

ایران توشه

- رانلود نمونه سوالات امتحانی

- رانلود گام به گام

- رانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش

- رانلود فیلم و مقاله انگلیزی

- رانلود و مشاوره



IranTooshe.Ir



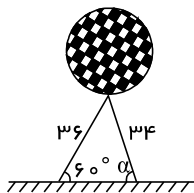
@irantooshe



IranTooshe



۱- یک بالن اطلاع‌رسانی مطابق شکل زیر توسط دو طناب به طول‌های ۳۴ و ۳۶ متر به زمین بسته شده است. مقدار سینوس زاویه‌ی α تقریباً کدام است؟



($\sqrt{3} \approx 1,7$)

① ۰٫۸۵

③ ۰٫۸۸

② ۰٫۸۷

④ ۰٫۹

۲- مقدار $\frac{2 \sin 12^\circ - 2 \cos 18^\circ}{2 \cos 15^\circ + 2 \tan 135^\circ}$ کدام است؟

① ۱

② ۰

③ -۱

④ $\frac{1}{2}$

۳- اگر $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$ و $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$ باشد، α در کدام ربع است؟

① اول

② دوم

③ سوم

④ چهارم

۴- اگر $A = \frac{\cot 3^\circ - 2 \sin 6^\circ + \tan 45^\circ}{\tan^2 3^\circ - \frac{1}{2} \cos 6^\circ + \cot 45^\circ}$ باشد، حاصل $\frac{13A}{2}$ کدام است؟!

① $\frac{12}{13}$

② $\frac{13}{12}$

③ ۶

④ $\frac{1}{6}$

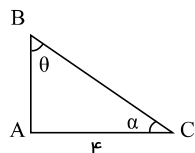
۵- در مثلث ABC زاویه $\hat{A}$ قائمه و طول یکی از اضلاع قائمه آن ۴ است. اگر تانژانت زاویه‌ی واقع بر رأس دیگر این ضلع، $\frac{3}{4}$ باشد، سینوس زاویه سوم کدام است؟

① ۰٫۲

③ ۰٫۶

② ۰٫۴

④ ۰٫۸



۶- اگر $15^\circ \leq \alpha \leq 12^\circ$ باشد و $\cos \alpha = 2m - 1$ باشد آنگاه حدود تغییرات m کدام است؟

① $-1 \leq m \leq 1$

② $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$

③ $\frac{2-\sqrt{3}}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$

④ $\frac{1-\sqrt{3}}{4} \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

۷- اگر $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ باشد، محدوده‌ی عبارت $A = 1 + \sin^2 \alpha$ کدام است؟

① $\frac{3}{2} \leq A \leq \frac{5}{2}$

② $\frac{3}{2} \leq A \leq 2$

③ $\frac{-\sqrt{2}}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $-1 \leq \alpha \leq 1$

۸- اگر $30^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{2m-1}{4}$ باشد، حدود m کدام است؟

① $\frac{3}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

② $\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$

③ $\frac{3}{2} < m \leq \frac{5}{2}$

④ $\frac{1}{2} < m \leq 1$

۹- اگر $m = 2 \cos 3x + 1$ باشد و $|x| < 2^\circ$ ، مقادیر m در کدام بازه است؟

① $[1, 2]$

② $(1, 2]$

③ $[2, 3]$

④ $(2, 3]$

۱۰- اگر $120^\circ \leq x \leq 225^\circ$ باشد، کدام گزینه درست است؟

① $-1 \leq \cos x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}$

② $\frac{-\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{-1}{2}$

③ $\frac{-1}{2} \leq \cos x \leq 0$

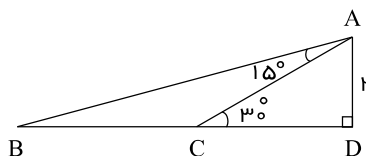
④ $-1 \leq \cos x \leq \frac{-1}{2}$

۱۱- با فرض $60^\circ < x < 150^\circ$ و $\sin x = \frac{3-m^2}{3+m^2}$ مقادیر m در کدام فاصله است؟

- ① $|m| < \sqrt{3}$ ② $|m| < \sqrt{2}$ ③ $|m| < 1$ ④ $|m| < \frac{1}{2}$

۱۲- اگر $45 < x < 108$ و $\sin x = \frac{m}{2}$ ، حدود m کدام است؟

- ① $m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2} < m \leq 2$ ④ $1 \leq m < \sqrt{2}$



۱۳- در شکل زیر، مساحت مثلث ABC کدام است؟

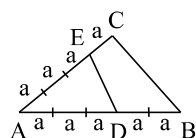
- ① $4\sqrt{3}$ ② 4 ③ $4\sqrt{3}$ ④ $4 \tan 15^\circ$

۱۴- اگر $\sin 2\alpha > 0$ و $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ باشد، آن گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی است؟ ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$)

- ① اول ② دوم ③ سوم ④ چهارم

۱۵- حاصل عبارت $\frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} - \frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta}$ کدام است؟

- ① $4 \cot \theta \cos \theta$ ② $\frac{4 \tan \theta}{\cos \theta}$ ③ $\frac{2}{\cos^2 \theta}$ ④ $2 \sin \theta$



۱۶- در شکل زیر، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ADE است؟

- ① $\frac{20}{9}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$

۱۷- اگر $3 \sin \alpha + 2 \cos \beta = 5$ ، آنگاه $\sin^2 \beta + \cos^2 \alpha$ کدام است؟

- ① صفر ② ۱ ③ ۵ ④ ۲۵

۱۸- نقطه P روی محیط دایره ی مثلثاتی و در ربع چهارم قرار دارد. کدام گزینه می تواند مختصات نقطه ی P باشد؟

- ① $(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5})$ ② $(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ ③ $(\frac{3}{8}, -\frac{\sqrt{7}}{8})$ ④ $(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3})$

۱۹- اگر بیشترین مقدار عبارت $A = (2a+1) - 3 \sin x$ برابر ۸ باشد، a کدام است؟

- ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۲۰- اگر بدانیم $\tan 33^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\sin 24^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، حاصل عبارت $A = \sin 33^\circ + \cos 24^\circ$ کدام است؟

- ① صفر ② -۱ ③ $-\sqrt{3}$ ④ $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

۲۱- اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\cos(\hat{A} - \hat{B}) + \sin(\frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}) = 2$ ، نوع مثلث ABC کدام است؟

- ① قائم الزاویه غیر متساوی الساقین ② قائم الزاویه متساوی الساقین ③ متساوی الاضلاع ④ مختلف الاضلاع با یک زاویه بزرگتر از 90°

۲۲- اگر $30^\circ < \theta < 135^\circ$ و $\sin \theta = \frac{3m-2}{4}$ ، آنگاه حدود m کدام است؟

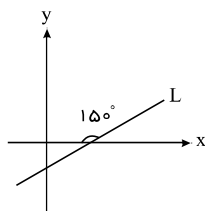
- ① $\frac{1}{2} < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{4}{3} < m \leq 2$ ③ $\frac{1}{2} < m \leq 1$ ④ $0 \leq m < 2$

۲۳- اگر زاویه α به گونه‌ای باشد که $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 < 1$. آنگاه چه تعداد از نسبت‌های مثلثاتی $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ مثبت هستند؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۲۴- اگر نقطه‌ی $P(x_p, \frac{1}{p})$ روی دایره‌ی مثلثاتی و در ربع دوم باشد و θ زاویه‌ای باشد که OP با جهت مثبت محور x ها می‌سازد، آنگاه $A = \sin \theta + \tan^2 \theta$ کدام است؟ (O مبدأ مختصات است).

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{-2\sqrt{3}+3}{6}$ ③ $\frac{-2\sqrt{3}+1}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$



۲۵- اگر نمودار خط $L: 3x + ay = 4$ به صورت مقابل باشد، a کدام است؟

- ① $-\sqrt{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۶- اگر x در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی و $\cos x = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $2 \tan x - 5 \cot x$ برابر کدام است؟

- ① $-\sqrt{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ ۰ ④ $2\sqrt{5}$

۲۷- معادله‌ی خطی که محور طول‌ها (x) را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع می‌کند و با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه‌ی 60° می‌سازد، کدام است؟

- ① $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ ② $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

۲۸- اگر $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ باشد، حاصل عبارت $A = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \frac{1}{1 + \cot^2 \theta}$ کدام است؟

- ① $\frac{5}{8}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $-\frac{7}{8}$

۲۹- حاصل عبارت تعریف‌شده $2 \tan^2 \theta - \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta}$ کدام است؟

- ① -۱ ② صفر ③ ۱ ④ ۲

۳۰- چه تعداد از عبارت‌های زیر همواره درست است؟

(الف) $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

(ب) $\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \tan x$

(ج) $\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

(د) $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۱- اگر $\frac{\tan^3 \theta - 1}{\tan \theta - 1} - \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sqrt{2}$ و انتهای کمان θ در ربع سوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، $\sin \theta$ کدام است؟

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

۳۲- اگر $\cos x = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $2 \tan x + \frac{2 \cos x}{1 + \sin x}$ کدام است؟

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ ۳ ④ ۱

۳۳- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل عبارت $A = \tan x + \cot x$ کدام است؟

- ① $-\frac{21}{50}$ ② $-\frac{50}{21}$ ③ $\frac{29}{50}$ ④ $\frac{50}{29}$

۳۴- کدام اتحاد مثلثاتی صحیح است؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند.)

- ① $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ ② $2 \cos^2 \theta = (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$
 ③ $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ ④ $\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$

۳۵- ساده شده عبارت $A = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 (1 + \tan^2 \theta)^2 - (\tan^2 \theta - 1)^2$ کدام است؟

- ① $\tan^4 \theta - 1$ ② $2(\tan^4 \theta + 1)$ ③ $2 \tan^4 \theta$ ④ صفر

۳۶- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، AB و AC دو ساق مثلث و اندازه زاویه B برابر 75° است. اگر مساحت این مثلث ۲۵ واحد مربع باشد، اندازه ساق AB کدام است؟

- ① ۱۵ ② ۲۰ ③ ۲۵ ④ ۱۰

۳۷- اگر $\tan \theta + \cot \theta < 0$ باشد، آن‌گاه θ در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

- ① اول یا دوم ② سوم یا چهارم ③ اول یا چهارم ④ دوم یا چهارم

۳۸- دو مثلث ABC و EFG در نظر بگیرید به طوری که $AB = \frac{1}{3}EF$ و $AC = 3EG$ باشد و زاویه‌های A و E برابر باشند، آن‌گاه نسبت مساحت $\triangle ABC$ به مساحت $\triangle EFG$ کدام است؟

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۹- اگر خط $12 = 3x - 4y$ با جهت مثبت محور x زاویه α را بسازد، آن‌گاه مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$

۴۰- اگر $27^\circ < \alpha < 18^\circ$ باشد، حاصل عبارت تعریف شده $\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} \cos \alpha - \sin^2 \alpha$ همواره کدام است؟

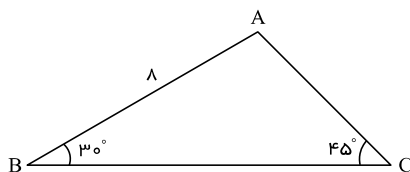
- ① صفر ② ۱ ③ -۱ ④ $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۴۱- عبارت $A = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha) + (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ همواره با کدام گزینه برابر است؟ (عبارت تعریف شده است.)

- ① $1 - \tan^2 \alpha$ ② $1 + \tan^2 \alpha$ ③ $1 - \tan \alpha$ ④ $1 + \tan \alpha$

۴۲- مساحت مثلث زیر کدام است؟

- ① $8(1 + \sqrt{3})$ ② $\frac{8\sqrt{3} + 12}{3}$ ③ ۸ ④ $\frac{16\sqrt{3} + 24}{3}$



۴۳- اگر داشته باشیم $\tan \theta < 0$ و $\cos \theta \cot \theta < 0$ ، زاویه θ در کدام ناحیه مثلثاتی واقع شده است؟

- ① اول ② دوم ③ سوم ④ چهارم

۴۴- حاصل عبارت تعریف شده $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha (\cot \alpha + \tan \alpha)$ کدام گزینه است؟

- ① $\sin \alpha$ ② -۱ ③ صفر ④ ۱

۴۵- اگر $\tan \theta = ۲$ و انتهای زاویه θ در ناحیه سوم محورهای مختصات واقع باشد، مجموع مؤلفه‌های اول و دوم نقطه P (محل برخورد انتهای زاویه θ با دایره مثلثاتی) کدام است؟

- ① $-\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$ ② $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ③ $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ④ $\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$

۴۶- اگر $۲ < (\sin \alpha)(1 - \cos \alpha) < ۰$ باشد، در این صورت انتهای کمان α در کدام یک از ناحیه‌های دایره مثلثاتی قرار دارد؟

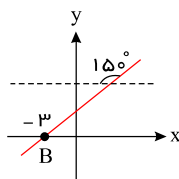
- ① اول یا سوم ② دوم یا سوم ③ اول یا دوم ④ دوم یا چهارم

۴۷- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، اگر $\hat{B} = ۳۰^\circ$ و $BC = ۱۲$ باشد، مساحت مثلث چقدر است؟

- ① $۷٫۵$ ② ۱۰ ③ $۶\sqrt{۳}$ ④ $۱۲\sqrt{۳}$

۴۸- حاصل عبارت A کدام است؟ ($\cos \theta \neq ۰$)
 $A = (1 + \sin \theta) \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta)^2$

- ① $\tan \theta \sin \theta$ ② $\cos^2 \theta$ ③ $\frac{1 + \sin^2 \theta}{\cos \theta}$ ④ $\cos^3 \theta$



۴۹- اگر نمایش معادله خط $ax - \sqrt{۳}y + c = ۰$ به صورت زیر باشد، حاصل $a.c$ کدام است؟

- ① ۱ ② $\sqrt{۳}$ ③ ۳ ④ $۲\sqrt{۳}$

۵۰- مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $۵۴\sqrt{۳}$ است. طول ضلع این شش ضلعی کدام است؟

- ① $۳\sqrt{۳}$ ② $۶\sqrt{۳}$ ③ ۳ ④ ۶

۵۱- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $\hat{C} = ۹۰^\circ$ و $\cos \hat{A} = \frac{۱۲}{۱۳}$ و $BC = ۱۰$ می‌باشد. محیط مثلث ABC کدام است؟

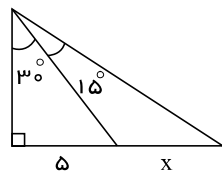
- ① ۴۸ ② ۶۰ ③ ۷۰ ④ ۷۲

۵۲- اگر $\tan \theta = \frac{a+۳}{b}$ و $\cot \theta = \frac{۲}{a-۱}$ باشد، کدام رابطه بین a و b برقرار است؟ ($a \neq ۱, b \neq ۰$)

- ① $b = \frac{a+۳}{a-۱}$ ② $a = \frac{b+۳}{b}$ ③ $b = \frac{a^2+۲a-۳}{۲}$ ④ $a = \frac{b+۶}{b-۲}$

۵۳- اگر $\tan x = \frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{۴ \cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

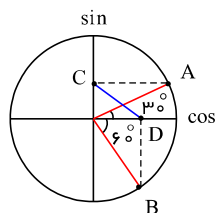
- ① $\frac{۱}{۳}$ ② ۳ ③ ۲ ④ $\frac{۴}{۳}$



۵۴- اگر وتر مثلث بزرگ را در شکل مقابل y بنامیم، حاصل $x + y$ کدام است؟

- ① $۵(۲\sqrt{۳}-۱)$ ② $۵(-۲\sqrt{۳}+۱)$ ③ $۵(\sqrt{۳}-۱+۲\sqrt{\frac{۳}{۲}})$ ④ $۵(-\sqrt{۳}+۱-۲\sqrt{\frac{۳}{۲}})$

۵۵- طول پاره خط CD کدام است؟



- ① $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ② $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ ۱

۵۶- اگر α زاویه‌ای در دایره‌ی مثلثاتی، $\cot \alpha = \sqrt{\frac{m}{n}} - 1$ و $\cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$ باشد، رابطه‌ی بین m و n کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده‌اند.)

