ریاضی یه ابرقهرمان مخفیه که هیچ‌کس جدیش نمی‌گیره. اما وقتی وارد داستان زندگی واقعی بشه، همه رو شگفت‌زده می‌کنه. انتگرال هم یکی از اون قدرت‌های مخفیشه — می‌تونه حجم‌ها رو بسازه، نور رو بشماره، انرژی رو اندازه بگیره، حتی به ساعتت بگه که چقدر کالری سوزوندی . 😎

بیا دست به دست هم بزنیم، این قدرت رو بازش کنیم! به هر کسی میرسی میگه آخه انتگرال چه کاربردی توی زندگی مون داره؟ حق داره چون هنور وارد دنیای علم و تکنولوژی نشده... 😮 **مطمئنم این کاربرد های انتگرال رو نمیدونستی :**

کالری شمار ساعت هوشمند: تا حالا فکر کردی ساعت مچی هوشمند ات چجوری میفهمه تو چقدر کالری سوزوندی یا چقدر راه رفتی؟ نبضت رو چجوری میفهمه؟ پشت پرده اون داره نرخ همه این سیگنال هارو از سنسور ها با انتگرالی که براش نوشتن، جمع میزنه و محاسبه میکنه و نشونت میده! یعنی ساعتت داره تپش قلب لحظه‌ای رو با انتگرال تبدیل می‌کنه به کالری مصرف‌شده کل 😳 پشمات بریزه...

گرافیک کامپیوتری: توی بازی‌ها و انیمشین‌ها دیدی که نور داره واقعی بازتاب میشه یا سایه‌ها به نرمی حرکت می‌کنن، اونجا انتگرال توی صحنه حضور داره. مثلاً "معادله رندرینگ کاجیا" برای هر نقطه از صحنه، همه جهات نور رو نگاه می‌کنه، نور مستقیم + نور بازتابی رو جمع می‌زنه با انتگرال روی زاویه‌ها و مساحت‌های سطح، بعد تو میگی عجب کیفیتی! عجب صحنه‌ای! می‌بینی؟ همش انتگراله!

ساخت تصویر با هوش‌مصنوعی: تا حالا با هوش مصنوعی برای خودت عکس ساختی؟ تو مدل‌های پیشرفته مثل AutoInt برای رندرینگ عصبی، انتگرال رو اتوماتیک تو شبکه عصبی یاد میدن تا خیلی سریع بتونی عکس های واقعی بسازی و عشق کنی! یعنی حاجی پشت همین عکس هایی که داری کیلویی با چت‌جی‌پی‌تی می‌سازی، انتگرال خوابیده...

فیزیک بازی‌ها: تو بازی وقتی دو جسم برخورد می‌کنن، وقتی چیزی می‌افته یا پرتاب میشه، سرعت تغییر می‌کنه. کامپیوتر و موبایلت برای این که موقعیت رو در هر لحظه بدست بیاره، از شتاب روی زمان، بعد باز از سرعت انتگرال می‌گیره! یعنی وقتی تو بازی از یه پله می‌پری یا سنگی پرتاب می‌کنی، پشت صحنه انتگرال داره کار می‌کنه تا حرکت منطقی باشه. باورت میشه؟

پردازش سیگنال صوتی و فیلترها: وقتی صدایی ضبط می‌کنی، یه موجه که زمان به زمان تغییر می‌کنه. وقتی داری نویز رو حذف می‌کنی یا افکت روی آهنگ هات میزاری، در واقع داری سیگنال رو میبری توی حوزه فرکانس بعد بلا سرش میاری! این تبدیلی که موبایلت انجام میده رو میگن "تبدیل فوریه" که أصلا خبر نداری تو لحظه داره کار میکنه!

پس وقتی موزیک تو گوشی‌ات صدای باکیفیت یا افکت باحالی داره، انتگرال بدبخت داره اون پشت زورشو میزنه تا تو حال کنی... 😁

چیزایی که قراره اینجا بخونیم :

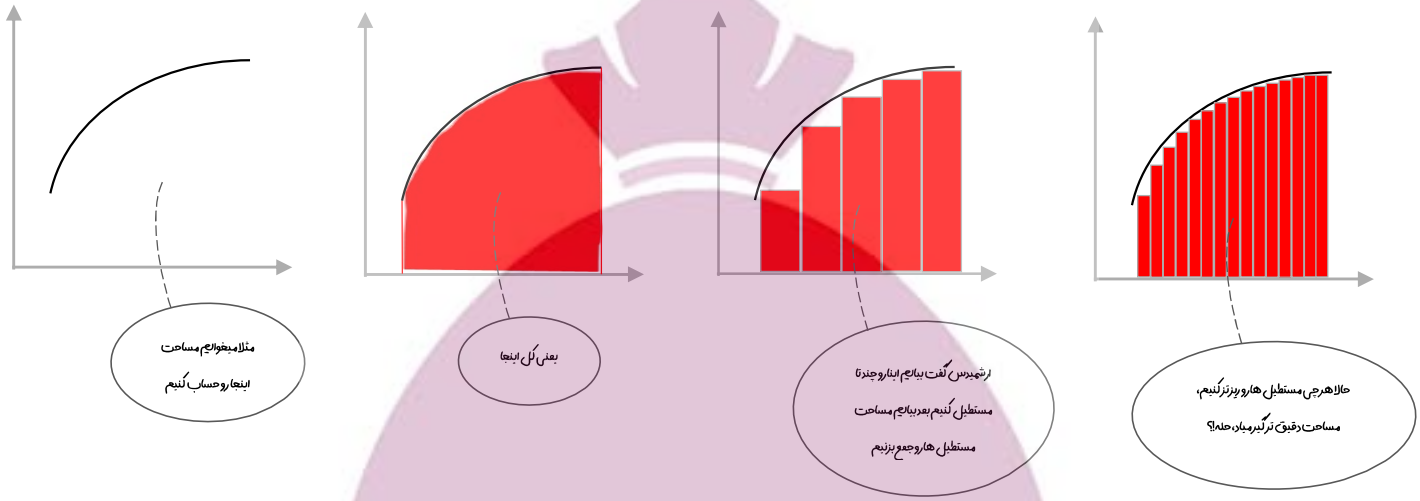
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

داستان انتگرال برمی‌گرده به زمان یونانیای قدیم، یعنی حدود ۲۳۰۰ سال پیش. یه دانشمند خفن به اسم ارشمیدس تو ذهنش یه سوال عجیب داشت:

چجوری می‌شه مساحت یه شکل عجیب‌غریب (مثل یه منحنی) رو حساب کرد؟ 🧐

اون موقع یه روش هوشمندانه کشف کرد که بهش میگفتن روش خسته‌کننده‌ی تقسیم‌بندی ! (البته اسم واقعیش "اگزاستیون" بود، ولی کی حوصله این اسما رو داره؟ 😆) خلاصه، ایده‌ش این بود که اون شکل عجیب رو به یه عالمه تیکه کوچیک تقسیم کنه (مثلاً مثل مستطیل‌های ریزریز) و مساحت هرکدومو جدا حساب کنه. هرچی تعداد این تیکه‌ها بیشتر می‌شد، جواب دقیق‌تر درمیومد. قبول داری؟

اینجارو نگاه کن تا بفهمی چی گفته :



حالا تو قرن ۱۷ میلادی دو تا مغز متفکر، یعنی آیزاک نیوتن از انگلیس و لایب‌نیتس از آلمان، هر کدوم جداگونه فهمیدن که انتگرال در واقع یه جور برعکس مشتقه! 😳 یعنی اگه مشتق یه تابعو بگیریم، برگردونیمش میشه انتگرال!

حاجی القصه، این کشف باعث شد دنیای ریاضی زیر و رو بشه! ولی داستان خفن‌تر اینجاست که این دوتا سر این موضوع بدجور با هم دعواشون شد که کی اول اینو کشف کرده 😅

بیا سختش نکنیم دیگه ماهم مثل اینا نیفتیم به جون هم 😅 ، جیگر انتگرال رو فعلا برعکس مشتق در نظر بگیر، گرفتی چیشد؟

حالا چون انتگرال در واقع جمع همه اون مستطیل هایی هستش که زیر نمودار یه تابع هستن، پس علامتش هم کلمه جمع انگلیسی (SUM) هستش یعنی مخفف اش S، فقط یه کوچولو قدش بلند تره 👈 $\int$

همین اول بگم چون انتگرال خیلی جاها قراره استفاده بشه، پس همیشه باید مشخص کنی که نسبت به چی داری انتگرال می‌گیری! مثلا جزوه "مشتق به زبون آدمیزاد پیشرفته" رو اگه خونده باشی تو "**مشتق جزئی**" گفتم، ما معمولا نسبت به X مشتق می‌گیریم ولی خب میتونیم نسبت به خیلی چیزا مشتق بگیریم، پس تو انتگرال هم برای اینکه کسی قاطی نکنه، همه مون قرار میزاریم که بگیم آقا نسبت به چی داریم انتگرال می‌گیریم و برای نشون دادن این از این علامت ها جلوی انتگرال استفاده می‌کنیم : dx dy dz

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثلا از تابع x^2 نسبت به X انتگرال می‌گیریم، الان فقط بنویسیم بعد میگم چجوری انتگرال رو بگیری : $\int x^2\,dx$

خب الان از همین تابع نسبت به Y انتگرال بخوای بگیری، چجوری می‌نویسی : $\int x^2\,dy$

خب الان داری فکر می‌کنی باشه بابا، علامت هارو یاد گرفتم ولش کن، الان جواب این لامصب چی میشه؟ خب بزار یه سوال بپرسم، مشتق $\frac{x^3}{3}$ رو برام بگیر ببینم... اینجارو نخون کاغذ بردار مشتق بگیر... بلد هم نیستی برو جزوه "مشتق به زبون آدمیزاد" رو بخون...

خب جوابش چی شد؟ آفرین شد x^2 یعنی چی؟ مگه مشتق برعکس انتگرال نیست؟ پس جواب انتگرال پیدا شد : $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

بیا آخرین قانون رو هم هم بهت بگم تا دیگه دست پر بریم چند تا تکنیک بهت یاد بدم هر چی انتگرال دیدی بدون فکر کردن حل شون کنی! اصلا غصه نخور قیافه اش گنده است! 😅

اینارو ببین :

$$x^2+3 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x$$
$$x^2+4 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x$$
$$x^2+5 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x$$
$$x^2+6 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x$$

دیدی اون عدده هیچ تاثیری نداشت؟ چون قبلا یاد گرفته بودیم که مشتق عدد ثابت همیشه صفره، بخاطر همین هم وقتی انتگرال می‌گیرن میگن کنار جواب یه نماد برای اون عدد ثابته هم بزار مثل C (مخفف Constant)

اصلا بیا برگردیم همون مثال بالایی که زدیم خودت به چشم ببین برای چی این C رو میزاریم؟

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+1 \xrightarrow{\text{یعنی}} \frac{x^3}{3}+1 \xrightarrow{\text{مشتق}} x^2$$
$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+2 \xrightarrow{\text{یعنی}} \frac{x^3}{3}+2 \xrightarrow{\text{مشتق}} x^2$$
$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+3 \xrightarrow{\text{یعنی}} \frac{x^3}{3}+3 \xrightarrow{\text{مشتق}} x^2$$
$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+4 \xrightarrow{\text{یعنی}} \frac{x^3}{3}+4 \xrightarrow{\text{مشتق}} x^2$$
$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C \xrightarrow{\text{یعنی}} \frac{x^3}{3}+C \xrightarrow{\text{مشتق}} x^2$$

جای همه عددهایی که میشه گذاشت خب همینو بزار

خب تا اینجا یه خلاصه بگم خسته شدی، اصلا بزار نشونت بدم خودت بگیری چیشد :

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\int 2x\,dx = x^2 + c \qquad x^2 \xleftarrow{\text{انتگرال بگیر}} \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} 2x$$

دخترا و پسرا، قراره روش هارو باهم یاد بگیریم، اما همینجا بگم یه کوچولو زرنگ باشی، ببین هر جوابی رو از هر جایی نوشتی، حالا چه خودت حل کردی یا چه تقلب کردی، به پسره چشمک زدی اونم هول بوده رسونده 😎 ، ته تهش، تست کن ببین جواب درسته یا نه؟

چجوری؟ معلومه اگه از جواب انتگرال مشتق بگیری باید چیو بده؟ آفرین تابعی که میخوای ازش انتگرال بگیری رو میده، اگه نداد ک یعنی جواب غلطه!

بازم بگم! اینم دسته بندی چیزایی که قراره اینجا یاد بگیریم، مابقی حالت های مهم رو میتونی تو نسخه پیشرفته بخونی :

انتگرال عدد ثابت

لب کلام اگه از یه x خالی مشتق بگیری چی میشه؟ آفرین میشه یک! یعنی انتگرال عدد ثابت میشه x تمووووم!

$$\int 3\,dx = 3x + C \quad , \quad \int 5\,dx = 5x + C \quad , \quad \int 1\,dx = x + C \quad , \quad \int \frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}x + C$$

$$\int e^2\,dx = e^2x + C \quad , \quad \int \sqrt{3}\,dx = \sqrt{3}x + C \quad , \quad \int \pi\,dx = \pi x + C \quad , \quad \int \pi\,dy = \pi y + C$$

حواست باشه عدد ثابت، اعداد اویلر و عدد پی و چیزای دیگه هم هستن ها! یعنی هر چیزی که x نداره ، عدد ثابته، همین!

قانون بزیاد (یعنی زیادش کن 😅)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

سلبریتی همه قانون های انتگرال گیری همینه! میگه هرچی چند جمله ای دیدی که ساده بود (یعنی رادیکالی و مثلثاتی و... نباشه)، اینارو یه توان بهشون اضافه کن، همون توان رو بزار تو مخرج شون، مثلا اینو ببین : $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C \quad , \quad \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C \quad , \quad \int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$$

نکته 1 : ضریب دیدی بزار بیرون، اون ضریب رو مستقیم بیار تو جواب، نمیخواد بهش دست بزنی، مثلا اینارو ببین :

$$\int 3x\,dx = 3\frac{x^2}{2} + C \quad , \quad \int 7x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + C \quad , \quad \int 5x^4\,dx = 5\frac{x^5}{5} = x^5 + C$$

نکته 2 : اگه عبارتی بود که توش جمع و تفریق دیدی، هول نکن، اول تفکیک شون شون کن، بعد دونه انتگرال شونو بگیر؛ به قول خودمون هر فیلی رو قاشق قاشق میشه خورد

$$\int x+1\,dx = \int x\,dx + \int 1\,dx = \frac{x^2}{2} + x + C \quad , \quad \int x^2 - x + 1\,dx = \int x^2\,dx + \int -x\,dx + \int 1\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$\int 2 - x^3\,dx = \int 2\,dx - \int x^3\,dx = 2x - \frac{x^4}{4} \quad , \quad \int x - x^2\,dx = \int x\,dx - \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

نکته 3 : تنها استثنا این قانون بزیاد^ برای x^{-1} هستش چون این خودش صاحاب داره :

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

خب حالا اگه ضرب و تقسیم دیدم مثل این $\int \sqrt{x}\,(x-1)\,dx$ اونوقت چی؟ اینو تو نسخه پیشرفته یاد می‌گیریم، فعلا عجله نکن! ولی خب تا جایی که تونستی ضرب کن باز و تفکیک شون کن!

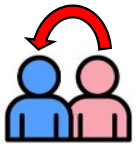
نکته 4 : اگه متغیر دیگه ای دیدی، اونو مثل عدد ثابت در نظر بگیر! میتونی بندازی از انتگرال بیرون و تو جواب نهایی صاف بیاریش مثل عدد ثابت! یعنی بستگی داره نسبت به چی داری انتگرال می‌گیری، مثلا dx یا dy و... مثلا اینارو ببین :

$$\int x^3 y\,dx = \frac{x^4}{4}y + C \quad , \quad \int y^2 x^5\,dx = y^2\frac{x^6}{6} + C \quad , \quad \int yx^4\,dy = \frac{y^2}{2}x^4 + C$$

$$\int (y-1)(x^2)\,dy = \int y(x^2)\,dy + \int -x^2\,dy = \frac{y^2}{2}x^2 - x^2 y + C$$

خب تو این آخری چون انتگرال بر حسب y بود، با $-x^2$ مثل عدد ثابت رفتار کردیم، انداختیمش بیرون و صاف آوردیمش تو جواب، توش هم خب وقتی $-x^2$ رو ببری بیرون چی می‌مونه؟ یک می‌مونه دیگه، انتگرال یک هم میشد چی؟ خودت بگو! دوباره برگرد ببین چجوری حلش کردیم...

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
NanoAmouz
Any elephant can be eaten spoon by spoon



قانون مشتق کنار دستی

اگه یه تابعی ببینی که مشتقش همون بغل دستشه، فقط کافیه انتگرال خود اون تابع رو با "بزیاد" خیلی شیک و مجلسی بگیری! 😎

فقط این قانون برای چندجمله ای های ساده کار نمی‌کنه، یعنی تابع ات باید مرکب باشه، منظورم اینه که مثلا اینا نباشن : $x\ ,\ x^2\ ,\ x-1\ ,\ x^3+2\ , \ldots$

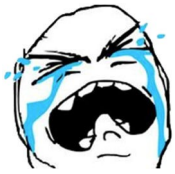
حالا یعنی چی؟ بیا بهت نشون بدم :

اینو نگاه کن جیگر $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$ ، خب الان بیا تابع اصلی رو سینوس بگیریم، مگه مشتق سینوس نمیشه کسینوس؟ دقیقا پس مشتق اش کنار دستشه، قربون دستت پس خود این تابع اصلی رو (سینوسه رو میگم) بزیاد کن دیگه :

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx \rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

مهندس مشتق تانژانت چی بود؟ آفرین میشد $sec^2(x)$، خب حالا اینو ببین مثل آب خوردن حل میشه :

$$\int sec^2(x).\tan(x)\,dx \rightarrow \frac{tan^2(x)}{2} + C$$



هرف از زایده شدنم چی بود؟

من بابام انتگرال گرفته؟ ننم گرفته؟

این دو تا رو هم ببین تا دوباره مرور کنیم :

$$\int e^x.e^x dx \rightarrow \frac{e^{2x}}{2} + C \quad , \quad \int \sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx \rightarrow \frac{x}{2} + C$$

خب پس اگه مشتق یه تابعی کنارش بود (یعنی در اون ضرب شده بود)، همون تابع رو با "بزیاد" انتگرال می‌گیری!

اما بریم بخش دوم که همه قاطی می‌کنن اینجارو، اگه کنار دست تابع، مشتق اون عبارت داخلیش بود، اونوقت فقط انتگرال خود تابع اصلی رو می‌گیری، دیگه کاری با "بزیاد" نداری!

استاد عبارت داخلی چیه؟ یعنی اون بدبختی که توی تابع مونه مثلا اینایی که اینجا برات قرمز کردم رو میگن عبارت داخلی تابع :

$$\sin x^2 + 1 \quad , \quad \cos x \quad , \quad e^{x^3-2} \quad , \quad \tan\sqrt{x} \quad , \quad e^{\sin x}$$

گرفتی چیشد؟ یعنی اون عبارت داخل تابع اصلی رو میگم، حالا داستان چیشد؟ اگه مشتق این عبارت بغل دستش بود چی میشه؟ به سیاه و سفید دست نمیزنی، خیلی خوشگل میای انتگرال تابع اصلی رو می‌گیری!

مثلا اینو ببین $\int (2x)(sin\ x^2)\,dx$ ،خب انتگرال ضرب رو که هنوز یاد نگرفتیم، اونجا هم یاد بگیری می‌بینی چقدر طولانیه! ولی اگه زرنگ

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

باشی می‌بینی که مشتق داخل سینوس که میشه 2x، بغل دست اشه، پس میتونی بگی انتگرال سینوس چی میشه؟ میشه منفی کسینوس، پس جواب همینه! $\int (2x)(\sin x^2)\,dx = -\cos x^2$

گرفتی چیشد؟ اگه مشتق عبارت داخلی یه تابعی رو بغل دستش دیدی، دیگه فقط تنها کاری می‌کنی اینه که میای انتگرال خودِ تابع اصلی رو می‌گیری! کاریت هم نباشه توش چیه تو فقط تو این سوال میگی آقا انتگرال سینوس چی میشه و تموووم! 😄

بریم چند تا دیگه مثال بزنیم :

$$\int 3x^2 e^{x^3}\,dx \to e^{x^3} + C \quad , \quad \int 2x\, e^{x^2}\,dx \to e^{x^2} + C \quad , \quad \int e^{2x}\cdot 2\,dx \to e^{2x} + C$$

خب تو همه اینا مشتق اویلری رو که یادته، میشد خودش ضربدر مشتق توانش، که دقت کنی مشتق کنارش بود، پس صاف از خود اویلر انتگرال گرفتیم، انتگرال اویلر هم میشه خودش دیگه چون مشتق اش هم میشد خودش! همین!

$$\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,dx = e^{\tan(x)} + C \quad , \quad \int 2x\,.\cos(x^2)\,dx \to \sin(x^2) + C \quad , \quad \int 5x^4\cos(x^5)\,dx \to \sin(x^5) + C$$

خب اینم مدل هایی مثلثاتی بود، یعنی وقتی مشتق داخلش کنار دستش باشه، میتونی انتگرال خود اون تابع رو بدون دردسر بگیری بیاری بیرون عسلم 🧐

ای بابا من گیج شدم اصلا، الان فرق اینا چی بود؟ اصلا غصه نخور، زندگی مون همینجوری غصه هاش زیاده، بیا با این مثال بهت بگم دوباره :

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx \to \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

$$\int \sin(x^2)\,.2x\,dx \to -\cos x^2 + C$$

تو اولی مشتق خود sin بغل دستش بود پس "بزیاد" ، تو دومی مشتق اون عبارت داخل سینوس بغل دستش بود، پس صاف انتگرال گرفتیم!

خب اینم تیر آخر این قسمت، اگه یه وقت مشتق بغل دستش بود ولی نقص داشت، مثلا یه عددی چیزی کم داشت چی؟ مثلا اینو ببین $\int \sin(x^2)\,.\,x\,dx$ آقا این همه چیش اوکیه، ولی مشتق داخل سینوس میشه 2x ولی این یه 2 کم داره، حالا تکلیف چیه؟!

خب باید بهت بگم اولا ما کلا نمیتونیم به انتگرال ایکس اضافه یا کم کنیم یادت باشه اینو؛ ولی میتونیم با عدد هاش بازی کنیم تا چیزی که دلمون میخواد رو بسازیم! یعنی مثلا تو همین مثال یه دونه 2 خودمون بهش اضافه می‌کنیم ولی برای اینکه تعادلش بهم نخوره یه دونه $\frac{1}{2}$ هم میزاریم پشت انتگرال، اوکیه؟ یعنی انگار نوشتی $2\times\frac{1}{2}$ خب این میشه یک یعنی هیچی دیگه، انگار تغییری توش ندادیم، منظورم اینه که هر عددی خواستی و کم داشتی اضافه کن، برعکسش رو هم بزار پشت انتگرال اینجوری هم تو به هدفت میرسی، هم تعادل بهم نمی‌خوره! بدو سراغ مثال تا بفهمی :

$$\int \sin(x^2)\,.\,x\,dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int \sin(x^2)\,.\,2x\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$$

$$\int \cos(x^3)\,.\,x^2\,dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{3}\int \cos(x^3)\,.\,3x^2\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{3}\sin(x^3) + C$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\int e^{5x}\,dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{5}\int 5e^{5x}\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

$$\int x\,.\,e^{x^2}\,dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int 2x\,.\,e^{x^2}\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

پس خودمون می‌بینیم مشتق اش چی کم داره (فقط عدد نه ایکس چون ایکس رو نمیشه اضافه یا کم کرد)، بعد میایم بهش اضافه می‌کنیم و برعکسش رو میزاریم پشتش، اینجوری راحت انتگرال می‌گیریم! یه مثال حرفه ای تر که باید مشتق بلد باشی :

$$\int \tan 2x\,.\,sec^2(2x)\,dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int \tan 2x\,.\,2sec^2(2x)\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{2}tan^2(2x) + C$$

اینجا ما تابع اصلی رو تانژانت گرفتیم بعد گفتیم مشتق اش چیه؟ میشه "مشتق عبارت داخل ضربدر سکانت به توان دو"، مابقی هم معلومه؛ فقط اگه برات سخت بود، تو مشکلت تو انتگرال گیری نیست، تو مشتق گیریت ضعیفه، بهتره برى جزوه "مشتق به زبون آدمیزاد" رو حداقل یه بار بخونی و تمرین کنی تا حداقل مشتق این تابع های مهم رو بلد باشی رفیق! یه مثال باحال و رایج هم بزنم :

$$\int x\sqrt{x}\,dx \xrightarrow{\text{اینجوری بنویس}} \int x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx \xrightarrow{\text{ترکیب کن}} \int x^{\frac{3}{2}}dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

اینجا بازم صورت، مشتق مخرج بود، مشتق رادیکالی یادته که؟ ولی یه دونه 2 کم داشت! ردیفه؟

این چند تا یه کوچولو فسفر میخوان، خودت بشین فکر کن، من حرف نمیزنم :

$$\int e^{2x}\,.\,e^{e^{2x}}dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,.\,e^{e^{2x}}dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \frac{1}{2}e^{e^{2x}} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \xrightarrow{\text{جور کردن عدد}} \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \sqrt{x^2+1} + C$$

انتگرال رادیکالی ها

از چیزی که فکر می‌کردی هم ساده تره، یادت میاد چجوری رادیکال رو به توان کسری تبدیل می‌کردیم، بیا مرور کنیم اول :

$$\sqrt[a]{x^b} \rightarrow x^{\frac{b}{a}}$$

مثلا اینجوری

$$\sqrt[3]{x^2} \rightarrow x^{\frac{2}{3}} \quad \text{و} \quad \sqrt[2]{(x+1)^5} \rightarrow (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

خب فکر کنم گرفتی میخوام چی بگم؟ هر چی رادیکال دیدی، بیا تبدیلش کن به توان کسری، بعدش با "بزیاد" حلش کن و تموووم!

$$\int \sqrt{x}\,dx \xrightarrow{\text{تبدیل به توان کسری}} \int x^{\frac{1}{2}}\,dx \xrightarrow{\text{بزیاد}} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \sqrt{x^3}\,dx \xrightarrow{\text{تبدیل به توان کسری}} \int x^{\frac{3}{2}}\,dx \xrightarrow{\text{بزیاد}} \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx \xrightarrow{\text{تبدیل به توان کسری}} \int x^{\frac{2}{3}}\,dx \xrightarrow{\text{بزیاد}} \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx \xrightarrow{\text{تبدیل به توان کسری}} \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx \xrightarrow{\text{بیار بالا}} \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx \xrightarrow{\text{بزیاد}} -2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

تو این آخری یادت باشه دیگه اگه چیزی رو بین صورت و مخرج جابجا کنی، فقط توانش منفی و مثبتش تغییر می‌کنه! مابقی‌اش دیگه معلومه!

خب اگه داخل رادیکال به جای ایکس خالی، یه عبارت بود چی؟ مثلا $\sqrt[2]{(x+1)^5}$ ، خب اینم فعلا میتونی از همین روش حل کنی چون مشتق داخل رادیکال هم میشه 1 ولی عجله نکن، برای حل اینا باید روش "تغییر متغیر" رو یاد بگیری که تو نسخه بعدی به تیاد میدم فعلا پس هر چی رادیکال دار دیدی که ایکس خالی بود یا عبارتی بود که مشتق اش یک میشد با همین روش میتونی حلش کنی!

ما داریم گام به گام یاد می‌گیریم، عجله کنی باخت دادی، صبر کن آروم آروم همه رو یاد می‌گیریم اصلا نگران نباش، چیزی نمی‌مونه یاد نگیری!

سه قانون f, f'

حاجی این سه تا قانون ساده هم آچار دستته، اینارو یاد بگیری خیلی جلو میفتی!

اولی) یعنی اگه مشتق به تابع بالا بود، خودش پایین

$$\int \frac{f'}{f}\,dx \rightarrow \ln|f| + C$$

دومی) یعنی اگه مشتق به تابع بالا بود، رادیکال خودش پایین

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}}\,dx \rightarrow 2\sqrt{f} + C$$

سومی) یعنی اگه مشتق به تابع بالا بود، توان دو خودش پایین

$$\int \frac{f'}{f^2}\,dx \rightarrow -\frac{1}{f} + C$$

داستان اون قدر مطلق چیه تو اولی؟ بخوام ساده‌اش کنم در همین حد بدون که اگه یه وقت تابع منفی بود، مثبتش رو بنویس، چون جلوی لگاریتم نمیتونه منفی باشه دیگه، همین!

حالا بریم از هر کدوم چند تا مثال بزنیم دستت راه بیفته، توی هرکدوم اول تشخیص میدیم که جزو کدوم دسته است بعد جواب رو سه سوته میدیم :

$$\int \frac{\cos x}{\sin(x)}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق پایینی بالاست}} \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق پایینی بالاست}} \ln|x^2+1| + C$$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \xrightarrow{\text{برای راحتی می‌نویسیم}} \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق پایینی بالاست}} \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق داخل رادیکال بالاست}} 2\sqrt{x+1} + C$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x}}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق داخل رادیکال بالاست}} 2e^{\frac{x}{2}} + C$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق داخل رادیکال بالاست}} 2\sqrt{x^2+4} + C$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx \xrightarrow{\text{توان دوم تابعی پایینه که مشتقاش بالاست}} -\frac{1}{x^2+1} + C$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}}\,dx \xrightarrow{\text{توان دوم تابعی پایینه که مشتقاش بالاست}} -\frac{1}{e^x} + C$$

$$\int \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx \xrightarrow{\text{برای راحتی می‌نویسیم}} \int \frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}\,dx \xrightarrow{\text{توان دوم تابعی پایینه که مشتقاش بالاست}} -\frac{1}{\ln(x)} + C$$

انتگرال نمایی و اویلری

ببین مشتق e^x چی میشه؟ آفرین میشه خودش، پس انتگرالش هم میشه خودش، تا اینجا اوکی؟ $\int e^x\,dx = e^x + C$

حالا اگه این اویلر داستان ما یه عبارتی تو توانش داشت چی؟ اینجا دو تا حالت داریم، اگه تو توانش ضریب داشت یعنی عدد بود (مثلا e^{2x})، بفرما :

$$\int e^{ax}\,dx \rightarrow \frac{e^{ax}}{a}$$

ولی اگه تو توانش یه عبارت ایکس دار بود (مثلا e^{2x^2}) باید از روش "تغییر متغیر" حلش کنی، که تو نسخه بعدی قراره یاد بگیری، کلا هر تابع نمایی چه اویلری باشه چه نباشه اگه توانش یه عبارت ایکس دار پیچیده بود که تو مشتق اش هم ایکس داشت دیگه میریم سراغ "تغییر متغیر"

فعلا این مثال هارو داشته باشه تا اویلر هارو خوب یاد بگیری، بعد نمایی هارو بهت بگم :

$$\int e^{2x}dx \rightarrow \frac{e^{2x}}{2} + C \quad , \quad \int e^{3x}dx \rightarrow \frac{e^{3x}}{3} + C$$

$$\int e^{-x}dx \rightarrow -e^{-x} + C \quad , \quad \int e^{0.5x}dx \rightarrow 2e^{0.5x} + C$$

حالا مهندس بیا اینم بدونی بد نیست که به جز اویلر، برای همه تابع های نمایی اینجوری باید انتگرال بگیری :

$$\int a^{bx}\,dx \rightarrow \frac{a^{bx}}{b\ln a}$$

این مثال هارو داشته باش، حالا برات جمع بندی هم می‌کنم، چون الان داری میگی چقدر زیاد شد بابا یادم میره، غصه نخور، عجله نکن :

$$\int 2^{3x}dx \rightarrow \frac{2^{3x}}{3\ln(2)} + C \quad , \quad \int 3^{2x}dx \rightarrow \frac{3^{2x}}{2\ln(3)} + C \quad , \quad \int 7^{4x}dx \rightarrow \frac{7^{4x}}{4\ln(7)} + C$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\int 5^{-x}dx \to \frac{5^{-x}}{-\ln(5)} + C \quad , \quad \int 4^{0.5x}dx \to \frac{4^{0.5x}}{0.5\ln(4)} + C \quad , \quad \int \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} dx \to \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}}{2\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + C$$

انتگرال لگاریتمی (log , ln)

بزار خیالت رو راحت کنم، از این مدل انتگرال ها کلا خیلی استفاده نمیشه، معمولا هم ازشون سوال نمیدن واقعا، ولی اگه دیدی استاد درس داده یا خودت میخوای یاد بگیری، بخونش وگرنه میتونی این یه دونه رو رد کنی، من برای محکم کاری آوردم :

$$\int \ln ax\, dx \quad \to \quad x\ln ax - x + C$$

$$\int \log ax\ dx \quad \to \quad \frac{1}{\ln 10}(x\, ln(ax) - x) + C \quad \text{یا} \quad x\log ax - \frac{x}{\ln 10} + C$$

اوه اوه خیلی سخت شد حفظ کردن این مزخرف ها، بریم مثال هارو حل کنیم، خودت بشین دست به خودکار حل کن، منو نگاه نکن :

$$\int \ln(2x)\, dx \to x\ln(2x) - x + C \quad , \quad \int \ln(3x)\, dx \to x\ln(3x) - x + C$$

$$\int \ln(0.5x)\, dx \to x\ln(0.5x) - x + C \quad , \quad \int \ln(4x)\, dx \to x\ln(4x) - x + C$$

$$\int \ln(7x)\, dx \to x\ln(7x) - x + C \quad , \quad \int \ln(10x)\, dx \to x\ln(10x) - x + C$$

$$\int \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)x\right) dx \to x\ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)x\right) - x + C \quad , \quad \int \ln(5x)\, dx \to x\ln(5x) - x + C$$

$$\int \ln\left(\left(\frac{1}{10}\right)x\right) dx \to x\ln\left(\left(\frac{1}{10}\right)x\right) - x + C \quad , \quad \int log(2x)\, dx = x\, log(2x) - \frac{x}{ln(10)} + C$$

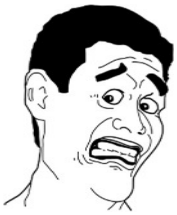
$$\int log(4x)\, dx = x\, log(4x) - \frac{x}{ln(10)} + C \quad , \quad \int log(7x)\, dx = x\, log(7x) - \frac{x}{ln(10)} + C$$

$$\int log(10x)\, dx = x\, log(10x) - \frac{x}{ln(10)} + C \quad , \quad \int log\left(\frac{x}{3}\right) dx = x\, log\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{ln(10)} + C$$

$$\int log(5x)\, dx = x\, log(5x) - \frac{x}{ln(10)} + C$$

تـوشـه ای بـرای مـوفقیت

اون قانون اول یادته که می‌گفت اگه مشتق یه تابع بالا بود، خودش پایین چجوری انتگرال می‌گیری؟ برو یه نگاه بنداز، حالا یه قلق مهم بهت بگم که این خیلی به درد بخوره، اینم از همون قانون اولیه پیروی می‌کنه یعنی مشتق ایکس که میشه 1 توی صورت هستش ولی این خیلی بیشتر از بقیه کاربرد داره (یعنی تو اینو بلد بودی ولی این مدل خاصش رو خیلی استفاده میکنن)



این مروری بر قانون اول هستش، دوباره یه تعداد مثال حل می‌کنیم و بیشتر پاره میشیم!!!!

$$\int \frac{1}{x}\,dx \quad \rightarrow \quad \ln|x| + C$$

نکته مهم : همیشه عدد ثابت هارو بنداز بیرون و از اون‌چیزی که مونده انتگرال بگیر

$$\int \frac{1}{2x}\,dx \xrightarrow{\text{عدد ثابت رو بنداز بیرون}} \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$$\int \frac{5}{x}\,dx \xrightarrow{\text{عدد ثابت رو بنداز بیرون}} 5\int \frac{1}{x}\,dx = 5\ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{3x+1}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق پایینی بالا نیست چون 3 کم داره پس 3 اضافه می‌کنیم و یه } \frac{1}{3} \text{ به پشتش}} \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$$

$$\int \frac{1}{5x-2}\,dx \xrightarrow{\text{مشتق پایینی بالا نیست چون 5 کم داره پس 5 اضافه می‌کنیم و یه } \frac{1}{5} \text{ به پشتش}} \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x-2}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$$

اینم خلاصه مفید این جزوه برای تو کراش خوشگلم 😉 :

- **چندجمله‌ای دیدی؟** یه درجه ببر بالا، همونو بزار مخرج!

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \xrightarrow{\text{مثلا}} \quad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

- **ضریب داشت؟ بزار بیرون، راحت‌تر حل میشه!**

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad \xrightarrow{\text{مثلا}} \quad \int 5x^2\,dx = 5\int x^2\,dx = 5\frac{x^3}{3} + C$$

- **جمع و تفریق؟ جدا جدا بگیر، انگار تیکه‌تیکه شده!**

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \quad \xrightarrow{\text{مثلا}} \quad \int (x^2 - 3x + 2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right) - \left(\frac{3x^2}{2}\right) + 2x + C$$

- **یه عدد کم داشت؟ اضافه کن و برعکسش رو بزار پشت انتگرال تا جبرانش کنی!**

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

◇ اگه توی انتگرال رادیکال داشتی، اول رادیکال رو به توان کسری تبدیل کن و بعد مثل یک چندجمله‌ای انتگرال بگیر

$$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\left(\frac{m}{n}\right)+1}}{\left(\frac{m}{n}\right)+1} + C \quad \xrightarrow{\text{مثلا}} \quad \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)+1} + C = \frac{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

◇ اگه مشتق تابع کنار دستش بود ، بزیاد ؛ اگه مشتق عبارت توی تابع کنار دستش بود، انتگرال خود تابع رو می‌گیری سریع!!

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx \rightarrow \frac{\sin^2 x}{2} + C \quad , \quad \int \sin(x^2).2x\,dx \rightarrow -\cos x^2 + C$$

جدول انتگرال های پرکاربرد

تابع مون	انتگرال اش
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x}dx$	$ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^{ax}\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)e^{ax} + C$
$\int sin(ax)\,dx$	$-\left(\frac{1}{a}\right)cos(ax) + C$
$\int cos(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)sin(ax) + C$
$\int tan(ax)\,dx$	$-\left(\frac{1}{a}\right)ln\lvert cos(ax)\rvert + C$
$\int cot(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)ln\lvert sin(ax)\rvert + C$
$\int sec(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)ln\lvert sec(ax) + tan(ax)\rvert + C$
$\int csc(ax)\,dx$	$-\left(\frac{1}{a}\right)ln\lvert csc(ax) + cot(ax)\rvert + C$
$\int sinh(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)cosh(ax) + C$
$\int cosh(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)sinh(ax) + C$
$\int tanh(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)ln\lvert cosh(ax)\rvert + C$
$\int coth(ax)\,dx$	$\left(\frac{1}{a}\right)ln\lvert sinh(ax)\rvert + C$
$\int ln(ax)\,dx$	$x\,ln(ax) - x + C$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت