ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود گام به گام
- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش
- دانلود فیلم و مقاله آنلیزشی
- کنکور و مشاوره

IranTooshe.Ir

@irantooshe

IranTooshe

۱. نقطه‌ی $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می باشند.مختصات وسط قطر آن کدام است؟

۱) $(۴,۳)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۱,۵)$

۲. مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$ ، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

۳. نقطه‌ی $A(۳,-۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $۲y-x=۵$ است. مساحت این مربع، کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۴. دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۵. به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ ، برابر ۶ می باشد؟

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۹}{۵}, ۱$ ۴) $-۱, \frac{۹}{۵}$

۶. به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی $x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x=۴$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

۱) $a<-۴$ ۲) $a>-۴$ ۳) $a<۴$ ۴) $a>۴$

۷. ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲-۳x-۱=۰$ ، یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲-۳x+۱=۰$ ۲) $x^۲+۳x+۱=۰$

۳) $x^۲-۵x+۲=۰$ ۴) $x^۲+۵x+۲=۰$

۸. مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۴

۹. به ازای کدام مقدار m، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^۲+۳x+m^۲=۲$ ، معکوس یک‌دیگرند؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰. اگر $x=a$ یک جواب معادله‌ی $\frac{۲}{x}+\frac{x}{x+۲}=\frac{۸}{x^۲-a}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی مقادیر a چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۱۱. جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{۲x+۵}=۵-۲x$ چگونه است؟

۱) یک ریشه‌ی منفی ۲) دو ریشه‌ی منفی

۳) دو ریشه‌ی مثبت ۴) یک ریشه‌ی منفی و یک ریشه‌ی مثبت

۱۲. به ازای کدام مقدار a ، $x=۰$ یک جواب معادله‌ی $\frac{a+۲}{۴-x^۲}=\frac{۱}{x-۲}+\frac{۱}{۳x+۶}$ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۱۳. معادله‌ی $\frac{۱}{x^۲-۳x}=\frac{۱}{x^۲-۳x+۲}+\frac{۱}{x^۲-۳x-۲}$ دارای چند جواب است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴. به ازای چه مقدار از k، معادله‌ی $\frac{۶}{k}+\frac{۱}{x+۲}=\frac{}{x-۲}$ دارای جواب $x=۱$ است؟

۱) ۱/۸ ۲) $-۱/۸$ ۳) ۱/۲ ۴) $-۱/۲$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵. ۵۰ گرم از محلولی با غلظت ۶۰ درصد داریم. چند گرم مادهٔ حل شدنی به آن اضافه کنیم تا غلظت محلول به ۸۰ درصد برسد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۱۶. معادله‌ی $x+\frac{۱}{x}+\frac{}{x^۲+۱}=۲$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷. اگر $x=۲$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $\frac{۲x}{x(x+۴)}+\frac{}{x^۲+۳x-۴}=$ باشد، آن‌گاه جواب دیگر کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۵ ۴) -۵

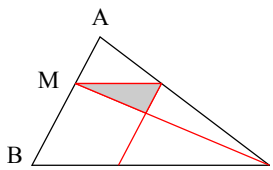
۱۸. اگر k جواب معادله‌ی $\sqrt{۲x-۵}-\sqrt{x+۱}=۱$ باشد، جواب معادله‌ی $\sqrt{x+k}=k$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۱۵ ۴) ۹

۱۹. مجموعه جواب معادلهٔ $\sqrt{۱۶۹-x^۲}=x-۱۷$ کدام است؟

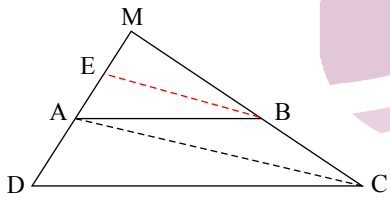
۱) $[-۱۳,۱۳]$ ۲) R ۳) $[-۱۳,۱۷]$ ۴)

۲۰. در شکل مقابل $MB=\frac{۲}{۳}$ ، مساحت مثلث سایه زده چند درصد مساحت متوازی الاضلاع است؟



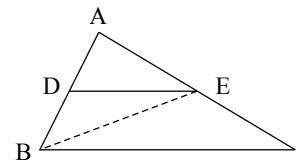
۱) ۲۰ ۲) ۲۴
۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۲۱. در ذوزنقه‌ی $ABCD$ ، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD=۷$ و $AE=۳$ باشد، فاصله‌ی MD کدام است؟



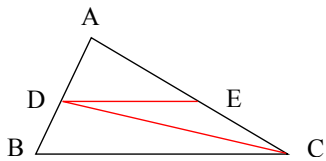
۱) ۱۲ ۲) ۱۲٫۲۵
۳) ۱۲٫۵ ۴) ۱۲٫۷۵

۲۲. در مثلث ABC ، پاره خط DE موازی ضلع BC و $AD=\frac{۴}{۵}BC$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟



۱) ۲ ۲) ۲٫۲۵
۳) ۲٫۵ ۴) ۲٫۷۵

۲۳. در شکل مقابل، مساحت مثلث DEC شصت درصد مساحت مثلث ADE است. مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث ADE است؟



۱) ۱٫۳۶ ۲) ۱٫۴۴
۳) ۱٫۵۶ ۴) ۱٫۶۴

۲۴. مثلثی به اضلاع $a,۴,۵$، با مثلثی به طول اضلاع $b,۷,۹$، متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای عدد a، کدام است؟

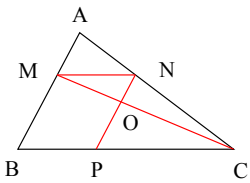
۱) $\frac{۳۶}{۷}$ ۲) $\frac{۴۵}{۷}$ ۳) $\frac{۳۶}{۵}$ ۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۲۵. مثلثی به اضلاع b و a و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ۴ و ۳ متشابه است. دو مثلث قابل انطباق نیستند، بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

۱) ۱۳٫۵ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۷٫۲

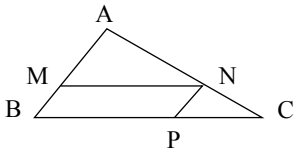
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶. در شکل مقابل $\frac{MB}{} = \frac{۳}{۷}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



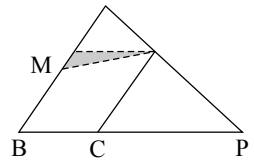
۱) ۶۳ ۲) ۶۰
۳) ۷۰ ۴) ۸۴

۲۷. در شکل مقابل $\frac{MB}{} = \frac{۳}{۲}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۴۸ ۲) ۵۲
۳) ۵۴ ۴) ۵۶

۲۸. در شکل زیر، نقطه‌ی M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC = \frac{۲}{۳}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟



۱) $\frac{۱}{۱۲}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۲۹. درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد. اگر بزرگترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۳۰. اگر $f(x) = \frac{۹^x + ۱}{۳^x}$ باشد، $f(x) - f(-x)$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳^{-x} ۳) ۳^x ۴) صفر

۳۱. با توجه به ماشین $x \to f \to g \to x$ اگر $f(x) = ۳x - ۴$ آن گاه $g(۲)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳۲. در تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + mx & x \geq ۱ \\ ۲mx + ۲ \end{cases}$ مقدار $f(m)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۳. اگر $f(x) = ۲x + ۳$ و $g(f(x)) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰$ باشد، $g(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۴. اگر $f(x) = ۳x - ۱$، نمودار تابع f با دامنه‌ی $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$ چگونه است؟

۱) خط ۲) پاره‌خط ۳) ۴ نقطه ۴) ۳ نقطه

۳۵. اگر $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x}}$ باشد $D_{f^{-۱}}$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۰]$ ۴) $[-۱,۰]$

۳۶. برد وارون تابع $f(x)=۵(\sqrt{۲-x})^{۳}+۱$ کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $[۵,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۲]$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $[۲,۵]$

۳۷. وارون تابع $f(x)=x+\quad x+۱$ کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $y=(\sqrt{x-\frac{۳}{۴}})^{۲}-\frac{۱}{۲}$ ۲) $y=(\sqrt{x+\frac{۳}{۴}}-\frac{۱}{۲})^{۲}$

۳) $y=(\sqrt{x+\frac{۳}{۴}})^{۲}-\frac{۱}{۲}$ ۴) $y=(\sqrt{x-\frac{۳}{۴}}-\frac{۱}{۲})^{۲}$

۳۸. اگر تابع $f=\{(m^{۲}+۲m,۲),(m+۳,۴),(۴-m,۲),(۲,-۲)\}$ معکوس‌پذیر باشد، m چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۹. وارون تابع $f(x)=x^{۲}-۲x+۲\ ,\ x\le ۱$ کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $۱+\sqrt{x-۱}$ ۲) $۱-\sqrt{x-۱}$

۳) $۱+\sqrt{۱-x}$ ۴) $۱-\sqrt{۱-x}$

۴۰. اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ باشد $f^{-۱}(-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۸}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $-\sqrt{۸}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴۱. اگر $f(x)=x+\sqrt{x^{۲}+۳}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۵ ۳) ۵ ۴) ۱

۴۲. اگر $f=\{(۱,۳),(۲,۵)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۵,۱)\}$، مجموعه‌ی $f+۲g$ کدام است؟

۱) $\{(۲,۱۱)\}$ ۲) $\{(۲,۷)\}$ ۳) $\{(۱,۴),(۲,۷)\}$ ۴) $\{(۱,۴),(۲,۱۱)\}$

۴۳. اگر $f=\{(۲,۷),(۳,۱),(۱,۴),(۰,۲)\}$ و $g=\{(۳,۴),(۰,۳),(۴,۲),(۱,۲)\}$ برد تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $\{۵,۶\}$ ۲) $\{۵,۶,۲\}$ ۳) $\{۵,۶,۳\}$ ۴) $\{۶,۵,۴\}$

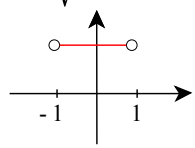
۴۴. اگر $f(x)=x-\sqrt{x^{۲}-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$، دامنه‌ی تعریف تابع $f-g$ کدام است؟

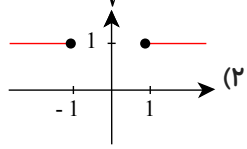
۱) $[-۲,۱]\cup[-۱,۱]$ ۲) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$ ۳) $R-[-۱,۱]$ ۴) $[-۱,۱]-[-۲,۲]$

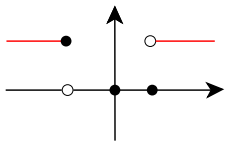
۴۵. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^{۲}-x-۲}-\sqrt{۲-x}$ کدام است؟

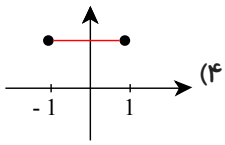
۱) $\{۲\}$ ۲) $[-۱,۲)$ ۳) $(-\infty,۲)$ ۴) $(-\infty,-۱]\cup\{۲\}$

۴۶. اگر $f(x)=x+\sqrt{x^{۲}-۱}$ و $g(x)=x-\sqrt{x^{۲}-۱}$ باشد آن‌گاه نمودار $(f\cdot g)(x)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۷. اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ باشد $Df\times g$ کدام است؟

۱) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$ ۲) $\mathbb{R}-[-۲,+۲]$

۳) $\mathbb{R}-[-۱,+۱]$ ۴)

۴۸. اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{۳x-x^۲}$ باشد دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $[-۲,\frac{۱}{۲}]$ ۳) $[-\frac{۱}{۲},۲]$ ۴) $(۰,۲]$

۴۹. نمودار تابع $y=|x-۲|$ را دو واحد به راست و یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، محور عرض‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰. در نمودار تابع $f(x)=x^۲$ به ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم؛ انتقال ۴ واحد به طرف x های منفی - قرینه نسبت به محور x ها- دو برابر کردن برد- انتقال ۳ واحد به طرف y های منفی- معادله‌ی نمودار حاصل کدام است؟

۱) $y=۲x^۲-۸x-۱۱$ ۲) $y=۲x^۲-۱۶x-۲۹$

۳) $y=-۲x^۲-۱۶x-۳۵$ ۴) $y=-۲x^۲+۱۶x-۳۵$

۵۱. نقطه‌ی A بر روی دایره‌ای به شعاع ۳ واحد قرار دارد متحرکی از نقطه‌ی A در خلاف جهت مثلثاتی ۴۲۰ درجه چرخیده و در نقطه‌ی M قرار گرفته است متحرک دیگر از نقطه‌ی A در جهت مثلثاتی ۲۱۰ درجه چرخیده و در نقطه‌ی N قرار گرفته است. طول قوس MN چند واحد است؟

۱) ۴٫۰۸ ۲) ۴٫۲۹ ۳) ۴٫۷۱ ۴) ۳٫۹۶

۵۲. اگر $\frac{-\pi}{۶}<x<\frac{\pi}{۶}$ و $\sin ۳x=m-۱$ باشد مقادیر m در کدام فاصله قرار دارد؟

۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۰,۱]$ ۳) $(-۱,\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-۱,۰)$

۵۳. با فرض $\tan ۲۲^\circ=\frac{۲}{۵}$، حاصل عبارت $\frac{\sin(-۱۱۲^\circ)+\sin ۱۵۸^\circ}{\cos(۲۰۲^\circ)}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۵۴. اگر $\tan\theta=۰٫۲$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۱٫۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۵. هر گاه $\tan ۱۵^\circ=a$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۵۵^\circ-\cos ۱۶۵^\circ}{۲\sin ۷۵^\circ+۳\cos ۱۰۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{}{۲-۳a}$ ۲) $\frac{}{۲-۳a}$ ۳) $\frac{۱}{۵}(a-۱)$ ۴) $\frac{۱}{۵}(۱-a)$

۵۶. حاصل عبارت A کدام است؟ $(\cos\theta\neq ۰)$

$$A=(۱+\sin\theta)(\frac{۱}{\cos\theta}+\tan\theta)(۱-\sin\theta)^۲$$

۱) $\tan\theta\sin\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\frac{۱+\sin^۲\theta}{\cos\theta}$ ۴) $\cos^۳\theta$

۵۷. حاصل عبارت زیر همواره برابر با کدام گزینه است؟

$$۱-\sin\alpha\cdot\cos\alpha=?$$

۱) $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha$ ۲) $\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha$

۳) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲+\sin\alpha\cos\alpha$ ۴) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲$

۵۸. حاصل عبارت $A=\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha+(\sqrt{۲}\sin\alpha\cos\alpha)^۲$ همواره کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $۱+\tan^۲\alpha$

۵۹. اگر α زاویه‌ای در دایره‌ی مثلثاتی، $\cot\alpha=\sqrt{n-۱}$ و $\cos\alpha=\sqrt{۱-m^۲}$ باشد، رابطه‌ی بین m و n کدام است؟

(عبارت‌ها تعریف شده‌اند.)

۱) $m=n^۲$ ۲) $m=n^۳$ ۳) $n=m^۳$ ۴) $n=m^۲$

۶۰. حاصل عبارت $۳\sin ۲۰^\circ-۳\cos(۲۵۰^\circ)+\cos(-۱۱۰^\circ)+۲\sin(-۳۴۰^\circ)+\sin(۲۰۰^\circ)$ کدام است؟

۱) $-۶\sin ۲۰^\circ$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $-۴\sin ۲۰^\circ$

۶۱. اگر $\tan ۱۵^\circ=a$ باشد، حاصل $\frac{۳\cos ۱۶۵^\circ-۲\sin ۲۸۵^\circ}{۳\sin ۳۴۵^\circ-۴\cos ۲۵۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{a}$ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{۱}{a}$ ۴) $-۲a$

۶۲. اگر $\cot\alpha=۲$ باشد، حاصل $\frac{\sin^۴\alpha+\cos^۳\alpha\sin\alpha}{۴\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}$ عبارت کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) ۷ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۶۳. حاصل $\tan ۳^\circ\times\tan ۱۷^\circ\times\tan ۵۳^\circ\times\tan ۸۷^\circ\times\tan ۷۳^\circ\times\tan ۳۷^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶۴. حاصل عبارت $\cos^{-۱}\frac{۱}{۲}+\cos^{-۱}\frac{۱}{۴}+\cos^{-۱}\frac{۱}{۸}+\cos^۳\frac{۱۲\pi}{۱۵}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۶۵. اگر $\frac{}{۳\sin ۳۰۵-\cos ۳۲۵}=a$ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) $\tan ۳۵$ ۲) $\tan ۵۵$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶۶. اگر زاویه‌ی θ در موقعیت استاندارد باشد، به طوری که نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $(-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳},\frac{۱}{۳})$ قطع کند، مقدار $A=\frac{۱+\cot^۲\theta}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)}$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) -۲۷ ۳) $\frac{۲۷}{۲}$ ۴) $\frac{-۲۷}{۲}$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

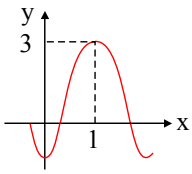
۶۷. حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$**، با فرض** $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$**، کدام است؟**

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$ ۲) $-\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۶۸. حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ}$ **با فرض** $\tan ۲۰^\circ = ۰/۴$**، کدام است؟**

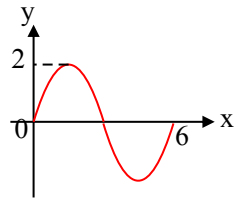
۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $-\frac{}{۸}$

۶۹. اگر قسمتی از نمودار تابع $y = ۱ + a\ \cos\ b\pi x$ **به صورت مقابل باشد،** a **کدام است؟**



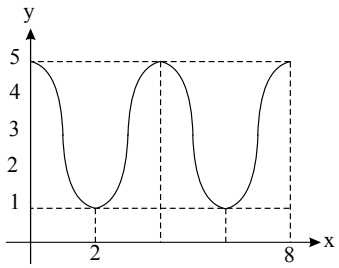
۱) -۲ ۲) ۲
۳) -۱ ۴) -۳

۷۰. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a\ \sin(b\pi x)$ **است.** $a+b$ **کدام است؟**



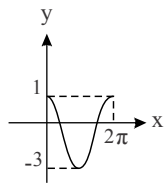
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

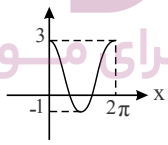
۷۱. نمودار معادله‌ی $y = a\cos b\pi x + ۳$ **مطابق شکل زیر است؛ حاصل** $a+b$ **کدام گزینه می‌تواند باشد؟**

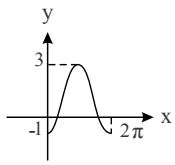


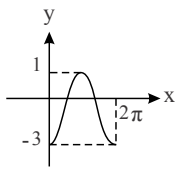
۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$
۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) ۱

۷۲. $y = -۲\cos x + ۱$**. در بازهٔ** $[۰, ۲\pi]$ **کدام است؟**

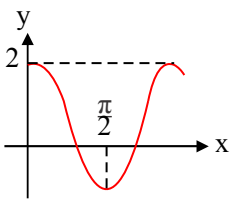
۱)


۲)


۳)


۴)


۷۳. اگر نمودار تابع $y = a\cos bx$ **به صورت روبه‌رو باشد، کدام مقدار برای** $a+b$ **ممکن است؟**



۱) ۳ ۲) ۲
۳) ۶ ۴) ۴

۷۴. نمودار وارون تابع $f(x) = ۲(۲^{x-۱} - ۱)$ **از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟**

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۵. لگاریتم عددی در پایه‌ی ۴ برابر $\frac{۱۵}{۴}$ است. لگاریتم مجذور معکوس این عدد در پایه‌ی ۸ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) -۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) -۵

۷۶. از دستگاه معادلات $\begin{cases} \log(x^۲+۴y^۲)=۲\log\sqrt{۲}+\log ۲۳ \\ \log x+\log y=۲\log ۳-\log ۲ \end{cases}$، حاصل لگاریتم $x+۲y$ در مبنای ۱۶ کدام است؟

۱) ۰٫۵ ۲) ۱٫۲۵ ۳) ۰٫۷۵ ۴) ۱٫۵

۷۷. مجموع مربعات جواب‌های معادله‌ی $\log_{۲}^{۴x^۲+۸x+۴}=\log\frac{\sqrt{۲x+۸}}{\sqrt{۲}}+۳$ برابر است با:

۱) ۲۵ ۲) ۳۴ ۳) ۹ ۴) ۲۹

۷۸. نمودار دو تابع با معادله‌های $y=\log(x^۲-۱)$ و $y=۱+\log(x+۱)$ یکدیگر را در چند نقطه قطع می‌کنند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۹. معادله‌ی لگاریتمی $\log(x+۲)+\log(x^۲-۲x+۱)=\frac{۱}{۲}\log(x^۲-۲x+۱)+۲\log\sqrt{x-۲}=\log(۳x+۱)$ را در نظر بگیرید اگر α ریشه‌ی این معادله باشد، حاصل $\log_{۵}^{(۴\alpha+۱۳)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۰. حاصل $[x]+[۲x]+[۳x]$ به ازای $x=\log ۸$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۱. حاصل $[\log_{۲}^{۲+\sqrt{۳}}-\log_{۲}^{۲-\sqrt{۳}}]$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۲. در بازه‌ی (a,b) نامعادله‌ی $\log_{۲}^{x}<\log_{۵}^{x}$ برقرار است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $\log ۳$ ۴) ۱۰

۸۳. از دو معادله‌ی دومجهولی $۳^{۲x+y}=۹\times ۳^{x-y}$ و $\log(x+۲y)=۱+\log y$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱٫۲ ۲) ۱٫۴ ۳) ۱٫۵ ۴) ۱٫۶

۸۴. از معادله‌ی لگاریتمی $\log_{۳}(x+۲)-\log_{۳}(۲x^۲+۱)=۱$، مقدار لگاریتم $(۲x-۱)$ در پایه‌ی ۸، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

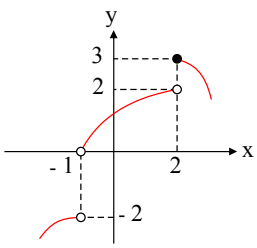
۸۵. اگر $\log ۵=۳k$ باشد، $\log\sqrt[۳]{۱٫۶}$ کدام است؟

۱) $۱-۴k$ ۲) $۲-۵k$ ۳) $۱-۲k$ ۴) $۱-k$

۸۶. اگر $\log ۲=k$ باشد حاصل $۲\log(۱+\sqrt{۵})+\log(۶-۲\sqrt{۵})$ کدام است؟

۱) $۲+۴k$ ۲) $۴k$ ۳) $۱+k$ ۴) $۲k$

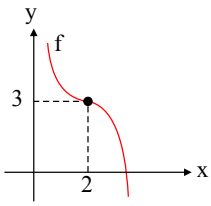
۸۷. اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(۱-x)$ کدام است؟



۱) -۱
۲) -۲
۳) ۲
۴) صفر

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۸. باتوجه به نمودار f، حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)-3}$ کدام است؟



۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) ۱
۴) ۳

۸۹. حد راست $f(x)=\frac{1}{2x+[x]}$ چه‌قدر از حد چپ آن در $x=0$ بیش‌تر است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) صفر
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

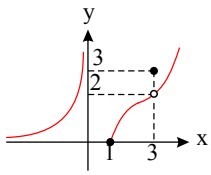
۹۰. اگر $f(x)=x^2[x]$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}$ کدام است؟([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۰
۲) -4
۳) -2
۴) ۲

۹۱. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}-4 & x\geq 2\\ k+[x]\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد، k کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

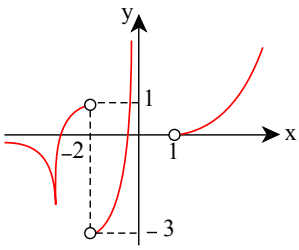
۱) $-\frac{9}{4}$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) $-\frac{1}{4}$
۴) $\frac{9}{4}$

۹۲. با توجه به نمودار تابع $f(x)$، حاصل کدام یک از حدهای زیر صحیح نیست؟



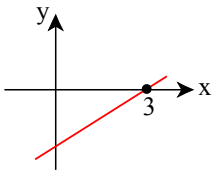
۱) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=3$
۲) $f(x)=0$
۳) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$
۴) $f(x)=0$

۹۳. اگر نمودار به صورت زیر باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



۱) وجود ندارد: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$
۲) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$
۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$
۴) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=-3$

۹۴. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x+b}{} & ,x=a\\ -5\end{cases}$، به صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



۱) -4
۲) -5
۳) -7
۴) -8

۹۵. اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x+2}{ax^2+2x+b}=2$ باشد، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) -1
۲) ۱
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $-\frac{1}{2}$

۹۶. اگر $f(x+1)=\frac{1}{x^2-1}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) -1
۴) صفر