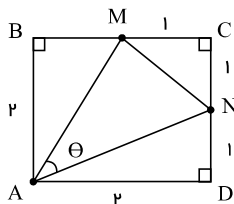
- ① $m = n^2$ ② $m = n^3$ ③ $n = m^3$ ④ $n = m^2$

۵۷- ساده شده‌ی عبارت $\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \right) \left((\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha \right)$ کدام است؟

- ① $\sin^2 \alpha$ ② $\cos^2 \alpha$ ③ $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ④ $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۵۸- اگر $\tan x + \frac{1}{\tan x} = k - 1$ باشد، حدود k برای آنکه معادله جواب داشته باشد کدام است؟

- ① $-1 < k < 3$ ② $k \geq 3$ یا $k \leq -1$ ③ $k > 2$ ④ $k < -\frac{1}{2}$



۵۹- باتوجه به مربع بودن شکل زیر، حاصل $\sin \theta$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{5}$

۶۰- حاصل عبارت $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

- ① -2 ② 2 ③ -1 ④ صفر

۶۱- حاصل عبارت $\frac{1 + \sin 15^\circ}{1 - \sin 15^\circ} - \frac{1 - \sin 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ}$ کدام است؟

- ① $\frac{4 \cos 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}$ ② $\frac{4 \sin 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}$ ③ $\frac{2 \sin^2 15^\circ}{\cos 15^\circ}$ ④ $\frac{2 \sin 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}$

۶۲- اگر $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ کدام است؟

- ① $\frac{7}{11}$ ② $\frac{10}{17}$ ③ $\frac{9}{5}$ ④ $\frac{13}{6}$

۶۳- حاصل عبارت تعریف شده A کدام است؟

- ① 2 ② $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ ③ 1 ④ $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x + \cot x$

۶۴- اگر $\tan \alpha > 0$ و $\sin \alpha < 0$ باشد، حدود بازه‌ی $A = \frac{4m - 5}{3}$ کدام است، در صورتیکه داشته باشیم $\cos \alpha = \frac{2m - 1}{5}$ ؟

- ① $-\frac{13}{3} < A < -1$ ② $-1 < A < \frac{13}{3}$ ③ $\frac{1}{3} < A < 13$ ④ $-13 < A < -\frac{1}{3}$

۶۵- مقدار ماکزیمم $|5 \sin x - 3|$ کدام است؟

- ① 2 ② 3 ③ π ④ 8

۶۶- اگر $\frac{\cot^2 \alpha + 11}{\cot^3 \alpha + \cot \alpha} = \frac{7}{15}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 10 \sin^3 \alpha}$ کدام است؟

- ① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{15}{7}$ ③ $\frac{30}{17}$ ④ 2

مثال‌ها ده

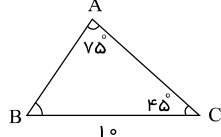
۶۷- در مثلث زیر طول ضلع AC کدام است؟

① $5(\sqrt{3}-1)$

② $5(\sqrt{3}+1)$

③ $5\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$

④ $5\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$



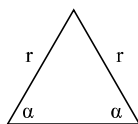
۶۸- اگر مساحت مثلث متساوی الساقین روبه‌رو برابر با $\frac{r^2}{3}$ باشد، حاصل $\sin \alpha + \cos \alpha$ کدام است؟

① $\frac{5}{3}$

② $\frac{\sqrt{15}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{1}{3}$



۶۹- در هرم شکل مقابل، $\angle H\hat{B}C = 75^\circ$ و $\angle A\hat{C}B = 60^\circ$ است. اگر طول ضلع HB برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، اندازه AB کدام است؟

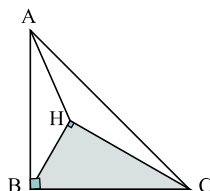
① $(\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})$

② $\sqrt{3}-1$

③ $1+\sqrt{3}$

④ $3-\sqrt{3}$

⑤ $3+\sqrt{3}$



۷۰- اگر $\tan \alpha = \sqrt{7}$ باشد، حاصل $\frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{(\sqrt{5}-1) \sin \alpha + \sqrt{7} \cos \alpha}$ کدام است؟

① ۱

② ۲

③ ۳

④ ۴

۷۱- حاصل عبارت $A = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}$ ، همواره کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند).

① $1 + \tan^2 x$

② $1 + \tan^3 x$

③ $1 + \tan^4 x$

④ $1 + \tan^6 x$

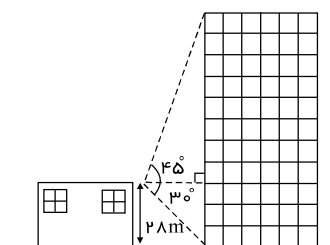
۷۲- در شکل مقابل اگر ارتفاع ساختمان کوتاه‌تر ۲۸ متر باشد، ارتفاع برج چند متر است؟

① $29\sqrt{3}$

② $28\sqrt{3}$

③ $28(1+\sqrt{3})$

④ ۵۶



۷۳- اگر روی دایرهٔ مثلثاتی، انتهای کمان‌های 60° ، 120° و 300° را به هم وصل کنیم، مثلث ABC تشکیل می‌شود، مساحت مثلث ABC کدام است؟

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$

② $\sqrt{3}$

③ ۲

④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷۴- اگر $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$ باشد، $\tan \alpha - \cot \alpha$ کدام است؟

① $\frac{3}{2}$

② ۱

③ $\frac{1}{2}$

④ صفر

۷۵- اگر $x = \frac{2}{\sin \alpha}$ و $y = 3 \cot \alpha$ باشد، مقدار $9x^2$ کدام است؟

① $4 + 9y^2$

② $9 + 4y^2$

③ $36 - 4y^2$

④ $36 + 4y^2$

۷۶- به ازای کدام مقدار A ، تساوی $\tan^4 x - 1 = \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x}$ یک اتحاد است؟

① ۱

② ۲

③ -۱

④ -۲

مثال‌های ده

۷۷- اگر $\frac{2ab}{a^2 - b^2} = \tan x$ باشد که در آن $a > b > 0$ و $0^\circ < x < 90^\circ$ است، آنگاه $\sin x$ برابر با کدام است؟

- ① $\frac{b}{a}$ ② $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$ ③ $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ ④ $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$

۷۸- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x + \cos^3 x$ است؟

- ① $\frac{13}{27}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{17}{27}$ ④ $\frac{17}{81}$

۷۹- اگر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

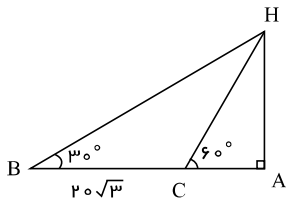
- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{7}$

۸۰- اگر $\tan \theta = \frac{2}{10}$ باشد مقدار $\frac{\cos(270^\circ + \theta) - \cos(180^\circ + \theta)}{\sin(180^\circ - \theta) - \sin(180^\circ + \theta)}$ کدام است؟

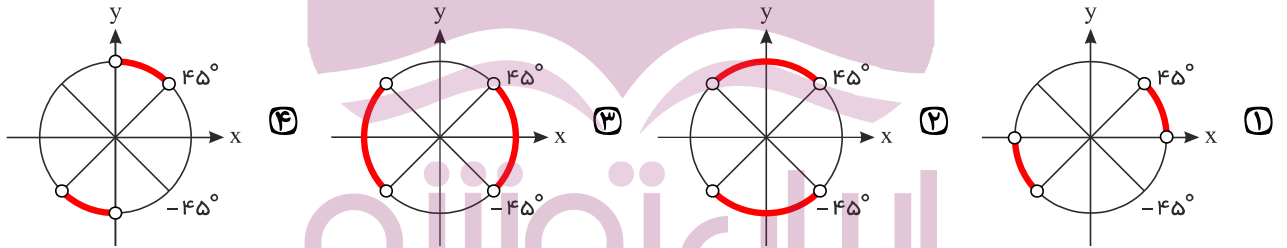
- ① -2 ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ 3

۸۱- در شکل مقابل، اندازه ی AH کدام است؟

- ① 60 ② 20 ③ 30 ④ 40



۸۲- در کدام بخش از دایرهٔ مثلثاتی، نابرابری $\cot \alpha > \tan \alpha > 0$ برقرار است؟

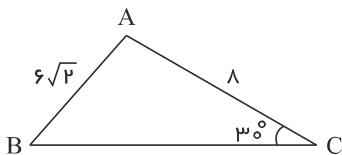


۸۳- انتهای کمان روبرو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد و ضلع انتهایی این زاویه، دایرهٔ مثلثاتی را در نقطه‌ای به طول $-\frac{1}{4}$ قطع می‌کند، حاصل

- ① $4\sqrt{15}$ ② $-4\sqrt{15}$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{15}}{2}$

۸۴- خط با شیب مثبت و عرض از مبدأ یک و خط L_2 با شیب مثبت و عرض از مبدأ ۵، محور عرض‌ها را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کنند. خطوط L_1 و L_2 یکدیگر را در نقطهٔ C قطع می‌کنند به‌طوری که $AC = 13$ است. اگر مساحت مثلث ABC ۲۴ باشد، شیب خط L_1 کدام است؟

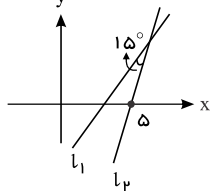
- ① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{12}{13}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{5}{13}$



- ① $8\sqrt{3}$ ② $2(\sqrt{14} + 2\sqrt{3})$ ③ $4(\sqrt{14} + 2\sqrt{3})$ ④ $4\sqrt{3}$

۸۵- در شکل زیر، مساحت مثلث ABC کدام است؟

مثلثات دهم



۸۶- مطابق شکل، خط L_1 به معادله $\sqrt{3}x - 3y = 5$ با خط L_2 زاویه 15° می‌سازد. معادله خط L_2 کدام است؟

(۱) $y + \sqrt{3}x - 5\sqrt{3} = 0$

(۲) $y - \sqrt{3}x + 5\sqrt{3} = 0$

(۳) $y = x + 5$

(۴) $y = x - 5$

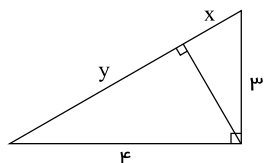
۸۷- مساحت یک ۶ ضلعی منتظم برابر با $12\sqrt{3}$ است. محیط آن برابر است با:

(۱) ۱۲

(۲) $12\sqrt{2}$

(۳) $12\sqrt{3}$

(۴) ۲۴



۸۸- در شکل زیر، نسبت x به y کدام است؟

(۱) $\frac{9}{5}$

(۲) $\frac{16}{9}$

(۳) $\frac{5}{9}$

(۴) $\frac{9}{16}$

۸۹- خطی که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 45° باشد و از نقطه $(2, 3)$ عبور کند، محور طول‌ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) -۵

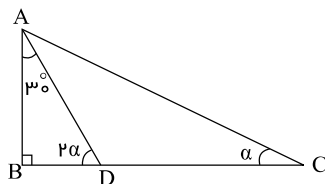
۹۰- اگر نقطه P انتهای کمان مربوط به زاویه α روی دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$ باشد، مختصات نقطه P کدام می‌تواند باشد؟

(۱) $(\frac{\sqrt{6}}{12}, 1)$

(۲) $(\frac{1}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5})$

(۳) $(1, \frac{\sqrt{6}}{12})$

(۴) $(\frac{2\sqrt{6}}{5}, \frac{1}{5})$



۹۱- در شکل زیر، اگر $AD = DC$ باشد، حاصل $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABD}}$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $2\sqrt{3}$

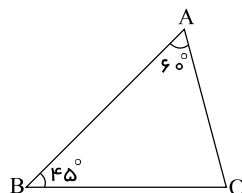
(۳) ۳

(۴) $4\sqrt{3}$

(۵) ۱۵

(۶) $15\sqrt{3}$

(۷) ۲۰



۹۲- در شکل زیر، اگر $AC = 10\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه اندازه ضلع BC کدام است؟

(۱) ۱۵

(۲) $15\sqrt{2}$

(۳) $15\sqrt{3}$

(۴) ۲۰

۹۳- مساحت شش ضلعی منتظم شکل زیر کدام است؟

(۱) $16\sqrt{3}$

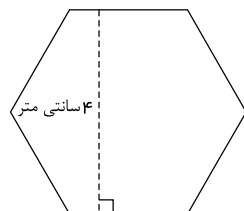
(۲) $24\sqrt{3}$

(۳) $9\sqrt{3}$

(۴) $\frac{9\sqrt{3}}{32}$

(۵) $8\sqrt{3}$

(۶) $8\sqrt{3}$



۹۴- مساحت پنج ضلعی منتظم به طول ضلع a کدام گزینه است؟

(۱) $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = 0.8$, $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = 0.6$

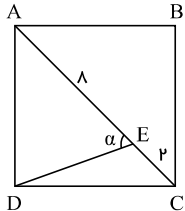
(۲) $\frac{5}{3}a^2$

(۳) $\frac{10}{3}a^2$

(۴) $\frac{5}{6}a^2$

(۵) $\frac{3a^2}{2}$

۹۵- اگر $ABCD$ یک مربع باشد، آن گاه $\tan \alpha$ کدام است؟ ($EC = 2$, $AE = 8$)



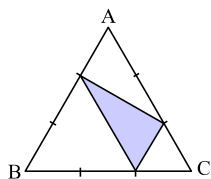
(۷) $\frac{2}{5}$

(۴) $\frac{4}{3}$

(۱) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{5}{3}$

۹۶- در شکل زیر، هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع ABC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده ایم. مساحت ناحیه سایه زده چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



(۷) $\frac{2}{9}$

(۴) $\frac{4}{9}$

(۱) $\frac{5}{12}$

(۳) $\frac{1}{4}$

۹۷- اگر $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$ و رابطه $\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ برقرار باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی واقع است؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۷) دوم

(۱) اول

۹۸- اگر $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ ، آنگاه حاصل $\tan \theta + \cot \theta$ کدام است؟

(۴) $\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{9}{4}$

(۷) $\frac{8}{9}$

(۱) $\frac{9}{8}$

۹۹- تانژانت زاویه حاده بین دو ضلع از مثلثی به طول اضلاع ۶ و ۸ واحد، برابر ۷۵٪ است. مساحت مثلث کدام است؟

(۴) $23\frac{1}{2}$

(۳) $19\frac{1}{2}$

(۷) ۱۸

(۱) $14\frac{1}{4}$

۱۰۰- اگر $45^\circ < x < 90^\circ$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $A = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}} - 4 + \cot x$ کدام است؟

(۴) $2 \cot x - \tan x$

(۳) $2 \tan x - \cot x$

(۷) $\cot x$

(۱) $\tan x$

۱۰۱- اگر $\frac{1}{\sin x} = 2$ باشد آنگاه مقدار عبارت $\sin^2 x + \cos^5 x$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{2} - 1$

(۳) $2 - \sqrt{2}$

(۷) ۱

(۱) ۲

۱۰۲- اگر α زاویه ای در ربع چهارم باشد، $\sin \alpha \cos \alpha$ برابر کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

(۴) $-\frac{1}{4}$

(۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۷) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱) $\frac{1}{4}$

۱۰۳- اگر $\tan 50^\circ = a$ باشد، مساحت متوازی الاضلاعی که قطرهای آن ۱۲ و ۸ واحد و زاویه بین قطرهای آن 50° می باشد، چند واحد مربع است؟

(۴) $\frac{48a}{\sqrt{1+a^2}}$

(۳) $\frac{48\sqrt{1-a^2}}{a}$

(۷) $\frac{96a}{\sqrt{1+a^2}}$

(۱) $\frac{96\sqrt{1-a^2}}{a}$

۱۰۴- مساحت مثلث قائم الزاویه ای ABC که در آن $\widehat{B} = 90^\circ$ از کدام یک از رابطه های زیر به دست نمی آید؟

(۷) $S = \frac{1}{2} \times AC \times BC \times \cos \widehat{A}$

(۱) $S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{A}$

(۴) $S = \frac{1}{2} (BC)^2 \times \cot \widehat{A}$

(۳) $S = \frac{1}{2} \times BC \times AC \times \tan \widehat{A}$

مثلات دهم

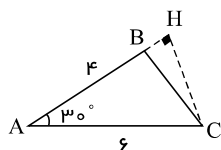
۱۰۵- شخصی با قد ۱٫۵ متر برای به دست آوردن اندازه‌ی میله‌ی پرچم، طوری مقابل پرچم ایستاده که سایه‌ی شخص و سایه‌ی میله‌ی پرچم روی هم می‌افتند و انتهای هر دو سایه در یک نقطه است. اگر پرتوهای موازی خورشید، با سطح زمین زاویه‌ی 60° بسازند و فاصله‌ی افقی شخص و میله‌ی پرچم ۶ متر باشد، ارتفاع میله‌ی پرچم تقریباً چند متر است؟ ($\sqrt{3} \approx 1.7$)

① ۱۲٫۹

② ۱۱٫۷

③ ۱۱٫۵

④ ۱۱٫۲



۱۰۶- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 30^\circ$ و $AC = 6$ و $AB = 4$ است. در این صورت طول ارتفاع CH کدام است؟

① ۳

② $3\sqrt{2}$

③ ۴

④ $3\sqrt{3}$

۱۰۷- AH ارتفاع مثلث قائم الزاویه ABC است که در رأس $\hat{A}$ قائمه است و HK ارتفاع مثلث AHB می‌باشد. کدام دو مثلث متشابه نیستند؟

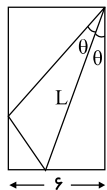
① ABC, AKC

② AHC, AHB

③ AHK, BHK

④ AHK, ABH

۱۰۸- یک برگ کاغذ مستطیل شکل به پهنای 6 cm را به مطابق شکل تا کرده‌ایم به طوری که یکی از گوشه‌ها بر ضلع مقابل منطبق شده است. طول خط تا کاغذ (L) بر حسب زاویه θ کدامست؟



① $\frac{6}{\sin \theta (1 + \cos 2\theta)}$

② $\frac{6 \sin \theta}{\cos \theta}$

③ $\frac{3 \sin \theta}{\cos \theta}$

④ $\frac{6}{\cos \theta \times \sin 2\theta}$

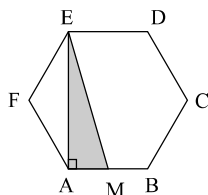
۱۰۹- در شکل مقابل، طول هر ضلع شش ضلعی منتظم، 20 و M وسط AB است مساحت مثلث AME کدام است؟

① $400\sqrt{3}$

② $200\sqrt{3}$

③ $300\sqrt{3}$

④ $100\sqrt{3}$



۱۱۰- مساحت مثلث متوازی الاضلاع $\triangle ABC$ به طول ضلع a کدام می‌تواند باشد؟ ($a \in \mathbb{N}$)

① $\sqrt{3}$

② $\sqrt{2}$

③ ۲

④ $\sqrt{5}$

۱۱۱- اگر $x = 283^\circ$ ، آنگاه کدام گزینه زیر درست است؟

① $\cos x (\sin x)$

② $\tan x (\sin x)$

③ $\tan 2x (\sin^2 x)$

④ $\tan^2 x (\sin^2 x)$

۱۱۲- اگر $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$ باشد، x در کدام ربع است؟

① اول

② دوم

③ سوم

④ چهارم

۱۱۳- اگر خط $y = x + 1$ را حول محل تقاطع آن با محور طول‌ها 15° در جهت مثبت مثلثاتی دوران دهیم، معادله‌ی خط به‌دست آمده کدام است؟

① $3y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

② $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

③ $3y = \sqrt{3}x + 1$

④ $y = \sqrt{3}x + 1$

۱۱۴- مقدار $A = \sqrt{1 - 2 \sin x \cos x} - \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x}$ به‌ازای $x = 200^\circ$ کدام است؟

① $2 \sin 200^\circ$

② $2 \cos 200^\circ$

③ $-2 \sin 200^\circ$

④ $-2 \cos 200^\circ$

۱۱۵- اگر $\sin x + \tan x > 0$ و $\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0$ باشد، x در کدام ربع است؟

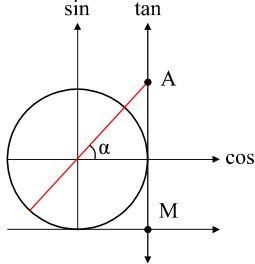
① اول

② دوم

③ سوم

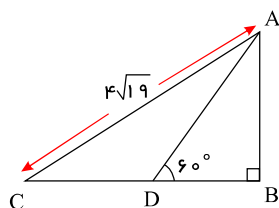
④ چهارم

۱۱۶- اگر $\tan \alpha = 8$ باشد، طول پاره خط AM کدام است؟



- ① ۳
② ۶
③ ۹
④ ۱۲

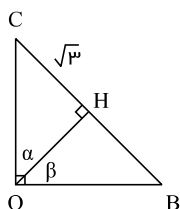
۱۱۷- اگر در مثلث ABC از شکل زیر، $AB = 4\sqrt{3}$ باشد، مساحت مثلث ACD کدام است؟



- ① $8\sqrt{3}$
② $12\sqrt{3}$
③ $24\sqrt{3}$
④ $28\sqrt{3}$

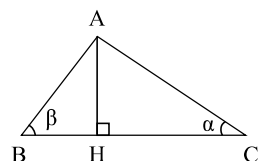
۱۱۸- اگر $\cos^2 \alpha = \frac{2}{a}$ ، $\cot^2 \alpha = 5a$ و a عددی حقیقی و مثبت باشد، حاصل $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ کدام است؟

- ① $3a$
② ۳
③ ۱۰
④ $\frac{a}{3}$



۱۱۹- اگر $BC = 3$ باشد، (OC^2) کدام است؟

- ① $\sqrt{3}$
② $3\sqrt{3}$
③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ ۳



۱۲۰- در شکل مقابل $\frac{BH}{AC}$ کدام است؟

- ① $\cot \beta \times \sin \alpha$
② $\tan \beta \times \cos \alpha$
③ $\cot \alpha \cos \beta$
④ $\tan \beta \cot \alpha$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

برای عضویت در کانال یازدهمی ها و دوازدهمی ها
روی اینجا کلیک کنید

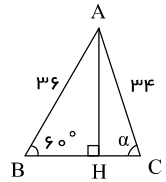
Telegram.me/Yazdahomiy

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و در مثلث قائم‌الزاویه AHC ، سینوس α را تشکیل می‌دهیم:

$$\triangle AHC : \sin \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{34}$$



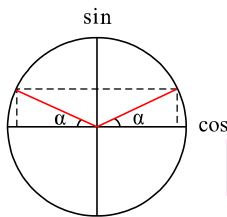
برای محاسبه‌ی سینوس α ، مقدار AH باید معلوم شود؛ به سراغ مثلث AHB می‌رویم:

$$\triangle AHB : \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin 60^\circ = 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \approx 18 \times 1.7$$

حال با این مقدار بدست آمده برای AH ، سینوس α را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin \alpha = \frac{18 \times \sqrt{3}}{34} = \frac{18}{20} = 0.9$$

۲ - گزینه ۳ با توجه به دایره مثلثاتی: $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ و $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$



$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 180^\circ = -\cos(180^\circ - 180^\circ) = -\cos 0^\circ = -1$$

$$\cos 150^\circ = -\cos(180^\circ - 150^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 45^\circ)}{\cos(180^\circ - 45^\circ)} = \frac{\sin 45^\circ}{-\cos 45^\circ} = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\frac{2 \sin 120^\circ - 2 \cos 180^\circ}{2 \cos 150^\circ + 2 \tan 135^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 2}{-\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{-(\sqrt{3} + 2)} = -1$$

۳ - گزینه ۳

$$\tan \alpha + \cot \alpha > 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} > 0$$

$$\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} > 0 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha > 0 \Rightarrow \text{یا هر دو مثبت یا هر دو منفی}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha < 0 \Rightarrow \text{هر دو منفی}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ربع سوم}$$

$$A = \frac{\sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{گزینه ۳}$$

$$A = \frac{12}{13} \Rightarrow \frac{13A}{2} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{13} = 6$$

۵ - گزینه ۴

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \quad \sin \theta = ?$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AB}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = 3$$

$$3^2 + 4^2 = BC^2 \Rightarrow 9 + 16 = BC^2 \Rightarrow 25 = BC^2 \Rightarrow BC = 5$$

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$12^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$$

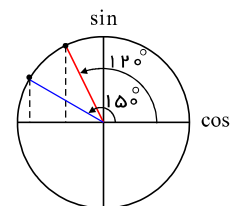
$$\cos 15^\circ \leq \cos \alpha \leq \cos 12^\circ$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \leq \cos \alpha \leq \frac{-1}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \leq 2m - 1 \leq \frac{-1}{2}$$

$$\xrightarrow{+1} \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \leq 2m \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}$$

۶ - گزینه ۳



۷ - گزینه ۲

$$45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin^2 \alpha \leq 1$$

$$\xrightarrow{+1} \frac{3}{2} \leq \sin^2 \alpha + 1 \leq 2$$

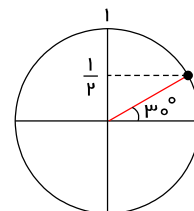
۸ - گزینه ۳

برای هر زاویه α : $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ یعنی حداکثر سینوس آن ۱ و حداقل آن -۱ است.

وقتی α در بازه $[30^\circ, 90^\circ]$ است، تغییرات آن محدودتر می شود. دایره را ببینید.

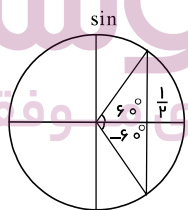
$$30^\circ < \alpha \leq 90^\circ \xrightarrow{\sin(\cdot)} \frac{1}{2} < \sin \alpha \leq 1$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha = \frac{2m-1}{4} &\rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} 2 < 2m-1 \leq 4 \\ &\xrightarrow{+1} 3 < 2m \leq 5 \xrightarrow{\div 2} \frac{3}{2} < m \leq \frac{5}{2} \end{aligned}$$



۹ - گزینه ۴

$$|x| < 2^\circ \rightarrow -2^\circ < x < 2^\circ \rightarrow -6^\circ < 3x < 6^\circ$$



$$\frac{1}{2} < \cos(3x) \leq 1$$

$$1 < 2 \cos(3x) \leq 2$$

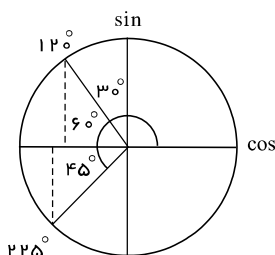
$$2 < 2 \cos(3x) + 1 \leq 3$$

$$2 < m \leq 3 \rightarrow m = (2, 3]$$

با توجه به دایره مثلثاتی داریم:

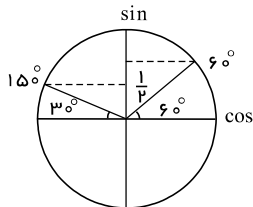
۱۰ - گزینه ۴

با توجه به شکل:



$$\cos 12^\circ = \frac{-1}{2}$$

$$-1 \leq \cos x \leq \frac{-1}{2}$$



$$\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$$

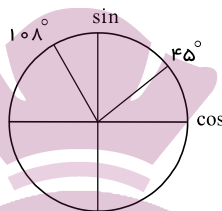
$$\frac{1}{2} \leq \frac{3 - m^2}{3 + m^2} \leq 1$$

$$1) \frac{3 - m^2}{3 + m^2} \leq 1 \xrightarrow{\times(3+m^2)} 3 - m^2 \leq 3 + m^2 \rightarrow -m^2 \leq m^2 \text{ همواره برقرار است.}$$

$$2) \frac{1}{2} \leq \frac{3 - m^2}{3 + m^2} \xrightarrow{\times(3+m^2)} \frac{3 + m^2}{2} \leq 3 - m^2 \xrightarrow{\times 2} 3 + m^2 \leq 6 - 2m^2 \rightarrow 3m^2 \leq 3 \rightarrow m^2 \leq 1 \Rightarrow |m| \leq 1$$

۱۲ - گزینه ۳

با توجه به شکل داریم:



$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x \leq 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{2} \leq 1$$

$$\sqrt{2} < m \leq 2$$

۱۳ - گزینه ۲

$$\triangle ADC : \sin 30^\circ = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

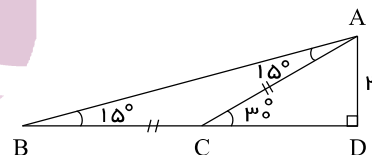
$$\triangle ADC : \hat{CAD} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\triangle ABD : \hat{B} = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - (60^\circ + 15^\circ) = 15^\circ$$

$$\Rightarrow AC = BC = 4$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AD = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

پس مثلث ABC متساوی الساقین است و شکل به صورت زیر خواهد بود:



$$\sin \alpha > 0 \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 180^\circ$$

۱۴ - گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\sin 2\alpha > 0 \Rightarrow 0^\circ < 2\alpha < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ \quad (I)$$

$$\sin \alpha \tan \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ربع اول } \alpha \\ \text{ربع چهارم } \alpha \end{cases} \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) : 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ ربع اول } \alpha$$

۱۵ - گزینه ۲

$$\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{(1 + \sin \theta)^2 - (1 - \sin \theta)^2}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta - (1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta - 1 + 2 \sin \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{4 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{1} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = 4 \tan \theta \times \frac{1}{\cos \theta} = \frac{4 \tan \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{سینوس زاویه بین آن‌ها} \times \text{حاصلضرب دو ضلع} \times \frac{1}{2} = \text{مساحت مثلث}$$

۱۶ - گزینه ۱

بیشترین مقدار $\sin \theta$ و $\cos \theta$ برابر با ۱ است

$$3 \sin \alpha + 2 \cos \beta = 5 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 1 \\ \cos \beta = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 1^2 + \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \\ \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta + 1^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = 0 \Rightarrow \sin \beta = 0 \end{cases}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 0^2 + 0^2 = 0$$

۱۸ - گزینه ۴ نقطه‌ی P روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، هرگاه طول آن برابر $\cos \theta$ و عرض آن برابر با $\sin \theta$ باشد؛ یعنی مختصات آن به فرم $P \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ باشد؛ در نتیجه باید بین طول و عرض

آن رابطه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ برقرار باشد.

علاوه بر آن در ربع چهارم دایره‌ی مثلثاتی، سینوس منفی و کسینوس مثبت است.

با شرایط فوق، از بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی چهارم در شرایط مسئله صدق می‌کند.

$$P \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{3} > 0 \\ -\frac{2}{3} < 0 \end{cases}, \quad \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 + \left(-\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

۱۹ - گزینه ۱ به ازای هر زاویه‌ی x داریم: $-1 \leq \sin x \leq 1$

بر روی نامساوی‌های بالا، عبارت $(2a + 1) - 3 \sin x$ را می‌سازیم:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\times(-3)} 3 \geq -3 \sin x \geq -3 \xrightarrow{+(2a+1)}$$

$$\underbrace{(2a + 1) + 3}_{\text{بیشترین مقدار}} \geq (2a + 1) - 3 \sin x \geq (2a + 1) - 3$$

$$\Rightarrow 2a + 1 + 3 = 8 \Rightarrow 2a = 8 - 3 - 1 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

۲۰ - گزینه ۲

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \tan^2 33^\circ = \frac{1}{\cos^2 33^\circ} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 33^\circ} \Rightarrow 1 + \frac{3}{9} = \frac{1}{\cos^2 33^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 33^\circ} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos^2 33^\circ = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 33^\circ + \cos^2 33^\circ = 1 \Rightarrow \sin^2 33^\circ = 1 - \cos^2 33^\circ = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{} \rightarrow \begin{cases} \sin 33^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin 33^\circ = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

چون زاویه‌ی 33° در ربع چهارم واقع است، سینوس آن منفی است، پس $\sin 33^\circ = -\frac{1}{2}$ را می‌پذیریم.

$\cos 24^\circ$ را چنین محاسبه می‌کنیم:

$$\sin^2 24^\circ + \cos^2 24^\circ = 1 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \cos^2 24^\circ = 1 \Rightarrow \cos^2 24^\circ = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{} \rightarrow \begin{cases} \cos 24^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 24^\circ = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

و چون زاویه‌ی ۲۴° در ربع سوم است، کسینوس آن منفی است. پس $\cos ۲۴^\circ = -\frac{1}{۲}$ را بر می‌گزینیم.

$$\sin ۳۳^\circ + \cos ۲۴^\circ = -\frac{1}{۲} + \left(-\frac{1}{۲}\right) = -۱$$

۲۱ - گزینه ۳ بیشترین مقدار سینوس و کسینوس برابر ۱ است. بنابراین مجموع این دو نسبت زمانی ۲ است که هر یک برابر با ۱ باشند:

$$\cos(A - B) = 1 \Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow A = B$$

$$\sin\left(\frac{B}{۲} + C\right) = 1 \Rightarrow \frac{B}{۲} + C = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۹۰ - \frac{B}{۲}$$

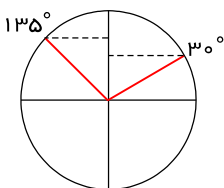
$$\text{از طرفی: } A + B + C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B + B + ۹۰ - \frac{B}{۲} = ۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۲B - \frac{B}{۲} = ۱۸۰ - ۹۰ \Rightarrow ۱,۵B = ۹۰ \Rightarrow B = \frac{۹۰}{۱,۵} = ۶۰ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = ۶۰^\circ \\ \hat{C} = ۶۰^\circ \end{cases}$$

پس مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۲۲ - گزینه ۲

زاویه‌ی θ در حرکت از ۳۰° تا ۱۳۵° ، از ۹۰° می‌گذرد، یعنی $\sin \theta$ در این مسیر، حداکثر خود را تجربه می‌کند، یعنی حداکثر $\sin \theta$ برابر با یک است. از طرفی:



یعنی کمترین مقدار سینوس در این شرایط برابر با $\frac{1}{۲} = \sin ۳۰^\circ$ است. پس:

$$\begin{aligned} \frac{1}{۲} < \sin \theta \leq 1 &\Rightarrow \frac{1}{۲} < \frac{۳m - ۲}{۴} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} ۲ < ۳m - ۲ \leq ۴ \\ \xrightarrow{+2} ۴ < ۳m \leq ۶ &\xrightarrow{\div 3} \frac{4}{3} < m \leq ۲ \end{aligned}$$

۲۳ - گزینه ۱

$$\sin^۲ \alpha + \cos^۲ \alpha = 1$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^۲ < 1 \Rightarrow \underbrace{\sin^۲ \alpha + \cos^۲ \alpha}_1 + ۲ \sin \alpha \cos \alpha < 1 \Rightarrow ۲ \sin \alpha \cos \alpha < 1 - 1$$

$$\Rightarrow ۲ \sin \alpha \cos \alpha < 0 \xrightarrow{\div 2} \sin \alpha \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha, \sin \alpha \text{ مختلف‌العلامه هستند}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos \alpha > 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0 \end{cases}$$

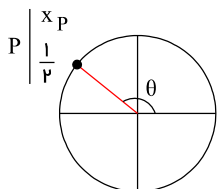
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پس در هر حالت، ۳ تا از نسبت‌های مثلثاتی منفی و یکی از آن‌ها مثبت است.

۲۴ - گزینه ۴

اگر نقطه‌ی $P \begin{vmatrix} x_p \\ y_p \end{vmatrix}$ روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، $x_p = \cos \theta$ و $y_p = \sin \theta$ خواهد بود.
--

دایره را ببینید:



$$\sin^۲ \theta + \cos^۲ \theta = 1 \Rightarrow x_p^۲ + y_p^۲ = 1 \xrightarrow{y_p = \frac{1}{۲}} x_p^۲ + \left(\frac{1}{۲}\right)^۲ = 1$$

$$\Rightarrow x_p + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow x_p = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} x_p = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \\ x_p = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

چون P در ربع دوم است، مقدار منفی را می‌پذیریم.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A = \sin \theta + \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

شیب خطی که با جهت مثبت محور x زاویه α بسازد برابر است با: $\tan \alpha$

۲۵ - گزینه ۴ می‌دانیم:

$$L: \sqrt{3}x + ay = 1 \Rightarrow ay = -\sqrt{3}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{a}x + \frac{1}{a}$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{a} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \frac{-9}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{3}$$

۲۶ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow[\sin x > 0]{\text{ربع اول } x} \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$2 \tan x - 5 \cot x = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} - 5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

۲۷ - گزینه ۴

می‌دانیم: شیب خطی که با جهت مثبت محور x زاویه α می‌سازد؛ برابر است با: $\tan \alpha$

$$\begin{cases} \tan 60^\circ = \sqrt{3} = a \\ y = ax + b \xrightarrow{(-1,0)} 0 = -\sqrt{3} + b \Rightarrow b = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

۲۸ - گزینه ۲ می‌دانیم:

$$A = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$= 2 \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) = 2 \sin^2 \theta - 1 + \sin^2 \theta = 3 \sin^2 \theta - 1$$

$$\xrightarrow{\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3 \times \frac{3}{4} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} - 2 \tan^2 \theta &= \frac{1 + \sin \theta + 1 - \sin \theta}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} - 2 \tan^2 \theta \\ &= \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} - \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2 - 2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{2(1 - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \end{aligned}$$

۳۰ - گزینه ۳ بررسی سایر گزینه‌ها:

الف) نادرست زیرا:

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

ب) درست زیرا:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\sin x + (1 - \cos^2 x)}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\sin x(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \end{aligned}$$

ج) درست زیرا:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right)}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

د) درست زیرا:

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

۳۱ - گزینه ۴

$$\frac{\tan^2 \theta - 1}{\tan \theta - 1} - \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ 1 - \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\frac{(\tan \theta - 1)(\tan^2 \theta + \tan \theta + 1)}{(\tan \theta - 1)} - (1 + \tan^2 \theta) = \sqrt{2}$$

$$\cancel{\tan^2 \theta + \tan \theta + 1} - \cancel{\tan^2 \theta} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + 2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \frac{1}{3} = \cos^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\xrightarrow[\cos \theta < 0]{\text{ربع سوم}} \cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\xrightarrow[\sin \theta < 0]{\text{ربع سوم}} \sin \theta = -\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$$

۳۲ - گزینه ۳

$$\frac{2 \cos x}{1 + \sin x} + 2 \tan x = \frac{2 \cos x}{1 + \sin x} + \frac{2 \sin x}{\cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \sin x + 2 \sin^2 x}{(1 + \sin x) \cos x}$$

$$= \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2 + 2 \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2(1 + \sin x)}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{25} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{-21}{25} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-21}{50}$$

$$A = \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{-50}{21}$$

۳۴ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

$$1) \text{ نادرست: } 1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$2) \text{ نادرست: } (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

$$3) \text{ درست: } \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$4) \text{ نادرست: } \frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

۳۵ - گزینه ۴

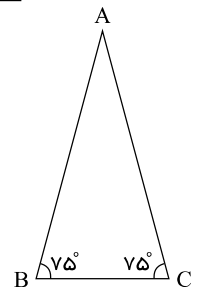
$$\begin{aligned} & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 (1 + \tan^2 \theta)^2 - (\tan^2 \theta - 1)^2 \\ &= \left((\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_1 \right)^2 \left(\left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right)^2 - (\tan^2 \theta - 1)^2 \right) \\ &= \left(\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)^2 - (\tan^2 \theta - 1)^2 = (1 - \tan^2 \theta)^2 - (-1 + \tan^2 \theta)^2 = 0 \end{aligned}$$

۳۶ - گزینه ۴ می‌دانیم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$\begin{cases} 25 = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} \\ \hat{A} = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ \end{cases} \xrightarrow{AB=AC} 25 = \frac{1}{2} (AB)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AB^2 = 100 \Rightarrow AB = 10$$



۳۷ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} \tan \theta + \cot \theta < 0 &\rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} < 0 \rightarrow \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} < 0 \rightarrow \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} < 0 \\ \rightarrow \sin \theta \cos \theta < 0 &\rightarrow \begin{cases} \sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \rightarrow (\text{ربع دوم}) \\ \sin \theta < 0, \cos \theta > 0 \rightarrow (\text{ربع چهارم}) \end{cases} \end{aligned}$$

۳۸ - گزینه ۲

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \hat{A} \quad \text{فرمول مساحت مثلث برابر است با:}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EFG}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A}{\frac{1}{2}EF \cdot EG \cdot \sin \hat{E}} \stackrel{A=E, AB=\frac{2}{3}EF}{=} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}EF \cdot 3EG \cdot \sin E}{\frac{1}{2} \cdot EF \cdot EG \cdot \sin \hat{E}} = \frac{3}{2}$$

۳۹ - گزینه ۲

می‌دانیم: شیب خطی که با جهت مثبت محور x زاویه θ سازد برابر است با: $\tan \theta$

$$3x - 4y = 12 \rightarrow 4y = 3x - 12 \rightarrow y = \frac{3}{4}x - 3$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

۴۰ - گزینه ۳

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} \cos \alpha - \sin^2 \alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha} = |\cos \alpha| \cos \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\stackrel{180^\circ < \alpha < 270^\circ}{=} -\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = -1$$

۴۱ - گزینه ۲

$$A = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha) + (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

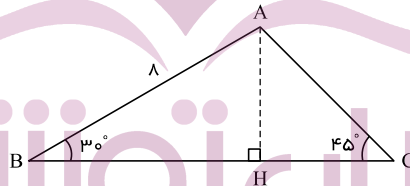
$$= \frac{1 - \sin^2 \alpha + 1 - \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 - 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

۴۲ - گزینه ۱

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:



$$\left. \begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{\lambda} \Rightarrow AH = \frac{\lambda}{2} \\ \tan 45^\circ &= \frac{AH}{CH} \Rightarrow 1 = \frac{AH}{CH} \Rightarrow AH = CH \\ \tan 30^\circ &= \frac{AH}{BH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{\lambda}{2}}{BH} \Rightarrow BH = \frac{\lambda}{2\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow CH = \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow BC = CH + BH = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2\sqrt{3}} = \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{\frac{\lambda}{2} \times \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2\sqrt{3}}\right)}{2} = \frac{\lambda^2 \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{8} = \frac{\lambda^2 (1 + \sqrt{3})}{8\sqrt{3}}$$

۴۳ - گزینه ۴

$$1) \tan \theta < 0 \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} < 0 \Rightarrow \sin \theta \text{ و } \cos \theta \text{ غیر هم علامتند} \Rightarrow \theta \text{ در ربع دوم یا چهارم است.}$$

$$2) \cos \theta \times \cot \theta < 0 \Rightarrow \cos \theta \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} < 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} < 0 \Rightarrow \sin \theta \text{ منفی است.}$$

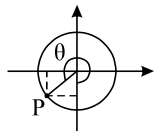
⇒ از بین ربع های دوم و چهارم، ربع چهارم را می پذیریم.

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha \quad \text{گزینه ۳ می دانیم:}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha (\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha) - \cot^2 \alpha - 1 = 0$$

۴۵ - گزینه ۱

شکل مقابل را برای مسئله رسم می کنیم:



P نقطه ای روی دایره مثلثاتی با مختصات به فرم $(\cos \theta, \sin \theta)$ است.

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 &\Rightarrow \sin \theta = 2 \cos \theta \quad (*) \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 & \end{aligned} \right\} \rightarrow 4 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{(*)} \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow P \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \Rightarrow \text{مجموع مؤلفه ها} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-3}{\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}}{5}$$

۴۶ - گزینه ۳ چون $1 \leq \cos \alpha \leq 1$ پس $-1 \leq -\cos \alpha \leq 1$ و در نتیجه همواره: $0 \leq 1 - \cos \alpha \leq 2$

طبق سوال $2 < (\sin \alpha)(1 - \cos \alpha) < 0$ است، پس باید $\sin \alpha$ مثبت باشد، یعنی α در ربع اول یا دوم می باشد.

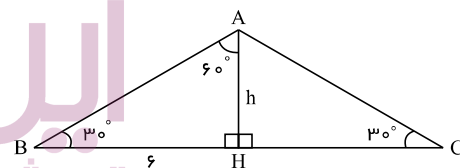
۴۷ - گزینه ۴

$$\xrightarrow[\substack{\Delta ABC \\ \text{متساوی الساقین است}}]{AB=AC} \hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$$

از طرفی در مثلث متساوی الساقین ارتفاع، میانه و نیمساز نیز می باشد.

$$\xrightarrow{\Delta ABH} \tan 30^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{h}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{h \times BC}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 12}{2} = 12\sqrt{3}$$



۴۸ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\underbrace{(1 + \sin \theta)}_{\text{مزدوج}} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \underbrace{(1 - \sin \theta)}_{\text{مزدوج}} (1 - \sin \theta)$$

$$= \underbrace{(1 - \sin^2 \theta)}_{\cos^2 \theta} \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta) = \frac{\overbrace{\cos^2 \theta (1 + \sin \theta) (1 - \sin \theta)}^{\text{مزدوج}}}{\cos \theta} = \cos \theta \times \cos^2 \theta = \cos^3 \theta$$

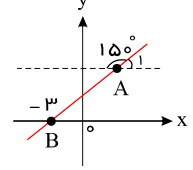
$$15^\circ + A' = 18^\circ \Rightarrow A_1 = 18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط} = m = \tan \hat{A}_1 = \tan 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - (-3))$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}x - y + \sqrt{3} = 0 \\ ax - \sqrt{3}y + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3}y + 3 = 0 \\ ax - \sqrt{3}y + c = 0 \end{cases}$$

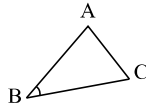
$$\Rightarrow a = 1, c = 3 \Rightarrow a.c = 3$$



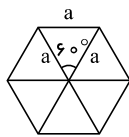
۵۰ - گزینه ۴ راه حل اول:

نکته: مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B}$$



مطابق شکل روبه‌رو، مساحت هر شش ضلعی منتظم، ۶ برابر مساحت یک متساوی‌الاضلاع است، پس اگر طول شش ضلعی را a در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$S = 6 \times \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = 3a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مساحت شش ضلعی برابر $54\sqrt{3}$ است، بنابراین:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 54\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

راه حل دوم:

نکته: مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

یکی شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. بنابراین مطابق نکته داریم:

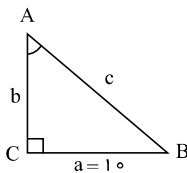
$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 54\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

۵۱ - گزینه ۲

$$\cos \alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}$$

می‌دانیم:

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{طول ضلع قائمه‌ی مجاور به زاویه‌ی } A}{\text{طول وتر}} = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \Rightarrow b = \frac{12}{13}c \quad (1)$$



طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 \xrightarrow{(1)} c^2 = (10)^2 + \left(\frac{12}{13}c\right)^2$$

$$c^2 = 100 + \frac{144}{169}c^2 \Rightarrow 169c^2 = 16900 + 144c^2 \Rightarrow 25c^2 = 16900$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{16900}{25} = \frac{169 \times 100}{25} \Rightarrow c = 13 \times 2 = 26$$

$$\xrightarrow{(1)} b = \frac{12}{13} \times 26 = 24 \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 24 \\ c = 26 \end{cases}$$

$$10 + 24 + 26 = 60 = \text{محیط مثلث}$$

۵۲ - گزینه ۴ می‌دانیم که $\tan \theta$ و $\cot \theta$ معکوس هم هستند؛ یعنی:

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \Rightarrow \frac{a+3}{b} = \frac{1}{\frac{2}{a-1}} \Rightarrow \frac{a+3}{b} = \frac{a-1}{2} \Rightarrow 2a+6 = ab-b$$

آرایش گزینه‌ها نشان می‌دهد که باید a را برحسب b و یا b را برحسب a بدست آوریم.

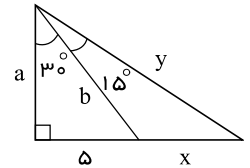
$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - ab = -6 - b \Rightarrow a(2 - b) = -6 - b \Rightarrow a = \frac{-6 - b}{2 - b} = \frac{b + 6}{b - 2} \\ 2a + 6 = b(a - 1) \Rightarrow b = \frac{2a + 6}{a - 1} \end{cases}$$

۵۳ - گزینه ۳ چون در فرض مسئله مقدار $\tan x$ داده شده است، صورت و مخرج را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan x$ بدست آید:

$$\frac{2 \cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \div \cos x = \frac{2 \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}$$

$$= \frac{2 - \tan x}{\tan x + 1} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5} = 2$$

۵۴ - گزینه ۳



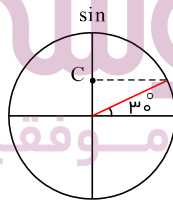
$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \frac{5}{b} \Rightarrow b = 10$$

$$\begin{aligned} \cos 30 &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 5\sqrt{3} \\ \cos 45 &= \frac{5\sqrt{3}}{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = 10\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\sin 45 = \frac{x+5}{10\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x+5 = 5\sqrt{3} \rightarrow x = 5\sqrt{3} - 5$$

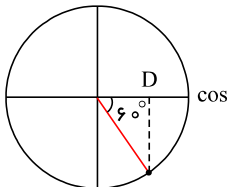
$$x + y = 5\sqrt{3} - 5 + 10\sqrt{\frac{3}{2}} = 5(\sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{\frac{3}{2}})$$

۵۵ - گزینه ۱ با بدست آوردن مختصات نقاط D و C از روی نسبت‌های مثلثاتی، طول پاره‌خط CD را بدست می‌آوریم:



$$\sin 30 = \frac{1}{2} \rightarrow C(0, \frac{1}{2})$$

ایران توننه
توشه‌ای برای موفقیت



$$\cos(360 - 60) = \cos 60 = \frac{1}{2} \rightarrow D(\frac{1}{2}, 0)$$

$$|CD| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(\frac{1}{2} - 0)^2 + (0 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵۶ - گزینه ۳

مثال‌های ده

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\sin^r \alpha + \cos^r = 1 \Rightarrow \cos^r \alpha = 1 - \sin^r \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^r \alpha} \\ \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^r \alpha} \end{cases}$$

چون $\cos \alpha$ در مسئله بصورت یک رادیکال داده شده و مثبت است، مقدار مثبت را می‌پذیریم:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^r \alpha} = \sqrt{1 - m^r} \xrightarrow{()^r} 1 - \sin^r \alpha = 1 - m^r \Rightarrow \sin^r \alpha = m^r$$

$$\text{از طرفی: } 1 + \cot^r \alpha = \frac{1}{\sin^r \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{\frac{m}{n} - 1} \right)^r = \frac{1}{m^r}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{m}{n} - 1 = \frac{1}{m^r} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{m^r} \Rightarrow m^r = n$$

۵۷ - گزینه ۴

$$\left(\tan^r \alpha - (\sin^r \alpha + \cos^r \alpha) \right) \left(\frac{1}{\sin^r \alpha - \cos^r \alpha} \right) = (\tan^r \alpha - 1) \left(\frac{1}{\sin^r \alpha - \cos^r \alpha} \right)$$

$$= \left(\frac{\sin^r \alpha}{\cos^r \alpha} - 1 \right) \left(\frac{1}{\sin^r \alpha - \cos^r \alpha} \right) = \frac{\sin^r \alpha - \cos^r \alpha}{\cos^r \alpha} \times \frac{1}{\sin^r \alpha - \cos^r \alpha} = \frac{1}{\cos^r \alpha}$$

۵۸ - گزینه ۲

می‌دانیم:

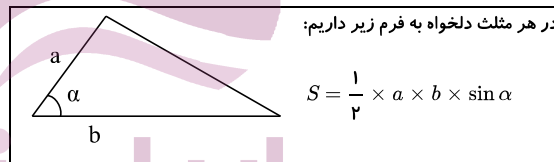
$$\begin{cases} a > 0 \rightarrow r \leq a + \frac{1}{a} \\ a < 0 \rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -r \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{cases} \tan x > 0 \rightarrow r \leq \tan x + \frac{1}{\tan x} : r \leq k - 1 \rightarrow r \leq k \\ \tan x < 0 \rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} \leq -r : k - 1 \leq -r \rightarrow k \leq -1 \end{cases}$$

۵۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: در هر مثلث دلخواه به فرم زیر داریم:



باتوجه به قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه $\triangle MNC$ و $\triangle ADN$, $\triangle ABM$ داریم:

$$AM = AN = \sqrt{5}, \quad MN = \sqrt{r}$$

$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{r} \times AM \times AN \times \sin \theta$$

$$\xrightarrow{S_{\triangle AMN} = S_{ABCD} - (S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ADN} + S_{\triangle MNC})} \left(r - \left(1 + 1 + \frac{1}{r} \right) \right) = \frac{1}{r} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{r}{r} = \frac{\sqrt{r5}}{r} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{r}{5}$$

۶۰ - گزینه ۱

$$\frac{\sin^f x + \cos^f x}{\sin^r x \cos^r x} - (\tan x + \cot x)^r =$$

$$\frac{\sin^f x}{\sin^r x \cos^r x} + \frac{\cos^f x}{\sin^r x \cos^r x} - \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^r =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) \\ &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 2 = -2 \end{aligned}$$

۶۱ - گزینه ۲

$$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

می‌دانیم:

داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \sin 15^\circ}{1 - \sin 15^\circ} - \frac{1 - \sin 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} = \frac{(1 + \sin 15^\circ)^2 - (1 - \sin 15^\circ)^2}{1 - \sin^2 15^\circ} \\ &= \frac{1 + \sin^2 15^\circ + 2 \sin 15^\circ - (1 + \sin^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ)}{\cos^2 15^\circ} = \frac{4 \sin 15^\circ}{\cos^2 15^\circ} \end{aligned}$$

۶۲ - گزینه ۴

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha, \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

می‌دانیم:

ابتدا هر یک از عبارتها را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \alpha - \cot \alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} \xrightarrow{\text{تقسیم صورت و مخرج کسر بر } \sin \alpha} \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{1 - \cot \alpha}$$

$$\text{کل عبارت} = (\tan \alpha - \cot \alpha) - \frac{\cot \alpha}{1 - \cot \alpha}$$

$$\xrightarrow{\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = 2} \text{کل عبارت} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{18 - 2 - 3}{6} = \frac{13}{6}$$

۶۳ - گزینه ۲

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\ \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \end{cases}$$

$$A = \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x + \cos x}{\sin x} + \frac{1 - \sin x + \sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

۶۴ - گزینه ۱ باتوجه به دایره‌ی مثلثاتی، تانژانت در ربع‌های اول و سوم مثبت است و سینوس در ربع‌های سوم و چهارم منفی و در نتیجه α در ربع سوم واقع است که: $-1 < \cos \alpha < 0$

$$-1 < \frac{2m - 1}{5} < 0 \xrightarrow{\times 5} -5 < 2m - 1 < 0 \xrightarrow{+1} -4 < 2m < 1 \xrightarrow{\div 2} -2 < m < \frac{1}{2}$$

$$-2 < m < \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 4} -8 < 4m < 2 \xrightarrow{-5} -13 < 4m - 5 < -3$$

$$\xrightarrow{\div 3} \frac{-13}{3} < \frac{4m - 5}{3} < -1 \rightarrow \frac{-13}{3} < A < -1$$

۶۵ - گزینه ۴

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow -5 \leq 5 \sin x \leq 5$$

$$\xrightarrow{-3} -8 \leq 5 \sin x - 3 \leq 2 \rightarrow |5 \sin x - 3| \leq 8 \Rightarrow \text{Max} = 8$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 1 \circ \sin' \alpha} \stackrel{\div \sin' \alpha}{=} \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin' \alpha}}{\frac{\sin \alpha + 1 \circ \sin' \alpha}{\sin' \alpha}} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \times \frac{1}{\sin' \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\sin' \alpha} + \frac{1 \circ \sin' \alpha}{\sin' \alpha}}$$

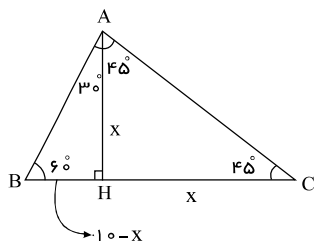
$$= \frac{\cot \alpha (1 + \cot' \alpha)}{\frac{1}{\sin' \alpha} + 1 \circ} = \frac{\cot \alpha (1 + \cot' \alpha)}{(1 + \cot' \alpha) + 1 \circ} = \frac{\cot \alpha + \cot' \alpha}{11 + \cot' \alpha} = \frac{15}{7}$$

۶۷ - گزینه ۳

می دانیم: در هر مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}, \quad \sin \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}$$

ارتفاع AH را رسم می کنیم و CH را x می نامیم؛ واضح است که طول BH برابر با $x - 1 \circ$ خواهد بود.
داریم:



$$AH = CH = x$$

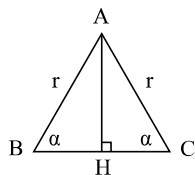
$$\tan 39^\circ = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10 - x}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3} + 3}{3} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{3 + \sqrt{3}} = 5(3 - \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 45^\circ} = \frac{5(3 - \sqrt{3})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 5(\sqrt{18} - \sqrt{6}) = 5\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)$$

۶۸ - گزینه ۲

می دانیم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B}$$



$$HB = r \cdot \cos \alpha$$

$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} AB \cdot BH \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} r \cdot (r \cos \alpha) \sin \alpha$$

پس داریم:

$$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABH} = r^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{r^2}{3} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

برای به دست آوردن $\sin \alpha + \cos \alpha$ از اتحاد مربع دو جمله ای کمک می گیریم.

$$(\sin \alpha + \cos \alpha) = \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \xrightarrow[\sin \alpha + \cos \alpha > 0]{\text{حاده } \alpha} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\triangle H\hat{B}C : H\hat{B}C = 75^\circ, B\hat{H}C = 90^\circ \Rightarrow H\hat{C}B = 15^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(H\hat{C}B) = \frac{\text{ضلع مقابل وتر}}{\sin 15^\circ} = \frac{HB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2BC} \Rightarrow BC = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} \Rightarrow BC = \sqrt{3} + 1$$

$$\triangle ABC : \tan(A\hat{C}B) = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{AB}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow AB = 3 + \sqrt{3}$$

۷۰ - گزینه ۲

$$\tan \alpha = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{5} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{5} \cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{20} \sin \alpha}{(\sqrt{5} - 1) \sin \alpha + \sqrt{5} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{20} \times \sqrt{5} \cos \alpha}{(\sqrt{5} - 1) \sqrt{5} \cos \alpha + \sqrt{5} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{5} \cos \alpha \times \sqrt{20}}{\sqrt{5} \cos \alpha (\sqrt{5} - 1 + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 2$$

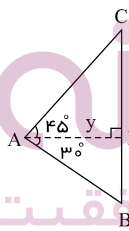
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \text{۷۱ - گزینه ۴ می‌دانیم:}$$

$$A = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 - 3 \tan^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = (1 + \tan^2 x)^2 - 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x)$$

$$A = 1 + 3 \tan^2 x + 3 \tan^4 x + \tan^6 x - 3 \tan^2 x - 3 \tan^4 x = 1 + \tan^6 x$$

۷۲ - گزینه ۳

$$\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} \quad \text{در هر مثلث قائم‌الزاویه:}$$

ارتفاع برج را x در نظر می‌گیریم و داریم:

$$BC = x, AH = y$$

$$\tan 30^\circ = \frac{28}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{28}{y} \Rightarrow y = 28\sqrt{3}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{CH}{y} \Rightarrow 1 = \frac{CH}{y} \Rightarrow CH = y = 28\sqrt{3}$$

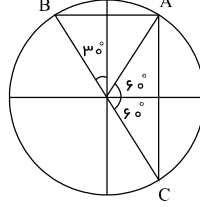
$$x = BC = BH + CH = 28 + 28\sqrt{3} = 28(1 + \sqrt{3})$$

۷۳ - گزینه ۱

مساحت هر مثلث دلخواه به شکل روبه‌رو برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \theta$$

می‌دانیم:



$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = r \cos 60^\circ \\ \overrightarrow{AC} = r \sin 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = r \times \frac{1}{2} = 1 \\ AC = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۷۴ - گزینه ۴

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \rightarrow \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = 2$$

$$\frac{\tan^r + 1}{\tan \alpha} = 2 \rightarrow \tan^r \alpha + 1 = 2 \tan^r \alpha \rightarrow \tan^r \alpha + 1 - 2 \tan \alpha = 0$$

$$(\tan \alpha - 1)^r = 0 \rightarrow \tan \alpha - 1 = 0 \rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 1$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = 1 - 1 = 0$$

۷۵ - گزینه ۴

$$x = \frac{2}{\sin \alpha} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$y = 2 \cot \alpha \rightarrow \frac{y}{2} = \cot \alpha$$

$$\frac{1}{\sin^r \alpha} = 1 + \cot^r \alpha \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^r = 1 + \left(\frac{y}{2}\right)^r \Rightarrow \frac{x^r}{2^r} = 1 + \frac{y^r}{2^r} \xrightarrow{\times 2^r} 9x^r = 36 + 4y^r$$

۷۶ - گزینه ۴

$$\frac{1}{\cos^f x} + \frac{A}{\cos^r x} = \tan^f x - 1 \rightarrow \frac{1}{\cos^f x} + \frac{A}{\cos^r x} = \frac{\sin^f x}{\cos^f x} - 1$$

$$\xrightarrow{\times \cos^f x} 1 + A \cos^r x = \sin^f x - \cos^f x \rightarrow$$

$$1 + A \cos^r x = (\sin^r x - \cos^r x)(\sin^r x + \cos^r x)$$

$$1 + A \cos^r x = \sin^r x - \cos^r x \rightarrow 1 - \sin^r x + A \cos^r x = -\cos^r x$$

$$\cos^r x + A \cos^r x = -\cos^r x \rightarrow \cos^r x(1 + A) = -\cos^r x$$

$$1 + A = -1 \rightarrow A = -2$$

۷۷ - گزینه ۴

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \cot x = \frac{1}{\frac{rab}{a^r - b^r}} = \frac{a^r - b^r}{2ab}$$

$$\frac{1}{\sin^r x} = 1 + \cot^r x \Rightarrow \frac{1}{\sin^r x} = 1 + \left(\frac{a^r - b^r}{2ab}\right)^r =$$

$$1 + \frac{a^f + b^f - 2a^r b^r}{2a^r b^r} = \frac{a^f + b^f + 2a^r b^r}{2a^r b^r} \Rightarrow \sin^r x = \frac{2a^r b^r}{a^f + b^f + 2a^r b^r}$$

$$\sin^r x = \frac{(rab)^r}{(a^r + b^r)^r} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{rab}{a^r + b^r} \xrightarrow{\text{مربع اول}} \sin x = \frac{rab}{a^r + b^r}$$

۷۸ - گزینه ۱

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{-8}{9} \rightarrow \sin x \cos x = \frac{-4}{9}$$

$$\sin^r x + \cos^r x = (\sin x + \cos x)(\sin^r x + \cos^r x - \sin x \cos x) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{-4}{9} \right) \right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{9} = \frac{13}{27}$$

۷۹ - گزینه ۳

$$\sin^r x + \cos^r x = 1 \xrightarrow{(\cdot)^r} \sin^r x + \cos^r x + 2 \sin^r x \cos^r x = 1$$

$$\frac{3}{5} + 2 \sin^r x \cos^r x = 1 \rightarrow 2 \sin^r x \cos^r x = \frac{2}{5} \rightarrow \sin^r x + \cos^r x = \frac{1}{5}$$

$$\sin^r x + \cos^r x = (\sin^r x + \cos^r)(\sin^r x + \cos^r x - \sin^r x \cos^r x)$$

$$= 1 \times \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5}$$

$$*: a^r + b^r = (a^r + b^r)(a^r + b^r - a^r b^r)$$

۸۰ - گزینه ۴ با توجه به دایره مثلثاتی:

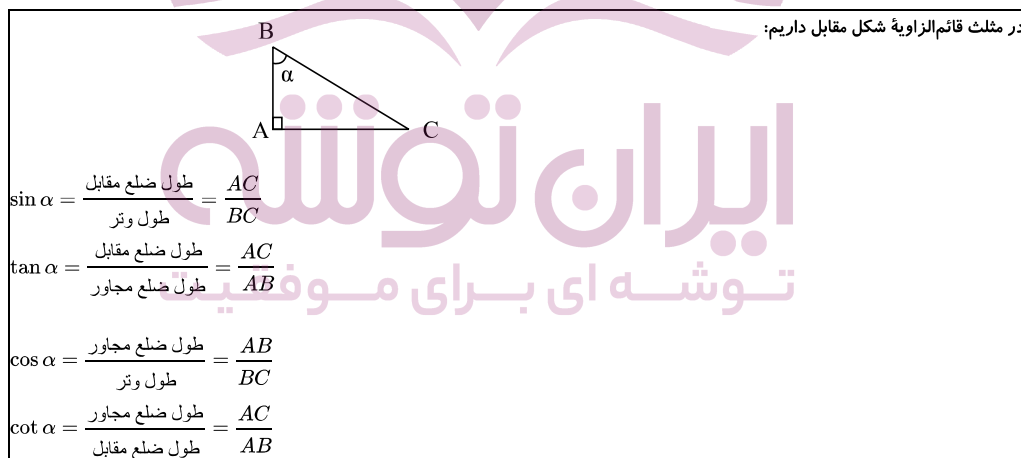
$$\frac{\cos(270^\circ + \theta) - \cos(180^\circ + \theta)}{\sin(180^\circ - \theta) - \sin(180^\circ + \theta)} = \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\sin \theta - (-\sin \theta)} =$$

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{\sin \theta}{2 \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{\cot \theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

۸۱ - گزینه ۳

می‌دانیم:

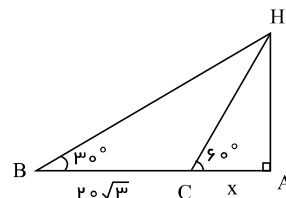
در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل داریم:



فرض کنیم $AC = x$ به کمک تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم:

$$\triangle AHB : \tan 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{20\sqrt{3} + x} \Rightarrow AH = (20\sqrt{3} + x) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 20 + \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle AHC : \tan 60^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{x} \Rightarrow AH = x\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{AH}{\sqrt{3}}$$



مثلثات دهم

با جایگذاری این مقدار در (*) داریم:

$$AH = 20 + \frac{AH}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}AH = 20 \Rightarrow AH = 30$$

۸۲ - گزینه ۱

می‌دانیم:

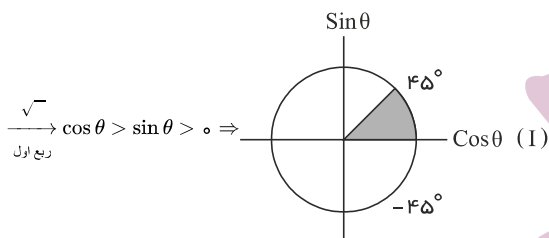
$$\begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta > 0 \end{cases} \Rightarrow \tan \theta > 0, \cot \theta > 0$$

$$\begin{cases} \sin \theta < 0 \\ \cos \theta < 0 \end{cases} \Rightarrow \tan \theta > 0, \cot \theta > 0$$

با توجه به مثبت بودن $\tan \theta$ و $\cot \theta$ در ناحیه اول یا سوم است:

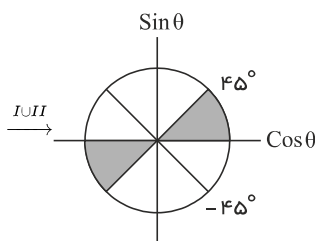
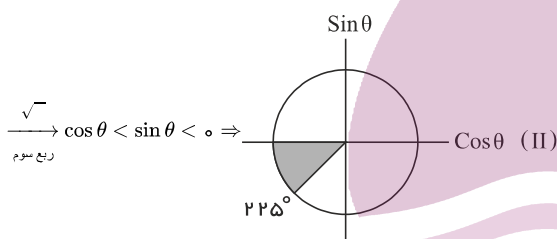
$$\theta \text{ ربع اول} \begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta > 0 \end{cases}$$

$$\cot \theta > \tan \theta \Rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} > \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \xrightarrow{\sin \theta \cos \theta > 0} \cos^2 \theta > \sin^2 \theta$$



$$\theta \text{ ربع سوم} \begin{cases} \sin \theta < 0 \\ \cos \theta < 0 \end{cases}$$

$$\cot \theta > \tan \theta \Rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} > \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \xrightarrow{\sin \theta \cos \theta > 0} \cos^2 \theta > \sin^2 \theta$$

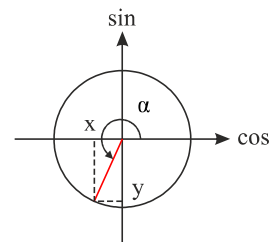


ایران تونله
توشه ای برای موفقیت

۸۳ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\begin{cases} \sin \theta < 0 \\ \cos \theta < 0 \end{cases} \text{ ربع سوم, } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ رابطه فیثاغورس در دایره مثلثاتی } x^2 + y^2 = 1$$



مثال دهم

زاویه α در ناحیه سوم قرار دارد و ضلع انتهایی آن دایره مثلثاتی را در نقطه‌ای به طول $-\frac{1}{4}$ قطع می‌کند. بنابراین طبق رابطه فیثاغورس عرض نقطه برابر است با:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow \frac{1}{16} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{15}{16} \xrightarrow[\text{در ناحیه سوم } \alpha]{y < 0} y = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin \alpha = y = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \cos \alpha = x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{15} + 1 \times \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}{-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15} - \frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = \frac{-\sqrt{15}}{-\frac{1}{4}} = 4\sqrt{15}$$

۸۴ - گزینه ۳

می‌دانیم:

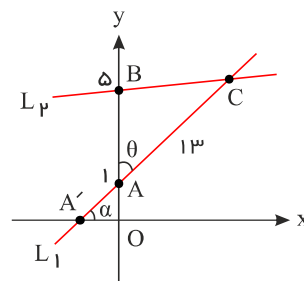
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \theta \quad (\theta : \text{زاویه بین } AB, AC)$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

شیب خطی که با جهت مثبت محور x ها زاویه α می‌سازد $\tan \alpha =$

می‌دانیم مساحت مثلث از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \theta \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} (5 - 1) \times 13 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{13}$$



در مثلث $AA'O$ داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = \theta, \sin \theta = \frac{OA'}{AA'} \\ \hat{A}' = \alpha, \cos \alpha = \frac{OA'}{AA'} \end{cases} \Rightarrow \sin \theta = \cos \alpha = \frac{12}{13}$$

با توجه به اینکه شیب خط برابر است با تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور x ها، بنابراین کافیسست $\tan \alpha$ را به دست آوریم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha > 0} \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{12}{13}\right)^2} - 1} = \frac{5}{12}$$

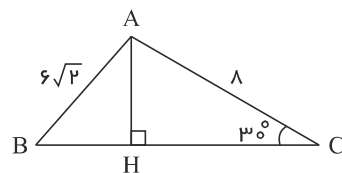
۸۵ - گزینه ۳

می‌دانیم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \theta \quad (\theta : \text{زاویه بین } AC, AB)$$

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}, \cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$$

ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم:



مثال دهم

$$\Rightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2 = (6\sqrt{3})^2 - 4^2 = 36(3) - 16 = 72 - 16 = 56$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{A \times V} \Rightarrow BH = 2\sqrt{14}$$

$$BC = BH + CH = 2\sqrt{14} + 4\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin 30^\circ \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (A)(2\sqrt{14} + 4\sqrt{3}) \frac{1}{2} = 4(\sqrt{14} + 2\sqrt{3})$$

۸۶ - گزینه ۳

می‌دانیم: شیب هر خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

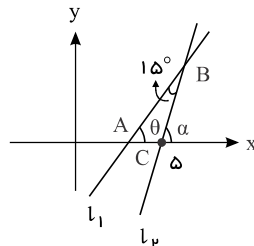
شیب خط گذرا از نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) برابر است با

در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع زوایای داخلی غیرمجاور است.

ابتدا به کمک شیب خط L_1 ، زاویه آن با جهت مثبت محور x را تعیین می‌کنیم.

$$\sqrt{3}x - 3y = 5 \Rightarrow L_1 \text{ شیب خط } m_1 = \frac{-\sqrt{3}}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$



در مثلث ABC ، داریم:

$$\hat{\alpha} = \hat{A} + \hat{B} = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ \Rightarrow L_2 \text{ شیب خط } m_2 = \tan 45^\circ = 1$$

چون خط L_2 از نقطه $(5, 0)$ می‌گذرد، پس معادله آن عبارت است از:

$$y - 0 = 1(x - 5) \Rightarrow y = x - 5$$

۸۷ - گزینه ۲ یک ضلعی منتظم به ضلع a ، از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است که مساحت هر کدام از آنها $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\text{مساحت ۶ ضلعی منتظم} = 6\left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \Rightarrow \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = 12\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

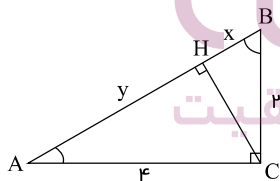
$$\text{محیط ۶ ضلعی منتظم} = P : 6a = 6(2\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$$

۸۸ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

با نوشتن رابطه فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow AB = 5 \Rightarrow x + y = 5 \quad (I)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle ABC : \cos \hat{B} = \frac{3}{5} \\ \triangle BCH : \cos \hat{B} = \frac{y}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{9}{5} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} \frac{9}{5} + y = 5 \Rightarrow y = 5 - \frac{9}{5} = \frac{25 - 9}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{9}{16}$$

۸۹ - گزینه ۳ می‌دانیم:

شیب خطی که با جهت مثبت محور x زاویه θ بسازد، برابر است با: $\tan \theta$

$$\begin{cases} y = ax + b \\ a = \tan 45^\circ = 1 \end{cases} \Rightarrow y = x + b \xrightarrow{(1,0)} 3 = 2 + b \Rightarrow b = 1$$

$$y = x + 1 \xrightarrow{(x,0)} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

۹۰ - گزینه ۴ در دایره مثلثاتی شعاع $r = 1$ است و لذا مجموع مجذور طول و عرض هر نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی برابر یک می‌شود، یعنی $x^2 + y^2 = 1$ در گزینه ۱، و ۳، این حالت برقرار نیست پس یکی از گزینه‌های ۲، یا ۴، جواب است. از طرفی در دایره مثلثاتی اگر نقطه (x_P, y_P) مختصات انتهای کمان مربوط به زاویه α باشد، آن‌گاه $\tan \alpha = \frac{y_P}{x_P}$ است. پس:

$$\text{غ.ق.ق } 2\sqrt{6} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$$

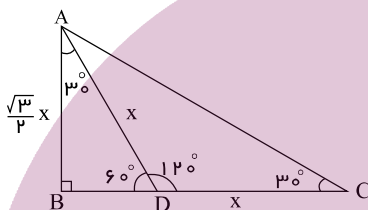
$$\text{گزینه ۴: } \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}, \frac{1}{5}\right) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{-2\sqrt{6}}{5}} = \frac{1}{-2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$$

۹۱ - گزینه ۱ می‌دانیم:

اگر $AD = DC = x$ باشد، آنگاه داریم:



$$S_{\triangle ABD} : 90^\circ + 30^\circ + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$S_{\triangle ABD} : \cos 30^\circ = \frac{AB}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2} x \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3} x^2}{8}$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} x^2}{\frac{\sqrt{3}}{8} x^2} = 2$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۹۲ - گزینه ۲ همان‌طور که می‌دانیم مساحت مثلث ABC را می‌توان از روابط زیر پیدا کرد.

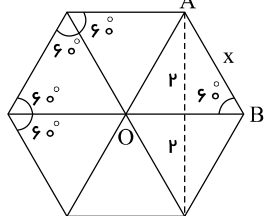
$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin 60^\circ \\ S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 45^\circ \end{cases} \Rightarrow AC \times \sin 60^\circ = BC \times \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = BC \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 30 = \sqrt{2} BC \Rightarrow BC = \frac{30}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = 15\sqrt{2}$$

$$\frac{(n-2)}{n} \times 180^\circ$$

۹۳ - گزینه ۳ می‌دانیم:

اندازه هر زاویه داخلی یک ۶ ضلعی منتظم برابر است با:



$$\theta = \frac{4 \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{6}{1} \times \frac{6\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

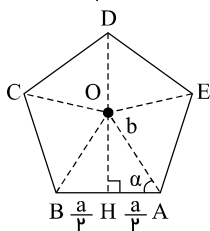
$$S_{\text{شش ضلعی}} = 6S_{\triangle OAB} = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$$

مساحت ۶ ضلعی منتظم برابر است با:

۹۴ - گزینه ۴ می‌دانیم: $\frac{(n-2)}{n} \times 180^\circ$ اندازه هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\angle AOH = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$



$$\alpha = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

$$\cos 54^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow b = \frac{a}{2}$$

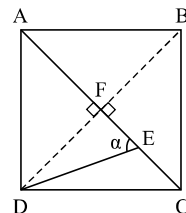
$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}ab \sin 54^\circ = \frac{1}{2}a \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}$$

$$S_{\text{پنج ضلعی منتظم}} = 5 \times S_{\triangle AOB} = 5 \times \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

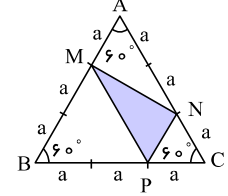
۹۵ - گزینه ۳ اگر قطر دیگر مربع را رسم کنیم تا همدیگر را در نقطه F قطع کنند می‌دانیم قطرهای مربع برهم عمودند و همدیگر را نصف می‌کنند. با توجه به این که قطر مربع 10 می‌باشد، در

مثلث DEF داریم:

$$\tan \alpha = \frac{DF}{DE} = \frac{AC \div 2}{CF - CE} = \frac{10 \div 2}{5 - 2} = \frac{5}{3}$$



۹۶ - گزینه ۲ اگر از کل مثلث، سه تا مثلث هاشورخورده را کم کنیم، مساحت قسمت هاشورخورده به دست می‌آید.



$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S_{\triangle PNC} = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S_{\triangle BMP} = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S_{\text{هائورخورده}} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{هائورخورده}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \sqrt{3} a^2 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{هائورخورده}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{1}{4}$$

۹۷ - گزینه ۴

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} = 0 \Rightarrow \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\cos \alpha} \right| = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha > 0 \quad (I)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha < 0 \xrightarrow{I} \sin \alpha < 0 \quad (II)$$

$$(I), (II) : \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \text{ ربع چهارم}$$

۹۸ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$

۹۹ - گزینه ۱

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B}$$

$$\tan \alpha = 0.75 \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{حاده } \alpha} \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{حاده } \alpha} \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{1}{5} = 14,4$$

۱۰۰ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ \tan \alpha \cot \alpha &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 2} + \cot x \\ &= \sqrt{(1 + \cot^2 x) + (1 + \tan^2 x) - 2} + \cot x \\ &= \sqrt{\cot^2 x + \tan^2 x + 2 - 2} + \cot x = \sqrt{\cot^2 x + \tan^2 x - 2} + \cot x \\ &= \sqrt{\cot^2 x + \tan^2 x - 2 \tan x \cot x} + \cot x = \sqrt{(\cot x - \tan x)^2} + \cot x \\ &= |\cot x - \tan x| + \cot x \stackrel{\substack{90^\circ < x < 90^\circ \\ \cot x < \tan x}}{=} \tan x - \cot x + \cot x = \tan x \end{aligned}$$

۱۰۱ - گزینه ۲ فرض کنیم $\sin x = a$.

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &= 2 \xrightarrow{\times a} a(a + \frac{1}{a}) = 2a \\ a^2 + 1 &= 2a \rightarrow a^2 + 1 - 2a = 0 \rightarrow (a - 1)^2 = 0 \rightarrow a = 1 \\ \sin x &= 1 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1^2 + 0^2 = 1 \end{aligned}$$

۱۰۲ - گزینه ۴ محدوده‌ی $\sin \alpha \cos \alpha$ را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \underbrace{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}_{\text{نامنفی}} &= 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \geq 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha \geq -1 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha \geq -\frac{1}{2} \\ \underbrace{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}_{\text{نامنفی}} &= 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \geq 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

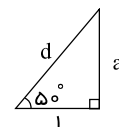
پس در حالت کلی داریم: $(*) \quad -\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \cos \alpha \leq \frac{1}{2}$

اما α در ربع چهارم است؛ پس $\sin \alpha$ منفی و $\cos \alpha$ مثبت است؛ در نتیجه $\sin \alpha \cos \alpha$ خواهد بود. بنابراین رابطه‌ی * به صورت $-\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \cos \alpha \leq 0$ در می‌آید و از میان گزینه‌ها فقط گزینه‌ی ۴ در این شرایط صدق می‌کند.

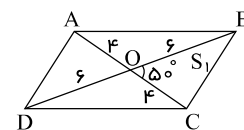
۱۰۳ - گزینه ۴ مساحت مثلثی به اضلاع a و b که زاویه بین آنها θ است از رابطه $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ به دست می‌آید

با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه و با توجه به این که $\tan 50^\circ = \frac{a}{1}$ داریم:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a^2 + 1} \\ \sin 50^\circ &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

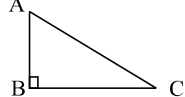


$$\begin{aligned} S_1 &= S_{BCO} = \frac{1}{2} (4)(6) \sin 50^\circ = 12 \times \left(\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \right) \\ S_{ABCD} &= 4S_1 = 4 \times \frac{12a}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{48a}{\sqrt{1 + a^2}} \end{aligned}$$



مثال‌های دهم

۱۰۴ - گزینه ۳ نکته: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:



$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \quad \text{مساحت}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}, \quad \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}, \quad \cot \hat{A} = \frac{AB}{BC}, \quad \tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

باتوجه به نکته داریم:

$$۱) \sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \times \sin \hat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} \quad \text{با جایگذاری در فرمول مساحت داریم:}$$

$$۲) \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \times \cos \hat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \times AC \times \cos \hat{A} \quad \text{با جایگذاری در فرمول مساحت داریم:}$$

$$۳) \tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB \times \tan \hat{A}$$

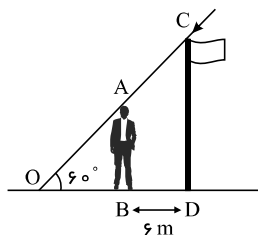
$$S = \frac{1}{2} (AB)^2 \times \tan \hat{A} \quad \text{با جایگذاری در فرمول مساحت داریم:}$$

$$۴) \cot \hat{A} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \times \cot \hat{A}$$

با جایگذاری در فرمول مساحت داریم:

پس گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ رابطه‌های درستی برای مساحت بوده و گزینه‌ی ۳ رابطه‌ای نادرست است.

۱۰۵ - گزینه ۲ می‌دانیم: در هر مثلث قائم‌الزاویه برای هر زاویه‌ی حاده داریم: $\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$



$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{OB} \Rightarrow OB = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{1,5}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{OD} \Rightarrow CD = OD \cdot \tan 60^\circ$$

$$\Rightarrow CD = (OB + BD) \tan 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\right) \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{2} + 6\sqrt{3} \approx 11,7m$$

ایران تونل
توشه‌ای برای موفقیت

۱۰۶ - گزینه ۱

می‌دانیم: مساحت هر مثلث از رابطه‌ی روبرو بدست می‌آید: (زاویه‌ی بین آن دو ضلع) $\sin$ $\times$ حاصل ضرب دو ضلع $\times \frac{1}{2}$

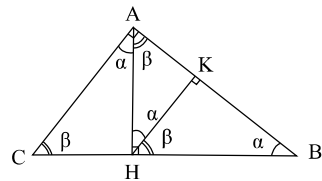
مساحت مثلث را از دو طریق محاسبه می‌کنیم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 30^\circ = 6$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \times 4 \times CH = 2CH$$

$$\Rightarrow 2CH = 6 \Rightarrow CH = 3$$

با توجه به شکل مقابل و زوایای داخلی مثلث ها داریم:

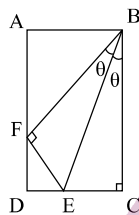


$$۲) \left. \begin{array}{l} \hat{A}HB = \hat{A}HC = 90^\circ \\ \hat{A}BH = \hat{C}AH = \alpha \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه مساوی}} \triangle AHB \sim \triangle AHC$$

$$۳) \left. \begin{array}{l} \hat{K} \text{ مشترک} \\ \hat{KAH} = \hat{KHB} = \beta \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه مساوی}} \triangle AHK \sim \triangle BHK$$

$$۴) \left. \begin{array}{l} \hat{K} = \hat{AHB} = 90^\circ \\ \hat{KAH} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه مساوی}} \triangle AHK \sim \triangle ABH$$

۱۰۸ - گزینه ۱

در مثلث $\triangle BCE$ داریم:

$$\sin \theta = \frac{CE}{BE} = \frac{CE}{L} \Rightarrow CE = L \sin \theta$$

در چهار ضلعی $BCEF$ داریم:

$$\hat{E} + \hat{F} + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$$

$$\hat{E} + 90^\circ + 2\theta + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\hat{E} = 180^\circ - 2\theta$$

$$\hat{DEF} = 180^\circ - (180^\circ - 2\theta) \Rightarrow \hat{DEF} = 2\theta$$

در مثلث $\triangle DEF$ داریم:

$$\hat{F} = \hat{C} = 90^\circ \left\} \xrightarrow[\text{تساوی دو زاویه}]{\text{بنایا به حالت}} \triangle EFB \sim \triangle EBC \Rightarrow EF = CE$$

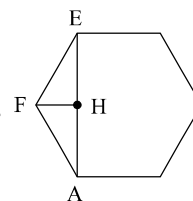
$$\cos \hat{DEF} = \frac{DE}{EF} \xrightarrow[\substack{EF=CE \\ CE=L \sin \theta}]{\substack{CE=L \sin \theta}} \cos 2\theta = \frac{DE}{L \sin \theta} \rightarrow DE = L \sin \theta \cos 2\theta$$

$$CD = CE + DE \rightarrow 6 = L \sin \theta + L \sin \theta \cos 2\theta$$

$$\rightarrow 6 = L \sin \theta (1 + \cos 2\theta)$$

$$L = \frac{6}{\sin \theta (1 + \cos 2\theta)}$$

نتیجه می گیریم:

با در نظر گرفتن H مثلث EAF متساوی الساقین است پس FH هم نیمساز است، هم میانه و هم ارتفاع:

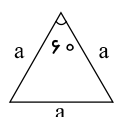
۱۰۹ - گزینه ۴

$$\sin \hat{EFH} = \frac{EH}{EF} \rightarrow \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EH}{20} \rightarrow EH = 10\sqrt{3}$$

$$EA = 2EH = 2 \times 10\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle EAM} = \frac{EA \times AM}{2} = \frac{20\sqrt{3} \times 10}{2} = 100\sqrt{3}$$

۱۱۰ - گزینه ۱



$$S = \frac{a \times a \times \sin 60}{2} = \frac{a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

راه اول: اعداد طبیعی را امتحان می کنیم:

$$a_1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

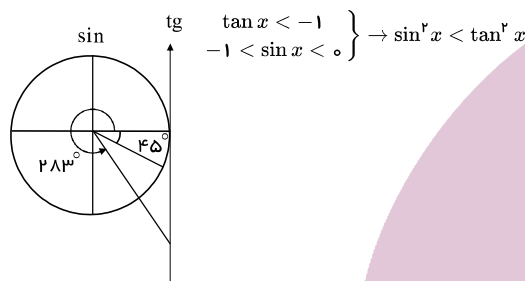
$$a = 2 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3} \quad \text{گزینه ۱}$$

راه دوم: تنها گزینه‌ای که مضرب طبیعی $\frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد گزینه ۱ یعنی $\sqrt{3}$ است که بالطبع $a = 2$ می‌شود.

۱۱۱ - گزینه ۲ زاویه 283° در ربع چهارم قرار دارد پس $\sin x$ مقداری منفی است و $\cos$ مقداری مثبت، در نتیجه $\tan$ هم منفی می‌شود و گزینه های ۱ و ۴ حذف و همچنین با توجه به شکل

واضح است که $\tan x < \sin x$

بعلاوه:



پس گزینه ۳ نیز نادرست است.

۱۱۲ - گزینه ۴ با توجه به اینکه حاصل رایکال همواره عبارتی مثبت است: $\cos x > 0$ { ربع اول (I)

و با به توان ۲ رساندن طرفین تساوی داریم:

$$\cos^2 x = \frac{\cot x}{\cot x - a^2} \rightarrow 0 \leq \frac{\cot x}{\cot x - a^2} \leq 1$$

$$1) \frac{\cot x}{\cot x - a} \leq 1 \Rightarrow \frac{\cot x}{\cot x - a^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{\cot x}{\cot x - a^2} - \frac{\cot x - a^2}{\cot x - a^2} \leq 0 \rightarrow \frac{\cot x - \cot x + a^2}{\cot x - a^2} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{a^2}{\cot x - a^2} \leq 0 \xrightarrow{a^2 \geq 0} \cot x - a^2 < 0$$

$$2) \frac{\cot x}{\cot x - a^2} \geq 0 \xrightarrow{\cot x - a^2 < 0} \cot x \leq 0 \quad \{ (II) \text{ ناحیه دوم} \}$$

$I \cap II$
 $\rightarrow$ ناحیه چهارم

$$*: -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

۱۱۳ - گزینه ۲

(۱) شیب هر خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد

(۲) معادله‌ی خطی که با شیب m از نقطه‌ی $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ می‌گذرد عبارتست از $y - y_0 = m(x - x_0)$

زاویه‌ای که با محور x ها می‌سازد: $y = x + 1 \Rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

اگر این خط را 15° در جهت مثبت دوران دهیم، زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور x ها 60° می‌شود؛ پس:

$$\text{شیب جدید} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

از طرفی نقطه‌ی تلاقی خط $y = x + 1$ با محور x عبارتست از:

پس معادله‌ی خط جدید می‌شود:

$$y = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow A \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right|$$

$$y - 0 = \sqrt{3}(x + 1) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

۱۱۴ - گزینه ۱

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & (1) \\ \sqrt{x^2} = |x| & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x} - \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \\ &= \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} - \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x - \cos x| - |\sin x + \cos x| \end{aligned}$$

زاویه‌ی 20° در ربع سوم است و کسینوس آن از سینوس آن کوچک‌تر است (چون منفی‌تر است):

$$\cos 20^\circ < \sin 20^\circ \Rightarrow \sin 20^\circ - \cos 20^\circ > 0 \Rightarrow \underbrace{\sin 20^\circ - \cos 20^\circ}_+ = \sin 20^\circ - \cos 20^\circ$$

از طرفی $\sin 20^\circ$ و $\cos 20^\circ$ هر دو منفی هستند:

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ < 0 \Rightarrow \sin 20^\circ + \cos 20^\circ < 0 \Rightarrow \underbrace{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}_- = -\sin 20^\circ - \cos 20^\circ \\ \cos 20^\circ < 0 \end{aligned}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} A &= \sin 20^\circ - \cos 20^\circ - (-\sin 20^\circ - \cos 20^\circ) \\ &= \sin 20^\circ - \cos 20^\circ + \sin 20^\circ + \cos 20^\circ = 2 \sin 20^\circ \end{aligned}$$

۱۱۵ - گزینه ۳

$$1) \frac{1}{\cos x} - \sin \tan x < 0 \rightarrow \frac{1}{\cos x} - \sin x \frac{\sin x}{\cos x} < 0$$

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x} < 0 \rightarrow \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} < 0 \rightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos x} < 0 \rightarrow \cos x < 0 \rightarrow \begin{cases} \text{ربع سوم} \\ \text{ربع دوم} \end{cases} (I)$$

$$\begin{aligned} 2) \sin x + \tan x > 0 \rightarrow \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} > 0 \rightarrow \boxed{\sin x \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right) > 0} \\ -1 < \cos x < 0 \rightarrow \frac{1}{\cos x} < -1 \xrightarrow{+1} \boxed{1 + \frac{1}{\cos x} < 0} \end{aligned} \Rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ربع سوم} \\ \text{ربع چهارم} \end{cases} (II)$$

$I \cap II \rightarrow \text{ربع سوم}$

از اشتراک جواب‌ها نتیجه می‌گیریم که x در ناحیه سوم است.

توشه‌ای برای موفقیت

۱۱۶ - گزینه ۳

$$A \text{ مختصات } : A \left| \begin{matrix} 1 \\ \tan \alpha \end{matrix} \right| \Rightarrow A \left| \begin{matrix} 1 \\ \lambda \end{matrix} \right|$$

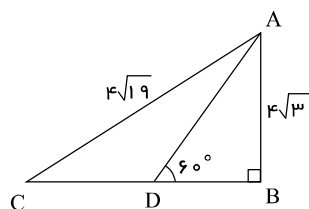
$$M \text{ مختصات } : M \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right|$$

$$|AM| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 1)^2 + ((-1) - \lambda)^2} = \sqrt{0 + (-9)^2} = 9$$

۱۱۷ - گزینه ۳

شکل را ببینید:

برای محاسبه‌ی مساحت مثلث $\triangle ACD$ باید ارتفاع AB و قاعده‌ی CD معلوم باشد. $AB = 4\sqrt{3}$ است؛ می‌ماند CD که برای محاسبه‌ی آن چنین عمل می‌کنیم:



$$\triangle ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow (4\sqrt{19})^2 = (4\sqrt{3})^2 + BC^2 \Rightarrow 16 \times 19 = 16 \times 3 + BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 16 \times 19 - 16 \times 3 = 16(19 - 3) = 16 \times 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} BC = 16$$

$$\triangle ABD : \tan \angle^{\circ} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{BD} \Rightarrow BD = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$$

$$CD = BC - BD = 16 - 4 = 12$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times AB \times CD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 12 = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

۱۱۸ - گزینه ۳

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} \cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} \\ &= \cos^2 \alpha \times \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{2}{a} \times 5a = 10 \end{aligned}$$

۱۱۹ - گزینه ۳ $\cos C$ را دو مثلث $\triangle OBC$ و $\triangle OHC$ می نویسیم:

$$\begin{aligned} \triangle OBC : \cos C &= \frac{OC}{BC} \\ \triangle OHC : \cos C &= \frac{CH}{OC} \\ \cos C &= \frac{CH}{OC} = \frac{OC}{BC} \Rightarrow OC^2 = BC \cdot CH \\ OC^2 &= 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

۱۲۰ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{AH}{AC} \\ \cot \beta &= \frac{BH}{AH} \Rightarrow \cot \beta \times \sin \alpha = \frac{BH}{AH} \times \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AC} \end{aligned}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۱۹ - ۱	۳۷ - ۴	۵۵ - ۱	۷۳ - ۱	۹۱ - ۱	۱۰۹ - ۴
۲ - ۳	۲۰ - ۲	۳۸ - ۲	۵۶ - ۳	۷۴ - ۴	۹۲ - ۲	۱۱۰ - ۱
۳ - ۳	۲۱ - ۳	۳۹ - ۲	۵۷ - ۴	۷۵ - ۴	۹۳ - ۳	۱۱۱ - ۲
۴ - ۳	۲۲ - ۲	۴۰ - ۳	۵۸ - ۲	۷۶ - ۴	۹۴ - ۴	۱۱۲ - ۴
۵ - ۴	۲۳ - ۱	۴۱ - ۲	۵۹ - ۳	۷۷ - ۴	۹۵ - ۳	۱۱۳ - ۲
۶ - ۳	۲۴ - ۴	۴۲ - ۱	۶۰ - ۱	۷۸ - ۱	۹۶ - ۲	۱۱۴ - ۱
۷ - ۲	۲۵ - ۴	۴۳ - ۴	۶۱ - ۲	۷۹ - ۳	۹۷ - ۴	۱۱۵ - ۳
۸ - ۳	۲۶ - ۱	۴۴ - ۳	۶۲ - ۴	۸۰ - ۴	۹۸ - ۳	۱۱۶ - ۳
۹ - ۴	۲۷ - ۴	۴۵ - ۱	۶۳ - ۲	۸۱ - ۳	۹۹ - ۱	۱۱۷ - ۳
۱۰ - ۴	۲۸ - ۲	۴۶ - ۳	۶۴ - ۱	۸۲ - ۱	۱۰۰ - ۱	۱۱۸ - ۳
۱۱ - ۳	۲۹ - ۴	۴۷ - ۴	۶۵ - ۴	۸۳ - ۱	۱۰۱ - ۲	۱۱۹ - ۳
۱۲ - ۳	۳۰ - ۳	۴۸ - ۴	۶۶ - ۲	۸۴ - ۳	۱۰۲ - ۴	۱۲۰ - ۱
۱۳ - ۲	۳۱ - ۴	۴۹ - ۳	۶۷ - ۳	۸۵ - ۳	۱۰۳ - ۴	
۱۴ - ۱	۳۲ - ۳	۵۰ - ۴	۶۸ - ۲	۸۶ - ۳	۱۰۴ - ۳	
۱۵ - ۲	۳۳ - ۲	۵۱ - ۲	۶۹ - ۴	۸۷ - ۲	۱۰۵ - ۲	
۱۶ - ۱	۳۴ - ۳	۵۲ - ۴	۷۰ - ۲	۸۸ - ۳	۱۰۶ - ۱	
۱۷ - ۱	۳۵ - ۴	۵۳ - ۳	۷۱ - ۴	۸۹ - ۳	۱۰۷ - ۱	
۱۸ - ۴	۳۶ - ۴	۵۴ - ۳	۷۲ - ۳	۹۰ - ۴	۱۰۸ - ۱	

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت