

۱۵) طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۱ برابر با $\sqrt{۴۶}$ می‌باشد. طول مماس مشترک داخلی این دو دایره چقدر است؟

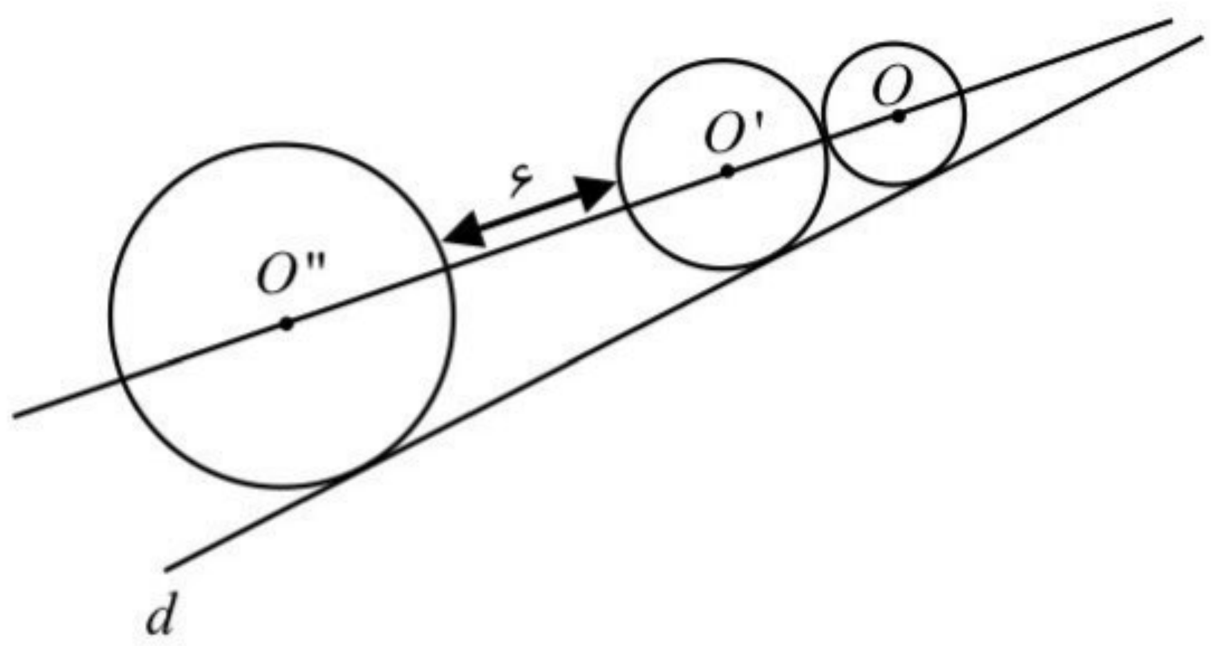
۱۶) زاویه‌ی بین دو مماس رسم شده از نقطه‌ی A بر دایره‌ی $C(O,5)$، برابر 60° است. طول پاره‌خط OA را بدست آورید.

۱۷) دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۷ و طول مماس مشترک خارجی $۴\sqrt{۳}$ مفروض‌اند. وضعیت این دو دایره نسبت به هم چگونه است؟

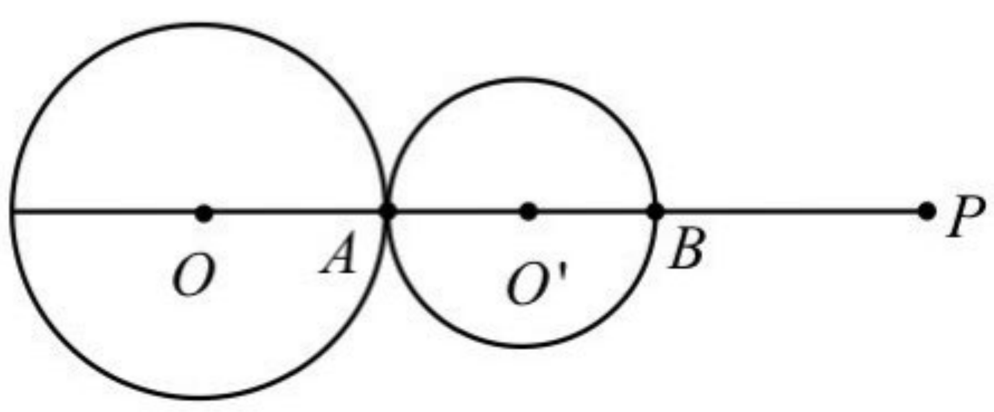
۱۸) سه دایره مطابق شکل برهم مماس‌اند و مرکز آنها روی یک خط راست قرار دارند. اگر $r = ۱$ و $r' = ۲$ باشد، شعاع دایره‌ی بزرگتر کدام است؟



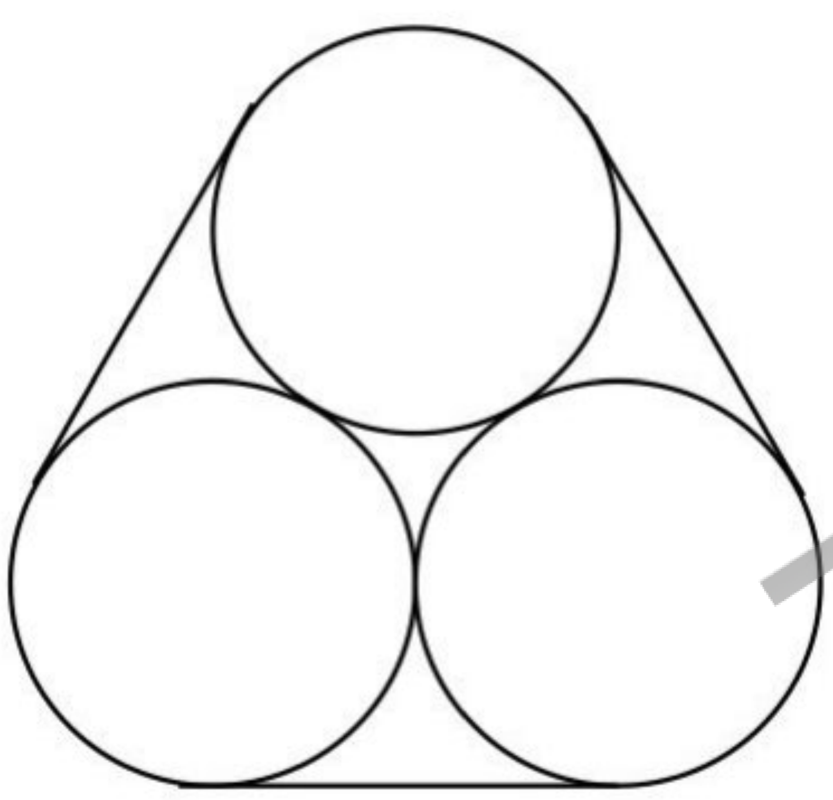
۱۹) در شکل دو دایره‌ی $C(O,۲)$ و $C'(O',۳)$ مماس خارج‌اند و مرکز هر سه دایره‌ی شکل بر روی یک خط راست قرار دارند. فاصله‌ی O'' تا خط d که بر هر سه دایره مماس است، کدام است؟



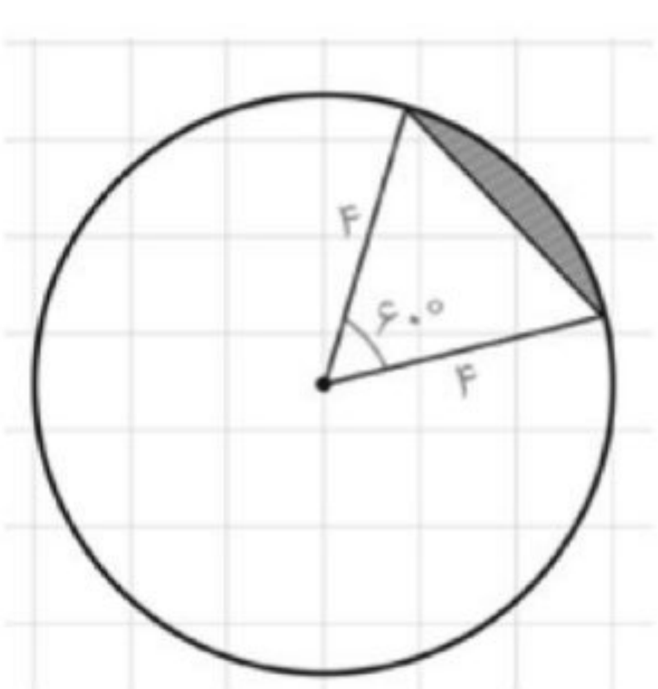
۲۰) در شکل زیر، نقطه‌ی P محل برخورد مماس مشترک‌های خارجی در دایره‌ی $C(O,۲)$ و $C'(O',۱)$ می‌باشد. اگر دو دایره در نقطه‌ی A مماس باشند، نزدیکترین فاصله‌ی P تا دایره‌ی کوچکتر کدام است؟



۲۱) در شکل مقابل هر سه دایره دارای شعاع‌های برابر R می‌باشند. طول نخ پیچیده شده دور آنها چقدر است و نیز مساحت ناحیه محدود بین سه دایره را محاسبه کنید.



۲۲) مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه‌زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

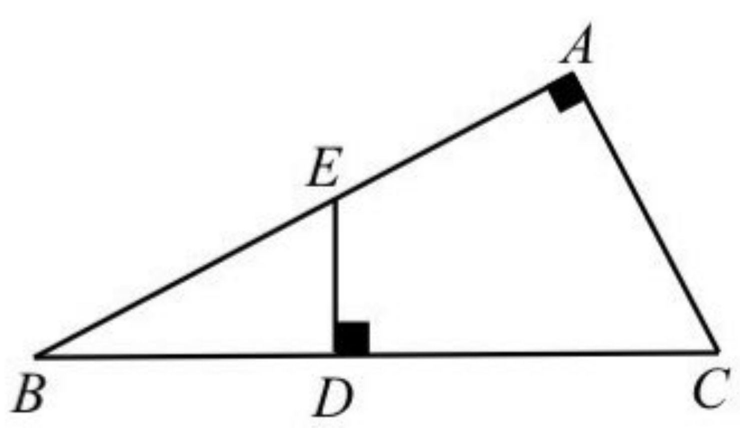


سوالات تکمیلی

۱) ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی (یا خارجی) و خط‌المرکزین دو دایره همرسند.

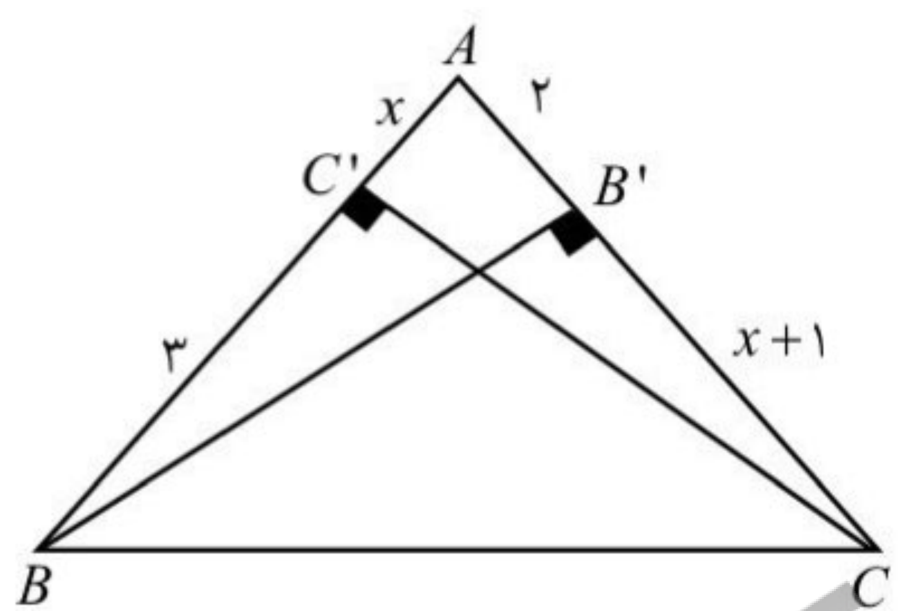
۲) دو دایره به شعاع‌های R و r مماس خارج‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی تماس دو دایره تا مماس مشترک کدام است؟

۳) از نقطه‌ی دلخواه D روی وتر BC از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC خطی بر آن وتر عمود خارج می‌کنیم تا ضلع AB را در E قطع کند. ثابت کنید : $BE.AB = BD.BC$

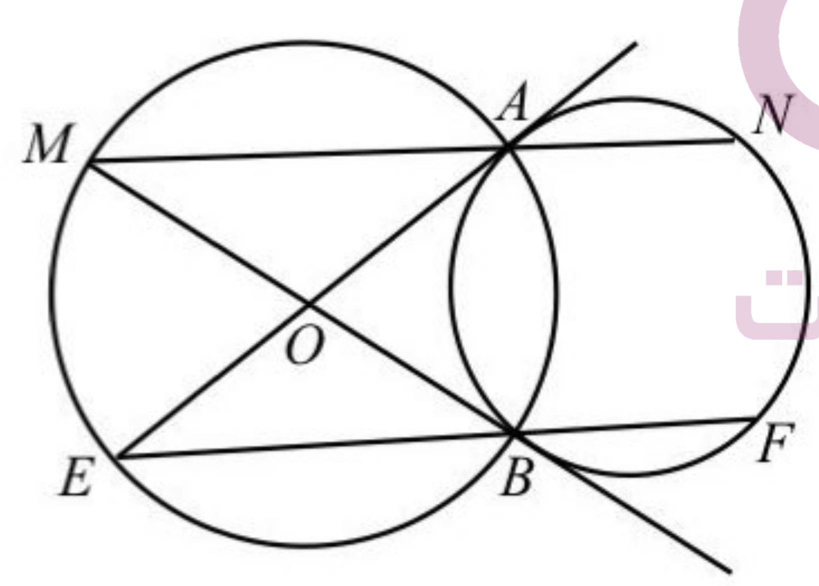


۴) دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۶ و طول خط‌المرکزین ۱۲ مفروض‌اند. چند خط می‌توان رسم کرد که از مرکز دایره‌ی اول به فاصله‌ی ۶ و از مرکز دایره‌ی دوم به فاصله‌ی ۴ باشد؟

۵) در مثلث ABC دو ارتفاع BB' و CC' را رسم کرده‌ایم. با توجه به مقادیر تعیین شده در شکل، x را بدست آورید.



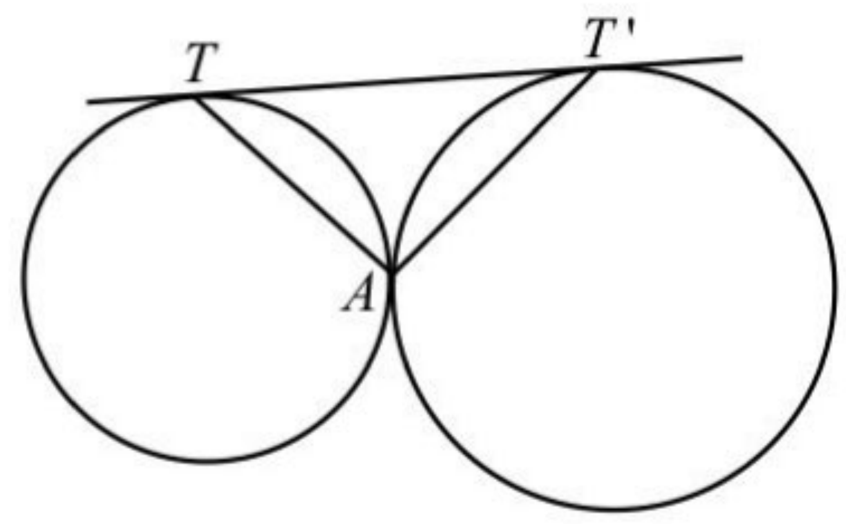
۶) در شکل زیر $MN = \frac{۹}{۱۶}EF$ است. مقدار $\frac{MB}{EA}$ را بدست آورید.(O مرکز دایره است)



۷) سه دایره به مراکز O، O' و O'' و شعاع‌های ۲، ۲ و ۳ دوبه‌دو مماس بیرون هستند. مساحت مثلث $OO'O''$ چقدر است؟

۸) دو دایره‌ی متقاطع $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروض‌اند. مماس مشترک خارجی آنها را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید امتداد وتر مشترک این دو دایره، مماس مشترک را نصف می‌کند.

۹) در شکل زیر، اگر $AT=۴$ باشد و بدانیم مساحت مثلث ATT' برابر ۶ است، طول TT' را بدست آورید.



۱۰) دو دایره‌ی مماس خارج به شعاع‌های R و r مفروض‌اند. دایره‌ای مماس بر دو دایره و مماس خارجی آنها رسم کرده‌ایم. شعاع این دایره را بر حسب R و r محاسبه کنید.

۱۱) دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس خارج هستند. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مماس مشترک خارجی آنها α باشد، ثابت کنید : $R>R'$ $\quad Sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{R-R'}{R+R'}$

۱۰) از نقاط A ، B و C بر دایره‌ای به شعاع ۲، سه مماس AT ، BT' و CT'' به طول $۲\sqrt{۳}$ رسم شده‌اند. اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، مساحت مثلث چقدر است؟(آزاد-۸۰)

۲) دایره‌ی C با شعاع ۲ از نقطه‌ی A با زاویه‌ی ۶۰° دیده می‌شود. اگر O مرکز دایره و T نقطه‌ی تماس خطی که از A می‌گذرد و بر دایره مماس است، باشد، مساحت مثلث AOT کدام است؟(سراسری-۷۵)

چندضلعی‌های محیطی و محاطی

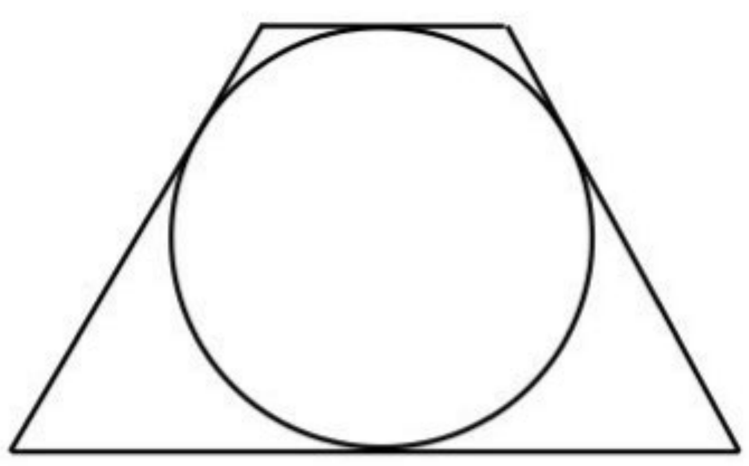
چندضلعی محیطی و دایره‌ی محاطی

۶ ضلعی محیطی

یک چندضلعی محیطی است اگر و فقط اگر دایره‌ای وجود داشته باشد که بر همه‌ی ضلع‌های آن چندضلعی مماس باشد.

توجه: چندضلعی را محیطی یا محیط بر دایره می نامند و دایره را محاط در چندضلعی یا دایره‌ی محاطی چندضلعی می‌نامند.

مرکز دایره محاطی



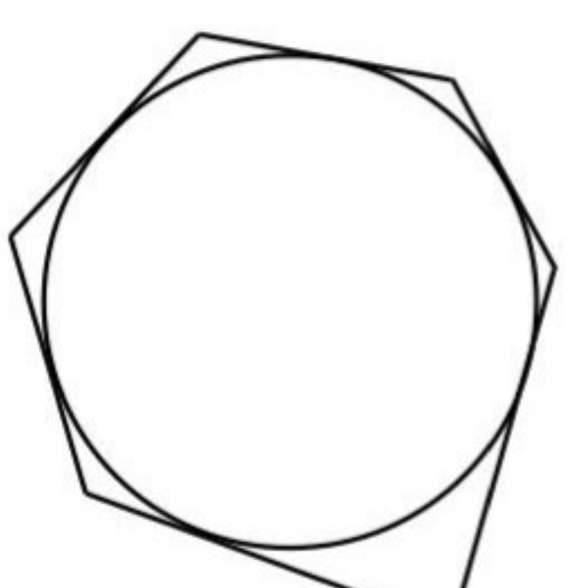
چهارضلعی محیطی روبرو را در نظر بگیرید. می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. به عبارت دیگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خطی که بر آن مماس شده است برابر شعاع دایره است. بنابراین مرکز دایره محاطی از همهٔ ضلع‌های چهارضلعی به یک فاصله است.

از طرف دیگر، می‌دانیم هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد. پس می‌توان گفت اگر یک چندضلعی محیطی باشد، نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی آن همرس‌اند و این نقطه همرسی مرکز دایره محاطی است. به سادگی می‌توان درستی عکس این مطلب را بررسی کرد. اکنون می‌توان گفت:

یک چندضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن همرس باشند. محل همرسی نیمسازها مرکز دایرهٔ محاطی چندضلعی است.

مثال: محیطی بودن چندضلعی‌های لوزی و مثلث را بررسی کنید.

قضیه: اگر در یک n ضلعی محیطی، P نصف محیط، r شعاع دایره محاطی و S مساحت باشند. داریم: $r=\frac{s}{p}$

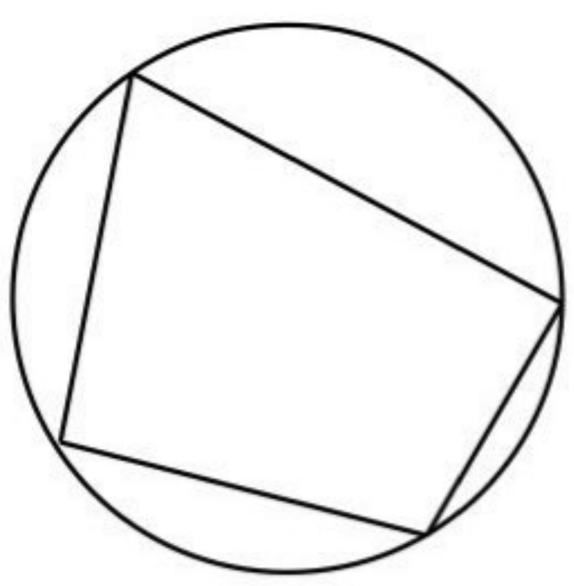


چندضلعی محاطی و دایره‌ی محیطی

یک چندضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دایره‌ای وجود داشته باشد که از همهٔ رأس‌های آن چندضلعی بگذرد.

توجه: این چندضلعی را محاطی یا چندضلعی محاط بر دایره نامند و دایره را محیط بر چندضلعی یا دایره‌ی محیطی چندضلعی می‌نامند.

مرکز دایره محیطی



چهارضلعی محاطی روبرو را در نظر بگیرید. دایرهٔ محیطی این چهارضلعی را رسم می‌کنیم. در این چهارضلعی، مرکز دایرهٔ محیطی از تمام رأس‌ها به یک فاصله است و این فاصله برابر شعاع دایرهٔ محیطی است.

از طرف دیگر، می‌دانیم هر نقطه‌ای که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد. بنابراین O محل همرسی عمودمنصف‌های ضلع‌های این چهارضلعی است. این مطلب قابل تعمیم برای n ضلعی‌های محاطی است و عکس آن هم به سادگی قابل اثبات است. اکنون می‌توان نتیجه گرفت:

یک چندضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های ضلع‌های آن همرس باشند. محل همرسی عمودمنصف‌ها مرکز دایرهٔ محیطی چندضلعی است.

مثال: محاطی بودن چندضلعی‌های مستطیل و مثلث را بررسی کنید.

چندضلعی‌های منتظم و دایره

یادآوری: یک چندضلعی را منتظم می‌گوییم، هرگاه تمام ضلع‌های آن با هم و همچنین تمام زاویه‌های آن با هم برابر باشند. به عنوان مثال، مثلث متساوی‌الاضلاع و مربع به ترتیب سه ضلعی و چهارضلعی منتظم هستند.

قضیه: هر چندضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره و همچنین قابل محیط شدن بر یک دایره است.

توجه: نقطهٔ O را که مرکز دایرهٔ محاطی و مرکز دایره محیطی چندضلعی منتظم است، مرکز این چندضلعی می‌نامیم.

نتیجه: ۱) اگر دایره‌ای را به کمان‌های مساوی تقسیم کنیم و نقطه‌های تقسیم را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک چندضلعی منتظم محاط در دایره پدید می‌آید.

۲) اگر دایره‌ای را به کمان‌های مساوی تقسیم کنیم و در نقطه‌های تقسیم مماس‌هایی بر دایره رسم کنیم، از برخورد مماس‌های متوالی یک چندضلعی منتظم محیط بر دایره پدید می‌آید.

دایره‌های محاطی مثلث

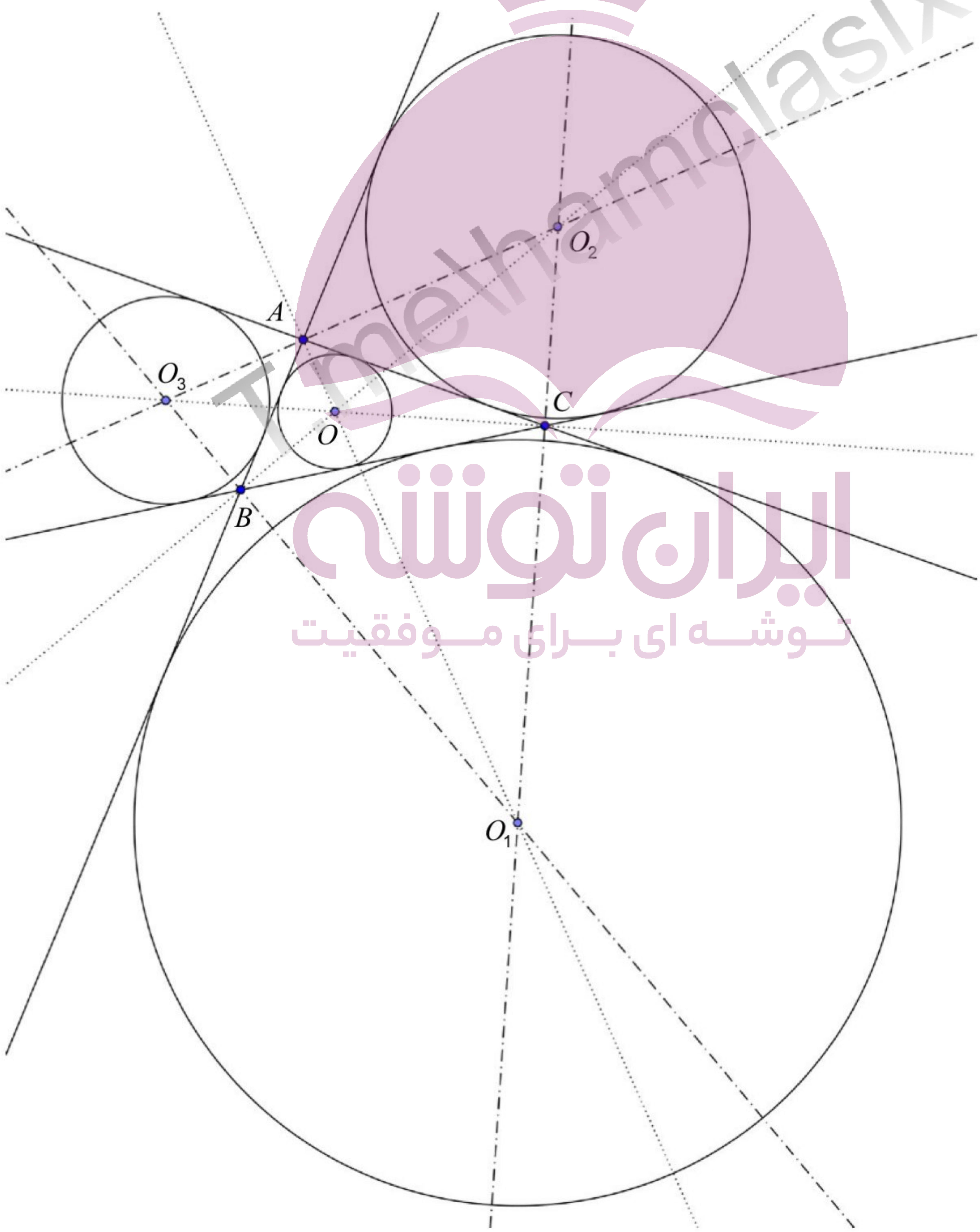
* دایره‌ای که هر ۳ ضلع مثلث(یا امتداد ۲ ضلع و خود یکی از اضلاع) بر آن مماس می‌شوند را دایره‌ی محاطی مثلث می-نامند. هر مثلث ۱ **دایره‌ی محاطی داخلی** و ۳ **دایره‌ی محاطی خارجی** دارد.

* مرکز دایره‌ی محاطی داخلی : محل برخورد نیمسازهای داخلی

* مرکز دایره‌های محاطی خارجی : محل برخورد ۲ نیمساز خارجی با امتداد یکی از نیمسازهای داخلی

* **شعاع دایره‌ی محاطی داخلی** برابر است با:

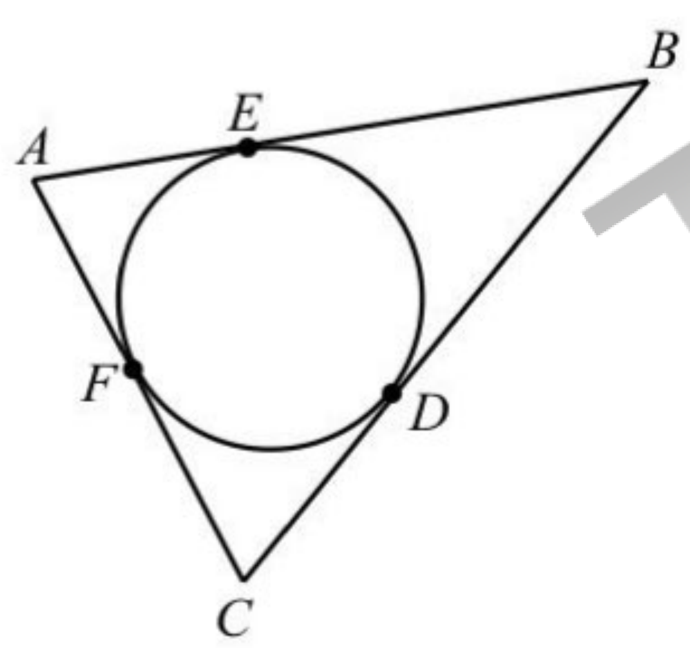
* شعاع دایره‌ی محاطی خارجی(مماس بر ضلع BC) برابر است با:



مثال: در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a شعاع دایره محاطی داخلی چقدر است؟

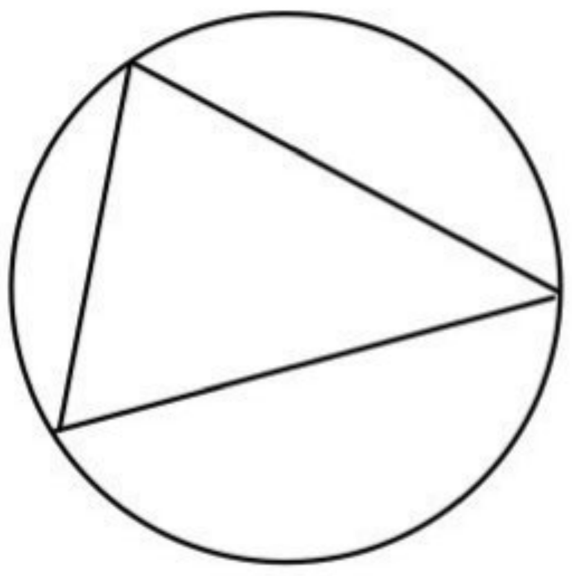
مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به ضلع‌های قائمهٔ ۶ و ۸، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را بدست آورید.

مثال: با توجه به شکل مقابل ثابت کنید:

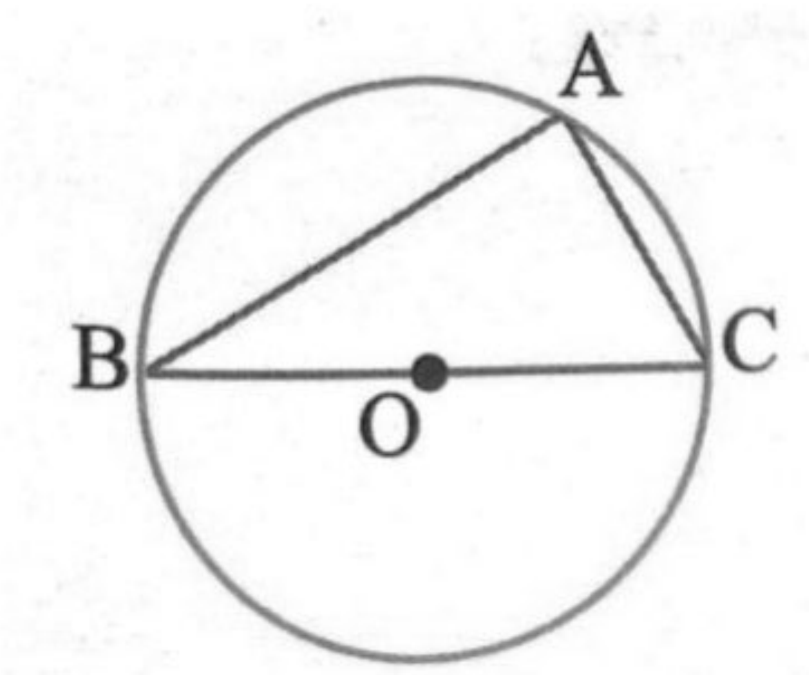


$$AE = AF = P - a$$
$$BE = BD = P - b$$
$$CF = CD = P - c$$

دایرهٔ محیطی مثلث

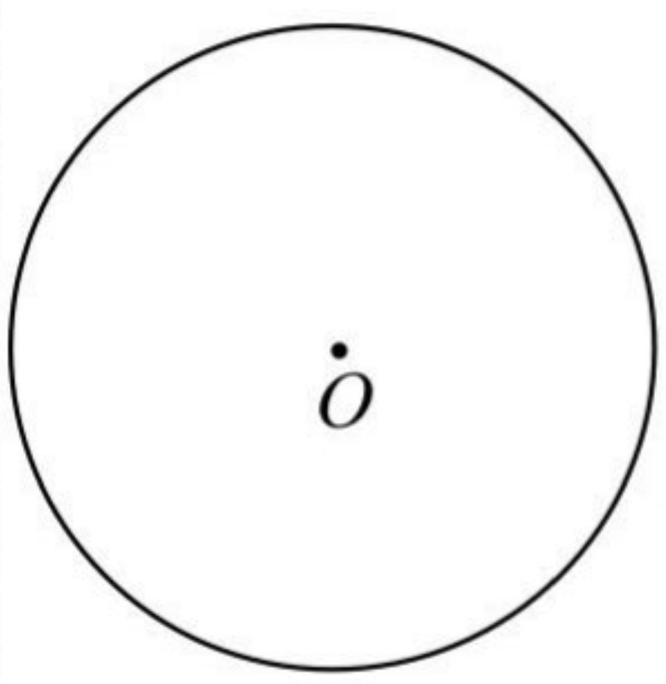


می‌دانیم سه عمود منصف ضلع‌های مثلث همرسند و نقطهٔ همرسی آنها از سه رأس مثلث به یک فاصله است. پس اگر O نقطهٔ همرسی سه عمود منصف ضلع‌های مثلث ABC باشد، آن‌گاه دایره‌ای که به مرکز O و شعاع OA رسم شود از هر سه رأس مثلث می‌گذرد. در نتیجه مثلث قابل محاط شدن در یک دایره است، یعنی دایرهٔ محیطی دارد.



نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایرهٔ محیطی وسط وتر است.

دلیل:



نکته: در مثلث متساوی‌الاضلاع نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌ها همان نقطهٔ تلاقی میانه‌ها است. بنابراین مرکز دایره محیطی مثلث (O در شکل مقابل) نقطه تلاقی میانه‌ها است. می‌دانیم میانه‌های مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند. پس شعاع دایرهٔ محیطی یعنی OA مساوی $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع AH است. حال می‌توان نوشت:

مثال: اگر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی $۴\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه شعاع دایرهٔ محیطی آن چقدر است؟

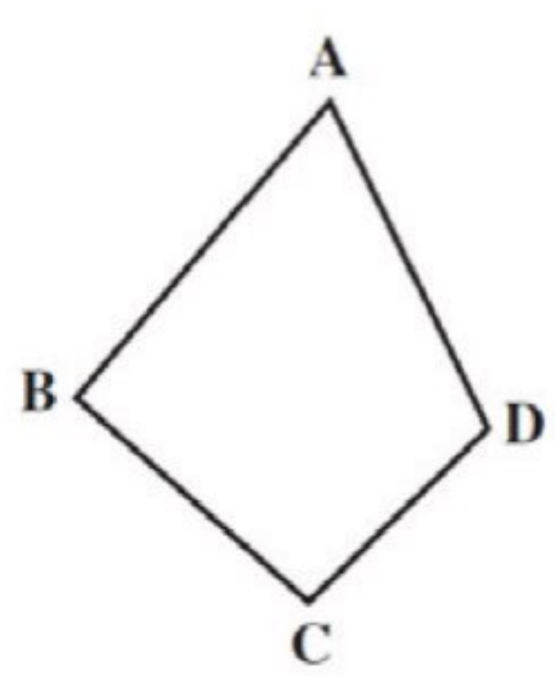
مثال: در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $\sqrt{۳}$، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی خارجی آن چند است؟

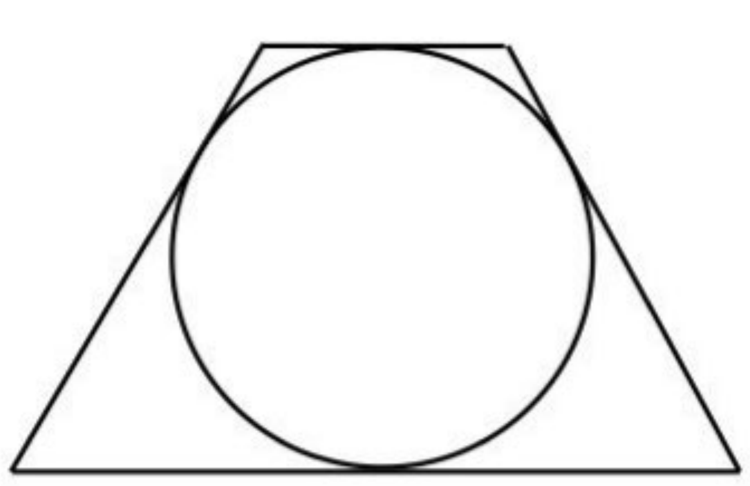
مسئله: ثابت کنید در مثلث ABC، اگر S مساحت مثلث و R شعاع دایرهٔ محیطی آن باشد، آن‌گاه $R=\frac{abc}{4S}$

چهارضلعی‌های محیطی

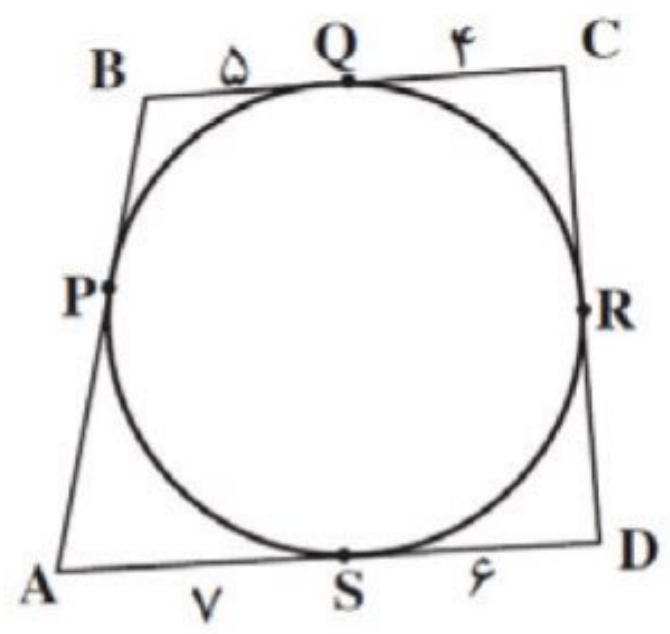
برخلاف مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها همواره محیطی نیستند. برای محیطی بودن چهارضلعی‌ها می‌توان علاوه بر بررسی شرط همرسی نیم‌سازها از موارد دیگری نیز استفاده کرد که در زیر مهمترین آنها را بیان می‌کنیم.

قضیه: ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ محیطی است، اگر و تنها اگر $AB+CD=AD+BC$





مثال: اگر P، Q، R و S، نقاط تماس اضلاع چهارضلعی $ABCD$ با دایره باشند،

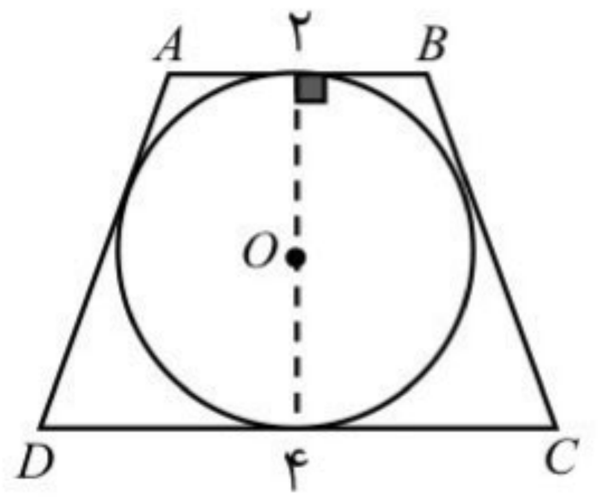


آنگاه محیط این چهارضلعی را بدست آورید.

مثال: سه نیم‌ساز داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه می‌گذرند و اندازهٔ سه ضلع متوالی آن به ترتیب ۷۲، ۱۰۷ و ۹۱ است. اندازه ضلع چهارم چقدر است؟

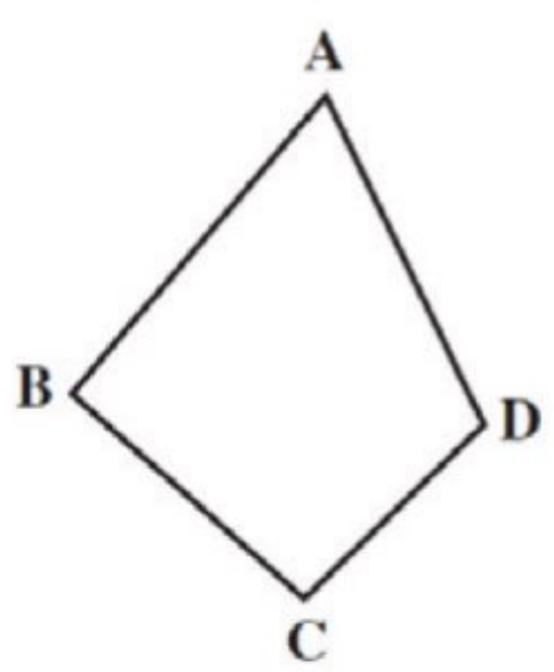
مثال: یک ذوزنقه متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع ۳ محیط است. اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ واحد مربع باشد، طول ساق آن را بدست آورید.

مثال: در شکل زیر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ بر دایره محیط شده است. مساحت آن چقدر است؟

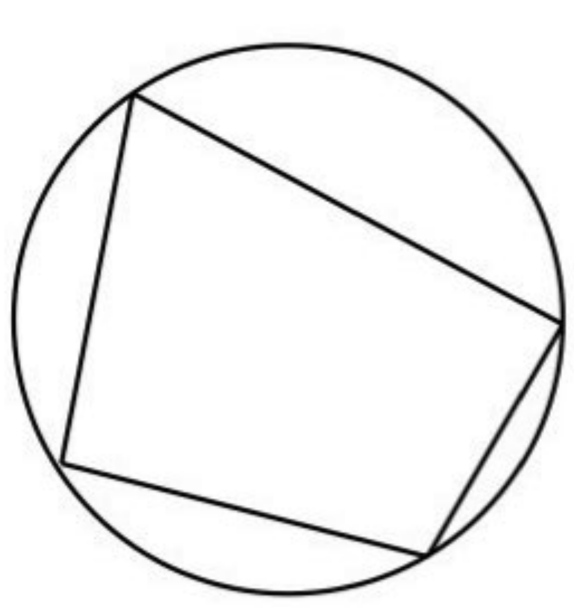


چهارضلعی‌های محاطی

برخلاف مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها لزوماً محاطی نیستند. برای محاطی بودن چهارضلعی‌ها می‌توان علاوه بر بررسی شرط همرسی عمودمنصف‌ها از موارد دیگری نیز استفاده کرد که در زیر مهمترین آنها را بیان می‌کنیم.

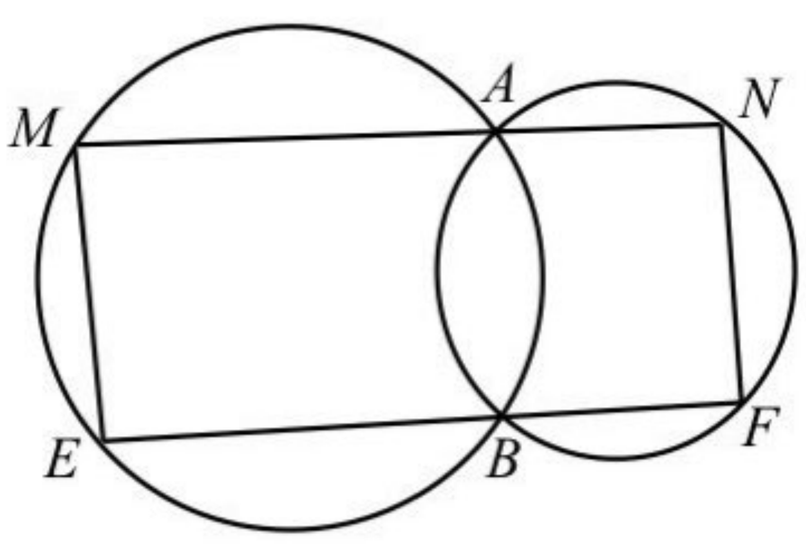


قضیه: ثابت کنید یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر، زوایای مقابل آن مکمل هم باشند.

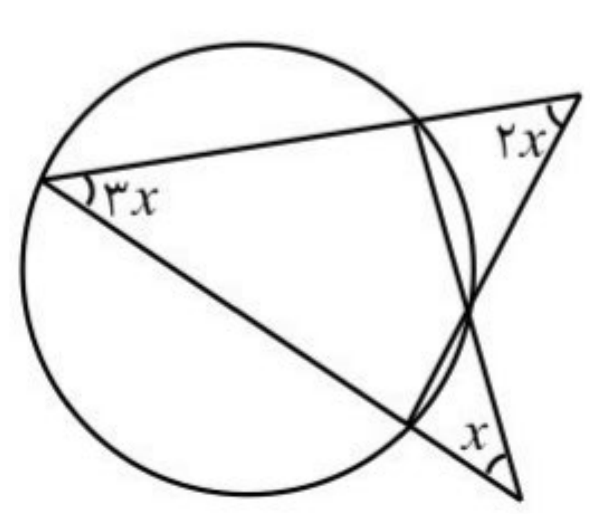


مثال: دو زاویه‌ی مجاور یک چهارضلعی محاطی ۸۰° و ۱۲۰° است. قدرمطلق تفاضل دو زاویه‌ی دیگر کدام است؟

مثال: در شکل مقابل، اگر بدانیم $M = ۲\alpha$ و $N = ۳\alpha$. اندازهٔ α بر حسب درجه چقدر است؟



مثال: با توجه به شکل x را بدست آورید.



تمارین شماره (۴)

۱) ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

۲) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را بدست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

۳) ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیم‌ساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

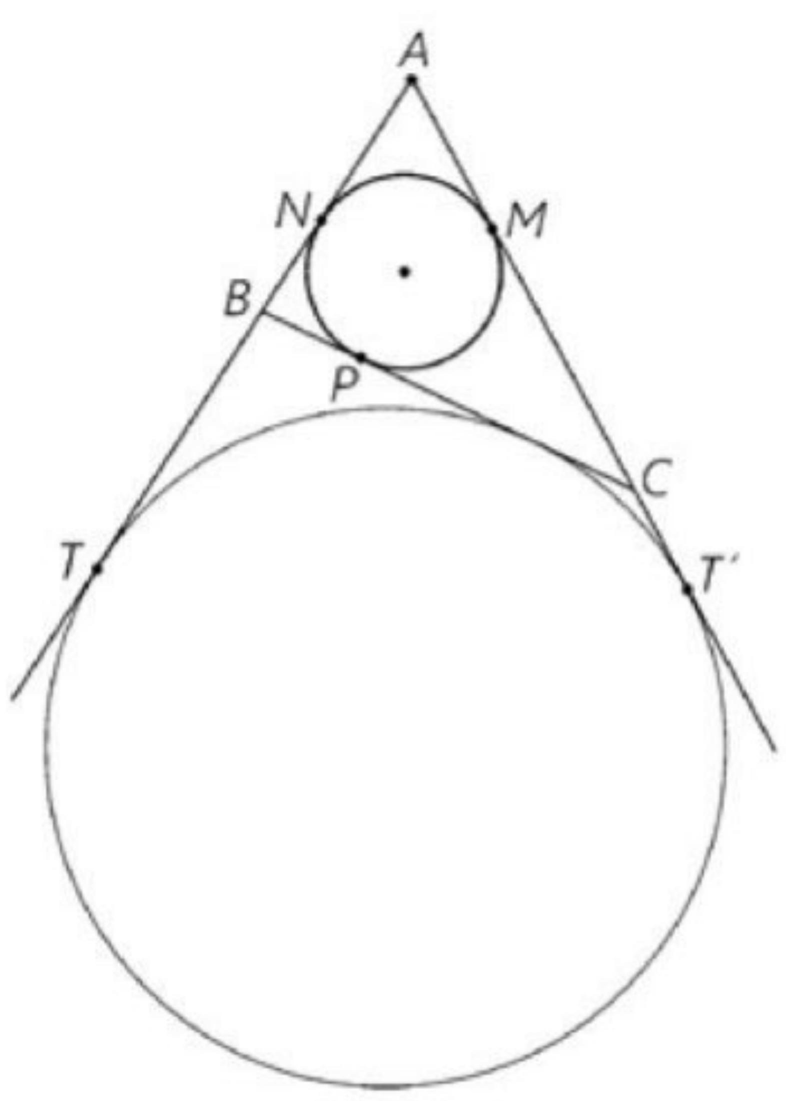
۴) یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

۵) اگر r_a ، r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r_a شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a ، h_b و h_c اندازه‌های ۳ ارتفاع باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

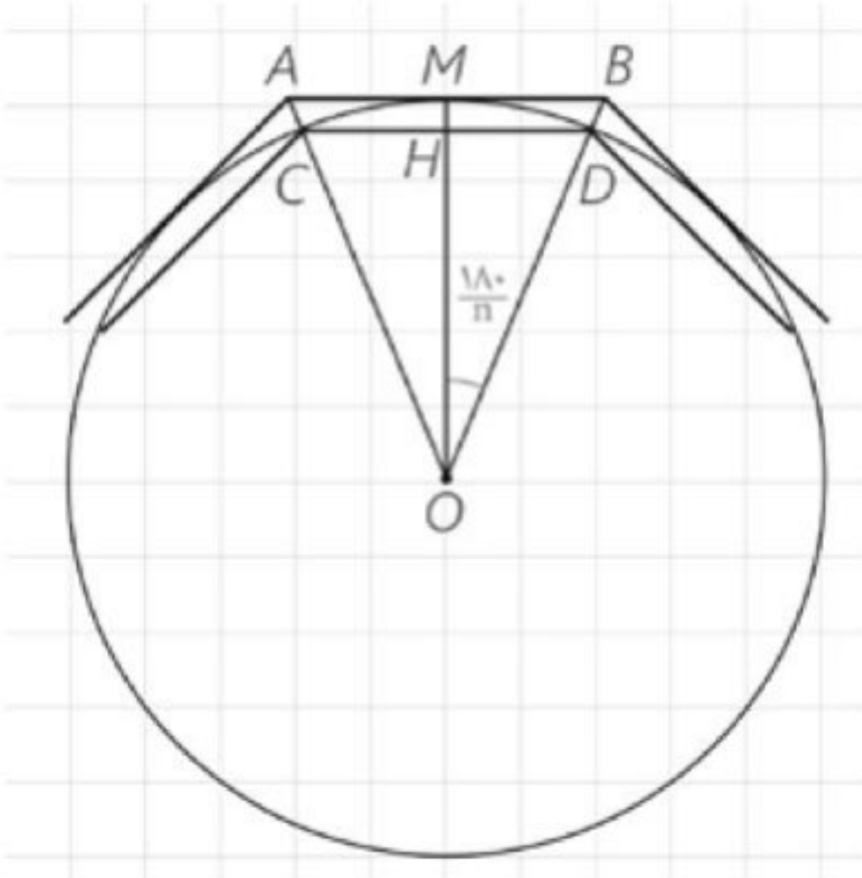


۶) الف) اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و P باشند، و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:

$$AM = AN = p-a$$
$$BN = BP = p-b$$
$$CM = CP = p-c$$
$$AT = AT' = p$$

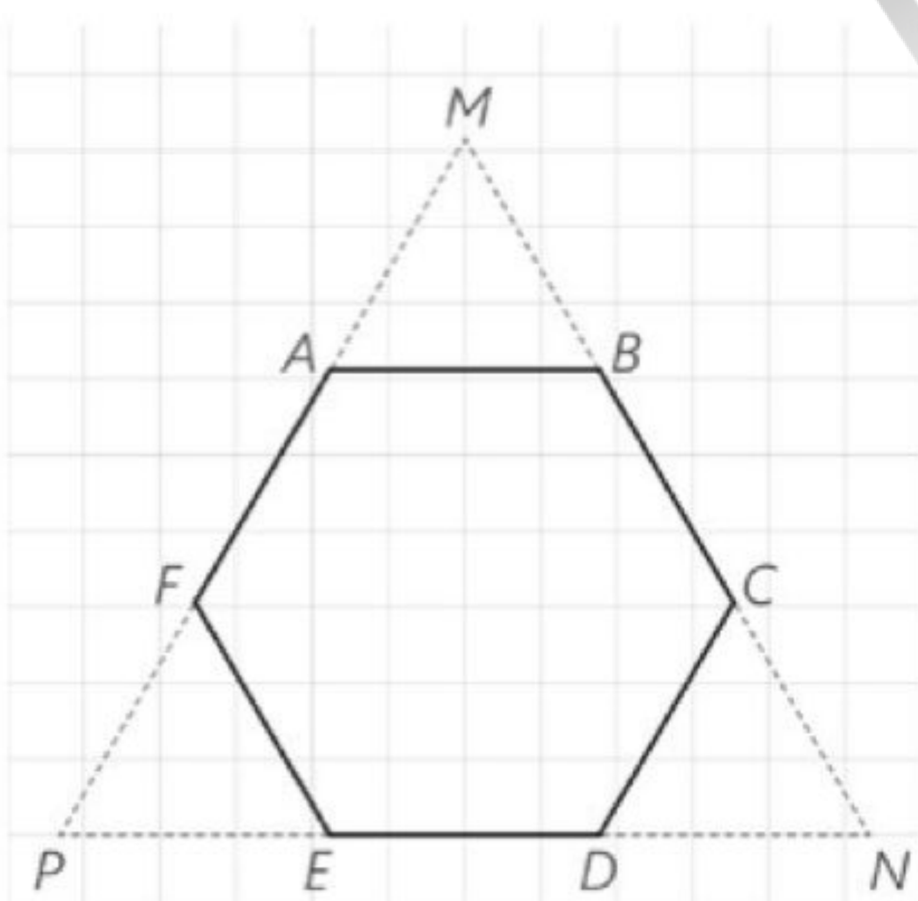
ب) اگر S نقطه تلاقی دایره محاطی خارجی با ضلع BC باشد و $AB = ۶, AC = ۷, BC = ۸$ اندازهٔ PS را محاسبه کنید.

۷) یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلع‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه:



$$AB = ۲r \tan \frac{۱۸۰}{n}$$
$$CD = ۲r \sin \frac{۱۸۰}{n}$$

۸) شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی مطابق شکل مقابل مثلث MNP را ساخته‌ایم.



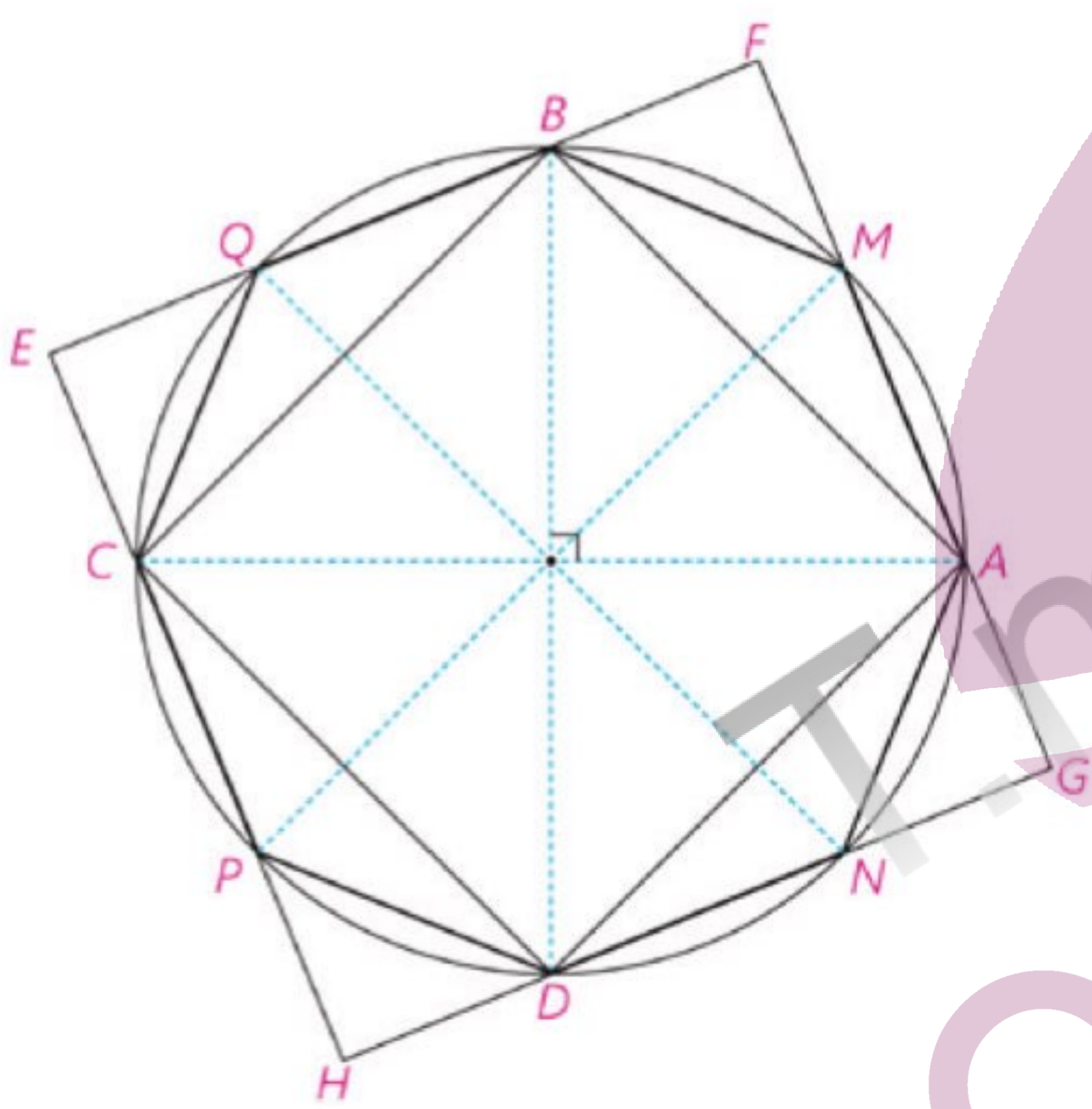
الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

ج) از نقطهٔ دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه ۱ می‌دانید(!) مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

د) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$



۹) دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.

سوالات تکمیلی

۱) دایره‌ی $C(O,R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که مماس‌های رسم شده از این نقطه بر دایره، برهم عمود باشند.

۲) در مثلث متساوی‌الاضلاع، مساحت دایره‌ی محیطی چند برابر مساحت دایره‌ی محاطی داخلی است؟

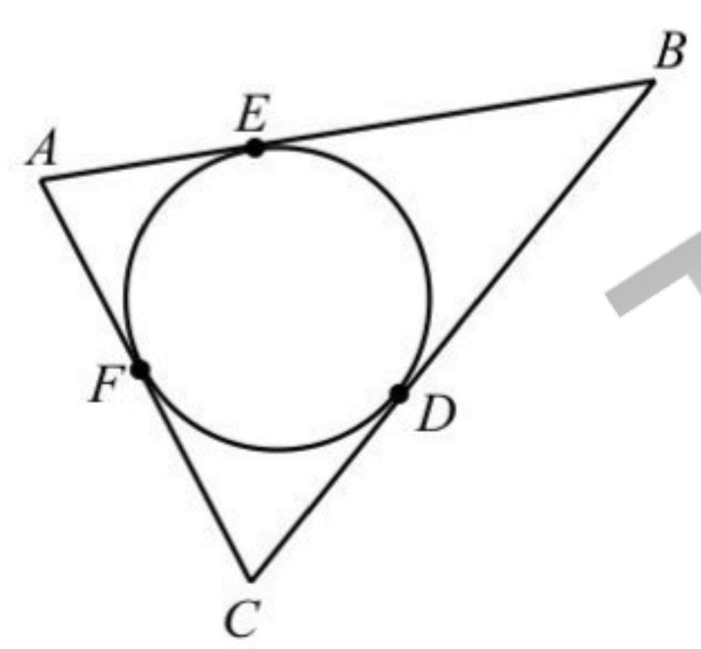
۳) در نیم‌دایره‌ای به شعاع R مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که وتر آن منطبق بر قطر است را محاط کرده‌ایم. اگر مساحت مثلث نصف نیم-دایره باشد، ارتفاع کدام مضرب از R است؟

۴) در ربع دایره‌ای به شعاع R، یک دایره محاط است. شعاع این دایره برحسب R کدام است؟

۵) درمثلث با طول اضلاع ۷ ، ۵ و ۳ واحد، دایره‌ای محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است.نقطه‌ی تماس، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۶) در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{3}$، طول خط‌المرکزین دو دایره‌ی محاطی داخلی و محاطی خارجی کدام است؟

۷) دو مماس AF و AE را بر دایره رسم کرده‌ایم. از نقطه‌ی D روی دایره، مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم تا این دو مماس یا امتداد آنها را در B و C قطع کند. ثابت کنید با تغییر مکان D روی دایره، بین E و F، مقدار $AB+AC-BC$ ثابت است.



۸) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر یک دایره محیط است. ثابت کنید قطر دایره‌ی محاطی آن، واسطه‌ی هندسی بین دو قاعده‌ی ذوزنقه است.

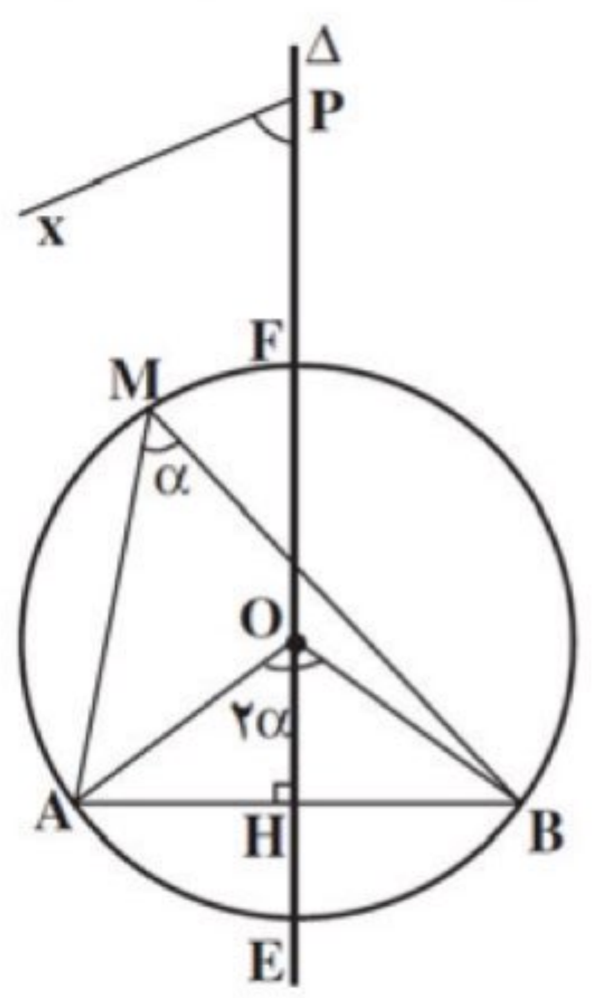
۹) اگر I، I_a، I_b و I_c مرکز دایره‌های محاطی مثلث باشند، I برای مثلث $I_aI_bI_c$ چه نقطه‌ای است؟

مجله ریاضی: کمان درخور(حاوی) یک زاویه

** پاره‌خط AB داده شده است. می‌خواهیم نقطه‌ی C را طوری قرار دهیم که $A\hat{C}B=\alpha$ باشد. تمامی نقاطی از صفحه که C می‌تواند در آنها قرار گیرد باهم تشکیل یک شکل می‌دهند که آن شکل کمان درخور زاویه‌ی α روبرو به پاره‌خط AB است.(دقت کنید که پاره‌خط AB ثابت است و کمان درخور همیشه شامل دو کمان از دو دایره می‌باشد ولی شامل A و B نیست.)

** **کمان درخور زاویه‌ی α وابسته به پاره‌خط AB** : مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از آنها می‌توان پاره‌خط AB را با زاویه‌ی α رویت کرد. این مکان، قسمتی از دو دایره‌ی متقاطع است.

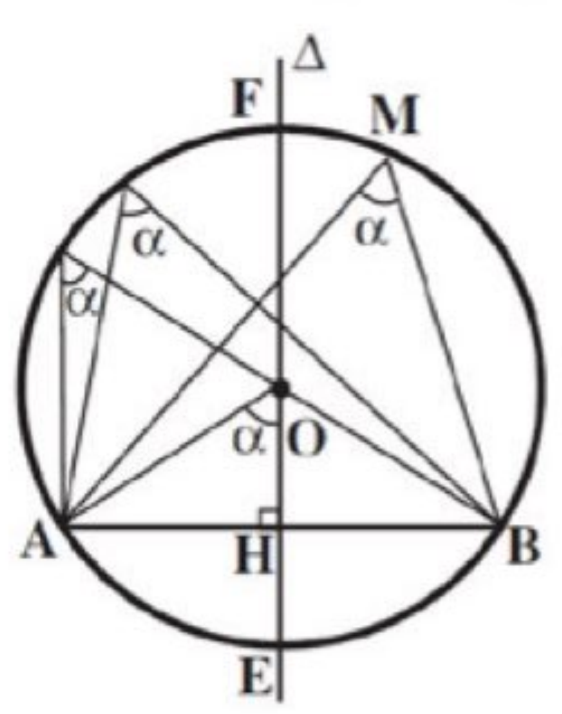
قضیه : مکان هندسی راس زاویه‌ای برابر α که اضلاعش از دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند، کمان‌هایی از دو دایره‌ی مساوی است که از آن دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند و زاویه‌ی مرکزی روبرو به وتر مشترک آنها برابر 2α است.(اثبات در صفحات ۶۲، ۶۳ و ۶۴ کتاب)



برهان : دو نقطه‌ی ثابت A و B را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. آنها را به هم وصل کرده، وسط پاره‌خط AB را H می‌نامیم.

آنگاه خط Δ، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی دلخواه P واقع بر خط Δ، نیم‌خط Px را چنان رسم می‌کنیم که $H\hat{P}x=\alpha$ باشد. از نقطه‌ی A خطی موازی Px رسم می‌نماییم تا خط Δ را در نقطه‌ی O قطع کند.

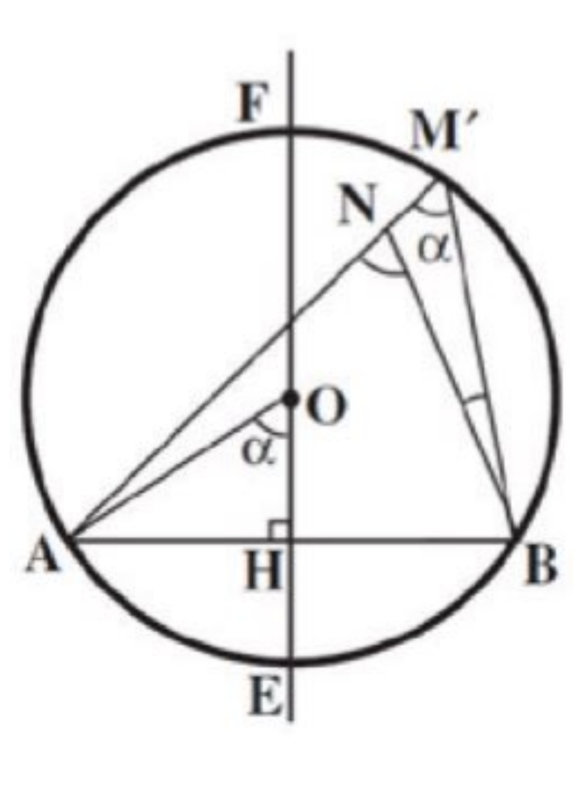
به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم می‌کنیم. این دایره از نقطه‌ی B نیز می‌گذرد و اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{AEB}=2\alpha$ است(چرا؟). کمان $\overset{\frown}{AFB}$ مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی راس زاویه‌ای برابر α است که اضلاعش از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرند، زیرا :



(۱) هر نقطه مانند M که روی این کمان باشد و از این نقطه به دو نقطه‌ی A و B وصل کنیم،

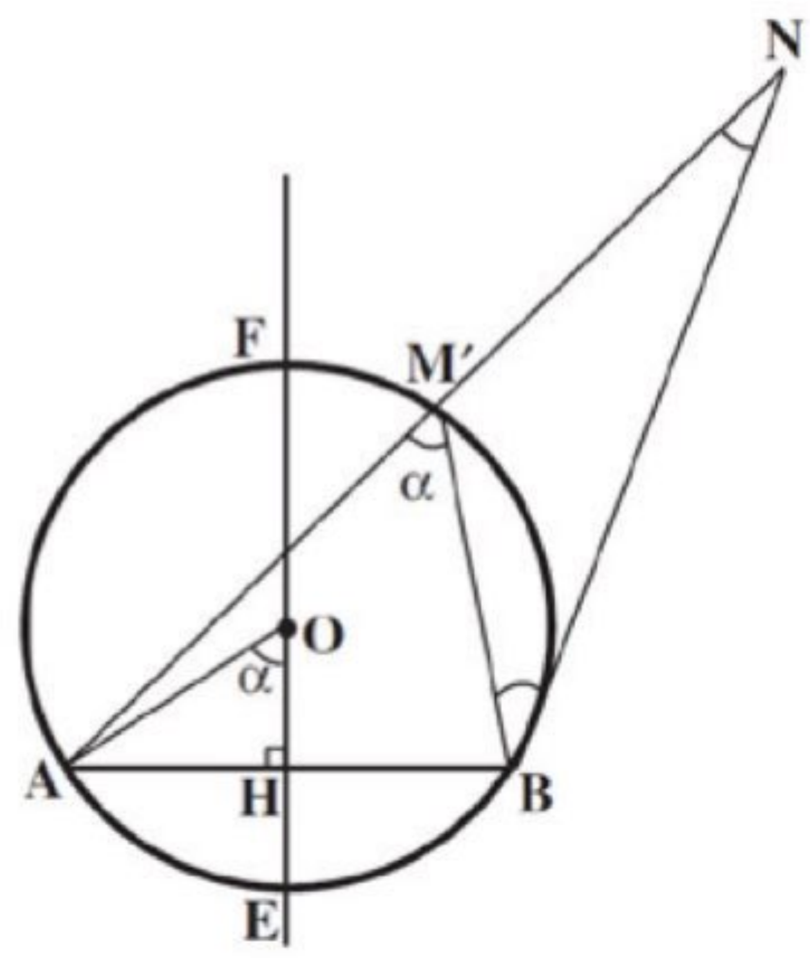
اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{M}B$ برابر α است، چون : $A\hat{M}B=\dfrac{\overset{\frown}{AEB}}{2}=\dfrac{2\alpha}{2}=\alpha$

(۲) نقطه‌ی N، راس هر زاویه مانند $A\hat{N}B=\alpha$ که اضلاعش از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرد و در طرف کمان $\overset{\frown}{AFB}$ واقع است، روی کمان $\overset{\frown}{AFB}$ قرار دارد. زیرا اگر نقطه‌ی N روی این کمان نباشد، یا داخل دایره‌ی $C(O,R)$ واقع است، که در این صورت $A\hat{N}B>\alpha$ خواهد بود، یا نقطه‌ی N خارج این دایره قرار دارد که در این صورت $A\hat{N}B<\alpha$ است. زیرا اگر در حالت نخست نقطه‌ی برخورد امتداد AN با دایره را M' بنامیم و از M' به B وصل کنیم، داریم :



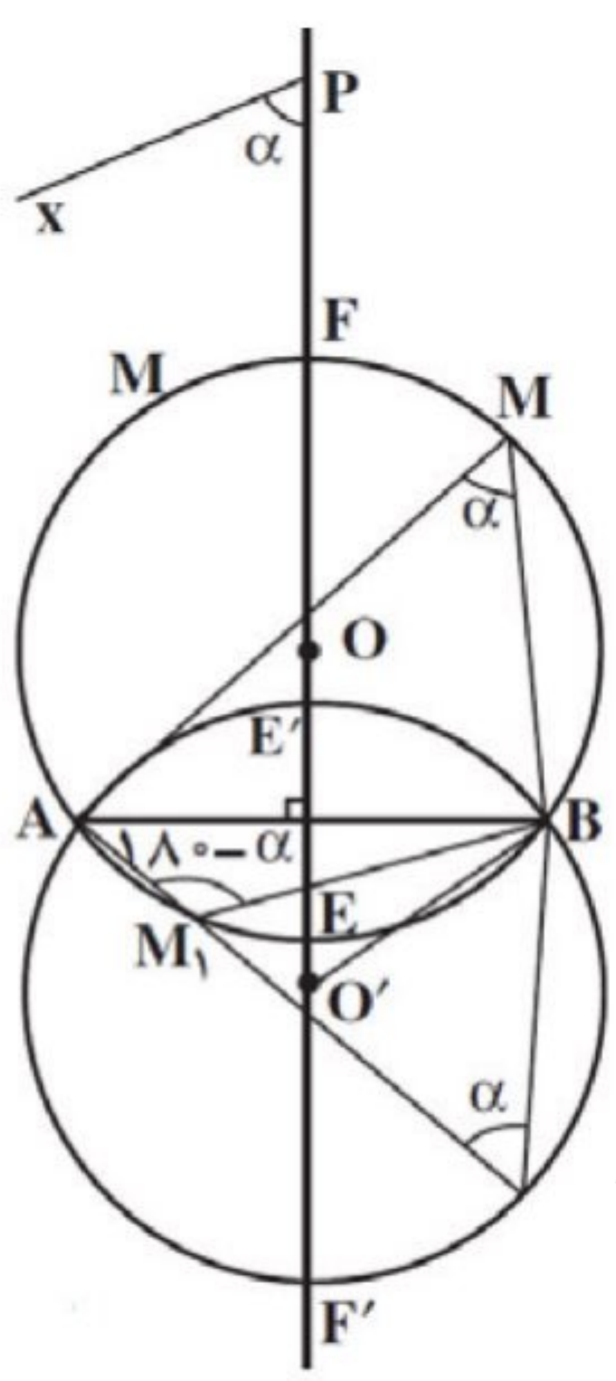
$$A\hat{N}B=A\hat{M'}B+M'\hat{B}N\xrightarrow{A\hat{M'}B=\alpha}A\hat{N}B=\alpha+M'\hat{B}N\longrightarrow A\hat{N}B>\alpha$$

و در حالت دوم، اگر نقطه‌ی برخورد $A\hat{N}B=\alpha$ با دایره را $A\hat{N}B=\alpha$ بنامیم، داریم :



$$A\hat{N}B = A\widehat{M'}B - M'\hat{B}N \xrightarrow{A\widehat{M'}B=\alpha} A\hat{N}B=\alpha - M'\hat{B}N \longrightarrow A\hat{N}B<\alpha$$

بنابراین، در هر دو حالت، نتیجه بدست آمده خلاف فرض است. در نتیجه نقطه‌ی N روی کمان $\widehat{AFB}$ است. این کمان، کمان درخور یا کمان حاوی زاویه‌ی α روبرو یا وابسته به پاره‌خط AB، نامیده می‌شود.



در صورتی‌که از نقطه‌ی B خطی موازی Px رسم کنیم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطه‌ی O' قطع کند، و سپس دایره‌ای به مرکز O' و به شعاع $O'A=O'B$ رسم نماییم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقاط E' و F' قطع کند(شکل روبرو)، کمان $\widehat{AF'B}$ نیز کمان درخور زاویه‌ی α روبرو به پاره‌خط AB است.

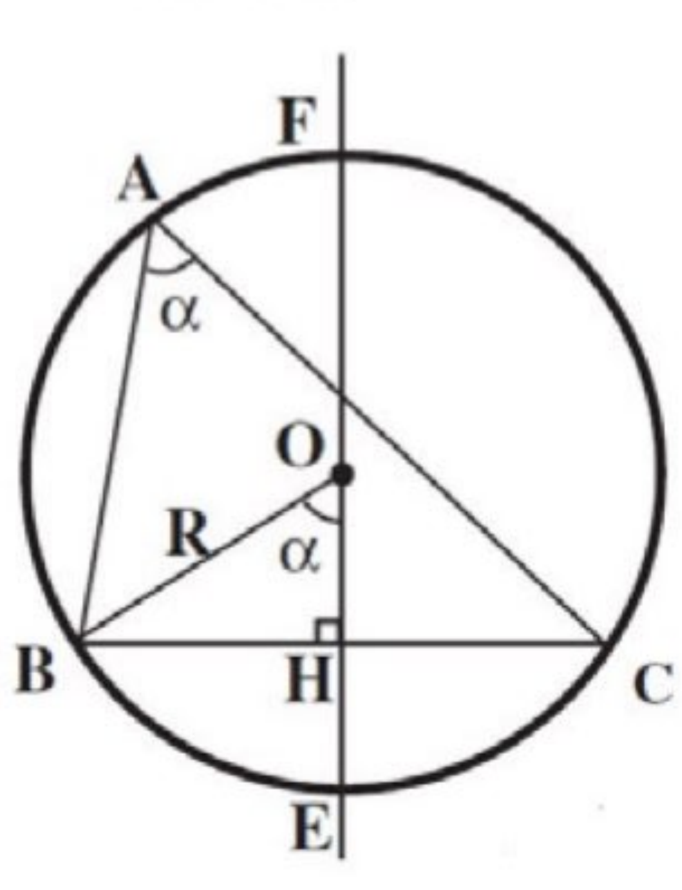
بنابراین، مکان هندسی راس زاویه‌ای برابر α که اضلاعش از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرند کمان‌هایی از دو دایره‌ی مساوی است که بر A و B مرور می‌کنند و زاویه‌ی مرکزی روبرو به وتر مشترک آنها، برابر 2α است.

نتیجه ۱ : کمان‌های $\widehat{AEB}$ و $\widehat{AE'B}$ از دو دایره شکل بالا، کمان درخور زاویه $180^\circ-\alpha$ روبرو به پاره‌خط AB هستند.

نتیجه ۲ : کمان درخور زاویه‌ی 90° روبرو به پاره‌خط AB، دایره‌ای به قطر AB است.

نکته : در هر یک از حالات ذکر شده، دو نقطه‌ی A و B جزء کمان درخور زاویه‌ی α یا $180^\circ-\alpha$ نیستند.

نتیجه ۳ : شعاع دایره‌ای که کمان درخور زاویه‌ی α روبرو به پاره‌خط BC به طول a بخشی از آن است، $R=\frac{a}{2Sin\alpha}$ و



فاصله‌ی مرکز دایره از وتر BC، برابر با $OH=\frac{a}{2|\tan\alpha|}$ است.