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-ax+۱ \\ x+b \end{cases}\quad , \quad |x|>۱$ **در تمام نقاط حد دارد. مقدار** $۲b-a$ **کدام است؟**

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) ۵ ۴) ۴

۹۸. به ازای کدام مقدار a**، تابع با ضابطه‌ی** $f(x)=\begin{cases} \sin \\ a+\cos^{۲}\frac{\pi x}{۳۶} \end{cases}\quad ; \quad x>۶$ **، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ پیوسته است؟**

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۹. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}(\frac{۶}{x^{۲}-۲x}-\frac{\quad}{x-۲})$ **، کدام است؟**

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۰۰. به ازای کدام مقدار a **تابع** $f(x)=\begin{cases} \frac{\quad}{\quad} \\ ax+۱ \end{cases}\quad , \quad x\geq ۲$ **در** $x=۲$ **پیوسته است؟ (**$[\,]$**، نماد جزء صحیح است.)**

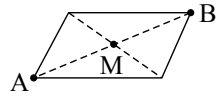
۱) هر مقدار a ۲) هیچ مقدار a ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱. گزینه ۳

مختصات نقطه‌ی A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه B بدست آید.

$$\begin{cases} ۳ \\ -۲ \end{cases} \begin{cases} ۳y+۴x=۸ \end{cases} \rightarrow -۱۷x=۱۷ \Rightarrow x=-۱ \ , \ y=۴ \Rightarrow B\left|\begin{matrix}-۱\\ ۴\end{matrix}\right.$$



می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳ \quad , \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۶+۴}{۲}=۵$$

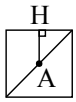
۲. گزینه ۲ هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می‌توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم.

$$S=\frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$

$$=\frac{۱}{۲}|۲(۰-۲)+۳(۲-۵)+۰(۵-۰)|=\frac{۱}{۲}|-۴-۹+۰|=\frac{۱۳}{۲}=۶٫۵$$

۳. گزینه ۴

فاصله‌ی وسط یک قطر مربع از یکی از اضلاع آن برابر نصف ضلع مربع است.



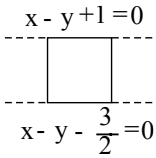
$$A\left|\begin{matrix}۳\\ -۱\end{matrix}\right. \ , \ x-۲y+۵=۰ \ \rightarrow \ AH=\text{نصف ضلع مربع}=\frac{|۱+۴|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}} \rightarrow \text{ضلع مربع}=\frac{۲۰}{\sqrt{۵}}$$

$$\text{مساحت مربع}=(\text{ضلع مربع})^۲=(\frac{۲۰}{\sqrt{۵}})^۲=\frac{۴۰۰}{۵}=۸۰$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی $AH=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به‌دست می‌آید.

۴. گزینه ۳

شیب هر دو خط یك می‌باشند یعني این دو خط موازیند یعني دو ضلع مقابل یك مربع هستند و فاصله‌ی بین این دو، ضلع مربع را می‌دهد.



(در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند)

$$\text{ضلع مربع}=d=\frac{|c-\ |}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱-(-\frac{۳}{۲})|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

$$S_{\text{مربع}}=(\text{ضلع})^۲=(\frac{۵}{۲\sqrt{۲}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-\ |}{\sqrt{a}^۲+b^۲}$ استفاده می‌کنیم.

۵. گزینه ۱ اگر x' و x'' ریشه های معادله باشند داریم:

$$x'+x''=-\frac{\ }{a}=\frac{\ }{m} \ , \ x'x''=\frac{\ }{a}=\frac{۵}{m}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فرض مسأله: $x'^{۲}+x''^{۲}=۶\Rightarrow (x'+x'')^{۲}-۲x'x''=۶\Rightarrow (\quad)^{}-\quad-۶=۰$

$$\Rightarrow \frac{m^{۲}+۶m+۹}{m^{۲}}-\frac{۱۰}{m}-۶=۰\xrightarrow{\times m^{۲}} m^{۲}+۶m+۹-۱۰m-۶m^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow ۵m^{۲}+۴m-۹=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases} m=۱\xrightarrow{\text{معادله}} x^{۲}-۴x+۵=۰ : \quad \Delta=۱۶-۲۰<۰ \text{ غ ق ق} \\ m=-\frac{\cdot}{\cdot}\rightarrow \text{با توجه به گزینه ها } \Delta>۰ \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

۶. گزینه ۱

$x^{۳}+(a-۱)x^{۲}+(۴-a)x-۴=۰$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x=۱$ است و معادله بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} x^{۳}+(a-۱)x^{۲}+(۴-a)x-۴ & \\ \hline -x^{۳}+x^{۲} & x^{۲}+ax+۴ \\ \hline ax^{۲}+(۴-a)x-۴ & \\ -ax^{۲}+ax & \\ \hline ۴x-۴ & \\ -۴x+۴ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-۱)(x^{۲}+ax+۴)=۰$ تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله $x=۱$ است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta>۰\rightarrow b^{۲}-۴ac>۰\rightarrow a^{۲}-۱۶>۰\rightarrow a^{۲}>۱۶\rightarrow a>۴ \text{ یا } a<-۴ \quad (I)$$

$$S>۰\rightarrow -\frac{}{a}>۰\rightarrow -a>۰\rightarrow a<۰ \quad (II)$$

$$P>۰\rightarrow \frac{}{a}>۰\rightarrow ۴>۰ \text{ همواره برقرار است} (III)$$

از اشتراک I , II , III به جواب $a<-۴$ می‌رسیم.

۷. گزینه ۴ می‌دانیم برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$۲x^{۲}-۳x-۱=۰\xrightarrow[\text{جای } a,c \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^{۲}-۳x+۲=۰\xrightarrow[x\rightarrow x+۱]{\text{یک واحد کمتر}} -(x+۱)^{۲}-۳(x+۱)+۲=۰$$

$$\rightarrow -x^{۲}-۲x-۱-۳x-۳+۲=۰\rightarrow x^{۲}+۵x+۲=۰$$

۸. گزینه ۲

$$(x^{۲}+x)^{۲}-۱۸(x^{۲}+x)+۷۲=۰\xrightarrow{x^{۲}+x=A} A^{۲}-۱۸A+۷۲=۰\Rightarrow (A-۱۲)(A-۶)=۰$$

$$A=۱۲\Rightarrow x^{۲}+x-۱۲=۰\xrightarrow{\Delta>۰} \alpha+\beta=-\frac{}{a}=-۱$$

$$\xrightarrow{\Delta>۰}\Rightarrow \alpha+\beta+\alpha'+\beta'=-۲$$

۹. گزینه ۲ معادله را به صورت $mx^{۲}+۳x+m^{۲}-۲=۰$ مرتب می‌کنیم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$x' = \frac{۱}{x''} \Rightarrow x'x'' = ۱ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow \frac{m^۲ - ۲}{m} = ۱ \Rightarrow m^۲ - ۲ = m \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰$$

$$m = ۲ \xrightarrow{\text{معادله}} ۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۱۶ = -۷ < ۰$$ غیر قابل قبول

$$m = -۱ \xrightarrow{\text{معادله}} -x^۲ + ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۴ = ۵ > ۰$$ قابل قبول

۱۰. گزینه ۲

با جایگذاری a در معادله خواهیم داشت:

$$a+۲ + \frac{۲}{a} = a^۲ - a \Rightarrow \frac{a^۲ - a + ۲a + ۴}{a(a+۲)}$$

$$= \text{———}$$

$$\Rightarrow \frac{a^۲ + a + ۴}{a(a+۲)} = \text{———} \xrightarrow{a \neq ۰ , ۱} \frac{a^۲ + a + ۴}{a+۲} = ۴$$

$$\xrightarrow{a \neq -۲} a^۲ + a + ۴ = ۴a + ۸ \Rightarrow a^۲ - ۳a - ۴ = ۰ \Rightarrow (a-۴)(a+۱) = ۰ \Rightarrow a = ۴ , -۱$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. زیرا مخرج هیچ‌کدام از کسرها را صفر نمی‌کنند.

۱۱. گزینه ۲

$$\sqrt{۲x+۵} = ۵ + ۲x \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲x + ۵ = ۴x^۲ + ۲۰x + ۲۵ \rightarrow ۴x^۲ + ۱۸x + ۲۰ = ۰$$

$$\rightarrow ۲x^۲ + ۹x + ۱۰ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۸۱ - ۸۰ = ۱ \rightarrow x = \frac{-۹ \pm ۱}{۴} = -۲ , -\frac{۵}{۲}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا در معادله‌ی اصلی (اولیه) صدق می‌کنند.

۱۲. گزینه ۱ $x = ۰$ جواب معادله است بنابراین در معادله صدق می‌کند.

$$x = ۰ \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{a}{۶} + \frac{۱}{۲} = a+۲ \xrightarrow{\times ۱۲} ۲a + ۶ = ۳a + ۶ \rightarrow a = ۰$$

۱۳. گزینه ۱ $x^۲ - ۳x$ را برابر A در نظر می‌گیریم.

$$\frac{۱}{A-۲} + \frac{۱}{A+۲} = \frac{۱}{A} \xrightarrow{\times A(A+۲)(A-۲)} A(A+۲) + A(A-۲) = (A+۲)(A-۲)$$

$$\rightarrow A^۲ + ۲A + A^۲ - ۲A = A^۲ - ۴ \rightarrow A^۲ = -۴$$: ریشه‌ی حقیقی ندارد

بنابراین معادله‌ی داده شده دارای جواب نمی‌باشد.

۱۴. گزینه ۲ ریشه‌های یک معادله در معادله صدق می‌کند، لذا کافیست $x = ۱$ را در معادله قرار دهیم.

$$\frac{۱}{x+۲} + \frac{۶}{k} = \text{———} \xrightarrow{x=۱} \frac{۱}{۳} + \frac{۶}{k} = -۳ \xrightarrow{\times ۳k} k + ۱۸ = -۹k$$

$$\rightarrow -۱۰k = ۱۸ \rightarrow k = -۱٫۸$$

۱۵. گزینه ۴ ابتدا جرم مادهٔ حل شده را به دست می‌آوریم: $\frac{m}{۵۰} = \frac{۶۰}{۱۰۰} \Rightarrow m = ۳۰ gr$

وقتی x گرم از مادهٔ حل شدنی به محلول اضافه می‌شود، غلظت آن از تابع گویای $f(x) = \text{———}$ به‌دست می‌آید.

$$\frac{۸۰}{۵۰+x} \Rightarrow \frac{۳۰+x}{۸۰} = \frac{۸۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۳۰+x}{۸۰} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow ۱۵۰ + ۵x = ۲۰۰ + ۴x \Rightarrow x = ۵۰ gr$$

۱۶. گزینه ۱

$$\underbrace{x+\frac{۱}{x}}+\frac{}{x^۲+۱}=۲\rightarrow\frac{x^۲+۱}{x}+\frac{}{x^۲+۱}=۲$$

(هرگاه مجموع دو عدد که عکس یکدیگر می‌باشند برابر ۲ باشد حتماً آن دو عدد، یک می‌باشند).

$$\frac{x^۲+۱}{x}=۱\rightarrow x^۲+۱=x\rightarrow x^۲-x+۱=۰\rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=۱-۴=-۳<۰\rightarrow$$

ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۱۷. گزینه ۱ $x=۲$ در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{۵-m}{۴}+\frac{}{۲\times۶}=\frac{۲}{۴+۶-۴}\Rightarrow\frac{۵-m}{۴}+\frac{m-۲}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۱۵-۳m+m-۳}{۱۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow۱۲-۲m=۴\Rightarrow۲m=۸\Rightarrow m=۴$$

توجه کنید که $x^۲+۳x-۴=(x+۴)(x-۱)$؛ با جایگذاری $m=۴$ در معادله، آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲x}+\frac{۱}{x(x+۴)}=\frac{}{(x+۴)(x-۱)}\Rightarrow\frac{}{۲x(x+۴)}=\frac{}{(x+۴)(x-۱)}$$

$$\rightarrow(x+۶)(x-۱)=۲x^۲\Rightarrow x^۲+۵x-۶=۲x^۲\Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰$$

$$\rightarrow(x-۳)(x-۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=۲\end{cases}$$

۱۸. گزینه ۱

برای حل ابتدا یکی از رادیکال‌ها را به طرف دوم منتقل می‌نماییم.

$$\sqrt{x+۱}=۱+\sqrt{۲x-۵}\xrightarrow{()^۲}x+۱=۱+۲x-۵+۲\sqrt{۲x-۵}$$

$$\rightarrow-x+۵=۲\sqrt{۲x-۵}\xrightarrow{()^۲}x^۲-۱۰x+۲۵=۴(۲x-۵)$$

$$\rightarrow x^۲-۱۰x+۲۵=۸x-۲۰\rightarrow x^۲-۱۸x+۴۵=۰$$

$$(x-۳)(x-۱۵)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=۱۵\end{cases}$$

غ ق ق

حال باید معادله‌ی نهائی را بسازیم.

$$\sqrt{x+k}=k\xrightarrow{k=۳}\sqrt{x+۳}=۳\xrightarrow{()^۲}x+۳=۹\rightarrow x=۶$$

۱۹. گزینه ۴ یکی روش‌های حل معادلات رادیکالی تعیین دامنهٔ تابع می‌باشد.

$$\sqrt{۱۶۹-x^۲}=x-۱۷\xrightarrow[\text{زوج نامنفی است}]{\text{رادیکال فرجه}}x-۱۷\geq۰\rightarrow x\geq۱۷(I)$$

$$۱۶۹-x^۲\geq۰$$

$$x^۲\leq۱۶۹\rightarrow|x|\leq۱۳\rightarrow-۱۳\leq x\leq۱۳(II)$$

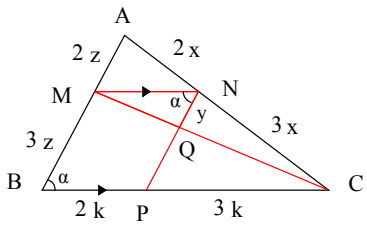
$$(I)\cap(II)\rightarrow\varnothing$$

معادله فاقد ریشه است.

۲۰. گزینه ۱

فرض کنیم $AM=۲z$ و $MB=۳z$ باشد، حال طبق قضیه‌ی تالس $AN=۲x$ و $NC=۳x$ خواهد بود. (چون $BMNP$ متوازی الاضلاع است و $MN||BC$). از طرفی در مثلث AMC ضلع NQ هم، با AM موازی است، پس اگر فرض کنیم

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$NQ = y$ داریم:

$$\frac{y}{۲} = \frac{}{۲x+۳x} \Rightarrow y = \frac{۶}{۵}$$

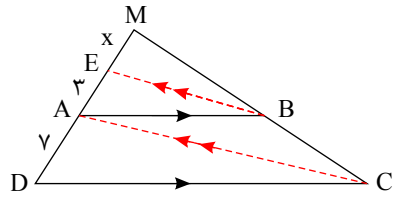
هم چنین باز بر طبق تالس:

$$\frac{}{NA} = \frac{}{BP} \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{}{BP} \Rightarrow \begin{cases} BP = ۲k = MN \end{cases}$$

حال خواهیم داشت:

$$\frac{}{S_{BMNP}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times MN \times NQ \times \sin\alpha}{MB \times BP \times \sin\alpha} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۲k \times \frac{۶}{۵} \times \sin\alpha}{۳ \times ۲k \times \sin\alpha} = \frac{۱}{۵} = ۲۰\%$$

۲۱.گزینه ۲ کافی است دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم:

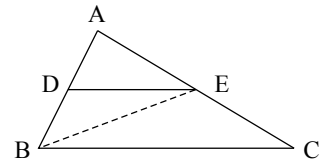


$$\begin{cases} \overset{\Delta}{M\,A\,C} : BE \| AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{AE} = \frac{}{BC} \Rightarrow \frac{}{AE} = \frac{}{AD} \\ \overset{\Delta}{MD\,C} : AB \| CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{}{AD} = \frac{}{BC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{}{۷} \Rightarrow ۷x = ۳x + ۹ \Rightarrow ۴x = ۹ \Rightarrow x = ۲٫۲۵$$

در نتیجه: $MD = ۲٫۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲٫۲۵$

۲۲.گزینه ۲ در دو مثلث با ارتفاع های یکسان نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست.



$$\frac{}{S_{AEB}} = \frac{}{AE} = \frac{}{AD} = \frac{۵}{۴}$$

$$\frac{}{S_{AEB}} = \frac{}{AB} = \frac{۵}{۹}$$

دو رابطه‌ی فوق را بر هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{}{\frac{}{S_{AEB}}} = \frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{۵}{۹}} \Rightarrow S_{EBD} = \frac{۹}{۴} = ۲٫۲۵$$

۲۳.گزینه ۳

دو مثلث DEC , ADE دارای ارتفاع یکسان از رأس D می‌باشند. اگر ارتفاع رسم شده از D برابر h باشد داریم:

$$\left.\begin{aligned} S_{DEC} &= \frac{EC \cdot h}{۲} \\ S_{ADE} &= \frac{AE \cdot h}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{ADE} = AE = \frac{۶۰}{۱۰۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow AE = \frac{۸}{۵} \quad (I)$$

چون $BC \| DE$ پس دو مثلث ABC و ADE متشابهند و نسبت تشابه آنها $\frac{۸}{}$ است.

$$S_{ADE} = (\ AE)^۲ = \frac{}{} \xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}} S_{ADE} = \frac{۳۹}{۲۵} = ۱٫۵۶$$

۲۴.گزینه ۲ چون بیشترین مقدار ممکن برای عدد a را می‌خواهیم، لذا a با بزرگ‌ترین ضلع از مثلث دوم متناسب است. حالات زیر را در نظر می گیریم:

$$b<۷<۹ \Rightarrow \frac{a}{۹}=\frac{}{۷}=\frac{}{b} \Rightarrow a=\frac{۴۵}{۷}, b=\frac{۲۸}{۵}$$

$$۷<b<۹ \Rightarrow \frac{a}{۹}=\frac{}{b}=\frac{}{۷} \Rightarrow a=\frac{۳۶}{۷}, b=\frac{۳۵}{۴}$$

$$۷<۹<b \Rightarrow \frac{}{b}=\frac{۵}{۹}=\frac{}{۷} \Rightarrow$$ غیر قابل قبول

بنابراین بیشترین مقدار a برابر با $\frac{۴۵}{۷}$ می‌باشد.

۲۵.گزینه ۲

چون دو مثلث قابل انطباق نمی‌باشند یعنی دو مثلث مساوی نیستند و در نتیجه در دو مثلث، اضلاع به طول ۳ نمی‌توانند متشابه باشند

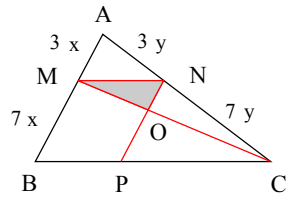
اگر فرض کنیم $a>b$ است یکی از این دو حالت رخ می‌دهد.

$$\frac{۳}{۴}=\frac{a}{۵}=\frac{b}{۳} \rightarrow a=\frac{۱۵}{۴}, b=\frac{}{} \rightarrow \text{محیط}=۳+\frac{۹}{۴}+\frac{۱۵}{۴}=۹$$

$$\frac{۳}{۵}=\frac{a}{۴}=\frac{b}{۳} \rightarrow a=\frac{۱۲}{۵}, b=\frac{}{} \rightarrow \text{محیط}=۳+\frac{۱۲}{۵}+\frac{۹}{۵}=۷/۲$$

که بیشترین محیط برابر ۹ است.

۲۶.گزینه ۳ از فرض تست و قضیه‌ی تالس شکل زیر را نتیجه می‌گیریم.



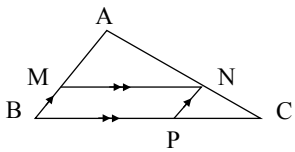
$$ON||AM \Rightarrow \frac{}{CA}=\frac{}{AM} \Rightarrow \frac{}{۱۰y}=\frac{}{۳x} \Rightarrow ON=\frac{۲۱}{۱۰}x$$

$$\frac{}{S_{AMN}}=\frac{\frac{۱}{۲}ON\times MN\sin\hat{}}{\frac{۱}{۲}AM\times MN\sin\hat{M}} \xrightarrow{N=M} \frac{S_{OMN}}{S_{AMN}}=\frac{}{AM}=\frac{\frac{۲۱}{۱۰}x}{۳x}=\frac{۷}{۱۰}$$

$$=۷۰\%$$

۲۷.گزینه ۱

$MNPB$ متوازی‌الاضلاع است، بنابراین:



$$MN||BC \ , \ NP||AB$$

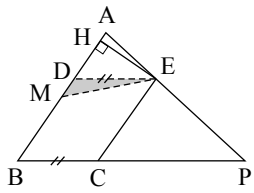
$$\frac{}{MB}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \text{ترکیب در مخرج} \Rightarrow \frac{}{AB}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{}{AB}=\frac{۲}{۵} \quad (۱)$$

$$MN||BC \Rightarrow \frac{}{BC}=\frac{}{AB}=-\xrightarrow{MN=BP} \frac{BP}{BC}=\frac{۳}{۵} \quad (۲)$$

$$\Delta ABC \quad =\frac{MB\times BP\times\sin\hat{B}}{\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin\hat{B}} \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{\frac{۲}{۵}AB\times\frac{۳}{۵}BC}{\frac{۱}{۲}AB\times BC}=\frac{۱۲}{۲۵}=۰/۴۸=۴۸\%$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۸. گزینه ۲



$$\triangle PEC \sim \triangle APB \rightarrow \frac{S_{\triangle PEC}}{S_{\triangle APB}} = \left(\frac{PE}{PB}\right)^{۲} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle APB \rightarrow \frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle APB}} = \left(\frac{AE}{BP}\right)^{۲} = \left(\frac{AE}{BP}\right)^{۲} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲} = \frac{۱}{۹}$$

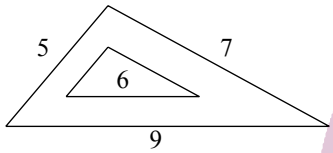
$$\left.\begin{array}{l} S_{\triangle DEM} = \frac{۱}{۲} \times DM \times HE \\ S_{DECB} = BE \times HE = ۲DM \times HE \end{array}\right\} \rightarrow S_{\triangle DEM} = \frac{۱}{۴} S_{DECB}$$

$$S_{\triangle DEM} = \frac{۱}{۴}\left(S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ECP}\right) = \frac{۱}{۴}\left(S_{\triangle ABP} - \frac{۱}{۹} S_{\triangle ABP} - \frac{۱}{۹} S_{\triangle ABP}\right) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۷}{۹} S_{\triangle ABP}\right)$$

$$= \frac{۷}{۳۶} S_{\triangle ABP}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle DEM}}{S_{\triangle ABP}} = \frac{۱}{۹}$$

۲۹. گزینه ۳ دو مثلث با یکدیگر متشابه هستند و اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر را S و مساحت مثلث کوچک‌تر را S' بنامیم، داریم:



$$\rightarrow \frac{S}{S'} = \underbrace{K}_{\text{نسبت تشابه}} \rightarrow \frac{S}{S'} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۹}{۴}$$

$$\frac{\text{مساحت محدود به دو مثلث}}{\text{مساحت مثلث کوچک‌تر}} = \frac{S}{S'} \overset{\text{تفکیک}}{=\!=\!=} \frac{S}{S'} - ۱ = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

۳۰. گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{+۱}{۳^x} = \frac{۱}{۳^x} + \frac{۱}{۳^x} = ۳^x + ۳^{-x} \\ f(-x) = ۳^{-x} + ۳^x \end{array}\right\} \rightarrow f(x) - f(-x) = ۰$$

۳۱. گزینه ۱ ماشین داده شده تعریف $g(f(x))$ می‌باشد.

$$g(f(x)) = x \Rightarrow g(۳x - ۴) = x \xrightarrow{\qquad} g(۲) = ۲$$

۳۲. گزینه ۴

در توابع چند ضابطه‌ای برای تابع بودن نباید دامنه‌ی مشترکی بین ضابطه‌ها وجود داشته باشد در صورت وجود، باید به ازای دامنه‌های مشترک ضابطه‌ها نیز با هم برابر باشند.

$$\Rightarrow ۱ + m = ۲m + ۲ \Rightarrow m = -۱ \text{ شرط تابع بودن}$$

$$\Rightarrow f(-۱) = (-۱)^{۲} + (-۱)(-۱) = ۱ + ۱ = ۲$$

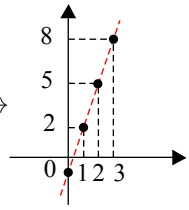
۳۳. گزینه ۲

$$g(f(x)) = ۸x^{۲} + ۲۲x + ۲۰ \rightarrow g(۲x + ۳) = ۸x^{۲} + ۲۲x + ۲۰$$

$$\xrightarrow{۲x+۳=\frac{۱}{۲} \rightarrow x = \frac{-۵}{۴}} g\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۸\left(\frac{۲۵}{۱۶}\right) + ۲۲\left(\frac{-۵}{۴}\right) + ۲۰ \rightarrow g\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۲۵}{۲} - \frac{۵۵}{۲} + ۲۰ = ۵$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۴. گزینه ۳

$x=۳ \rightarrow f(۳)=۸$ $\rightarrow$  $\rightarrow$ شکل، شامل ۴ نقطه است.

۳۵. گزینه ۱ برای تعیین $D_{f^{-۱}}$ کافیست Rf را تعیین نمائیم.

$$f(x)=\overline{۱-\sqrt{\overline{۱-x}}}$$

$$x\in(-\infty,+\infty)\xrightarrow{\times(-)}(-\infty,+\infty)\xrightarrow{+۱}\sqrt{۱-x}\in(-\infty,+\infty)\xrightarrow{\surd}$$

$$\sqrt{۱-x}\in[۰,+\infty)\xrightarrow{\times(-)}-\sqrt{۱-x}\in(-\infty,۰]\xrightarrow{+۱}۱-\sqrt{۱-x}\in(-\infty,۱]\xrightarrow{\surd}$$

$$\sqrt{۱-\sqrt{۱-x}}\in[۰,۱]\rightarrow Rf=[۰,۱]=D_{f^{-۱}}$$

۳۶. گزینه ۲ برد تابع وارون همان دامنه‌ی تابع اصلی می‌باشد، پس کافیست دامنه‌ی f را تعیین نمائیم.

$$f(x)=۵(\sqrt{۲-x})^{۳}+۱\rightarrow Df:\ ۲-x\geq ۰\rightarrow x\leq ۲$$

$$= \quad =(-\infty,۲]$$

۳۷. گزینه ۴ ابتدا بهتر است عبارت به فرم مربع کامل تبدیل کنیم.

$$f(x)=x+\sqrt{x}+۱\rightarrow f(x)=(\sqrt{x})^{۲}+\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}$$

$$\rightarrow y=(\sqrt{x}+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\text{وارون}}x=(\sqrt{y}+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}$$

$$\rightarrow(\sqrt{y}+\frac{۱}{۲})^{۲}=x-\frac{۳}{۴}\rightarrow|\sqrt{y}+\quad|=\sqrt{x-\frac{۳}{۴}}$$

$$+\ \text{همواره}$$

$$\rightarrow\sqrt{y}+\frac{۱}{۲}=\sqrt{x-\frac{۳}{۴}}\rightarrow\sqrt{y}=\sqrt{x-\frac{۳}{۴}}-\frac{۱}{۲}\rightarrow y=(\sqrt{x-\frac{۳}{۴}}-\frac{۱}{۲})^{۲}=f^{-۱}(x)$$

۳۸. گزینه ۳ شرط معکوس‌پذیری، یک به یک بودن تابع f می‌باشد. پس معادله‌ی زیر قابل تشکیل است.

$$m^{۲}+۲m=۴-m\rightarrow m^{۲}+۳m-۴=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}m=۱\\ m=\ _{a}=-۴\end{cases}$$

حال هر دو مقدر را در تابع جایگذاری می‌نمائیم تا مقادیر قابل قبول را مشخص نمائیم:

قابل قبول

قابل قبول

۳۹. گزینه ۲ قدم اول تبدیل تابع به فرم مربع کامل می‌باشد

$$f(x)=x^{۲}-۲x+۲\rightarrow y=(x-۱)^{۲}+۱\rightarrow x\leq ۱\xrightarrow{\text{وارون}}x=(y-۱)^{۲}+۱\qquad y\leq ۱$$

$$=(y-۱)^{۲}\rightarrow|y-۱|=\sqrt{x-۱}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$-y+۱=\sqrt{x-۱}\rightarrow y=۱-\sqrt{x-۱}=f^{-۱}(x)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۰. گزینه ۴

اگر $A\left|\begin{matrix}\\ b\end{matrix}\right.$ روی تابع f باشد $A'\left|\begin{matrix}\\ a\end{matrix}\right.$ روی تابع f^{-1} قرار دارد. یعنی: $f(a)=b\leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$$f^{-1}\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ ?\end{matrix}\right.\rightarrow f\left|\begin{matrix}?\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}\right.\rightarrow f(x)=\frac{-1}{2}\rightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{2}$$

از این تساوی علامت x را می‌توان تعیین کرد، مخرج‌ها هم‌علامت هستند لذا صورتها هم باید هم‌علامت باشند، پس x منفی است

$$-2x=\sqrt{x^2+1}\rightarrow 4x^2=x^2+1\rightarrow 3x^2=1\rightarrow x^2=\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\xrightarrow{x<0}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۴۱. گزینه ۱

اگر $A\left|\begin{matrix}\\ b\end{matrix}\right.$ روی تابع f باشد $A'\left|\begin{matrix}\\ a\end{matrix}\right.$ روی تابع f^{-1} قرار دارد. یعنی: $f(a)=b\leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

لذا برای حل تست کافیست به روش زیر عمل کنیم

$$f^{-1}\left|\begin{matrix}3\\ ?\end{matrix}\right.\rightarrow f\left|\begin{matrix}?\\ \sqrt{3}\end{matrix}\right.\rightarrow f(x)=\sqrt{3}$$

$$x+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{3}\rightarrow x-\sqrt{3}=\sqrt{x^2+3}$$

$$\xrightarrow{(\ )^2}x^2+3-2\sqrt{3}x=x^2+3\rightarrow -2\sqrt{3}x=0\rightarrow x=0$$

$$A'\left|\begin{matrix}\sqrt{3}\\ 0\end{matrix}\right.\rightarrow f^{-1}(\sqrt{3})=0$$

۴۲. گزینه ۱

تمام عملیات جبری، روی مولفه‌ی دوم انجام می‌شود.

$$\left.\begin{matrix}f=\{\qquad\qquad\}\\ 2g=\{(2,6)(5,2)\}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f+2g=\{(2,11)\}$$

۴۳. گزینه ۱

$$g=\{(3,4)(0,3)(4,2)(1,2)\}\rightarrow f+g=\{(3,5)(1,6)(0,5)\}$$

برد تابع، مجموعه‌ی $\{5,6\}$ است. دقت کنید زوج‌های مرتبی از دو تابع را در نظر بگیرید که دارای xهای برابر باشند. سپس xهای آن‌ها را نوشته و عرض های آن‌ها را باهم جمع می‌کنیم.

۴۴. گزینه ۲ کافی است دامنه‌ی تعریف دو تابع را پیدا کرده و سپس از آن‌ها اشتراک بگیریم (زیرا رادیکال‌ها باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشند.)

$$Df:\ x^2-1\geq 0\rightarrow x^2\geq 1\ \rightarrow x\geq 1\ ,\ x\leq -1\quad (I)$$

$$Dg:\ 4-x^2\geq 0\ \rightarrow\ x^2\leq 4\rightarrow\ -2\leq x\leq 2\qquad (II)$$

از اشتراک II , I جواب $-2\leq x\leq -1\cup 1\leq x\leq 2$ حاصل می‌شود یعنی

۴۵. گزینه ۴ زیر هر دو رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد.

$$x^2-x-2\geq 0\ \rightarrow(x-2)(x+1)\geq 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x\leq -1\ x\geq 2(I)$$

$$0\rightarrow x\leq 2\ \ (II)$$

۴۶. گزینه ۲

$y=(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=x^{۲}-x^{۲}+۱=۱ \rightarrow$ **خط افقی**

از طرفی: $Df_{\cdot g}=Df\cap Dg$

$$\rightarrow \begin{cases} g(x)=x-\sqrt{x^{۲}-۱} \\ f(x)=x+\sqrt{x^{۲}-۱} \end{cases} \Rightarrow x^{۲}-۱\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\geq ۱ \Rightarrow |x|\geq ۱ \Rightarrow x\leq -۱ \quad \text{یا} \quad x\geq ۱$$

۴۷. گزینه ۴

$Df_{\times g}=Df\cap Dg$

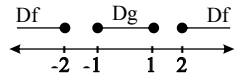
پس باید ابتدا دامنه‌ی f و g را تعیین نمائیم

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴} \rightarrow x^{۲}-۴\geq ۰ \rightarrow x^{۲}\geq ۴ \rightarrow |x|\geq ۲ \rightarrow \begin{cases} x\leq -۲ \end{cases}$$

$$g(x)=\sqrt{۱-x^{۲}} \rightarrow ۱-x^{۲}\geq ۰ \rightarrow x^{۲}\leq ۱ \rightarrow |x|\leq ۱ \rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

$$= \quad \cap \quad = \varnothing$$

۴۸. گزینه ۴



$$\overline{g}=Df\cap Dg-\{x\,|g(x)=۰\}$$

پس قدم اول تعیین دامنه‌ی f و g می‌باشد.

$$f(x)=\sqrt{۴-x^{۲}} \rightarrow ۴-x^{۲}\geq ۰ \rightarrow x^{۲}\leq ۴ \rightarrow |x|\leq ۲ \rightarrow Df=[-۲,+۲]$$

$$g(x)=\sqrt{۳x-x^{۲}} \rightarrow ۳x-x^{۲}\geq ۰ \rightarrow$$

	۰		۳	
P	− ۰	+	۰	−
	ج	ج	ج	

$$\rightarrow Dg=[۰,۳]$$

حال ریشه‌های تابع g را بدست می‌آوریم:

$$g(x)=۰ \rightarrow \sqrt{۳x-x^{۲}}=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۳ \end{cases}$$

$$g=Df\cap Dg-\{g \text{ ریشه های}\}=[-۲,۲]\cap[۰,۳]-\{۰,۳\}=(۰,۲]$$

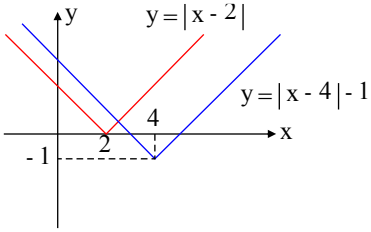
۴۹. گزینه ۳

$$y=|x-۲| \xrightarrow{\text{دو واحد به راست}} y=|x-۲-۲| \xrightarrow{\text{یک واحد پایین}} y=|x-۴|-۱$$

برای به‌دست آوردن محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها، کافی است $x=۰$ را در معادله قرار دهیم:

$y=|۰-۴|-۱=۳$

در ضمن برای درک بیش‌تر به شکل روبه‌رو دقت کنید.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۰. گزینه ۳

به ترتیب اعمال مورد نظر را انجام می‌دهیم:

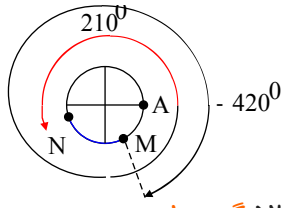
$$f(x)=x^{۲} \xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به طرف } x\text{های منفی}} f_{۱}(x)=(x+۴)^{۲} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور}x\text{ها}} f_{۲}(x)=-(x+۴)^{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{دو برابر کردن برد}} f_{۳}(x)=-۲(x+۴)^{۲} \xrightarrow{\text{انتقال ۳ واحد به طرف } y\text{های منفی}} f_{۴}(x)=-۲(x+۴)^{۲}-۳$$

$$f_{۴}(x)=-۲(x^{۲}+۸x+۱۶)-۳ \to y=-۲x^{۲}-۱۶x-۳۵$$

۵۱. گزینه ۳

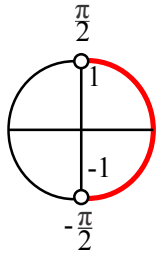
واضح است نقطه‌ی M از ۲۷۰ درجه به اندازه‌ی ۳۰ درجه بیشتر است و نقطه‌ی N از ۱۸۰ درجه به اندازه‌ی ۳۰ درجه بیشتر است پس کمان MN برابر ۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است.



$$\theta=\frac{L}{r} \to \frac{\pi}{۲}=\frac{L}{۳} \to L=\frac{۳\pi}{۲}=\frac{۳(۳/۱۴)}{۲}=۴/۷۱$$

۵۲. گزینه ۱

$$\frac{-\pi}{۶}<x<\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \frac{-\pi}{۲}<۳x<\frac{\pi}{۲}$$



واضح است در $(-\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{\pi}{۲})$ سینوس بین ۱− و ۱ می‌باشد بنابراین:

۵۳. گزینه ۳ داریم:

$$\begin{cases}\sin(-۱۱۲^\circ)=-\sin ۱۱۲^\circ=-\sin(۹۰^\circ+۲۲^\circ)=-\cos ۲۲^\circ\\ \sin ۱۵۸^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۲۲^\circ)=\sin ۲۲^\circ\\ \cos ۲۰۲^\circ=\cos(۱۸۰^\circ+۲۲^\circ)=-\cos ۲۲^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(-۱۱۲^\circ)+\sin ۱۵۸^\circ}{\cos ۲۰۲^\circ}=\frac{-\cos ۲۲^\circ+\sin ۲۲^\circ}{-\cos ۲۲^\circ}=\frac{}{-\cos ۲۲^\circ}+\frac{}{-\cos ۲۲^\circ}$$

$$=۱-\tan ۲۲^\circ=۱-\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

۵۴. گزینه ۴

$$\tan\theta=۰/۲=\frac{۱}{۵} \Rightarrow \cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=۵$$

$$\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}=\frac{}{\sin\theta+\sin\theta} \xrightarrow{\text{اجملات را تقسیم بر } \sin\theta \text{ می کنیم}} \frac{}{۱+۱}+\cot\theta=\frac{۶}{۲}=۳$$

۵۵. گزینه ۱

ایران نوشه
توشه ای برای موفقیت

$$\frac{\cos ۲۵۵^\circ - \cos ۱۶۵^\circ}{۲\sin ۷۵^\circ + ۳\cos ۱۰۵^\circ} = \frac{\cos(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ) - \cos(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ)}{۲\sin(۹۰^\circ - ۱۵^\circ) + ۳\cos(۹۰^\circ + ۱۵^\circ)} = \frac{-\sin ۱۵^\circ + \cos ۱۵^\circ}{۲\cos ۱۵^\circ - ۳\sin ۱۵^\circ}$$

$$\xrightarrow{\div \cos ۱۵^\circ} \frac{-\tan ۱۵^\circ + ۱}{۲ - ۳\tan ۱۵^\circ} = \frac{}{۲ - ۳a}$$

۵۶. گزینه ۴

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$$
$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\underbrace{\quad}_{\text{مزدوج}}\left(\frac{۱}{\cos\theta}+\cos\theta\right)\underbrace{\quad}_{\text{مزدوج}}(۱-\sin\theta)$$

$$=\underbrace{(۱-\sin^۲\theta)}_{\cos^۲\theta}\left(\frac{\quad}{\cos\theta}\right)(۱-\sin\theta)=\frac{\cos^۲\theta\overbrace{(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta)}^{\text{مزدوج}}}{\cos\theta}=\cos\theta\times\cos^۲\theta=\cos^۳\theta$$

۵۷. گزینه ۳

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

$$۱-\sin\alpha\cos\alpha=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲+\sin\alpha\cos\alpha$$

۵۸. گزینه ۳

برای هر زاویه‌ی x داریم : $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$

$$A=(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)^۲-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha+۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$
$$\Rightarrow A=(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)^۲=۱^۲=۱$$

۵۹. گزینه ۳

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$
$$۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲=۱\Rightarrow\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}\\ \cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}\end{cases}$$

چون $\cos\alpha$ در مسئله بصورت یک رادیکال داده شده و مثبت است، مقدار مثبت را می‌پذیریم:

$$\cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}=\sqrt{۱-m^۲}\xrightarrow{(\ )^۲}۱-\sin^۲\alpha=۱-m^۲\Rightarrow\sin^۲\alpha=m^۲$$

از طرفی : $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow۱+\left(\sqrt{\quad-۱}\right)^۲=\frac{۱}{m^۲}$

$$\Rightarrow۱+\ _n\ -۱=\frac{۱}{m^۲}\Rightarrow\ _n\ =\frac{۱}{m^۲}\Rightarrow m^۳=n$$

۶۰. گزینه ۳

$$\begin{cases}\\ \begin{cases}\sin۲۰۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)=-\sin۲۰^\circ\\ \sin۳۴۰^\circ=\sin(۳۶۰^\circ-۲۰^\circ)=-\sin۲۰^\circ\\ \cos۱۱۰^\circ=\cos(۹۰^\circ+۲۰^\circ)=-\sin۲۰^\circ\\ ۰^\circ=\cos(۲۷۰^\circ-۲۰^\circ)=-\sin۲۰^\circ\end{cases}\end{cases}$$

$$-\sin ۲۰^\circ - ۲ \times (-\sin ۲۰^\circ) - \sin ۲۰^\circ - ۳ \times (-\sin ۲۰^\circ) - ۳\sin ۲۰^\circ$$
$$= -\sin ۲۰^\circ + ۲\sin ۲۰^\circ - \sin ۲۰^\circ + ۳\sin ۲۰^\circ - ۳\sin ۲۰^\circ = ۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۱. گزینه ۱

$$\begin{cases}\cos ۱۶۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\cos ۱۵^\circ \\ \sin ۲۸۵^\circ = \sin(۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ) = -\cos ۱۵^\circ \\ \sin ۳۴۵^\circ = \sin(۳۶۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\sin ۱۵^\circ \\ \cos ۲۵۵^\circ = \cos(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\sin ۱۵^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-۳\cos ۱۵^\circ + ۲\cos ۱۵^\circ}{-۳\sin ۱۵^\circ + ۴\sin ۱۵^\circ} = -\frac{\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ} = -\cot ۱۵^\circ = -\frac{۱}{a}$$

۶۲. گزینه ۲ باتوجه به $\cot\alpha = ۲$ یک رابطه بین $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ بدست می‌آوریم.

$$\cot\alpha = ۲ \Rightarrow \frac{}{\sin\alpha} = ۲ \xrightarrow{\sin\alpha \neq ۰} \cos\alpha = ۲\sin\alpha$$

حال در صورت تست، به جای تمام $\cos\alpha$ها، مساوی آن یعنی $۲\sin\alpha$ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{\sin^۴\alpha + \cos^۳\alpha\sin\alpha}{۴\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha} = \frac{\sin^۴\alpha + (۲\sin\alpha)^۳\sin\alpha}{۴\sin^۲\alpha(۲\sin\alpha)^۲}$$

$$= \frac{\sin^۴\alpha + ۸\sin^۳\alpha\sin\alpha}{۴\sin^۲\alpha \times ۴\sin^۲\alpha} = \frac{\sin^۴\alpha + ۸\sin^۴\alpha}{۱۶\sin^۴\alpha} = \frac{۹\sin^۴\alpha}{۱۶\sin^۴\alpha} = \frac{۹}{۱۶}$$

۶۳. گزینه ۳ هر گاه دو کمان متمم باشند $\tan$ اولی با $\cot$ دومی برابر است:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲} \to \tan\alpha = \cot\beta$$

$$۳^\circ + ۸۷^\circ = ۹۰^\circ \to \tan ۸۷^\circ = \cot ۳$$

$$۱۷^\circ + ۷۳^\circ = ۹۰^\circ \to \tan ۷۳^\circ = \cot ۱۷$$

$$۳۷^\circ + ۵۳^\circ = ۹۰ \to \tan ۵۳ = \cot ۳۷$$

$$\underbrace{(\quad \times \quad)}_{۱} \times \underbrace{(\quad \times \quad)(\quad \times \quad)}_{۱} = ۱$$

۶۴. گزینه ۴ راه‌حل اول:

با توجه به رابطهٔ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ داریم:

$$\cos\frac{\pi}{۵} = \cos\frac{۳\pi}{۱۵} = \cos(\pi - \frac{۱۲\pi}{۱۵}) = -\cos\frac{۱۲\pi}{۱۵}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۱۵} = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۷\pi}{۱۵} = \cos(\pi - \frac{۸\pi}{۱۵}) = -\cos\frac{۸\pi}{۱۵}$$

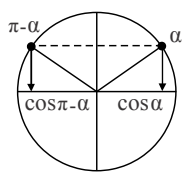
$$\Rightarrow \cos^۳\frac{\pi}{} + \cos\frac{}{} + \cos\frac{}{} + \cos^۳\frac{۱۲\pi}{۱۵}$$

$$\Rightarrow \cos^۳\frac{\pi}{} + \cos\frac{}{} + \cos\frac{}{} + \cos^۳\frac{۱۲\pi}{۱۵}$$

$$= -\cos^۳\frac{۱۲\pi}{۱۵} + \frac{۱}{} - \cos\frac{}{} + \cos\frac{}{} + \cos^۳\frac{۱۲\pi}{۱۵} = \frac{۱}{۸}$$

راه‌حل دوم:

هرگاه دو زاویه مکمل یکدیگر باشند کسینوس‌های آن‌ها قرینهٔ یکدیگر می‌باشند.



$$\alpha) = -\cos\alpha \to \cos(\pi - \alpha) + \cos\alpha = ۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\cos^{۳}(\frac{\pi}{۵})+\cos^{۳}(\frac{۵\pi}{۱۵})+\cos^{۳}(\frac{۷\pi}{۱۵})+\cos^{۳}(\frac{۸\pi}{۱۵})+\cos^{۳}(\frac{۱۲\pi}{۱۵})=$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

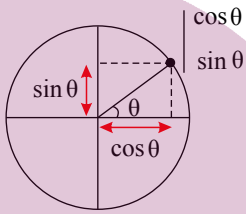
$$\overbrace{(\underbrace{\cos^{۳}(\frac{۳\pi}{۱۵})+\cos^{۳}(\frac{۱۲\pi}{۱۵})}_{\text{مکمل}})}^{۰}+\overbrace{(\underbrace{\cos^{۳}(\frac{۷\pi}{۱۵})+\cos^{۳}(\frac{۸\pi}{۱۵})}_{\text{مکمل}})}^{۰}+\cos^{۳}(\frac{\pi}{۳})=۰+۰+(\frac{۱}{۲})^{۳}=\frac{۱}{۸}$$

۶۵. گزینه ۳ زوایا را بر حسب ۵۵ درجه مرتب می‌کنیم.

$$\cos ۳۲۵=\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۵۵)=\sin ۵۵ \quad \text{و} \quad \cos ۲۱۵=\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۵۵)=-\sin ۵۵$$

$$\frac{}{۳\sin ۳۰۵-\cos ۳۲۵}=\frac{}{-۳\sin ۵۵-\sin ۵۵}=\frac{}{-۴\sin ۵۵}=\frac{۱}{۴}=a$$

۶۶. گزینه ۲ اگر زاویه‌ی θ در موقعیت استاندارد باشد، نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را طبق شکل مقابل در نقطه‌ی $\left|\sin\theta\right|$ قطع می‌کند.



پس $\sin\theta=\frac{۱}{۳}$ ، $\cos\theta=\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}$ است.

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}}{\frac{۱}{۳}}=-۲\sqrt{۲} \quad , \quad \cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\sin\theta=-\frac{۱}{۳}$$

$$A=\frac{۱+\cot^{۲}\theta}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)}=\frac{۱+(-۲\sqrt{۲})^{۲}}{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۹}{-\frac{۱}{۳}}=-۲۷$$

۶۷. گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را برحسب ۱۵° می‌نویسیم:

$$\cos ۲۸۵^{\circ}=\cos(۲۷۰^{\circ}+۱۵^{\circ})=\sin ۱۵^{\circ} \quad , \quad \sin ۲۵۵^{\circ}=\sin(۲۷۰^{\circ}-۱۵^{\circ})=-\cos ۱۵^{\circ}$$

$$\sin ۵۲۵^{\circ}=\sin(۵۴۰^{\circ}-۱۵^{\circ})=\sin(۱۸۰^{\circ}-۱۵^{\circ})=\sin ۱۵^{\circ} \quad , \quad \sin ۱۰۵^{\circ}=\sin(۹۰^{\circ}+۱۵^{\circ})=\cos ۱۵^{\circ}$$

بنابراین داریم : $\frac{\cos ۲۸۵^{\circ}-\sin ۲۵۵^{\circ}}{\sin ۵۲۵^{\circ}-\sin ۱۰۵^{\circ}}=\frac{\sin ۱۵^{\circ}+\cos ۱۵^{\circ}}{\sin ۱۵^{\circ}-\cos ۱۵^{\circ}}$

تمام جملات را بر $\cos ۱۵^{\circ}$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan ۱۵^{\circ}+۱}{\tan ۱۵^{\circ}-۱}=\frac{}{۰/۲۸-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}=\frac{-۱۲۸}{۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

۶۸. گزینه ۳

ابتدا تمام زوایا را برحسب ۲۰° می‌نویسیم:

$$\sin ۲۵۰^{\circ}=\sin(۲۷۰^{\circ}-۲۰^{\circ})=-\cos ۲۰^{\circ} \quad , \quad \sin ۷۰۰^{\circ}=\sin(۷۲۰^{\circ}-۲۰^{\circ})=\sin(-۲۰^{\circ})=-\sin ۲۰^{\circ}$$

$$\cos ۵۶۰^{\circ}=\cos(۵۴۰^{\circ}+۲۰^{\circ})=\cos(۱۸۰^{\circ}+۲۰^{\circ})=-\cos ۲۰^{\circ} \quad , \quad \cos ۱۱۰^{\circ}=\cos(۹۰^{\circ}+۲۰^{\circ})=-\sin ۲۰^{\circ}$$

بنابراین داریم: $\frac{\sin ۲۵۰^{\circ}+\sin ۷۰۰^{\circ}}{\cos ۵۶۰^{\circ}-\cos ۱۱۰^{\circ}}=\frac{-\cos ۲۰^{\circ}-\sin ۲۰^{\circ}}{-\cos ۲۰^{\circ}+\sin ۲۰^{\circ}}$

تمام جملات را بر $\cos ۲۰$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{-۱-\tan ۲۰^{\circ}}{\tan ۲۰^{\circ}}=\frac{-۱-۰/۴}{-۱+۰/۴}=\frac{-۱/۴}{-۰/۶}=\frac{۱۴}{۶}=\frac{۷}{۳}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$T=۲\Rightarrow \frac{}{|b\pi|}=۲\Rightarrow |b|=۱\Rightarrow b=\pm ۱\Rightarrow y=۱+a\cdot\cos(\pm\pi x)=۱+a\cdot\cos\pi x$$

از طرفی $f(۱)=۳$، بنابراین داریم:

$$۳=۱+a\cos(\pi(۱))\Rightarrow ۳=۱+a\cos(\pi)\Rightarrow ۳=۱+a(-۱)\Rightarrow a=-۲$$

۷۰.گزینه ۳ دوره تناوب تابع $y=\sin kx$ برابر $\frac{}{|k|}$ می‌باشد.

$$y=a\ \sin(b\pi x)\rightarrow T=\frac{}{|b|\,\pi}=\frac{۲}{|b|}=۶\rightarrow |b|=\frac{۱}{۳}\rightarrow b=\pm\frac{۱}{۳}$$

باتوجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b=\frac{۱}{۳}$ قابل قبول است.

بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین مقدار $y=a\sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

بنابراین $a=۲$ است پس $a+b=۲+\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۳}$

۷۱.گزینه ۱

$$\left|\ \xrightarrow[\text{تابع}]{\text{صدق در}}۵=a(۱)+۳\rightarrow a+۳=۵\Rightarrow a=۲\right.$$

طبق نمودار فاصله‌ی $x=۰$ تا $x=۲$، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع مورد نظر است:

$$۲-۰=\frac{T}{۲}\Rightarrow T=۴\Rightarrow\frac{}{|b\pi|}=۴\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲} & \text{در گزینه ها نیست}\\ a+b=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

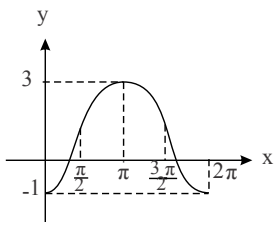
دوره‌ی تناوب تابع $y=\sin x$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است.

۷۲.گزینه ۳

$$-۲\cos\frac{\pi}{۲}+۱=۰+۱=۱$$

$$-۲\cos\frac{۳\pi}{۲}+۱=۰+۱=۱$$

$$-۲\cos ۲\pi+۱=-۲+۱=-۱$$



x	
۰	-۱
$\frac{\pi}{۲}$	۱
	۳
$\frac{۳\pi}{}$	۱
۲π	-۱

۷۳.گزینه ۴ می‌دانیم: دوره‌ی تناوب تابع $y=k\cdot\cos ax$ برابر $T=\frac{}{|a|}$ است.

باتوجه به شکل، نقطه‌ی $(۰,۲)$ عضو تابع است پس در آن صدق می‌کند:

$$y(۰)=۲\Rightarrow ۲=a\cos ۰\Rightarrow a=۲$$

از طرفی نصف دوره‌ی تناوب تابع باتوجه به شکل برابر $\frac{\pi}{۲}$ است، بنابراین:

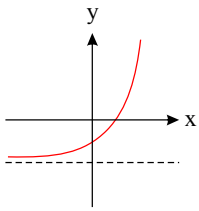
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\frac{T}{۲} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

هر دو مقدار b قابل قبول است، پس $a+b$ می‌تواند برابر مقادیر صفر یا ۴ باشد.

۷۴. گزینه ۴



داریم $f(x)=۲(۲^{x-۱}-۱) \Rightarrow y=۲^x-۲$ نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع f از ناحیه‌ی دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد. از آن جا که نمودار تابع f و نمودار وارون آن نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات قرینه هستند، پس نمودار وارون تابع f از ناحیه‌ی چهارم دستگاه مختصات نخواهد گذاشت.

۷۵. گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a m=\frac{}{m}\log_k}$

عدد مورد نظر را a در نظر می‌گیریم، طبق فرض داریم:

$$\log_{۴}^{a}=\frac{۱۵}{۴}\Rightarrow \log_{۲^۲}^{a}=\frac{۱۵}{۴}\Rightarrow \frac{}{}\log_{۲}^{a}=\frac{۱۵}{۴}\Rightarrow \log_{۲}^{a}=\frac{۱۵}{۲}$$

$$\log_{\frac{۱}{۸}}=\log_{۲^۳}^{a^{-۲}}=\frac{-۲}{}\log_{۲}^{a}=-\frac{۲}{۳}(\frac{۱۵}{۲})=-۵$$

۷۶. گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k=\log_{k^{}}\ ,\ \log_k^m=\frac{n}{m}\log_k\ ,\ \log_k^a-\log_k=\log_k}$

$$\begin{cases}\log(x^۲+۴y^۲)=\overbrace{۲\log\sqrt{۲}}^{\log(\sqrt{۲})^۲}+\log ۲۳\Rightarrow \log(x^۲+۴y^۲)=\log ۴۶\Rightarrow x^۲+۴y^۲=۴۶\\ \log x+\log y=۲\log ۳-\log ۲\Rightarrow \log xy=\log\frac{۹}{۲}\Rightarrow xy=\frac{۹}{۲}\end{cases}$$

$$(x+۲y)^۲=x^۲+۴y^۲+۴xy=۴۶+۴(\frac{۹}{۲})=۶۴\Rightarrow x+۲y=۸$$

بنابراین:

$$\log_{۱۶}^{x+۲y}=\log_{۱۶}^{۸}=\log_{۲^۴}^{۲^۳}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

۷۷. گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a m=\frac{}{m}\log_k\ ,\ \log_k^a-\log_k=\log_k\ ,\ \log_{b^{}}=x\to N=b^x}$

ابتدا باتوجه به ویژگی‌های لگاریتم، عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم.

$$\log_{۲}^{۴x^۲+۸x+۴}=\log\frac{\sqrt{۲x+۸}}{\sqrt{۲}}+۳\to \log_{۲}^{۴x^۲+۸x+۴}=\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}(۲x+۸)^{\frac{۱}{۲}}+۳$$

$$\log_{۲}^{۴x^۲+۸x+۴}=\log_{۲}^{۲x+۸}+۳\to \log_{۲}^{۴x^۲+۸x+۴}-\log_{۲}^{۲x+۸}=۳$$

$$\to \log_{۲}^{\frac{۴x^۲+۸x+۴}{۲x+۸}}=۳\xrightarrow{\text{تعریف}}\frac{۴x^۲+۸x+۴}{۲x+۸}=۲^۳=۸$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۸x+۴=۱۶x+۶۴\Rightarrow x^۲-۲x-۱۵=۰\to (x-۵)(x+۳)=۰\to x=۵,-۳$$

هر دو جواب‌ها قابل قبولند پس مجموع مربعات جوابها، برابر $۳۴=۹+۲۵$ است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۷۸.گزینه ۲ می‌دانیم: $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \quad , \quad \log_b^N = x \to N = b^x$

کافی است دو تابع را تلاقی دهیم.

$$۱ + \log(x+۱) = \log(x^۲ - ۱) \to \log(x^۲ - ۱) - \log(x+۱) = ۱$$

$$\to \log \frac{x^۲ - ۱}{x+۱} = ۱ \to \log \frac{(x+۱)(x-۱)}{(x+۱)} = ۱ \to \log(x-۱) = ۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} x - ۱ = ۱۰ \to x = ۱۱$$

بنابراین دو تابع در یک نقطه، همدیگر را قطع می‌کنند. (توجه کنید که $x = ۱۱$ چون در دامنه‌ی هر دو تابع قرار دارد، قابل قبول می باشد.)

۷۹.گزینه ۲ می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k = \log_k \quad , \quad \log_k = n\log_k$

$$\log(۳x+۱) + ۲\log\sqrt{x-۲} = \frac{۱}{۲}\log(x^۲ - ۲x + ۱) + \log(x+۲)$$

$$\to \log(۳x+۱) + \log(\sqrt{x-۲})^۲ = \frac{۱}{۲}\log(x-۱)^۲ + \log(x+۲)$$

$$\to \log(۳x+۱)(x-۲) = \log(x-۱)(x+۲) \to ۳x^۲ - ۶x + x - ۲ = x^۲ + ۲x - x - ۲$$

$$\to ۲x^۲ - ۶x = ۰ \to ۲x(x-۳) = ۰ \to \begin{cases} \text{غ ق ق (در دامنه ی تعریف قرار ندارد)} \\ x = ۳ \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\log_۵^{۴\alpha+۱۳} \xrightarrow{\alpha=۳} \log_۵^{۲۵} = \log_۵^{۵^۲} = ۲$$

۸۰.گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a = n\log_k$

$$۱۰ < ۶۴ < ۱۰۰ \to \log ۱۰ < \log ۶۴ < \log ۱۰^۲ \to ۱ < \log ۶۴ < ۲ \to [\log ۶۴] = ۱$$

$$۱۰۰ < ۵۱۲ < ۱۰۰۰ \to \log ۱۰^۲ < \log ۵۱۲ < \log ۱۰^۳ \to ۲ < \log ۵۱۲ < ۳ \to [\log ۵۱۲] = ۲$$

بنابراین : $[\log ۸] + [\log ۶۴] + [\log ۵۱۲] = ۰ + ۱ + ۲ = ۳$

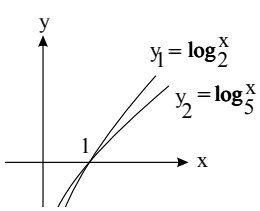
۸۱.گزینه ۳ می‌دانیم: $\log_k^a - \log_k = \log_k$

$$\log_۲^{۲+\sqrt{۳}} - \log_۲^{۲-\sqrt{۳}} = \log_۲^{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}} \xrightarrow{\text{گویا می کنیم}} \log_۲^{\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}} \times \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}} = \log_۲^{\frac{(۲+\sqrt{۳})^۲}{۴-۳}}$$

$$= \log_۲^{\frac{۴+۳+۴\sqrt{۳}}{۱}} = \log_۲^{۷+۴\sqrt{۳}} = \log_۲^{۱۳/۸}$$

$$۲^۳ < ۱۳/۸ < ۲^۴ \to \log_۲^{۲^۳} < \log_۲^{۱۳/۸} < \log_۲^{۲^۴} \to ۳ < \log_۲^{۱۳/۸} < ۴ \to [\log_۲^{۱۳/۸}] = ۳$$

۸۲.گزینه ۱ از مقایسه‌ی نمودار دو تابع با معادله‌های $y_۱ = \log_۲^x$ و $y_۲ = \log_۵^x$ ، معلوم می‌شود که بزرگ‌ترین بازه‌ای که نامعادله‌ی مورد نظر سؤال در آن برقرار است $(۰, ۱)$ است.



۸۳.گزینه ۴ می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k = \log_k$

$$۳^{۲x+y} = ۹ \times ۳^{x-y} \to ۳^{۲x+y} = ۳^۲ \times ۳^{x-y} \to ۳^{۲x+y} = ۳^{۲+x-y}$$

$$\to ۲x + y = ۲ + x - y \to x + ۲y = ۲ \to x = ۲ - ۲y$$

از طرفی :

$$\to x+۲y=۱۰y\to x=۸y \xrightarrow{x=۲-۲y} ۲-۲y=۸y\to ۱۰y=۲\to y=\frac{۲}{۱۰} \xrightarrow{x=۸y} x=\frac{۱۶}{۱۰}=۱/۶$$

۸۴. گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a-\log_k=\log_k \quad , \quad \log_k^m=\frac{}{m}\log_k \quad , \quad \log_b =x\to N=b^x}$

$$\log_۳^{۲x^۲+۱}-\log_۳^{x+۲}=۱\to \log_۳^{\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}}=۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۲ \quad +۱}{x+۲}=۳^۱$$

$$\to ۲x^۲+۱=۳x+۶\to ۲x^۲-۳x-۵=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-\frac{}{a}=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه‌ی $\log_۸$ فقط به جای x، می‌توانیم مقدار $x=\frac{۵}{۲}$ را جایگزین کنیم، زیرا $x=-۱$ جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_۸ \quad \xrightarrow{x=\frac{۵}{۲}} \quad \log_۸^{۲(-)-۱}=\log_۸=\log_{۲^۳}^{۲^۲}=\frac{۲}{۳}$$

۸۵. گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n}=n\log_k^a \quad , \quad \log_k^{\frac{a}{b}}=\log_k^a-\log_k^b \quad , \quad \log ۵=۱-\log ۲}$

$$\log \sqrt[۳]{۱/۶}=\log(۱/۶)^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}\log ۱/۶=\frac{۱}{۳}\log\frac{۱۶}{۱۰}$$

$$=\frac{۱}{۳}(\log ۱۶-\log ۱۰)=\frac{۱}{۳}(۴\log ۲-۱)=\frac{۱}{۳}(۴(۱-\log ۵)-۱)=\frac{۱}{۳}(۳-۴\log ۵)$$

$$=\frac{۱}{۳}(۳-۱۲k)=\frac{۱}{۳}(۳(۱-۴k))=۱-۴k$$

۸۶. گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+\sqrt{۵})^۲=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۱+۵+۲\sqrt{۵})$$

$$=\log(۶-۲\sqrt{۵})+\log(۶+۲\sqrt{۵})=\log\underbrace{(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})}_{\text{مزدوج}}=\log(۳۶-۲۰)=\log ۱۶=\log^{۲^۴}=۴\log ۲=۲$$

۸۷. گزینه ۴

$$x\to ۲^- \Rightarrow x<۲\Rightarrow -x>-۲\Rightarrow ۱-x>-۱$$

پس وقتی $x\to ۲^-$ **آنگاه** $۱-x\to(-۱)^+$ **و در نتیجه:**

$$\lim_{x\to ۲^-} f(۱-x)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)$$

باتوجه به نمودار، حد راست تابع f **در** $x=-۱$ **برابر صفر است.**

۸۸. گزینه ۱ باتوجه به نمودار، مشخص است که $x\to ۲^- \Rightarrow f(x)\to ۳^+$ زیرا وقتی با مقادیر کم‌تر از $x=۲$ روی نمودار به ۲ نزدیک میشویم عرض نقاط تابع با مقادیر بیشتر از ۳ به ۳ نزدیک میشوند یعنی (۳^+) با توجه به این توضیح، حاصل حد را می یابیم:

$$\lim \frac{۲x-\pi}{f(x)-۲} \xrightarrow{} \frac{(۲\times ۲)-۳/۱۴}{+} = \frac{۴-۳/۱۴}{+}=\frac{۰/۸۶}{+}=+\infty$$

۸۹. گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{۲x} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{}{۲x-۱} = \frac{۰}{۰-۱} = ۰$$

بنابراین حد راست از حد چپ $\frac{۱}{۲}$ بیشتر است.

۹۰. گزینه ۴ روش اول: حد داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲[x]-۱}{x-۱} \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} (x+۱)$$
$$= ۲$$

روش دوم:

می‌دانیم: $\lim_{x\to ۱^+} \frac{}{x-۱} = {}_{J+}(۱) \xrightarrow{[۱^+]=۱} f(x)=x^۲ \to f'(x)=۲x \to {}_{J+}(۱)=۲$

۹۱. گزینه ۱

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در بدست آوریم.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (k+[x]) = k+[۲^+] = k+۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{\overbrace{|x-۲|}}{x^۲-۴} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{}{(x+۲)(x-۲)} = -\frac{۱}{۴}$$
$$f(۲) = k+[۲] = k+۲$$

$$\Big\} \to k+۲ = -\frac{۱}{۴} \to k = -\frac{۹}{۴}$$

۹۲. گزینه ۱ به بررسی ۴ گزینه می‌پردازیم.

گزینه‌ی اول: $\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۲ \to \lim_{x\to ۳} f(x) = ۲$

گزینه‌ی دوم: $\lim_{x\to ۱} f(x) = \quad f(x) = ۰$

گزینه‌ی سوم: $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = +\infty$

گزینه‌ی چهارم: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = ۰$

بنابراین فقط گزینه‌ی اول، صحیح نیست.

۹۳. گزینه ۴

به بررسی ۴ گزینه می‌پردازیم.

گزینه‌ی اول $\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۰$

گزینه‌ی دوم $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = +\infty$

گزینه‌ی سوم $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

گزینه‌ی چهارم $\lim_{x\to (-۲)^+} f(x) = -۳$

۹۴. گزینه ۴ مقدار تابع در $x=۳$ برابر صفر است بنابراین باید کسر $\frac{x^۲-x+b}{x-a}$ به ازای $x=۳$ صفر گردد.

$$x=۳ \to \frac{}{۳-a} = ۰ \to ۶+b=۰ \to b=-۶$$

چون تابع همواره پیوسته است پس باید در $x=a$ نیز پیوسته باشد.

$$x=a \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^۲-x-۶}{x-a} = \dfrac{}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{۲x-۱}{۱} = ۲a-۱ \\ f(a) = -۵ \end{cases} \Rightarrow \quad ۲a-۱ = -۵ \Rightarrow a = -۲$$

پس $a+b=-۸$ است.

۹۵.گزینه ۴ قدم اول جایگذاری عدد می‌باشد باتوجه به این که صورت کسر عدد صفر شده و جواب حد عدد غیر صفر می‌باشد، مخرج کسر باید به ازای $x = ۱$ برابر صفر شود:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$ax^{۲}+۲x+b \xrightarrow{x=۱} ۰$

در مرحله‌ی بعد مخرج را با استفاده از تقسیم تجزیه می‌نمائیم:

$$\begin{array}{r|l} ax^{۲}+۲x+b & ax+a+۲ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\xrightarrow{x\to ۱} \frac{(x-۲)(\cancel{x-۱})}{(ax+a+۲)(\cancel{x-۱})}=\frac{}{۲a+۲}=۲\to ۴a+۴=-۱\to a=-\frac{۵}{۴}$$

$$b=-۲-a=-۲+\frac{۵}{۴}=-\frac{۳}{۴}$$

$$a-b=-\frac{۱}{۲}$$

۹۶.گزینه ۲ روش اول:

باید $x+۱\to ۰^{+}$ میل کند پس $x\to(-۱)^{+}$ میل می کند.

$$x\to ۰^{+}\ f(x)=\underset{x\to(-۱)^{+}}{} f(x+۱)=\frac{۱}{((-۱)^{+})^{۲}-۱}=\frac{۱}{۱^{-}-۱}=\frac{}{۰^{-}}=-\infty$$

روش دوم: ابتدا $f(x)$ را مشخص می کنیم.

$$x+۱=t\to x=t-۱\to f(t)=\frac{۱}{(t-۱)^{۲}-۱}=\frac{۱}{t^{۲}+۱-۲t-۱}=\frac{۱}{t^{۲}-۲t}\to f(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۲x}$$

$$x\to ۰^{+}\ f(x)=\underset{x\to ۰^{+}}{} \frac{۱}{x(x-۲)}=\frac{۱}{۰^{+}(-۲)}=\frac{}{۰^{-}}=-\infty$$

۹۷.گزینه ۳ ابتدا شرط تابع را ساده‌تر می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} -ax+۱ \\ x+b \end{cases}\quad ,\quad x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

چون تابع در تمام نقاط حد دارد پس تابع در $x=۱$ و $x=-۱$ نیز حد دارد.

$$x=۱\to \begin{cases} x\to ۱^{+}\ f(x)=\underset{x\to ۱^{+}}{}(x+b)=۱+b \\ x\to ۱^{-}\ f(x)=\underset{x\to ۱^{-}}{}(x^{۲}-ax+۱)=۱-a+۱=۲-a \end{cases}\to ۱+b=۲-a\to a+b=۱$$

$$x=-۱\begin{cases} x\to(-۱)^{+}\ f(x)=\underset{x\to(-۱)^{+}}{}(x^{۲}-ax+۱)=۱+a+۱=a+۲ \\ x\to(-۱)^{-}\ f(x)=\underset{x\to(-۱)^{-}}{}(x+b)=-۱+b \end{cases}\to a+۲=-۱+b\to a-b$$

$$=-۳$$

از حل دستگاه $a=-۱$ و $b=۲$ بدست می آید پس $۲b-a=۵$ است.

۹۸.گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x=۶$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۶$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} x\to ۶^{+}\ f(x)=\underset{x\to ۶^{+}}{}(a+\cos^{۲}\frac{\pi x}{۳۶})=a+\cos^{۲}\frac{\pi}{۶}=a+\frac{۳}{۴} \\ x\to ۶^{-}\ f(x)=\underset{x\to ۶^{-}}{}\sin x=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲} \\ \sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲} \end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-x^۲-x+۶}{x(x-۲)}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{-\cancel{(x-۲)}(x+۳)}{\cancel{(x-۲)}x}=-\frac{۵}{۲}$$

۱۰۰. **گزینه ۳** شرط پیوستگی تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax+۱)=۲a+۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\overline{[x]}=\dfrac{۲}{[۲^-]}=\dfrac{۲}{۱}=۲\\ f(۲)=۲a+۱\end{array}\right\}\Rightarrow ۲a+۱=۲\to a=\frac{۱}{۲}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۴۰۶۲۱۰

۱- ۳	۲- ۲	۳- ۴	۴- ۳	۵- ۱
۶- ۱	۷- ۴	۸- ۲	۹- ۲	۱۰- ۲
۱۱- ۲	۱۲- ۱	۱۳- ۱	۱۴- ۲	۱۵- ۴
۱۶- ۱	۱۷- ۱	۱۸- ۱	۱۹- ۴	۲۰- ۱
۲۱- ۲	۲۲- ۲	۲۳- ۳	۲۴- ۲	۲۵- ۲
۲۶- ۳	۲۷- ۱	۲۸- ۲	۲۹- ۳	۳۰- ۴
۳۱- ۱	۳۲- ۴	۳۳- ۲	۳۴- ۳	۳۵- ۱
۳۶- ۲	۳۷- ۴	۳۸- ۳	۳۹- ۲	۴۰- ۴
۴۱- ۱	۴۲- ۱	۴۳- ۱	۴۴- ۲	۴۵- ۴
۴۶- ۲	۴۷- ۴	۴۸- ۴	۴۹- ۳	۵۰- ۳
۵۱- ۳	۵۲- ۱	۵۳- ۳	۵۴- ۴	۵۵- ۱
۵۶- ۴	۵۷- ۳	۵۸- ۳	۵۹- ۳	۶۰- ۳
۶۱- ۱	۶۲- ۲	۶۳- ۳	۶۴- ۴	۶۵- ۳
۶۶- ۲	۶۷- ۱	۶۸- ۳	۶۹- ۱	۷۰- ۳
۷۱- ۱	۷۲- ۳	۷۳- ۴	۷۴- ۴	۷۵- ۴
۷۶- ۳	۷۷- ۲	۷۸- ۲	۷۹- ۲	۸۰- ۳
۸۱- ۳	۸۲- ۱	۸۳- ۴	۸۴- ۴	۸۵- ۱
۸۶- ۲	۸۷- ۴	۸۸- ۱	۸۹- ۳	۹۰- ۴
۹۱- ۱	۹۲- ۱	۹۳- ۴	۹۴- ۴	۹۵- ۴
۹۶- ۲	۹۷- ۳	۹۸- ۲	۹۹- ۱	۱۰۰- ۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت