تست های منتخب آزمون های آزمایشی

مبحث تابع

قابل توجه دانش آموزان رشته ریاضی : همه‌ی سوالات را می‌توانید حل کنید.

قابل توجه دانش آموزان رشته تجربی : در قسمت‌های ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۶ ، ۷ همه‌ی سوالات را می‌توانید حل کنید.

در قسمت ۴ از سوال ۱ تا ۴۵ با توجه به کتاب درسی شما، برایتان مناسب است.

در قسمت ۸ از سوال ۱ تا ۴ با توجه به کتاب درسی شما، برایتان مناسب است.

فهرست

زمان

نام و نام‌خانوادگی

مبحث تابع قسمت ۱ : مقدمات

۱ اگر بدانیم رابطهٔ $f=\{(a,3),(5,a^2-1),(2,-1),(5,3),(2,b)\}$ یک تابع است، آنگاه حاصل $\dfrac{f(-2)+f(2)}{f(5)}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{3}{4}$

۲) $\dfrac{3}{2}$

۳) $\dfrac{2}{3}$

۴) $\dfrac{4}{3}$

۲ تابع $f=\{(-1,2),(7,m^2-4m),(m,6),(2,5),(7,5)\}$ چند نقطه بالای نیمساز ناحیهٔ اول دارد؟

۱) یک نقطه

۲) دو نقطه

۳) سه نقطه

۴) هیچ نقطه‌ای

۳ اگر $f=\{(2,a+b),(-2a,b),(2,c+2),(1,3+c),(-2,3),(1,b+2)\}$ یک تابع باشد، آنگاه $a+b+c$ کدام است؟

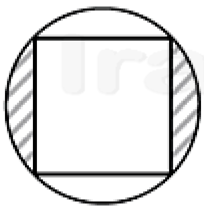
۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

۴ در شکل زیر، مربعی درون یک دایره محاط شده است. مساحت قسمت هاشورخورده، به‌صورت تابعی از محیط دایره کدام است؟



۱) $S=\frac{\pi-2}{8\pi^2}A$

۲) $S=\frac{\pi-2}{4\pi^2}A$

۳) $S=\frac{\pi-2}{8\pi^2}A^2$

۴) $S=\frac{\pi-2}{4\pi^2}A^2$

۵ مستطیلی را که دو رأس آن بر روی نیم بیضی به معادلهٔ $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور xها باشد را در نظر بگیرید. مساحت این مستطیل به‌صورت تابعی از x کدام است؟

۱) $S=\sqrt{x^2-\frac{x^4}{9}}$

۲) $S=\sqrt{2x^2-\frac{2}{9}x^4}$

۳) $S=\sqrt{4x^2-\frac{4}{9}x^4}$

۴) $S=\sqrt{16x^2-\frac{16}{9}x^4}$

۶ یک تانکر گاز از یک استوانه به ارتفاع ۸ متر و دو نیمکره به شعاع r متر در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. حجم تانکر برحسب تابعی از r کدام است؟

۱) $V(r)=\frac{۲\pi r^{۳}}{۳}+۴\pi r^{۲}$

۲) $V(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}+۸\pi r^{۲}$

۳) $V(r)=\pi r^{۳}+\pi r^{۲}$

۴) $V(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}+۴\pi r^{۲}$

۷ اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ چند تابع ثابت از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B می توانیم تعریف کنیم؟

۱) ۱۵

۲) ۵

۳) ۳

۴) ۶

۸ چند تابع از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به $B=\{m,n,p,q\}$ می توان نوشت به طوری که تعداد اعضای دامنه و برد آن برابر باشد؟

۱) ۱۲

۲) ۲۴

۳) ۲۷

۴) ۶۴

۹ چه تعداد تابع مانند f از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعهٔ $B=\{e,f,c\}$ وجود دارد به شرطی که $f(a)=e$ و $f(b)\neq c$ باشد؟

۱) ۸۱

۲) ۳۶

۳) ۲۷

۴) ۱۸

۱۰ در کدام گزینه، رابطهٔ y برحسب x یک تابع را نمایش می دهد؟

۱) $|x|+|y|=۵$

۲) $x=۲(y+۱)^{۳}$

۳) $\frac{(x-۱)^{۲}}{۴}+y^{۲}=۴$

۴) $|xy|=۴$

۱۱ در کدام رابطه، y تابعی از x نیست؟

۱) $۲y-|y|=x$

۲) $۲y+|y|=x$

۳) $y-\sqrt{y}=\sqrt{x}$

۴) $y+\sqrt{y}=\sqrt{x}$

۱۲ به ازای کدام مقدار a، رابطهٔ غیرتهی $x^{۲}+y^{۲}=-۸x+۲y-a$ تابع است؟

۱) ۴

۲) ۹

۳) ۱۷

۴) ۱۹

۱۳ اگر $f(x)=\begin{cases}۲ax+۵b & ;x\geq ۲\\ -۲x^{۲}+۱ & ;-۱\leq x\leq ۲\\ b-ax & ;x\leq -۱\end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) -۶

۲) -۱

۳) صفر

۴) ۸

۱۴ اگر $f(\sqrt{x}) = x - \sqrt{x}$ باشد، حاصل $f(۵) - ۲f(۴)$ کدام است؟

۱) ۸-
۲) ۴-
۳) ۴
۴) ۸

۱۵ در مورد تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$، اگر تساوی $f(۲x+۱) + f(۳) = ۵x - ۱$ برقرار باشد، آنگاه مقدار $f(۵)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۷

۱۶ تابع $f(x) = \begin{cases} ۲^{ax} & ; x \geq ۰ \\ ۴^{-ax} & ; x < ۰ \end{cases}$ مفروض است. اگر $f(۲) = ۳$ باشد، آنگاه $f(-۴) + f(-۶)$ کدام است؟

۱) ۱۰۲۴
۲) ۸۱۰
۳) ۵۱۲
۴) ۷۲۹

۱۷ کدام گزینه نمی تواند هم دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{x - ۳} + ۲$ باشد؟

۱) $[۰, +\infty)$
۲) $(۰, +\infty)$
۳) $[۲, +\infty)$
۴) $(۲, +\infty)$

۱۸ نمودار توابع $f(x) = ۳x + a$ و $g(x) = bx^۲ + ۲ax + ۱۴$ در نقطهٔ $(۱, ۲)$ متقاطع هستند. حاصل ab کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۰

۱۹ اگر $f(x)$ یک تابع خطی و $f(۳) = f(-۳) + ۴$ و $f(۲) = ۱$ باشد، آنگاه نمودار تابع f محور yها را با چه عرضی قطع می کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۳}$

۲۰ f یک تابع خطی است، $f(۲) = ۳$ و $۲f(۲) = ۱ + f(۱)$. اگر دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۲, ۴)$ باشد، برد تابع کدام است؟

۱) $[۴, ۱۹)$
۲) $[-۱۹, ۲۹)$
۳) $[-۲۹, ۱۱)$
۴) $[-۲۹, ۱۹)$

۲۱ اگر f تابعی خطی باشد به طوری که رابطهٔ $f(x-۱) + f(x+۲) = x$ برقرار باشد، آنگاه $f(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) ۱
۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۲ اگر f، تابعی خطی با شیب منفی باشد و داشته باشیم $f(x)+(f(x))^۲=۴x^۲-۶x+۲$، مقدار $f(۷)$ کدام است؟

۱) ‎-۱۳‎
۲) ‎-۱۵‎
۳) ‎-۱۷‎
۴) ‎-۱۱‎

۲۳ دامنه و برد تابع خطی $f(x)=ax+b$ با شیب منفی به ترتیب $[-۱,۵]$ و $[-۴,۸]$ است. تابع f، نمودار تابع همانی را در نقطهٔ A قطع می کند. ضابطهٔ تابع ثابتی که از نقطهٔ A می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y=۲$
۲) $x=۲$
۳) $y=۳$
۴) $x=۳$

۲۴ اگر تابع $f=\{(۱,m+۲),(۰,m),(۲,۲)\}$ یک تابع خطی باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ‎-۱‎
۴) ‎-۲‎

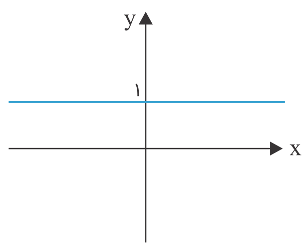
۲۵ اگر $f=\{(۴a+b,b+۱),(۴a+b^۲,۱-۲b),(b^۲,۴)\}$ یک تابع همانی باشد، $a+b$ کدام است؟

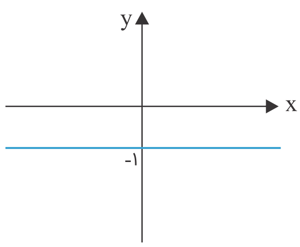
۱) $-\frac{۷}{۴}$
۲) $\frac{۹}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $-\frac{۱}{۴}$

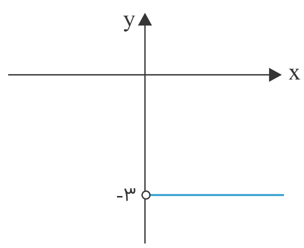
۲۶ اگر f تابعی همانی و $f(۳-a)+f(۲)=۶$ باشد، مقدار $f(۱-a)$ کدام است؟

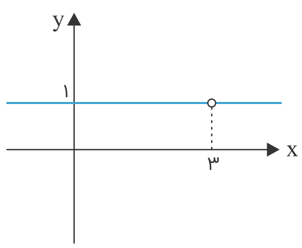
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۷ اگر $f(x)=\frac{ax-۳}{x-۳a}$ یک تابع ثابت باشد، نمودار این تابع کدام گزینه می تواند باشد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۲۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳x^۲+ax+b}{۲x^۲+cx+d}$، یک تابع ثابت $y=k$ و دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۳\}$ است. حاصل $\frac{a-b+c-d}{k}$ کدام است؟

۱) ۱۰-　　　　۲) ۱۰

۳) ۵　　　　۴) ۵-

۲۹ تابع f همانی، تابع g ثابت و تابع h خطی است. اگر داشته باشیم: $۲f(-۲)=g(۲)\ ,\ h(-۲)=g(۰)+۱$ و $h(۲)=f(۲)+g(۳)+۱$، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $h(x)\geq ۰$ کدام است؟ (دامنهٔ هر سه تابع، $\mathbb{R}$ است.)

۱) $(-\infty,-۲]$　　　　۲) $[۰,+\infty)$

۳) $[۴,+\infty)$　　　　۴) $(-\infty,۰]$

۱ گزینه ۳

ازآنجاکه رابطۀ f تابع است، پس هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفۀ اولشان یکی نیست و در صورت یکی بودن مؤلفه های اول باید مؤلفه های دوم آن ها نیز برابر باشند، پس:

$$\left.\begin{matrix}(۵, a^{۲}-۱)\in f\\(۵,۳)\in f\end{matrix}\right\}\Rightarrow a^{۲}-۱=۳\Rightarrow a^{۲}=۴\Rightarrow a=\pm ۲\Rightarrow\begin{cases}a=+۲ & \text{غ.ق.ق}\\ a=-۲ & \text{ق.ق}\end{cases}$$

زای ، دو زوج مرتب a و$(۲,۳)$ $(۲,-۱)$در رابطه خواهد بود که شرط تابع بودن را نقض می کند.

$$\left.\begin{matrix}(۲,-۱)\in f\\(۲,b)\in f\end{matrix}\right\}\Rightarrow (۲,b)=(۲,-۱)\Rightarrow b=-۱$$

$$f=\{(-۲,۳),(۵,۳),(۲,-۱)\}$$

$$\frac{f(-۲)+f(۲)}{f(۵)}=\frac{۳+(-۱)}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۶ ۱۳۹۷

۲ | گزینه ۲

در یک تابع اگر دو زوج مرتب با مؤلفه های اول برابر وجود داشته باشد، مؤلفه های دوم آن زوج مرتب ها نیز برابرند، پس:

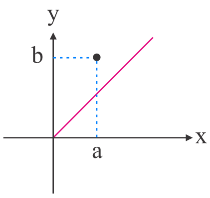
$$(۷, m^۲ - ۴m) = (۷, ۵) \Rightarrow m^۲ - ۴m = ۵$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۴m - ۵ = ۰ \Rightarrow (m-۵)(m+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۵ \end{cases}$$

$m = -۱$ دو زوج مرتب $(-۱, ۲)$ و $(-۱, ۶)$ را خواهیم داشت که شرط تابع بودن را برآورده نمی کنند، پس $m = ۵$ قابل قبول است؛ بنابراین:

$$f = \{(-۱, ۲), (۷, ۵), (۵, ۶), (۲, ۵)\}$$

اگر نقطهٔ (a, b) بالای نیمساز ناحیهٔ اول باشد، آنگاه:



الف) a و b مثبت اند.

ب) $a < b$.

بنابراین تنها دو نقطهٔ $(۲, ۵)$ و $(۵, ۶)$ این شرایط را دارند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۳ | گزینه ۳

$$\begin{cases} (۲, a+b), (۲, c+۲) \in f \Rightarrow a+b = c+۲ \Rightarrow b-c = ۲-a \\ (۱, ۳+c), (۱, b+۲) \in f \Rightarrow ۳+c = b+۲ \Rightarrow b-c = +۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲ - a = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

$$\Rightarrow f = \{(۲, ۱+b), (-۲, b), (۲, c+۲), (۱, ۳+c), (-۲, ۳), (۱, b+۲)\} \Rightarrow b = ۳$$

$$\Rightarrow f = \{(۲, ۴), (-۲, ۳), (۲, c+۲), (۱, ۳+c), (۱, ۵)\} \Rightarrow c = ۲$$

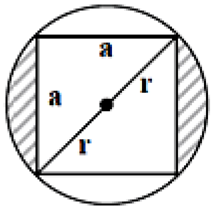
$$\Rightarrow f = \{(۲, ۴), (-۲, ۳), (۱, ۵)\}$$

$$a + b + c = ۱ + ۳ + ۲ = ۶$$

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۸

۴ گزینه ۳

شعاع دایره را r و ضلع مربع را a فرض می کنیم. باتوجه‌به شکل داریم:



$$a^{۲} + a^{۲} = (۲r)^{۲} \Rightarrow a^{۲} = ۲r^{۲} \quad (۱)$$

$$S_{\text{هاشور}} = \frac{S_{\text{دایره}} - S_{\text{مربع}}}{۲} = \frac{\pi r^{۲} - a^{۲}}{۲} \overset{(۱)}{=} \frac{\pi - ۲}{۲} r^{۲} \quad (*)$$

حال مقدار شعاع را برحسب محیط به دست می آوریم:

$$\text{محیط} : A = ۲\pi r \Rightarrow r = \frac{A}{۲\pi}$$

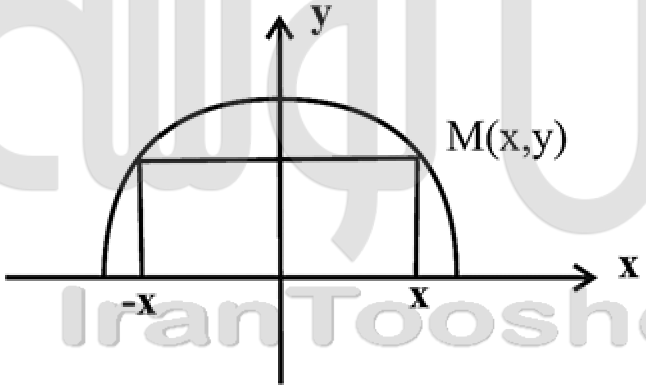
با جایگذاری این مقدار در (*)، داریم:

$$S = \frac{\pi - ۲}{۲} r^{۲} = \frac{\pi - ۲}{۲} \times \frac{A^{۲}}{۴\pi^{۲}} = \frac{\pi - ۲}{۸\pi^{۲}} A^{۲}$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۵ گزینه ۴

مطابق شکل، اگر طول مستطیل را $۲x$ و عرض آن را y فرض کنیم، آنگاه داریم:



$$S = ۲xy = \frac{۴}{۳} x \sqrt{۹ - x^{۲}} = \sqrt{\frac{۱۶}{۹} x^{۲} (۹ - x^{۲})} \Rightarrow S = \sqrt{۱۶x^{۲} - \frac{۱۶}{۹} x^{۴}}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۶ گزینه ۲

حجم تانکر برابر است با:

$$\text{حجم تانکر} = V(r) = ۲ \times (\text{حجم هر نیمکره}) + \text{حجم استوانه}$$

$$= V(r) = ۲(\frac{۲}{۳}\pi r^{۳}) + \pi r^{۲} \times ۸$$

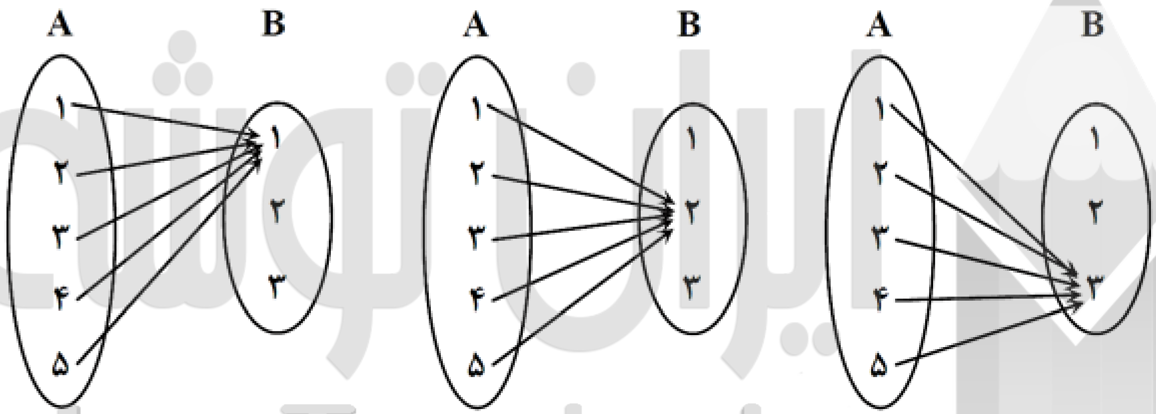
$$\Rightarrow V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} + ۸\pi r^{۲}$$

توجه کنید که حجم استوانه از رابطهٔ "مساحت قاعده $\times$ارتفاع" قابل محاسبه است.

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۶
قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۶

۷ گزینه ۳

نکته: تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم.
به کمک نمودارِوِن، حالات مختلفی را که می توان از A به B یک تابع ثابت تعریف کرد نشان می دهیم:



بنابراین می توان ۳ تابع ثابت از A به B تعریف کرد.

گزینه دو علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۷
گزینه دو ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۷

۸ گزینه ۲

دامنهٔ تابع مجموعهٔ A است که ۳ عضو دارد. واضح است که برد تابع نیز باید سه عضوی باشد؛ بنابراین سه عضو متمایز از B باید انتخاب کنیم که این سه عضو، خود به !۳ حالت می توانند جابه جا شوند (به عضوهای متفاوتی از A وصل شوند). به بیان دیگر در تابع $f = \{(a,\square),(b,\square),(c,\square)\}$، $\square$ها $۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$ حالت را می توانند بپذیرند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

۹ گزینه ۴

تعداد انتخاب های هریک از عضوهای مجموعهٔ A را پیدا می کنیم.

تعداد انتخاب ها : $\overbrace{۱}^{a}\quad \overbrace{۲}^{b}\quad \overbrace{۳}^{c}\quad \overbrace{۳}^{d}$

پس تعداد تابع های f برابر با $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۳ = ۱۸$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۱۰ گزینه ۲

برای آنکه y تابعی از x باشد باید به ازای هر x فقط یک y وجود داشته باشد:

گزینهٔ ۱ : $x = ۰ \Rightarrow |y| = ۵ \Rightarrow y = -۵$ یا $y = ۵$

گزینهٔ ۳ : $x = ۱ \Rightarrow y^{۲} = ۴ \Rightarrow y = -۲$ یا $y = ۲$

گزینهٔ ۴ : $x = ۱ \Rightarrow |y| = ۴ \Rightarrow y = ۴$ یا $y = -۴$

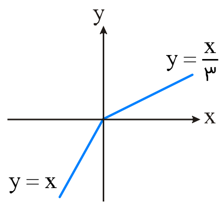
قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۸

۱۱ گزینه ۳

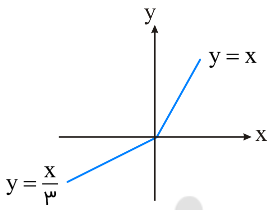
گزینهٔ ۳ صحیح است. تابع بودن رابطهٔ $y-\sqrt{y}=\sqrt{x}$ را می توان با مثال نقض زیر رد کرد:

$$x=0 \Rightarrow y-\sqrt{y}=0 \Rightarrow y=\sqrt{y} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$$

روابط گزینه های ۱ و ۲ را می توان رسم کرد و تابع بودن آن ها را اثبات کرد.



$2y+|y|=x$



$2y-|y|=x$

در گزینهٔ ۴ نیز داریم:

$$y+\sqrt{y}+\frac{1}{4}=\sqrt{x}+\frac{1}{4} \Rightarrow (\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2=\sqrt{x}+\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{(\sqrt{y}+\frac{1}{2})>0} \sqrt{y}+\frac{1}{2}=\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{4}} \Rightarrow y=(\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})^2$$ تابع است

۱۲ گزینه ۳

$$x^۲ + y^۲ + ۸x - ۲y + a = ۰$$

$$(x + ۴)^۲ - ۱۶ + (y - ۱)^۲ - ۱ + a = ۰$$

$$(x + ۴)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۱۷ - a$$

برای اینکه ضابطهٔ فوق، یک تابع غیرتهی باشد باید $۱۷ - a = ۰$ شود، یعنی:

$$۱۷ - a = ۰ \Rightarrow a = ۱۷$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

۱۳ گزینه ۱

هرکدام از اعداد $x = ۲$ و $x = -۱$ در دامنهٔ دو ضابطه قرار دارند. ازآنجایی که f یک تابع است، پس باید مقدار هر دو ضابطهٔ اول و دوم به ازای $x = ۲$ و مقدار هر دو ضابطهٔ دوم و سوم به ازای $x = -۱$، برابر باشد.

$$\begin{matrix}\text{ضابطهٔ اول}\\ \text{ضابطهٔ دوم}\end{matrix}\begin{cases} f(۲) = ۲a(۲) + ۵b \\ f(۲) = -۲(۲)^۲ + ۱ \end{cases} \Rightarrow ۴a + ۵b = -۷ \qquad (*)$$

$$\begin{matrix}\text{ضابطهٔ دوم}\\ \text{ضابطهٔ سوم}\end{matrix}\begin{cases} f(-۱) = -۲(-۱)^۲ + ۱ \\ f(-۱) = b - a(-۱) \end{cases} \Rightarrow a + b = -۱ \qquad (**)$$

با قرار دادن هرکدام از معادلات (*) و (**) در یک دستگاه و حل آن، مقادیر a و b را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} ۴a + ۵b = -۷ \\ a + b = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a + ۵b = -۷ \\ -۴a - ۴b = ۴ \end{cases} \Rightarrow b = -۳ \Rightarrow a = ۲$$

بنابراین:

$$ab = ۲ \times (-۳) = -۶$$

گزینه دو علوم تجربی دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶
گزینه دو ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

۱۴ گزینه ۲

$$\sqrt{x} = ۵ \Rightarrow x = ۲۵ \Rightarrow f(۵) = ۲۵ - \sqrt{۲۵} = ۲۵ - ۵ = ۲۰$$

$$\sqrt{x} = ۴ \Rightarrow x = ۱۶ \Rightarrow f(۴) = ۱۶ - \sqrt{۱۶} = ۱۶ - ۴ = ۱۲$$

$$\begin{cases} f(۵) = ۲۰ \\ f(۴) = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow f(۵) - ۲f(۴) = ۲۰ - ۲ \times ۱۲ = ۲۰ - ۲۴ = -۴$$

۱۵ گزینه ۴

مقدار x را به‌گونه ای قرار می دهیم که $f(۲x+۱)$، $f(۵)$ را تولید کند، یعنی:

$$۲x+۱=۵ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow f(۵)+f(۳)=۹$$

حال مقدار $f(۳)$ مجهول است و اگر آن را داشته باشیم مقدار $f(۵)$ به دست می آید. برای به دست آوردن $f(۳)$، داریم:

$$۲x+۱=۳ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow f(۳)+f(۳)=۴ \Rightarrow ۲f(۳)=۴ \Rightarrow f(۳)=۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(۵)+f(۳)=۹ \\ f(۳)=۲ \end{cases} \Rightarrow f(۵)+۲=۹ \Rightarrow f(۵)=۷$$

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۷

۱۶ گزینه ۲

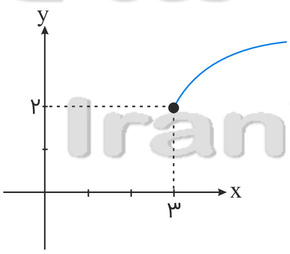
$$f(x)=\begin{cases} ۲^{ax} & ;x \geq ۰ \\ ۴^{-ax} & ;x < ۰ \end{cases},\ f(۲)=۳ \Rightarrow ۲^{۲a}=۳ \Rightarrow ۴^{a}=۳$$

$$f(-۴)+f(-۶)=۴^{۴a}+۴^{۶a}=(۴^{a})^{۴}+(۴^{a})^{۶}=۳^{۴}+۳^{۶}=۳^{۴}(۱+۳^{۲})=۸۱\times ۱۰=۸۱۰$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

۱۷ گزینه ۴

هر مجموعهٔ دلخواه که شامل برد تابع است، هم دامنه است.



$$R_f=[۲,+\infty)$$

پس تنها گزینهٔ ۴ است که شامل بُرد تابع نیست.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۱۸ گزینه ۴

هر دو تابع از نقطهٔ $(۱,۲)$ می‌گذرند؛ پس این نقطه در ضابطهٔ هر دو صدق می‌کند:

$$\begin{cases} f(۱)=۲ \Rightarrow ۳+a=۲ \Rightarrow a=-۱ \\ g(۱)=۲ \Rightarrow b+۲a+۱۴=۲ \xrightarrow{a=-۱} b=-۱۰ \end{cases} \Rightarrow ab=۱۰$$

گزینه دو علوم تجربی سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۱۹ گزینه ۴

تابع $f(x)$ یک تابع خطی است، پس ضابطهٔ آن به صورت $y=ax+b$ است، بنابراین:

$$f(۳)=۳a+b \ , \ f(-۳)=-۳a+b$$

$$\Rightarrow f(۳)=f(-۳)+۴ \Rightarrow ۳a+b=-۳a+b+۴ \Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

$$f(۲)=۱ \Rightarrow ۲(\frac{۲}{۳})+b=۱ \Rightarrow b=-\frac{۱}{۳}$$

$$f(x)=\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۳} \xrightarrow{x=۰} y=-\frac{۱}{۳}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۲۰ گزینه ۴

$$f(x)=mx+h \xrightarrow{f(۲)=۳} ۳=۲m+h$$

$$f(۱)+۲f(۲)=۱ \Rightarrow f(۱)+۲\times ۳=۱ \Rightarrow f(۱)=-۵$$

$$\xrightarrow{f(۱)=-۵} -۵=m+h$$

$$\begin{cases} ۲m+h=۳ \\ -m-h=۵ \end{cases} \Rightarrow m=۸ \ , \ h=-۱۳$$

$$\Rightarrow f(x)=۸x-۱۳$$

$$\begin{cases} f(-۲)=-۱۶-۱۳=-۲۹ \\ f(۴)=۳۲-۱۳=۱۹ \end{cases} \Rightarrow f \text{ برد تابع} =[-۲۹,۱۹)$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

۲۱

گزینه ۲

$$f(x) = ax + b$$

$$\Rightarrow f(x-۱) + f(x+۲) = a(x-۱) + b + a(x+۲) + b = x$$

$$\Rightarrow ۲ax + a + ۲b = x \Rightarrow (۲a-۱)x + (a+۲b) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \\ a + ۲b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴} \Rightarrow f(۲) = \frac{۳}{۴}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۲۲

گزینه ۱

ضابطهٔ تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم. (چون شیب f منفی است، پس $a < ۰$) طبق فرض داریم:

$$ax + b + (ax+b)^۲ = ۴x^۲ - ۶x + ۲$$

$$\Rightarrow a^۲x^۲ + (a + ۲ab)x + b^۲ + b = ۴x^۲ - ۶x + ۲$$

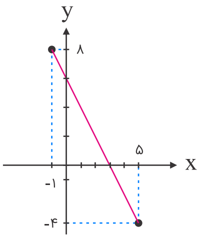
$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲ = ۴ \\ a + ۲ab = -۶ \\ b^۲ + b = ۲ \end{cases} \xrightarrow{a<۰} \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -۲x + ۱ \Rightarrow f(۷) = -۱۴ + ۱ = -۱۳$$

گزینه دو علوم تجربی سوم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

۲۳ گزینه ۱

نمودار تابع f به صورت زیر است:



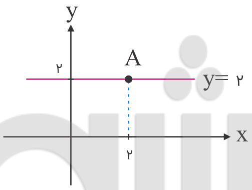
$$m = \frac{۸-(-۴)}{-۱-۵} = \frac{۱۲}{-۶} = -۲$$

$$y - ۸ = -۲(x+۱) \Rightarrow y = -۲x + ۶ \Rightarrow f(x) = -۲x + ۶$$

حالا f را با تابع همانی $y = x$ قطع می دهیم:

$$-۲x + ۶ = x \Rightarrow x = ۲$$

پس مختصات A به صورت $A(۲,۲)$ است. ضابطهٔ تابع ثابتی که از A می‌گذرد به صورت $y = ۲$ است.



قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

۲۴ گزینه ۴

تابعی که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می شود.
نقاط داده شده روی یک تابع خطی قرار دارند. با جایگذاری این نقاط در فرم کلی تابع خطی داریم:

$(۱, m+۲)$ روی تابع خطی $: a(۱) + b = m + ۲ \Rightarrow a + b = m + ۲ \quad (۱)$
$(۰, m)$ روی تابع خطی $: a(۰) + b = m \Rightarrow b = m \quad (۲)$
$(۲, ۲)$ روی تابع خطی $: a(۲) + b = ۲ \Rightarrow ۲a + b = ۲ \quad (۳)$

با جایگذاری معادلهٔ (۲) در معادلهٔ (۱) داریم $a + b = b + ۲$ پس $a = ۲$ با جایگذاری این مقدار در معادلهٔ ۳ داریم:

$$۲(۲) + b = ۲ \Rightarrow b = -۲$$

باتوجه‌به معادلهٔ (۲) داریم: $m = b = -۲$
بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

گزینه دو علوم تجربی دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷
گزینه دو ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

۲۵ گزینه ۱

ضابطهٔ تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است، پس خواهیم داشت:

$$۴a + b = b + ۱ \Rightarrow ۴a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

$$۴a + b^۲ = ۱ - ۲b \xrightarrow{a=\frac{۱}{۴}} ۱ + b^۲ = ۱ - ۲b \Rightarrow b^۲ + ۲b = ۰ \Rightarrow b(b+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = -۲ \\ b = ۰ \end{cases}$$

(نیز، بایلد) $b^۲ = ۴$ باشد که $b = \pm ۲$می شود و باتوجه‌به نتایج قبلی، فقط مقدار -۲قابل قبول است، پس:

$$a + b = \frac{۱}{۴} - ۲ = -\frac{۷}{۴}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۷

۲۶ گزینه ۳

بع همانی f، داریم: $f(k) = k$، پس:

$$f(۳ - a) + f(۲) = ۶ \Rightarrow ۳ - a + ۲ = ۶ \Rightarrow a = -۱$$

درنتیجه:

$$f(۱ - a) = f(۱ - (-۱)) = f(۲) = ۲$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

۲۷ گزینه ۴

نکته: اگر $f(x)$ تابعی ثابت باشد، ضابطهٔ آن به صورت $f(x) = k$ است. $(k \in \mathbb{R})$

راه حل اول:

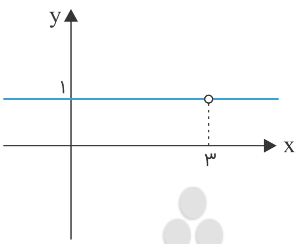
باتوجه به نکته می توان نوشت:

$$\frac{ax - ۳}{x - ۳a} = k \Rightarrow ax - ۳ = kx - ۳ak$$

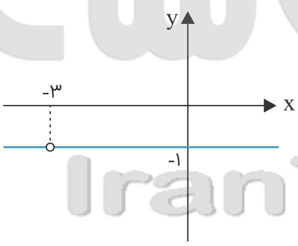
$$\Rightarrow a = k\,,\ -۳ak = -۳ \Rightarrow -۳a(a) = -۳ \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

نتیجه می شود که به ازای $a = ۱$ و $a = -۱$ نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$a = ۱ \Rightarrow f(x) = \frac{x - ۳}{x - ۳} = ۱\quad,\quad x \neq ۳$$



$$a = -۱ \Rightarrow f(x) = \frac{-x - ۳}{x + ۳} = \frac{-(x + ۳)}{x + ۳} = -۱\quad,\quad x \neq -۳$$



بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

راه حل دوم:

باتوجه‌به نکته، باید عبارت تساوی x از صورت و مخرج ساده شود؛ بنابراین:

$$\frac{ax - ۳}{x - ۳a} = \frac{a(x - \frac{۳}{a})}{x - ۳a}$$

اگر صورت با مخرج بخواهند باهم ساده شوند، باید داشته باشیم:

$$\frac{۳}{a} = ۳a \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

ادامهٔ راه حل مشابه است.

گزینه دو علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۶

گزینه دو ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۶

۲۸ گزینه ۱

$\mathbb{R}-\{-3\}$ است، پس $x=-3$ تنها ریشهٔ مخرج کسر است. ازآنجاکه مخرج به صورت یک عبارت درجهٔ دوم است؛ ریشهٔ مضاعف $x=-3$ داشته باشد، به‌عبارتی به‌صورت $A(x+3)^2$ دربیاید. از مقایسهٔ عبارت $2x^2+cx+d$ با $\underbrace{A(x+3)^2}_{x^2+6x+9}$ واضح است که $A=2$ بوده و در نتیجه $c=12$ و $d=18$ خواهد بود.

حال دقت کنید که تابع $f(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{2x^2+12x+18}$ قرار است یک تابع ثابت شود. برای این منظور باید صورت کسر به‌صورت ضریبی از مخرج درآید. با مقایسهٔ جملات اول صورت و مخرج، مشخص می شود که صورت قرار است $\frac{3}{2}$ برابر مخرج باشد، پس این نسبت در بقیهٔ جملات صورت و مخرج نیز برقرار است، یعنی:

$$\begin{cases} a=\frac{3}{2}(12)=18 \\ b=\frac{3}{2}(18)=27 \end{cases}$$

صورت تابع ثابت $y=\frac{3}{2}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-3\}$ خواهد بود.

پس:

$$\frac{a-b+c-d}{k}=\frac{18-27+12-18}{\frac{3}{2}}=\frac{-15}{\frac{3}{2}}=-10$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

۲۹ گزینه ۳

تابع همانی : $f(x)=x\Rightarrow f(-2)=-2\,,\ f(2)=2$

تابع ثابت : $g(x)=c$

$$\begin{cases} g(x)=c \\ 2f(-2)=g(2) \end{cases}\Rightarrow -4=c$$

تابع خطی : $h(x)=ax+b$

$$\begin{cases} h(-2)=-2a+b=-3 \\ h(2)=2a+b=-1 \end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-2$$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{1}{2}x-2\xrightarrow{h(x)\geq 0}\frac{1}{2}x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۸

۱ اگر رابطهٔ $Q = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ یک تابع باشد، برد این تابع چندعضوی است؟

۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

۲ اگر دامنه و برد تابع $f = \{(3, -1), (1, 2), (a-b, 2), (3, a+b)\}$ هرکدام دو عضو داشته باشند، مجموع مقادیر ممکن برای a و b کدام است؟

۱) -3 ۲) -2

۳) -1 ۴) صفر

۳ ع n۵عضو و ۲۹برد آن $3n + 7$ عضو دارد. چند عدد طبیعی برای n وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۱

۴ بع $f(x) = x^2$ شامل ۵ عدد حقیقی است. دامنهٔ این تابع حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۵ حدود k برای اینکه تابع با ضابطهٔ $A(x) = \frac{6x^2 - 2x}{-kx^2 + 2x - 9k}$ همواره به ازای جمیع مقادیر حقیقی x تعریف شده باشد، کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \{0\}$ ۲) $0 < k < \frac{1}{3}$

۳) $-\frac{1}{3} < k < \frac{1}{3}$ ۴) $k < -\frac{1}{3}$ یا $k > \frac{1}{3}$

۶ اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{x}{2x^2 + ax + b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{3\}$ باشد، $a - b$ کدام است؟

۱) -۳۰ ۲) ۳۰

۳) ۶ ۴) -۶

۷ اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{x^2 - 8x - b + 1}{x^2 + ax - 10}$ به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{5, b\}$ و $f(c) = 1$ باشد، آنگاه c کدام است؟

۱) $2/6$ ۲) $-2/6$

۳) $2/4$ ۴) $-2/4$

۸ دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+k}$ برابر با $\mathbb{R}-\{3\}$ است. نمودار این تابع از کدام نواحی محورهای مختصات عبور می کند؟

۱) هر ۴ ناحیه
۲) اول، دوم و سوم
۳) اول، دوم و چهارم
۴) اول، سوم و چهارم

۹ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x}}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی <u>نمی</u> شود؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی شمار

۱۰ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x+\frac{2x+1}{x}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{0\}$
۲) $(-\infty,0)$
۳) $(-1,1)-\{0\}$
۴) $(0,+\infty)\cup\{-1\}$

۱۱ در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-|2x+5|}}$ تعداد اعداد صحیح منفی چندبرابر تعداد اعداد صحیح مثبت است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۱

۱۲ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x-\sqrt{2-x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۳ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+2|}$، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x\leq -1$
۲) $x\geq -1$
۳) $x\leq 1$
۴) $x\geq 1$

۱۴ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{[\frac{x}{2}]-1}$ به صورت $[a,b)$ باشد، $b-a$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۵ اگر $f(x)=\log\frac{5-x}{x+2}$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{2-x}}$ باشند، آنگاه دامنهٔ $\frac{f}{g}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۶ دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{-۴^x + ۹(۲^x) - ۸}$ به صورت $[a, b]$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

۱۷ اگر دامنهٔ $f(x) = \sqrt{(۲a - ۳)x^۲ + ۴ax + ۲a - ۳}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $۰ \le a < \frac{۳}{۲}$ ۲) $a \in \mathbb{R}$

۳) $\{\}$ ۴) $a \ge \frac{۳}{۲}$

۱۸ در تابع $f(x) = \sqrt{ax^۲ + bx + c}$ اگر مجموعه مقادیری از x که به ازای آن تابع f قابل‌تعریف است بازهٔ $[-۲, ۲]$ و $f(۰) = ۲$ باشد، آنگاه $a - b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱

۳) ۱ ۴) ۲

۱۹ اگر دامنهٔ تعریف $f(x) = \sqrt{(x - ۲)(x^۲ + ax + b)}$ بازهٔ $[۱, +\infty)$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱

۳) ۵ ۴) -۵

۲۰ دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{(a^۲ - ۴)x^۲ + ax + ۶}$ بازهٔ $(-\infty, b]$ است. $a + b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵

۳) -۱ ۴) ۱

۲۱ تابع $f(x) = ۳ + \sqrt{ax + b}$ با دامنهٔ $[-۲, +\infty)$ مفروض است. اگر نمودار این تابع، خط $۲y - ۴x = ۱۰$ را در نقطه ای روی محور yها قطع کند، مقدار $f(a + b)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲

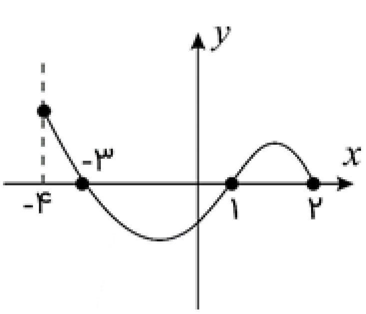
۳) ۷ ۴) ۶

۲۲ اگر $f(x) = a^۲ + \sqrt{\frac{a}{۲}x + ۲}$ و مجموعه مقادیری از x که به ازای آن تابع f قابل تعریف است بازهٔ $(-\infty, ۲]$ باشد، برد تابع f کدام است؟

۱) $[۱, +\infty)$ ۲) $[۴, +\infty)$

۳) $[۹, +\infty)$ ۴) $[۱۶, +\infty)$

۲۳ شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟



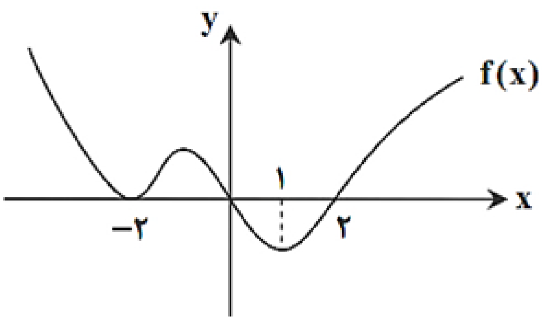
۱) $[\text{۰}, \text{۲}]$

۲) $[-\text{۳}, \text{۲}]$

۳) $[-\text{۴}, -\text{۳}] \cup [\text{۱}, \text{۲}]$

۴) $[-\text{۳}, \text{۰}] \cup [\text{۱}, \text{۲}]$

۲۴ شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{(\text{۲}x - \text{۲})f(x)}$ کدام است؟



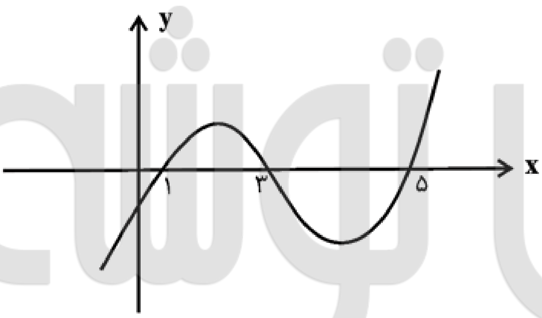
۱) $\{-\text{۲}, \text{۰}, \text{۲}\}$

۲) $\mathbb{R}$

۳) $[\text{۰}, \text{۱}] \cup [\text{۲}, +\infty) \cup \{-\text{۲}\}$

۴) $[\text{۰}, +\infty) \cup \{-\text{۲}\}$

۲۵ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنهٔ $y = \frac{\text{۴}}{\sqrt{(x^{\text{۲}} - \text{۵}x + \text{۴})f(x)}}$ کدام است؟



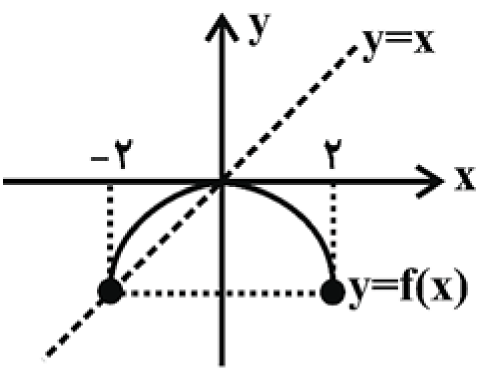
۱) $(\text{۴}, +\infty)$

۲) $(-\infty, \text{۱})$

۳) $(\text{۱}, \text{۳}) \cup (\text{۵}, +\infty)$

۴) $(\text{۳}, \text{۴}) \cup (\text{۵}, +\infty)$

۲۶ اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{f(-x) + x}$ کدام است؟



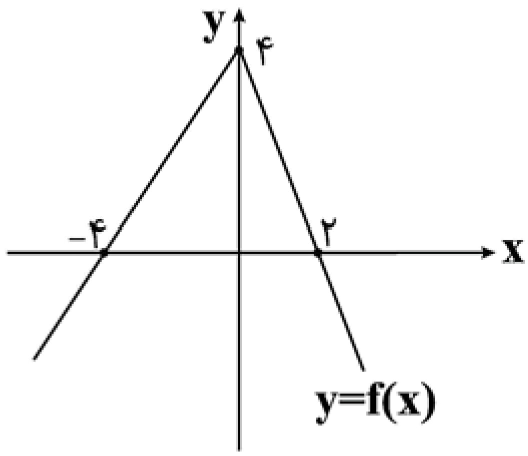
۱) $[-\text{۲}, \text{۰}]$

۲) $[\text{۰}, \text{۲}]$

۳) $[\text{۰}, \text{۲}] \cup \{-\text{۲}\}$

۴) $[-\text{۲}, \text{۰}] \cup \{\text{۲}\}$

۲۷ نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{۲-|f(x)|}$ کدام است؟



۱) $[-۴,-۲]\cup[۱,۲]$

۲) $(-\infty,-۴]\cup[-۲,۱]\cup[۲,+\infty)$

۳) $[-۶,-۲]\cup[۱,۳]$

۴) $(-\infty,-۶]\cup[-۲,۱]\cup[۳,+\infty)$

۲۸ اگر دو تابع $f=\{(۲,-۱),(c,d)\}$ و $g=\left\{\left(۲a^۲-۱,b^۲+۱\right),(b+۱,۲a-۱)\right\}$ برابر باشند، $c+d$ کدام است؟

۱) صفر

۲) -۱

۳) ۲

۴) ۱

۲۹ دو تابع $f(x)=\dfrac{b}{x+۳}$ و $g(x)=\dfrac{x-a}{x^۲+cx+d}$ برابرند. حاصل $\dfrac{abc}{d}$ کدام است؟

۱) -۱

۲) -۲

۳) ۱

۴) ۲

۳۰ به ازای چه مقداری از a دو تابع زیر باهم مساوی اند؟

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲+۳x+۲}{x+۱} & ;x\neq -۱\\ ۳a+۷ & ;x=-۱\end{cases}\quad ,g(x)=x+۲$$

۱) -۲

۲) ۱

۳) ۲

۴) هیچ مقدار a

۳۱ اگر دو تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۹-x^۲}{x+۳} & ;x\neq -۳\\ A & ;x=-۳\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۵x+۶}{۲-x} & ;x\neq ۲\\ B & ;x=۲\end{cases}$ باهم مساوی باشند، مقدار $A+B$ کدام است؟

۱) -۵

۲) ۵

۳) -۷

۴) ۷

۳۲ تابع $y=|۲x-|x||$ با کدام یک از توابع زیر مساوی است؟

۱) $y=۲|x|-x$

۲) $y=x-۲|x|$

۳) $y=|x|-۲x$

۴) $y=۲x-|x|$

۳۳ اگر توابع $f(x)=\sqrt{(x-a)^{۲}(x-b)}$ و $g(x)=|x-a|\sqrt{x+۲}$ باهم برابر باشند، مقدار $a+b$ کدام می تواند باشد؟

۱) -۳
۲) -۵
۳) -۷
۴) -۹

۳۴ اگر توابع $f(x)=\sqrt{x-a}+\sqrt{-۲x+b}+c$ و $g=\{(۳,a)\}$ برابر باشند، آنگاه $a+۲b+c$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۶
۳) -۳
۴) ۱۸

۳۵ با کدام دامنه دو تابع $f(x)=x\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-x^{۳}}$ با یکدیگر مساوی هستند؟

۱) $D=(-\infty,۱]$
۲) $D=[۰,+\infty)$
۳) $D=[۰,۱]$
۴) $D=\{-۱,۰,۱\}$

۳۶ در کدام گزینه توابع داده شده برابر نیستند؟

۱) $f(x)=|۱-x|$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}$
۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^{۲}}}{x}$ و $g(x)=\dfrac{x}{|x|}$
۳) $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}-x$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}+x}$
۴) $f(x)=\sqrt{x^{۲}(x-۱)}$ و $g(x)=|x|\sqrt{x-۱}$

۳۷ تابع $f(x)=۳x+۲$ با دامنهٔ $[-۱,۲]$ مفروض است. اگر برد تابع f دامنهٔ تابع $g(x)=\dfrac{x-۱}{۲}$ باشد، بزرگ ترین عضو صحیح برد تابع g کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۸ دامنهٔ تابع خطی f بازهٔ $[۰,۲]$ و برد آن بازهٔ $[۱,۲]$ است. مقدار $f(\frac{۲}{۳})$ کدام عدد می تواند باشد؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

۳۹ در تابع $f(x)=۱-\left|۱+\dfrac{x-۱}{۲}\right|$ درصورتی که دامنه بازهٔ $[-۲,۳]$ باشد، بزرگ ترین بازه برای برد این تابع کدام است؟

۱) $[-\frac{۱}{۲},۱]$
۲) $[-۱,۱]$
۳) $[۰,۱]$
۴) $[-۲,۱]$

۴۰ برد تابع $f(x)=\begin{cases} x^{2}-3 & ; x \geq 0 \\ -x-3 & ; x<0 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $[-3,+\infty)$

۲) $(-\infty,3]$

۳) $[-3,3]$

۴) $[0,+\infty)$

۴۱ برد تابع $f(x)=\begin{cases} |x+1|-2 & ; x>1 \\ \frac{3}{2} & ; -2 \leq x \leq 1 \\ x^{2}+5x+4 & ; x<-2 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{9}{4},+\infty)$

۲) $(0,+\infty)$

۳) $(-\frac{9}{4},+\infty)$

۴) $[\frac{3}{2},+\infty)$

۴۲ اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases} x^{3}+2 & ; x \leq a \\ 3x+4 & ; x>a \end{cases}$ برابر کل اعداد حقیقی باشد، کمترین مقدار a کدام است؟

۱) ۲

۲) -۲

۳) -۱

۴) ۱

۴۳ برد تابع $y=\sqrt{-4x^{2}+4x+6}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۲

۴۴ اگر $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x}+1$ باشد، برد تابع $f.g$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{0\}$

۲) $\mathbb{R}-\{-1\}$

۳) $(-1,+\infty)$

۴) $(0,+\infty)$

۴۵ برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^{3}-x}{x^{2}-x}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{1,2\}$

۲) $\mathbb{R}-\{0,1\}$

۳) $\mathbb{R}$

۴) $\mathbb{R}-\{0,1,2\}$

۴۶ برد تابع $f(x)=\frac{12}{\sqrt[3]{|x|+8}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۷

۲) ۶

۳) ۵

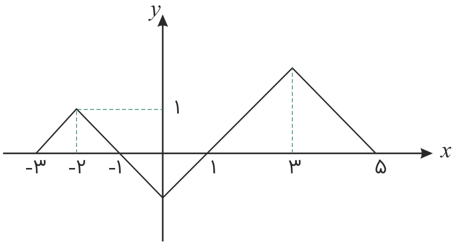
۴) ۸

۴۷ برد تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{1}{2}]$ ۲) $[\frac{1}{2},+\infty)$

۳) $(-\infty,1]$ ۴) $[1,+\infty)$

۴۸ اگر شکل زیر نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2}+1)$ باشد، آنگاه برد تابع $y=\sqrt{|2f(x)-3|}$ کدام است؟



۱) $[0,\sqrt{2}]$

۲) $[0,\sqrt{3}]$

۳) $[0,\sqrt{5}]$

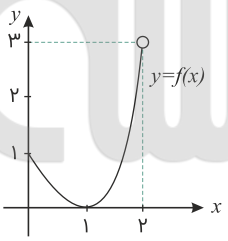
۴) $[\sqrt{3},\sqrt{5}]$

۴۹ اگر برد تابع $g(x)$ اعداد حقیقی نامثبت باشد، برد تابع $f(x)=\dfrac{2g(x)}{g(x)-2}$ کدام است؟

۱) $[0,2)$ ۲) $[0,1)$

۳) $[-1,1)$ ۴) $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

۵۰ اگر نمودار f به صورت زیر باشد، برد $y=3-2\sqrt{f^2(x)+16}$ کدام است؟



۱) $[3-4\sqrt{5},-5]$

۲) $[-7,-5)$

۳) $(-7,-5]$

۴) $(3-4\sqrt{5},-5]$

۱ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l}(۳, m^{۲}) \in Q \\ (۳, m+۲) \in Q\end{array}\right. \Rightarrow m^{۲} = m+۲$$

$$\Rightarrow m^{۲} - m - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -۱ \end{cases}$$

اگر $m = ۲$ باشد، Q تابع نخواهد بود، زیرا $(۲,۱), (۲,۴) \in Q$
پس $m = -۱$ است و رابطهٔ Q را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$Q = \{(۳,۱), (۲,۱), (-۳,-۱), (۳,+۱), (-۱,۴)\}$$

$$\Rightarrow R_Q = \{۱, -۱, ۴\}$$

پس R_Q، ۳ عضو دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ تابستان ۱۳۹۸

۲ گزینه ۳

$$f = \{(۳,-۱), (۱,۲), (a-b,۲), (۳,a+b)\}$$

مجموعهٔ دامنه : $D = \{۳, ۱, a-b\}$

$$\xrightarrow{\text{باید دو عضو داشته باشد}} \begin{cases} a-b = ۱ \\ \text{یا} \\ a-b = ۳ \end{cases}$$

حالت اول : $a-b = ۱ : f = \{(۳,-۱), (۱,۲), (۱,۲), (۳,a+b)\}$

$$\xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} a+b = -۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = ۱ \\ a+b = -۱ \end{cases} \Rightarrow a = ۰,\ b = -۱$$

حالت دوم : $a-b = ۳ : f = \{(۳,-۱), (۱,۲), (۳,۲), (۳,a+b)\}$

این رابطه اصلاً تابع نیست. پس $a-b = ۳$ قابل‌قبول نیست؛ درنتیجه فقط $a = ۰$ و $b = -۱$ قابل‌قبول است.

$$\Rightarrow a+b = ۰ - ۱ = -۱$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

۳ گزینه ۱

باید تعداد اعضای دامنه، بزرگ تر یا مساوی تعداد اعضای برد باشد، پس:

$$۲۹ - ۵n \geq ۳n + ۷ \Rightarrow ۸n \leq ۲۲ \Rightarrow n \leq \frac{۲۲}{۸} = ۲/۷۵$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = ۱ \text{ یا } n = ۲$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۸

۴ گزینه ۳

م برد تابع $f(x) = x^۲$ فقط شامل اعداد نامنفی است، زیرا هر عددی به توان زوج برسد، حاصل عددی نامنفی می شود. دامنهٔ تابع می تواند شامل تمامی ریشه های دوم اعداد برد باشد؛ هر عدد مثبت دارای دو ریشهٔ دوم است، پس دامنهٔ تابع حداکثر ۱۰ عضو دارد. (عدد صفر را عضوی از برد در نظر نمی‌گیریم، زیرا در این صورت تعداد اعضای دامنه، حداکثر نیست.)

گزینه دو علوم تجربی دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

گزینه دو ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

۵ گزینه ۴

برای اینکه عبارت به ازای هر x حقیقی تعریف شده باشد، باید عبارت درجه دوم در مخرج کسر ریشه نداشته باشد، یعنی $\Delta < ۰$ باشد؛ پس داریم:

$$A(x) = \frac{۶x^۲ - ۲x}{-kx^۲ + ۲x - ۹k}$$

$$\text{مخرج کسر} : \Delta < ۰ \Rightarrow \Delta = ۴ - ۴(-k)(-۹k) < ۰$$

$$\Rightarrow ۴ - ۳۶k^۲ < ۰ \Rightarrow k^۲ > \frac{۱}{۹} \Rightarrow k > \frac{۱}{۳} \text{ یا } k < -\frac{۱}{۳}$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

۶ گزینه ۱

دامنهٔ تابع تنها یک عدد حقیقی را شامل نمی شود، بنابراین مخرج تابع f تنها یک ریشهٔ حقیقی (ریشهٔ مضاعف) $x = ۳$ دارد. درنتیجه کسر باید به صورت $k(x-۳)^۲$ باشد. باتوجه‌به اینکه ضریب $x^۲$ برابر ۲ است؛ بنابراین:

$$\text{مخرج} : ۲(x-۳)^۲ = ۲(x^۲ - ۶x + ۹)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ + ax + b = ۲x^۲ - ۱۲x + ۱۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۱۲ \\ b = ۱۸ \end{cases} \Rightarrow a - b = -۳۰$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۷ گزینه ۱

چون دامنهٔ تابع f به صورت $\mathbb{R}-\{5, b\}$ است، پس $x = 5$ ریشهٔ مخرج f است:

$$5^2 + 5a - 10 = 0 \Rightarrow a = -3$$

با جایگذاری $a = -3$ مخرج تابع f را مساوی صفر قرار می دهیم تا b نیز به دست آید:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$a = -3$ و $b = -2$، معادلهٔ $f(c) = 1$ را حل می کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 3}{x^2 - 3x - 10} \xrightarrow{f(c)=1} c^2 - 8c + 3 = c^2 - 3c - 10$$

$$\Rightarrow 5c = 13 \Rightarrow c = \frac{13}{5} = 2/6$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۸ گزینه ۳

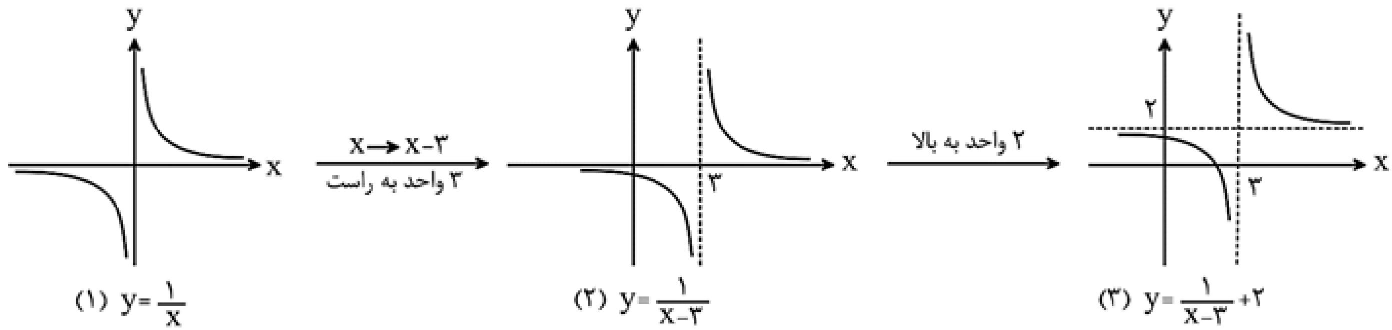
عدد ۳ در دامنهٔ f نیست، پس $x = 3$ ریشهٔ مخرج f است:

$$3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$$

با جایگذاری $k = -3$ تابع f را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2x-6+1}{x-3} = 2 + \frac{1}{x-3}$$

برای رسم تابع $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$، مراحل زیر را روی تابع $y = \frac{1}{x}$ انجام می دهیم:



پس نمودار f فقط از ناحیهٔ سوم عبور نمی کند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ تابستان ۱۳۹۸

۹ گزینه ۳

$$\frac{x-۱}{x^۲-۲x}\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰\Rightarrow x=۱ \\ x(x-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases}\end{cases}$$

x	$-\infty$	۰		۱		۲	$+\infty$
$x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$x^۲-۲x$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$\frac{x-۱}{x^۲-۲x}$	$-$	ن	$+$	۰	$-$	ن	$+$

مجموعه جواب : $D_f=(۰,۱]\cup(۲,+\infty)$

در دامنهٔ تابع موردنظر، دو عدد صحیح و نامنفی صفر و ۲ وجود ندارد.

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

۱۰ گزینه ۴

$$y=\sqrt{x+\frac{۲x+۱}{x}}=\sqrt{\frac{x^۲+۲x+۱}{x}}=\frac{x^۲+۲x+۱}{x}\geq ۰\Rightarrow\frac{(x+۱)^۲}{x}\geq ۰$$

پس دامنهٔ تابع برابر $(۰,+\infty)\cup\{-۱\}$ است.

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

۱۱ گزینه ۲

$$\begin{cases} ۹-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۹\Rightarrow |x|\leq ۳\Rightarrow -۳\leq x\leq ۳ \\ ۹-|۲x+۵|>۰\Rightarrow |۲x+۵|<۹\Rightarrow -۹<۲x+۵<۹\Rightarrow -۱۴<۲x<۴\Rightarrow -۷<x<۲ \end{cases}$$

$$[-۳,۳]\cap(-۷,۲)=[-۳,۲)$$

اعداد صحیح منفی در دامنه: -۱ و -۲ و -۳

اعداد صحیح مثبت در دامنه: ۱

پس جواب برابر ۳ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

۱۲ گزینه ۲

$$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \quad (۱)$$
$$x - \sqrt{۲ - x} \geq ۰ \Rightarrow x \geq \sqrt{۲ - x}$$

دقت کنید در عبارت فوق $x \geq ۰$ است چون سمت راست نامنفی است.

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان۲}} x^۲ \geq ۲ - x \Rightarrow x^۲ + x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱) \geq ۰ \xrightarrow{x\geq ۰} x \geq ۱ \quad (۲)$$
$$\xrightarrow{\text{اشتراک(۱),(۲)}} ۱ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_y = [۱, ۲]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۴

۱۳ گزینه ۳

تابع $f(-x)$را تشکیل می دهیم:

$$f(x) = \sqrt{x + |x+۲|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x+۲|} = \sqrt{|x-۲| - x}$$

باید زیر رادیکال نامنفی باشد، لذا:

$$|x-۲| - x \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۲ : \underline{x} - ۲ - \underline{x} \geq ۰ \Rightarrow -۲ \geq ۰ & \text{غ.ق.ق} \\ x < ۲ : -x + ۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۱ \end{cases}$$

بنابراین دامنهٔ تابع $f(-x)$، $x \leq ۱$ است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۳

$$۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲$$

مخرج صفر نباشد:

$$[\frac{x}{۲}] = ۱ \Rightarrow ۱ \leq \frac{x}{۲} < ۲ \Rightarrow ۲ \leq x < ۴$$
$$D_f = [-۲, ۲] - [۲, ۴) = [-۲, ۲) = [a, b) \Rightarrow b - a = ۲ - (-۲) = ۴$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

۱۵ گزینه ۱

ابتدا دامنهٔ توابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = \log \frac{۵ - x}{x + ۲} \Rightarrow \frac{۵ - x}{x + ۲} > ۰$$

x		-۲		۵	
$۵-x$	+		+	۰	−
$x+۲$	−	۰	+		+
$\frac{۵-x}{x+۲}$	−	ت.ن	+	۰	

$$\Rightarrow D_f = (-۲, ۵)$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{۲ - x}} \Rightarrow ۲ - x > ۰ \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow D_g = (-\infty, ۲)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = ۰\}$$

$$= ((-۲, ۵) \cap (-\infty, ۲)) - \left\{x | \frac{x}{\sqrt{۲ - x}} = ۰\right\} = (-۲, ۲) - \{۰\}$$

اعداد صحیح بازهٔ فوق -۱ و ۱ هستند.

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

۱۶ گزینه ۲

$$-۴^{x} + ۹(۲^{x}) - ۸ \geq ۰ \Rightarrow -(۲^{x})^{۲} + ۹(۲^{x}) - ۸ \geq ۰$$

با فرض $۲^{x} = t$ داریم:

$$-t^{۲} + ۹t - ۸ \geq ۰$$

درنتیجه جمع ضرایب ثابت معادلهٔ درجه دوم صفر است، پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{۱} = ۱ \\ t_{۲} = \dfrac{c}{a} = ۸ \end{cases}$$

t	۱		۸
$-t^{۲}+۹t-۸$	$-$	$+$	$-$

$$\Rightarrow ۱ \leq t \leq ۸$$

$$۲^{۰} = ۱ \leq ۲^{x} \leq ۸ = ۲^{۳} \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۳ \Rightarrow \max(b-a) = ۳ - ۰ = ۳$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

۱۷ گزینه ۳

برای اینکه دامنه $\mathbb{R}$ باشد، باید زیر رادیکال همواره نامنفی باشد.

$$(۲a-۳)x^{۲} + ۴ax + ۲a - ۳ \geq ۰$$

برای آنکه نامعادلهٔ درجه دو نامنفی باشد، باید ضریب $x^{۲}$ مثبت و دلتای عبارت درجهٔ دوم منفی یا صفر باشد.

$$۲a - ۳ > ۰ \Rightarrow a > \frac{۳}{۲} \quad (۱)$$

$$\Delta \leq ۰ \Rightarrow (۴a)^{۲} - ۴(۲a-۳)(۲a-۳) \leq ۰$$

$$\Rightarrow ۱۶a^{۲} - ۴(۴a^{۲} - ۱۲a + ۹) \leq ۰ \Rightarrow -۴(-۱۲a + ۹) \leq ۰ \Rightarrow a \leq \frac{۳}{۴} \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) = \varnothing$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۶

۱۸ گزینه ۲

می دانیم دامنهٔ تابع f مجموعه مقادیری از x می باشند که به ازای آن‌ها $ax^۲ + bx + c \geq ۰$ باشد، لذا باتوجه به فرض سؤال مبنی بر اینکه دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۲, ۲]$ است، جدول تعیین علامت تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ به شکل زیر خواهد بود: $(\Delta > ۰)$

x		$x_۱$		$x_۲$	
علامت y	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

مجموعه جواب نامعادلهٔ $ax^۲ + bx + c \geq ۰$ برابر با $[-۲, ۲]$ است. ازطرفی داریم:

$$f(۰) = ۲ \Rightarrow \sqrt{a(۰)^۲ + b(۰) + c} = \sqrt{c} = ۲ \Rightarrow c = ۴$$

لذا نتیجه می‌گیریم که:

$$\left.\begin{array}{l} f(-۲) = ۰ \Rightarrow ۴a - ۲b + ۴ = ۰ \\ f(۲) = ۰ \Rightarrow ۴a + ۲b + ۴ = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a = -۱ \ , \ b = ۰ \Rightarrow a - b = -۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۱۹ گزینه ۳

باتوجه به اینکه دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{(x-۲)(x^۲ + ax + b)}$ بازهٔ $[۱, +\infty)$ است، پس عبارت $(x-۲)(x^۲ + ax + b)$ نباید در $x = ۲$ تغییر علامت بدهد؛ ولی باید در $x = ۱$ تغییر علامت بدهد، پس $x = ۱$ و $x = ۲$ ریشه های معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ هستند.

$$x^۲ + ax + b = (x-۱)(x-۲) = x^۲ - ۳x + ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۳ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow b - a = ۵$$

دقت کنید که در این صورت داریم $f(x) = \sqrt{(x-۲)^۲(x-۱)} = |x-۲|\sqrt{(x-۱)}$ که دامنهٔ آن طبق فرض بازهٔ $[۱, +\infty)$ است.

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

۲۰ گزینه ۴

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد؛ پس:

$$(a^2-4)x^2+ax+6 \geq 0 \quad (*)$$

، این نامعادله بازهٔ $(-\infty, b]$ است. می‌دانیم مجموعه جواب نامعادلهٔ درجه دوم هیچ گاه به صورت $(-\infty, b]$ نیست، بلکه به صورت $(-\infty, b] \cup [c, +\infty)$ یا $\{c\}$ یا $\mathbb{R}$ یا $\{\}$ یا $[b, c]$ می تواند باشد (b و c ریشه های عبارت درجه ۲ هستند)، پس عبارت زیر رادیکال، درجهٔ دوم نیست. درنتیجه ضریب x^2 برابر با صفر است:

$$a^2-4=0 \Rightarrow a=\pm 2$$

هر دو مقدار a را بررسی می کنیم:

$$1)\ a=2 \xrightarrow{(*)} 2x+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow \text{مجموعهٔ جواب} = [-3, +\infty)$$

باتوجه‌به اینکه مجموعه جواب داده شده به صورت $(-\infty, b]$ است، پس این حالت قابل قبول نیست.

$$2)\ a=-2 \xrightarrow{(*)} -2x+6 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow b=3$$

پس:

$$a+b=-2+3=1$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۲۱ گزینه ۳

چون دامنهٔ f بازهٔ $[-۲, +\infty)$ است، داریم:

$$f(x) = ۳ + \sqrt{ax+b} : ax+b \geq ۰ \Rightarrow ax \geq -b$$

$$\xrightarrow[a>۰]{\text{باتوجه به دامنه}} x \geq -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = -۲ \Rightarrow b = ۲a$$

ازطرفی نمودار تابع f، خط $۲y - ۴x = ۱۰$ را روی محور yها قطع کرده است؛ پس طول نقطهٔ برخورد صفر بوده و عرض آن برابر می شود با:

$$۲y - ۴x = ۱۰ \xrightarrow{x=۰} ۲y = ۱۰ \Rightarrow y = ۵ \Rightarrow \text{نقطهٔ برخورد} : (۰, ۵)$$

ازآنجاکه این نقطه بر روی هر دو نمودار قرار دارد، مختصاتش در ضابطهٔ f نیز صدق می‌کند:

$$f(x) = ۳ + \sqrt{ax+b} \xrightarrow{(۰,۵)\in f} ۵ = ۳ + \sqrt{a(۰)+b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{b} = ۲ \Rightarrow b = ۴ \xrightarrow{b=۲a} ۴ = ۲a \Rightarrow a = ۲$$

بنابراین:

$$a + b = ۶$$

$$f(x) = ۳ + \sqrt{۲x+۴}$$

$$\xrightarrow{x=۶} f(۶) = ۳ + \sqrt{۲ \times (۶) + ۴} = ۳ + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۲۲ گزینه ۲

تابع f در محدودهٔ $x \leq ۲$ قابل تعریف است. باتوجه به ضابطهٔ تابع برای به دست آوردن a عبارت زیر رادیکال را بزرگ تر یا مساوی صفر قرار می دهیم، بنابراین داریم:

$$\frac{a}{۲}x + ۲ \geq ۰ \Rightarrow \frac{a}{۲}x \geq -۲ \Rightarrow ax \geq -۴ \quad (*)$$

با معادل سازی نابرابری (*) با محدودهٔ داده شده در سؤال، مشخص است که علامت a منفی است؛ پس با تقسیم رابطهٔ (*) بر a جهت نامساوی عوض می شود، پس:

$$ax \geq -۴ \xrightarrow{\div a} x \leq -\frac{۴}{a} \Rightarrow \frac{-۴}{a} = ۲ \Rightarrow a = -۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $f(x) = ۴ + \sqrt{-x+۲}$ است. حال با داشتن ضابطهٔ تابع برد را محاسبه می کنیم:

$$\sqrt{-x+۲} \geq ۰ \xrightarrow{+۴} ۴ + \sqrt{-x+۲} \geq ۴ \Rightarrow f(x) \geq ۴$$

پس برد تابع به صورت $[۴, +\infty)$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۲۳ گزینه ۴

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد یعنی: $xf(x) \geq ۰$

$$x.f(x) \geq ۰ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۰ \quad \text{یا} \quad ۱ \leq x \leq ۲$$

$$\Rightarrow x \in [-۳, ۰] \cup [۱, ۲]$$

	−۴		−۳		۰		۱		۲
x		−		−	۰	+		+	
f(x)		+	۰	−		−	۰	+	۰
x.f(x)		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۴

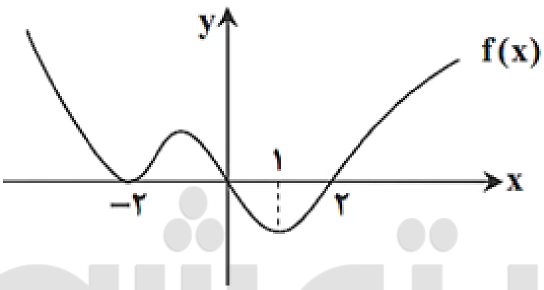
۲۴ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل، دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است؛ ازطرفی می‌دانیم زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید همواره نامنفی باشد. بنابراین:

$$(۲x-۲)f(x) \geq ۰$$

با استفاده از جدول تعیین علامت داریم:

(دقت کنید که محل تقاطع نمودار $f(x)$ با محور xها همان ریشه های معادلهٔ $f(x)$ است)



x		−۲		۰		۱		۲	
۲x−۲	−		−		−	۰	+		+
f(x)	+	۰	+	۰	−		−	۰	+
(۲x−۲)f(x)	−	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+

پس دامنهٔ $y = \sqrt{(۲x-۲)f(x)}$ برابر است با:

$$[۰, ۱] \cup [۲, +\infty) \cup \{-۲\}$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۵

۲۵ گزینه ۴

برای به دست آوردن دامنه کافی است نامعادلهٔ $(x^۲ - ۵x + ۴)f(x) > ۰$ را بررسی کنیم.

$$x^۲ - ۵x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۴ \end{cases}$$

x		۱		۴	
x^۲−۵x+۴	+	۰	−	۰	+

باتوجه‌به جدول بالا و نمودار تابع، جدول زیر را رسم می کنیم.

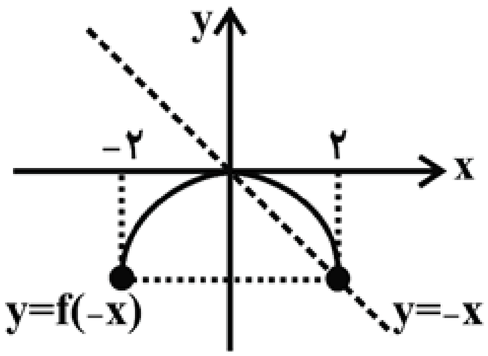
x		۱		۳		۴		۵	
$x^۲-۵x+۴$	+	۰	-		-	۰	+		+
f(x)	-	۰	+	۰	-		-	۰	+
$(x^۲-۵x+۴)f(x)$	-	۰	-	۰	+	۰	-	۰	+

$$\Rightarrow D_y = (۳, ۴) \cup (۵, +\infty$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۲۶ گزینه ۲

برای محاسبهٔ دامنهٔ g باید نامعادلهٔ $f(-x)+x\geq 0$ را حل کنیم. نمودار f نسبت به محور yها متقارن است؛ بنابراین $f(-x)$ بر $f(x)$ منطبق می‌باشد. باتوجه‌به شکل داریم:



$$0\leq x\leq 2 \Rightarrow f(-x)\geq -x$$

$$\Rightarrow f(-x)+x\geq 0$$

$$-2\leq x< 0 \Rightarrow f(-x)< -x$$

$$\Rightarrow f(-x)+x< 0$$

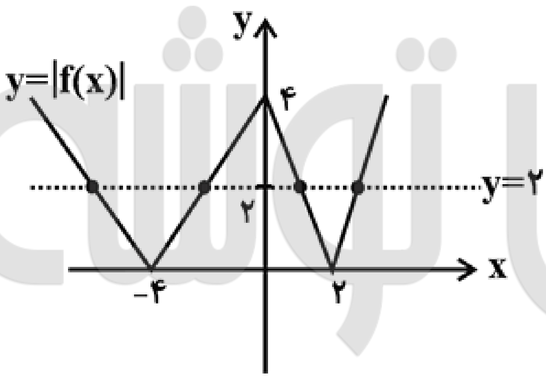
پس دامنهٔ g بازهٔ $[0,2]$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۵

۲۷ گزینه ۳

نودار $y=|f(x)|$ را رسم می کنیم:

در تابع $g(x)$ باتوجه‌به اینکه عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، داریم:



$$2-|f(x)|\geq 0 \Rightarrow |f(x)|\leq 2$$

است که باید نقاطی را پیدا کنیم که در آن ها $|f(x)|=2$ باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<0 \\ -2x+4, & x\geq 0 \end{cases} \xrightarrow{|f(x)|=2} \begin{cases} x+4=2 \Rightarrow x=-2 \\ x+4=-2 \Rightarrow x=-6 \\ -2x+4=2 \Rightarrow x=1 \\ -2x+4=-2 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

دامنهٔ تابع $g(x)$ نقاطی می شود که در آن مقدار تابع $y=|f(x)|$ کمتر یا مساوی ۲ باشد:

$$D_g=[-6,-2]\cup[1,3]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۷

۲۸ گزینه ۴

مجموعه های برابر یعنی اعضای برابر، بنابراین:

$$\begin{cases} b+1=2 \Rightarrow b=1 \\ 2a-1=-1 \Rightarrow a=0 \end{cases} \Rightarrow (c,d)=(2a^2-1, b^2+1)=(-1,2) \Rightarrow c+d=1$$

د که $b^2+1=-1$ نادرست و غیرقابل قبول است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره۱ ۱۳۹۸

۲۹ گزینه ۲

دو تابع را برابر در نظر می گیریم. البته دقت داریم که $D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$ است، پس مخرج g باید فقط یک ریشهٔ ۳- داشته باشد نه ها برابر شوند، یعنی باید $(x+3)^2$ باشد، پس باید مخرج $(x+3)^2=x^2+6x+9$ باشد، یعنی $c=6$ و $d=9$.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{x-a}{(x+3)^2}=\frac{b}{x+3}\xrightarrow{x\neq -3}\frac{x-a}{x+3}=\frac{b}{1}$$

$$\Rightarrow x-a=bx+3b\Rightarrow \begin{cases} b=1\\ a=-3\end{cases}$$

پس:

$$\frac{abc}{d}=\frac{(-3)(1)(6)}{9}=\frac{-18}{9}=-2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

۳۰ گزینه ۱

دامنهٔ هر دو تابع برابر با $\mathbb{R}$ است؛ بنابراین برای تساوی دو تابع باید به ازای هر x از دامنه داشته باشیم: $f(x)=g(x)$.

$$x\neq -1\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+1}=\frac{(x+2)(x+1)}{x+1}=x+2$$

$$f(x)=g(x)$$

به ازای $x=-1$ داریم:

$$x=-1\Rightarrow f(-1)=3a+7\ ,\ \ g(-1)=-1+2=1$$

$$\xrightarrow{f(-1)=g(-1)} 3a+7=1\Rightarrow 3a=-6\Rightarrow a=-2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۳۱ گزینه ۴

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(3-x)(3+x)}{x+3} & ;x\neq -3\\ A & ;x=-3\end{cases}=\begin{cases}3-x & ;x\neq 3\Rightarrow f(2)=1\\ A & ;x=-3\Rightarrow f(-3)=A\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-3)}{2-x} & ;x\neq 2\\ B & ;x=2\end{cases}=\begin{cases}3-x & ;x\neq 2\Rightarrow g(-3)=6\\ B & ;x=2\Rightarrow g(2)=B\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=g(2)\Rightarrow B=1\\ g(-3)=f(-3)\Rightarrow A=6\end{array}\right\}\Rightarrow A+B=7$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

۳۲ گزینه ۱

$$y=|۲x-|x||=\begin{cases}|۲x-(-x)|=|۳x|=-۳x & ;x<۰\\ |۲x-x|=|x|=x & ;x\geq ۰\end{cases}$$

$$\text{گزینهٔ ۱}: y=۲|x|-x=\begin{cases}-۲x-x=-۳x & ;x<۰\\ ۲x-x=x & ;x\geq ۰\end{cases}$$

$$\text{گزینهٔ ۲}: y=x-۲|x|=\begin{cases}x-۲(-x)=۳x & ;x<۰\\ x-۲x=-x & ;x\geq ۰\end{cases}$$

$$\text{گزینهٔ ۳}: y=|x|-۲x=\begin{cases}-x-۲x=-۳x & ;x<۰\\ x-۲x=-x & ;x\geq ۰\end{cases}$$

$$\text{گزینهٔ ۴}: y=۲x-|x|=\begin{cases}۲x-(-x)=۳x & ;x<۰\\ ۲x-x=x & ;x\geq ۰\end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

۳۳ گزینه ۱

از تساوی f و g نتیجه می گیریم که $b=-۲$. برای انتخاب a باید حواسمان به دامنهٔ دو تابع باشد. دامنهٔ تابع f را در دو حالت زیر به دست می آوریم:

۱) $a\geq -۲$:

x		$b=-۲$		a	
$(x-a)^۲(x-b)$	$-$	0	$+$	0	$+$

درنتیجه: $D_f=[-۲,+\infty)$

۲) $a<-۲$:

x		a		$b=-۲$	
$(x-a)^۲(x-b)$	$-$	0	$-$	0	$+$

درنتیجه: $D_f=\{a\}\cup[-۲,+\infty)$

از طرفی چون $D_g=[-۲,+\infty)$ است پس برای آنکه $D_f=D_g$ باشد، باید $a\in[-۲,+\infty)$ باشد، پس:

$$a\geq -۲\xrightarrow{+b}a+b\geq\underbrace{-۲+b}_{-۴}\Rightarrow a+b\geq -۴$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

۳۴ گزینه ۴

می دانیم $D_g = \{۳\}$ است؛ پس باید D_f هم فقط شامل $x = ۳$ باشد.

$$\begin{cases} x - a \geq ۰ \Rightarrow x \geq a \\ -۲x + b \geq ۰ \Rightarrow ۲x \leq b \Rightarrow x \leq \frac{b}{۲} \end{cases} \Rightarrow a \leq x \leq \frac{b}{۲}$$

جموعهٔ تک‌عضوی $\{۳\}$ باشد باید $a = \frac{b}{۲} = ۳$ باشد، پس $b = ۶$ و $a = ۳$ است.

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x) = \sqrt{x - ۳} + \sqrt{-۲x + ۶} + c$ درمی‌آید. مقدار دو تابع در $x = ۳$ را باهم برابر قرار می دهیم:

$$f(۳) = g(۳) \Rightarrow a = c \xrightarrow{a=۳} c = ۳$$

$$\Rightarrow a + ۲b + c = ۳ + ۲ \times (۶) + ۳ = ۱۸$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ تابستان ۱۳۹۸

۳۵ گزینه ۳

نکته: دو تابع f و g برابرند، هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g باهم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان، داشته باشیم:

$$f(x) = g(x)$$

نکته:

$$\sqrt{x^۲} = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq ۰ \\ -x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{x^۲ - x^۳} = \sqrt{x^۲(۱ - x)} = \sqrt{x^۲} \times \sqrt{۱ - x} = |x| \sqrt{۱ - x}$$

طبق فرض این تابع با تابع $f(x) = x\sqrt{۱ - x}$ برابر است، پس باید داشته باشیم:

$$|x| = x \Rightarrow x \geq ۰ \quad (*)$$

طرفی باید عبارت $\sqrt{۱ - x}$ تعریف شده باشد، پس:

$$۱ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۱ \quad (**)$$

از (*) و (**) نتیجه می‌گیریم:

$$۰ \leq x \leq ۱$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

۳۶ گزینه ۴

گزینه ها را بررسی می کنیم. در همهٔ گزینه ها دو شرط برابر بودن ضابطه ها و تساوی دامنه ها باید چک شود:

گزینه ۱ :
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=|۱-x|=|x-۱| \\ g(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ضابطه ها برابرند} \checkmark$$

$D_f=D_g=\mathbb{R}$ دامنه‌ها برابرند ✓

گزینه ۲ :
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲}}{x}=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases} ۱ & ;x>۰ \\ -۱ & ;x<۰ \end{cases} \\ g(x)=\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases} ۱ & ;x>۰ \\ -۱ & ;x<۰ \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ضابطه ها برابرند} \checkmark$$

$D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$ دامنه‌ها برابرند ✓

گزینه ۳ :
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x^۲+۱}-x \\ g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}+x}\times\dfrac{\sqrt{x^۲+۱}-x}{\sqrt{x^۲+۱}-x}=\dfrac{\sqrt{x^۲+۱}-x}{x^۲+۱-x^۲}=\sqrt{x^۲+۱}-x \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ضابطه ها برابرند} \checkmark$$

$D_f=D_g=\mathbb{R}$ دامنه‌ها برابرند ✓

گزینه ۴ :
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x^۲(x-۱)}=\sqrt{x^۲}\times\sqrt{x-۱}=|x|\sqrt{x-۱} \\ g(x)=|x|\sqrt{x-۱} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ضابطه ها برابرند} \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{l} D_f=\{۰\}\cup[۱,+\infty) \\ D_g=[۱,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \neq D_g \text{ دامنه‌ها برابر نیستند} \times$$

در گزینهٔ "۴"، دامنهٔ دو تابع باهم برابر نیست، پس توابع f و g برابر نیستند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

۳۷ گزینه ۳

از روی دامنهٔ f تابع f را می سازیم تا برد f حاصل شود.

$$-۱\le x\le ۲\Rightarrow -۳\le ۳x\le ۶\Rightarrow -۱\le ۳x+۲\le ۸$$

لذا دامنهٔ تابع g بازهٔ $[-۱,۸]$ است.

$$-۱\le x\le ۸\Rightarrow -۱-۱\le x-۱\le ۸-۱$$
$$\Rightarrow -\frac{۲}{۲}\le\frac{x-۱}{۲}\le\frac{۷}{۲}\Rightarrow -۱\le g(x)\le ۳/۵$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

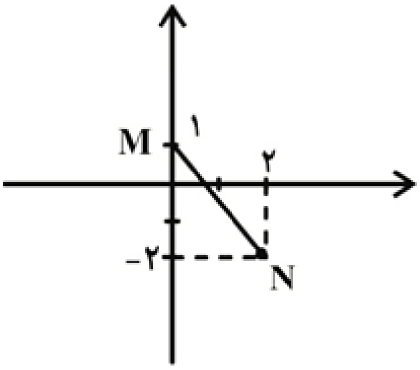
۳۸ گزینه ۲

دو حالت می توان در نظر گرفت:

حالت اول:

$$D=[0,2]\ ,\ R=[-2,1]\ ,\ M=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\ ,\ N=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}\Rightarrow m=\frac{-2-1}{2-0}=\frac{-3}{2}$$

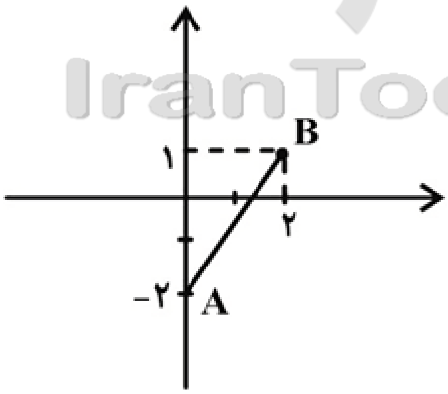
$$y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-1=\frac{-3}{2}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+1\Rightarrow f(\frac{2}{3})=-1+1=0$$



حالت دوم:

$$D=[0,2]\ ,\ R=[-2,1]\ ,\ A=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow m=\frac{-2-1}{0-2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y+2=\frac{3}{2}(x-0)\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-2\Rightarrow f(\frac{2}{3})=1-2=-1$$



پس دو مقدار صفر یا ۱- می تواند باشد.

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۷

۳۹ گزینه ۲

$$f(x)=\left|\frac{x-1+2}{2}\right|-1=\left|\frac{x+1}{2}\right|-1$$

راه حل اول:

$$\left.\begin{array}{l} -1\le x\le 3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x+1}{2}-1=\dfrac{x-1}{2}\Rightarrow -1\le f(x)\le 1 \\ -2\le x\le -1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{-x-1}{2}-1=\dfrac{-x-3}{2}\Rightarrow -1\le f(x)\le -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow R_f=[-1,1]$$

راه حل دوم:

$$-2\le x\le 3\Rightarrow -1\le x+1\le 4\Rightarrow -\frac{1}{2}\le\frac{x+1}{2}\le 2$$

$$\Rightarrow 0\le\left|\frac{x+1}{2}\right|\le 2\Rightarrow -1\le\left|\frac{x+1}{2}\right|-1\le 1\Rightarrow \text{برد تابع}=R_f=[-1,1]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۷

۴۰ گزینه ۱

راه حل اول:

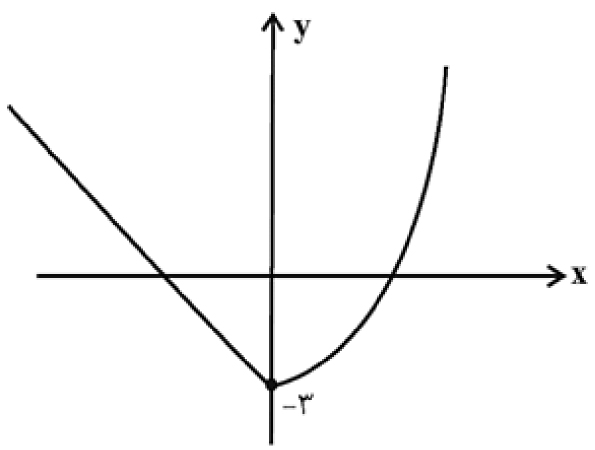
$$\left.\begin{array}{l} x\ge 0\Rightarrow x^2\ge 0\Rightarrow x^2-3\ge -3\Rightarrow R_1=[-3,+\infty) \\ x<0\Rightarrow -x>0\Rightarrow -x-3>-3\Rightarrow R_2=(-3,+\infty) \end{array}\right\}\xrightarrow{\cup} R_f=[-3,+\infty)$$

راه حل دوم:

ع را به کمک انتقال تابع $y=x^2$ به صورت زیر رسم می کنیم:

$y=-x-3 \quad ; x<0$

$y=x^2-3 \quad ; x\ge 0$



درنتیجه: $R_f=[-3,+\infty)$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۴۱ گزینه ۱

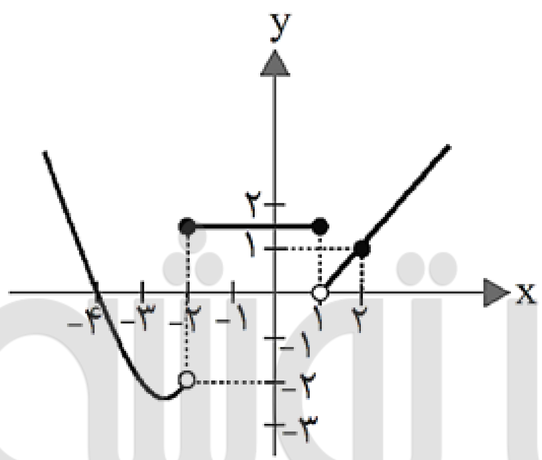
تابع $|x+۱|$ در بازهٔ $x > ۱$ همواره مثبت است؛ بنابراین علامت قدر مطلق آن را برمی داریم:

$$y = |x+۱| - ۲ = (x+۱) - ۲ = x - ۱ \xrightarrow{\text{دو نقطه}} \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow y = ۰ \\ x = ۲ \Rightarrow y = ۱ \end{cases}$$

$$y = x^۲ + ۵x + ۴ = x^۲ + ۵x + \frac{۲۵}{۴} - \frac{۲۵}{۴} + ۴$$

$$= (x + \frac{۵}{۲})^۲ - \frac{۹}{۴} \xrightarrow{\text{سه نقطه}} \begin{cases} x = -\frac{۵}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۹}{۴} \\ x = -۲ \Rightarrow y = -۲ \\ x = -۴ \Rightarrow y = ۰ \end{cases}$$

باتوجه‌به عبارات به‌دست آمده، حال نمودار تابع را رسم می کنیم:



بنابراین تابع همواره از $\frac{۹}{۴}$ بزرگ تر یا مساوی است و همهٔ نقاط بزرگ تر یا مساوی با آن را پوشش می دهد.

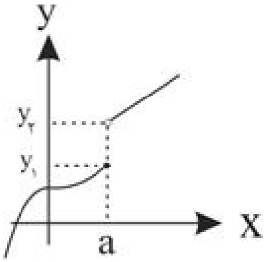
$$\text{برد تابع } f = [-\frac{۹}{۴}, +\infty)$$

قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶

۴۲ گزینه ۳

تابع $f(x)$ برای یک $a > 0$ دلخواه به صورت زیر است:



که در آن $y_1 = a^3 + 2$ و $y_2 = 3a + 4$. باتوجه‌به شکل برد تابع برابر است با: $R_f = (-\infty, a^3 + 2] \cup (3a + 4, +\infty)$

بنابراین برای اینکه برد تابع برابر $\mathbb{R}$ باشد باید:

$$3a + 4 \leq a^3 + 2 \Rightarrow a^3 - 3a - 2 \geq 0 \Rightarrow a^3 - a - 2a - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a(a-1)(a+1) - 2(a+1) \geq 0 \Rightarrow (a+1)(a^2 - a - 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a+1)^2(a-2) \geq 0 \xrightarrow{(a+1)^2 \geq 0} a \in [2, +\infty) \cup \{-1\} \Rightarrow \min\{a\} = -1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

۴۳ گزینه ۳

راه حل اول:

$$y = \sqrt{-(4x^2 - 4x) + 6} = \sqrt{-((2x-1)^2 - 1) + 6} = \sqrt{7 - (2x-1)^2}$$

$$(2x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -(2x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow 7 - (2x-1)^2 \leq 7$$

$$\xrightarrow{7-(2x-1)^2 \geq 0} 0 \leq 7 - (2x-1)^2 \leq 7 \Rightarrow 0 \leq y \leq \sqrt{7}$$

پس برد تابع شامل اعداد صحیح ۰، ۱ و ۲ است.

راه حل دوم:

نکته: در تابع درجهٔ دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ اگر $a > 0$ برد تابع به‌صورت $[f(\frac{-b}{2a}), +\infty)$ و اگر $a < 0$ به‌صورت $(-\infty\ ,\ f(\frac{-b}{2a})]$ است.

$$f(-\frac{b}{2a}) = f(\frac{1}{2}) = 7 \Rightarrow -4x^2 + 4x + 6 \leq 7$$

$$\xrightarrow{-4x^2+4x+6 \geq 0} 0 \leq -4x^2 + 4x + 6 \leq 7 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{-4x^2 + 4x + 6} \leq \sqrt{7}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

۴۴ گزینه ۳

برای محاسبهٔ $f.g$ابتدا دامنهٔ تابع را می یابیم:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x} \Rightarrow D_f : x > 0 \\ g(x) = \sqrt{x}+1 \Rightarrow D_g : x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D_{f.g} = D_f \cap D_g : x > 0$$

حال ضابطهٔ تابع را می یابیم:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x} \times (\sqrt{x}+1) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

درنهایت باتوجه‌به دامنهٔ تابع، برد را می یابیم:

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 > -1$$

$\Rightarrow$ برد تابع $f.g = (-1, +\infty)$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶

۴۵ گزینه ۱

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - x} = \frac{x(x^2-1)}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\cancel{x(x-1)}(x+1)}{\cancel{x(x-1)}} \xrightarrow{x \neq 0,1} f(x) = x+1$$

تابع f ، برابر $f(x) = x+1$ است که فقط در دو نقطه به طول های $x = 0$ و $x = 1$ تعریف نمی شود. برد تابع خطی غیرافقی، $\mathbb{R}$ است، پس برد تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی، به‌جز مقدار تابع در این دو نقطه یعنی $x = 0$ و $x = 1$ است:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0+1 = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1+1 = 2 \end{cases} \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸

۴۶ گزینه ۲

برای به دست آوردن برد تابع این‌گونه عمل می کنیم:

$$|x| \geq 0 \Rightarrow |x| + 8 \geq 8 \Rightarrow \sqrt[3]{|x|+8} \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt[3]{|x|+8}} \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 12} 0 < f(x) \leq 6$$

د تابع برابر است با $R_f = (0, 6]$ که شامل ۶ عدد صحیح است.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

۴۷ گزینه ۱

به ازای مقادیر $x \geq ۲$ عبارت زیر رادیکال نامنفی است و داریم $|۲-x| = x-۲$ و تابع به صورت زیر ساده می شود:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-۲}-۱}{|۲-x|-x} = \frac{\sqrt{x-۲}-۱}{x-۲-x} = \frac{\sqrt{x-۲}-۱}{-۲}$$

$$x \geq ۲ \Rightarrow \sqrt{x-۲} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۲}-۱ \geq -۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{x-۲}-۱}{-۲} \leq \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow R_f = (-\infty, \frac{۱}{۲}]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۴۸ گزینه ۳

برد $f(\frac{x}{۲}+۱)$ و $f(x)$ یکسان هستند. باتوجه‌به نمودار، برد تابع داده شده برابر $[-۱,۲]$ است. داریم:

$$-۱ \leq f(x) \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq ۲f(x) \leq ۴ \Rightarrow -۵ \leq ۲f(x)-۳ \leq ۱$$

$$\xrightarrow{\text{قدر مطلق می‌گیریم}} ۰ \leq |۲f(x)-۳| \leq ۵$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال می‌گیریم}} ۰ \leq \sqrt{|۲f(x)-۳|} \leq \sqrt{۵}$$

مقدار تابع $f(x)$ در $x=۳$ برابر ۲ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

۴۹ گزینه ۱

$$f(x) = \frac{۲g(x)}{g(x)-۲} = \frac{۲g(x)-۴+۴}{g(x)-۲} = \frac{۲(g(x)-۲)}{g(x)-۲} + \frac{۴}{g(x)-۲} = ۲ + \frac{۴}{g(x)-۲}$$

می دانیم $g(x) \leq ۰$ است، پس:

$$g(x) \leq ۰ \Rightarrow g(x)-۲ \leq -۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \leq \frac{۱}{g(x)-۲} < ۰$$

$$\xrightarrow{\times ۴} -۲ \leq \frac{۴}{g(x)-۲} < ۰ \xrightarrow{+۲} ۰ \leq \frac{۴}{g(x)-۲}+۲ < ۲$$

$$\Rightarrow ۰ \leq f(x) < ۲ \Rightarrow R_f = [۰,۲)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸

۵۰ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار $y = f(x)$ داریم:

$$۰ \leq f(x) < ۳$$

$$\Rightarrow ۱۶ \leq f^{۲}(x) + ۱۶ < ۲۵ \Rightarrow ۴ \leq \sqrt{f^{۲}(x) + ۱۶} < ۵$$

$$\xrightarrow{\times(-۲)} -۱۰ < -۲\sqrt{f^{۲}(x) + ۱۶} \leq -۸$$

$$\xrightarrow{+۳} -۷ < ۳ - ۲\sqrt{f^{۲}(x) + ۱۶} \leq -۵ \Rightarrow R_y = (-۷, -۵]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

۱ اگر $f=\{(۱,-۱),(۲,۰),(۳,۲)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۰,۱),(۱,۱)\}$ باشد، حاصل $\frac{۲f-g^۲}{f}$ کدام است؟

۱) $\{(۱,-۲),(۲,-۱),(۳,۱)\}$ ۲) $\{(۱,۳)\}$

۳) $\{(۲,۱),(۱,۱)\}$ ۴) $\{(۱,۳),(۲,-۱)\}$

۲ اگر $f+g=\{(۳,۱),(۴,۲),(۵,-۱)\}$ و $f-g=\{(۳,۷),(۴,۶),(۵,۱)\}$، آنگاه دامنهٔ تابع $\frac{۱}{f}$ شامل چند عدد حقیقی است؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) قابل‌تشخیص نمی‌باشد.

۳ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۲)\}$ و $g=\{(۱,۴),(۴,۲),(۳,۲)\}$، تابع $(fog)+(gof)$ کدام است؟

۱) $\{(۴,۲),(۳,۲)\}$ ۲) $\{(۴,۲),(۳,۲),(۲,۴)\}$

۳) $\{(۴,۴)\}$ ۴) $\{\ \}$

۴ اگر $f=\{(۱,۲),(a,۵),(۴,b),(۵,۳)\}$، $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۱,۰),(-۲,۵)\}$ و داشته باشیم $fog=\{(۲,۵),(-۱,-۲),(-۲,۵)\}$، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۲− ۴) ۱−

۵ اگر $f=\{(۱,m),(m,۲),(۴,۱),(۱,m^۲-۱۲)\}$ یک تابع باشد و $g(x)=\sqrt{x}$، آنگاه دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۶ اگر $f=\{(-۱,۲),(۴,۹),(-۴,۳),(۱,۶),(-۲,۴)\}$ و $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $(gof)(a)=۱۲$ باشد، $g(a)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۹ ۴) ۱۰

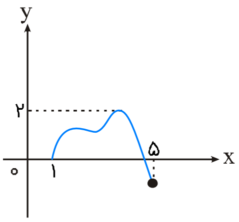
۷ اگر $f=\{(5,2),(3,4),(1,8),(6,9)\}$ و $g(x)=2f(x+2)-3$ باشد و داشته باشیم: $(gof)(a)=15$، a کدام است؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۳

۸ اگر $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ و $g(x)=\{(1,0),(0,3),(4,4),(3,6)\}$ باشد، تابع gof شامل چند زوج مرتب است؟

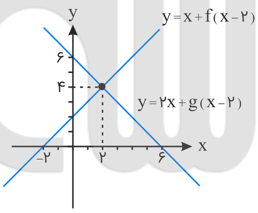
۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

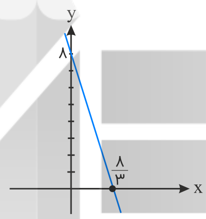
۹ اگر $g=\{(-1,2),(2,3),(-3,1),(-2,-1),(5,5)\}$ و نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت شکل زیر باشد، آنگاه دامنهٔ $y=\frac{f(1-x)}{g(x)+1}$ شامل چند عضو است؟

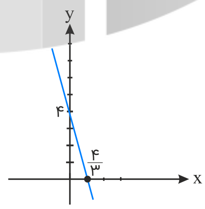


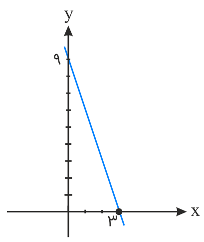
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

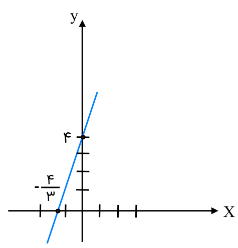
۱۰ نمودار توابع $y=x+f(x-1)$ و $y=2x+g(x)$ در شکل زیر رسم شده اند. نمودار تابع $y=f(x)+g(x)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۱۱ اگر f و g دو تابع خطی باشند به طوری که $\begin{cases}(f+g)(x)=۲x+۱\\(g-f)(x)=x-۲\end{cases}$، حاصل $f(۱)+g(۳)$ کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۶

۱۲ اگر $f(x)=\begin{cases}۲x & ;x<۱\\x & ;x\geq ۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۴x & ;x<۲\\۳x & ;x\geq ۲\end{cases}$، ضابطهٔ تابع $y=f(x)-g(x)$ کدام است؟

۱) $y=\begin{cases}-۲x & ;x<۱\\-۳x & ;۱\leq x<۲\\-x & ;x\geq ۲\end{cases}$

۲) $y=\begin{cases}-x & ;x<۱\\-۳x & ;۱\leq x<۲\\-۲x & ;x\geq ۲\end{cases}$

۳) $y=\begin{cases}۶x & ;x<۱\\۴x & ;x\geq ۲\end{cases}$

۴) $y=\begin{cases}-۲x & ;x<۱ \text{ یا } x\geq ۲\\-۳x & ;۱\leq x<۲\end{cases}$

۱۳ اگر $f(۲x+۱)+x^۲f(۰)=۲x^۲+۴x-۱$ باشد، آنگاه حاصل $f(\sqrt{۷})$ کدام است؟

۱) -۲
۲) $۲-۲\sqrt{۷}$
۳) ۵
۴) $\frac{\sqrt{۷}+۱}{۳}$

۱۴ اگر $xf(-x)+\frac{۱}{x}=f(۲)$ باشد، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۳}{۵}$
۳) $-\frac{۵}{۷}$
۴) $-\frac{۵}{۶}$

۱۵ اگر $f(x+\sqrt{۲x-۱})=x^۲-۶$ باشد، حاصل $f(۱)$ کدام است؟

۱) $-۴\sqrt{۲}$
۲) $-۲\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۶ اگر $f(x+۲)=\frac{۲x^۲+۸x+۷}{۴x^۲+۱۶x+۱۵}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۵}$
۲) $\frac{۵}{۱۱}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۷\sqrt{۳}}{۱۵}$

۱۷ اگر $f(x+۱)=-f(x)$ باشد، حاصل $f(x+۲)$ کدام است؟

۱) $-f(x)$
۲) $-۲f(x)$
۳) $f(x)$
۴) $۲f(x)$

۱۸ تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x+a}$ مفروض است. اگر $f(x)\times f(-\frac{۱}{x})=-۱$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۲

۱۹ اگر $f(x)=\frac{۴^x}{۴^x+۲}$ و $\alpha+\beta=۱$ باشد، آنگاه $f(\alpha)+f(\beta)$ کدام است؟

۱) ۱ — ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۱۶}$ — ۴) ۲

۲۰ اگر $۵f(x-۲)+f(۲-x)=۴x+۱$ باشد، آنگاه $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۴ — ۲) ۴/۵

۳) ۵ — ۴) ۵/۵

۲۱ اگر $g(x)=۲x-۱$ و $fog(x)=۴x^۲-۱$ باشد، حاصل $gof(۱)$ کدام است؟

۱) ۵ — ۲) ۶

۳) -۲ — ۴) -۱

۲۲ اگر $(fog)(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x-۱}{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f+g$ کدام است؟ $(x \neq ۰,۱)$

۱) $\frac{۴}{x}$ — ۲) $\frac{۲}{x}$

۳) $-\frac{۴}{x}$ — ۴) $-\frac{۲}{x}$

۲۳ اگر $f(x)=x+[x]$ و $g(x)=x-[x]$ باشد، آنگاه ضابطهٔ تابع $y=fog(x)$ برابر کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است)

۱) $f(x)$ — ۲) $g(x)$

۳) $(f+g)(x)$ — ۴) $(f-g)(x)$

۲۴ نمودارهای تابع f خطی و تابع درجه‌دوم g، محور yها را به ترتیب با عرض‌های ۲ و ۳ قطع می‌کنند؛ اگر $(fog)(x)=۲x^۲+x-۱$، آنگاه $(f-g)(x)$ کدام است؟

۱) $-۲x^۲-۲x+۱$ — ۲) $x^۲-۲$

۳) $x^۲+x-۱$ — ۴) $۲x^۲-۱$

۲۵ $g(x)=\frac{x+۱}{x+۴}$ و $(gof)(x)=\frac{x-۵}{۳}$، ضابطهٔ تابع $y=f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱۷}{۸-x}$ — ۲) $\frac{۴x-۲۳}{۸-x}$

۳) $\frac{۴x-۲۳}{x-۲}$ — ۴) $\frac{۴x-۱۷}{x-۲}$

۲۶ اگر $g(x)=\frac{x+۱}{x}$ و به ازای هر $x\in\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ داشته باشیم $(fog)(x)+g(x)=x$، آنگاه ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $\frac{۱-x-x^۲}{x-۱}$ — ۲) $\frac{۱+x-x^۲}{x-۱}$

۳) $\frac{۱}{x-۱}$ — ۴) $-\frac{۱}{x-۱}$

۲۷ اگر $g(x) = x^۳ - x$ و $(fog)(x) = x^۶ - ۲x^۴ + x^۲ + ۱$ باشند، حاصل $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۱۷
۴) ۱۰

۲۸ اگر $g(x) = \frac{x+۲}{x-۱}$ و $fog(x) = x - ۱$، آنگاه حاصل $f(۴)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۹ اگر $f(x) = ۳x - ۱$ و $f(g(x)) = x^۲ - x - ۱$ باشد، مقدار $g(۳)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۰ اگر $(fog)(x) = x^۳ - ۱ + ۳x^۲ + ۳x$ و $f(x) = x^۳ - ۲$، مقدار $g(f(\sqrt[۳]{۲}))$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۱ اگر $f(x+۱) = ۳x - ۲$ و $g(x-۲) = ۵x$، جواب معادلهٔ $g(f(۳)) = f(x) - ۱$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۳۲ اگر f تابعی خطی با شیب منفی و $(fof)(x) = ۹x + ۵$ باشد، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۷}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۷}{۴}$

۳۳ با فرض $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^۲ + ax + b$ ، به ازای تمامی مقادیر حقیقی x، داریم $gof(x) = ۲$، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۵
۳) -۲
۴) ۳

۳۴ اگر داشته باشیم $f(x) = \begin{cases} ۲ - x & ; x \geq ۱ \\ ۳ - ۲x & ; x < ۱ \end{cases}$ و $g(x) = ax + b$، آنگاه دو تابع $fof(x)$ و $g(x)$ برابرند. مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۳۵ اگر $g(x)=1-2x$ باشد، آنگاه باتوجه‌به ماشین $x \to \underline{f} \to \underline{g} \to -6x^2-2x+3$، مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱

۳) ۳ ۴) -۳

۳۶ اگر مقدار خروجی از ماشین شکل زیر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

ورودی $(x) \to \boxed{2x-2} \to \boxed{\frac{x}{\sqrt{x}+1}} \to$ خروجی

۱) $\frac{11}{9}$

۲) $\frac{7}{2}$

۳) ۳

۴) ۴

۳۷ اگر ین زیر $f(x)=\frac{x}{1+x}$ باشد، تابع $g(x)$ کدام است؟

$x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to \frac{1}{x+1}$

۱) $g(x)=1-x$

۲) $g(x)=\frac{1}{x}$

۳) $g(x)=\frac{1}{x-1}$

۴) $g(x)=\frac{x+2}{x+1}$

۳۸ اگر $f(x)=x^2-8x+12$ و $g(x)=-x+\sqrt{-x}$ باشد، مجموع جواب های معادلهٔ $fog(x)=0$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) +۵

۳) +۳ ۴) -۵

۳۹ تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع fog محور xها را با کدام طول ها قطع می کند؟

۱) ۴ و $\frac{1}{9}$ ۲) ۹ و $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ ۴) ۹ و ۴

۴۰ اگر $f(x)=x^2+3x$ و $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$ ، آنگاه مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار می‌گیرند؛ برابر کدام بازه است؟

۱) $(-4,1)$ ۲) $(-3,2)$

۳) $(-2,2)$ ۴) $(-1,4)$

۴۱ اگر $f(x)=5-\sqrt{x-3}$ و دامنهٔ تابع fof برابر $[a,b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۴۲ اگر $f(x) = \log_{۲}(x-۳)$ و $g(x)=\sqrt[۴]{۲-x}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $(۰,۳)$
۲) $(۳,۷]$
۳) $(۳,+\infty)$
۴) $(۵,۸)$

۴۳ اگر $D_f=[-۳,۳)$، دامنهٔ تعریف تابع $g(x)=۲f(۱-۲x)+\sqrt{x-۱}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۲]$
۲) $[۱,+\infty)$
۳) $[۱,۷]$
۴) $[۱,۲]$

۴۴ $g(x)=[x]$ و $f(x)=\sqrt{x-۱}-\sqrt{۸-x}$ باشد، آنگاه دامنهٔ fog کدام است؟ ($[\,]$ علامت جزء صحیح است)

۱) $[۱,\ ۹]$
۲) $[۰,\ ۹)$
۳) $[۱,\ ۸]$
۴) $[۱,\ ۹)$

۴۵ اگر $f(x)=۲^x+۳$ و $g(x)=\sqrt{۲x-۲۲}$ دامنهٔ تابع $y=(gof)(x)$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$
۲) $[۰,۱۱)$
۳) $[۳,+\infty)$
۴) $[-۱۱,+\infty)$

۴۶ تابع $f(x)=۳x+۱$ با دامنهٔ $[۰,a]$ مفروض است. حداقل مقدار a برای اینکه تابع fof با دامنهٔ غیرتهی قابل تعریف باشد، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

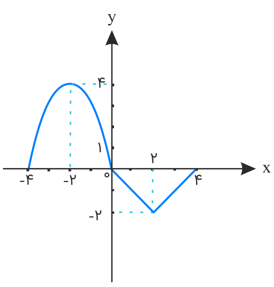
۴۷ اگر $f(x)=\sqrt{\log(x-۱)}$ و $g(x)=\frac{۲^x}{۲^x-۱}$، آنگاه دامنهٔ تابع $(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$
۲) $(۰,۱]$
۳) $(۰,۱]\cup[۲,۱۱]$
۴) $(۰,۱)$

۴۸ اگر $f(x)=\sqrt{۶+x-x^۲}$، دامنهٔ تابع $y=f(۱-۲x)$ کدام است؟

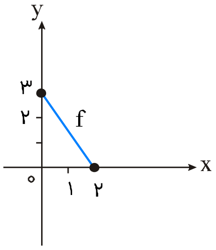
۱) $[-۵,۵]$
۲) $[-۳,۲]$
۳) $[-۲,۳]$
۴) $[-۱,\frac{۳}{۲}]$

۴۹ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آنگاه دامنهٔ تابع $g(x)=f(\frac{x}{۲})-f(۲x)$ کدام است؟



۱) $[-۲,۲]$
۲) $[-۸,۸]$
۳) $[-۴,۴]$
۴) $[-۲,۴]$

۵۰ اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $y = fof(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۵۱ اگر $f(x) = x^۲ - ۲x$ و $g(x) = \sqrt{۴ - x} + ۱$ باشند، برد تابع $fog(x)$ کدام است؟

۱) $[-۱, ۱]$

۲) $[-۱, +\infty)$

۳) $(-\infty, ۱]$

۴) $\mathbb{R}$

۵۲ اگر $g(x) = ۲x - x^۲$ و برد تابع $f(x)$ بازهٔ $(-۲, ۳)$ باشد، برد تابع $gof(x)$ کدام است؟

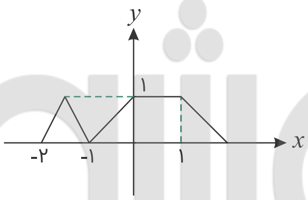
۱) $(-۸, -۳)$

۲) $(-\infty, ۱]$

۳) $(-۸, ۱]$

۴) $(-۳, ۱]$

۵۳ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، برد تابع $fof(x)$ کدام است؟



۱) $[۰, ۱)$

۲) $[۰, ۱]$

۳) $(۰, ۱)$

۴) $\{۱\}$

۵۴ $f(x) = \frac{x-۱}{x+۱}$ باشد، برد تابع $y = fof(x)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \{-۱, ۰\}$

۲) $\mathbb{R} - \{۰, ۱\}$

۳) $\mathbb{R} - \{۱\}$

۴) $\mathbb{R} - \{۰\}$

۵۵ اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \sin \pi x$ باشد، برد تابع gof کدام است؟ ($[\,]$ نماد جزء صحیح است)

۱) $[-۱, ۱]$

۲) $[۰, ۱]$

۳) $[-۱, ۰]$

۴) $[-۱, -\frac{۱}{۲}]$

۵۶ توابع $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^۲ + ax + b$ مفروض‌اند. اگر برد تابع gof برابر با $\{۲\}$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) -۱

۴) -۲

۱ گزینه ۲

$$۲f = \{(۱, -۲), (۲, ۰), (۳, ۴)\}$$

$$g^۲ = \{(۲, ۱), (۰, ۱), (۱, ۱)\}$$

ابتدا دامنهٔ $\frac{۲f-g^۲}{f}$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{۲f-g^۲} = D_{۲f} \cap D_{g^۲} = \{۲, ۱\}$$

$$D_{\frac{۲f-g^۲}{f}} = (D_{۲f-g^۲} \cap D_f) - \{x | f(x) = ۰\} = \{۱\}$$

$$\Rightarrow \frac{۲f - g^۲}{f} = \left\{\left(۱, \frac{-۲-۱}{-۱}\right)\right\} = \{(۱, ۳)\}$$

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

۲ گزینه ۴

با جمع‌کردن دو تابع $f + g$ و $f - g$ ظاهراً خواهیم داشت:

$$(f + g) + (f - g) = ۲f = \{(۳, ۸), (۴, ۸), (۵, ۰)\}$$

پس $f = \{(۳, ۴), (۴, ۴), (۵, ۰)\}$ پس این‌طور به نظر می‌رسد که:

$$\frac{۱}{f} = \{(۳, \frac{۱}{۴}), (۴, \frac{۱}{۴})\}$$

یعنی دامنه آن شامل دو عدد است ولی با دقت بیشتر می‌توان فهمید که چون دامنه‌های $f + g$ و $f - g$ اشتراک دامنه‌های f و g است دامنهٔ f شامل اعداد دیگری هم می‌تواند باشد که با دامنهٔ g مشترک نباشند، پس $\frac{۱}{f}$ هم می‌تواند شامل زوج‌های بیشتری باشد. به‌طورکلی می‌توان گفت چون دامنهٔ f مشخص نیست، پس دامنهٔ $\frac{۱}{f}$ مشخص نیست.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

۳ گزینه ۴

نکته: $(fog)(x) = f\left(g(x)\right)$

نکته: $D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$

دا توابع fog gof را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} \times \\ ۲ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{g} ۴ \Rightarrow gof = \{(۲,۴)\} \\ ۳ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f} \times \\ ۴ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۱ \Rightarrow fog = \{(۴,۱),(۳,۱)\} \\ ۳ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۱ \end{cases}$$

ون اشتراک دامنهٔ توابع fog gof برابر تهی است، پس دامنهٔ تابع $(fog)+(gof)$ برابر تهی می‌باشد؛ درنتیجه: $(fog)+(gof) = \{\ \}$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۴ گزینه ۱

با استفاده از تابع $fog = \{(۲,۵),(-۱,-۲),(-۲,۵)\}$ می توان نوشت:

$$(fog)(۲) = ۵ \Rightarrow f\left(g(۲)\right) = ۵ \Rightarrow f(۳) = ۵$$

فی در تابع f داریم $f(a) = ۵$؛ بنابراین $a = ۳$

$$(fog)(-۱) = -۲ \Rightarrow f\left(g(-۱)\right) = -۲ \Rightarrow f(۴) = -۲$$

بع f داریم $f(۴) = b$؛ بنابراین $b = -۲$

پس می توان نتیجه گرفت: $a + b = ۳ + (-۲) = ۱$

گزینه دو ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

۵ گزینه ۲

ابتدا تابع بودن f را بررسی می کنیم:

$$(۱,m) = (۱,m^۲ - ۱۲) \Rightarrow m^۲ - ۱۲ = m$$

$$\Rightarrow m^۲ - m - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m_۱ = ۴ \\ m_۲ = -۳ \end{cases}$$

آنگاه $m = ۴$ دو زوج مرتب با مؤلفهٔ اول ۴ و مؤلفهٔ دوم متفاوت خواهیم داشت و f تابع نخواهد بود، پس فقط $m = -۳$ پذیرفته است. حال در تابع $f = \{(۱,-۳),(-۳,۲),(۴,۱)\}$ تنها دو عضو در دامنهٔ $\sqrt{x}$ صدق می کنند $g(x)$؛ پس دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ شامل ۲ عضو است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۶ گزینه ۲

$$(gof)(a) = ۱۲ \Rightarrow g(f(a)) = ۱۲ \Rightarrow f(a) + \sqrt{f(a)} = ۱۲$$

$$f(a) + \sqrt{f(a)} - ۱۲ = ۰ \xrightarrow{f(a)=t^۲} t^۲ + t - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (t+۴)(t-۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -۴ \Rightarrow f(a) = ۱۶ \text{ غ ق ق} \\ t = ۳ \Rightarrow f(a) = ۹ \Rightarrow a = ۴ \end{cases}$$

باتوجه‌به g:

$$g(۴) = ۴ + \sqrt{۴} \Rightarrow g(۴) = ۴ + ۲ = ۶$$

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

۷ گزینه ۴

$$g(f(a)) = ۱۵ \xrightarrow{f(a)=t} g(t) = ۱۵$$

$$\Rightarrow g(t) = ۲f(t+۲) - ۳ = ۱۵ \Rightarrow f(t+۲) = ۹ \xrightarrow{f(۶)=۹} t + ۲ = ۶ \Rightarrow t = ۴$$

$$\Rightarrow f(a) = ۴ \Rightarrow a = ۳$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۸ گزینه ۴

$$\begin{cases} D_{gof} = \{x | x \in D_f \ , \ f(x) \in D_g\} \\ D_f = [-۵, ۵] \\ D_g = \{۱, ۰, ۴, ۳\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{gof} = \{x | -۵ \leq x \leq ۵ , \sqrt{۲۵ - x^۲} \in \{۱, ۰, ۴, ۳\}\}$$

$$\sqrt{۲۵ - x^۲} = ۰ \Rightarrow x = \pm ۵$$

$$\sqrt{۲۵ - x^۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm \sqrt{۲۴}$$

$$\sqrt{۲۵ - x^۲} = ۴ \Rightarrow x = \pm ۳$$

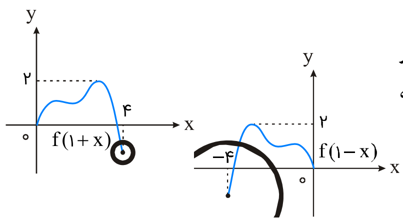
$$\sqrt{۲۵ - x^۲} = ۳ \Rightarrow x = \pm ۴$$

بنابراین تابع gof شامل ۸ زوج مرتب است.

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

۹ گزینه ۲

نمودار تابع $f(1-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار کافی است نمودار تابع $f(1+x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

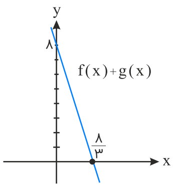


باتوجه‌به شکل، دامنهٔ تابع $y = f(1-x)$ برابر $[-۴ , ۰]$ است به‌علاوه دامنهٔ $g(x)$ برابر $\{-۱ , ۲ , -۳ , -۲ , ۵\}$ است که اشتراک آن‌ها برابر $\{-۱ , -۳ , -۲\}$ است، به علاوه دقت کنید به ازای $x = -۲$ مخرج صفر می‌شود، پس دامنهٔ تابع $y = \frac{f(1-x)}{g(x)+1}$ برابر $\{-۱ , -۳\}$ است و دو عضو دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

۱۰ گزینه ۱

$$x+f(x-1)=x+2 \Rightarrow f(x-1)=2 \Rightarrow f(x)=2$$
$$2x+g(x)=-x+6 \Rightarrow g(x)=-3x+6$$
$$\Rightarrow f(x)+g(x)=-3x+8$$



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

۱۱ گزینه ۴

فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=ax+b \\ g(x)=a'x+b' \end{cases}$$

حال داریم:

$$\begin{cases} (f+g)(x)=(a+a')x+(b+b')=2x+1 \\ (g-f)(x)=(a'-a)x+(b'-b)=x-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+a'=2 \\ a'-a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'=1/5 \\ a=0/5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+b'=1 \\ b'-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b'=-0/5 \\ b=1/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=0/5x+1/5 \\ g(x)=1/5x-0/5 \end{cases} \Rightarrow f(1)+g(3)=2+4=6$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۴

ابتدا توابع داده‌شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x & ;x<۱\\ x & ;۱\leq x<۲\\ x & ;x\geq ۲\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}۴x & ;x<۱\\ ۴x & ;۱\leq x<۲\\ ۳x & ;x\geq ۲\end{cases}$$

اکنون داریم:

$$f(x)-g(x)=\begin{cases}۲x-۴x & ;x<۱\\ x-۴x & ;۱\leq x<۲\\ x-۳x & ;x\geq ۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲x & ;x<۱\\ -۳x & ;۱\leq x<۲\\ -۲x & ;x\geq ۲\end{cases}$$

بنابراین:

$$f(x)-g(x)=\begin{cases}-۲x & ;x<۱ \text{ یا } x\geq ۲\\ -۳x & ;۱\leq x<۲\end{cases}$$

گزینه دو علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۱۳ گزینه ۳

اول باید مقدار $f(۰)$ را پیدا کنیم. به ازای $x=-\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$f(۰)+\frac{۱}{۴}f(۰)=۲(\frac{۱}{۴})+۴(-\frac{۱}{۲})-۱\Rightarrow \frac{۵}{۴}f(۰)=\frac{۱}{۲}-۳=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow f(۰)=-۲$$

$$f(۲x+۱)-۲x^۲=۲x^۲+۴x-۱\Rightarrow f(۲x+۱)=۴x^۲+۴x-۱$$

$$\Rightarrow f(۲x+۱)=(۴x^۲+۴x+۱)-۲=(۲x+۱)^۲-۲$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۲-۲\xrightarrow{x=\sqrt{۷}}f(\sqrt{۷})=(\sqrt{۷})^۲-۲=۷-۲=۵$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

۱۴ گزینه ۴

ابتدا با جایگذاری $x=-۲$، مقدار $f(۲)$ را به دست می‌آوریم:

$$xf(-x)+\frac{۱}{x}=f(۲)\xrightarrow{x=-۲}-۲f(۲)-\frac{۱}{۲}=f(۲)\Rightarrow f(۲)=-\frac{۱}{۶}\qquad(*)$$

حال با جایگذاری $x=-۱$، مقدار $f(۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$-f(۱)-۱=f(۲)\overset{(*)}{=}-\frac{۱}{۶}\Rightarrow f(۱)=-\frac{۵}{۶}$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

۱۵ گزینه ۱

ابتدا باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x+\sqrt{2x-1}=1 \Rightarrow \sqrt{2x-1}=1-x \xrightarrow[x\geq\frac{1}{2}]{1-x\geq 0} \frac{1}{2}\leq x\leq 1$$

طرفین معادلهٔ $\sqrt{2x-1}=1-x$ را به توان ۲ می رسانیم:

$$2x-1=1-2x+x^2 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{2}\notin[\frac{1}{2},1] \\ x=2-\sqrt{2}\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x+\sqrt{2x-1})=x^2-6$$

$$\xrightarrow{x=2-\sqrt{2}} f(1)=(2-\sqrt{2})^2-6=4+2-4\sqrt{2}-6=-4\sqrt{2}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۶

۱۶ گزینه ۲

$$f(x+2)=\frac{2(x^2+4x+4)-1}{4(x^2+4x+4)-1} \Rightarrow f(x+2)=\frac{2(x+2)^2-1}{4(x+2)^2-1}$$

$$\xrightarrow{x+2=t} f(t)=\frac{2t^2-1}{4t^2-1} \xrightarrow{t=\sqrt{3}} f(\sqrt{3})=\frac{6-1}{12-1}=\frac{5}{11}$$

قلمچی علوم تجربی سوم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

۱۷ گزینه ۳

کافی است x را به $x+1$ تبدیل کنیم، داریم:

$$f(x+1+1)=-f(x+1) \Rightarrow f(x+2)=f(x)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۵

۱۸ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{x+1}{x+a} \Rightarrow f(-\frac{1}{x})=\frac{-\frac{1}{x}+1}{-\frac{1}{x}+a}=\frac{\frac{-1+x}{x}}{\frac{-1+ax}{x}}=\frac{x-1}{ax-1}$$

$$f(x)\times f(\frac{-1}{x})=-1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+a}\times\frac{(x-1)}{ax-1}=-1 \Rightarrow a=-1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

۱۹ گزینه ۱

راه حل اول:

$$\alpha+\beta=1 \quad (*)$$

$$f(\alpha)+f(\beta)=\frac{4^{\alpha}}{4^{\alpha}+2}+\frac{4^{\beta}}{4^{\beta}+2}\overset{(*)}{=}\frac{4^{\alpha}}{4^{\alpha}+2}+\frac{4^{1-\alpha}}{4^{1-\alpha}+2}$$

$$=\frac{4^{\alpha}}{4^{\alpha}+2}+\frac{4}{4+2\times 4^{\alpha}}=\frac{4^{\alpha}}{4^{\alpha}+2}+\frac{2}{4^{\alpha}+2}=\frac{4^{\alpha}+2}{4^{\alpha}+2}=1$$

راه حل دوم:

به ازای $\alpha=0$ و $\beta=1$ داریم:

$$f(0)=\frac{1}{3}\,,\ f(1)=\frac{2}{3}\Rightarrow f(0)+f(1)=1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

۲۰ گزینه ۲

$$\begin{cases} x=5: 5f(3)+f(-3)=21 \\ x=-1: 5f(-3)+f(3)=-3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -25f(3)-5f(-3)=-105 \\ 5f(-3)+f(3)=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -24f(3)=-108\Rightarrow f(3)=4/5$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۲۱ گزینه ۱

$$g(x)=2x-1\xrightarrow{x=1}g(1)=1 \qquad (*)$$

$$fog(x)=4x^2-1\xrightarrow{x=1}fog(1)=3\xrightarrow{(*)}f(1)=3$$

بنابراین حاصل $gof(1)$ برابر است با:

$$gof(1)=g(\overbrace{f(1)}^{3})=g(3)=5$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۲۲ گزینه ۲

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\frac{2x+1}{x-1}\Rightarrow f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2x+1}{x-1}$$

$$\frac{x-1}{x}=t\Rightarrow tx-x+1=0\Rightarrow x\left(t-1\right)=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{t-1}$$

$$f\left(t\right)=\frac{2\left(\frac{-1}{t-1}\right)+1}{\frac{-1}{t-1}-1}=\frac{-2+t-1}{-1-t+1}=\frac{t-3}{-t}\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{-x+3}{x}$$

$$\Rightarrow\left(f+g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)=\frac{-x+3}{x}+\frac{x-1}{x}=\frac{2}{x}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸

۲۳ گزینه ۲

ابتدا توجه کنید که:

$$۰ \le x - [x] < ۱$$

ضابطهٔ fog را تشکیل می دهیم:

$$f(g(x)) = f(x - [x])$$
$$= x - [x] + [x - [x]] = x - [x] + ۰$$
$$\Rightarrow f(g(x)) = x - [x] = g(x)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

۲۴ گزینه ۴

می دانیم f یک تابع خطی است که محور yها را با عرض ۲ قطع می کند، پس $f(x) = mx + ۲$ و g یک تابع درجه دوم است که محور yها را با عرض ۳ قطع می‌کند، پس: $g(x) = ax^۲ + bx + ۳$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = m(ax^۲ + bx + ۳) + ۲$$
$$\Rightarrow (fog)(x) = max^۲ + mbx + (۳m + ۲)$$

اما طبق فرض سؤال $(fog)(x) = ۲x^۲ + x - ۱$، پس داریم:

$$\begin{cases} (fog)(x) = max^۲ + mbx + (۳m + ۲) \\ (fog)(x) = ۲x^۲ + x - ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳m + ۲ = -۱ \Rightarrow m = -۱ \quad (*) \\ mb = ۱ \xrightarrow{(*)} -b = ۱ \Rightarrow b = -۱ \\ ma = ۲ \xrightarrow{(*)} -a = ۲ \Rightarrow a = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x + ۲ \\ g(x) = -۲x^۲ - x + ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = (-x + ۲) - (-۲x^۲ - x + ۳) = ۲x^۲ - ۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

۲۵ گزینه ۲

$$g(x) = \frac{x + ۱}{x + ۴} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{f(x) + ۱}{f(x) + ۴} = \frac{x - ۵}{۳} \Rightarrow ۳f(x) + ۳ = (x - ۵)f(x) + ۴x - ۲۰$$
$$\Rightarrow (۸ - x)f(x) = ۴x - ۲۳ \Rightarrow f(x) = \frac{۴x - ۲۳}{۸ - x}$$

گزینه دو علوم تجربی سوم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۶

۲۶ گزینه ۲

$$(fog)(x)+g(x)=x \Rightarrow f(g(x))+g(x)=x$$

ازآنجاکه $g(x)=\frac{x+1}{x}$:

$$f(\frac{x+1}{x})+\frac{x+1}{x}=x \Rightarrow f(\frac{x+1}{x})=x-(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2-x-1}{x} \Rightarrow f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2-x-1}{x} \quad (*)$$

حال با فرض $\frac{x+1}{x}=t$ خواهیم داشت:

$$\frac{x+1}{x}=t \Rightarrow 1+\frac{1}{x}=t \Rightarrow \frac{1}{x}=t-1 \Rightarrow x=\frac{1}{t-1}$$

با جایگذاری این تساوی در (*) تابع f را می یابیم:

$$f(t)=\frac{\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{t-1}-1}{\frac{1}{t-1}}=\frac{1}{t-1}-1-t+1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-1}-x=\frac{1-x^2+x}{x-1}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۵

۲۷ گزینه ۴

در تابع fog داریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^3-x)=x^6-2x^4+x^2+1$$

$$\xrightarrow[x^6-2x^4+x^2=t^2]{x^3-x=t} f(t)=t^2+1$$

برای به دست آوردن $f(3)$ داریم:

$$f(3)=3^2+1=10$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

۲۸ گزینه ۱

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را با gof نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(gof)(x)=g(f(x)) \quad , D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

$$\begin{cases} fog(x)=x-۱ \\ g(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱} \end{cases} \Rightarrow f(\frac{x+۲}{x-۱})=x-۱ \quad (*)$$

برای یافتن $f(۴)$ باید به جای x عددی را قرار دهیم که حاصل $\frac{x+۲}{x-۱}$ برابر با ۴ شود:

$$\frac{x+۲}{x-۱}=۴ \Rightarrow x+۲=۴x-۴ \Rightarrow ۳x=۶ \Rightarrow x=۲$$

بنابراین با جایگذاری مقدار $x=۲$ در $(*)$ داریم:

$$x=۲ \Rightarrow f(۴)=۲-۱=۱$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۲۹ گزینه ۲

راه حل اول:

$$f(g(x))=x^۲-x-۱ \xrightarrow{x=۳} f(g(۳))=۹-۳-۱=۵ \xrightarrow{f(x)=۳x-۱} f(g(۳))=۳(g(۳))-۱=۵ \Rightarrow ۳(g(۳))=۶ \Rightarrow g(۳)=۲$$

راه حل دوم:

در حالت کلی می توان از روابط داده شده، ضابطهٔ $g(x)$ را به دست آورد:

$$\begin{cases} f(x)=۳x-۱ \Rightarrow f(g(x))=۳g(x)-۱ \\ f(g(x))=x^۲-x-۱ \end{cases} \Rightarrow ۳g(x)-۱=x^۲-x-۱ \Rightarrow ۳g(x)=x^۲-x$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{x^۲-x}{۳} \Rightarrow g(۳)=\frac{۳^۲-۳}{۳}=۲$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۴

۳۰ گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ $g(x)$ را به دست می آوریم. داریم:

$$f(x)=x^۳-۲ \Rightarrow f(g(x))=g^۳(x)-۲=x^۳-۱+۳x^۲+۳x$$

$$\Rightarrow g^۳(x)=x^۳+۳x^۲+۳x+۱ \Rightarrow g^۳(x)=(x+۱)^۳ \Rightarrow g(x)=x+۱$$

حال باتوجه‌به ضابطهٔ $g(x)$ داریم:

$$g(\underbrace{f(\sqrt[۳]{۲})}_{۰})=g(۰)=۱$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

۳۱ گزینه ۴

یر و $f(۳)$ $g(f(۳))$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} f(x+۱)=۳x-۲ \xrightarrow{x=۲} f(۳)=۶-۲=۴ \\ g(x-۲)=۵x \xrightarrow{x=۶} g(۴)=۳۰ \Rightarrow g(f(۳))=g(۴)=۳۰ \end{cases}$$

اکنون در طرفین تساوی $f(x+۱)=۳x-۲$ به جای x، قرار می دهیم $x-۱$، بنابراین:

$$f(x+۱)=۳x-۲ \Rightarrow f(x-۱+۱)=۳(x-۱)-۲ \Rightarrow f(x)=۳x-۵$$

حال داریم:

$$f(x)-۱=g(f(۳)) \Rightarrow ۳x-۶=۳۰ \Rightarrow ۳x=۳۶ \Rightarrow x=۱۲$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۵

۳۲ گزینه ۳

ضابطهٔ f را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$(fof)(x)=f(f(x))=۹x+۵ \Rightarrow a(ax+b)+b=۹x+۵$$

$$\Rightarrow \underline{a^۲}x+\underline{ab+b}=\underline{۹}x+\underline{۵} \Rightarrow \begin{cases} a^۲=۹ \quad (*) \\ ab+b=۵ \quad (**) \end{cases}$$

چون شیب f منفی است، پس $a<۰$. بنابراین از $(*)$ داریم: $a=-۳$

با جایگذاری این مقدار در $(**)$ داریم:

$$-۲b=۵ \Rightarrow b=-\frac{۵}{۲}$$

درنتیجه $f(x)=-۳x-\frac{۵}{۲}$. بنابراین:

$$f(-۱)=۳-\frac{۵}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

۳۳ گزینه ۴

برای تابع $f(x)$ داریم:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & ;x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & ;x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

باتوجه به اینکه در صورت سؤال ذکرشده تابع $gof(x)=g(f(x))$ برای تمام مقادیر x برابر ۲ است، پس مقادیر ورودی را به دو قسمت $x\in\mathbb{Z}$ و $x\notin\mathbb{Z}$ تقسیم می کنیم. داریم:

$$\begin{cases} x\in\mathbb{Z}: g(f(x))=۲ \Rightarrow g(۰)=۲ \Rightarrow b=۲ \quad (*) \\ x\notin\mathbb{Z}: g(f(x))=۲ \Rightarrow g(-۱)=۲ \Rightarrow ۱-a+b=۲ \xrightarrow{(*)} a=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=۳$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۳۴ گزینه ۳

دقت کنید وقتی $x \geq ۱$ باشد، $۲ - x \leq ۱$ است. به‌نحو مشابه اگر $x < ۱$ باشد، آنگاه $۳ - ۲x > ۱$ است پس:

$$fof(x) = f(f(x)) = \begin{cases} ۳ - ۲(۲ - x) = ۲x - ۱ & ; x \geq ۱ \\ ۲ - (۳ - ۲x) = ۲x - ۱ & ; x < ۱ \end{cases}$$

بنابراین $fof(x) = ۲x - ۱$؛ یعنی $g(x) = ۲x - ۱$، پس $a = ۲$ و $b = -۱$ و $a + b = ۱$.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۵

۳۵ گزینه ۳

باتوجه‌به ماشین، $(gof)(x) = -۶x^۲ - ۲x + ۳$ و $g(x) = ۱ - ۲x$ است، پس داریم:

$$g(f(x)) = ۱ - ۲f(x) = -۶x^۲ - ۲x + ۳$$

$$\Rightarrow ۲f(x) = ۶x^۲ + ۲x - ۲$$

$$\Rightarrow f(x) = ۳x^۲ + x - ۱ \Rightarrow f(۱) = ۳ + ۱ - ۱ = ۳$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

۳۶ گزینه ۳

اگر ورودی را x و خروجی را y بگیریم، در این صورت داریم: $f(x) = ۲x - ۲$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+۱}$

این همان تعریف تابع $y = gof(x)$ است:

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow y$$

$$y = gof(x) = g(f(x)) \Rightarrow y = \frac{۲x - ۲}{\sqrt{۲x - ۲} + ۱}$$

اگر به جای خروجی (y) را $\frac{۴}{۳}$ قرار دهیم، ورودی (x) به دست می آید:

$$\frac{۴}{۳} = \frac{۲x - ۲}{\sqrt{۲x - ۲} + ۱} \xrightarrow{\sqrt{۲x-۲} = t \geq ۰} \frac{۴}{۳} = \frac{t^۲}{t + ۱}$$

$$\Rightarrow ۳t^۲ = ۴t + ۴ \Rightarrow ۳t^۲ - ۴t - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲ & \text{ق.ق} \\ t = -\frac{۲}{۳} & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲x - ۲} = ۲ \Rightarrow ۲x - ۲ = ۴ \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

۳۷ گزینه ۱

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{۱}{x + ۱} \Rightarrow g(\frac{x}{۱ + x}) = \frac{۱}{x + ۱}$$

$$\Rightarrow g(\frac{x + ۱ - ۱}{x + ۱}) = \frac{۱}{x + ۱} \Rightarrow g(۱ - \frac{۱}{x + ۱}) = \frac{۱}{x + ۱}$$

$$۱ - \frac{۱}{x + ۱} = t \Rightarrow \frac{۱}{x + ۱} = ۱ - t$$

$$g(t) = ۱ - t \Rightarrow g(x) = ۱ - x$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۵

۳۸ گزینه ۴

$$fog(x) = ۰ \Rightarrow f(g(x)) = ۰ \Rightarrow (g(x), ۰) \in f$$

باتوجه‌به ضابطهٔ $f(x)$:

$$f(x) = x^۲ - ۸x + ۱۲ \Rightarrow f(x) = (x-۲)(x-۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ x = ۲ \end{cases}$$

معادلهٔ $f(x) = ۰$ برابر ۶ و ۲ می‌باشند، لذا $g(x)$ باید برابر ۲+ و ۶ باشد.

$$-x + \sqrt{-x} = ۲ \xrightarrow[t \geq ۰]{\sqrt{-x}=t} t^۲ + t = ۲$$

$$t^۲ + t - ۲ = ۰ \Rightarrow (t+۲)(t-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \Rightarrow \sqrt{-x} = ۱ \\ t = -۲ \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x = ۱ \Rightarrow x = -۱$$

$$-x + \sqrt{-x} = ۶ \xrightarrow[t \geq ۰]{\sqrt{-x}=t} t^۲ + t = ۶$$

$$t^۲ + t - ۶ = ۰ \Rightarrow (t+۳)(t-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \Rightarrow \sqrt{-x} = ۲ \\ t = -۳ \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x = ۴ \Rightarrow x = -۴$$

بنابراین جمع ریشه ها برابر است با: $-۴ - ۱ = -۵$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

۳۹ گزینه ۲

برای یافتن نقاط تقاطع تابع fog با محور xها باید معادلهٔ $(fog)(x) = ۰$ را حل کنیم، یعنی: $f(g(x)) = ۰$

برای حل این معادله ابتدا ریشه های f را می‌یابیم. چون f در دو نقطه به طول های ۶ و $\frac{-۱}{۴}$ محور xها را قطع می‌کند، پس:

$$f(x) = ۰ \Rightarrow x = ۶ \ , \ x = \frac{-۱}{۴}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = ۰ \Rightarrow g(x) = ۶ \ , \ g(x) = \frac{-۱}{۴}$$

ازآنجاکه $g(x) = x - \sqrt{x}$، بنابراین:

$$x - \sqrt{x} = ۶ \text{ و } x - \sqrt{x} = \frac{-۱}{۴}$$

باتوجه‌به گزینه ها $x = ۹$ ریشهٔ معادلهٔ اول و $x = \frac{۱}{۴}$ ریشهٔ معادلهٔ دوم است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۴۰ گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ gof را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=x^{۲}+۳x \\ g(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲ \end{cases} \Rightarrow (gof)(x)=g(f(x))=-\frac{۱}{۲}f(x)+۲$$

$$\Rightarrow (gof)(x)=-\frac{۱}{۲}(x^{۲}+۳x)+۲$$

$$\Rightarrow (gof)(x)=-\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۳}{۲}x+۲$$

برای به دست آوردن مجموعهٔ طول نقاطی از نمودار تابع gof که بالای محور xها قرار می‌گیرند، باید نامعادلهٔ $(gof)(x)>۰$ را حل کنیم:

$$(gof)(x)>۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۳}{۲}x+۲>۰$$

$$\xrightarrow{\times(-۲)} x^{۲}+۳x-۴<۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x+۴)<۰ \Rightarrow -۴<x<۱ \Rightarrow x\in(-۴,۱)$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۴

۴۱ گزینه ۴

$$D_f=[۳,+\infty) \quad (۱)$$

$$D_{fof}=\{x|x\in D_f,\ f(x)\in D_f\}=\{x|x\geq ۳,\ f(x)\geq ۳\}$$

حال نامعادلهٔ $f(x)\geq ۳$ را حل می کنیم:

$$۵-\sqrt{x-۳}\geq ۳ \Rightarrow \sqrt{x-۳}\leq ۲ \Rightarrow x-۳\leq ۴ \Rightarrow x\leq ۷ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} D_{fof}=[۳,۷]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ b=۷ \end{cases} \Rightarrow b-a=۴$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

۴۲ گزینه ۲

نکته:

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$$

$$\begin{cases} \log_a x\leq y \xrightarrow{a>۱} x\leq a^{y} \\ \log_a x\leq y \xrightarrow{۰<a<۱} x\geq a^{y} \end{cases}$$

ابتدا توجه کنید که $D_f=(۳,+\infty)$ و $D_g=(-\infty,۲]$ حال می توان نوشت:

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x>۳|\log_x(x-۳)\leq ۲\}$$

$$=\{x>۳|x-۳\leq ۲^{۲}\}=\{x>۳|x\leq ۷\}=(۳,۷]$$

گزینه دو علوم تجربی سوم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۶

۴۳ گزینه ۴

برای آنکه تابع g تعریف شده باشد، ابتدا باید $۱-۲x \in D_f$، پس:

$$-۳ \leq ۱-۲x < ۳ \Rightarrow -۳ < ۲x-۱ \leq ۳$$
$$\Rightarrow -۲ < ۲x \leq ۴ \Rightarrow -۱ < x \leq ۲ \quad (*)$$

همچنین باید $\sqrt{x-۱}$ تعریف شده باشد:

$$x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \quad (**)$$

از اشتراک $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$۱ \leq x \leq ۲ \Rightarrow x \in [۱,۲]$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

۴۴ گزینه ۴

$$D_{fog} = \{x : x \in D_g \,,\, g(x) \in D_f\}$$
$$D_g = \mathbb{R} \,,\, D_f = \{x : x-۱ \geq ۰ \,,\, ۸-x \geq ۰ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۸\}$$
$$D_{fog} = \{x : x \in \mathbb{R} \,,\, [x] \in [۱,\ ۸]\}$$
$$۱ \leq [x] \leq ۸ \Rightarrow ۱ \leq x < ۹ \Rightarrow D_{fog} = [۱,\ ۹)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۵

۴۵ گزینه ۳

نکته:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\}$$

ابتدا باتوجه‌به ضابطهٔ توابع f و g داریم: $D_f = \mathbb{R} \;,\; D_g = [۱۱,+\infty)$

حال با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$D_{gof(x)} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, ۲^x + ۳ \geq ۱۱\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, ۲^x \geq ۸\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq ۳\} = [۳,+\infty)$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

۴۶ گزینه ۱

دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۰,a]$ و برد آن بازهٔ $[۱,۳a+۱]$ است. برای اینکه تابع fof با دامنهٔ غیرتهی قابل تعریف باشد، لازم است داشته باشیم $[۰,a] \cap [۱,۳a+۱] \neq \varnothing$ برای این کار لازم است $a \geq ۱$ باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۵

۴۷ گزینه ۲

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$
$$D_g : ۲^x - ۱ \underline{=} ۰ \Rightarrow ۲^x \underline{=} ۱ \Rightarrow x \underline{=} ۰$$
$$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{۰\} \quad (I)$$
$$D_f : \begin{cases} x - ۱ > ۰ \Rightarrow x > ۱ \\ \log(x-۱) \geq ۰ \Rightarrow x - ۱ \geq ۱ \Rightarrow x \geq ۲ \end{cases} \Rightarrow D_f = [۲, +\infty)$$
$$\frac{۲^x}{۲^x - ۱} \geq ۲ \Rightarrow \frac{۲^x}{۲^x - ۱} - ۲ \geq ۰$$
$$\Rightarrow \frac{۲ - ۲^x}{۲^x - ۱} \geq ۰ \xrightarrow{۲^x = t} \frac{۲ - t}{t - ۱} \geq ۰$$
$$\Rightarrow ۱ < t \leq ۲ \Rightarrow ۱ < ۲^x \leq ۲ \Rightarrow ۰ < x \leq ۱$$
$$\Rightarrow ۰ < x \leq ۱ (II)$$
$$(I) \cap \quad (II) = (۰, ۱]$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۸

۴۸ گزینه ۴

ابتدا دامنهٔ f را محاسبه می کنیم:

$$۶ + x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ - x - ۶ \leq ۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲) \leq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۳$$

حال برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y = f(۱ - ۲x)$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$-۲ \leq ۱ - ۲x \leq ۳ \Rightarrow -۳ \leq -۲x \leq ۲ \Rightarrow -۱ \leq x \leq \frac{۳}{۲} \Rightarrow D_f = [-۱, \frac{۳}{۲}]$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۵

۴۹ گزینه ۱

باتوجه به نمودار، دامنهٔ تابع f بازهٔ $D_f = [-۴, ۴]$ است. برای یافتن دامنهٔ تابع $f(\frac{x}{۲})$ دامنهٔ تابع f را در ۲ ضرب و برای یافتن دامنهٔ تابع $f(۲x)$، دامنهٔ تابع f را بر ۲ تقسیم می کنیم؛ پس داریم:

$$D_{f(\frac{x}{۲})} = [۲ \times (-۴), ۲ \times ۴] = [-۸, ۸]$$
$$D_{f(۲x)} = \left[\frac{-۴}{۲}, \frac{۴}{۲}\right] = [-۲, ۲]$$

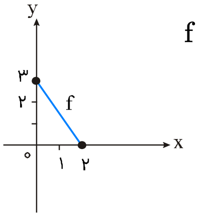
لذا دامنهٔ تابع $g(x) = f(\frac{x}{۲}) - f(۲x)$ برابر است با:

$$D_g = D_{f(\frac{x}{۲})} \cap D_{f(۲x)} = [-۸, ۸] \cap [-۲, ۲] = [-۲, ۲]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۵۰ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار، دامنهٔ تابع f برابر $D_f=[0,2]$ است. برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع fof ابتدا ضابطهٔ تابع f را به دست می‌آوریم. شیب خط داده‌شده برابر $m=-\frac{3}{2}$ و عرض از مبدأ آن $h=+3$ است، پس داریم:



$$\text{ضابطهٔ } f:\ f(x)=mx+h \xrightarrow[h=3]{m=-\frac{3}{2}} f(x)=-\frac{3}{2}x+3$$

پس داریم:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \,|\, f(x)\in D_f\}=\left\{x\in[0,2] \,\middle|\, \underbrace{0\le -\frac{3}{2}x+3\le 2}_{(*)}\right\}$$

$$\xrightarrow{(*)} 0\le -\frac{3}{2}x+3\le 2 \xrightarrow{-3} -3\le -\frac{3}{2}x\le -1 \xrightarrow{\times(-\frac{2}{3})} 2\ge x\ge \frac{2}{3}$$

بنابراین:

$$D_{fof}=\left\{x\in[0,2]\ ,\ x\in[\frac{2}{3},2]\right\}=[\frac{2}{3},2]$$

که شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

۵۱ گزینه ۲

$$f(x)=(x-1)^2-1\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{4-x}+1\Rightarrow\begin{cases}D_g=(-\infty,4]\\R_g=[1,+\infty)\end{cases}$$

$$D_{fog}=\{D_g \,|\, g(x)\in D_f\}\Rightarrow D_{fog}=D_g=(-\infty,4]$$

$$(fog)(x)=\left(\sqrt{4-x}\right)^2-1=3-x\Rightarrow R_{fog}=[-1,+\infty)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

۵۲ گزینه ۳

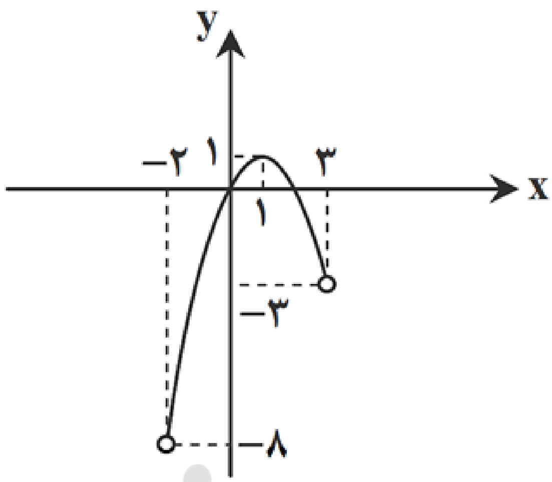
$$gof(x) = g(f(x)) \xrightarrow{t=f(x)} g(f(x)) = g(t)\ ;\ -۲ < t < ۳$$

بنابراین کافی است برد تابع $g(t) = ۲t - t^۲ = ۱ - (t-۱)^۲$ را برای $t \in (-۲, ۳)$ به دست آوریم.

$$-۲ < t < ۳ \Rightarrow -۳ < t - ۱ < ۲ \Rightarrow ۰ \le (t-۱)^۲ < ۹$$

$$\Rightarrow -۸ < ۱ - (t-۱)^۲ \le ۱ \Rightarrow -۸ < g(t) \le ۱ \Rightarrow R_g = (-۸, ۱]$$

در بازهٔ $(-۲, ۳)$ نمودار $g(x)$ به صورت زیر است:



گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

۵۳ گزینه ۴

دقت فرمایید که $۰ \le f(x) \le ۱$ است، پس $f(x)$ مقادیر $[۰, ۱]$ را اختیار می کند، درنتیجه $f(f(x))$ از روی نمودار مقادیری را می پذیرد که تابع f در بازهٔ $[۰, ۱]$ پذیرفته است که فقط عدد ۱ است؛ یعنی برد تابع $fof(x)$ برابر با $\{۱\}$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۶

۵۴ گزینه ۲

$$f(x) = \frac{x-۱}{x+۱} \Rightarrow f(f(x)) = f\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right) = \frac{\frac{x-۱}{x+۱} - ۱}{\frac{x-۱}{x+۱} + ۱} = \frac{-\frac{۲}{x+۱}}{\frac{۲x}{x+۱}}$$

نهٔ تابع $y = f(f(x))$ برابر $\mathbb{R} - \{۰, -۱\}$ است و درنتیجه:

$$y = f(f(x)) = -\frac{۱}{x} \xrightarrow{x \neq ۰, -۱} R_{fof} = \mathbb{R} - \{۰, ۱\}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۵۵ گزینه ۲

ابتدا دو تابع f و g را با هم ترکیب می کنیم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sin\pi(x - [x])$$
$$۰ \le x - [x] < ۱ \Rightarrow ۰ \le \pi(x - [x]) < \pi$$

چون کمان سینوس در نواحی اول و دوم است، همواره sin بین صفر و یک می‌باشد؛ پس: $R_{gof} = [۰, ۱]$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

۵۶ گزینه ۱

می دانیم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین:

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(0) = b & ; x \in \mathbb{Z} \\ g(-1) = 1 - a + b & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

چون برد تابع برابر با $\{2\}$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} b = 2 \\ 1 - a + b = 2 \xrightarrow{b=2} a = 1 \end{cases}$$

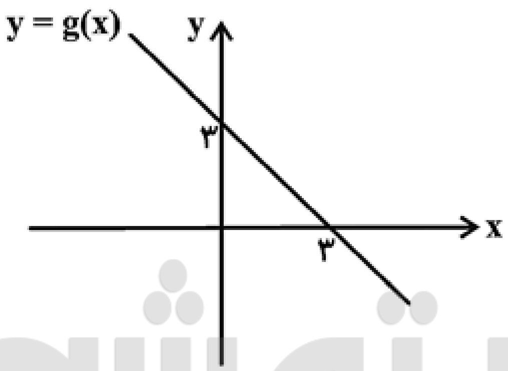
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+۳| - ۲$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

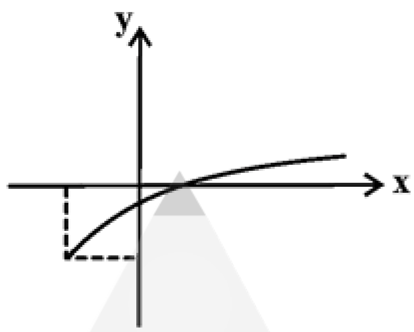
۱) اول ۲) دوم

۳) سوم ۴) چهارم

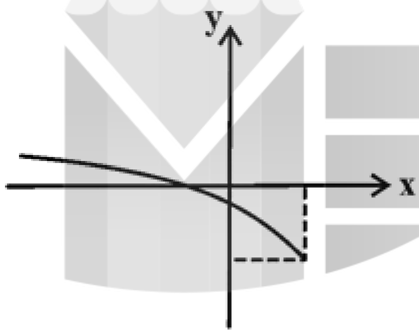
۲ نمودار تابع $y = g(x)$ به‌صورت زیر است. کدام گزینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{۱ - g(x)} - ۲$ را نشان می‌دهد؟



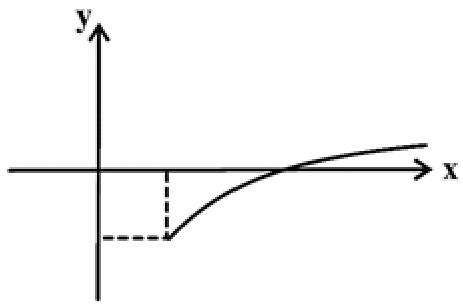
۱)



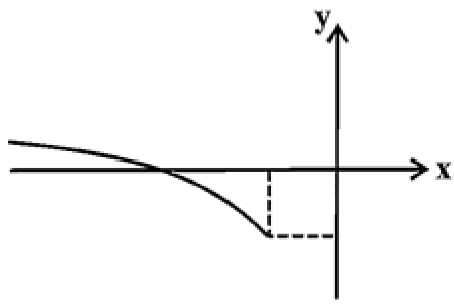
۲)



۳)



۴)



۳ نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt{x+2}$ از کدام نواحی مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول و دوم
۲) اول و سوم
۳) دوم و چهارم
۴) سوم و چهارم

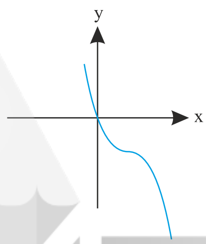
۴ دو تابع $y=-2^{-x}$ و $y=-\frac{2}{3}\sqrt{x}$ نسبت به هم چگونه اند؟

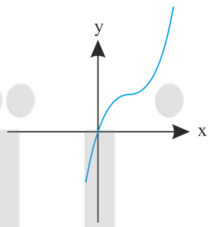
۱) غیرمتقاطع
۲) در یک بازه منطبق
۳) در دو نقطه متقاطع
۴) در یک نقطه متقاطع

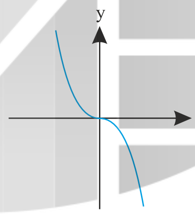
۵ توابع $y=\frac{x}{x-1}$ و $y=-\sqrt{x-1}$ در چند نقطه متقاطع اند؟

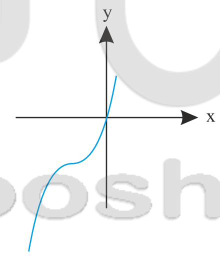
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۶ نمودار تابع $f(x)=6x^2-x^3-12x$ شبیه کدام گزینه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۷ معادلهٔ $\sqrt[3]{x+2}=x^3$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸ کدام گزینه در مورد ریشه های معادلهٔ $x^3=-|x|+2$ درست است؟

۱) فاقد ریشه
۲) فقط یک ریشهٔ مثبت
۳) فقط یک ریشهٔ منفی
۴) دو ریشهٔ مختلف العلامه

۹ وارون تابع $f(x)=1-(1-x)^3$ از کدام نواحی مختصات عبور می کند؟

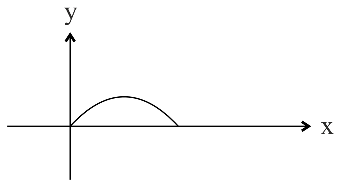
۱) اول و دوم
۲) اول، دوم و چهارم
۳) اول و سوم
۴) اول، سوم و چهارم

۱۰ منحنی $y = x^{۲} + ۷x + ۱۰$ را چند واحد به طرف راست منتقل کنیم تا نقاط برخورد آن با $y = \sqrt{x}$ دو نقطه با طول‌های مثبت باشند؟

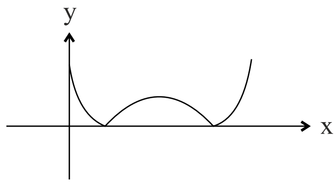
۱) ۳/۵ واحد
۲) بیش از ۵ واحد
۳) کمتر از ۳/۵ واحد
۴) ۵ واحد

۱۱ نمودار تابع $f(x) = \left|۲\sin\left(\frac{x}{۲}\right) - ۱\right|$ روی بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

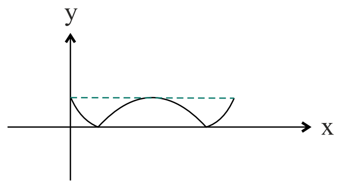
۱)



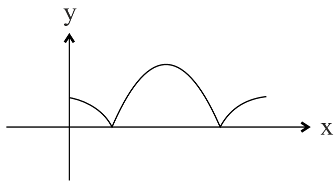
۲)



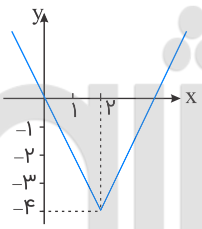
۳)



۴)

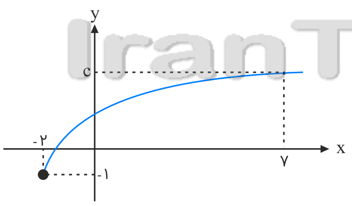


۱۲ نمودار تابع $f(x) = ۲|ax + b| + c$ به صورت زیر است. مقدار $a + b + c$ کدام است؟ $(b < ۰)$



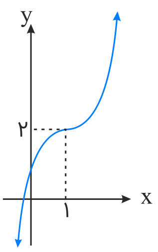
۱) ۶-
۲) ۵-
۳) ۱-
۴) ۷

۱۳ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x + a} + b$ به صورت زیر است. $a + b + c$ کدام است؟



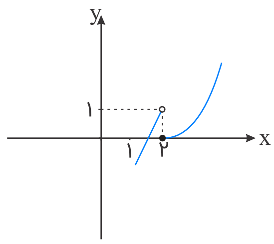
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

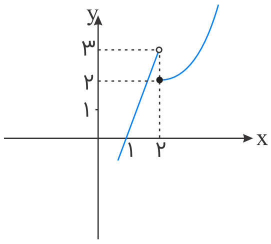
۱۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (x - a)^{۳} + b$ به صورت زیر است. حاصل $a.b$ کدام است؟

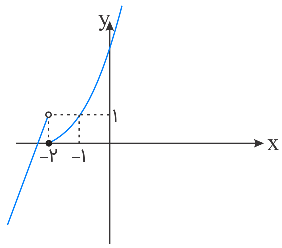


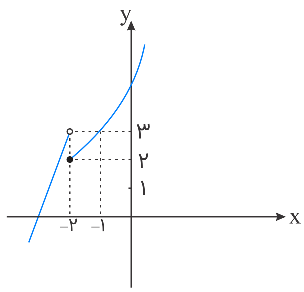
۱) ۲
۲) -۲
۳) ۳
۴) -۳

۱۵ اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ; x \geq ۰ \\ ۳x+۱ & ; x < ۰ \end{cases}$ باشد، نمودار تابع $y=f(x+۲)+۲$ کدام است؟

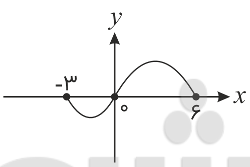
۱) 

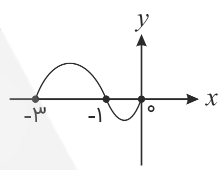
۲) 

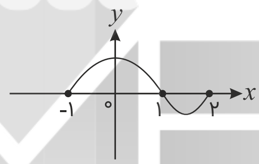
۳) 

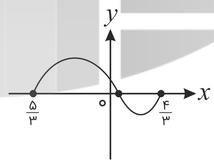
۴) 

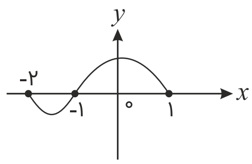
۱۶ نمودار $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y=f(۱-۳x)$ کدام است؟



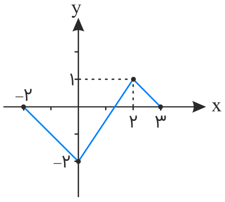
۱) 

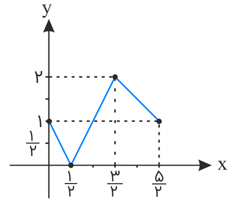
۲) 

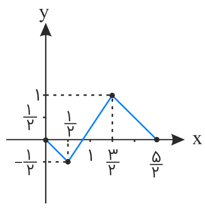
۳) 

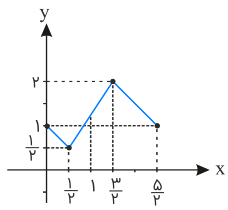
۴) 

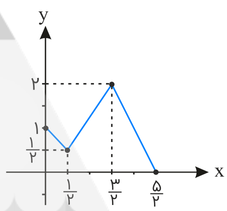
۱۷ تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}f(۳-۲x)+۱$ کدام است؟



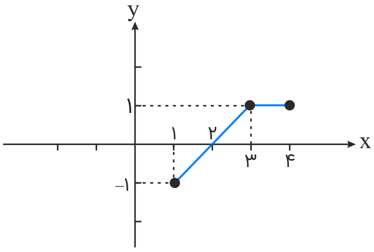
۱) 

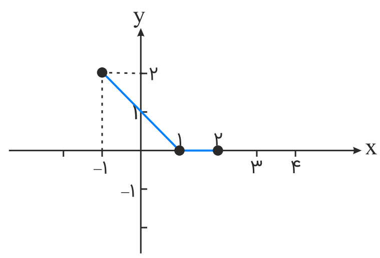
۲) 

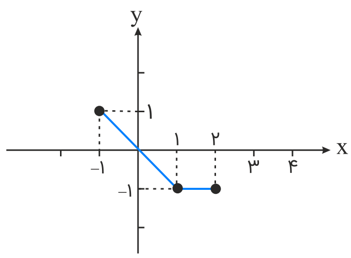
۳) 

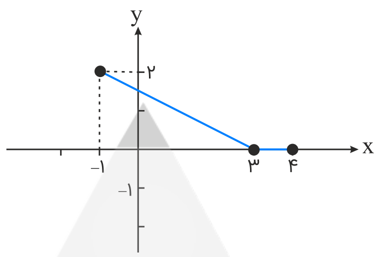
۴) 

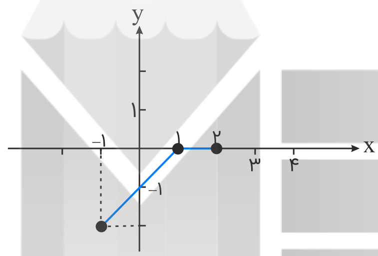
۱۸ شکل زیر نمودار تابع $y = f(x-۲)+۱$ را نشان می دهد. نمودار تابع $y=-f(x)$ کدام است؟



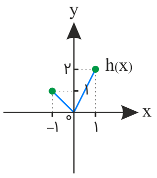
۱)


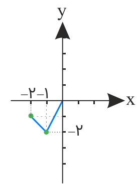
۲)


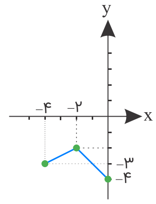
۳)


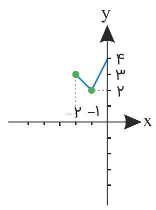
۴)


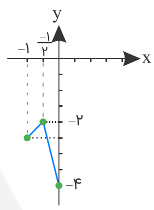
۱۹ نمودار تابع $f(x-۱)-۲$ مطابق شکل $h(x)$ زیر است. کدام گزینه نمودار تابع $f\left(\frac{x}{۲}\right)$ را به درستی نشان می دهد؟



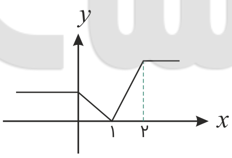
۱) 

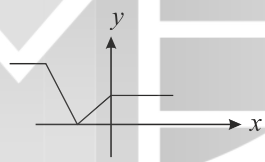
۲) 

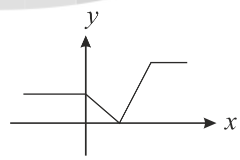
۳) 

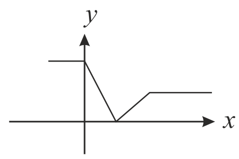
۴) 

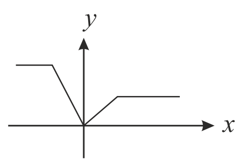
۲۰ نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به شکل زیر است. نمودار تابع $y=f(۱-x)$ کدام است؟



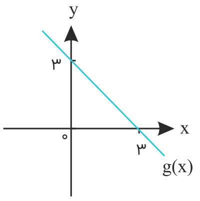
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۱ نمودار $g(x) = f(x) - ۲$ به‌صورت زیر است. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار $h(x) = ۳f(۲x - ۱)$ و محورهای مختصات چقدر است؟



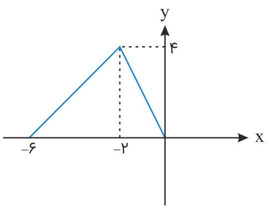
۱) ۱۵

۲) ۱۲

۳) ۱۸

۴) ۲۷

۲۲ اگر نمودار تابع $y = f(۲x + ۵)$ به‌صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع $y = ۳f(-۴x + ۱)$ و محور xها کدام است؟



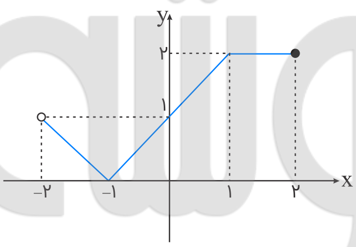
۱) ۱۰

۲) ۱۲

۳) ۱۸

۴) ۲۴

۲۳ اگر نمودار $y = f(x - ۱)$ به‌صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f(x) - ۱}$ کدام است؟



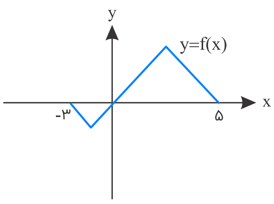
۱) $[-۲, -۱] \cup [۰, ۲]$

۲) $[-۱, ۰] \cup [۱, ۲]$

۳) $(-۳, -۱]$

۴) $[-۱, ۱]$

۲۴ اگر شکل زیر تابع $y = f(x)$ را نشان دهد، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x) = \sqrt{xf\left(-\frac{x}{۲}\right)}$ کدام است؟



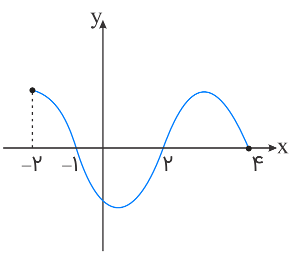
۱) $[-۱۰, ۶]$

۲) $[۰, ۶]$

۳) $\{-۱۰, ۰, ۶\}$

۴) $\{۰\}$

۲۵ اگر نمودار تابع $y = f(x - ۲)$ به‌صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



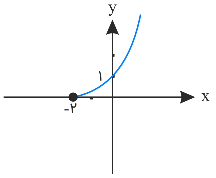
۱) $[-۳, ۲]$

۲) $[۲, ۴]$

۳) $[-۲, ۳]$

۴) $[۰, ۱] \cup [۴, ۶]$

۲۶ اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، نمودار تابع $y = -۲ + f^{-۱}(x-۱)$ از کدام ناحیهٔ (نواحی) دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟



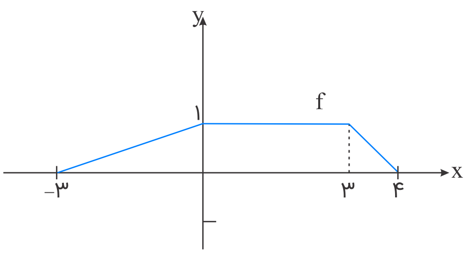
۱) دوم

۲) سوم

۳) سوم و چهارم

۴) دوم و سوم

۲۷ اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر و $g(x) = \begin{cases} f(x+۱) & ; x \geq ۰ \\ f(۲x) & ; x < ۰ \end{cases}$ باشد، مساحت سطح محدود بین نمودار تابع g و محور xها کدام است؟



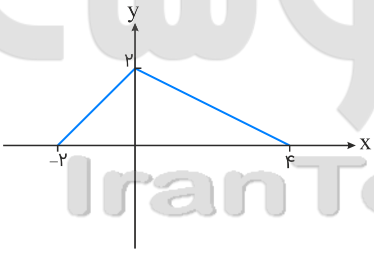
۱) $\frac{۷}{۴}$

۲) $\frac{۱۱}{۴}$

۳) $\frac{۱۳}{۴}$

۴) $\frac{۱۵}{۴}$

۲۸ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر باشد، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $y = f(x-|x|)$، محور xها و خط $x = ۵$ کدام است؟



۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۱

۲۹ نمودار تابع $y = f(x)$ مفروض است. اگر ابتدا نمودار را نسبت به محور yها قرینه کنیم، سپس آن را ۲ واحد در راستای محور xها به‌طرف راست منتقل کنیم و در انتها با ضریب ۲ آن را در راستای عمودی انبساط دهیم، کدام تابع به دست می آید؟

۱) $g(x) = ۲f(-x-۲)$

۲) $g(x) = ۲f(-x+۲)$

۳) $g(x) = \frac{۱}{۲}f(-x-۲)$

۴) $g(x) = \frac{۱}{۲}f(-x+۲)$

۳۰ نمودار تابع $y = |-x+۱|+۱$ را ۲ واحد به سمت راست و سپس ۲ واحد به پایین می بریم. این تابع محورهای مختصات را در سه نقطهٔ A و B و C قطع می کند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۵}{۲}$

۴) ۱

۳۱ نمودار تابع $y = \sqrt{1 - 2x}$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می کنیم. نمودار جدید خط $y = x + 9$ را در نقطهٔ $A(\alpha, \beta)$ قطع می کند. حاصل $\alpha + \beta$ چقدر است؟

۱) ۲۰-　　　　۲) ۹

۳) ۱-　　　　۴) ۳

۳۲ نمودار $y = -x^2 + 2x$ را چهار واحد به سمت راست و k واحد به بالا منتقل کرده ایم. رأس سهمی جدید به صورت $(\alpha, 10)$ است. $\alpha \times k$ چقدر است؟

۱) ۴۵　　　　۲) ۵۰

۳) ۴۰　　　　۴) ۳۵

۳۳ تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. ابتدا این تابع را یک واحد به راست می بریم و بعد با ضریب ۲ در راستای افقی آن را بسط داده تا به دست آید. تابع g، gof خط $y = 1$ را با کدام طول قطع می کند؟

۱) $\frac{1}{4}$　　　　۲) ۱

۳) $-\frac{1}{2}$　　　　۴) یکدیگر را قطع نمی کنند.

۳۴ نمودار تابع $y = x^3$ را ابتدا یک واحد به‌سمت راست و سپس k واحد به‌سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ به دست آید. مقدار k کدام است؟

۱) -1　　　　۲) ۱

۳) صفر　　　　۴) ۲

۳۵ نمودار تابعی را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده ایم و سپس قرینهٔ شکل حاصل را نسبت به محور x ها ۳ برابر در جهت عمودی منبسط کرده ایم و تابع $y = -|3x - 12|$ به دست آمده است. تابع اولیه کدام بوده است؟

۱) $y = 9|x - 6|$　　　　۲) $y = \frac{1}{3}|2 - x|$

۳) $y = |x - 6|$　　　　۴) $y = |x - 2|$

۳۶ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x) = (x - 1)^2$ حاصل می شود. در این صورت تابع fog محور yها را با چه عرضی قطع می کند؟

۱) ۱　　　　۲) ۲

۳) ۳　　　　۴) ۴

۳۷ تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ مفروض است. تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ با کدام‌یک از انتقال های زیر بر تابع f^{-1} منطبق می شود؟

۱) یک واحد به‌سمت چپ و ۲ واحد به‌سمت بالا　　　　۲) یک واحد به‌سمت چپ و ۲ واحد به‌سمت پایین

۳) یک واحد به‌سمت راست و ۲ واحد به‌سمت بالا　　　　۴) یک واحد به‌سمت راست و ۲ واحد به‌سمت پایین

۳۸ کدام یک از دو انتقال زیر نمودار $f(x) = x^2 + x$ را به نمودار تابع $g(x) = x^2 + 5x + 9$ تبدیل می کند؟

۱) ۲ واحد به راست، ۳ واحد به‌سمت بالا
۲) ۲ واحد به چپ، ۳ واحد به‌سمت پایین
۳) ۲ واحد به راست، ۳ واحد به‌سمت پایین
۴) ۲ واحد به چپ، ۳ واحد به‌سمت بالا

۳۹ اعمال موارد کدام گزینه به ترتیب، نمودار تابع $y = f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y = -\frac{1}{4}f(1-x)$ می شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی
۲) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محورxها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی
۳) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محورxها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی
۴) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی

۴۰ نقطهٔ $A(5, -2)$ روی تابع $y = f(x)$ است. این نقطه در تابع $y = f(x-1) + 3$ به کدام نقطه تبدیل می شود؟

۱) $(4, 1)$
۲) $(6, 1)$
۳) $(6, -5)$
۴) $(4, -5)$

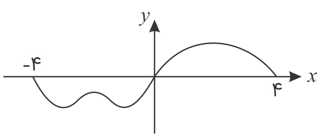
۴۱ اگر دامنهٔ تعریف تابع $y = f(2-x)$ بازهٔ $[-1, 2]$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $f(3x+4)$ کدام است؟

۱) $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right]$
۲) $[0, 1]$
۳) $[0, 3]$
۴) $[1, 2]$

۴۲ اگر برد تابع f بازهٔ $R_f = [-\sqrt{5}, 1]$ باشد، آنگاه برد تابع $g(x) = -\sqrt{2}f(x+1) - 3$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۳ تابع $y = f(2x)$ به شکل زیر است. دامنهٔ تابع $y = 3f(\sqrt{x}) + 1$ کدام است؟



۱) $[4, 16]$
۲) $[0, 64]$
۳) $[0, 4]$
۴) $[4, 64]$

۴۴ اگر دامنهٔ تابع $f(2x-1)$ برابر $[1, 3]$ و دامنهٔ $g(x)$ برابر $[2, 4]$ باشد، دامنهٔ تابع $h(x) = 3f(x^2) - g(|x|+1)$ کدام است؟

۱) $[-3, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, 3]$
۲) $[0, \sqrt{5}]$
۳) $[2, 3]$
۴) $[-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]$

۴۵ اگر $f(۱-x)=\sqrt{|۲-x|+۲x}$، دامنهٔ تابع $y=۲f(x)+۱$ کدام است؟

۱) $(-\infty, ۳]$
۲) $(-\infty, ۷]$
۳) $(-\infty, ۶]$
۴) $(-\infty, ۴]$

۴۶ نقطهٔ $(۱, ۵)$ روی تابع $y=۲f(۲x-۳)+۱$ تبدیل به چه نقطه ای روی تابع $y=۳f(-۲x+۵)+۱$ می شود؟

۱) $(۳, ۷)$
۲) $(-۱, ۲)$
۳) $(۳, ۲)$
۴) $(۴, ۷)$

۴۷ اگر $f(x+۳)=x+\frac{۵}{x}$، نمودار تابع $y=۳-f(۲x)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۲, ۵)$
۲) $(۲, ۲)$
۳) $(۴, -۳)$
۴) $(۸, -۳)$

۴۸ نقطهٔ $A(۱, ۳)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطهٔ متناظر با آن یعنی $A'(a, b)$ روی نمودار تابع $y=۳f(۲x-۵)-۷$ قرار دارد. $a-b$ کدام است؟

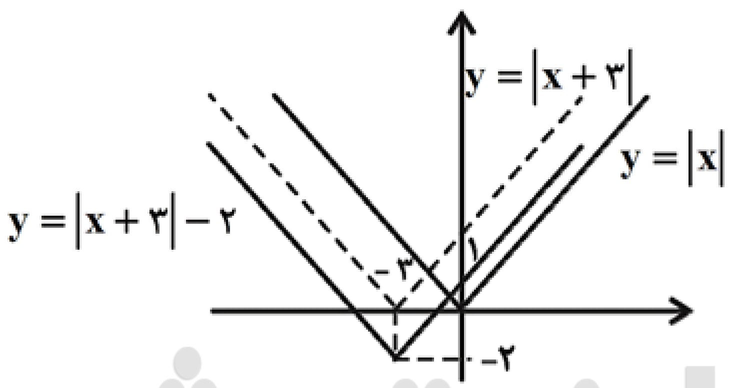
۱) -۲
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۴

۴۹ اگر نقطهٔ $(۲x_۰, y_۰)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار داشته باشد، کدام نقطه روی نمودار تابع $y=-۲f\left(\frac{x-۳}{۲}\right)+y_۰$ قرار دارد؟

۱) $(۴x_۰+۳, y_۰)$
۲) $(۴x_۰+۳, -y_۰)$
۳) $\left(\frac{۲x_۰-۳}{۲}, -y_۰\right)$
۴) $\left(\frac{۲x_۰-۳}{۲}, y_۰\right)$

۱ گزینه ۴

برای رسم $f(x) = |x + ۳| - ۲$ باید نمودار $y = |x|$ را ۳ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین منتقل کنیم.
باتوجه‌به شکل، نمودار تابع از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصاتی عبور نمی‌کند.



قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۷

۲ گزینه ۳

تابع g یک تابع خطی است. باتوجه‌به نمودار تابع g، ضابطهٔ آن را به دست می‌آوریم:

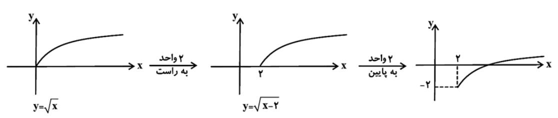
$$m = \frac{۳ - ۰}{۰ - ۳} = -۱$$

$$y - ۰ = -۱(x - ۳) \Rightarrow y = -x + ۳ \Rightarrow g(x) = -x + ۳$$

با جایگذاری ضابطهٔ g در ضابطهٔ f، f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{۱ - g(x)} - ۲ \xrightarrow{g(x) = -x + ۳} f(x) = \sqrt{۱ - (-x + ۳)} - ۲ \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - ۲} - ۲$$

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - ۲} - ۲$، کافی است نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را ابتدا ۲ واحد به راست ببریم $y = \sqrt{x - ۲}$ و سپس آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم تا به ضابطهٔ $y = \sqrt{x - ۲} - ۲$ برسیم.

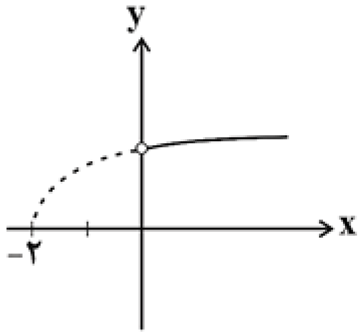


قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

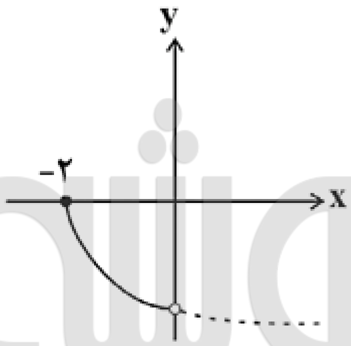
۳ گزینه ۳

$$D_f = [-۲, +\infty) - \{۰\}$$

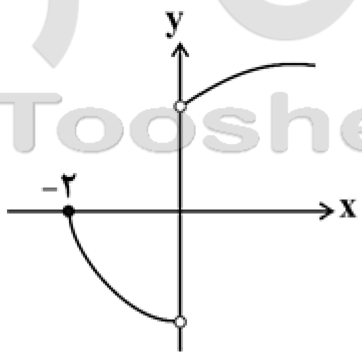
$$x > ۰ \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x}\sqrt{x+۲} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+۲}\ ,\quad x > ۰$$



$$-۲ \le x < ۰ \Rightarrow f(x) = \frac{x}{-x}\sqrt{x+۲} \Rightarrow f(x) = -\sqrt{x+۲}\quad ,\ -۲ \le x < ۰$$



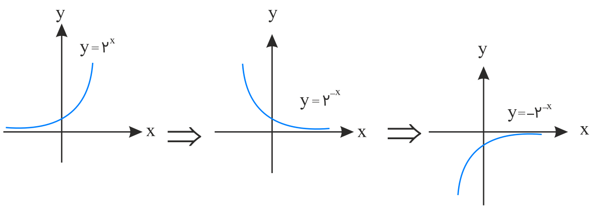
f شکل تقریبی نمودار $\Rightarrow$

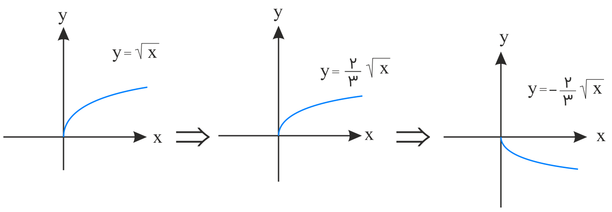


نمودار، از نواحی اول و سوم می‌گذرد و از نواحی دوم و چهارم نمی‌گذرد.

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

۴ گزینه ۴





با بررسی دو نمودار واضح است که فقط در یک نقطه متقاطع هستند.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۵ گزینه ۱

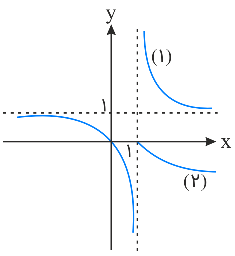
$$(۱)\quad y=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow y=\frac{x-۱+۱}{x-۱}=\frac{۱}{x-۱}+۱$$

$$y=\frac{۱}{x}\xrightarrow{\text{۱ واحد به راست}}y=\frac{۱}{x-۱}\xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}}y=\frac{۱}{x-۱}+۱$$

$$(۲)\quad y=-\sqrt{x-۱}$$

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{۱ واحد به راست}}y=\sqrt{x-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}y=-\sqrt{x-۱}$$



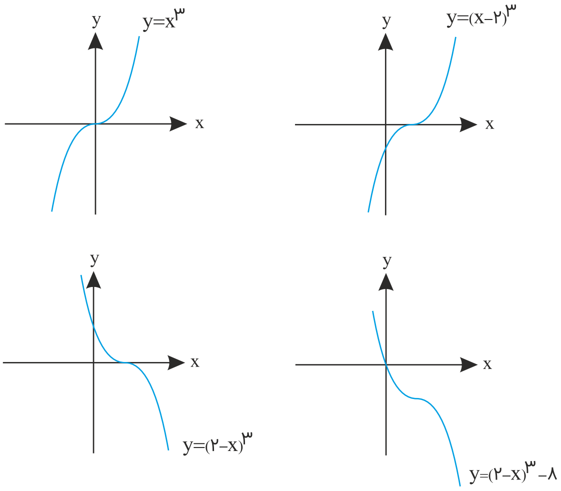
مشاهده می‌کنید که دو تابع یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۶ گزینه ۱

$$f(x) = \underbrace{۶x^۲ - x^۳ - ۱۲x + ۸}_{(۲-x)^۳} - ۸ = (۲ - x)^۳ - ۸$$

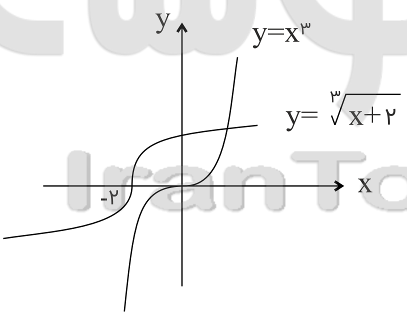
حالا مرحله‌به‌مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۷ گزینه ۱

نمودار توابع $y = x^۳$ و $y = \sqrt[۳]{x + ۲}$ به‌صورت زیر است:

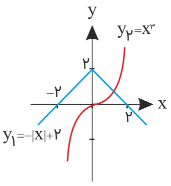


دو نمودار در یک نقطه متقاطع هستند، پس معادله یک جواب دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ تابستان ۱۳۹۸

۸ گزینه ۲

نمودارهای توابع $y_1 = -|x| + ۲$ و $y_۲ = x^۳$ را رسم می‌کنیم:



باتوجه‌به نمودارهای رسم‌شده، دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه با طول مثبت قطع می‌کنند؛ بنابراین معادلهٔ موردنظر فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.

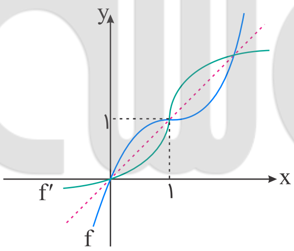
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۹ گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم کرده و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم:

$$f(x) = ۱ - (۱ - x)^۳ \Rightarrow f(x) = ۱ - (-(x - ۱))^۳ = ۱ + (x - ۱)^۳$$

برای رسم نمودار تابع $f(x)$ کافی است که نمودار تابع $y = x^۳$ را یک واحد به سمت راست و بالا منتقل کنیم، بنابراین شکل دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ به‌صورت زیر است:

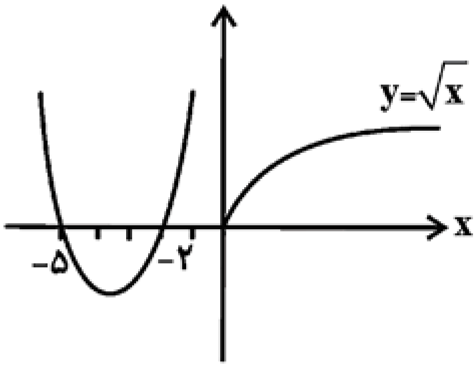


همان‌طورکه می‌بینید، نمودار تابع f^{-1} از ناحیهٔ اول و سوم عبور می‌کند.

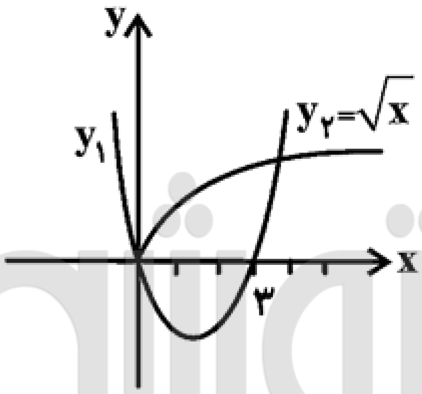
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۸

۱۰ گزینه ۲

با رسم دو نمودار، به‌وضوح معلوم است که محل برخوردی ندارند.



حال اگر ۵ واحد منحنی درجه دوم را به راست منتقل کنیم تلاقی این دو منحنی یک نقطه به طول مثبت و نقطهٔ دیگر مبدأ خواهد بود، پس باید بیش از ۵ واحد به سمت راست منتقل شود.

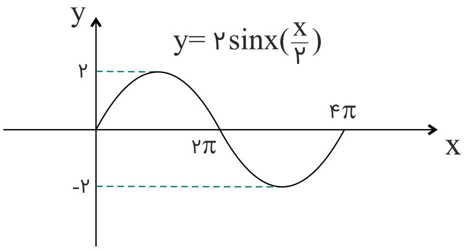


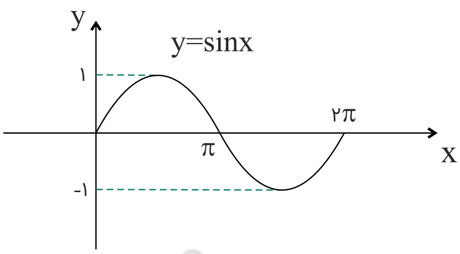
$$y_1 = (x-5)^2 + 7(x-5) + 10$$
$$y_2 = \sqrt{x}$$

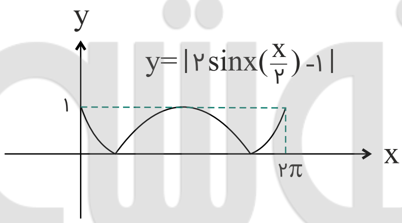
قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

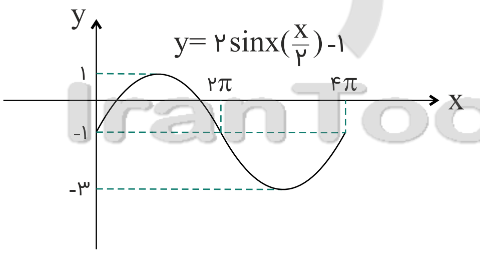
۱۱ گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم. سپس طول و عرض نقاط روی نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = ۲\sin\left(\frac{x}{۲}\right)$ به دست آید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = ۲\sin\left(\frac{x}{۲}\right) - ۱$ به دست آید. اکنون قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور طول‌ها قرار دارند را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \left|۲\sin\left(\frac{x}{۲}\right) - ۱\right|$ به دست آید. محدودهٔ $[۰, ۲\pi]$ نمودار موردنظر، پاسخ سؤال می‌باشد.









قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۲

$x = ۲$ ریشهٔ داخل قدر مطلق است:

$$۲a + b = ۰$$

$$(۰, ۰) \in f \Rightarrow ۲|b| + c = ۰ \xrightarrow{b<۰} -۲b + c = ۰$$

$$(۲, -۴) \in f \Rightarrow ۲|\overset{۰}{\cancel{۲a + b}}| + c = -۴ \Rightarrow c = -۴$$

$$-۲b + c = ۰ \xrightarrow{c=-۴} -۲b - ۴ = ۰ \Rightarrow -۲b = ۴ \Rightarrow b = -۲$$

$$۲a + b = ۰ \Rightarrow ۲a - ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

$$\Rightarrow a + b + c = ۱ - ۲ - ۴ = -۵$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۸

۱۳ گزینه ۲

دامنهٔ تابع $f(x)$ از روی ضابطه، $x \geq -a$ است و همچنین باتوجه‌به نمودار دامنه $x \geq -۲$ است، پس: $-a = -۲ \Rightarrow a = ۲$
همچنین نقطهٔ $(-۲, -۱)$ روی تابع است، پس داریم:

$$(-۲, -۱) \in f \Rightarrow -۱ = \sqrt{-۲ + ۲} + b \Rightarrow b = -۱$$

ضابطهٔ f برابر است با $f(x) = \sqrt{x + ۲} - ۱$؛ پس داریم:

$$f(۷) = \sqrt{۷ + ۲} - ۱ = ۲ \Rightarrow c = ۲$$

$$a + b + c = ۲ - ۱ + ۲ = ۳$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۱

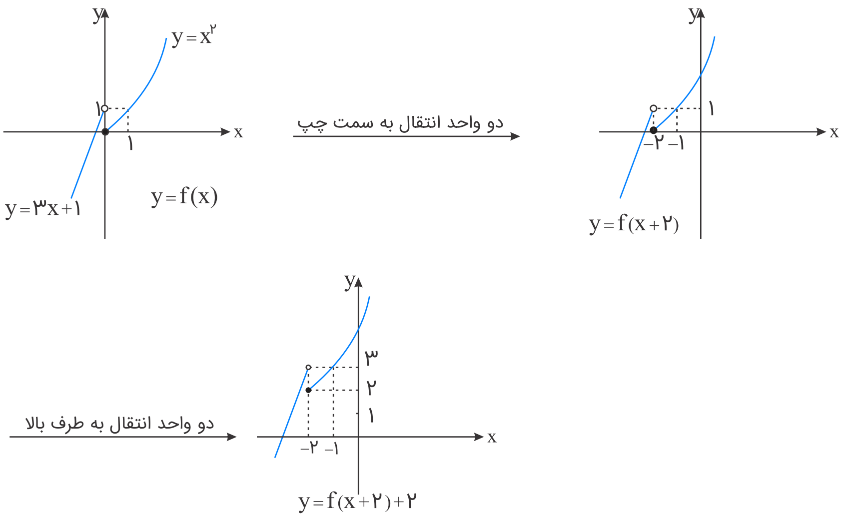
نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y = x^۳$ به دست آمده است. اگر نمودار $y = x^۳$ را یک واحد به‌سمت راست (در راستای محور xها) و سپس دو واحد به‌سمت بالا (در راستای محور yها) انتقال دهیم، ضابطهٔ $y = (x - ۱)^۳ + ۲$ به دست می‌آید که همان ضابطهٔ مربوط به نمودار داده‌شده در صورت سؤال است، پس:

$$a = ۱,\ b = ۲ \Rightarrow a.b = ۲$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۱۵ گزینه ۴

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $y = f(x+۲) + ۲$ نمودار تابع f را ابتدا دو واحد به سمت چپ و سپس دو واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم.



قلمچی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۸

۱۶ گزینه ۳

باید تابع نسبت به محور yها قرینه شود و همچنین xهای آن $\frac{۱}{۳}$ گردد و در آخر نمودار $\frac{۱}{۳}$ به سمت راست منتقل گردد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۵

۱۷ گزینه ۳

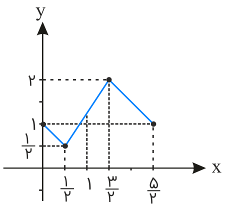
مراحل تبدیل نمودار به‌صورت زیر است:

$$f(x) \xrightarrow[\text{به‌سمت چپ}]{\text{۳ واحد انتقال}} f(x+۳) \xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انقباض افقی}} f(۲x+۳)$$

$$\xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به محور}} f(-۲x+۳) \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به محور}} -f(۳-۲x) \xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انقباض عمودی}} -\frac{۱}{۲}f(۳-۲x)$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{\text{انتقال یک}} -\frac{۱}{۲}f(۳-۲x)+۱$$

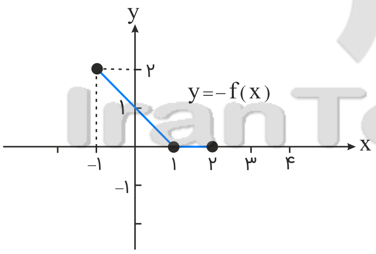
با انجام تبدیلات فوق، نمودار به‌صورت زیر درمی‌آید:



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۱۸ گزینه ۱

برای پیدا کردن نمودار $y=f(x)$ از روی نمودار $y=f(x-۲)+۱$، ابتدا نمودار را دو واحد به‌طرف چپ و سپس یک واحد به‌طرف پایین انتقال می‌دهیم. درنهایت نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-f(x)$ به دست آید.

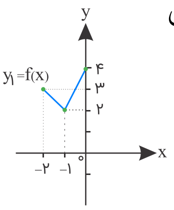


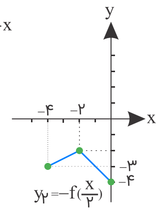
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۱۹ گزینه ۲

ابتدا باید نمودار تابع $y_۱ = f(x)$ را به دست آوریم. برای این منظور، کافی است نمودار $y = h(x)$ را یک واحد به‌سمت چپ و دو واحد به‌سمت بالا انتقال دهیم؛ بنابراین:

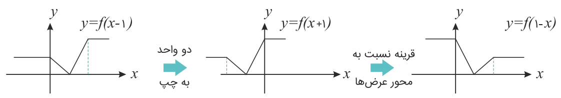
حال برای رسم $y_۲ = -f\left(\frac{x}{۲}\right)$ کافی است نمودار تابع $y_۱ = f(x)$ را در راستای افقی دو برابر منبسط و سپس نسبت به محور xها قرینه کنیم؛ درنتیجه تابع $y_۲ = -f\left(\frac{x}{۲}\right)$ به‌صورت زیر به دست می‌آید.





قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۲۰ گزینه ۳



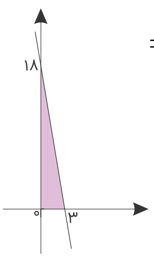
قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

۲۱ گزینه ۴

تابع $g(x)$ یک خط با شیب (-۱) و عرض از مبدأ $+۳$ است؛ بنابراین:

$$g(x) = -x + ۳ \Rightarrow f(x) = -x + ۵$$
$$h(x) = ۳[-(۲x - ۱) + ۵] = -۶x + ۱۸$$

شکل زیر، نمودار $h(x)$ را نمایش می‌دهد:



$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث هاشورخورده} : S = \frac{۱}{۲}(۳)(۱۸) = ۲۷$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۲۲ گزینه ۳

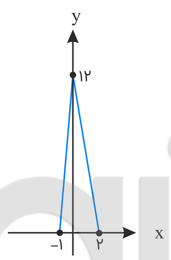
چون انتقال‌یافتهٔ خط، باز هم خط است، کافی است نقاط متناظر با نقاط $(۰,۰)$ و $(-۶,۰)$ و $(-۲,۴)$ از تابع $f(۲x+۵)$ را روی تابع $۳f(-۴x+۱)$ بیابیم:

$$(۰,۰) \Rightarrow \begin{cases} ۲\times ۰+۵=-۴x+۱ \Rightarrow x=-۱ \\ y=۰ \end{cases} \Rightarrow (-۱,۰)$$

$$(-۲,۴) \Rightarrow \begin{cases} ۲\times (-۲)+۵=-۴x+۱ \Rightarrow x=۰ \\ y=۳\times ۴=۱۲ \end{cases} \Rightarrow (۰,۱۲)$$

$$(-۶,۰) \Rightarrow \begin{cases} ۲\times (-۶)+۵=-۴x+۱ \Rightarrow x=۲ \\ y=۰ \end{cases} \Rightarrow (۲,۰)$$

$$S=\frac{۳\times ۱۲}{۲}=۱۸$$



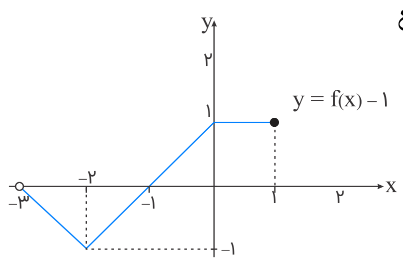
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۲۳ گزینه ۴

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)-۱}$، باید زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$f(x)-۱\geq ۰$$

با استفاده از نمودار $y=f(x-۱)$، نمودار $y=f(x)-۱$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور باید نمودار داده‌شده را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل کنیم. نمودار حاصل به‌صورت زیر خواهد بود:



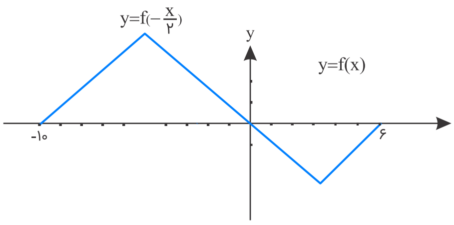
باتوجه‌به نمودار، نامعادلهٔ $f(x)-۱\geq ۰$ فقط در فاصلهٔ $[-۱,۱]$ برقرار است، پس دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۱,۱]$ است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۷

۲۴ گزینه ۳

ابتدا از روی $f\left(x\right)$ نمودار $f\left(-x\right)$ را رسم کرده و سپس در راستای افقی آن را ۲ برابر منبسط می‌کنیم تا $f\left(-\frac{x}{۲}\right)$ به دست آید.

حال دامنهٔ تابع $g\left(x\right)=\sqrt{xf\left(-\frac{x}{۲}\right)}$ را می‌یابیم:



$$xf\left(-\frac{x}{۲}\right)\geq ۰$$

x	-۱۰		۰		۶
x		−	۰	+	
$f\left(-\frac{x}{۲}\right)$	۰	+	۰	−	۰
$xf\left(-\frac{x}{۲}\right)$	۰	−	۰	−	۰

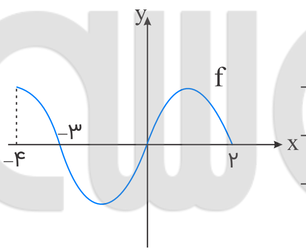
$$\Rightarrow D_g=\{-۱۰,۰,۶\}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۲۵ گزینه ۱

نمودار $y=f\left(x\right)$، با انتقال نمودار $y=f\left(x-۲\right)$ به‌اندازهٔ ۲ واحد به‌سمت چپ به دست می‌آید.

حال با جدول تعیین علامت زیر داریم:



x	-۴		-۳		۰		۲
x		−		−	۰	+	
f (x)		+	۰	−	۰	+	
g(x) = xf(x)		−	۰	+	۰	+	

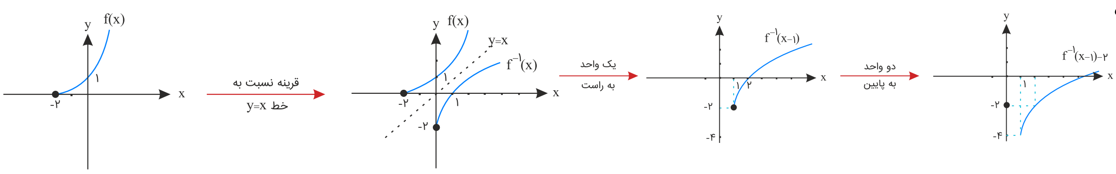
$$D_g: xf\left(x\right)\geq ۰\Rightarrow D_g=[-۳,۲]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

۲۶ گزینه ۴

نمودار تابع $y=-۲+f^{-۱}\left(x-۱\right)$ را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:

بنابراین نمودار از ناحیهٔ دوم و سوم عبور نمی‌کند.

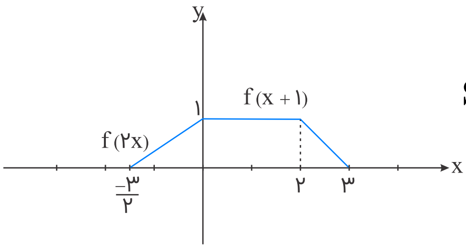


قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۲۷ گزینه ۳

نمودار تابع $g(x)$ به‌صورت شکل زیر است:

مساحت سطح موردنظر برابر است با:



$$S = \frac{(۴/۵ + ۲) \times ۱}{۲} = \frac{۶/۵}{۲} = \frac{۱۳}{۴}$$

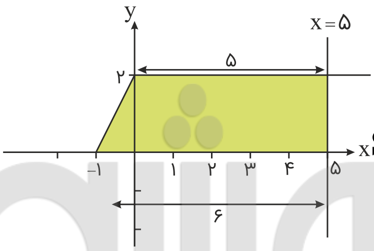
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

۲۸ گزینه ۴

$$f(x - |x|) = \begin{cases} f(\circ) & ; x \geq \circ \\ f(۲x) & ; x < \circ \end{cases} = \begin{cases} ۲ & ; x \geq \circ \\ f(۲x) & ; x < \circ \end{cases}$$

بنابراین نمودار $f(x - |x|)$ به‌صورت زیر است:

حال مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:



$$S = \frac{(۵ + ۶) \times ۲}{۲} = ۱۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۲۹ گزینه ۲

با انجام مراحل بیان‌شده در سؤال داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y‌ها}} y = f(-x)$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال ۲ واحد به‌طرف راست}} y = f(-(x - ۲)) = f(-x + ۲)$$

$$\xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی}} y = ۲f(-x + ۲)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۳۰ گزینه ۲

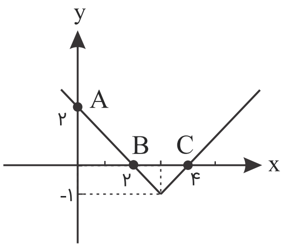
اول ضابطهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = |-x+۱|+۱ \Rightarrow y = |x-۱|+۱$$

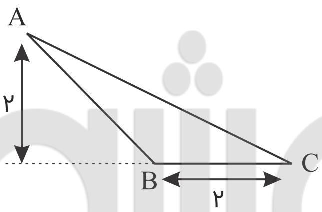
$$\xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲ واحد به راست}} y = |(x-۲)-۱|+۱ \Rightarrow y = |x-۳|+۱$$

$$\xrightarrow[f\to f-۲]{\text{۲ واحد به پایین}} y = |x-۳|+۱-۲ = |x-۳|-۱$$

برای رسم نمودار تابع $y = |x-۳|-۱$ باید نمودار $y = |x|$ را ۳ واحد به راست و ۱ واحد به پایین ببریم:



مساحت مثلث ABC برابر است با: $S_{ABC} = \dfrac{۲\times ۲}{۲} = ۲$



قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

۳۱ گزینه ۳

در عبارت داده‌شده به‌جای x، $(x+۱)$ قرار داده و یک واحد به عبارت اضافه می‌کنیم:

$$y = \sqrt{۱-۲(x+۱)}+۱ = \sqrt{-۲x-۱}+۱$$

$$\sqrt{-۲x-۱}+۱ = x+۹ \Rightarrow \sqrt{-۲x-۱} = x+۸$$

$$\Rightarrow -۲x-۱ = x^۲+۱۶x+۶۴$$

$$\Rightarrow x^۲+۱۸x+۶۵ = ۰ \Rightarrow (x+۱۳)(x+۵) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۱۳ & \text{غ.ق.ق} \\ x = -۵ & \text{ق.ق} \end{cases}$$

$$x = -۵ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow A(-۵, ۴)$$

درنتیجه:

$$(-۵, ۴) = (\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha+\beta = -۵+۴ = -۱$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۸

۳۲ گزینه ۱

$$y = -x^۲ + ۲x$$

رأس سهمی اولیه $S\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$ است. چون نمودار چهار واحد به راست و k واحد به بالا منتقل شده است، رأس سهمی جدید $S'\left|\begin{matrix}۵\\۱+k\end{matrix}\right.$ می‌شود. با مقایسه با رأس داده‌شده داریم:

$$\begin{matrix}\alpha = ۵\\ ۱+k = ۱۰ \Rightarrow k = ۹\end{matrix} \Rightarrow \alpha k = ۴۵$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ تابستان ۱۳۹۸

۳۳ گزینه ۱

$$y = \frac{۱}{x} \xrightarrow[x \to x-۱]{\text{۱ واحد به راست}} y = \frac{۱}{x-۱} \xrightarrow[x \to \frac{x}{۲}]{\text{انبساط افقی با ضریب ۲}} y = \frac{۱}{\frac{x}{۲}-۱}$$

حال با داشتن $f(x) = \frac{۱}{x}$ و $g(x) = \frac{۱}{\frac{x}{۲}-۱}$، ضابطهٔ gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = \frac{۱}{\frac{\frac{۱}{x}}{۲}-۱} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲x}-۱} = \frac{۲x}{۱-۲x}$$

$$g(f(x)) = ۱ \Rightarrow \frac{۲x}{۱-۲x} = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

۳۴ گزینه ۲

$$y = x^۳ \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y = (x-۱)^۳$$
$$\xrightarrow{\text{k واحد به‌سمت بالا}} y = (x-۱)^۳ + k = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x$$
$$\Rightarrow x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ + k = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x$$
$$\Rightarrow -۱ + k = ۰ \Rightarrow k = ۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ تابستان ۱۳۹۸

۳۵ گزینه ۴

کافی است مراحل گفته‌شده را به‌صورت معکوس از آخر به اول انجام دهیم. ابتدا $\frac{1}{3}$ واحد در جهت عمودی منقبض می‌کنیم:

$$y = -\frac{1}{3}|3x - 12| = -|x - 4|$$

سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم: $y = |x - 4|$

و در انتها ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم: $y = |x - 2|$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۳۶ گزینه ۳

ابتدا باید ضابطهٔ $y = f(x)$ را بیابیم. برای این کار به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$g(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{نمودار دو واحد بالا برود}} y = (x-1)^2 + 2$$
$$\xrightarrow{\text{نمودار یک واحد به چپ برود}} f(x) = (x+1-1)^2 + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

برای یافتن نقطهٔ تلاقی تابع fog با محور yها، $x = 0$ را در تابع قرار می‌دهیم:

$$f(g(0)) = f\left((0-1)^2\right) = f(1) = 1^2 + 2 = 3$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۶

۳۷ گزینه ۳

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1 = (x-2)^3 + 1$$
$$\Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 2$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$$

باتوجه‌به ضابطهٔ f^{-1} داریم:

$$f^{-1}(x) = g(x-1) + 2$$

بنابراین $g(x)$ را باید یک واحد به‌سمت راست و ۲ واحد به‌سمت بالا انتقال دهیم.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۳۸ گزینه ۴

$$f(x+a)+b=(x+a)^۲+(x+a)+b$$
$$=x^۲+(۲a+۱)x+a^۲+a+b=g(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a+۱=۵ \Rightarrow a=۲ \\ a^۲+a+b=۹ \Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

۳۹ گزینه ۲

$$f(x) \xrightarrow[\text{به‌سمت چپ}]{\text{انتقال یک واحدی}} f(x+۱)$$
$$f(x+۱) \xrightarrow[\text{به محور yها}]{\text{انعکاس نسبت}} f(-x+۱)$$
$$f(۱-x) \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{انعکاس نسبت به}} -f(۱-x)$$
$$-f(۱-x) \xrightarrow[\frac{۱}{۴}\text{ واحدی}]{\text{انقباض عمودی}} -\frac{۱}{۴}f(۱-x)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۴۰ گزینه ۲

نقطهٔ A یک واحد به‌سمت راست و ۳ واحد به بالا حرکت می‌کند، پس داریم:

$$A'=(۵+۱,\ -۲+۳)=(۶,۱)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ تابستان ۱۳۹۸

۴۱ گزینه ۱

$$D_{f(۲-x)}=[-۱,۲] \xrightarrow[\text{به‌سمت چپ}]{\text{انتقال دو واحد}} D_{f(-x)}=[-۳,۰]$$
$$\xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به}} D_{f(x)}=[۰,۳] \xrightarrow[\text{به‌سمت چپ}]{\text{انتقال ۴ واحد}} D_{f(x+۴)}=[-۴,-۱]$$
$$\xrightarrow[\text{با ضریب }\frac{۱}{۳}]{\text{انقباض در راستای افقی}} D_{f(۳x+۴)}=\left[-\frac{۴}{۳},-\frac{۱}{۳}\right]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

۴۲ گزینه ۱

انتقال افقی روی برد تابع تأثیر ندارد ولی انتقال‌های عمودی و انبساط (انقباض) عمودی برد تابع را تغییر می‌دهد و دقیقاً همان تغییرات روی برد اعمال می‌شود.

$$R_f = \left[-\sqrt{۵}, ۱\right] \Rightarrow -\sqrt{۵} \leq f(x) \leq ۱$$

$$\xrightarrow[\text{برد تغییر نمی‌کند}]{\text{انتقال افقی}} -\sqrt{۵} \leq f(x+۱) \leq ۱$$

$$\xrightarrow{\times(-\sqrt{۲})} -\sqrt{۲} \leq -\sqrt{۲}f(x+۱) \leq \sqrt{۱۰}$$

$$\xrightarrow{-۳} -\sqrt{۲} - ۳ \leq -\sqrt{۲}f(x+۱) - ۳ \leq \sqrt{۱۰} - ۳$$

$$\Rightarrow -\sqrt{۲} - ۳ \leq g(x) \leq \sqrt{۱۰} - ۳$$

$$\Rightarrow R_g = \left[-\sqrt{۲} - ۳, \sqrt{۱۰} - ۳\right]$$

ازآنجاکه $-۵ < -\sqrt{۲} - ۳ \leq g(x) \leq \sqrt{۱۰} - ۳ < ۱$ برد تابع g شامل پنج عدد صحیح ۴−، ۳−، ۲−، ۱− و صفر است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۴۳ گزینه ۲

باتوجه‌به شکل، دامنهٔ تابع $y = f(۲x)$ به‌صورت $[-۴, ۴]$ است، یعنی به ازای $x \in [-۴, ۴]$ تابع $f(۲x)$ تعریف می‌شود؛ بنابراین دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-۸, ۸]$ است. حال دامنهٔ تابع $y = ۳f(\sqrt{x}) + ۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\{x \geq ۰ | \sqrt{x} \in D_{f(x)}\} = \{x \geq ۰ | \sqrt{x} \in [-۸, ۸]\} = \{x \geq ۰ | ۰ \leq x \leq ۶۴\} = [۰, ۶۴]$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

۴۴ گزینه ۴

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$-۱ \leq x \leq ۳ \Rightarrow -۲ \leq ۲x \leq ۶ \Rightarrow -۳ \leq ۲x-۱ \leq ۵$$

حال دامنهٔ $f(x^۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-۳ \leq x^۲ \leq ۵ \Rightarrow x^۲ \leq ۵ \Rightarrow -\sqrt{۵} \leq x \leq \sqrt{۵}$$

دامنهٔ تابع $g(x)$ برابر $[۲,۴]$ است. دامنهٔ $g(|x|+۱)$ را پیدا می‌کنیم:

$$۲ \leq |x|+۱ \leq ۴ \Rightarrow ۱ \leq |x| \leq ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱ \leq x \leq ۳ \\ \text{یا} \\ -۳ \leq x \leq -۱ \end{cases}$$

حال برای به‌دست آوردن دامنهٔ $h(x)$ باید بین دامنه‌های به‌دست آمده اشتراک بگیریم:

$$[-\sqrt{۵},\sqrt{۵}] \cap ([-۳,-۱] \cup [۱,۳]) = [-\sqrt{۵},-۱] \cup [۱,\sqrt{۵}]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

۴۵ گزینه ۱

دامنهٔ تابع $۲f(x)+۱$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است. حال ابتدا تابع $y=f(x)$ را یافته و از روی آن دامنه‌اش را محاسبه می‌کنیم.

$$f(۱-x)=\sqrt{|۲-x|+۲x} \xrightarrow{۱-x=t \Rightarrow x=۱-t} f(t)=\sqrt{|۲-(۱-t)|+۲(۱-t)}$$
$$=\sqrt{|۱+t|+۲-۲t} \Rightarrow f(x)=\sqrt{|۱+x|+۲-۲x} \Rightarrow |۱+x|+۲-۲x \geq ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -۱ : ۱+x+۲-۲x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۳ \xrightarrow{x \geq -۱} -۱ \leq x \leq ۳ & (۱) \\ x < -۱ : -۱-x+۲-۲x \geq ۰ \Rightarrow ۱ \geq ۳x \Rightarrow x \leq \frac{۱}{۳} \xrightarrow{x<-۱} x < -۱ & (۲) \end{cases} \xrightarrow{(۱)\cup(۲)} x \leq ۳$$

پس دامنهٔ $y=۲f(x)+۱$ برابر $(-\infty,۳]$ خواهد بود.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۴

۴۶ گزینه ۱

ابتدا نقطهٔ متناظر $(۱, ۵)$ که روی نمودار $y = ۲f\,(۲x - ۳) + ۱$ قرار دارد را روی تابع f می‌یابیم.

$$\left.\begin{array}{l} ۲ \times ۱ - ۳ = -۱ \\ ۲f\,(-۱) + ۱ = ۵ \Rightarrow f\,(-۱) = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow (-۱, ۲) \in f$$

$$(-۱, ۲) \in f \Rightarrow \begin{cases} -۲x + ۵ = -۱ \Rightarrow x = ۳ \\ ۳\,(۲) + ۱ = y \Rightarrow y = ۷ \end{cases}$$

$$(۳, ۷) \in ۳f\,(-۲x + ۵) + ۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

۴۷ گزینه ۳

روش اول:

در تابع $y = ۳ - f(۲x)$ به ازای $x = ۴$ داریم:

$$y = ۳ - f(۸)$$

در ضمن $f(x + ۳) = x + \frac{۵}{x}$ به ازای $x = ۵$، $f(۸)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(۸) = ۵ + \frac{۵}{۵} = ۶ \Rightarrow y = ۳ - f(۸) = ۳ - ۶ = -۳$$

پس نمودار تابع $y = ۳ - f(۲x)$ از نقطهٔ $(۴, -۳)$ می‌گذرد.

روش دوم:

از رابطهٔ $f(x + ۳) = x + \frac{۵}{x}$ ضابطهٔ مربوط به $y = f(x)$ و سپس $y = ۳ - f(۲x)$ را به دست آورده و گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۴

۴۸ گزینه ۲

$$\begin{cases} ۲a - ۵ = -۱ \Rightarrow a = ۲ \\ b = ۳f(-۱) - ۷ = ۳\,(۳) - ۷ = ۲ \end{cases} \Rightarrow a - b = ۰$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۴۹ گزینه ۲

$$(۲x_\circ, y_\circ) \in f(x) \Rightarrow f(۲x_\circ) = y_\circ$$

$$\Rightarrow \frac{x-۳}{۲} = ۲x_\circ \Rightarrow x - ۳ = ۴x_\circ \Rightarrow x = ۴x_\circ + ۳$$

$$y = -۲f\left(\frac{x-۳}{۲}\right) + y_\circ \Rightarrow y = -۲f(۲x_\circ) + y_\circ = -۲y_\circ + y_\circ = -y_\circ$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۱ کدام‌یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x+1| & ;x\leq -1\\ -x^2 & ;x\geq 0\end{cases}$ درست است؟

۱) صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.
۲) اکیداً صعودی است.
۳) نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.
۴) اکیداً نزولی است.

۲ کدام تابع در دامنهٔ خود، اکیداً صعودی است؟

۱) $f(x)=2^{-x}$
۲) $g(x)=|x+2|$
۳) $h(x)=\sqrt{2-x}$
۴) $k(x)=\log_2^x$

۳ بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+1|+|x-1|$ روی آن صعودی است، کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$
۲) $[-1,+\infty)$
۳) $(-\infty,-1]$
۴) $(-\infty,1]$

۴ تابع $f(x)=x-[x]$ در کدام بازه صعودی است؟ ($[\,]$ جزء صحیح است)

۱) $(-1,1)$
۲) $[0,+\infty)$
۳) $\mathbb{R}$
۴) $[-2,-1)$

۵ تابع $y=2x+\frac{|x|}{x}$ در دامنهٔ خود چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی
۲) اکیداً نزولی
۳) هم صعودی و هم نزولی
۴) غیریکنوا

۶ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=2x-x|x|$ در بازهٔ $(-1,1)$ چگونه است؟

۱) ابتدا نزولی، سپس صعودی
۲) صعودی
۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی
۴) نزولی

۷ اگر تابع $f=\{(2,2m+3),(1,6),(3,-4)\}$ یک تابع نزولی اکید باشد، آنگاه در محدودهٔ m چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۸ به ازای $x \in [a, b]$، تابع $f = \{(۱, ۲x+۷), (-۲, ۱۰-x), (۰, x^۲+۴)\}$ یک تابع صعودی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۱ ۴) ۲

۹ تابع $f = \{(-۶, ۲), (۰, ۴), (۶, ۷), (۷, ۹), (۲, m^۲-۳)\}$ غیریکنوا است. m چند عدد صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟

۱) صفر ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۶

۱۰ اگر $f = \{(۱, ۲), (-۱, ۰), (۰, [a])\}$ و $g(x) = ۲^x$ باشند، به ازای چه مقادیری از a تابع $f+g$ صعودی است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است)

۱) $[۰, ۳]$ ۲) $[۰, ۴)$

۳) $[-\frac{۱}{۲}, ۳]$ ۴) $[-\frac{۱}{۲}, ۴)$

۱۱ تابع $f(x) = |x(x^۲+۳x+۳)+۲|$ در بازهٔ $[a, +\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲

۳) $-\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $-۱-\sqrt[۳]{۲}$

۱۲ بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y = \left(\frac{۵-k}{۱-۳k}\right)^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

۱) $(-۱, \frac{۱}{۳})$ ۲) $(-۲, \frac{۱}{۳})$

۳) $(-۳, \frac{۱}{۳})$ ۴) $(-۴, \frac{۱}{۳})$

۱۳ چند عدد صحیح می‌توان به‌جای a قرار داد، به‌طوری‌که تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{۱-x}+۱ & ; x < ۰ \\ a & ; x = ۰ \\ ax-۱ & ; x > ۰ \end{cases}$، اکیداً یکنوا شود؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۱۴ تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & ; x \geq a \\ ۲x+۱ & ; x < a \end{cases}$ اکیداً صعودی است. مقدار a کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱

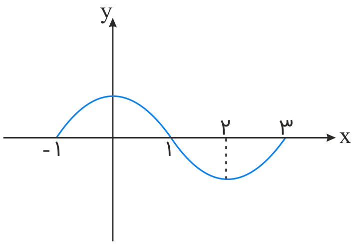
۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۵ تابع درجه دوم $y = (a - ۳)\,x^{۲} - ۱۲x + ۱$ در فاصلهٔ $[۴, +\infty)$ صعودی است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) ۴   ۲) $\frac{۹}{۲}$

۳) ۵   ۴) $\frac{۱۱}{۲}$

۱۶ شکل زیر نمودار تابع $y = f\,(x)$ است. نمودار تابع $y = f\,(۱ - x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



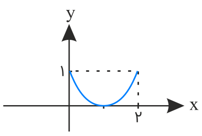
۱) $[-۴, -۳]$

۲) $(-۳, -۱)$

۳) $(-۱, ۱)$

۴) $[۱, ۲]$

۱۷ نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. تابع $y = f(f(x))$ با ورودی $۱ \leq x \leq ۲$ چگونه است؟



۱) صعودی

۲) نزولی

۳) ابتدا نزولی سپس صعودی

۴) ابتدا صعودی سپس نزولی

۱۸ اگر $f\,(x) = \sqrt{x - ۳}$ و $g\,(x) = ۲^{-x}$ باشد، کدام‌یک از توابع زیر نزولی است؟

۱) $f + g$ ۲) fg

۳) $g - f$ ۴) $\frac{f}{g}$

۱۹ اگر $y = f(x)$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، تابع $fof(x)$ کدام‌یک از ضابطه‌های زیر را نمی‌تواند داشته باشد؟

۱) $y = ۳ + x$ ۲) $y = x^{۹}$

۳) $y = ۴ - x$ ۴) $y = ۲x - ۱$

۲۰ اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f\,(۱) = ۰$ باشد، دامنهٔ تابع $g\,(x) = \sqrt{\dfrac{x - ۴}{f\,(۳ - x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) بی‌شمار

۲۱ اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(۱) = ۰$ باشد، آنگاه دامنهٔ $\sqrt{(x^{۳} - x)f(x)}$ برابر با $\mathbb{R} - (a, b)$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) صفر

۳) -۱ ۴) ۲

۲۲ اگر f تابعی نزولی اکید با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(|۳x-۵|)-f(|۲x+۳|)}$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۱۰

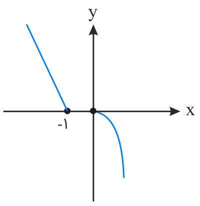
۲۳ اگر $f\left(\frac{۱}{x}\right)=۲^{x-۱}-۱$ باشد، دامنهٔ تابع $\sqrt{(f(x))^{۲}-۲۲۵}$ کدام است؟

۱) $(۰,\infty)$
۲) $\left[-\frac{۱}{۴},۴\right]$
۳) $\left(۰,\frac{۱}{۵}\right]$
۴) $\left[-\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۲}\right)$

منبع: قلمچی

۱ گزینه ۳

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم:

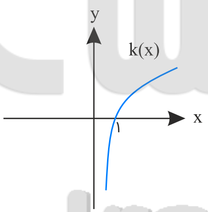


باتوجه‌به نمودار، واضح است که تابع f نزولی است. از طرفی چون $f(0)=f(-1)=0$ بنابراین تابع f اکیداً نزولی نیست.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۲ گزینه ۴

کافی است نمودار تابع‌ها را رسم نماییم. به‌سادگی می‌بینیم نمودار $k(x)=\log_2^x$ مطابق شکل زیر، یک تابع اکیداً صعودی است.

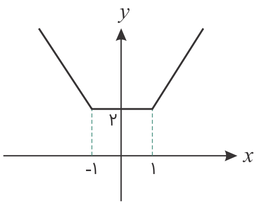


قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۳ گزینه ۲

نمودار تابع f را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$y = f(x) = |x+۱| + |x-۱| = \begin{cases} ۲x & ; x > ۱ \\ ۲ & ; -۱ \le x \le ۱ \\ -۲x & ; x < -۱ \end{cases}$$

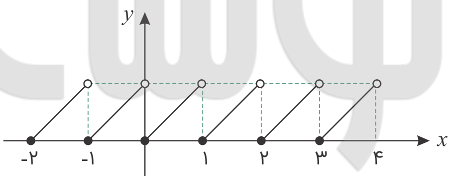


همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود، بازهٔ $[-۱, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع f روی آن صعودی است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۵

۴ گزینه ۴

با رسم نمودار تابع $f(x)$ داریم:



$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow f(x) = x$$

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow f(x) = x - ۱$$

$$۲ \le x < ۳ \Rightarrow f(x) = x - ۲$$

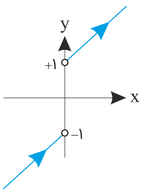
همان‌طور که از نمودار تابع $f(x)$ مشخص است، تابع در بازهٔ $[-۲, -۱)$ صعودی می‌باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۶

۵

گزینه ۱

$$y = 2x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 2x+1 & ; x > 0 \\ 2x-1 & ; x < 0 \end{cases}$$



باتوجه‌به نمودار، تابع موردنظر اکیداً صعودی است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

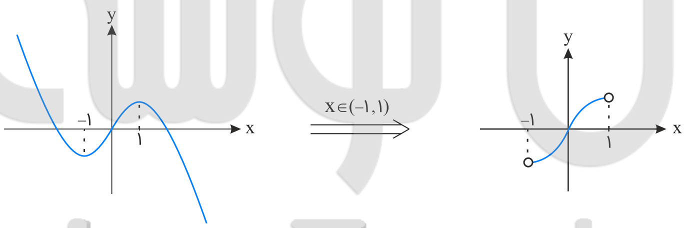
۶

گزینه ۲

با تعیین علامت $|x|$، داریم:

$$f(x) = 2x - x|x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x \; ; & x \geq 0 \\ x^2 + 2x \; ; & x < 0 \end{cases}$$

حال تابع $f(x)$ را در بازهٔ داده‌شده رسم می‌کنیم:

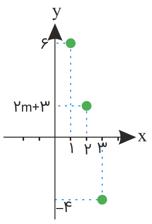


بنابراین تابع در بازهٔ $(-1, 1)$، صعودی است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۷ گزینه ۳

نمایش نموداری تابع f به‌صورت زیر است. برای اینکه تابع f اکیداً نزولی باشد، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، باید همواره به‌سمت پایین حرکت کنیم؛ بنابراین باتوجه‌به نمودار، مقدار تابع در نقطهٔ ۲ یعنی $۲m + ۳$ باید بین دو عدد ۶ و ۴- قرار گیرد:



$$-۴ < ۲m + ۳ < ۶ \Rightarrow -۷ < ۲m < ۳ \Rightarrow -۳/۵ < m < ۱/۵$$

پس پنج عدد صحیح از ۳- تا ۱ در محدودهٔ m قرار می‌گیرد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۸ گزینه ۳

می‌دانیم که برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ تابع f که $x_۱ < x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱) \leq f(x_۲)$، آنگاه تابع f را تابع صعودی می‌نامیم؛ پس:

$$۱۰ - x \leq x^۲ + ۴ \leq ۲x + ۷$$
$$\Rightarrow ۱۰ - x \leq x^۲ + ۴ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ \geq ۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۲) \geq ۰$$
$$\Rightarrow x \in (-\infty, -۳] \cup [۲, +\infty) \quad (I)$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۴ \leq ۲x + ۷ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ \leq ۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۱) \leq ۰$$
$$\Rightarrow x \in [-۱, ۳] \quad (II)$$
$$I \cap II : x \in [۲, ۳] \Rightarrow \max(b-a) = ۳ - ۲ = ۱$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۹ گزینه ۲

تابع را به‌صورت $f = \{(-۶,۲), (۰,۴), (۲, m^۲ - ۳), (۶,۷), (۷,۹)\}$ مرتب می‌کنیم. ملاحظه می‌شود با افزایش x، مقادیر تابع در حال افزایش‌اند. برای اینکه تابع غیریکنوا شود باید $m^۲ - ۳ > ۷$ یا $m^۲ - ۳ < ۴$ باشد.

$$\begin{cases} m^۲ - ۳ < ۴ \Rightarrow m^۲ < ۷ \Rightarrow -\sqrt{۷} < m < \sqrt{۷} & (۱) \\ m^۲ - ۳ > ۷ \Rightarrow m^۲ > ۱۰ \Rightarrow m > \sqrt{۱۰} \text{ یا } m < -\sqrt{۱۰} & (۲) \end{cases}$$

باتوجه‌به بازه‌های (۱) و (۲)، m فقط اعداد صحیح ۳+ و ۳- را نمی‌تواند بپذیرد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۱۰

گزینه ۲

تابع $f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(1)=f(1)+g(1)=2+2=4\ ,\ (f+g)(-1)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ ,\ (f+g)(0)=[a]+1$$

اگر $f+g$ صعودی باشد، باید با افزایش مقادیر x مقادیر تابع هم زیاد شود، یعنی:

$$(f+g)(-1)\le(f+g)(0)\le(f+g)(1)\Rightarrow\frac{1}{2}\le[a]+1\le4\xrightarrow{-1}-\frac{1}{2}\le[a]\le3$$

چون $[a]\in\mathbb{Z}$ است، پس $0\le[a]\le3$، یعنی $0\le a<4$ می‌باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

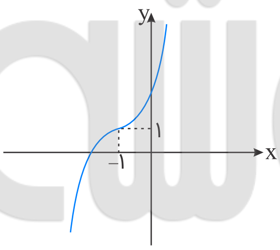
۱۱

گزینه ۲

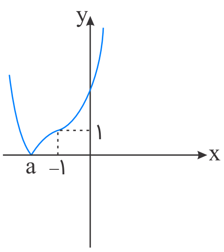
ابتدا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\left|x^3+3x^2+3x+1+1\right|=\left|(x+1)^3+1\right|$$

نمودار تابع $y=(x+1)^3+1$ را به کمک انتقال تابع $y=x^3$ رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار f، کافی است قسمتی از نمودار را که زیر محور xها است، نسبت به محور xها قرینه کنیم و آن قسمت از نمودار را که بالای محور xها است حفظ کنیم:



برای به دست آوردن a باید معادلهٔ $f(x)=0$ را حل کنیم:

$$(x+1)^3+1=0\Rightarrow(x+1)^3=-1\Rightarrow x+1=-1\Rightarrow x=-2$$

پس تابع f در بازهٔ $[-2,+\infty)$ صعودی اکید است و حداقل مقدار a برابر با -2 است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۲

شرط صعودی بودن تابع $y = a^x$، $(a > ۰, a \neq ۱)$ این است که $a > ۱$ باشد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{۵-k}{۱-۳k} > ۱ \Rightarrow \frac{۵-k}{۱-۳k} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{۲k+۴}{۱-۳k} > ۰$$

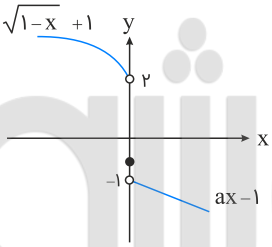
k	$-\infty$		-۲		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
عبارت		$-$	۰	$+$	تعریف نشده	$-$	

$$\Rightarrow -۲ < k < \frac{۱}{۳}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۱۳ گزینه ۲

می‌دانیم که تابع $y = \sqrt{۱-x} + ۱$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است؛ بنابراین برای اینکه f اکیداً نزولی باشد، لازم است خط $y = ax - ۱$ نیز اکیداً نزولی باشد و این یعنی $a < ۰$ است. در این صورت نمودار تابع f، به‌صورت زیر خواهد بود:



واضح است که a باید عضو بازهٔ $[-۱, ۰)$ باشد؛ درنتیجه فقط عدد صحیح $a = -۱$ قابل‌قبول خواهد بود.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۴

در ابتدا هر دو ضابطهٔ تابع باید اکیداً صعودی باشند؛ این یعنی حتماً $a \geq ۰$ باشد؛ در غیر این صورت تابع $x^۲$ غیریکنوا خواهد شد.
حال کافی است در نقطهٔ مشترک دو ضابطه، شرط اکیداً صعودی بودن تابع را بنویسیم. داریم:

$$۲a + ۱ \leq a^۲ \Rightarrow a^۲ - ۲a - ۱ \geq ۰$$

$$\Rightarrow (a-۱)^۲ \geq ۲ \xrightarrow{a>۰} a \geq ۱ + \sqrt{۲}$$

در بین گزینه‌ها، فقط مقدار $\frac{۵}{۲}$، در این بازه قرار دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۱۵

گزینه ۲

برای اینکه تابع موردنظر در بازهٔ $[۴, +\infty)$ صعودی باشد، باید دهانه سهمی به‌سمت بالا بوده و طول رأس سهمی کوچک‌تر یا مساوی با ۴ باشد، درنتیجه:

$$\begin{cases} a - ۳ > ۰ \\ -\dfrac{-۱۲}{۲(a-۳)} \le ۴ \xrightarrow{a>۳} ۳ \le ۲a - ۶ \Rightarrow \dfrac{۹}{۲} \le a \end{cases}$$

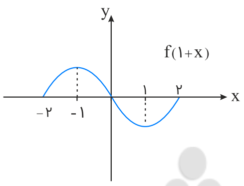
بنابراین کمترین مقدار a برابر $\frac{۹}{۲}$ است.

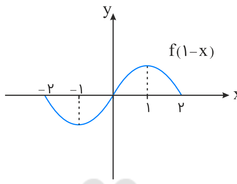
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

۱۶

گزینه ۴

نمودار تابع $y = f(۱-x)$ را با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ رسم می‌کنیم:





برای رسم نمودار $f(۱+x)$، نمودار $f(x)$ را یک واحد به‌سمت چپ می‌بریم و برای رسم نمودار $f(۱-x)$، نمودار تابع $f(۱+x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. مطابق شکل نمودار حاصل در فاصله‌های $[-۲, -۱]$ و $[۱, ۲]$ اکیداً نزولی است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۱۷

گزینه ۲

اگر $x_۱$ و $x_۲$ در بازهٔ $[۱, ۲]$ باشند، داریم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

اما مقادیر $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ بین صفر و ۱ قرار دارند و f در فاصلهٔ صفر تا ۱ نزولی است، پس:

$$f(f(x_۱)) > f(f(x_۲))$$

یعنی $f(f(x))$ نزولی است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۱۸

گزینه ۳

اگر f تابعی صعودی باشد، تابع $-f$ نزولی خواهد بود. همچنین مجموع دو تابع صعودی، تابعی صعودی و مجموع دو تابع نزولی، تابعی نزولی خواهد بود. در این سؤال، تابع f صعودی و تابع g نزولی است. پس تابع $g - f$ قطعاً نزولی است.
تابع گزینهٔ ۴ صعودی است. تابع گزینهٔ ۱ صعودی و تابع گزینهٔ ۲ ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

۱۹ گزینه ۳

اگر $y=f(x)$ اکیداً صعودی باشد، $fof(x)$ نیز اکیداً صعودی است، زیرا:

$$x_۱ > x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲) \Rightarrow fof(x_۱) > fof(x_۲)$$

و اگر $y=f(x)$ اکیداً نزولی باشد، $fof(x)$ باز هم اکیداً صعودی است، زیرا:

$$x_۱ > x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲) \Rightarrow f(f(x_۱)) > f(f(x_۲))$$

در بین گزینه‌ها، گزینهٔ "۳" تابعی اکیداً نزولی است؛ پس نمی‌تواند برابر با $fof(x)$ باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۲۰ گزینه ۲

f اکیداً صعودی و $y=۳-x$ اکیداً نزولی است، پس ترکیب آن‌ها یعنی $f(۳-x)$ نیز اکیداً نزولی است. چون $f(۱)=۰$ است، $x=۱$ صفر تابع $f(x)$ و $x=۲$ صفر تابع $f(۳-x)$ است.

حال برای به دست آوردن دامنهٔ تابع g کافی است جدول تعیین علامتی را تشکیل دهیم. باید داشته باشیم $\dfrac{x-۴}{f(۳-x)} \geq ۰$.

x		۲		۴	
$x-۴$	−		−	۰	+
$f(۳-x)$	+	۰	−		−
$\dfrac{x-۴}{f(۳-x)}$	−	ن ت	+	۰	−

$$\Rightarrow D_g = (۲, ۴]$$

این بازه شامل اعداد صحیح ۳ و ۴ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

۲۱ گزینه ۳

باتوجه‌به آنکه تابع f اکیداً صعودی است، به ازای $x < ۱$ منفی و به ازای $x > ۱$ مثبت است. حال با تعیین علامت عبارت زیر رادیکال داریم:

$$(x^{۳} - x)f(x) \geq ۰$$

$$x^{۳} - x = ۰ \Rightarrow x(x^{۲} - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases}$$

		-۱		۰		۱	
$x^{۳}-x$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$-$		$-$		$-$	۰	$+$
P	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$+$

دامنهٔ $\sqrt{(x^{۳} - x)f(x)}$ برابر با $\mathbb{R} - (-۱, ۰)$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} a = -۱ \\ b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a + b = -۱$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

۲۲ گزینه ۳

$$f(|۳x - ۵|) - f(|۲x + ۳|) \geq ۰ \Rightarrow f(|۳x - ۵|) \geq f(|۲x + ۳|)$$

$$\xrightarrow{\text{f اکیداً نزولی}} |۳x - ۵| \leq |۲x + ۳| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (۳x - ۵)^{۲} \leq (۲x + ۳)^{۲} \Rightarrow (۳x - ۵)^{۲} - (۲x + ۳)^{۲} \leq ۰$$

$$\Rightarrow (۳x - ۵ - ۲x - ۳)(۳x - ۵ + ۲x + ۳) \leq ۰ \Rightarrow (x - ۸)(۵x - ۲) \leq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۵} \leq x \leq ۸ \Rightarrow x = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸ \quad (\text{۸ تا عدد صحیح})$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

۲۳ گزینه ۳

باید داشته باشیم:

$$(f(x))^{۲} - ۲۲۵ \geq ۰ \Rightarrow (f(x) - ۱۵)(f(x) + ۱۵) \geq ۰$$

ازطرفی به‌سادگی رابطهٔ $f(x)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(x) = ۲^{\frac{۱}{x} - ۱} - ۱$$

بنابراین:

$$(f(x) - ۱۵)(f(x) + ۱۵) = \left(۲^{\frac{۱}{x}-۱} - ۱۶\right)\underbrace{\left(۲^{\frac{۱}{x}-۱} + ۱۴\right)}_{\text{همواره مثبت}} \geq ۰$$

$$\Rightarrow ۲^{\frac{۱}{x}-۱} - ۱۶ \geq ۰ \Rightarrow ۲^{\frac{۱}{x}-۱} \geq ۱۶ = ۲^{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{اکیداً صعودی است } ۲^{x}} \frac{۱}{x} - ۱ \geq ۴ \Rightarrow \frac{۱}{x} \geq ۵ \Rightarrow \frac{۱ - ۵x}{x} \geq ۰$$

x		۰		$\frac{۱}{۵}$	
$\frac{۱-۵x}{x}$	-	|	+	۰	-

$$\Rightarrow ۰ < x \leq \frac{۱}{۵}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۱ اگر تابع $f = \{(2, 3a), (2, a-4), (a, 2), (\frac{b}{2}, a^2 - 10)\}$ وارون‌پذیر باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) -2 ۲) -4

۳) -6 ۴) -8

۲ f کدام‌یک از توابع زیر باشد تا f^2 یک تابع یک‌به‌یک باشد؟

۱) $\{(0, 0), (-2, 1), (2, 1)\}$ ۲) $\{(2, 2), (3, 3), (-5, -2)\}$

۳) $\{(-1, 4), (1, 2), (4, -1)\}$ ۴) $\{(3, -2), (-3, 2), (0, 0)\}$

۳ اگر رابطهٔ $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، نمودار تابع $g(x) = ax + b$ محور طول‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $(3, 0)$ ۲) $(-\frac{3}{2}, 0)$

۳) $(-3, 0)$ ۴) $(\frac{3}{2}, 0)$

۴ کدام‌یک از توابع زیر وارون‌پذیر است؟

۱) $y = (x + 5)^2$ ۲) $y = 1 - |x - 1|$

۳) $y = x^2 - 6x + 9$ ۴) $y = \sqrt{x + 2} - 3$

۵ توابع $f(x) = (x - 1)|x|$ و $g(x) = |x - 1| - 2x$ به ترتیب چگونه‌اند؟

۱) وارون‌پذیر - وارون‌پذیر ۲) وارون‌پذیر - وارون‌ناپذیر

۳) وارون‌ناپذیر - وارون‌پذیر ۴) وارون‌ناپذیر - وارون‌ناپذیر

۶ تابع $f(x) = (x - 2)(x - 4) + 2x$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $[0, 3]$ ۲) $[-1, 2]$

۳) $[1, 5]$ ۴) $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$

۷ به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، تابع $f(x) = |2x + a|$ در فاصلهٔ $[-1, 2]$ یک‌به‌یک است؟

۱) $\mathbb{R} - (-1, \frac{1}{2})$ ۲) $[-4, 2]$

۳) $\mathbb{R} - (-4, 2)$ ۴) $[-1, \frac{1}{2}]$

۸ به ازای چه حدودی از a تابع $f\,(x) = ax + |x|$ یک‌به‌یک است؟

۱) $-۱ < a < ۱$ ۲) $-۱ \le a \le ۱$

۳) $a \le -۱$ یا $a \ge ۱$ ۴) $a < -۱$ یا $a > ۱$

۹ اگر تابع $f(x) = (a - ۳)x^{۲} + ۲x - ۳$ بر روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک باشد، مقدار $af(۳)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -۱۲

۳) -۸ ۴) ۹

۱۰ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + ۲} & ; x \ge ۷ \\ \frac{x}{۳} + a & ; x < ۶ \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۱۱ تابع دوضابطه‌ای $y = \begin{cases} x^{۲} - ax + b & ; x \le ۳ \\ -\sqrt{x + ۱} & ; x > ۳ \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حداقل مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴

۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۱۲ هرگاه f تابعی یک‌به‌یک باشد و $f(x + ۲f(x)) = f(۵x + ۲)$، در این صورت نمودار تابع $y = fof(x)$ محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱ گزینه ۴

نکتهٔ ۱: رابطهٔ f که به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها داده شده است در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفهٔ اول برابر نباشد؛ به‌عبارت‌دیگر، اگر مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم برابر باشد.
نکتهٔ ۲: تابع f که به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها داده شده است، در صورتی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفهٔ دوم برابر نباشد؛ به‌عبارت‌دیگر، اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشد.

$$\begin{cases}(۲,۳a)\in f\\(۲,a-۴)\in f\end{cases}\xrightarrow[\text{نکتهٔ ۱}]{\text{f تابع است}} ۳a=a-۴\Rightarrow a=-۲$$

پس:

$$f=\left\{(۲,-۶),\ (-۲,۲),\ (\frac{b}{۲},-۶)\right\}$$

$$\begin{cases}(۲,-۶)\in f\\(\frac{b}{۲},-۶)\in f\end{cases}\xrightarrow[\text{نکتهٔ ۲}]{\text{f یک‌به‌یک است}}\frac{b}{۲}=۲\Rightarrow b=۴$$

بنابراین:

$$ab=-۸$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

۲ گزینه ۳

$f^{۲}$ را برای هریک از گزینه‌ها به دست می‌آوریم:

گزینهٔ ۱ : $f^{۲}=\{(۰,۰),(-۲,۱),(۲,۱)\}$

گزینهٔ ۲ : $f^{۲}=\{(۲,۴),(۳,۹),(-۵,۴)\}$

گزینهٔ ۳ : $f^{۲}=\{(-۱,۱۶),(۱,۴),(۴,۱)\}$

گزینهٔ ۴ : $f^{۲}=\{(۳,۴),(-۳,۴),(۰,۰)\}$

ملاحظه می‌شود فقط $f^{۲}$ مربوط به گزینهٔ ۳ شرایط یک‌به‌یک بودن را دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

۳

گزینه ۲

رابطه‌ای تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند.
باتوجه‌به زوج‌های مرتب $(۳,۲)$ و $(۳,a^۲-a)$، برای تابع بودن باید $a^۲-a=۲$ باشد:

$$a^۲-a-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ & \text{ق.ق} \\ a=-۱ & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

توجه کنید اگر $a=-۱$ باشد، دو زوج مرتب $(-۱,۴)$ و $(-۱,۵)$ عضو f خواهند بود که قابل‌قبول نیست، پس $a=۲$ است.
برای یک‌به‌یک بودن در دو زوج مرتب $(b,۲)$ و $(۳,۲)$، باید $b=۳$ باشد؛ پس:

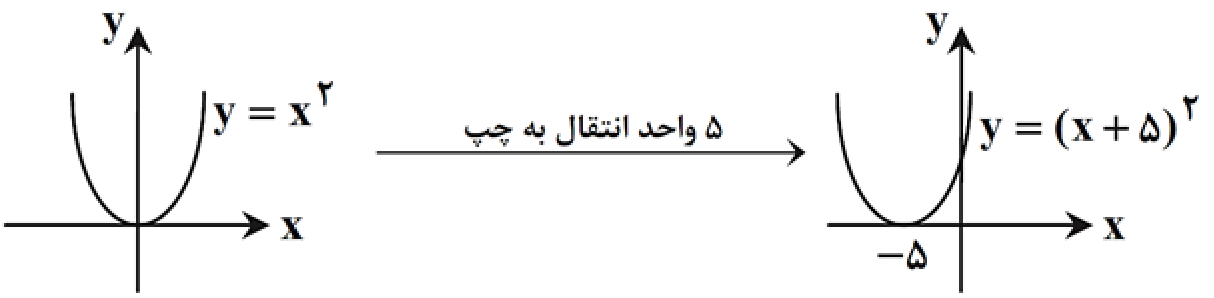
$$g(x)=ax+b=۲x+۳ \xrightarrow{y=۰} ۲x+۳=۰ \Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

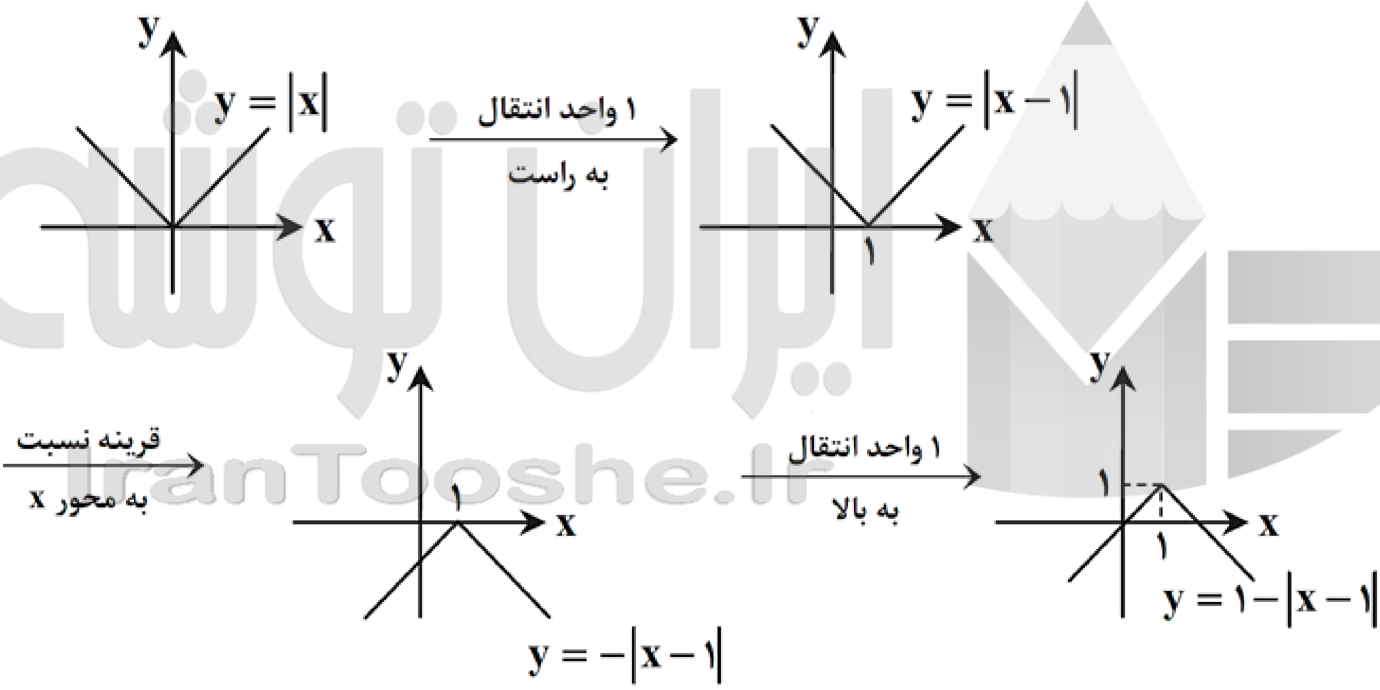
۴ گزینه ۴

نکته: یک تابع در صورتی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد.
نکته: یک تابع در صورتی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
باتوجه‌به نکات بالا، نمودار هریک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم.

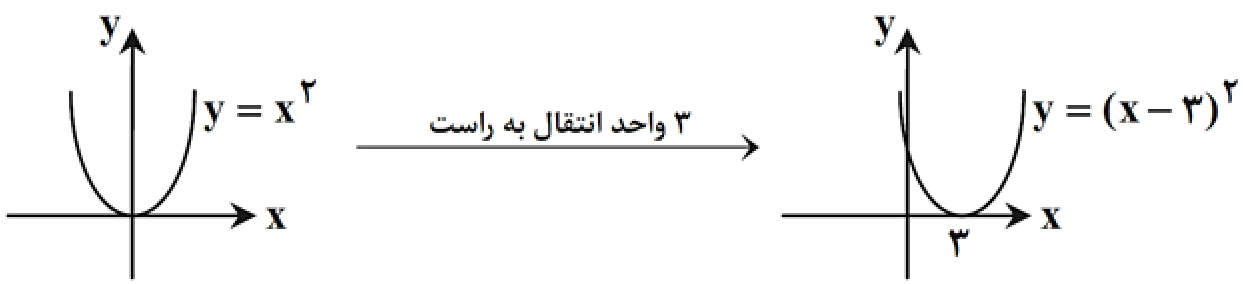
گزینهٔ ۱ : $y = (x + ۵)^{۲}$



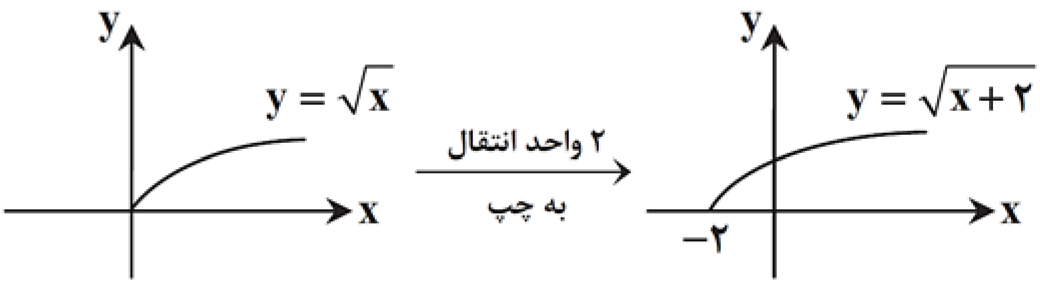
گزینهٔ ۲ : $y = ۱ - |x - ۱|$

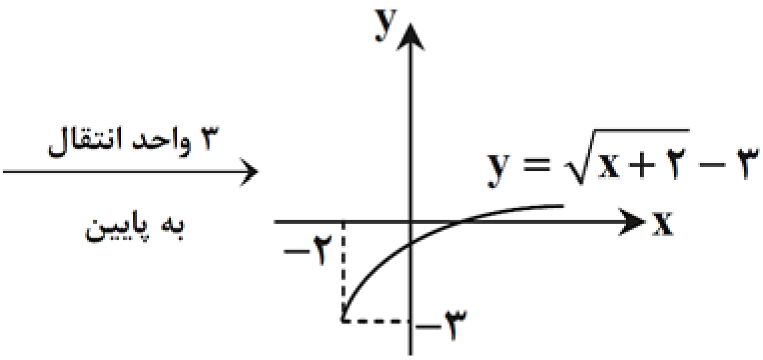


گزینهٔ ۳ : $y = x^{۲} - ۶x + ۹ = (x - ۳)^{۲}$



گزینهٔ ۴ : $y = \sqrt{x + ۲} - ۳$





باتوجه‌به نمودارها، واضح است که گزینهٔ ۴ پاسخ است.

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

۵ | گزینه ۳

شرط وارون‌پذیری یک تابع، یک‌به‌یک بودن آن است؛ پس یک‌به‌یک بودن یا نبودن دو تابع را بررسی می‌کنیم.
تابع یک‌به‌یک تابعی است که به ازای ورودی‌های متمایز (x)، خروجی‌های (y) یکسان ندهد. تابع $f(x)$ یک‌به‌یک نیست، زیرا:

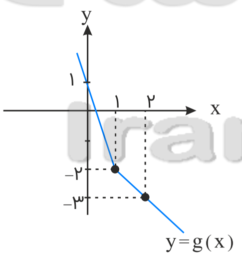
$$\begin{cases} x = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۰ \\ x = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۰ \end{cases} \Rightarrow (۰, ۰), (۱, ۰)$$

برای بررسی یک‌به‌یک بودن تابع $g(x)$ بهتر است نمودار آن را رسم کنیم. اول تابع را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و بعد نمودارش را رسم می‌کنیم.

$$g(x) = \begin{cases} (x - ۱) - ۲x = \underbrace{-x - ۱}_{y_۱} & ; x \geq ۱ \\ -(x - ۱) - ۲x = \underbrace{-۳x + ۱}_{y_۲} & ; x < ۱ \end{cases}$$

x	۱	۲
$y_۱$	-۲	-۳

x	۱	۰
$y_۲$	-۲	۱



باتوجه‌به نمودار تابع $g(x)$ اگر هر خط موازی محور xها رسم کنیم نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع $g(x)$ یک‌به‌یک است. درنتیجه f تابع وارون‌ناپذیر و g تابعی وارون‌پذیر است.

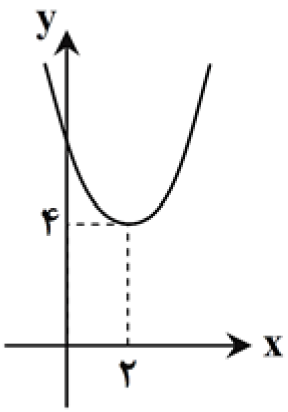
قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۶ گزینه ۲

نکته: تابع $f(x)$ یک‌به‌یک است، اگر هر خطِ موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
ابتدا می‌توان نوشت:

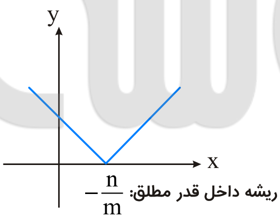
$$f(x) = (x - ۲)(x - ۴) + ۲x = x^۲ - ۶x + ۸ + ۲x = x^۲ - ۴x + ۸ = (x - ۲)^۲ + ۴$$

پس نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است که باتوجه‌به گزینه‌ها، تنها در بازهٔ $[-۱, ۲]$ یک‌به‌یک است.



گزینه دو علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

۷ گزینه ۳



دقت کنید که در نمودار تابع $f(x) = |mx + n|$ نقطهٔ شکستگی نمودار تابع، ریشهٔ داخل قدر مطلق است، پس:
حال برای اینکه f تابعی یک‌به‌یک باشد، باید ریشهٔ داخل قدر مطلق در فاصلهٔ $(-۱, ۲)$ نباشد، پس ابتدا حدود a را طوری می‌یابیم که ریشه در فاصلهٔ $(-۱, ۲)$ باشد سپس مجموعهٔ جواب به‌دست‌آمده را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم:

$$۲x + a = ۰ \Rightarrow x = -\frac{a}{۲} \Rightarrow -۱ < -\frac{a}{۲} < ۲ \xrightarrow{\times(-۲)} -۴ < a < ۲$$

پس مجموعهٔ جواب موردنظر برابر است با:

$$a \in \mathbb{R} - (-۴, ۲)$$

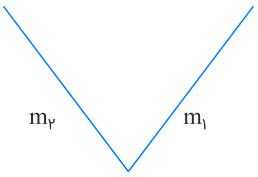
قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶

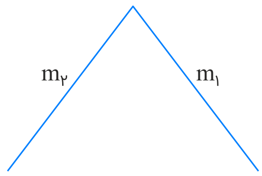
۸ گزینه ۴

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(a+۱\right)x & ;x\geq ۰\Rightarrow m_{۱}=a+۱\\ \left(a-۱\right)x & ;x<۰\Rightarrow m_{۲}=a-۱\end{cases}$$

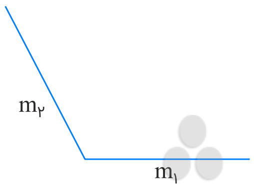
باتوجه‌به ضابطهٔ به‌دست‌آمده در حالت‌های مختلف شیب‌ها، شکل‌های زیر به دست می‌آید.

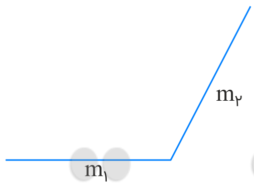
$m_{۱}.m_{۲}<۰:$



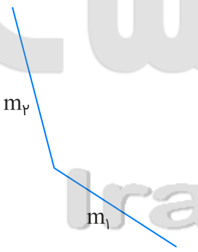


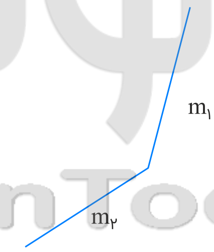
$m_{۱}.m_{۲}=۰$





$m_{۱}.m_{۲}>۰:$





باتوجه‌به شکل‌های رسم‌شده، تابع زمانی یک‌به‌یک است که $m_{۱}m_{۲}>۰$، پس:

$$\left(a+۱\right)\left(a-۱\right)>۰\Rightarrow a>۱ \text{ یا } a<-۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

۹ گزینه ۴

ابتدا توجه کنید که هیچ تابع درجه‌دومی (سهمی شکل) بر روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست، پس می‌توان نتیجه گرفت $a-۳=۰$ یعنی $a=۳$، بنابراین داریم:

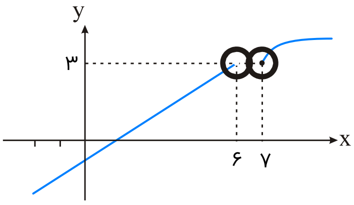
$$f(x)=۲x-۳\Rightarrow af(۳)=۳(۶-۳)=۹$$

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۵

۱۰

گزینه ۲

نمودار تابع $y = \sqrt{x+۲}$ به ازای $x \geq ۷$ به‌صورت زیر است.



حال باید مقدار ضابطهٔ پایینی تابع حداکثر ۳ شود که این مقدار حداکثر باید به ازای $x = ۶$ به دست آید؛ بنابراین:

$$۲ + a \leq ۳ \Rightarrow a \leq ۱ \Rightarrow \max(a) = ۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

۱۱

گزینه ۱

به ازای $x > ۳$، ضابطهٔ تابع، مربوط به تابعی نزولی و یک‌به‌یک است. برای اینکه به ازای $x \leq ۳$ نیز تابع یک‌به‌یک باشد، لازم است رأس سهمی یعنی $x = \frac{a}{۲}$، قبل از ۳ نباشد، یعنی:

$$\frac{a}{۲} \geq ۳ \Rightarrow a \geq ۶$$

شرط دیگر برای یک‌به‌یک بودن تابع این است که مقدار تابع در $x = ۳$ از حد راست تابع در $x = ۳$، بزرگ‌تر یا مساوی باشد، یعنی:

$$۹ - ۳a + b \geq -۲ \Rightarrow b \geq ۳a - ۱۱$$

به ازای $a = ۶$ و $b = ۷$، مقادیر a و b کمترین مقدار خود را خواهند داشت و کمترین مقدار $a + b$ برابر ۱۳ می‌شود.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۵

۱۲

گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه تابع f یک‌به‌یک است، داریم:

$$x + ۲f(x) = ۵x + ۲ \Rightarrow ۲f(x) = ۵x + ۲ - x \Rightarrow ۲f(x) = ۴x + ۲$$

$$\Rightarrow ۲f(x) = ۲(۲x + ۱) \Rightarrow f(x) = ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow fof(x) = f(f(x)) = ۲f(x) + ۱ = ۲(۲x + ۱) + ۱ = ۴x + ۳$$

$$\xrightarrow{\text{نقطهٔ تلاقی با محور yها}} x = ۰ \Rightarrow fof(۰) = ۴(۰) + ۳ = ۳$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

۱ اگر $f = \{(۱,۲), (-۱,۳), (۴,۴), (۳,۵)\}$ باشد، آنگاه تابع $f - f^{-۱}$ از چند زوج مرتب تشکیل شده است؟

۱) ۳ ۲) ۲

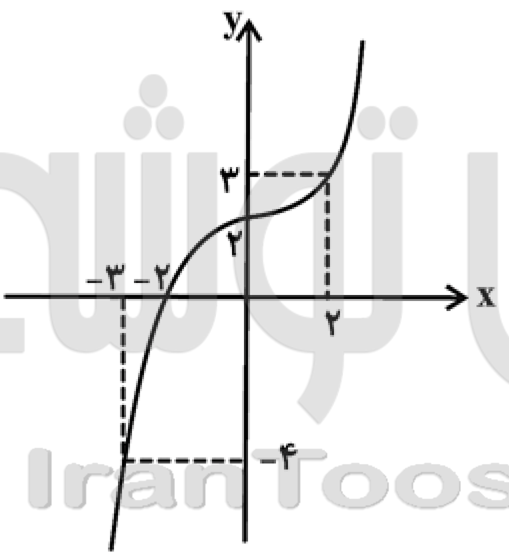
۳) ۴ ۴) ۱

۲ اگر $g(x) = ۳x - ۱$ و $f = \{(۱,۲), (-۱,۱), (۳,۰)\}$، آنگاه $f^{-۱}og(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۳ نمودار تابع $y = -f(x-۱)$ به شکل زیر است. کدام تساوی درست نیست؟



۱) $f^{-۱}(-۳) = ۱$

۲) $f^{-۱}(-۲) = -۱$

۳) $f^{-۱}(۰) = -۳$

۴) $f^{-۱}(۴) = ۴$

۴ اگر $f = \{(۰,-۲), (۳,۲), (a,b)\}$، $g = \{(۵,۱), (۳,۳), (a+۱, ۲b)\}$ و $f^{-۱}og(۳) = -۱$ باشد، مقدار $fog^{-۱}(۶)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) -۳ ۴) -۲

۵ دامنهٔ تابع وارون تابع $y = x^۲ - ۴x + ۵$، $(x \leq ۱)$ کدام است؟

۱) $(-\infty, ۲]$ ۲) $[۲, +\infty)$

۳) $(-\infty, ۱]$ ۴) $[۱, +\infty)$

۶ اگر $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ کدام عدد زیر در دامنهٔ تابع وارون f موجود <u>نیست</u>؟

۱) ۱ ۲) -۱

۳) ۲ ۴) -۲

۷ وارون $f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۱,-۱)$ ۲) $(۱,۲)$

۳) $(-۱,۰)$ ۴) $(-۱,۲)$

۸ اگر $\begin{cases} f^{-۱}:[۲,+\infty)\to\mathbb{R} \\ f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱ \end{cases}$، آنگاه $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶

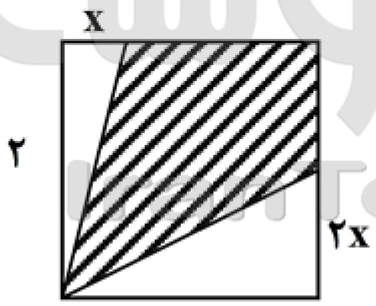
۳) ۴ ۴) ۱۸

۹ تابع f با دامنهٔ $(۲,۳)$ و ضابطهٔ $f(x)=[-x]x+[x]$ تعریف شده است. مقدار $f^{-۱}(-۵)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$

۳) ناموجود ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۰ در مربع شکل زیر، $f(x)$ برابر با مساحت ناحیهٔ هاشورخورده است. مقدار $f^{-۱}(۲)$ کدام است؟ $(۰<x<۱)$



۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۱ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-Ax+۳\ ;\ x>۳$ وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}(-۵)=۴$ باشد، آنگاه $f^{-۱}(-۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۱۲ در تابع $f(x)=x^۳+x+۲$، اگر محل برخورد $f^{-۱}(x)$ با محور xها را A' بنامیم و نقطهٔ A قرینهٔ A' نسبت به خط $y=x$ باشد، آنگاه اندازهٔ پاره‌خط AA' کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

۱۳ نمودار وارون تابع $f(x)=x^3+3x+a$، خط $2x+5y=8$ را در نقطهٔ $A(b,2)$ قطع می‌کند. مقدار a کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۴-
۳) ۱۵
۴) ۱۵-

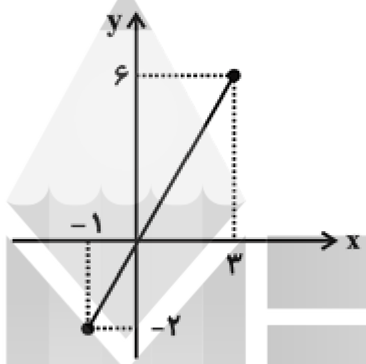
۱۴ اگر دو خط $3x-4y=b$ و $bx+ay=-16$ نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگر باشند، مقدار $b-a$ کدام است؟

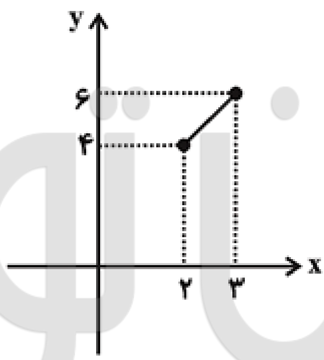
۱) ± 14
۲) ± 2
۳) ± 12
۴) ± 4

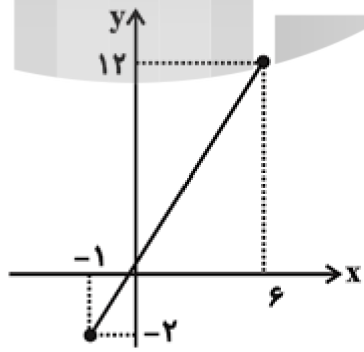
۱۵ اگر در تابع خطی f، $f(2)=4$ و $f^{-1}(-5)=-1$ باشد، مقدار $f^{-1}(3+f(4))$ کدام است؟

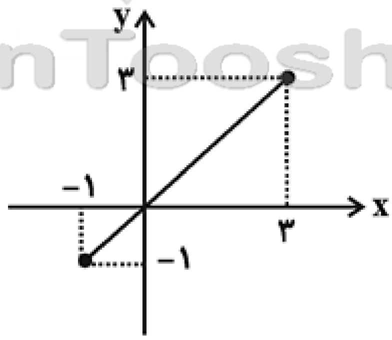
۱) ۵
۲) $\frac{11}{3}$
۳) ۳
۴) ۴/۵

۱۶ f تابعی خطی با دامنهٔ $[-1,3]$ است که از دو نقطهٔ $(-1,2)$ و $(1,4)$ می‌گذرد. نمودار تابع $g(x)=f(x)+f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۷ مساحت مثلث محصور بین نمودار توابع $f(x)=2x-a$ و $f^{-1}(x)$ و محور xها برابر ۲۷ است. نمودار تابع $f(x)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ $(a>0)$

۱) ۶
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۲

۱۸ ضابطهٔ وارون تابع $y = ۲x - ۳\left|x - ۱\right|$ در بازه‌ای که صعودی است، کدام است؟

۱) $y = \dfrac{x+۳}{۵} \ ; x \le ۲$

۲) $y = \dfrac{x+۳}{۵} \ ; x \le ۳$

۳) $y = x - ۳ \ ; x \ge ۲$

۴) $y = x - ۳ \ ; x \ge ۳$

۱۹ تابع معکوس تابع $f\left(x\right) = x - \sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که معکوس‌پذیر است، کدام است؟

۱) $f^{-۱}\left(x\right) = x - ۱ \ ; x \ge -۱$

۲) $f^{-۱}\left(x\right) = \dfrac{x-۱}{۲} \ ; x \le ۱$

۳) $f^{-۱}\left(x\right) = x + ۱ \ ; x \ge -۱$

۴) $f^{-۱}\left(x\right) = \dfrac{x+۱}{۲} \ ; x \le ۱$

۲۰ ضابطهٔ معکوس تابع $y = \left|x^۲ - ۲x\right|$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که صعودی است، کدام است؟

۱) $x \ge ۰ \ ; \ ۱ - \sqrt{۱ + x}$

۲) $x \ge ۱ \ ; \ ۱ - \sqrt{x - ۱}$

۳) $x \ge ۰ \ ; \ ۱ + \sqrt{۱ + x}$

۴) $x \le ۱ \ ; \ ۱ + \sqrt{۱ - x}$

۲۱ ضابطهٔ وارون تابع $y = ۲x + \left|x\right|$ کدام است؟

۱) $y = -\dfrac{۲x + \left|x\right|}{۳}$

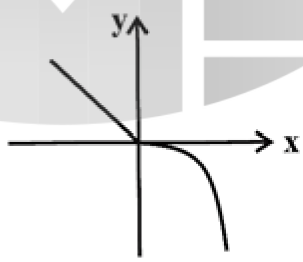
۲) $y = -\dfrac{۲x - \left|x\right|}{۳}$

۳) $y = \dfrac{۲x + \left|x\right|}{۳}$

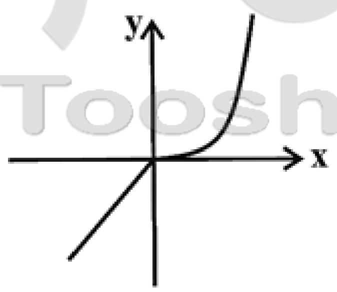
۴) $y = \dfrac{۲x - \left|x\right|}{۳}$

۲۲ نمودار معکوس تابع $f(x) = \begin{cases} -x^۲ & ; x \ge ۰ \\ \left|x\right| & ; x < ۰ \end{cases}$ کدام است؟

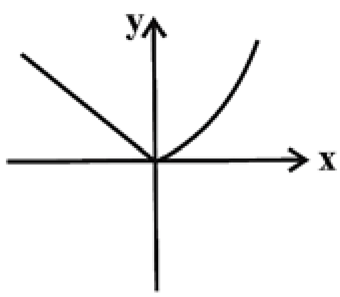
۱)



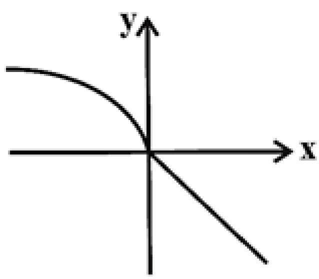
۲)



۳)



۴)



۲۳ تابع $f(x) = x^۲ - ۶x + ۳$ را با دامنهٔ محدودشدهٔ $D_f = \left(-\infty, ۰\right)$ در نظر بگیرید. وارون این تابع در کدام گزینه آمده است؟

۱) $f^{-۱}(x) = ۳ + \sqrt{x + ۶} \ ; x < ۳$

۲) $f^{-۱}(x) = ۳ + \sqrt{x + ۶} \ ; x > ۳$

۳) $f^{-۱}(x) = ۳ - \sqrt{x + ۶} \ ; x < ۳$

۴) $f^{-۱}(x) = ۳ - \sqrt{x + ۶} \ ; x > ۳$

۲۴ تابع وارون تابع $y = x + \sqrt{x}$ به‌صورت $y = (\frac{\sqrt{ax+1}-1}{b})^2$ است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۶

۲۵ نمودار وارون تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+3}$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۲۶ اگر $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ به ازای $x > 0$ تعریف شده باشد، حاصل $f^{-1}(\frac{1}{x}) - f^{-1}(\frac{-1}{x})$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{2}{x}$
۳) $\frac{3x^2+2}{3x}$
۴) $\frac{2}{x}\sqrt{x^2+1}$

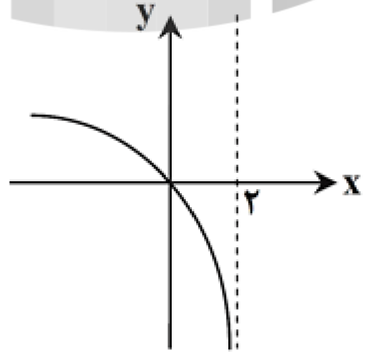
۲۷ دو تابع $g(x) = \frac{x^2+b}{2x}\ ;\ x > 0$ و $f(x) = ax + \sqrt{x^2+1}$ وارون یکدیگرند. حاصل $a + b$ کدام است؟

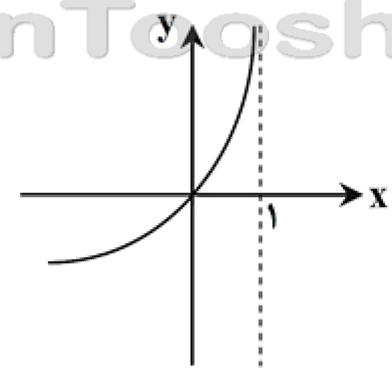
۱) ۲
۲) -۲
۳) ۳
۴) صفر

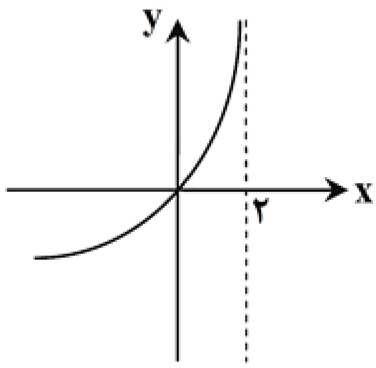
۲۸ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x-2}}$ کدام است؟

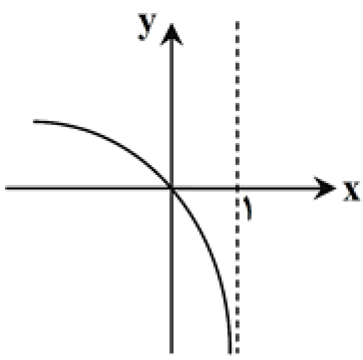
۱) $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 1\ ;\ x \geq 1$
۲) $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 3\ ;\ x \geq 1$
۳) $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 1\ ;\ x \geq 2$
۴) $f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 3\ ;\ x \geq 2$

۲۹ نمودار وارون تابع $f(x) = 1 - 2^{-x}$ شبیه کدام گزینه است؟

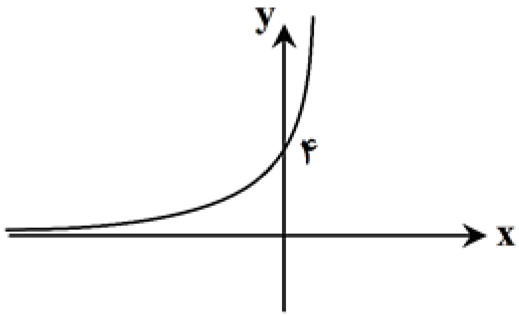
۱)


۲)


۳)


۴)


۳۰ اگر نمودار f به شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f^{-۱}(۳x - ۲)}$ کدام است؟



۱) $[۴, +\infty)$

۲) $(۰, ۴]$

۳) $[۲, +\infty)$

۴) $(۰, ۲]$

۳۱ اگر $f(x) = ۳ - ۲x$ باشد، دامنهٔ تعریف $y = \sqrt{f^{-۱}(۲x^۲ + ۳) - x}$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $[۰, ۱]$
۲) $[-۱, ۰]$

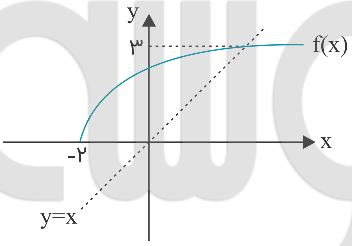
۳) $[-۱, ۱]$
۴) $[-۲, ۱]$

۳۲ اگر $f(x) = x^۳ + x + ۱$ باشد، آنگاه در کدام بازه، تابع $y = (f - f^{-۱})(x)$ بالای محور xها قرار دارد؟

۱) $(-۲, ۰)$
۲) $(-۱, +\infty)$

۳) $(-۴, ۱)$
۴) $(-\infty, ۱)$

۳۳ اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر باشد، دامنهٔ $\sqrt{\dfrac{x}{x - f^{-۱}(x)}}$ کدام است؟



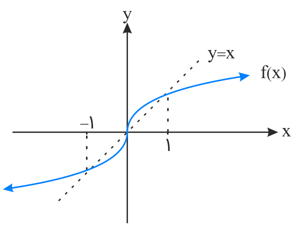
۱) $(-۲, ۰) \cup (۳, +\infty)$

۲) $[-۲, ۰] \cup [۳, +\infty)$

۳) $[۰, ۳)$

۴) $[۰, ۳]$

۳۴ نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر است. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{\dfrac{f(x) - f^{-۱}(x)}{x^۲ - ۱}}$ کدام است؟



۱) $[۰, ۱)$

۲) $(-\infty, ۰] - \{-۱\}$

۳) $(-۱, ۰]$

۴) $[۰, +\infty) - \{۱\}$

۳۵ اگر $f(x) = \frac{۲x+۵}{x+k}$ و $fof(x) = x$ باشد، مقدار $f(k)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۹}{۴}$
۴) $-\frac{۹}{۴}$

۳۶ دوتایی مرتب $(a\ ,\ b)$ کدام می‌تواند باشد تا نمودار وارون تابع $y = \frac{۲x}{a} - b$ بر خود تابع منطبق نباشد؟

۱) $(۲\ ,\ ۰)$ ۲) $(-۲\ ,\ ۰)$

۳) $(-۲\ ,\ ۵)$ ۴) $(۲\ ,\ ۵)$

۳۷ اگر تابع $f(x) = ax + ۲$ با وارونش در بیش از یک نقطه تقاطع داشته باشند، مقدار $f^{-۱}(۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱-

۳) ۵ ۴) ۵-

۳۸ اگر نمودار تابع خطی f، نمودار وارون خود را فقط در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند و $f(۱) = ۲$ باشد، نمودار تابع $f^{-۱}$ محور xها را در کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۳۹ در تابع خطی f، اگر $f(۲) = ۵$ و نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ غیرمتقاطع باشند، آنگاه $f(۴)$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۴۰ نمودار $f(x) = \sqrt{x + a}$، نمودار $f^{-۱}(x)$ را در دو نقطه قطع می‌کند. حدود a کدام است؟

۱) $a > -\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴} < a \leq ۰$

۳) $۰ \leq a < \frac{۱}{۴}$ ۴) $a > \frac{۱}{۴}$

۴۱ اگر محل برخورد نمودار تابع $f(x) = ۲x - |x| + ۱$ با نمودار تابع وارونش، نقطهٔ $A(a, b)$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

۴۲ اگر $f(x) = \frac{۲x + ۴}{x - ۱}$ باشد، آنگاه مجموع طول نقاط برخورد نمودار تابع f با نمودار وارون آن کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) -۴

۴۳ مجموعهٔ طول نقاط مشترک نمودار توابع $f\ (x) = \sqrt[۳]{۴ - x^۳}$ و $f^{-۱}\ (x)$، چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) این مجموعه نامتناهی است.

۴۴ نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$، در چند نقطه خط $y=۳x$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

۴۵ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-x+۵$ و دامنهٔ $D_f=[۱,+\infty)$ مفروض است. وارون این تابع محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۵ ۲) $\frac{۱+\sqrt{۲۶}}{۲}$

۳) $\frac{۱-\sqrt{۲۶}}{۲}$ ۴) نقطهٔ برخورد ندارد.

۴۶ وارون تابع $y=\frac{۲x-۱}{x-۲}$، نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم را در نقاط A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$

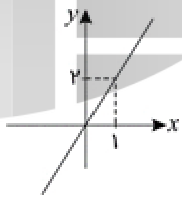
۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

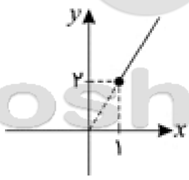
۴۷ اگر $f(x)=۴-\sqrt{x-۳}$ باشد، طول نمودار رسم‌شدهٔ تابع $g(x)=fof^{-۱}(x)+f^{-۱}of(x)$ برابر با کدام گزینه است؟

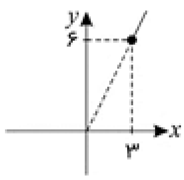
۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$

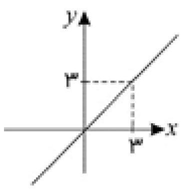
۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

۴۸ با فرض آنکه $f(x)=۴\sqrt{x-۱}+۳$، نمودار تابع $y=۲f(f^{-۱}(x))$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۹ اگر $f^{-۱}(x)-f(۴)=x+۶$ و $f(x)$ یک تابع خطی باشد، آنگاه $f(۴)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱-

۳) ۱۱ ۴) ۱۱-

۵۰ اگر به ازای هر عدد حقیقی x ، $(gof)^{-۱}(۲x-۱)=x$ و $f(x)=x^۳+۲$ باشد، مقدار $g^{-۱}(۳)$ کدام است؟ (f و g معکوس‌پذیرند و $D_g=\mathbb{R}$)

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۴
۴) ۸

۵۱ اگر نمودار تابع $y=۲f^{-۱}(x-۱)+۳$ از نقطهٔ $(۳,۷)$ بگذرد، کدام نقطهٔ زیر، قطعاً روی نمودار تابع $y=f(x+۱)$ قرار ندارد؟

۱) $(۳,۲)$
۲) $(۲,۴)$
۳) $(۱,۲)$
۴) $(۳,۴)$

۵۲ در تابع خطی f رابطهٔ $۴f(۲x)=f(۸x-۱)-۵$ برقرار است. اگر $f^{-۱}(۳)=۵$ باشد، مقدار m از تساوی $f^{-۱}(m)=۲$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

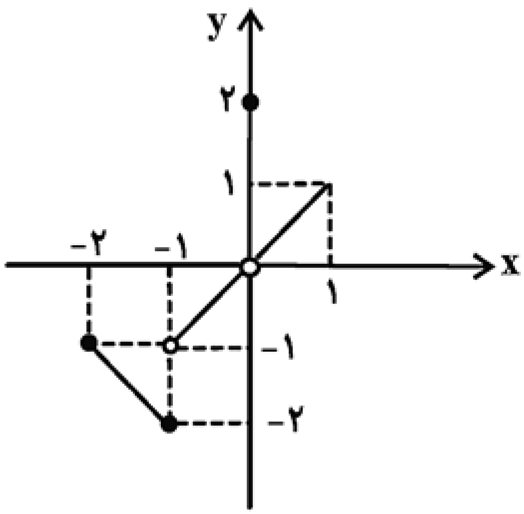
۵۳ اگر f تابعی یک‌به‌یک، $f(-۲)=\frac{۵}{۳}$ و $g(x)=۲-۳f(۵x-۱)$ باشد، حاصل $g^{-۱}(-۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$
۲) $-\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۵}$
۴) $-\frac{۱}{۵}$

۵۴ دو تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۶),(۴,۷)\}$ و $g(x)=x+\sqrt{x}$ مفروض‌اند. به ازای چند مقدار a، $f^{-۱}(g(۳a))=۳$ است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۵۵ اگر $f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۱-۲x}$ و نمودار تابع $y=g(x)$ به‌صورت زیر باشد، در این صورت به ازای چه مقداری از a، $f(g^{-۱}(a))=۱$ است؟



۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) صفر

۵۶ اگر به ازای هر عدد حقیقی داشته باشیم: $(fog)^{-1}(۲x-۴)=\frac{x}{۲}$ و $g(x)=۲x^۳+۱$، آنگاه نمودار وارون تابع $f(x)$، محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۷ برد تابع $f(x)=۲^{x+۱}$ را به بازهٔ $(a,b]$ محدود کرده‌ایم تا برای تابع $g(x)=\sqrt{۶-۲x}$ ترکیب $gof^{-۱}$ تعریف شود. حداکثر مقدار $(b-a)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۶

۵۸ اگر $(fog^{-۱})(x)=\sqrt[۳]{۲x^۵+۱}$ باشد، حاصل $(gof^{-۱})(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{(x-۱)^۳}{۲}$
۲) $۱-f^{-۱}(\sqrt[۵]{x-۱})$
۳) $\sqrt[۵]{\frac{x^۳-۱}{۲}}$
۴) $۱-g^{-۱}(\sqrt[۵]{x-۱})$

۵۹ اگر $f(x)=x+۲$ و $g(x)=۲x^۲-۸x+۱$ باشند، آنگاه حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ $gof^{-۱}(x)=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲۵}{۲}$
۲) $\frac{۲۵}{۲}$
۳) ۸
۴) -۸

۶۰ اگر $f=\{(۰,-۱),(۱,۲),(-۲,۳),(۳,۱),(۲,۵)\}$ و $g=\{(۱,-۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$ باشد، آنگاه مجموع اعضای برد تابع $(gof^{-۱})^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱ گزینه ۲

اگر در تابع وارون‌پذیر f داشته باشیم، $(a,b)\in f$ آنگاه $(b,a)\in f^{-1}$.

$$f=\{(۱,۲),(-۱,۳),(۴,۴),(۳,۵)\}$$
$$\Rightarrow D_f=\{۱,-۱,۴,۳\}$$
$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,-۱),(۴,۴),(۵,۳)\}$$
$$\Rightarrow D_{f^{-۱}}=\{۲,۳,۴,۵\}$$
$$D_{f-f^{-۱}}=D_f\cap D_{f^{-۱}}=\{۱,-۱,۴,۳\}\cap\{۲,۳,۴,۵\}=\{۳,۴\}$$

بنابراین تابع $f-f^{-۱}$ شامل دو زوج مرتب است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

۲ گزینه ۱

$$f^{-۱}og(۱)=f^{-۱}(g(۱))=f^{-۱}(\underbrace{۳\times ۱-۱}_{۲})=f^{-۱}(۲)\xrightarrow{(۱,۲)\in f}f^{-۱}(۲)=۱$$

نکته: وقتی $(a,b)\in f$ است، یعنی $f(a)=b$ یا معادلاً $f^{-۱}(b)=a$ است.

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۴

۳ گزینه ۴

باتوجه‌به نمودار تابع $g(x)=-f(x-۱)$ داریم:

$$g(۲)=۳\Rightarrow -f(۲-۱)=۳\Rightarrow f(۱)=-۳\Rightarrow f^{-۱}(-۳)=۱$$
$$g(۰)=۲\Rightarrow -f(۰-۱)=۲\Rightarrow f(-۱)=-۲\Rightarrow f^{-۱}(-۲)=-۱$$
$$g(-۲)=۰\Rightarrow -f(-۲-۱)=۰\Rightarrow f(-۳)=۰\Rightarrow f^{-۱}(۰)=-۳$$
$$g(-۳)=-۴\Rightarrow -f(-۳-۱)=-۴\Rightarrow f(-۴)=۴\Rightarrow f^{-۱}(۴)=-۴$$

ی تساوی $f^{-۱}(۴)=۴$ درست نیست.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۴ گزینه ۴

نکته: $f(\alpha)=\beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta)=\alpha$

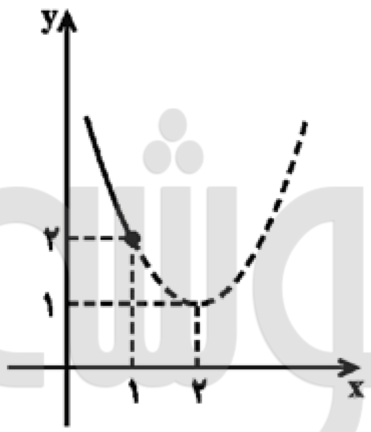
$$f^{-1}og(۳)=-۱ \Rightarrow f^{-1}(g(۳))=-۱ \xrightarrow{g(۳)=۳} f^{-1}(۳)=-۱ \Rightarrow f(-۱)=۳ \Rightarrow (-۱,۳)\in f \Rightarrow (a,b)=(-۱,۳)$$
$$\Rightarrow a=-۱, b=۳ \Rightarrow g=\{(۵,۱),(۳,۳),(۰,۶)\}$$
$$fog^{-1}(۶)=f(g^{-1}(۶))=f(۰)=-۲$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

۵ گزینه ۲

دامنهٔ تابع وارون با برد تابع اصلی برابر است، پس برد تابع با ضابطهٔ $y=x^۲-۴x+۵$ را با شرط $x\leq ۱$ به دست می‌آوریم. برای این منظور، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$y=x^۲-۴x+۵=(x^۲-۴x+۴)+۱ \Rightarrow y=(x-۲)^۲+۱$$



همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، با شرط $x\leq ۱$، برد تابع بازهٔ $[۲,+\infty)$ است که همان دامنهٔ تابع وارون است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

۶

گزینه ۳

راه‌حل اول:

می‌دانیم:

$$D_f = R_{f^{-۱}} \qquad , \qquad R_f = D_{f^{-۱}}$$

بنابراین باتوجه‌به برد تابع f به‌راحتی می‌توان فهمید کدام عدد در دامنهٔ $f^{-۱}$ وجود ندارد.

$$D_f : x \neq ۱$$

$$y = \frac{۲x+۱}{x-۱} = \frac{۲x-۲+۳}{x-۱} = \frac{۲(x-۱)+۳}{x-۱} \Rightarrow f(x) = ۲ + \frac{۳}{x-۱}$$

باتوجه‌به اینکه $\frac{۳}{x-۱}$ همواره مخالف صفر است، بنابراین $f(x) \neq ۲$ است؛ پس در دامنهٔ تابع $f^{-۱}$، ۲ وجود نخواهد داشت.

راه‌حل دوم:

ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{۲x+۱}{x-۱} \Rightarrow yx - y = ۲x + ۱ \Rightarrow yx - ۲x = y + ۱$$

$$x(y-۲) = y + ۱ \Rightarrow x = \frac{y+۱}{y-۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x+۱}{x-۲} \Rightarrow x \neq ۲$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

۷

گزینه ۲

اگر $(a,b) \in f$، آنگاه $(b,a) \in f^{-۱}$ است، پس داریم:

$$x = ۲ \Rightarrow f(۲) = ۲ - \sqrt{۳-۲} = ۲ - ۱ = ۱$$
$$\Rightarrow (۲,۱) \in f \Rightarrow (۱,۲) \in f^{-۱}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

۸

گزینه ۲

عدد ۳ ورودی f می‌باشد؛ بنابراین خروجی $f^{-۱}$ خواهد بود، پس:

$$f^{-۱}(x) = ۳ \Rightarrow \sqrt{x-۲} + ۱ = ۳ \Rightarrow \sqrt{x-۲} = ۲ \Rightarrow x - ۲ = ۴ \Rightarrow x = ۶$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ تابستان ۱۳۹۸

۹ گزینه ۲

وقتی $۲ < x < ۳$ باشد، $-۳ < -x < -۲$ است و داریم:

$$[x] = ۲\ ,\ [-x] = -۳ \Rightarrow f(x) = -۳x + ۲$$

برای محاسبهٔ $f^{-۱}(-۵)$ باید $f(x)$ را مساوی ۵- قرار دهیم:

$$-۳x + ۲ = -۵ \Rightarrow ۳x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۳} \Rightarrow f(\frac{۷}{۳}) = -۵ \Rightarrow f^{-۱}(-۵) = \frac{۷}{۳}$$

توجه: اگر مقدار x بین ۲ و ۳ نمی‌شد باید "ناموجود" را انتخاب می‌کردیم.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

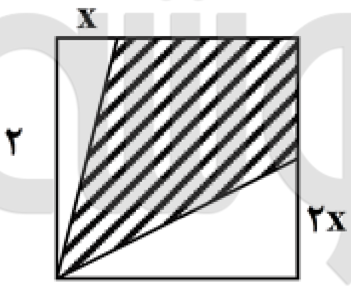
۱۰ گزینه ۲

نکته: مساحت مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمهٔ a و b برابر با $\frac{۱}{۲}ab$ است.

نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آنگاه:

$$f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-۱}(\beta) = \alpha$$

اگر مساحت دو ناحیه‌ای را که هاشور ندارد از مساحت مربع کم کنیم، مساحت ناحیهٔ هاشورخورده به دست می‌آید.



$$f(x) = ۲^۲ - \frac{۱}{۲} \times ۲ \times x - \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲x = ۴ - ۳x$$

با فرض $f^{-۱}(۲) = \alpha$ داریم:

$$f(\alpha) = ۲ \Rightarrow ۴ - ۳\alpha = ۲ \Rightarrow ۳\alpha = ۲ \Rightarrow \alpha = \frac{۲}{۳}$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

۱۱ گزینه ۳

اگر دو تابع f و f^{-1} وارون هم باشند، آنگاه:

$$(a,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in f^{-1}$$

بنابراین:

$$f^{-1}(-5) = 4 \Rightarrow f(4) = -5$$

$$f(4) = 4^2 - 4A + 3 = -5 \Rightarrow A = 6$$

بنابراین $f(x) = x^2 - 6x + 3$. برای محاسبهٔ $f^{-1}(-2)$ خواهیم داشت:

$$f^{-1}(-2) = a \Leftrightarrow -2 = f(a)$$

$$\Rightarrow -2 = a^2 - 6a + 3 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-5) = 0 \xrightarrow{x>3} a = 5 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 5$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۲

نقطهٔ A قرینهٔ A' نسبت به خط $y = x$ است، پس اگر A' نقطه‌ای روی تابع $f^{-1}(x)$ باشد، نقطهٔ متناظرش یعنی نقطهٔ A روی تابع $f(x)$ است که جای طول و عرض آن عوض شده است؛ بنابراین:

$$f(x) = x^3 + x + 2 \xrightarrow{x=0} y = 2 \Rightarrow A(0,2) \Rightarrow A'(2,0)$$

$$AA' = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

۱۳ گزینه ۴

مختصات نقطهٔ $A(b,2)$ در معادلهٔ $2x + 5y = 8$ صدق می‌کند، پس:

$$2b + 10 = 8 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow A(-1,2)$$

$$A(-1,2) \in f^{-1} \Rightarrow A'(2,-1) \in f$$

$$\Rightarrow f(2) = 8 + 6 + a = 14 + a = -1 \Rightarrow a = -15$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۱

نکتهٔ ۱: اگر f یک تابع یک‌به‌یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است، قرینهٔ f را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به دست آوریم.

: برای به دست آوردن ضابطهٔ وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f ، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y حساب می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

مطابق نکتهٔ ۱، چون این دو خط نسبت به خط $y = x$ قرینهٔ یکدیگر هستند، پس معکوس یکدیگرند؛ لذا به کمک نکتهٔ ۲، معکوس خط $۳x - ۴y = b$ را به دست می‌آوریم:

$$۳x - ۴y = b \Rightarrow ۳x = b + ۴y \Rightarrow x = \frac{b + ۴y}{۳} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{b + ۴x}{۳} \Rightarrow y = \frac{۴}{۳}x + \frac{b}{۳}$$

ازطرفی:

$$bx + ay = -۱۶ \Rightarrow y = \frac{-bx - ۱۶}{a} \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x - \frac{۱۶}{a}$$

از مقایسهٔ دو معادلهٔ خط نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{۴}{۳} = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -\frac{۴}{۳}a \quad (۱) \\ -\frac{۱۶}{a} = \frac{b}{۳} \Rightarrow ab = -۴۸ \quad (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری (۱) در (۲)}} -\frac{۴}{۳}a^{۲} = -۴۸ \Rightarrow a^{۲} = ۳۶ \Rightarrow a = \pm ۶ \xrightarrow{(۱)} b = \pm ۸$$

بنابراین:

$$b - a = \pm ۱۴$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

۱۵ گزینه ۱

نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(a)=b$، آنگاه: $f^{-1}(b)=a$

نکته: فرم کلی تابع خطی به‌صورت $y=ax+b$ است.

فرض کنیم ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=ax+b$ باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} f(۲)=۴ \Rightarrow ۲a+b=۴ \\ f^{-۱}(-۵)=-۱ \Rightarrow f(-۱)=-۵ \Rightarrow -a+b=-۵ \end{cases} \Rightarrow a=۳\ ,\ b=-۲$$

بنابراین ضابطهٔ این تابع خطی به‌صورت $f(x)=۳x-۲$ است. برای به دست آوردن مقدار خواسته‌شده ابتدا مقدار $f(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(۴)=۳\times۴-۲=۱۰ \Rightarrow f^{-۱}(۳+f(۴))=f^{-۱}(۳+۱۰)=f^{-۱}(۱۳)$$

راه‌حل اول:

اگر فرض کنیم $f^{-۱}(۱۳)=t$، می‌توان نتیجه گرفت $f(t)=۱۳$، بنابراین:

$$۳t-۲=۱۳ \Rightarrow ۳t=۱۵ \Rightarrow t=۵$$

راه‌حل دوم:

نکته: برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند $f(x)$، از رابطهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم و سپس با تبدیل x به y و y به x، ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم.

با استفاده از نکته، معکوس تابع خطی $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=۳x-۲ \Rightarrow y+۲=۳x \Rightarrow x=\frac{y+۲}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۲}{۳}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۱۳)=\frac{۱۳+۲}{۳}=۵$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

۱۶ گزینه ۲

معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(-۱,۲)$ و $(۱,۴)$ را می‌نویسیم.

$$m=\frac{۴-۲}{۱+۱}=۱\ ,\ y-۲=۱(x+۱) \Rightarrow y=x+۳ \Rightarrow f(x)=x+۳$$

ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$y=x+۳ \Rightarrow x=y-۳ \Rightarrow f^{-۱}(x)=x-۳$$

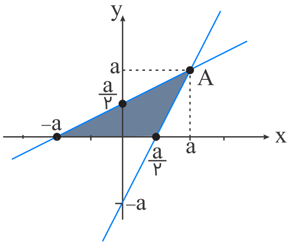
دامنهٔ $f^{-۱}$ همان برد f است.

$$D_{f^{-۱}}=R_f=[f(-۱),f(۳)]=[۲,۶]$$
$$D_g=D_{f+f^{-۱}}=D_f\cap D_{f^{-۱}}=[-۱,۳]\cap[۲,۶]=[۲,۳]$$
$$g(x)=(x+۳)+(x-۳)=۲x$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۷

۱۷ گزینه ۲

ابتدا نقطهٔ تقاطع دو تابع f و f^{-1} را می‌یابیم:



$$y = f(x) = ۲x - a \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+a}{۲}$$

$$۲x - a = \frac{x+a}{۲} \Rightarrow x = a \Rightarrow y = a \Rightarrow A(a, a)$$

$$S = \frac{\frac{۳a}{۲} \times a}{۲} = ۲۷ \Rightarrow a^{۲} = ۳۶ \Rightarrow a = ۶$$

$$f(x) = ۲x - ۶$$

$$۲x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۳$$

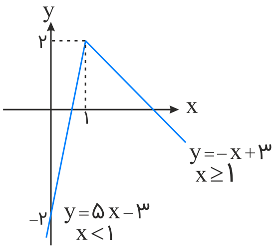
بنابراین نمودار تابع $f(x)$ محور طول‌ها را در $x = ۳$ قطع می‌کند.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

۱۸ گزینه ۱

تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق، نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}2x-3x+3=-x+3 & ;x\geq 1\\ 2x+3x-3=5x-3 & ;x<1\end{cases}$$



پس تابع در بازهٔ $(-\infty,1]$ صعودی است و داریم:

$$y=5x-3\xrightarrow{\text{وارون}}x=5y-3\Rightarrow y=\frac{x+3}{5}$$

که باتوجه‌به برد تابع اولیه در این بازه، دامنهٔ تابع معکوس $x\leq 2$ است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۱۹ گزینه ۴

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x-\sqrt{x^2-2x+1}=x-\sqrt{(x-1)^2}=x-|x-1|$$

$$\Rightarrow y=\begin{cases}x-x+1=1 & ;x>1\\ x+x-1=2x-1 & ;x\leq 1\end{cases}$$

تابع به ازای $x>1$ یک تابع ثابت و درنتیجه معکوس‌ناپذیر است. بنابراین معکوس تابع را به ازای $x\leq 1$ محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}\ \text{دامنهٔ}=f\ \text{برد}:x\leq 1\Rightarrow 2x\leq 2\Rightarrow 2x-1\leq 1$$

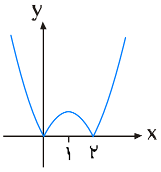
$$\Rightarrow f^{-1}\ \text{دامنهٔ}=\{x|x\leq 1\}$$

$$y=2x-1\Rightarrow y+1=2x\Rightarrow x=\frac{y+1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}\quad ;x\leq 1$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۷

۲۰ گزینه ۳



مطابق شکل این تابع در $[2,+\infty)$ صعودی است (البته در $(0,1)$ هم صعودی است ولی بزرگ‌ترین بازه نیست).

$$x>2: y=x^2-2x \Rightarrow y=x^2-2x+1-1$$
$$=(x-1)^2-1 \Rightarrow y+1=(x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+1}=x-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+1}$$

از طرفی $\sqrt{y+1}=x-1 \xrightarrow{x\geq 2} \sqrt{y+1}\geq 1 \Rightarrow y\geq 0$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۷

۲۱ گزینه ۴

$$y=\begin{cases}x & ;x<0\\ 3x & ;x\geq 0\end{cases} \Rightarrow \text{تابع وارون}: y=\begin{cases}x & ;x<0\\ \frac{1}{3}x & ;x\geq 0\end{cases}$$

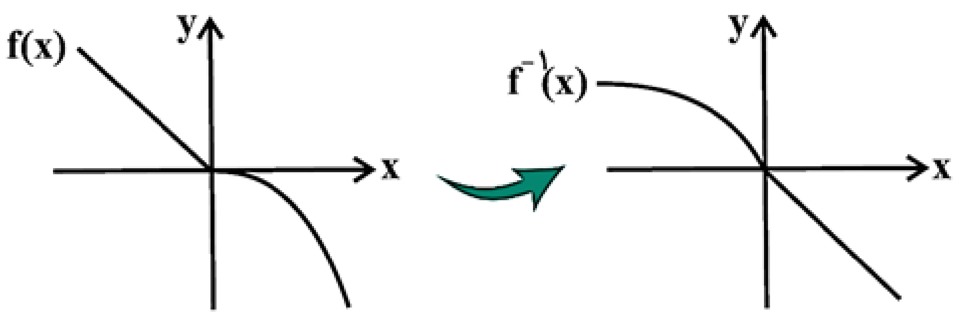
$$\Rightarrow \text{تابع وارون}: y=\frac{2x-|x|}{3}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۲۲ گزینه ۴

نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند.

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & ;x\geq 0\\ |x| & ;x<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x^2 & ;x\geq 0\\ -x & ;x<0\end{cases}$$



قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

۲۳ گزینه ۴

برای یافتن وارون تابع f باید x را برحسب y به دست آوریم:

$$x^{۲} - ۶x + ۳ = y \xrightarrow{+۶} x^{۲} - ۶x + ۹ = y + ۶$$
$$\Rightarrow (x - ۳)^{۲} = y + ۶ \Rightarrow x - ۳ = \pm\sqrt{y + ۶}$$

باتوجه‌به دامنهٔ داده‌شده، x منفی است، پس $x - ۳$ نیز منفی است؛ پس در عبارت بالا فقط علامت منفی پشت رادیکال موردقبول است:

$$x - ۳ = -\sqrt{y + ۶} \Rightarrow x = ۳ - \sqrt{y + ۶} \quad (*)$$

چون طبق دامنهٔ محدودشده داریم $x < ۰$، پس:

$$۳ - \sqrt{y + ۶} < ۰ \Rightarrow ۳ < \sqrt{y + ۶} \Rightarrow ۹ < y + ۶ \Rightarrow y > ۳ \quad (**)$$

روابط $(*)$ و $(**)$ ضابطه و دامنهٔ وارون تابع f را مشخص می‌کنند:

$$f^{-۱}(x) = ۳ - \sqrt{x + ۶} \;; x > ۳$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

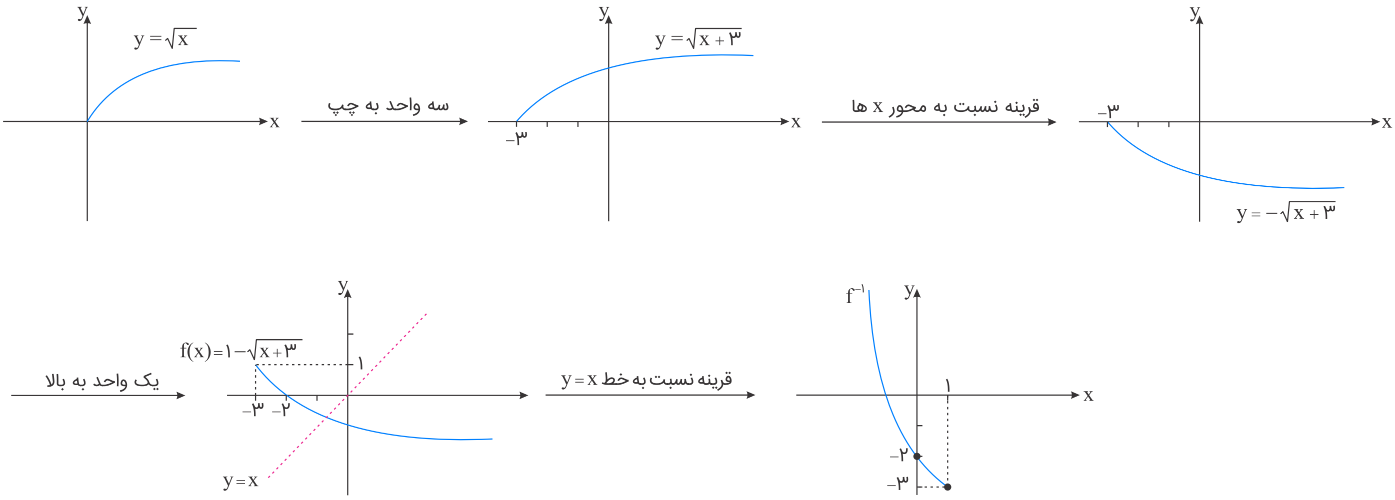
۲۴ گزینه ۲

$$f(x) = y = x + \sqrt{x} = (\sqrt{x} + \frac{۱}{۲})^{۲} - \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۴y + ۱}{۴} = (\sqrt{x} + \frac{۱}{۲})^{۲}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} + \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۴y + ۱}}{۲} \Rightarrow x = (\frac{\sqrt{۴y + ۱} - ۱}{۲})^{۲}$$
$$\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y را}} y = (\frac{\sqrt{۴x + ۱} - ۱}{۲})^{۲} = f^{-۱}(x)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = ۲$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۲۵ گزینه ۱

نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+3}$ را با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم می‌کنیم و سپس نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست آید:



پس f^{-1} از ناحیهٔ اول عبور نمی‌کند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸

۲۶ گزینه ۲

ابتدا معکوس تابع $y = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ را می‌یابیم.

$$y = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) \Rightarrow 2y = \frac{x^2 - 1}{x} \Rightarrow x^2 - 2xy - 1 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{درجه ۲}]{\text{حل معادلهٔ}} x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{x>0\ \text{چون}} x = \sqrt{y^2 + 1} + y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \\ f^{-1}(\frac{-1}{x}) = \frac{-1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\frac{1}{x}) - f^{-1}(\frac{-1}{x}) = \frac{2}{x}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

۲۷ گزینه ۴

در تابع وارون می‌دانیم که:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-۱}(b) = a$$

در این مسئله f و g وارون یکدیگرند. با انتخاب دو عدد مناسب داریم:

$$f(۰) = ۱ \Leftrightarrow f^{-۱}(۱) = ۰ \Rightarrow g(۱) = ۰ \Rightarrow \frac{۱+b}{۲} = ۰ \Rightarrow b = -۱$$

$$g(۲) = \frac{۴+(-۱)}{۲ \times ۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow f(\frac{۳}{۴}) = ۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴}a + \sqrt{\frac{۹}{۱۶}+۱} = ۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴}a + \frac{۵}{۴} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}a = \frac{۳}{۴} \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow a + b = ۰$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

۲۸ گزینه ۲

$$D_f = [۲, +\infty)$$

$$\sqrt{x-۲} \geq ۰ \Rightarrow ۱ + \sqrt{x-۲} \geq ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{۱+\sqrt{x-۲}} \geq \sqrt[۳]{۱} = ۱ \Rightarrow R_f = [۱, +\infty)$$

$$y = f(x) = \sqrt[۳]{۱+\sqrt{x-۲}} \Rightarrow y^۳ = ۱ + \sqrt{x-۲}$$

$$\Rightarrow (y^۳ - ۱)^۲ = x - ۲ \Rightarrow y^۶ - ۲y^۳ + ۱ = x - ۲$$

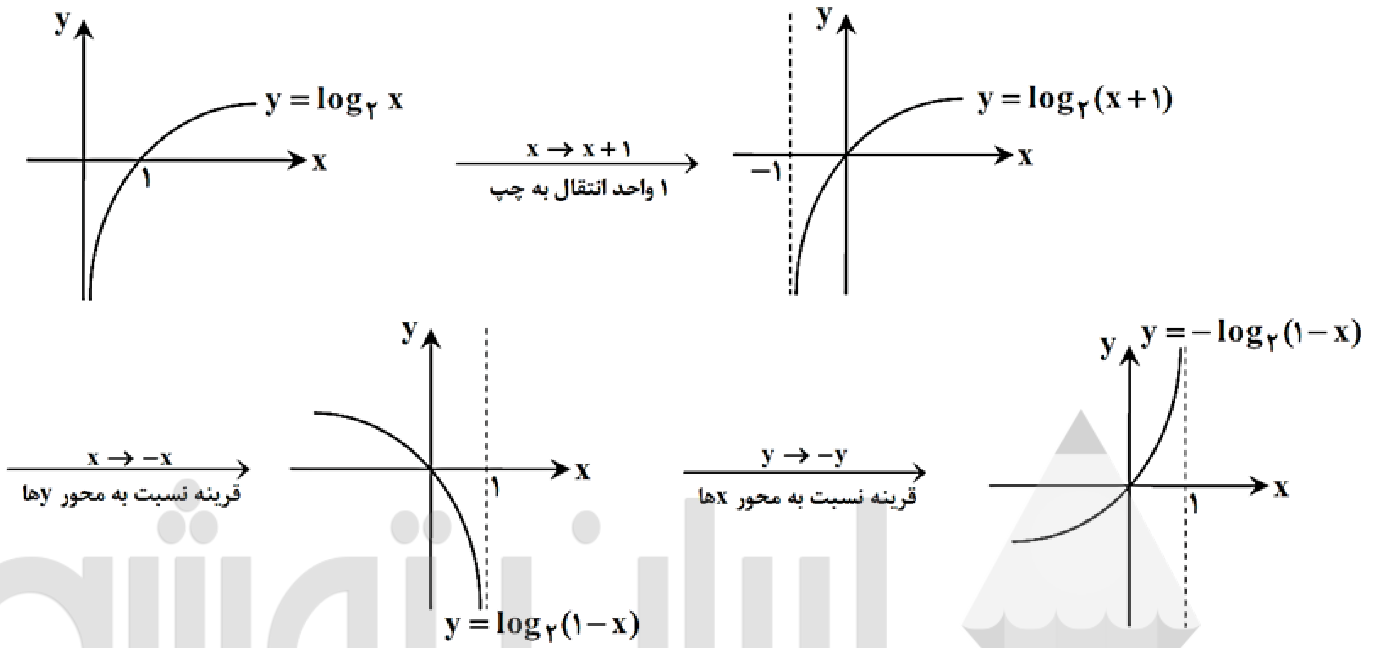
$$\Rightarrow x = y^۶ - ۲y^۳ + ۳ \Rightarrow f^{-۱}(x) = x^۶ - ۲x^۳ + ۳ \Rightarrow D_{f^{-۱}} = R_f = [۱, +\infty)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۸

۲۹ گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$y = 1 - 2^{-x} \Rightarrow 2^{-x} = 1 - y \Rightarrow -x = \log_2^{(1-y)}$$
$$\Rightarrow x = -\log_2^{(1-y)} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\log_2^{(1-x)}$$



گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

۳۰ گزینه ۳

نکته: اگر f تابعی صعودی باشد، داریم: $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

نکته: اگر $a \in D_{f^{-1}}$، آنگاه: $f(f^{-1}(a)) = a$

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$f^{-1}(3x-2) \geq 0 \xrightarrow{\text{صعودی} f} f(f^{-1}(3x-2)) \geq f(0) \Rightarrow 3x-2 \geq 4 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

۳۱ گزینه ۲

چون $f(x)$ یک خط است و هر خطی یک‌به‌یک است، بنابراین معکوس‌پذیر نیز هست، پس داریم:

$$y=f(x)=۳-۲x \Rightarrow y-۳=-۲x \Rightarrow x=\frac{۳-y}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳-x}{۲}$$

درنتیجه داریم:

$$f^{-۱}(۲x^۲+۳)-x=\frac{۳-(۲x^۲+۳)}{۲}-x=\frac{-۲x^۲-۲x}{۲}$$

دامنهٔ تابع داده‌شده برابر است با:

$$f^{-۱}(۲x^۲+۳)-x \geq ۰ \Rightarrow \frac{-۲x^۲-۲x}{۲} \geq ۰ \Rightarrow -۲x^۲-۲x \geq ۰ \Rightarrow ۲x^۲+۲x \leq ۰$$

x		-۱		۰	
$۲x^۲+۲x$	+	۰	−	۰	+

$\Longrightarrow -۱ \leqslant x \leqslant ۰$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۵

۳۲ گزینه ۲

برای اینکه تابع $y=(f-f^{-۱})(x)$ بالای محور xها قرار بگیرد، باید:

$$(f-f^{-۱})(x)>۰ \Rightarrow f(x)-f^{-۱}(x)>۰ \Rightarrow f(x)>f^{-۱}(x)$$

در بازه‌ای نمودار f بالاتر از نمودار تابع $f^{-۱}$ قرار دارد که نمودار f بالای خط $y=x$ باشد درنتیجه برای حل نامعادلهٔ فوق، کافی است نامعادلهٔ $f(x)>x$ را حل کنیم:

$$f(x)>x \Rightarrow x^۳+x+۱>x \Rightarrow x^۳>-۱ \Rightarrow x>-۱$$

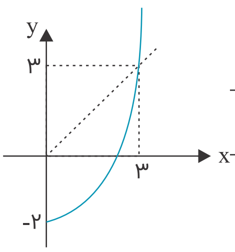
قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶

۳۳ گزینه ۳

نمودار $f^{-۱}(x)$ را رسم می‌کنیم:

جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم (ت.ن: تعریف‌نشده):

در بازهٔ $[۰,۳)$ زیر رادیکال نامنفی بوده و مخرج کسر نیز صفر نمی‌شود؛ بنابراین این بازه دامنهٔ تابع است.

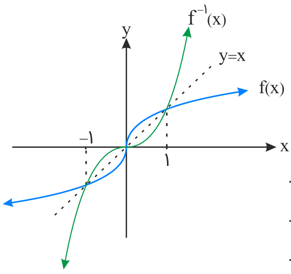


x		۰		۳	
x	−	۰	+		+
$x-f^{-۱}(x)$	ت ن		+	۰	−

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

۳۴ گزینه ۲

ابتدا نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم:



نمودار را در چهار بازهٔ زیر بررسی می‌کنیم:

رابطه \ بازه	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f(x)-f^{-1}(x)$	+	−	+	−
x^2-1	+	−	−	+
$\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{x^2-1}$	+	+	−	−

(نقاط مرزی: $x=-1$، $x=0$، $x=1$؛ در $x=-1$ و $x=1$: تعریف نشده)

می‌دانیم که زیر رادیکال همواره باید نامنفی باشد؛ بنابراین دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{x^2-1}}$ به‌صورت $(-\infty,0]-\{-1\}$ است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۳۵ گزینه ۲

چون $f(f(x))=x$ است، پس $f^{-1}(x)=f(x)$.

در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر $a=-d$ باشد، آنگاه $f^{-1}(x)=f(x)$، پس در اینجا $k=-2$ است:

$$f(x)=\frac{2x+5}{x-2}$$

$$f(k)=f(-2)=\frac{-4+5}{-2-2}=-\frac{1}{4}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

۳۶ گزینه ۴

$$y=\frac{2x}{a}-b\Rightarrow ay=2x-ab\Rightarrow x=\frac{ay}{2}+\frac{ab}{2}\Rightarrow y^{-1}=\frac{ax}{2}+\frac{ab}{2}$$

برای اینکه دو نمودار بر هم منطبق باشند، داریم:

$$y^{-1}=y\Rightarrow\frac{ax}{2}+\frac{ab}{2}=\frac{2x}{a}-b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}=\frac{2}{a}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\a=-2\end{cases}\\ \frac{ab}{2}=-b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{هر مقدار می‌تواند باشد } b & ;a=-2\\ b=0 & ;a=2\end{cases}$$

بنابراین $(2\ ,\ 5)$ جواب سؤال است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

۳۷

گزینه ۲

وارون هر تابع خطی، یک تابع خطی است. وارون f را حساب می‌کنیم:

$$y = ax + ۲ \Rightarrow x = \frac{y-۲}{a} \xrightarrow{\text{عوض کردن x و y}} y = \frac{x-۲}{a} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{a}x - \frac{۲}{a}$$

اگر f و $f^{-۱}$ در بیش از یک نقطه برخورد داشته باشند، چون هر دو توابعی خطی هستند، باید بر هم منطبق باشند؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = f^{-۱}(x) \Rightarrow ax + ۲ = \frac{۱}{a}x - \frac{۲}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۱}{a} \\ ۲ = -\frac{۲}{a} \end{cases} \Rightarrow a = -۱$$

پس ضابطهٔ f و $f^{-۱}$ به‌صورت $f(x) = f^{-۱}(x) = -x + ۲$ درمی‌آید.

$$\Rightarrow f^{-۱}(۳) = -۳ + ۲ = -۱$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

۳۸

گزینه ۳

چون تابع، معکوس خود را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده است، بنابراین $(۳,۳)$ نقطهٔ مشترک دو تابع f و $f^{-۱}$ است:

$$\begin{cases} (۱,۲) \in f \Rightarrow (۲,۱) \in f^{-۱} \\ (۳,۳) \in f^{-۱} \end{cases}$$

درنتیجه معادلهٔ تابع خطی $f^{-۱}$ برابر است با:

$$y - ۱ = \frac{۳-۱}{۳-۲}(x-۲) \Rightarrow y = ۲x - ۳ \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۲x - ۳$$

برای یافتن نقطهٔ تلاقی $f^{-۱}$ با محور xها معادلهٔ $f^{-۱}(x) = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

۳۹

گزینه ۴

چون نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ غیرمتقاطع‌اند، الزاماً نمودار تابع خطی f موازی نیمساز ناحیهٔ اول است، پس $f(x) = x + b$ است.

$$f(۲) = ۵ \Rightarrow ۲ + b = ۵ \Rightarrow b = ۳$$

پس $f(x) = x + ۳$ درنتیجه $f(۴) = ۷$ است.

آزمایشی سنجش علوم تجربی چهارم مرحله دوم ۱۳۹۳

۴۰ گزینه ۲

برای یافتن نقطهٔ برخورد $f(x)$ با $f^{-1}(x)$ کافی است نقطهٔ برخورد نمودار $f(x)$ را با خط $y=x$ به دست بیاوریم:

$$f(x)=x \Rightarrow \sqrt{x+a}=x$$
$$\xrightarrow[x\geq 0]{\text{به توان ۲}} x+a=x^2 \Rightarrow x^2-x-a=0$$

باتوجه‌به اینکه $x\geq 0$ معادلهٔ اخیر باید دو ریشهٔ نامنفی داشته باشد؛ بنابراین:

$$\text{الف)}\ \Delta>0 \Rightarrow 1+4a>0 \Rightarrow a>-\frac{1}{4} \quad (*)$$

$$\text{ب)}\ x_1, x_2=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}\geq 0 \Rightarrow 1-\sqrt{1+4a}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+4a}\leq 1 \Rightarrow 4a\leq 0 \Rightarrow a\leq 0 \quad (**)$$

از (*) و (**) نتیجه می‌گیریم:

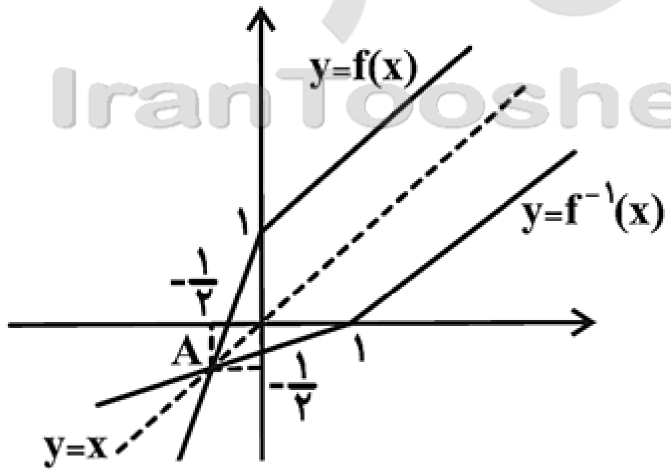
$$-\frac{1}{4}<a\leq 0$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

۴۱ گزینه ۱

تابع را دوضابطه‌ای کرده و رسم می‌کنیم:

$$f(x)=2x-|x|+1=\begin{cases} x+1 & ;x\geq 0 \\ 3x+1 & ;x<0 \end{cases}$$



نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه‌های اول و سوم $(y=x)$ قرینه می‌کنیم. باتوجه‌به شکل مشخص است که محل برخورد دو نمودار روی خط $y=x$ است و دارای طول منفی است؛ بنابراین:

$$x<0: 3x+1=x \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \Rightarrow a+b=-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=-1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۷

۴۲ گزینه ۳

ابتدا ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2x+4}{x-1}\Rightarrow xy-y=2x+4\Rightarrow x=\frac{y+4}{y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{x-2}$$

حال دو ضابطه را برابر باهم قرار می‌دهیم:

$$f^{-1}(x)=f(x)\Rightarrow\frac{x+4}{x-2}=\frac{2x+4}{x-1}\Rightarrow x^2+3x-4=2x^2-8$$
$$\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4\\x_2=-1\end{cases}$$

مجموع طول نقاط برخورد برابر با $4+(-1)=3$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۷

۴۳ گزینه ۴

ابتدا توجه کنید که:

$$y=\sqrt[3]{4-x^3}\Rightarrow y^3=4-x^3\Rightarrow x^3=4-y^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{4-y^3}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{4-x^3}$ و درنتیجه $f^{-1}(x)=f(x)$، بنابراین نمودار توابع f و f^{-1} بر هم منطبق هستند. درنتیجه مجموعهٔ طول نقاط مشترک این نمودارها نامتناهی است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

۴۴ گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2x-1}{x+2}\Rightarrow yx+2y=2x-1\Rightarrow x(y-2)=-2y-1$$
$$\Rightarrow x=\frac{2y+1}{2-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{2-x}$$

بنابراین باید تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y=\frac{2x+1}{2-x}$ و خط $y=3x$ را معین کنیم که برابر با تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{2x+1}{2-x}=3x$ است، پس:

$$2x+1=6x-3x^2\Rightarrow 3x^2-4x+1=0$$

مجموع ضرایب معادلهٔ بالا برابر با صفر است؛ پس $x=1$ و $x=\frac{1}{3}$ جواب‌های آن هستند.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

۴۵ گزینه ۴

اگر وارون تابع با محور طول‌ها در نقطه‌ای مانند $(\alpha, ۰)$ برخورد کند، این نقطه بر روی $f(x)$ به شکل $(۰, \alpha)$ است؛ پس داریم:

$$f(۰) = ۵ \Rightarrow \alpha = ۵$$

ولی چون دامنهٔ f بازهٔ $[۱, +\infty)$ است، بنابراین $۰ \notin D_f$ و لذا چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۴۶ گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ وارون تابع داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{۲x - ۱}{x - ۲} \Rightarrow xy - ۲y - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x(y - ۲) = ۲y - ۱ \Rightarrow x = \frac{۲y - ۱}{y - ۲}$$

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم: $y = \frac{۲x - ۱}{x - ۲}$

ضابطهٔ وارون تابع داده‌شده به‌صورت $y = \frac{۲x - ۱}{x - ۲}$ درمی‌آید (بد نیست بدانید در توابع به فرم $y = \frac{ax + b}{cx + d}$، اگر $a = -d$ باشد، وارون تابع با تابع اولیه برابر است)

حالا ضابطهٔ به‌دست‌آمده را با خط $y = -x$ قطع می‌دهیم:

$$\frac{۲x - ۱}{x - ۲} = -x \Rightarrow -x^۲ + ۲x = ۲x - ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} A(۱, -۱) \\ B(-۱, ۱) \end{cases}$$

پس:

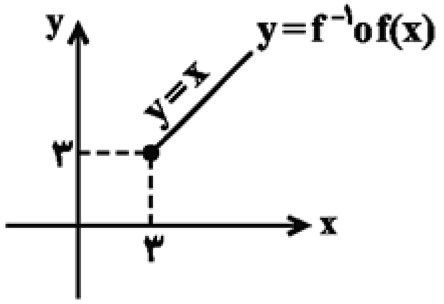
$$AB = \sqrt{(۱ + ۱)^۲ + (-۱ - ۱)^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

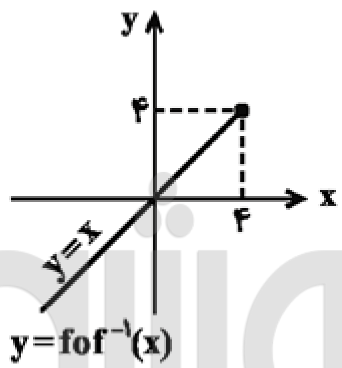
۴۷

گزینه ۴

می‌دانیم $y=f^{-1}of(x)$ تابعی همانی روی دامنهٔ f است، پس نمودار $y=f^{-1}of(x)$ به شکل زیر است: $(D_f=[3,+\infty))$



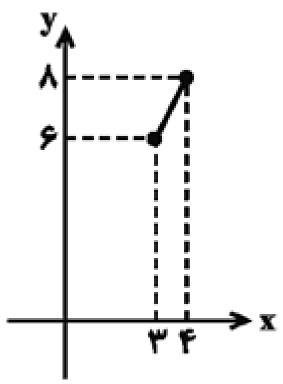
از سوی دیگر $y=fof^{-1}(x)$ تابع همانی روی برد f (دامنهٔ f^{-1}) است، پس نمودار $y=fof^{-1}(x)$ به شکل زیر است: $(R_f=(-\infty,4])$



دامنهٔ $g(x)$ اشتراک دامنه‌های $fof^{-1}(x)$ و $f^{-1}of(x)$ است؛ یعنی: $D_g=[3,4]$ و ضابطهٔ $g(x)$ نیز جمع ضابطه‌های $f^{-1}of(x)=x$ و $fof^{-1}(x)=x$ است؛ بنابراین:

$$g(x)=2x \quad ; 3\le x\le 4$$

پس نمودار $y=g(x)$ به شکل زیر است:



بنابراین طول نمودار تابع $g(x)$ برابر است با:

$$d=\sqrt{(3-4)^2+(6-8)^2}=\sqrt{5}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷

۴۸

گزینه ۳

نکته: $f(f^{-1}(x)) = x\,,\ x \in D_{f^{-1}} = R_f$ ، $f^{-1}(f(x)) = x\,,\ x \in D_f = R_{f^{-1}}$

$$D_f = [1, +\infty), R_f = [3, +\infty)$$

$$y = 2f(f^{-1}(x)) = 2x,\ x \in [3, +\infty)$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y = 2x$ را با شرط $x \geq 3$ رسم کنیم که به گزینهٔ ۳ می‌رسیم.

گزینه دو علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۵

۴۹

گزینه ۲

$f^{-1}(x) = x + f(4) + 6$ بنابراین $f^{-1}(x) = x + a$ است؛ یعنی:

$$x + a = x + f(4) + 6 \Rightarrow f(4) = a - 6 \ (1)$$

$$f^{-1}(x) = x + a \Rightarrow y = x + a \Rightarrow x = y - a \Rightarrow f(x) = x - a$$

$$\Rightarrow f(4) = 4 - a \ (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a - 6 = 4 - a \Rightarrow a = 5$$

$$f(4) = 5 - 6 = -1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۵

۵۰

گزینه ۲

$$(gof)^{-1}(2x - 1) = x \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(2x - 1)) = x$$

$$\xrightarrow{x=2} f^{-1}(g^{-1}(3)) = 2 \Rightarrow g^{-1}(3) = f(2) = 2^3 + 2 = 10$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۵

۵۱

گزینه ۱

$$y = 2f^{-1}(x - 1) + 3 \xrightarrow{(3,7)} 7 = 2f^{-1}(2) + 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 2$$

روی نمودار $f(x)$ نقطهٔ $(1, 2)$ قرار دارد؛ چون f^{-1} وجود دارد، f یک‌به‌یک است؛ بنابراین $f(x + 1)$ نیز یک‌به‌یک است و هیچ نقطهٔ دیگری با عرض ۲ ندارد. درنتیجه $(3, 2)$ قطعاً روی نمودار $y = f(x + 1)$ قرار ندارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۵۲ گزینه ۱

تابع f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین داریم:

$$۴\left(a\left(۲x\right)+b\right)=a\left(۸x-۱\right)+b-۵\Rightarrow a+۳b=-۵\quad(۱)$$

$$f^{-۱}\left(۳\right)=۵\Rightarrow f\left(۵\right)=۳\Rightarrow ۵a+b=۳\qquad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a=۱\ ,\ \ b=-۲\Rightarrow f\left(x\right)=x-۲$$

$$\xrightarrow{f(۲)=m} m=۲-۲=۰$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۵۳ گزینه ۴

$$g^{-۱}\left(-۳\right)=a\Rightarrow g\left(a\right)=-۳\Rightarrow ۲-۳f\left(۵a-۱\right)=-۳$$

$$\Rightarrow f\left(۵a-۱\right)=\frac{۵}{۳}\Rightarrow ۵a-۱=-۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۵}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

۵۴ گزینه ۲

$$f^{-۱}\left(g\left(۳a\right)\right)=۳\Rightarrow f\left(۳\right)=g\left(۳a\right)\Rightarrow ۶=۳a+\sqrt{۳a}$$

$$\Rightarrow ۶-۳a=\sqrt{۳a}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{۶-۳a\geq ۰}۳۶+۹a^{۲}-۳۶a=۳a$$

$$\Rightarrow ۳a^{۲}-۱۳a+۱۲=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۳ & (۰\leq a\leq ۲\ ,\ \text{غ.ق.ق})\\ a=\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

۵۵ گزینه ۲

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۱-۲x}\Rightarrow f^{-۱}(۱)=\frac{۲}{-۱}=-۲\Rightarrow(۱,-۲)\in f^{-۱}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم $f(-۲)=۱$ است. چون $f(g^{-۱}(a))=۱$ است، درنتیجه $g^{-۱}(a)=-۲$ بوده و از آنجا $a=g(-۲)$ می‌شود و باتوجه‌به نمودار $a=-۱$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۷

۵۶ گزینه ۳

$$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$$

$$(fog)^{-1}(۲x-۴) = \frac{x}{۲} \Rightarrow (g^{-1}of^{-1})(۲x-۴) = \frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۲x-۴)) = \frac{x}{۲} \quad (*)$$

محل برخورد نمودار وارون تابع $f(x)$ با محور yها، همان $f^{-1}(۰)$ است؛ پس کافی است در رابطهٔ $(*)$، x را ۲ قرار دهیم:

$$\xrightarrow[x=۲]{(*)} g^{-1}(f^{-1}(۲(۲)-۴)) = \frac{۲}{۲} \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۰)) = ۱ \xrightarrow{f^{-1}(۰)=\alpha} g^{-1}(\alpha) = ۱$$

$$\Rightarrow \alpha = g(۱) \xrightarrow{g(x)=۲x^۳+۱} \alpha = ۲(۱)^۳ + ۱ = ۲+۱ = ۳ \xrightarrow{\alpha=f^{-1}(۰)} f^{-1}(۰) = ۳$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۵۷ گزینه ۴

ابتدا معکوس تابع $f(x) = ۲^{x+1}$ را می‌یابیم:

$$f(x) = ۲^{x+1} \Rightarrow y = ۲^{x+1} \Rightarrow \log_۲^y = \log_۲^{۲^{x+1}}$$

$$\Rightarrow \log_۲^y = x+۱ \Rightarrow x = \log_۲^y - ۱ = \log_۲^y - \log_۲^۲ = \log_۲^{\frac{y}{۲}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_۲^{\frac{x}{۲}}$$

برای آنکه ترکیب gof^{-1} قابل انجام باشد، باید دامنهٔ gof^{-1} را بیابیم:

$$D_{gof^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} | f^{-1} \in D_g\} = \{x \in (۰,+\infty) | f^{-1} \in D_g\}$$

دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{۶-۲x}$ برابر است با:

$$۶-۲x \geq ۰ \Rightarrow ۶ \geq ۲x \Rightarrow x \leq ۳ \Rightarrow D_g = \{x | x \leq ۳\}$$

بنابراین:

$$f^{-1} \in D_g \Rightarrow \log_۲^{\frac{x}{۲}} \leq ۳ \Rightarrow \frac{x}{۲} \leq ۸ \Rightarrow x \leq ۱۶$$

$$D_{gof^{-1}} = \{x \in (۰,+\infty) | x \leq ۱۶\}$$

$$\Rightarrow D_{gof^{-1}} = (۰,+\infty) \cap (-\infty,۱۶] = (\underbrace{۰}_{a}, \underbrace{۱۶}_{b}] \Rightarrow \max(b-a) = ۱۶-۰ = ۱۶$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

۵۸ گزینه ۳

$$(fog^{-1})(x) = \sqrt[3]{2x^5+1} \Rightarrow g^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt[3]{2x^5+1})$$
$$\Rightarrow x = (gof^{-1})(\sqrt[3]{2x^5+1})$$

اگر فرض کنیم $\sqrt[3]{2x^5+1} = t$، آنگاه $x = \sqrt[5]{\frac{t^3-1}{2}}$ خواهد بود.

$$(gof^{-1})(t) = \sqrt[5]{\frac{t^3-1}{2}} \Rightarrow (gof^{-1})(x) = \sqrt[5]{\frac{x^3-1}{2}}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

۵۹ گزینه ۳

$$f(x) = x+2 = y \Rightarrow x = y-2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x-2$$

$$g(f^{-1}(x)) = 0 \Rightarrow g(x-2) = 0 \Rightarrow 2(x-2)^2 - 8(x-2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2-4x+4) - 8x + 16 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 16x + 25 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta>0} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 8$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۴

۶۰ گزینه ۳

$$(gof^{-1})^{-1} = fog^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} g^{-1} = \{(-3,1),(2,3),(1,4)\} \\ f = \{(0,-1),(1,2),(-2,3),(3,1),(2,5)\} \end{array}\right\} \Rightarrow fog^{-1} = \{(-3,2),(2,1)\}$$

$$R_{fog^{-1}} = \{1,2\} \Rightarrow 2+1 = 3$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۵

۱ عبارت $P(x) = ax^2 + bx^3 + 2$ بر $x-1$ بخش‌پذیر و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x+1$ برابر ۴ است. مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۱− ۴) ۲−

۲ اگر چندجمله‌ای $f(x) = ax^4 - 2x^2 - 1$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد، معادلهٔ $f(x) = 0$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۳ اگر چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 - (b-1)x - b$ بر $x+3$ و $x-2$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x+4$ کدام است؟

۱) ۱۴− ۲) ۳۴

۳) ۳۸ ۴) ۱۸−

۴ تابع اکیداً صعودی $y = f(x)$ مفروض است. اگر باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به‌ترتیب $a-2$ و $2a+1$ باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۱ ۲) -۲

۳) -۳ ۴) -۴

۵ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x^{10} + kx^8 + 2x^3 - 5x + 2$ بر $x-1$ برابر با -4 است. باقی‌ماندهٔ تقسیم این چندجمله‌ای بر $x^2 - x - 2$ کدام است؟

۱) $2x - 4$ ۲) $-2x + 4$

۳) $2x + 4$ ۴) $-2x - 4$

۶ باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) + x$ بر $x^2 + 7x$ کدام است؟

۱) ۷۲۱ ۲) $721 - x$

۳) $720 - x$ ۴) $720 + x$

۷ اگر چندجمله‌ای $x^4 - 3x^3 + mx + n$ بر $x^2 - 5x + 6$ بخش‌پذیر باشد، $m + n$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲

۳) -۱۶ ۴) -۳۲

۸ اگر $k(x)$ خارج‌قسمت تقسیم $x^۵ + x^۲ - ۳x + ۴$ بر $x - ۱$ باشد، مقدار $k(-۱)$ چقدر است؟

۱) ۲   ۲) -۲

۳) ۵   ۴) -۵

۹ اگر عبارت $x^۶ - ۹x^۴ + ax^۲ + ۴x - ۳$ بر $x - ۳$ بخش‌پذیر باشد، مجموع ضرایب جملات خارج قسمت آن کدام است؟

۱) -۱   ۲) -۴

۳) ۱   ۴) ۴

۱۰ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^۴ - ax^۳ + x - b$ بر $x^۲ + ۱$ برابر $۴x - ۱$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $ax^۲ + bx$ بر $x + ۱$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۱

۳) ۲   ۴) ۳

۱۱ اگر چندجمله‌ای $f(x - ۱)$ بر $x - ۹$ بخش‌پذیر باشد، چندجمله‌ای $f(x^۳)$ بر کدام عبارت همواره بخش‌پذیر است؟

۱) $x - ۴$ ۲) $x - ۸$

۳) $x - ۲$ ۴) $x + ۴$

۱۲ اگر $f(۲x - ۱) = x^۴ + x + ۱$ باشد، باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x^۲ - ۱$ کدام است؟

۱) $x - ۲$ ۲) $x + ۲$

۳) $x - ۱$ ۴) $x + ۱$

۱۳ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x)$ بر $x^۲ + ۳x + ۲$، $۲x + ۱$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x - ۱) - p(x - ۲)$ بر x کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

۱۴ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - ۱$ و $x - ۲$ به ترتیب ۳ و -۱ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $g(x) = x^۲f(x) - ۲x + ۱$ بر $x^۲ - ۳x + ۲$ کدام است؟

۱) $۱۱ - ۹x$ ۲) $۷ - ۴x$

۳) $۷ + ۴x$ ۴) $۱۱ + ۹x$

۱۵ در تجزیهٔ عبارت $x^۶ - ۶۴$ به فرم $(x + ۲)p(x)$، اگر A مجموع ضرایب منفی و B مجموع ضرایب مثبت $p(x)$ باشد، $۲B - A$ کدام است؟

۱) ۴۲   ۲) ۶۲

۳) ۷۴   ۴) ۸۴

۱۶ اگر $1 - x^{200} = (1+x)f(x)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ کدام است؟

۱) ‎-۲۰۰
۲) ۱۰۰
۳) ‎-۱۰۰
۴) ۲۰۰

۱۷ عبارت $x^{30}+1$ بر کدام‌یک از عبارت‌های زیر بخش‌پذیر <u>نیست</u>؟

۱) $x^{5}+1$
۲) $x^{6}+1$
۳) $x^{10}+1$
۴) $x^{2}+1$

۱۸ چندجمله‌ای $x^{4}+64$ بر $x^{2}+mx+n$ بخش‌پذیر است. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۲۴ یا ۱۶
۲) ۲۴ یا ‎-۱۶
۳) ۱۲ یا ۴
۴) ۱۲ یا ‎-۴

۱ گزینه ۴

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad , \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

طبق صورت سؤال باید $P(1)=0$ و $P(-1)=4$ باشد، پس:

$$\begin{cases} P(1)=0 \Rightarrow a(1)^2+b(1)^3+2=0 \Rightarrow a+b=-2 \\ P(-1)=4 \Rightarrow a(-1)^2+b(-1)^3+2=4 \Rightarrow a-b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۶

۲ گزینه ۲

چون $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است، پس:

$$f(-1)=0 \Rightarrow a-2-1=0 \Rightarrow a=3 \Rightarrow f(x)=3x^4-2x^2-1$$

معادله را می‌توانیم با تغییر متغیر $x^2=t$ به شکل $3t^2-2t-1$ در نظر بگیریم. در این معادله $\Delta>0$ و $P<0$، پس یک ریشه مثبت و یک ریشهٔ منفی است؛ بنابراین x^2 می‌تواند برابر یک مقدار مثبت قرار گیرد و در این صورت معادله دو ریشه دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

۳ گزینه ۴

واضح است که $f(-3)=f(2)=0$، بنابراین:

$$f(-3)=0 \Rightarrow 9a+2b=30 \qquad (1)$$
$$f(2)=0 \Rightarrow 4a-3b=-10 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} 9a+2b=30 \\ 4a-3b=-10 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=6$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم این چندجمله‌ای بر $x+4$ با داشتن مقادیر a و b محاسبه می‌کنیم.

$$r=f(-4) \Rightarrow r=-64+32+20-6 \Rightarrow r=-18$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۴ گزینه ۴

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به‌ترتیب برابر $f(1)$ و $f(-2)$ می‌باشد.

$$f(1)=a-2\ ,\ f(-2)=2a+1$$

ازطرفی تابع $y=f(x)$ اکیداً صعودی است، بنابراین داریم:

$$-2<1\Rightarrow f(-2)<f(1)$$
$$\Rightarrow 2a+1<a-2\Rightarrow a<-3$$

باتوجه‌به گزینه‌ها a می‌تواند -4 باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

۵ گزینه ۳

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^{10}+kx^8+2x^3-5x+2$ بر $x-1$ برابر -4 است. پس:

$$f(1)=-4\Rightarrow 1+k+2-5+2=-4\Rightarrow k=-4$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم f بر x^2-x-2، عبارتی حداکثر از درجهٔ یک است:

$$f(x)=(x^2-x-2)\,g(x)+\underbrace{ax+b}_{\text{باقی‌مانده}}$$

با جایگذاری ریشه‌های مقسوم‌علیه یعنی $x=-1$ و $x=2$، داریم:

$$x=-1: f(-1)=0-a+b\Rightarrow +1-4-2+5+2=-a+b$$
$$\Rightarrow -a+b=2\quad (1)$$

$$x=2: f(2)=0+2a+b\Rightarrow 2^{10}-2^{10}+16-10+2=2a+b$$
$$\Rightarrow 2a+b=8\quad (2)$$
$$\xrightarrow{(1),(2)} a=2, b=4$$
$$\Rightarrow r(x)=ax+b=2x+4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

۶ گزینه ۴

$$f(x) = (x^2 + 7x)Q(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = b \\ f(-7) = -7a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 720 = b \\ 713 = -7a + b \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow R(x) = x + 720$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷

۷ گزینه ۱

اگر چندجمله‌ای $P(x) = x^4 - 3x^3 + mx + n$ بر $(x-2)(x-3)$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه $P(2) = 0$ و $P(3) = 0$، بنابراین:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 16 - 24 + 2m + n = 0$$

$$P(3) = 0 \Rightarrow 81 - 81 + 3m + n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 8 \\ 3m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -8,\ n = 24 \Rightarrow m + n = +16$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۷

۸ گزینه ۲

الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^5 + x^2 - 3x + 4 = (x-1)k(x) + R$$

اگر $x = 1$ را در مقسوم جایگزین کنیم، R به دست می‌آید:

$$x = 1 \Rightarrow R = f(1) = 1 + 1 - 3 + 4 = 3$$

حال در رابطهٔ اولیه به‌جای x مقدار ۱- را قرار می‌دهیم:

$$(-1) + 1 + 3 + 4 = (-2)k(-1) + 3 \Rightarrow 7 = (-2)k(-1) + 3 \Rightarrow k(-1) = -2$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۴

۹ گزینه ۴

عبارت $f(x) = x^6 - 9x^4 + ax^2 + 4x - 3$ بر $(x-3)$ در صورتی بخش‌پذیر است که $f(3) = 0$ باشد.

$$f(3) = 3^6 - 9 \times 3^4 + 9a + 12 - 3 = 3^6 - 3^2 \times 3^4 + 9a + 9 = 0$$
$$\Rightarrow 9a + 9 = 0 \Rightarrow a = -1$$

اگر خارج قسمت را $Q(x)$ در نظر بگیریم، کافی است $Q(1)$ را محاسبه کنیم:

$$x^6 - 9x^4 - x^2 + 4x - 3 = (x-3)(Q(x))$$
$$x = 1 \Rightarrow (1 - 9 - 1 + 4 - 3) = (-2)(Q(1))$$
$$\Rightarrow -8 = -2Q(1) \Rightarrow Q(1) = 4$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷

۱۰ گزینه ۲

$$x^4 - ax^3 + x - b = (x^2+1)Q(x) + 4x - 1$$

$$\xrightarrow{x^2=-1} (-1)^2 - a(-1)x + x - b = 0 + 4x - 1 \Rightarrow (a+1)x + 1 - b = 4x - 1$$

در صورتی تساوی فوق برقرار خواهد بود که:

$$a + 1 = 4 \ , \ \ 1 - b = -1 \Rightarrow a = 3 \ , \ \ b = 2$$

$\Rightarrow f(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) = 1 = R$ (باقی‌ماندهٔ تقسیم $ax^2 + bx$ بر $x+1$)

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

۱۱ گزینه ۳

$$f(x-1) = (x-9)Q(x)$$

با تبدیل $x - 1 = u$، داریم:

$$f(u) = (u-8)Q(u+1)$$

حال با تبدیل $u = y^3$، داریم:

$$f(y^3) = (y^3 - 8)Q(y^3+1) \Rightarrow f(y^3) = (y-2)(y^2+2y+4)Q(y^3+1)$$

بنابراین $f(y^3)$ همواره بر $y - 2$ بخش‌پذیر است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶

۱۲ گزینه ۲

راه‌حل اول:

نکته: اگر در تقسیم $P(x)$ بر $B(x)$، خارج‌قسمت $Q(x)$ و باقی‌مانده $R(x)$ باشد، آنگاه رابطهٔ تقسیم به‌صورت زیر است:

$$P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

نکته: درجهٔ $R(x)$ همواره از درجهٔ $B(x)$ کمتر است، به همین دلیل باقی‌ماندهٔ تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک عبارت درجهٔ دوم را می‌توان به‌صورت $ax + b$ درنظر گرفت.

ابتدا رابطهٔ تقسیم را برای $f(x)$ می‌نویسیم:

$$f(x) = (x^۲ - ۱)Q(x) + ax + b$$

در این رابطه داریم:

$$\begin{cases} f(۱) = a + b \\ f(-۱) = -a + b \end{cases} \quad (*)$$

کافی است مقادیر $f(۱)$ و $f(-۱)$ را از ضابطهٔ $f(۲x - ۱) = x^۴ + x + ۱$ به دست آوریم:

$$\begin{cases} x = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۳ \\ x = ۰ \Rightarrow f(-۱) = ۱ \end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a + b = ۳ \\ -a + b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a = ۱, b = ۲$$

پس باقی‌مانده به‌صورت $x + ۲$ است.

راه‌حل دوم:

باتوجه‌به ضابطهٔ داده‌شده، داریم:

$$R(۱) = f(۱) = ۳$$

فقط در گزینهٔ ۲ به ازای $x = ۱$ مقدار ۳ به دست می‌آید.

گزینه دو ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۶

۱۳ گزینه ۲

$$p(x) = (x + ۱)(x + ۲)q(x) + ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(x - ۱) = x(x + ۱)q(x - ۱) + ۲x - ۱ \\ p(x - ۲) = x(x - ۱)q(x - ۲) + ۲x - ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x - ۱) - p(x - ۲) = x[(x + ۱)q(x - ۱) - (x - ۱)q(x - ۲)] + ۲$$

درنتیجه باقی‌ماندهٔ تقسیم موردنظر برابر با ۲ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۱

$$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow f(۱)=۳ \quad , \quad x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow f(۲)=-۱$$

فرض می‌کنیم باقی‌ماندهٔ تقسیم $g(x)$ بر $x^۲-۳x+۲$ برابر $ax+b$ باشد، آنگاه:

$$\Rightarrow x^۲f(x)-۲x+۱=(x^۲-۳x+۲)Q(x)+(ax+b)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=۱ \Rightarrow f(۱)-۲+۱=a+b \Rightarrow a+b=۲ \\ x=۲ \Rightarrow ۴f(۲)-۴+۱=۲a+b \Rightarrow ۲a+b=-۷ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=-۹ \\ b=۱۱ \end{cases}$$

پس باقی‌مانده $R(x)=-۹x+۱۱$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

۱۵ گزینه ۴

$$x^۶-۶۴=(x+۲)\underbrace{(x^۵-۲x^۴+۴x^۳-۸x^۲+۱۶x-۳۲)}_{p(x)}$$

$$A=-۲-۸-۳۲=-۴۲$$
$$B=۱+۴+۱۶=۲۱$$
$$۲B-A=۴۲+۴۲=۸۴$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

۱۶ گزینه ۴

نکته: باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر است با: $f(a)$

راه‌حل اول:

از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$(1-x^{200})' = ((1+x)f(x))' \Rightarrow -200x^{199} = f(x) + (1+x)f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-1} -200(-1)^{199} = f(-1) + 0 \Rightarrow f(-1) = 200$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، داریم:

$$(1-x^n) = (1+x)(1-x+\ldots-x^{n-1})$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$1-x^{200} = (1+x)(1-x+x^2-\ldots-x^{199})$$

با جایگذاری این عبارت در عبارت صورت مسئله داریم:

$$(1+x)(1-x+x^2-\ldots-x^{199}) = (1+x)f(x) \Rightarrow f(x) = 1-x+x^2-\ldots-x^{199}$$

$$\Rightarrow f(-1) = 1+1+\ldots+1 = 200$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

۱۷ گزینه ۱

با فرض $x^5 = t$، داریم $x^{30}+1 = t^6+1$ ازآنجاکه عبارت t^6+1 قابل‌تجزیه به عامل $(t+1)$ نیست، می‌توان گفت $x^{30}+1$ بر x^5+1 بخش‌پذیر نیست. به روش مشابه می‌توان ثابت کرد که عبارت $x^{30}+1$ بر سایر گزینه‌ها بخش‌پذیر است.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۶

۱۸ گزینه ۳

$$x^4+64 = x^4+16x^2+64-16x^2$$

$$= (x^2+8)^2-16x^2 = (x^2+8-4x)(x^2+8+4x)$$

بنابراین:

$$x^2+mx+n = \begin{cases} x^2-4x+8 \\ \text{یا} \\ x^2+4x+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\pm 4 \\ n=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n=12 \\ \text{یا} \\ m+n=4 \end{cases}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۵