

ایران توشه

- رانلور نمونه سوالات امتحانی

- رانلور گام به گام

- رانلور آزمون گاج و قلم چی و سنجش

- رانلور فیلم و مقاله انگلیزی

- رانلور و مشاوره



IranTooshe.Ir



@irantooshe



IranTooshe



باسمه تعالی

فهرست مطالب

حساب

۲-۹	 ۱- بخشپذیری، محاسبات و آمار
۱۰-۱۵	 ۲- اعداد اول
۱۶-۲۳	 ۳- مجموعه
۲۴-۳۲	 ۴- اعداد گویا و اعداد گنگ
۳۳-۴۶	 ۵- توان و ریشه
۴۷-۵۷	 ۶- عبارت های جبری و اتحادها
۵۸-۷۰	 ۷- مختصات بردارها و معادلات خط
۷۰-۷۴	 ۸- عبارت های گویا

هندسه

۷۵-۷۸	 ۱- خط، نیم خط، پاره خط و زاویه
۸۰-۷۸	 ۲- استدلال و چند ضلعی ها
۸۱-۸۰	 ۳- تبدیلهای خط های موازی و مورب
۸۴-۸۱	 ۴- چهار ضلعیها
۹۰-۸۴	 ۵- مثلثها و حالت های هم نهشتی
۹۰-۹۶	 ۶- دایره
۹۶-۱۰۲	 ۷- رابطه فیثاغورس
۱۰۵-۱۰۲	 ۸- تشابه
۱۱۳-۱۰۶	 ۹- حجم
۱۱۴-۱۲۷	 ۱۰- سوالات تیزهوشان سال ۹۳-۹۴
۱۲۸-۱۲۲	 ۱۱- سوالات تیزهوشان سال ۹۵-۹۶
۱۲۹-۱۳۵	 ۱۲- سوالات تیزهوشان سال ۹۶-۹۷

با سمه تعالی

با سلام

دانش آموز عزیز قبل از مطالعه این جزوه به چند نکته توجه نمایید. جزوه ای را که در مقابل دارید به منظور مطالعه برای آزمون های نمونه و تیزهوشان نوشته شده است. و اینکه دانش آموزان در کلاس نیازی به نوشتن این نکات نداشته باشند تا دانش آموزان در کلاس فرصت بیشتری برای حل انواع مختلف سوالات داشته باشند. این جزوه بیشتر حاوی نکاتی است که در کتاب درسی شما از آنها نامی برده نشده ولی در آزمون های سالهای گذشته از آنها در سوالات استفاده شده است. بسیاری از فرمول هایی که در این جزوه آورده شده است بنده شخصا اعتقادی به آنها و اینکه از آنها در آزمونها استفاده شود ندارم زیرا سوالات این گونه آزمونها باید قدرت خلاقیت و حل مساله را در دانش آموز بسنجند نه اینکه دانش آموز با حفظ چند فرمول به راحتی بتواند این گونه سوالات را حل کند. بنابراین سعی کنید قدرت تفکر و حل مساله را در خود با حل سوالات مختلف به بالا ببرید. و بعد اینکه ابتدا تا می توانید کلیه مطالب کتاب درسی را با دقت فراوان مطالعه کنید زیرا اکثر این سوالات از همان مطالب کتاب گرفته شده اند. در پایان لازم است از زحمات دوست و همکار بسیار بزرگوارم آقای «کهرزاد رضایی» که زحمت بررسی مطالب این جزوه را کشیدند بسیار تشکر کنم.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline & q \\ \hline & r \end{array}$$

اگر در یک تقسیم، مقسوم a ، مقسوم علیه b ، خارج قسمت q و باقیمانده r باشد آنگاه داریم:

رابطه های تقسیم (امتحان درست بودن تقسیم):

$$r < b$$

(۱) در هر تقسیم باید باقیمانده از مقسوم علیه کوچک تر باشد.

$$(b \times q) + r = a$$

(۲) در هر تقسیم باید حاصل ضرب مقسوم علیه در خارج قسمت به اضافی باقیمانده، برابر مقسوم شود.

بخش پذیر:

هرگاه در یک تقسیم باقیمانده صفر شود می گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخشپذیر است.

قواعد بخشپذیری بر اعداد:

۱- **بخشپذیری بر صفر:** هیچ عددی بر صفر بخشپذیر نیست. اما صفر بر همه ی اعداد (به جز صفر) بخشپذیر است.

۲- **بخشپذیری بر ۱:** همه ی اعداد بر یک بخشپذیرند.

۳- **بخشپذیری بر ۲:** اعدادی که یکانشان زوج باشد.

تذکر: بخشپذیری بر 2^n : عددی بر 2^n بخشپذیر است که n رقم سمت راست آن بر 2^n بخشپذیر باشد.

۴- بخشپذیری بر ۳: اعدادی که جمع رقم هایشان بر ۳ بخشپذیر باشد.

۵- بخشپذیری بر ۴: اعدادی که دو رقم سمت راست آنها صفر یا بر ۴ بخشپذیر باشد.

۶- بخشپذیری بر ۵: اعدادی که رقم سمت راستشان صفر یا ۵ باشد.

تذکر: بخشپذیری بر 5^n : عددی بر 5^n بخشپذیر است که n رقم سمت راست آن بر 5^n بخشپذیر باشد.

۷- بخشپذیری بر ۶: اعدادی که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخشپذیر باشند.

۸- بخشپذیری بر ۷: اعدادی که تفاضل دو برابر یکان آنها از بقیه رقمهایشان صفر یا بر ۷ بخشپذیر باشد.

روش دوم بر ۷: برای اعداد با ارقام زیاد می توان از سمت راست رقم ها را سه تا سه تا جدا کرد سپس بین این سه تایی ها یک در میان جمع و تفریق گذاشت و سپس حاصل آن ها را به دست آورد اگر صفر یا مضربی از ۷ شد بر ۷ بخشپذیر می باشد.

۹- بخشپذیری بر ۸: اعدادی که سه رقم سمت راستشان صفر یا بر ۸ بخشپذیر باشد.

۱۰- بخشپذیری بر ۹: اعدادی که مجموع رقمهایشان بر ۹ بخشپذیر باشد.

۱۱- بخشپذیری بر ۱۰: اعدادی که رقم یکانشان صفر باشد. یا هم بر ۲ و هم بر ۵ بخشپذیر باشند.

۱۲- بخشپذیری بر ۱۱: اعدادی که اگر بین آنها یک در میان مثبت و منفی قرار دهیم و سپس حاصل آنها را پیدا کنیم صفر یا بر ۱۱ بخشپذیر باشد.

۱۳- بخشپذیری بر ۱۲: اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخشپذیر باشند.

۱۴- بخشپذیری بر ۱۳: اعدادی که مجموع ۴ برابر رقم یکانشان با بقیه ارقام بر ۱۳ بخشپذیر باشد.

روش دوم بر ۱۳: برای اعداد با ارقام زیاد می توان از سمت راست رقم ها را سه تا سه تا جدا کرد سپس بین این سه تایی ها یک در میان جمع و تفریق گذاشت و سپس حاصل آن ها را به دست آورد اگر صفر یا مضربی از ۱۳ شد بر ۱۳ بخشپذیر می باشد.

۱۵- بخشپذیری بر ۱۴: اعدادی که هم بر ۲ و هم بر ۷ بخشپذیر باشند.

۱۶- بخشپذیری بر ۱۵: اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخشپذیر باشند.

۱۷- بخشپذیری بر ۲۱: اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۷ بخشپذیر باشند.

۱۸- بخشپذیری بر ۲۵: اعدادی که دو رقم سمت راستشان صفر یا بر ۲۵ بخشپذیر باشد.

۱۹- بخشپذیری بر ۴۵: اعدادی که هم بر ۵ و هم بر ۹ بخشپذیر باشند.

*** هرگاه a و b دو عدد طبیعی بر عدد طبیعی c بخشپذیر باشند آنگاه مجموع، اختلاف، حاصل ضرب و a^n و b^n نیز بر عدد c بخشپذیر می شوند. ولی در مورد تقسیم همیشه اینگونه نیست.**

مثال: دو عدد ۳۶ و ۱۲ هر دو بر ۴ بخشپذیرند در نتیجه: $۳۶+۱۲$ و $۳۶-۱۲$ و ۳۶×۱۲ نیز بر ۴ بخشپذیرند.

باقیمانده

- ۱- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲: برابر باقیمانده تقسیم یکانش بر ۲ است.
 - ۲- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳: برابر باقیمانده تقسیم مجموع ارقامش بر ۳ می باشد.
 - ۳- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۴: برابر باقیمانده تقسیم دو رقم سمت راست عدد بر ۴ می باشد.
 - ۴- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۵: برابر باقیمانده تقسیم یکان عدد بر ۵ می باشد.
 - ۵- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۶: برابر باقیمانده تقسیم مجموع رقم یکان عدد با ۴ برابر مجموع بقیه رقم های عدد می باشد.
 - ۶- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۸: برابر باقیمانده تقسیم سه رقم سمت راست عدد بر ۸ می باشد.
 - ۷- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹: برابر باقیمانده تقسیم مجموع ارقامش بر ۹ می باشد.
 - ۸- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰: برابر رقم یکانش است.
 - ۹- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰۰: برابر دو رقم سمت راستش است.
 - ۱۰- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰۰۰: برابر سه رقم سمت راستش است.
 - ۱۱- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۱: برابر مجموع ارقام مثبت و منفی عدد به صورت یک درمیان بر ۱۱ است.
 - ۱۲- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲۵: برابر باقیمانده تقسیم دو رقم سمت راست عدد بر ۲۵ است.
- ★ اگر مقسوم و مقسوم علیه تقسیمی در عددی غیر صفر، ضرب یا تقسیم شود. باقیمانده نیز در همان عدد ضرب یا تقسیم می شود ولی خارج قسمت تغییر نمی کند

مثال:

$$\begin{array}{r}
 35 \overline{) 105} \\
 \underline{96} \\
 9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 \overline{) 24} \\
 \underline{21} \\
 3
 \end{array}$$

$\times 3$
 $\times 3$

★ اگر مقسوم علیه تقسیمی ثابت باشد مقسوم به هر توانی برسد باقیمانده نیز به همان توان می رسد.

مثال: باقیمانده تقسیم عدد 7421394 بر عدد ۳ چند است؟

$$\begin{array}{r}
 742 \overline{) 1} \\
 \underline{1} \\
 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 7421394 \overline{) 3} \\
 \underline{1394} \\
 0
 \end{array}$$

تذکر: در حل سوالات مربوط به باقی مانده تقسیم وقتی مقسوم علیه به توان میرسد بهتر است در صورت امکان توانی از مقسوم را انتخاب کنیم که باقیمانده آن بر مقسوم علیه $(1), (0), (-1)$ باشد.

★ اگر باقیمانده تقسیم a بر b برابر r باشد:

الف) باقیمانده تقسیم na بر b برابر باقیمانده تقسیم nr بر b است.

ب) باقیمانده تقسیم $a \pm c$ بر b برابر باقیمانده تقسیم $r \pm c$ بر b است.

مثال: باقی مانده تقسیم عدد $7 - 17^{20} \times 13$ بر 4 برابر است با:

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

حل: باقیمانده 17 بر 4 برابر 1 می باشد پس باقیمانده 17^{20} بر 4 نیز برابر 1^{20} میشود و باقیمانده $17^{20} \times 13$ بر 4 ، برابر باقیمانده تقسیم

13×1 بر 4 می شود پس باقیمانده تقسیم $7 - 17^{20} \times 13$ بر 4 ، برابر تقسیم $6 = 7 - 13 \times 1$ بر 4 میشود یعنی عدد 2

★ برای به دست آوردن باقیمانده تقسیم مجموع یا تفریق چند عدد بر n کفایت باقیمانده تقسیم هر کدام از آن اعداد را بر n به دست آورده و با هم جمع یا تفریق کنیم. اگر حاصل از n بیشتر شد آن را دوباره بر n تقسیم کرده و باقیمانده را به دست می آوریم.

مثال: باقیمانده تقسیم عبارت $2005 + 2004 + 2003 + 2002 + 2001$ بر 1999 چیست؟

باقیمانده هر یک از اعداد بالا بر 1999 عبارت است از $2, 3, 4, 5$ و 6 پس باقیمانده عبارت بالا بر 1999 برابر است با: $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$

★ برای به دست آوردن باقیمانده تقسیم حاصل ضرب چند عدد بر n کفایت باقیمانده تقسیم هر کدام از آن اعداد را بر n به دست آورده و با هم ضرب کنیم. اگر حاصل از n بیشتر شد آن را دوباره بر n تقسیم کرده و باقیمانده را به دست می آوریم.

★ اگر در یک تقسیم مقسوم علیه برابر b و باقیمانده برابر r باشد حداکثر می توان $1 - r = b$ واحد به مقسوم اضافه نمود تا خارج قسمت تغییر نکند.

مثال: در یک تقسیم مقسوم علیه برابر 61 و باقیمانده 23 می باشد بزرگ ترین عددی که می توانیم به مقسوم اضافه کنیم تا خارج قسمت تغییر نکند چه عددی است؟
بزرگترین عدد $61 - 23 = 38$ می باشد. بنابراین مثلا اگر با توجه به صورت سوال، مقسوم را 145 بگیریم داریم:

$$\begin{array}{r} 145 \overline{) 61} \\ \underline{122} \\ 23 \end{array} \quad \xrightarrow{145 + 38 = 182} \quad \begin{array}{r} 182 \overline{) 61} \\ \underline{122} \\ 60 \end{array}$$

همانطور که در روبه رو می بینیم خارج قسمت تغییر نکرد و همان 2 باقی ماند.

★ اگر در یک تقسیم خارج قسمت برابر q و باقیمانده برابر r باشد حداکثر مقداری که می توان به مقسوم علیه اضافه نمود تا با ثابت ماندن مقسوم، خارج قسمت تغییر نکند برابر خارج قسمت تقسیم باقیمانده اولیه بر خارج قسمت اولیه است یعنی: $\frac{r}{q}$

مثال: در یک تقسیم باقیمانده ۱۷ و خارج قسمت ۵ می باشد حداکثر چند واحد واحد می توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند.

حداکثر ۳ واحد یعنی $\frac{17}{5} \cong 3$ می توان به مقسوم علیه اضافه کرد.

★ اگر a, b, n اعداد طبیعی باشند و $a > b$ باشد در اینصورت همواره $a^n - b^n$ بر $a - b$ بخشپذیر است

مثال: عبارت $5^{18} - 12^{18}$ همواره بر $5 - 12 = 7$ بخشپذیر است.

محاسبات عددی:

★ ترتیب انجام عملیات در ریاضی:

اول: پیدا کردن حاصل پرانتز (کروشه) آن هم از داخلی ترین پرانتز.

دوم: توان و جذر

سوم: ضرب و تقسیم (هر کدام سمت چپ دیگری بود اولویت با اوست).

چهارم: جمع و تفریق:

مثال: حاصل عبارت مقابل را پیدا کنید.

$$9 - 5 \left[7 - 3 \left(\frac{1^2}{2} - 9 \right)^2 \right] = 9 - 5[4] = 9 - 20 = -11$$

فرمول های مهم برای محاسبات عددی

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

★ مجموع اعداد طبیعی :

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1)$$

★ مجموع اعداد طبیعی زوج:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$$

★ مجموع اعداد طبیعی فرد:

★ برای انجام محاسبات عددی می توان به جای عبارت های بالا به صورت کلی از مجموع سری اعداد منظم که با شروع از هر عددی میتوان از آن استفاده کرد.

★ سری اعداد منظم: یک تعداد از اعداد که فاصله ی هر دو عدد متوالی آنها ثابت باشد.

میانگین سری اعداد منظم:

$$M = (\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}) \div 2 \quad (\text{میانگین})$$

تعداد اعداد سری اعداد منظم:

$$N = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{+1} \quad (\text{تعداد})$$

فاصله دو عدد متوالی

مجموع اعداد سری منظم:

$$S = M \times N = \text{تعداد} \times \text{میانگین}$$

مثال: حاصل $۱۵۹ + ۱۵ + ۱۱ + ۷ + ۳$ را به دست آورید.

$$M = \frac{۱۵۹ + ۳}{۲} = ۸۱$$

$$N = \frac{۱۵۹ - ۳}{۴} = \frac{۱۵۶}{۴} = ۷۸$$

$$S = M \times N = ۸۱ \times ۷۸ = ۶۳۱۸$$

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + n^۲ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{۶}$$

*مجموع مربعات اعداد طبیعی:

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + n^۳ = \left(\frac{n(n+1)}{۲} \right)^۲$$

*مجموع مکعبهای اعداد طبیعی:

$$۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+۲)}{۳}$$

*

$$۱ \times ۱! + ۲ \times ۲! + ۳ \times ۳! + \dots + n \times n! = (n+1)! - n!$$

*

*اصل ضرب: اگر عملی به m طریق و عمل دیگری به n طریق انجام شود، آن دو عمل با هم به $m \times n$ طریق انجام خواهند

گرفت. (دو عمل باید متوالی و مستقل از هم باشند)

مثال: برای رفتن از شهرکرد به اصفهان ۳ راه و برای رفتن از اصفهان به قم نیز ۲ راه و وجود دارد برای رفتن از شهرکرد به قم چند راه وجود دارد؟

$$۳ \times ۲ = ۶$$

★ **اصل جمع:** اگر عملی به m طریق و عمل دیگری به n طریق انجام شود به طوری که این دو عمل هم زمان نتوانند با هم انجام شوند. آنگاه اگر بخواهیم یکی از این اعمال را انجام دهیم. یکی از این اعمال به $m + n$ روش انجام می شود.

مثال: یک گروه ۳۰ نفری را در نظر بگیرید اگر هر فرد این گروه بفواهد با افراد دیگر گروه دست دهد به $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + ۲۹$ طریق انجام می گیرد.

آمار و میانگین

★ میانگین یک سری از اعداد طبیعی که به ترتیب نوشته شده است برابر است با میانگین عدد اول و آخر.

$$\frac{۸ + ۹۸}{۲} = ۵۳$$

مثال: میانگین اعداد $۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, \dots, ۹۸$ چند است؟

★ در یک سری متوالی اگر تعداد اعداد فرد باشد میانگین کل اعداد برابر است با عدد وسطی، و اگر تعداد اعداد زوج باشد میانگین برابر است با میانگین دو عددی که در وسط هستند.

★ اگر به تک تک داده ها مقداری دلخواه اضافه یا کم کنیم به میانگین نیز همان مقدار دلخواه اضافه یا کم می شود.

مثال: اگر میانگین داده های $۱, ۲, ۳, ۴, \dots, ۱۵$ برابر ۸ باشد. به هر یک از داده ها ۱۰ واحد اضافه می کنیم میانگین جدید چند خواهد شد؟

$$۸ + ۱۰ = ۱۸$$

حل: به میانگین نیز ۱۰ واحد اضافه می شود و میانگین جدید برابر است با:

★ اگر تک تک داده ها را در عددی ضرب یا تقسیم کنیم میانگین نیز در همان عدد ضرب یا تقسیم می شود.

مثال: اگر میانگین داده های a, b, c, d, f برابر ۲۳ باشد میانگین داده های $۳a, ۳b, ۳c, ۳d, ۳f$ چند می شود؟

$$\text{حل: میانگین جدید } ۳ \times ۲۳ = ۶۹$$

★ اگر میانگین کل داده ها را M و میانگین اعداد کنار گذاشته شده را A بنامیم آنگاه:

(الف) اگر $A = M$ میانگین تغییر نمی کند

(ب) اگر $A < M$ میانگین بیشتر می شود.

(ج) اگر $A > M$ میانگین بیشتر می شود.

مثال: میانگین تعدادی عدد ۲۲ می باشد اگر از این مجموعه اعداد ۱۷ و ۲۴ و ۲۵ را حذف کنیم میانگین بقیه اعداد چند می شود؟

۴) داده ها کافی نیست.

۳) ۲۲

۲) ۲۱

۱) ۱۹

حل: میانگین تغییر نمی کند $\Rightarrow M = A \Rightarrow A = (17 + 24 + 25) \div 3 = 22 \Rightarrow M = 22$ و

★ اگر مجموع همه **اختلاف های** همه ی داده ها با میانگین را حساب کرده وبا هم جمع کنیم **مجموعشان صفر** خواهد شد.

مثال) اگر اختلاف میانگین با همه داده ها ی مقابل را حساب کنیم مجموع اختلاف ها چند می شود؟ ۱۲ و ۹ و ۳ و ۴ و ۱۰ و ۲۵

$$M = \frac{25 + 10 + 4 + 3 + 9 + 12}{6} = \frac{63}{6} = 10.5 \Rightarrow 25 - 10.5, 10 - 10.5, 4 - 10.5, 3 - 10.5, 9 - 10.5, 12 - 10.5 \Rightarrow$$

$$14.5, -0.5, -6.5, -7.5, -1.5, 1.5 \Rightarrow 14.5 - 0.5 - 6.5 - 7.5 - 1.5 + 1.5 = 0$$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

اعداد اول

★ در جمع ، تفریق و ضرب اعداد طبیعی همواره رابطه های زیر برقرار است.

$$\text{زوج} = \text{زوج} + \text{زوج}$$

$$\text{زوج} = \text{زوج} \times \text{زوج}$$

$$\text{فرد} = \text{فرد} + \text{زوج}$$

$$\text{زوج} = \text{فرد} \times \text{زوج}$$

$$\text{زوج} = \text{فرد} + \text{فرد}$$

$$\text{فرد} = \text{فرد} \times \text{فرد}$$

★ اگر مجموع یا تفاضل دو عدد اول ، عددی فرد باشد. حتماً یکی از آن دو عدد ، ۲ می باشد.

مثال: تفاضل مربعات دو عدد اول ۹۶۷۱۷ است مجموع مربع عدد کوچکتر و فرد عدد بزرگتر کدام است؟ (انرژی اتمی)

$$۳۱۹(۴)$$

$$۳۱۷(۳)$$

$$۳۱۵(۲)$$

$$۳۱۳(۱)$$

حل: چون جواب تفاضل عددی فرد شده پس یک عدد زوج و عدد دیگر فرد است و می دانیم تنها عدد اول زوج ۲ می باشد پس :

$$۹۶۷۱۷ + ۲^۲ = ۹۶۷۲۱ \Rightarrow \sqrt{۹۶۷۲۱} = ۳۱۱ \Rightarrow ۳۱۱ + ۲^۲ = ۳۱۵ \quad \text{عدد اول بزرگتر}$$

ایران نوشته

نوشته ای برای موفقیت

★ اگر حاصل ضرب دو عدد اول، عددی زوج باشد حتماً یکی از آن دو عدد ، ۲ می باشد.

مثال: حاصل ضرب دو عدد اول برابر ۳۹۴ می باشد عدد بزرگتر را پیدا کنید. $۳۹۴ \div ۲ = ۱۹۷$

★ در الگوریتم غربال ، اولین مضرب هر عدد که برای اولین بار خط می خورد **مجذور (مربع)** آن عدد اول است.

مثال: در الگوریتم غربال اعداد از ۱ تا ۱۰۰ اولین مضرب ۷ که برای بار اول خط می خورد کدام است؟ $۷^۲ = ۴۹$

★ در الگوریتم غربال اعداد از ۱ تا n همیشه **نصف** تعداد اعداد با عدد یک و مضربهای ۲ به جز خود ۲ خط می خورند. (اگر n زوج

باشد) و اگر n فرد باشد یک واحد از n کم می کنیم و سپس نصف می کنیم.

مثال: در الگوریتم غربال اعداد از ۱ تا ۱۵۹ ، هشتم و سومین عددی که برای بار اول خط می خورد کدام است؟

حل) $79 = 2 \div (159 - 1)$ پس هفتاد و نه عدد با مضربهای ۲ و عدد ۱ فقط می‌خورند حال باید مضربهای ۳ را پیدا کنیم. اولین مضرب ۳ که فقط می‌خورد عدد ۹ می‌باشد یعنی مضربهای فرد عدد ۳ می‌باشد که به ترتیب اعداد ... و ۲۷ و ۲۱ و ۱۵ و ۹ می‌باشند پس عدد ۲۷ پاسخ سوال است.

مثال ۲) در روش غربال برای پیدا کردن اعداد اول بین اعداد ۳۰۰ تا ۵۵ چندمین عددی است که فقط می‌خورد؟

۲۰۰ (۱) ۲۰۲ (۲) ۲۰۳ (۳) ۲۰۱ (۴)

حل) چون $5 \times 5 = 25$ و $5 \times 7 = 35$ و $5 \times 11 = 55$ پس ۵۵ سومین مضرب ۵ می‌باشد که برای اولین بار فقط می‌خورد. نصف تعداد اعداد با

مضربهای ۲ و عدد ۱ فقط می‌خورند یعنی ۱۵۰ تا اکنون مضربهای فرد عدد ۳ غیر از خودش را پیدا می‌کنیم که می‌شود $49 = 1 + \frac{9 - 297}{6}$ در نتیجه

$$3 + 49 + 150 = 202$$

یعنی ۵۵ دویست و دومین عددی است که فقط می‌خورد.

★ در الگوریتم غربال اعداد از یک تا n مضرب های اعداد اولی که بعد از مجذورشان برای اولین بار خط می‌خورند از ضرب همان عدد اول در اعداد اول بعدیش به دست می‌آیند. (برای اعداد اول بزرگ تر از ۳)

مثال: برای عدد اول ۵ اولین عددی که برای اولین بار فقط می‌خورد مجذور ۵ است. و اعداد بعدی عبارتند از:

$$5 \times 7 = 35 \quad \text{و} \quad 5 \times 11 = 55 \quad \text{و} \quad 5 \times 13 = 65 \quad \text{و} \quad \dots$$

تعداد شمارنده های یک عدد

★ هر گاه تجزیه ی عدد A به عوامل اول به صورت: $A = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c \times \dots$ باشد آنگاه تعداد مقسوم علیه های مثبت A (شمارنده ها) از رابطه ی $T(A) = (a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times \dots$ به دست می‌آید. (p_1 و p_2 و p_3 ... عامل های اول A هستند).

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

مثال: تعداد شمارنده های عدد ۱۲۰ را پیدا کنید.

$$T(120) = (3+1)(1+1)(1+1) = 16$$

تذکر: تعداد کل مقسوم علیه های هر عدد، ۲ برابر تعداد مقسوم علیه های مثبت آن عدد است.

★ تعداد مقسوم علیه های هر عدد برابر است با: **تعداد عوامل مرکب + تعداد عوامل اول + ۱**

مثال: تعداد مقسوم علیه های مرکب عدد ۱۲۰ را پیدا کنید.

حل) مقسوم علیه های اول عدد ۱۲۰ همانطور که در مثال قبل می‌بینیم ۲ و ۳ و ۵ می‌باشند پس $1 + 3 + X = 16 \Rightarrow X = 12$

تعداد شمارنده های فرد یک عدد: ابتدا عدد را تجزیه می کنیم سپس اگر در تجزیه عدد عامل ۲ داشته باشیم آن را کنار گذاشته و سپس به توان بقیه عامل ها یک واحد اضافه کرده و آنها را در هم ضرب می کنیم.

مثال: تعداد شمارنده های فرد عدد ۱۲۰ را حساب کنید.

حل) در تجزیه ۱۲۰ عامل های اول ۵ و ۳ را داریم که توان هر کدام ۱ می باشد بنابراین به توان هر کدام یک واحد اضافه کرده و در هم ضرب می کنیم $(1+1)(1+1) = 4$ پس تعداد شمارنده های فرد ۱۲۰ برابر ۴ می باشد.

تعداد شمارنده های زوج یک عدد: تعداد کل شمارنده های عدد را منهای تعداد شمارنده های زوج می کنیم.

مثال: در مورد عدد ۱۲۰ در مثال بالا داریم: $T(120) - 4 = 16 - 4 = 12$

تعداد شمارنده های مربع کامل یک عدد: تعداد عامل های با توان زوج را با کمک اصل ضرب پیدا می کنیم.

مثال: تعداد شمارنده های زوج عدد ۱۶۲۰ را پیدا کنید. $1620 = 2^2 \times 3^4 \times 5$

تعداد عامل های با توان زوج ۲ عبارتند از: $(2^0, 2^2)$ که ۲ تا می باشند و تعداد عامل های با توان زوج ۳ عبارتند از: $(3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4)$ که ۳ تا می باشند و تعداد عامل های با توان زوج ۵ عبارتند از: (5^0) که یکی می باشد پس تعداد کل شمارنده های مربع کامل طبق اصل ضرب می شود

$$2 \times 3 \times 1 = 6$$

تعداد شمارنده های مکعب کامل یک عدد: تعداد عامل های با توان مضرب ۳ را به کمک اصل ضرب پیدا می کنیم

مثال: عدد $5 \times 3^{10} \times 2^7$ چند مقسوم علیه دارد که مکعب کامل باشند؟

حل) تعداد عامل های با توان مضرب ۳ عبارتند از: $(2^0, 2^3, 2^6, 2^9)$ و $(3^0, 3^3, 3^6, 3^9, 3^{12})$ که طبق اصل ضرب تعداد آنها می شود

$$3 \times 4 \times 1 = 12$$

تعداد شمارنده های مشترک چند عدد: ابتدا «ب م م» اعداد را محاسبه کرده و سپس تعداد شمارنده های «ب م م» را پیدا می کنیم.

مثال: تعداد شمارنده های مشترک دو عدد ۱۴۴ و ۸۴ چند تا است؟

$$144 = 2^4 \times 3^2 \Rightarrow (144, 84) = 2^2 \times 3 = 12$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

پس تعداد شمارنده های ۱۲ همان تعداد شمارنده های مشترک دو عدد است.

تعداد اعداد طبیعی کوچکتر و متباین با یک عدد

★ هر گاه تجزیه ی عدد A به عوامل اول به صورت: $A = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c \times \dots$ باشد آنگاه تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از A که نسبت به A اول هم باشند از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\phi(A) = A \times \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \times \dots$$

مثال: تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۶۰۰ که نسبت به ۶۰۰ اول هستند چند است؟

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

$$600 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 600 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 160$$

★ اگر n تعداد شمارنده های اول یک عدد باشد تعداد حالت هایی که می توان آن عدد را به شکل ضرب دو عدد متباین نوشت برابر است با: 2^{n-1}

مثال: تعداد حالت هایی که می توان عدد ۶۰۰ را به شکل ضرب دو عدد متباین نوشت چند است؟

حل) تعداد شمارنده های اول عدد ۶۰۰ سه تا می باشد پس تعداد حالت ها: $2^{3-1} = 4$ است که به صورت زیر می باشد.

$$(1) \times 600 \quad (2) \times 300 \quad (3) \times 200 \quad (4) \times 150$$

★ حاصل ضرب مقسوم علیه های یک عدد (شمارنده ها) برابر است با همان عدد به توان نصف تعداد مقسوم علیه هایش یعنی:

$$\frac{T}{A^{\frac{1}{2}}}$$

مثال: حاصل ضرب شمارنده های عدد ۱۲۰ چند است؟

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5 \Rightarrow T(120) = (3+1)(1+1)(1+1) = 16$$

$$\frac{16}{120^{\frac{1}{2}}} = 120^{\frac{1}{2}}$$

پس حاصل ضرب شمارنده ها برابر می شود با:

مجموع شمارنده های یک عدد

★ هر گاه تجزیه ی عدد A به عوامل اول به صورت: $A = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c \times \dots$ باشد آنگاه مجموع مقسوم علیه های عدد A از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\text{مجموع شمارنده های } A = \frac{p_1^{a+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{b+1} - 1}{p_2 - 1} \times \frac{p_3^{c+1} - 1}{p_3 - 1} \times \dots$$

و یا از رابطه ی زیر نیز می توان استفاده کرد.

$$A = (p_1^0 + p_1^1 + p_1^2 + p_1^3 + \dots + p_1^a) (p_2^0 + p_2^1 + p_2^2 + p_2^3 + \dots + p_2^b) \times \dots$$

مثال: مجموع شمارنده های ۶۰۰ را پیدا کنید.

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

$$\text{مجموع شمارنده های } 600 = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) (3^0 + 3^1) (5^0 + 5^1 + 5^2) = 15 \times 4 \times 31 = 1860$$

مجموع معکوس شمارنده های یک عدد : مجموع شمارنده های عدد را پیدا کرده و بر خود عدد تقسیم می کنیم.

$$\frac{1860}{600} = 3/1$$

مثال: مجموع معکوس شمارنده های عدد ۶۰۰ را از مثال قبل پیدا کنید.

*** قضیه ی جیبی شف :** برای محاسبه ی تعداد عوامل اول p در حاصل ضرب 1 تا n (فاکتوریل n) کافیست عدد n را بر توان های p تقسیم کرده و خارج قسمت ها را جمع بزنیم.

مثال: تعداد عوامل عدد ۷ در حاصل ضرب ۱ تا ۱۰۰ چند است؟

قسمت صحیح

$$\left[\frac{100}{7^1} \right] = 14 \quad \text{و} \quad \left[\frac{100}{7^2} \right] = 2$$

علامت کروسه در اینجا به معنی خارج قسمت تقسیم به شکل عدد صحیح است. $\Rightarrow 14 + 2 = 16$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

*** برای محاسبه ی تعداد صفرهای سمت راست عدد $n!$ (فاکتوریل n) کافیست عدد n را بر توانهای ۵ تقسیم کنیم و خارج قسمت ها را جمع کنیم**

مثال: تعداد صفر های سمت راست حاصل ضرب اعداد از یک تا ۱۸۹ چند است؟

$$\left[\frac{189}{5^1} \right] = 37 \quad \text{و} \quad \left[\frac{189}{5^2} \right] = 7 \quad \text{و} \quad \left[\frac{189}{5^3} \right] = 1 \Rightarrow 37 + 7 + 1 = 45 \quad \text{تعداد صفرها}$$

*** برای به دست آوردن تعداد مضارب a کوچکتر از عدد n کافیست عدد n را بر عدد a تقسیم کنیم که خارج قسمت تقسیم، جواب سوال است.**

$$\left[\frac{1000}{7} \right] = 142$$

مثال: تعداد مضارب ۷ کوچکتر از عدد ۱۰۰۰ چند تا است؟

★ همه ی مضرب های مشترک چند عدد ، همان مضرب های «ک م م» آن اعداد است.

مثال: دو سری از اعداد داریم که هر کدام با نظم خاصی مرتب شده اند عدد ۵۱ اولین عدد مشترک دو لیست است عدد مشترک بعدی کدام است؟
 ... و ۷۵ و ۶۳ و ۵۱ و ۳۹ و ۲۷
 ... و ۷۲ و ۵۱ و ۳۰ و ۹ و ۱۲-

...

حل) اعداد سری اول ۱۲ تا ۱۲ تا اضافه شده اند و اعداد لیست دوم ۲۱ تا ۲۱ تا اضافه شده اند پس :

ابتدا $[12, 21]$ را حساب می کنیم که برابر ۸۴ است حال چون اولین عدد مشترک ۵۱ می باشد. دومین عدد مشترک $51 + 1 \times 84$ و سومین عدد مشترک $51 + 2 \times 84$ و چهارمین عدد $51 + 3 \times 84$ می شود.

★ «ب م م» هر دو عدد متباین برابر ۱ و «ک م م» هر دو عدد متباین برابر حاصل ضرب آنهاست.

$$[a, b] = \frac{a \times b}{(a, b)}$$

★ حاصل ضرب دو عدد برابر حاصل ضرب «ک م م» آن دو عدد در «ب م م» آنها می باشد یا

مثال: «ب م م» دو عدد ۴ و «ک م م» دو عدد ۱۶۸ و یکی از اعداد ۲۴ می باشد عدد دیگر را پیدا کنید.

$$168 \times 4 = 24 \times x \Rightarrow x = \frac{168 \times 4}{24} = 28$$

★ ویژگی های «ب م م» و «ک م م»: اگر a, b, c, d, k اعدادی طبیعی باشند آنگاه:

$$(a, 1) = 1$$

$$(a, a) = a$$

$$(a, b) = d \Rightarrow (ka, kb) = kd$$

$$[a, b] = c \Rightarrow [ka, kb] = kc$$

$$(a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k} \right) = \frac{d}{k} \quad k \neq 0$$

$$[a, 1] = a$$

$$[a, a] = a$$

$$(a, b) = d \Rightarrow (a^k, b^k) = d^k$$

$$[a, b] = c \Rightarrow [a^k, b^k] = c^k$$

$$[a, b] = c \Rightarrow \left[\frac{a}{k}, \frac{b}{k} \right] = \frac{c}{k} \quad k \neq 0$$

مجموعه ها

باز یا بسته بودن مجموعه نسبت به یک عمل:

★ می گوئیم مجموعه ای A نسبت به یک عملی بسته است که به ازای هر عضو یا عضوهای A (حتی تکراری) حاصل نیز عضوی از مجموعه A شود در غیر اینصورت مجموعه A را نسبت به آن عمل باز می گوئیم.

مثال: مجموعه $\{1, 0, -1\}$ نسبت به عمل جمع بسته است یا نه؟
 زیرا $-2 = (-1) + (-1)$ و -2 عضو مجموعه نیست.

★ **مجموعه های متناهی و نامتناهی:** مجموعه ای که اعضای آن با شمردن به پایان برسد مجموعه ای متناهی نامیده می شود. هر مجموعه که متناهی نباشد، نامتناهی است.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰ متناهی و مجموعه کسرهای بین ۳ و ۲ نامتناهی است.

★ **دو مجموعه مساوی:** دو مجموعه که هر عضو اولی در دومی و هر عضو دومی در اولی باشد.

مثال: به ازای چه تعداد عدد صحیح x دو مجموعه $A = \{1, x, x^2\}$ و $B = \{y, y^2\}$ می توانند برابر باشند؟

۱ (۱)	۲ (۲) صفر	۲ (۳) ✓	۳ (۴)
-------	-----------	---------	-------

$$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \begin{aligned} y=1 &\Rightarrow x=1 \Rightarrow A=\{1\}, B=\{1\} \\ y=-1 &\Rightarrow x=-1 \Rightarrow A=\{-1, 1\}, B=\{-1, 1\} \end{aligned}$$

★ **دو مجموعه جدا از هم:** دو مجموعه که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند.

مثال: دو مجموعه ای اعداد زوج (E) و اعداد فرد (O)

★ **دو مجموعه هم ارز:** دو مجموعه A و B را دو مجموعه هم ارز می گویند در صورتیکه بین اعضای دو مجموعه حداقل یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد..

مثال: مجموعه اعداد طبیعی با هریک از مجموعه های اعداد طبیعی زوج و اعداد طبیعی فرد و مجموعه اعداد صحیح و اعداد حسابی و اعداد گویا هم ارز است.

★ اگر عضو های مجموعه ای یک در میان مثبت و منفی باشند در توصیف مجموعه با علائم ریاضی باید از ضریب $(-1)^n$ یا $(-1)^{n+1}$ که در آنها $n \in N$ یا $n \in W$ است استفاده کرد.

مثال: نمایش ریاضی مجموعه $A = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$ در کدام گزینه به درستی نوشته شده است؟

$$A = \{(-1)^n \times n \mid n \in N\} \quad (1)$$

$$A = \{(-1)^n \mid n \in N\} \quad (2)$$

$$A = \{(-n)^n \mid n \in N\} \quad (3)$$

$$\checkmark A = \{(-1)^n \times n \mid n \in N\} \quad (4)$$

★ اگر عضو های مجموعه ای دو تا در میان مثبت و منفی باشند در توصیف مجموعه با علائم ریاضی باید از ضریب $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ یا $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ که در آنها $n \in N$ است استفاده کرد.

مثال: نمایش ریاضی مجموعه $\{-1, -4, +9, +16, -25, -36, \dots\}$ برابر است با:

$$\left\{ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times n^2 \mid n \in N \right\}$$

مجموعه مرجع: به مجموعه ای گفته می شود که همه عضو ها یا مجموعه های مورد بحث در آن مورد را شامل باشد و معمولاً آن را با حرف U یا M نمایش می دهند

مجموعه متمم: اگر A زیر مجموعه ای از مجموعه مرجع باشد A' را متمم مجموعه A گوئیم که شامل عضو هایی از مجموعه مرجع است که در A نباشند.

زیر مجموعه: اگر $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه باشد هر کدام از اعضای A می تواند در زیر مجموعه باشد یا نباشد یعنی برای هر عضو دو حالت داریم. پس طبق اصل ضرب برای یک مجموعه n عضوی داریم:

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{\text{عضو اول}} = 2^n$$

عضو n ام

تعداد زیر مجموعه های دو عضوی :

فرض کنیم مجموعه $B = \{\Delta, \Delta\}$ یک زیر مجموعه ای دو عضوی دلخواه از مجموعه ای n عضوی A باشد که دو خانه خالی دارد که حتماً باید پر شود. برای پر کردن کردن خانه اول به n حالت می توانیم ولی برای پر کردن دوم دیگر از عضوی که در خانه اول قرار دادیم نمی توانیم استفاده کنیم پس به $n-1$ حالت می توانیم این خانه را پر کنیم و در نتیجه در کل می توانیم این دو خانه را به $n \times (n-1)$

روش پر کنیم ولی با توجه به اینکه جابجایی اعضا در مجموعه ها بی اثر است. پس مثلاً $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ یک زیر مجموعه حساب می شوند. بنا براین نصف حالتها حذف می شوند پس تعداد زیر مجموعه های دو عضوی برابر است با:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

مثال: تعداد زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ چند تاست؟

$$\frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 10$$

(روش دوم)

$$\frac{5(5-1)}{2} = 10 \quad (\text{روش اول})$$

تعداد زیر مجموعه های سه عضوی:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

تعداد زیرمجموعه های سه عضوی نیز با روشی مانند روش بالا از فرمول زیر حساب می شود.

تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی را نیز می توان با یکی از فرمول های زیر به دلخواه نیز حساب کرد.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

و یا به کمک فاکتوریل از فرمول

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times k}$$

مثال: تعداد زیر مجموعه های ۷ عضوی از یک مجموعه ۱۰ عضوی را پیدا کنید.

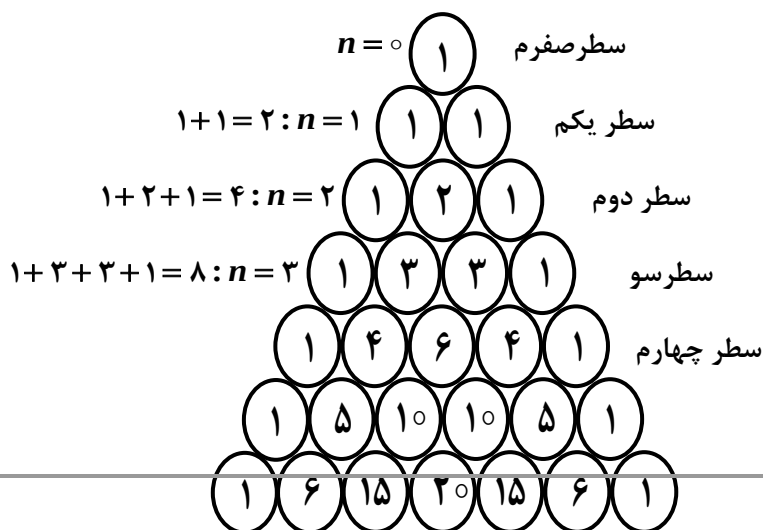
$$\frac{10(10-1)(10-2)(10-3)\dots(10-6)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} = 120 \quad (\text{روش اول})$$

(روش دوم با استفاده از فرمول فاکتوریل)

تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی با کمک مثلث خیام - پاسکال:

در این مثلث مجموع اعداد هر سطر تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی را نشان می دهد.

و هر عدد روی ضلع پایین مثلث مربوط به هر سطر تعداد زیر مجموعه های k عضوی از آن مجموعه n عضوی را نمایش می دهد.



سطر پنجم

$$1+6+15+20+15+6+1=64:n=6$$

سطر ششم

طرز نوشتن زیر مجموعه های یک مجموعه که عضوهای آنها دارای شرط باشند.

مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل a باشد ولی e در آنها نباشد.

حل: عضو a در تمام زیر مجموعه ها باید باشد پس فقط یک حالت دارد ولی برای بقیه اعضا دو حالت وجود دارد (بودن یا نبودن) بنابراین :

اعضوها : $a \quad b \quad c \quad d \quad e$

حالتها : $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2^3 = 8$

★ پس تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی که p تا از اعضای آن در زیر مجموعه باشند و q تا از اعضای آن در زیر مجموعه نباشند برابر است با:

$$2^{n-(p+q)}$$

مثال: چند زیر مجموعه 3 عضوی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ وجود دارد که عدد 10 هتما عضو آن بوده و 3 و 2 عضو آن نباشند؟

عضوهای 3 و 2 را حذف می کنیم و تعداد زیر مجموعه های 2 عضوی یک مجموعه 12 عضوی را پیدا می کنیم و سپس عضو 10 را به همه آنها اضافه می کنیم داریم:

$$\frac{12!}{2! \times (12-2)!} = \frac{11 \times 12}{2} = 66$$

مثال: مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ چند زیر مجموعه 3 عضوی دارد که جمع عضوهای آن برابر 15 و عدد 4 عضو آنها باشد؟

$$(1, 1), (9, 2), (8, 3), (5, 6) \Rightarrow \text{مجموع دو عضوی که } 11 \text{ می شود را پیدا می کنیم} \Rightarrow 15 - 4 = 11$$

با توجه به توضیح بالا دو عضو 3 و 7 نمی توانند جز زیر مجموعه ها باشند زیرا عضو سوم نیز 4 می شود که تکراری است. پس تعداد زیر مجموعه ها 3 تا می شود.

★ تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی و یا زوج عضوی یک مجموعه برابر است با:

$$2^{n-1}$$

مثال: تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی یک مجموعه 9 عضوی کدام است؟

$$2^{9-1} = 2^8 = 256 \text{ (ح)}$$

$$2^{10} \text{ (ع)}$$

$$2^{56} \text{ (س)}$$

$$2^{46} \text{ (ط)}$$

$$3^{10} \text{ (ث)}$$

★ در بین تمام زیر مجموعه های یک مجموعه، هر عضو در **نیمی** از آنها **تکرار** می شود.

مثال: A یک مجموعه ۶ عضوی است که جمع عضو های آن ۴۰ است. همه ی زیر مجموعه های A (که عضو تکراری در آن نباشد) را در نظر بگیرید و حاصل اعضای هر کدام را روی تخته سیاه یادداشت کنید. جمع اعداد یادداشت شده چند خواهد شد؟

$$1100(1) \quad 1280(2) \quad 2560(3) \quad 3100(4)$$

حل) طبق نکته بالا چون هر عضو در نیمی از زیر مجموعه ها تکرار می شود و چون تعداد زیر مجموعه ها ۶۴ تا می شود پس هر عضو در نصف آنها یعنی ۳۲ بار تکرار می شود و چون مجموع عضو ها ۴۰ می باشد پس $32 \times 40 = 1280$ مجموع اعداد یادداشت شده می شود.

★ اگر یک عضو به اعضای مجموعه ای اضافه شود تعداد زیر مجموعه های آن **۲ برابر** می شود.

مثال: به عضو های مجموعه ای ۴۰ عضوی، چند عضو **جدید** اضافه کنیم تا تعداد زیر مجموعه های آن ۸ برابر شود؟

$$1(1) \quad 2(2) \quad 3(3) \quad 4(4) \quad \checkmark$$

مثال) اگر به عضو های مجموعه A ، ۲ عضو اضافه شود به تعداد زیر مجموعه هایش ۱۹۲ واحد اضافه می شود. تعداد عضو های مجموعه A کدام است؟

$$4(1) \quad 6(2) \quad 8(3) \quad 10(4)$$

$$2^{n+2} = 2^n + 192 \Rightarrow 2^{n+2} - 2^n = 192 \Rightarrow 2^n(2^2 - 1) = 192 \Rightarrow 2^n \times 3 = 192 \Rightarrow 2^n = \frac{192}{3} = 64 = 2^6 \Rightarrow n = 6$$

★ اگر یک عضو از اعضای مجموعه ای کم شود تعداد زیر مجموعه های آن نصف می شود

زیر مجموعه های محض یک مجموعه: تمام زیر مجموعه های یک مجموعه به جز خودش.

★ تعداد زیر مجموعه های محض برابر است با: $2^n - 1$

مثال: تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه ۷ عضوی چند است؟ $2^7 - 1 = 127$

مجموعه توان یک مجموعه: مجموعه ی تمام زیر مجموعه های یک مجموعه را مجموعه توان آن مجموعه می گویند و آن را با نام مجموعه P نمایش می دهند.

مثال) اگر $A = \{b, \{b\}\}$ باشد $P(A)$ کدام است؟

$$\{\{b\}, \{\{b\}\}, \{\emptyset\}, A\} (4) \quad \{\{b\}, \{\{b\}\}, \emptyset, A\} (3) \quad \checkmark \quad \{b, \{b\}, \emptyset, A\} (2) \quad \{\{b\}, \{\{b\}\}, \emptyset\} (1)$$

★ تعداد عضوهای مجموعه توان مجموعه A یعنی $P(A)$:

$$2^{n(A)}$$

مثال: اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ باشد $P(P(A))$ چند عضو دارد؟

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) \quad 2^2 \quad (3) \quad (2^2)^2 \quad (4) \quad \left((2^2)^2\right)^2$$

مجموعه A دارای دو عضو است پس $P(A)$ دارای 2^2 یعنی ۴ عضو است و $P(P(A))$ دارای 2^4 یعنی ۱۶ عضو است.

*** تعداد زیر مجموعه هایی که در رابطه $B \subseteq X \subseteq A$ صدق می کنند از رابطه $2^{n(A)-n(B)}$ به دست می آید.**

مثال: چند مجموعه مانند X می توان نوشت که رابطه $\{2, 4, 6, 8\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ برای آن برقرار باشد؟

$$X = 2^{10-4} = 2^6 = 64 \quad \text{تعداد مجموعه ها}$$

*** اشتراک** تمام زیر مجموعه های یک مجموعه، مجموعه تهی میشود.

*** اجتماع** تمام زیر مجموعه های یک مجموعه، خود مجموعه می شود.

اصل شمول: تعداد عضو هایی که حداقل به یکی از مجموعه ها (دو تا، سه تا و ...) تعلق دارند.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

مثال) از ۸۰ نفر کل دانشجویان یک دانشکده، ۵۰ نفر در درس فیزیک و ۶۰ نفر در درس شیمی ثبت نام کرده اند. اگر ۸ نفر در هیچ یک از این دو درس ثبت نام نکرده باشند چه تعداد از دانشجویان در هر دو درس ثبت نام کرده اند؟

$$n(A \cup B) = 80 - 8 = 72$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 72 = 50 + 60 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 38$$

احتمال

فضای نمونه ای: مجموعه همه حالت های ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم و آن را با S نمایش می دهیم.

پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را پیشامد می گوئیم.

★ اگر سکه ای را n بار بیندازیم یا n سکه را یک بار بیندازیم تعداد کل حالت های ممکن $n(S) = 2^n$ می شود.

★ اگر تاسی را n بار بیندازیم یا n تاس را یک بار بیندازیم تعداد کل حالت های ممکن $n(S) = 6^n$ می شود.

مثال: اگر سه تاس را باهم بیندازیم کل حالت های ممکن $6^3 = 216$ حالت می شود.

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{همواره:}$$

★ اگر $P(A) = 0$ می گوئیم پیشامد A نشدنی یا غیر ممکن است.

★ اگر $P(A) = 1$ می گوئیم پیشامد A حتمی است.

پیشامد متمم: اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد پیشامد B را متمم پیشامد A می گوئیم مشروط بر آنکه $(A \cup B) = S$ باشد و در این مورد همواره داریم:

$$P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(B)$$

مثال: دو تاس را با هم انداخته ایم احتمال این که مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۱ باشند را به دست آورید.

بهتر است که احتمال این که مجموع اعداد رو شده ۱۱ یا ۱۲ باشند را حساب کنیم و از عدد ۱ کم کنیم:

$$(6,6), (6,5), (5,6) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال: دو تاس را با هم انداخته ایم احتمال این که مجموع اعداد رو شده ۱۱ یا ۱۲ باشند را حساب کنیم و از عدد ۱ کم کنیم.

★ هرگاه بین حالات مختلف یک پیشامد «یا» بیاید طبق اصل جمع تعداد آنها را با هم جمع می کنیم.

مثال: یک تاس را می اندازیم احتمال این که عدد ۲ یا ۵ بیاید چقدر است؟

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ احتمال آمدن عدد ۲ و } P(B) = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

★ واگر «و» بیاید طبق اصل ضرب آنها را در هم ضرب می کنیم.

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم می اندازیم احتمال این که تاس عدد ۵ و سکه رو بیاید.

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ احتمال آمدن ۵ تاس و } P(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

★ همچنین در سوالاتی که «حداقل» یا «حداکثر» را خواسته باشند تعداد پیشامد ها را با هم جمع می کنیم.

مثال: ۴ سکه را با هم پرتاب می کنیم احتمال اینکه حداقل یک سکه رو بیاید کدام است؟

$$\frac{12}{16} \quad (1) \quad \frac{13}{16} \quad (2) \quad \frac{14}{16} \quad (3) \quad \frac{15}{16} \quad (4)$$

کل حالتها برابر $16 = 2^4$ حالت می شود و چون فقط یک حالت داریم که هردو پشت بیاورد و در بقیه حالتها حداقل یکی رو خواهد آمد پس ۱۵ حالت خواهیم داشت بنا براین جواب $\frac{15}{16}$ است.

*** در برداشتن تصادفی r شیئی از میان n شیئی تعداد کل پیشامد های ممکن از را بطه ی زیر به دست می آید.**

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: ۹ عدد گوی یکسان با شماره های ۱ تا ۹ در داخل ظرفی قرار دارند. به طور تصادفی ۲ گوی از ظرف بیرون می آوریم احتمال آنکه شماره هر دو

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{3}{8} \quad (3) \quad \frac{1}{6} \quad (4)$$

$$P(A) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

تعداد حالتهای انتخاب ۲ گوی از بین ۹ گوی

$$n(S) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

در نتیجه داریم :

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

اعداد گویا

مقایسه کسرها:

- ۱- یکی کردن مخرج ها (مخرج مشترک گرفتن) (کسری بزرگ تر می شود که صورتش بزرگتر باشد).
- ۲- یکی کردن صورتها (ک.م.م.) صورت ها را پیدا می کنیم. (کسری بزرگ تر می شود که مخرجش کوچک تر باشد).
- ۳- طرفین وسطین کردن دو کسر به شرط آنکه حاصل ضرب طرفین (صورت کسر اول و مخرج کسر دوم) را در زیر کسر سمت چپ بنویسیم.
- ۴- تقسیم صورت بر مخرج کسر و پیدا کردن مقدار تقریبی آنها

مثال: دو کسر $\frac{3}{4}$ و $\frac{5}{7}$ را مقایسه کنید. (با ۴ روش بالا)

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} = 1.25, \frac{3}{7} = 0.428 \Rightarrow \frac{5}{4} > \frac{3}{7} \quad (1) \quad \frac{5}{4}, \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{15}{12} > \frac{15}{35} \quad (2) \quad \frac{5}{4}, \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{35}{28} > \frac{12}{28} \quad (3) \quad \frac{5}{4}, \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{5 \times 7}{4 \times 7} > \frac{3 \times 7}{4 \times 7} \quad (4) \end{aligned}$$

★ در کسرهایی که صورت یک واحد از مخرج کمتر است با بزرگ شدن اعداد حاصل کسر نیز بزرگ شده و به عدد یک نزدیکتر می شود.

ایران تونش
پوشش برای موفقیت

مثال: از اعداد $\frac{3}{4}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, \frac{67}{68}$ عدد $\frac{67}{68}$ به یک نزدیک تر است.

★ اگر به صورت و مخرج کسری کوچک تر از واحد مقدار مثبتی را اضافه کنیم مقدار کسر بزرگتر می شود.

مثال: از بین اعداد گویای $A = \frac{12345678}{87654321}$ و $B = \frac{12345679}{87654322}$ کدام بزرگتر است؟

حل) چون به صورت و مخرج کسر A که کوچک تر از واحد است یک واحد اضافه شده کسر B بزرگتر از A است.

★ اگر به صورت و مخرج کسری بزرگ تر از واحد مقدار مثبتی را اضافه کنیم مقدار کسر کوچکتر می شود.

★ اگر کسری بین صفر و یک باشد معکوس آن حتما از یک بزرگ تر است و اگر کسری بزرگتر از یک باشد حتما معکوس آن بین صفر و یک است.

★ مجموع هر عدد گویای مثبت با معکوسش همواره بزرگتر یا مساوی ۲ می شود. $a + \frac{1}{a} \geq 2$ یا $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

★ مجموع هر عدد گویای منفی با معکوسش همواره کوچکتر یا مساوی -۲ می شود. $a + \frac{1}{a} \leq -2$ یا $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$

مثال: حاصل عبارت $M = \left[1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{100}{101}\right] + \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{101}{100}\right]$ کرام است؟

$$M > 100 \quad (۴) \quad M < 100 \quad (۳) \quad M = 100 \quad (۲) \quad M \leq 100 \quad (۱)$$

حل) چون هر عدد داخل کروه ی اول معکوسش داخل کروه ی دوم قرار دارد پس طبق نکته بالا حاصل جمع هر دو عدد از ۲ بزرگتر می شود و بین داخل هر کروه ۵۱ عدد وجود دارد پس ۵۱ یفت عدد داریم: $M = 51 \times 2 > 100$

بین هر دو عدد دلخواه حقیقی، بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

روشهای نوشتن کسره های بین دو کسر:

۱- یکی کردن مخرج ها

تذکر: در این حالت اگر صورت دو کسر اعداد متوالی شد آنها را در عددی که یکی بیشتر از تعداد کسر های خواسته شده است ضرب می کنیم.

مثال: سه کسر بین $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{7}$ بنویسید. $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ و $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ چون ۲۰ و ۲۱ متوالی هستند باید صورت و مخرج را در

$$\frac{80}{140} < \frac{81}{140} < \frac{82}{140} < \frac{83}{140} < \frac{84}{140}$$

یکی بیشتر از تعداد خواسته شده یعنی ۴ ضرب می کنیم

توشه ای برای موفقیت

تذکر مهم: اگر بین دو کسر ، کسری با مخرج عددی خاص بخواهند باید «ک م م» آن عدد خاص را با مخرج های دو کسر پیدا کرده و سپس کسر خواسته شده را بنویسیم:

$$[14, 15, 18] = 9240 \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{616}{9240} < \frac{6}{18} = \frac{616}{9240} < \frac{616}{9240}$$

مثال: کسری بین $\frac{1}{15}$ و $\frac{1}{14}$ پیدا کنید که مخرج آن ۸۸ باشد.

۲- نوشتن کسری که صورتش حاصل جمع صورت های دو کسر و مخرجش حاصل جمع مخرج های دو کسر باشد.

$$\frac{4}{7} < \frac{4+3}{7+5} = \frac{7}{12} < \frac{3}{5} \quad \text{و} \quad \frac{4}{7} < \frac{4+7}{7+12} = \frac{11}{19} < \frac{7}{12} \quad \text{و} \quad \frac{7}{12} < \frac{7+3}{12+5} = \frac{10}{17} < \frac{3}{5}$$

مثال: سه کسر بین $\frac{4}{7}$ و $\frac{3}{5}$ بنویسید.

۳- پیدا کردن میانگین دو کسر:

نکته: در روش پیدا کردن میانگین دو کسر جواب به دست آمده **دقیقاً وسط** دو کسر قرار می گیرد.

مثال: کسری بین $\frac{7}{12}$ و $\frac{8}{13}$ پیدا کنید. میانگین دو کسر را پیدا می کنیم

$$\left(\frac{7}{12} + \frac{8}{13}\right) \div 2 = \left(\frac{91+96}{156}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{187}{156} \times \frac{1}{2} = \frac{187}{312}$$

۴- پیدا کردن مقدار تقریبی هر کسر با تقسیم صورت بر مخرج و نوشتن اعداد بین این دو مقدار

مثال: کسری بین $\frac{7}{12}$ و $\frac{8}{13}$ پیدا کنید.

$$\frac{7}{12} = 0.5833... < 0.59 < 0.61 = \frac{8}{13}$$

کسر تحویل ناپذیر (ساده نشدنی): کسری که صورت و مخرج آن ساده نشوند (یا «ب م م» صورت و مخرج ۱ باشند)

انواع اعداد اعشاری:

۱- **تحقیقی (مختوم):** کسر تحویل ناپذیری (بعد از ساده شدن) که مخرج آن فقط عامل های اول ۲ یا ۵ داشته باشد.

مثال:

$$\frac{252}{360} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{2^3 \times 3^2 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = 0.7 \quad \text{یا} \quad \frac{21}{15} = \frac{3 \times 7}{3 \times 5} = \frac{7}{5} = 0.14$$

۲- **متناوب ساده:** کسر تحویل ناپذیری (بعد از ساده شدن) که مخرج آن عامل های اول ۲ یا ۵ نداشته باشد.

مثال:

$$\frac{24}{728} = \frac{2^3 \times 3}{2^3 \times 7 \times 13} = \frac{3}{7 \times 13} = 0.03030303... = 0.\overline{03}$$

۳- **متناوب مرکب:** کسر تحویل ناپذیری (بعد از ساده شدن) که مخرج آن علاوه بر عامل های اول ۲ یا ۵، عامل اول دیگری هم داشته باشد.

مثال:

$$\frac{472}{900} = \frac{2^3 \times 59}{2^2 \times 5^2 \times 3^2} = \frac{118}{225} = 0.52444... = 0.5\overline{24}$$

۴- **نامختوم:** اعداد اعشاری که مختوم نباشند و رقم های اعشارشان تناوب هم نداشته باشند. مثل: $2/01001000100001...$

پیدا کردن کسره های مولد عدد اعشاری متناوب ساده :

عدد اعشاری را مساوی x فرض کرده و طرفین تساوی حاصل را با توجه به این که دوره گردش یک رقمی، دو رقمی، سه رقمی و... باشد به ترتیب در ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ و... ضرب می کنیم سپس طرفین دو معادله حاصل را از هم کم می کنیم تا معادله جدیدی فاقد اعداد متناوب ساخته شود. جواب این معادله، کسر مولد آن عدد اعشاری است.

مثال: کسر مولد عدد $0.\overline{27}$ را به دست آورید.

$$x = 0.\overline{27} \Rightarrow 100x - x = 27/\overline{27} - 0.\overline{27} = 27 \Rightarrow 99x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

$$100x = 27/\overline{27}$$

راه حل تستی:

اگر عدد اعشاری عدد صحیح دارد آن را می نویسیم سپس ارقام دوره گردش را در صورت نوشته و در مخرج به تعداد ارقام دوره گردش ۹ می گذاریم.

$$0.\overline{295} = \frac{295}{999}$$

$$4/\overline{37} = 4 \frac{37}{99} = \frac{433}{99}$$

مثال:

پیدا کردن کسره های مولد عدد اعشاری متناوب مرکب:

عدد اعشاری را مساوی x فرض کرده و طرفین تساوی حاصل را با در نظر گرفتن ارقامی که بعد از ممیز تکرار نمی شوند (دوره غیر گردش) در اعداد ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ و... ضرب می کنیم تا عدد اعشاری متناوب مرکب به عدد اعشاری متناوب ساده تبدیل شود و سپس مانند تبدیل عدد اعشاری متناوب ساده به نماد متعارفی عمل می کنیم.

مثال: کسر مولد عدد $0.\overline{468}$ را به دست آورید.

$$x = 0.\overline{468} \Rightarrow \begin{aligned} 100x &= 46/\overline{8} \\ 1000x &= 468/\overline{8} \end{aligned} \Rightarrow 1000x - 100x = 468/\overline{8} - 46/\overline{8} \Rightarrow 900x = 422 \Rightarrow x = \frac{422}{900} = \frac{211}{450}$$

راه حل تستی:

در صورت تمام ارقام بعد از ممیز را منهای ارقام اعشاری غیر گردش می کنیم و در مخرج به تعداد ارقام دوره گردش ۹ و به تعداد ارقام غیر گردش صفر قرار می دهیم.

$$0.\overline{153} = \frac{153 - 15}{900} = \frac{138}{900} \quad 7/\overline{123} = 7 \frac{123 - 1}{990} = 7 \frac{122}{990} = \frac{7052}{990}$$

مثال:

تذکر مهم: برای به دست آوردن حاصل جمع یا ضرب یا تفریق اعداد اعشاری متناوب باید ابتدا کسر مولد آنها را به دست آوریم و پس از پیدا کردن حاصل کسرها دوباره آن را به اعشاری متناوب تبدیل کنیم.

مثال) آیا می توان گفت حاصل $0.\overline{5} + 0.\overline{7} = 0.\overline{12}$ ؟ فی زیر:

$$0.\overline{5} + 0.\overline{7} = \frac{5}{9} + \frac{7}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

مثال: به ازای چند مقدار طبیعی n بسط اعشاری کوچک تر از واحد $\frac{5n}{126}$ متناوب مرکب است؟

(حل) باید $1, 2, 3, 4, \dots, 25$ و $n < 25/2 \Rightarrow n < 12.5 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, \dots, 12$ و n های صورت در مخرج نیز نباشند. $126 = 2 \times 3^2 \times 7$

کسرهای تلسکوپی

اگر در مخرج کسری دو عدد در هم ضرب شوند و در صورت آن کسر:

$$\frac{b-a}{a \times b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

(الف) تفاضل دو عدد مخرج باشد می توان آن کسر را به شکل تفاضل دو کسر با صورت ۱ نوشت

$$\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{29 \times 31} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} = \frac{1}{3} - \frac{1}{31} = \frac{31-3}{93} = \frac{28}{93}$$
 (مثال)

تذکره: در کسرهای تلسکوپی که در صورت آنها عددی غیر از تفاضل دو عدد مخرج وجود دارد می توان آن عبارت را به تلسکوپی تبدیل کرده و حاصل را در کسر $\frac{\text{عدد صورت}}{\text{اختلاف دو عدد مخرج}}$ ضرب کرد.

$$\frac{2}{5 \times 8} + \frac{2}{8 \times 11} + \frac{2}{11 \times 14} + \dots + \frac{2}{29 \times 32} = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{32} \right) \times \frac{2}{3} = \left(\frac{32}{160} - \frac{5}{160} \right) \times \frac{2}{3} = \frac{27}{160} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{80}$$

$$\frac{a+b}{a \times b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

(ب) مجموع دو عدد مخرج باشد می توان آن کسر را به شکل مجموع دو کسر با صورت ۱ نوشت.

کسرهای مسلسل:

برای محاسبه کسر های مسلسل از آخرین کسر شروع به حل می کنیم

(مثال) حاصل کسر مقابل را پیدا کنید.

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 2 + \frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

کسرهای مسلسل نامتناهی :

برای پیدا کردن این گونه کسرها ابتدا کل عبارت را برابر A قرار می دهیم سپس آن قسمت از عبارت را نیز که مانند کل عبارت می باشد برابر A قرار داده و سپس به کمک معادله و یا تجزیه با استفاده از اتحادها (خصوصاً اتحاد جمله مشترک) مقدار A را به دست می آوریم.

مثال: حاصل $6 - \frac{9}{6 - \frac{9}{6 - \frac{9}{\ddots}}}$ را پیدا کنید. (حل) کل عبارت را برابر A می گیریم داریم:

$$A = 6 - \frac{9}{6 - \frac{9}{6 - \frac{9}{\ddots}}} \Rightarrow A = 6 - \frac{9}{A} \Rightarrow A^2 = 6A - 9 \Rightarrow A^2 - 6A + 9 = 0 \Rightarrow (A - 3)(A - 3) = 0 \Rightarrow A = 3$$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

★ اگر x عددی دلخواه و غیر صفر باشد همواره داریم:

مثال) حاصل عبارت $\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{1991}}}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{1991}}}}}$ برابر است با:

(حل) در کسر اول عدد ۲ را به صورت $1+1$ می نویسیم داریم:

$$\frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{1991}}}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{1991}}}}} = \frac{1}{1+A} + \frac{1}{1+\frac{1}{A}} = 1$$

قدر مطلق

قدر مطلق هر عبارت و یا هر عدد همواره مقداری مثبت یا صفر (نامنفی) است.

$$|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y| \quad \text{نکته:}$$

مثال: اگر $|x| + |y| = 7$ باشد آنگاه بیشترین مقدار $|x + y|$ برابر ۷ و کمترین مقدار $|x + y|$ برابر صفر می شود.

نکته: مجموع هر عدد با قدر مطلقش همواره مقداری نامنفی است. یعنی: $a + |a| \geq 0$

نکته: در مورد ضرب و تقسیم عبارت های قدر مطلق دار نیز رابطه های زیر برقرار است.

$$|xy| = |x||y| \qquad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

نکته: $\sqrt{x^2} = |x|$

مثال: حاصل عبارت مقابل را پیدا کنید.
 $\sqrt{(\sqrt{11}-11)^2} = |\sqrt{11}-11| = -(\sqrt{11}-11) = 11-\sqrt{11}$

معادلات قدر مطلق دار: اگر a عدد حقیقی نامنفی باشد آنگاه همواره داریم: $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$

مثال: تعداد جوابهای معادله $|1 + |x + 2|| = 7$ برابر است با:

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) جواب ندارد.

$$|1 + |x + 2|| = 7 \Rightarrow 1 + |x + 2| = \pm 7 \Rightarrow \begin{cases} 1 + |x + 2| = 7 \Rightarrow |x + 2| = 6 \Rightarrow x + 2 = \pm 6 \Rightarrow x = 4, x = -8 \\ 1 + |x + 2| = -7 \Rightarrow |x + 2| = -8 \end{cases}$$

نکته: فاصله نقطه‌ی x از a را با نماد $|x - a|$ نمایش می دهیم.

مثال: فاصله نقطه‌ی x از -3 برابر ۴ می باشد x را پیدا کنید.

$$|x - (-3)| = 4 \Rightarrow |x + 3| = 4 \Rightarrow |x + 3| = \pm 4 \Rightarrow x = 1, x = -7$$

اگر a عدد حقیقی نامنفی باشد آنگاه همواره داریم: $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

مثال: در عبارت $|x - 2| \leq 5$ هر دو x را مشخص کنید.

$$|x - 2| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x - 2 \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x \leq 7$$

تناسب معکوس

در تناسب معکوس بر خلاف تناسب مستقیم با افزایش یک کمیت، کمیت دیگر به همان نسبت کاهش می یابد.

★ برای حل تناسب معکوس کمیت های هم جنس را زیر هم می نویسیم اما به جای طرفین وسطین کردن به صورت مستقیم کمیت ها را در هم ضرب می کنیم.

★ نکته ی مهم: در تناسب معکوس و مرکب معمولاً کنندگان کار، با زمان (ساعت و روز و...) رابطه ی معکوس دارند.

مثال: ۸ کارگر کاری را در ۱۴ روز انجام می دهند اگر نصف این کارگران همین کار را انجام می دادند کار چند روزه تمام می شد.

$$\begin{array}{l} 8 \text{ — } 14 \\ 4 \text{ — } x \end{array} \quad x = \frac{8 \times 14}{4} = 28$$

تناسب معکوس شکسته: تناسب معکوسی که از جایی به بعد شرایط مساله تغییر می کند.

مثال: ۸ کارگر ساقتمانی را ۲۳ روزه رنگ می کنند پس از ۳ روز ۲ نفر به آنها اضافه شدند بقیه کار چند روزه تمام می شود؟

$$\begin{array}{l} 8 \text{ — } 20 \\ 10 \text{ — } x \end{array} \Rightarrow x = \frac{8 \times 20}{10} = 16$$

روز باقیمانده $23 - 3 = 20$

ایران نونانه
توشه ای برای موفقیت

تناسب مرکب: تناسبی که در آن بیش از دو کمیت وجود داشته باشد. برای حل مسائل این نوع تناسب وضعیت هر ستون را با ستون

بعدی آن از نظر مستقیم یا معکوس بودن جنس کمیت آنها می سنجیم و آن را با خط مستقیم برای معکوس بودن و خط مورب برای مستقیم بودن جنس کمیتها مشخص می کنیم و با حرکت بر روی این خطوط کمیت ها را در هم ضرب کرده و مقدار مجهول را مشخص می کنیم.

مثال: ۱۴ کارگر با روزی ۶ ساعت کاری را ۲۰ روزه تمام می کنند اگر ۲۱ کارگر بفواهند همان کار را در ۳۰ روزه تمام کنند باید روزی چند ساعت کار کنند.

$$\begin{array}{l} 14 \text{ — } 6 \text{ — } 20 \\ 21 \text{ — } x \text{ — } 30 \end{array} \quad x = \frac{14 \times 6 \times 20}{21 \times 30} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

مثال: مأمور و مسعود با هم کاری را در ۱۸ ساعت و مسعود به تنهایی کار را در ۲۴ ساعت انجام می دهد مأمور به تنهایی کار را در چند ساعت انجام می دهد؟

حل) با توجه به صورت سوال مسعود در یک ساعت $\frac{1}{24}$ از کار را و دونفری با هم در یک ساعت $\frac{1}{18}$ از کار را انجام می دهند پس داریم:

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{x} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{18} - \frac{1}{24} = \frac{4-3}{72} = \frac{1}{72} \Rightarrow x = 72$$



توان

★ هر عدد به توان صفر برسد حاصل یک می شود.

★ هر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل مثبت خواهد شد.

★ هرگاه عددی بین صفر و یک باشد و به توان برسد هرچه توان بزرگتر باشد عدد کوچکتر خواهد شد.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} \quad (\text{مثال})$$

★ هر عدد به توان منفی برابر است با معکوس آن عدد به توان مثبت.

$$3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \quad \left(\frac{2}{7}\right)^{-9} = \left(\frac{7}{2}\right)^9 \quad \text{مثال:}$$

$$\text{مثال: حاصل عبارت } \frac{0/125^{-9} \times 128^{-10}}{32^{-13} \times 0/25^{-11}} \text{ برابر است با:}$$

$$\frac{0/125^{-9} \times 128^{-10}}{32^{-13} \times 0/25^{-11}} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-9} \times (2^7)^{-10}}{(2^5)^{-13} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-11}} = \frac{(2^{-3})^{-9} \times 2^{-70}}{2^{-65} \times (2^{-2})^{-11}} = \frac{2^{27} \times 2^{-70}}{2^{-65} \times 2^{22}} = \frac{2^{-43}}{2^{-43}} = 1$$

توشه ای برای موفقیت

★ برای پیدا کردن حاصل جمع اعداد تواندار، اگر پایه ها و توانها مساوی بودند می توان آنها را به حاصل ضرب تبدیل کرد و جواب را به صورت یک عدد تواندار نوشت. اما اگر همه ی پایه ها و توانها با هم برابر نبودند به شرط آنکه قسمت های مشترک (پایه مشترک با کوچک ترین توان) داشته باشند از فاکتورگیری می توان استفاده کرد.

مثال: حاصل عبارت های زیر را به صورت عدد تواندار بنویسید.

$$4^9 + 4^9 + 4^9 + 4^9 = 4 \times 4^9 = 4^{10} \quad \text{الف)}$$

$$\text{ب)} \quad 12 \times 2^9 + 10 \times 2^{10} + 12 \times 2^8 - 24 \times 2^7 - 2^{14} = 2^7 (12 \times 2^2 + 10 \times 2^3 + 12 \times 2^1 - 24 - 2^7) = 2^7 (48 + 80 + 24 - 24 - 128) = 0$$

★ برای ساده کردن کسرهایی که صورت و مخرج آنها از جمع اعداد تواندار تشکیل شده اند از پایه مشترک با کوچک ترین توان (صورت جدا و مخرج هم جدا) فاکتور گرفته و سپس ساده می کنیم.

مثال: حاصل عبارت $\frac{7^{2014} + 7^{2013} + 7^{2012} + \dots + 7^{1014}}{7^{1393} + 7^{1392} + 7^{1391} + \dots + 7^{393}}$ به صورت عدد تواندار برابر است با:

(حل)

$$\frac{7^{1014}(7^{1000} + 7^{999} + 7^{998} + \dots + 1)}{7^{393}(7^{1000} + 7^{999} + 7^{998} + \dots + 1)} = 7^{621}$$

★ برای پیدا کردن مجموع چند عبارت تواندار با پایه های مساوی که توانهای آنها اعداد متوالی باشند می توان کل عبارت را برابر یک حرف انگلیسی قرار داد و سپس دو طرف تساوی را در پایه مشترک آنها ضرب کرد و سپس این دو تساوی را از هم کم نمود و حاصل را پیدا کرد.

و یا از فرمول مقابل کمک می گیریم:

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

مثال: حاصل عبارت $5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{97}$ را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} A &= 5^4 + 5^5 + 5^6 + \dots + 5^{97} \\ 5A &= 5^5 + 5^6 + 5^7 + \dots + 5^{98} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5A - A = 5^5 + 5^6 + 5^7 + \dots + 5^{98} - 5^4 - 5^5 - 5^6 - \dots - 5^{97} = 5^{98} - 5^4$$

$$\Rightarrow 4A = 5^{98} - 5^4 \Rightarrow A = \frac{5^{98} - 5^4}{4}$$

★ مجموع هر دنباله ی هندسی نامتناهی که هر جمله از ضرب عدد ثابت q که $0 < q < 1$ و یا $-1 < q < 0$ می باشد از فرمول زیر به دست می آید.

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \quad (a_1 \text{ اولین جمله ی دنباله است.})$$

مثال: حاصل عبارت $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ برابر است با:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

حل) از فرمول بالا : $a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

روش دوم : با ضرب دو طرف تساوی در ۲ و سپس کم کردن دو طرف نیز می توان حاصل را پیدا کرد. (مانند مثال قبل)

★ در یک کسر که بین اعداد آن عمل ضرب وجود دارد می توانیم اعدادی را از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت ببریم به شرطی که توان آنها را قرینه کنیم.

مثال : حاصل عبارت $\frac{x^{-4}y^{-3}}{y^{-4}x^{-4}} \div \frac{(x^{-2}y^{-1})^3}{\left(\frac{x}{y}\right)^4}$ برابر است با

$$\frac{x^{-4}y^{-3}}{y^{-4}x^{-4}} \div \frac{(x^{-2}y^{-1})^3}{\left(\frac{x}{y}\right)^4} = \frac{x^{-4}y^{-3}}{y^{-4}x^{-4}} \times \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^4}{(x^{-2}y^{-1})^3} = \frac{x^4y^4}{x^4y^3} \times \frac{\frac{x^4}{y^4}}{x^{-6}y^{-3}} = \frac{x^4y^4x^4}{x^4y^3x^{-6}y^{-3}y^4} =$$

$$\frac{x^8y^4}{x^{-2}y^4} = x^8x^2 = x^{10}$$

★ **عدد به توان کسر**: هر عدد به توان کسر برابر رادیکالی است که مخرج کسر فرجه رادیکال و صورت کسر توان آن عدد خواهد بود.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(به شرط آنکه آن رادیکال تعریف شده باشد).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال : $5^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{5^2}$

★ اگر پایه یک عدد تواندار عددی **منفی** باشد و **توان آن کسری** باشد که مخرجش زوج باشد عدد حقیقی نخواهد بود.

مثال : $(-3)^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{(-3)^5}$

★ **معادله ی توانی** : معادله ای که مجهول آن در توانش باشد. برای حل معادله ی توانی کارهای زیر را انجام می دهیم.

ابتدا در دو طرف تساوی پایه ها را برابر می کنیم و سپس توانها را مساوی قرار می دهیم و معادله را حل می کنیم در بعضی از مسائل باید از فاکتور گیری نیز استفاده کنیم.

تذکر مهم: اگر پایه ها را نتوان مساوی قرار داد، آنگاه توانها را مساوی **صفر** قرار می دهیم و حل می کنیم.

مثال: در معادله ی $8^{4x+15} = 4^{3x+6} \times 2^{6x+3}$ مقدار x کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{-10}{8} \quad (2) \quad \frac{-4}{5} \quad (3) \quad \text{بی شمار جواب دارد} \quad (4) \quad \text{جواب ندارد.} \\ 2^{6x+3} \times 4^{3x+6} = 8^{4x+15} \Rightarrow 2^{6x+3} \times (2^2)^{3x+6} = (2^3)^{4x+15} \Rightarrow 2^{6x+3} \times 2^{6x+12} = 2^{12x+45} \Rightarrow \\ 2^{12x+15} = 2^{12x+45} \Rightarrow 12x+15 = 12x+45 \Rightarrow 15 = 45 \end{aligned}$$

این غیر ممکن است و معادله جواب ندارد

مثال) در عبارت $5^{y+3} = 3^{2x-y+1}$ مقادیر x, y را پیدا کنید.

حل) چون پایه ها را نمی توان مساوی کرد پس توانها را برابر صفر قرار می دهیم در نتیجه:

$$\begin{cases} y+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3 \\ 2x-(-3)+1=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

مثال) معادله توانی $6^{x-1} + 6^x = 252$ را حل کنید.

$$6^{x-1} + 6^x = 252 \Rightarrow 6^{x-1}(1+6) = 252 \Rightarrow 6^{x-1}(7) = 252 \Rightarrow 6^{x-1} = 252 \div 7 = 36 = 6^2 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$$

* مقایسه ای اعداد تواندار:

۱- مساوی کردن پایه ها با استفاده از **تجزیه** و سپس انجام عمل مقایسه.

مثال: کدامیک از اعداد زیر از بقیه کوچک تر است؟

الف) 18×3^8 ✓ ب) 8×64^3 ج) 2048×9^5 د) 50×625^2

$$8 \times 64^3 = 2^3 \times (2^6)^3 = 2^3 \times 2^{18} = 2 \times 2^{20} = 2 \times 4^{10}$$

$$18 \times 3^8 \Rightarrow 2 \times 3^2 \times 3^8 = 2 \times 3^{10}$$

$$2 \times 5^2 \times (5^4)^2 = 2 \times 5^{10}$$

$$2048 \times 9^5 = 2^{11} \times 3^{10} = 2 \times 2^{10} \times 3^{10} = 2 \times 6^{10}$$

۲- مساوی کردن توانها با استفاده از «**ب.م.م**» توانها، که توان را بر «**ب.م.م**» تقسیم می کنیم و جواب را داخل پرانتز به عنوان توان می نویسیم و «**ب.م.م**» را به عنوان بیرونی ترین توان می نویسیم.

تذکر مهم: در مورد اعداد بین صفر و یک هر چقدر توان بزرگتر باشد عدد کوچکتر است. و در مورد اعداد منفی اگر توان زوج باشد هر چقدر هم کوچکتر باشد از توان فرد بزرگ تر می شود.

مثال: کدامیک از اعداد مقابل از بقیه بزرگ ترند؟
 2^{107} (۱) 3^{84} (۲) 5^{64} (۳) 7^{42} (۴)

حل: «ب م م» اعداد ۱۰۵ و ۸۴ و ۶۳ و ۴۲ را پیدا می کنیم که عدد ۲۱ می شود و آن را به عنوان بیرونی ترین توان می نویسیم داریم:

$$2^{107} = 2^2 \times 2^{105} = 4 \times (2^5)^{21} = 4 \times 32^{21}$$

$$3^{84} = (3^4)^{21} = 81^{21}$$

$$5^{64} = 5 \times 5^{63} = 5 \times (5^3)^{21} = 5 \times 125^{21}$$

$$7^{42} = (7^2)^{21} = 49^{21}$$

۳- برای مقایسه مجموع یا ضرب چند عبارت تواندار بعضی مواقع می توان از رابطه ی $2^n > n^2$ با شرط: $n \geq 5, n \in N$ یا از رابطه ی $4^n > n^4$ می توان استفاده کرد.

مثال: اگر دو عدد $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$ و $B = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 10^{10}$ را باهم مقایسه کنیم کدام گزینه درست است؟

(۱) A (۲) B (۳) $A = B$ (۴) قابل مقایسه نیست

حل: طبق رابطه های بالا می دانیم $10^2 > 10^2$ و $9^2 > 8^2$ و $8^2 > 7^2$ و $7^2 > 6^2$ و $6^2 > 5^2$ و $5^2 > 4^2$ و $4^2 > 3^2$ و $3^2 > 2^2$ یا مساوی یا مثل موارد قبلی بزرگترند پس در نتیجه B بزرگتر است.

★ **عدد مربع کامل:** هرگاه در تجزیه ی یک عدد به عوامل اول، توان عاملها عددی زوج باشد آن عدد مربع کامل است.

مثال: کوچک ترین عدد طبیعی که وقتی آن را در عدد $3^{11} \times 2^5 \times 7^4$ ضرب کنیم مربع کامل شود؟

حل باید توانهای عامل ها زوج شود پس در 2×3 باید ضرب کنیم.

★ **عدد مکعب کامل:** هرگاه در تجزیه ی یک عدد به عوامل اول، توان عاملها مضرب ۳ باشد آن عدد مکعب کامل است.

مثال: عدد $5^6 \times 7^3$ یک عدد مکعب کامل است.

تذکر مهم: عدد یک، هم مربع کامل است و هم مکعب کامل.

★ اعدادی که **مربع کاملند** همیشه تعداد شمارنده هایشان عددی **فرد** است.

★ اعدادی که **مربع کاملند** رقم یکانشان، هیچ گاه ۲ یا ۳ یا ۷ یا ۸ نمی شود.

★ حاصل ضرب هیچ دو عدد طبیعی متوالی مجذور کامل نیست.

★ اولین عدد مربع کامل بعد از عدد مربع کامل n عدد $(\sqrt{n} + 1)^2$ می باشد که برابر است با: $(\sqrt{n} + 1)^2 = n + 2\sqrt{n} + 1$

مثال: اولین عدد مربع کامل بعد از 9^{19} چه عددی است؟

$$(\sqrt{9^{19}} + 1)^2 = (3^{19} + 1)^2 = (3^{19})^2 + 2(3^{19}) + 1$$

★ k آمین عدد مربع کامل بعد از عدد مربع کامل n ، عدد $(\sqrt{n} + k)^2$ می باشد که برابر است با:

$$(\sqrt{n} + k)^2 = n + 2k\sqrt{n} + k^2$$

مثال: هفتمین عدد مربع کامل بعد از 9^{19} چه عددی است؟

$$(\sqrt{9^{19}} + 7)^2 = (3^{19} + 7)^2 = (3^{19})^2 + 14(3^{19}) + 49$$

★ برای پیدا کردن اعداد مربع کامل در بین یک سری از اعداد منظم باید اولین عددی که مربع کامل است و آخرین عددی که مربع کامل است را پیدا کرده و با توان ۲ بنویسیم و سپس این دو عدد را (بدون توان ۲) از هم کم کرده و به اضافه یک کنیم.

تذکر: برای پیدا کردن تعداد اعداد مکعب کامل باید اولین عدد مکعب کامل و آخرین عدد مکعب کامل را پیدا کرده و آنها را با توان ۳ بنویسیم و سپس مثل بالا عمل کنیم.

مثال: در بین اعداد $9^5, \dots, 3, 2, 4^5 + 1, 4^5, 4^5$ چند عدد مربع کامل وجود دارد؟

حل) اولین عدد مربع کامل عدد 4^5 است که با توان ۲ به صورت $(2^5)^2 = (2^2)^5 = 2^2$ نوشته می شود و آخرین عدد مربع کامل نیز 9^5

می باشد که با توان ۲ به صورت $(3^5)^2 = (3^2)^5 = 2^2$ نوشته می شود بنابراین تعداد اعداد مربع کامل در این مجموعه برابر است با:

$$2^2 - 2^2 + 1 = 212$$

مثال) چند عدد از اعداد از ۱ تا 1392^{1392} هم مربع کامل و هم مکعب کاملند؟

حل) باید اعداد با توان ۶ را پیدا کنیم. این اعداد عبارتند از $(1392^{232})^6, \dots, 4^6, 3^6, 2^6, 1^6$ که تعداد این اعداد عبارتند از:

$$(1392^{232}) - 1 + 1 = 1392^{232}$$

★ اگر n عددی زوج باشد عدد n^n مربع کامل است و اگر n فرد باشد عدد n^n به شرطی مربع کامل می شود که عدد n مربع کامل باشد.

مثال: اعداد $2^2, 4^4, 6^6, 8^8, \dots$ و $1^1, 9^9, 25^{25}, 49^{49}, \dots$ مربع کاملند.

مثال) به ازای چند عدد طبیعی n و $1 \leq n \leq 200$ عدد n^n مربع کامل است؟ (۱) ۷ (۲) ۱۰۰ (۳) $\checkmark$ ۱۰۷ (۴) ۱۱۴

رقم یکسان اعداد تواندار:

★ برای تعیین رقم یکسان اعداد توانداری که یکسان آنها رقم های ۲ و ۳ و ۷ و ۸ می باشد توان عدد را بر ۴ تقسیم می کنیم و سپس یکسان عدد را به توان باقیمانده این تقسیم می رسانیم .

تذکر مهم: اگر باقیمانده صفر شود رقم یکسان برابر است با یکسان عدد به توان ۴

مثال: رقم یکسان حاصل عبارت $1392^{43} + 1393^{514} + 1387^{125} + 1348^{248}$ چه عددی است؟

حل) رقم یکسان تک تک اعداد را پیدا کرده و با هم جمع می کنیم.

$$\begin{array}{r} 43 \\ 4 \\ \hline 10 \\ 3 \end{array}$$

$$2^3 = 8 \text{ یکسان}$$

$$\begin{array}{r} 514 \\ 4 \\ \hline 128 \\ 2 \end{array}$$

$$3^2 = 9 \text{ یکسان}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ 4 \\ \hline 31 \\ 1 \end{array}$$

$$7^1 = 7 \text{ یکسان}$$

$$\begin{array}{r} 248 \\ 4 \\ \hline 62 \\ 0 \end{array}$$

$$8^4 = 4096 \Rightarrow 6 \text{ یکسان}$$

پس یکسان حاصل برابر است با: $30 = 8 + 9 + 7 + 6$ یعنی صفر می شود.

★ برای تعیین رقم یکسان اعداد توانداری که یکسان آنها رقم های ۴ و ۹ باشد با توجه به زوج و فرد بودن توانشان مشخص می کنیم. یعنی اگر توان عدد فرد بود یکسان عدد همان رقم ۴ و یا ۹ می شود ولی اگر توان زوج بود و یکسان رقم ۴ بود یکسان حاصل، عدد ۶ می شود و اگر یکسان عدد رقم ۹ بود یکسان حاصل، عدد ۱ خواهد شد.

مثال: رقم یکسان حاصل عبارت $1394^{741} + 1999^{282}$ چه عددی می شود؟

حل) چون 741 عدد فرد است یکسان 1394^{741} رقم ۴ می شود و چون 282 زوج است یکسان 1999^{282} رقم ۱ می شود و در نتیجه رقم یکسان حاصل $4 + 1 = 5$ می شود.

★ اگر یکسان عددی یکی از رقم های ۰، ۱، ۵ یا ۶ باشد و به توان برسد یکسان آن خودش می شود.

***تعداد صفرهای سمت راست عددتواندار:**

ابتدا عدد را به عامل های اول تجزیه می کنیم و سپس در صورت داشتن عامل های ۵ و ۲ (چون ۵×۲ برابر ۱۰ میشود یعنی یک صفر تولید می کند) توانهای ۵ و ۲ را مشخص می کنیم آنکه کمتر بود تعداد صفرهای سمت راست عدد را مشخص می کند.

مثال: حاصل ضرب $۵۵^۷ \times ۱۵^۶ \times ۲۸^۵$ به چند صفر ختم می شود؟ ۱۰ صفر زیرا:

$$(۲^۲ \times ۷)^۵ \times (۳ \times ۵)^۶ \times (۱۱ \times ۵)^۷ = ۲^{۱۰} \times ۷^۵ \times ۳^۶ \times ۵^۶ \times ۱۱^۷ \times ۵^۷ = ۲^{۱۰} \times ۵^{۱۰} \times ۵^۳ \times ۷^۵ \times ۳^۶ \times ۱۱^۷ = ۱۰^{۱۰} \times \dots$$

***تعداد رقمهای یک عدد:**

با استفاده از روش های زیر می توان تعداد رقمهای حاصل ضرب اعداد و یا اعداد تواندار را پیدا کرد.

روش اول: مانند نکته قبل ابتدا تعداد صفرهای سمت راست عدد را مشخص می کنیم سپس عاملهای باقیمانده و بقیه توانها را نیز جداگانه حساب می کنیم و در آخر تعداد رقمهای حاصل را با تعداد صفرهای سمت راست عدد جمع می زنیم.

مثال: تعداد ارقام حاصل ضرب $۵^{۱۰۴} \times ۴^{۵۲}$ برابر است با:

$$۵^{۱۰۴} \times ۴^{۵۲} = ۵^{۱۰۴} \times (۲^۲)^{۵۲} = ۵^{۱۰۴} \times ۲^{۱۰۴} = ۱۰^{۱۰۴} = \overbrace{۱۰۰۰ \dots ۰}^{۱۰۴} \Rightarrow ۱ + ۱۰۴ = ۱۰۵ \text{ رقم}$$

روش دوم: اگر عددی بین ۱۰^n و ۱۰^{n+1} قرار داشته باشد. آنگاه آن عدد $n+1$ رقمی است.

مثال: اگر بدانیم $۳^{۴۰}$ بین دو عدد $۱۰^{۲۰}$ و $۱۰^{۱۹}$ قرار دارد می توانیم نتیجه بگیریم که $۳^{۴۰}$ یک عدد ۲۰ رقمی است.

روش سوم: اگر بتوانیم عدد تواندار داده شده را به صورت توانی از عدد ۲ بنویسیم آنگاه می توانیم $۲^{۱۰}$ را تقریباً ۱۰۰۰ در نظر بگیریم و تعداد رقمهای عدد را محاسبه کنیم.

مثال: اگر مقدار عدد $۲^{۴۰}$ را مناسبه کنیم چند رقمی می شود؟

$$۲^{۴۰} = (۲^{۱۰})^۴ \approx (۱۰۰۰)^۴ = (۱۰^۳)^۴ = ۱۰^{۱۲} = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \Rightarrow ۱۳ \text{ رقمی است}$$

روش چهارم: اگر تعداد رقمهای حاصل ضرب دو عدد صحیح را خواسته باشند می توان ابتدا آنها را به صورت نماد علمی نوشت و سپس دو عدد را تا یک رقم اعشار درهم ضرب کرد و در آخر تعداد رقم های این حاصل ضرب را با توانهای عدد ۱۰ با هم جمع کرد.

مثال: حاصل عبارت مقابل چند رقمی می شود؟ $۹۳۲۵۶۹۸۴۲ \times ۹۸۶۷۸۲۷۸ = ۹/۳ \times ۱۰^۸ \times ۹/۸ \times ۱۰^۷ = ۹۱/۱۴ \times ۱۰^{۱۵}$

پس $9114 \times 10^{13} = 9114 \times 10^{14} \times 10^{-1} = 9114 \times 10^{-1} \times 10^{14}$ یا برای این حاصل ۱۷ رقمی می شود.

❁ **مجموع رقمهای یک عدد تواندار:**

مانند نکته‌ی قبل عمل کرده تعداد رقم‌ها را مشخص می‌کنیم و در آخر مجموع رقم‌ها را به دست می‌آوریم.

مثال: مجموع ارقام حاصل ضرب 452×5104 برابر است با:

$$\Delta^{1 \cdot f} \times_F \Delta^{\mathbb{Z}} = \Delta^{1 \cdot f} \times (\mathbb{Z})^{\Delta^{\mathbb{Z}}} = \Delta^{1 \cdot f} \times \mathbb{Z}^{1 \cdot f} = 1 \cdot 1 \cdot f = 1 \circ \circ \circ \dots \circ \Rightarrow 1 + \circ + \circ + \circ + \dots + \circ = 1$$

❖ اگر عددی بخواهد **مضربی از ۱۰** باشد اولاً باید عملهای ۲ و ۵ را با هم داشته باشد و ثانیاً توانهای این دو عامل (۲ و ۵) صفر یا کسری و با منفی نباشند.

مثال: به ازای چند مقدار صحیح n عدد $4^{n+3} \times 25^{2-n}$ مضرب ۱۰ می باشد؟ ۴ مقدار صحیح

$$r^{n+r} \times r \Delta^{r-n} = (r^r)^{n+r} \times (\Delta^r)^{r-n} = r^{rn+r} \times \Delta^{r-rn} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall n + \epsilon > 0 \Rightarrow \forall n > -\epsilon \Rightarrow n > -\mathfrak{F} \\ \mathfrak{F} - \forall n > 0 \Rightarrow \mathfrak{F} > \forall n \Rightarrow n < \mathfrak{F} \end{array} \right\} \Rightarrow -\mathfrak{F} < n < \mathfrak{F}$$

❖ اگر دو عدد به صورت $x \times a^b$ و $y \times a^b$ داشته باشیم و بخواهیم عددی بین آنها پیدا کنیم کافیست عددی طبیعی بین x و y پیدا کنیم و در a^b ضرب کنیم. (یعنی باید قسمت تواندار هر دو عدد را به صورتی بنویسیم که پایه هایشان باهم بتوانان های آنها با هم برابر باشد).

مثال: کدام گزینه بین 7^{18} و 7^{19} قرار دارد و بر ۸ بخشپذیر است؟

$$\Delta F \times V^{1V} \text{ (F)} \quad \Delta F \times V^{1V} \text{ (W)} \quad V^{1A} + V^{1A} \text{ (F)} \quad V^{1V} + V^{1A} \text{ (I)}$$

$$v^{17} + v^{18} = v^{17}(1 + v) = v^{17} \times 8$$

(هل) يا بيرسي گزينه هاداريم:

$$64 \times 7^{17} = 8^2 \times 7^{17} > 7^{19} \quad \text{پس } 7^{19} \text{ نیست}$$

$$56 \times 7^{17} = 8 \times 7 \times 7^{17} = 8 \times 7^{18}$$

بین 7^{18} و 7^{19} نیست

(مثال) کدام یک از اعداد زیر بین 3^{19} و 3^{20} قرار ندارد؟

$$(1) 7 \times 3^{18} \quad (2) 111 \times 3^{15} \quad (3) \frac{2}{5} \times 3^{20} \quad (4) 27 \times 3^{16}$$

★ اگر کاغذی را n بار فقط به صورت افقی یا فقط به صورت عمودی تا بزنیم تعداد خطوط ایجاد شده روی آن $2^n - 1$ می باشد.

★ اگر هر دو کار بالا را باهم انجام دهیم یعنی مثلاً m بار افقی و n بار عمودی تا بزنیم تعداد خطوط ایجاد شده برابر است با:

$$(2^m - 1) + (2^n - 1)$$

مثال) اگر کاغذی را ۷ بار به صورت افقی و ۲ بار به صورت عمودی تا بزنیم تعداد خطوط ایجاد شده روی آن چند تا است؟

$$(2^m - 1) + (2^n - 1) = 2^7 - 1 + 2^2 - 1 = 128 - 1 + 4 - 1 = 130$$

جذر و ریشه

★ هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه n ام زوج می باشد. (به جز صفر که فقط یک ریشه ی زوج دارد).

★ هر عدد حقیقی دارای یک ریشه n ام فرد است.

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad (a \in E) \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد ریشه ی } n \text{ ام } a^n \text{ برابر } |a| \text{ می شود.}$$

★ ریشه های اعداد بین صفر و یک، بزرگتر از خود آن اعداد و ریشه های اعداد بزرگتر از یک، کوچکتر از خود آن اعداد هستند.

★ اعداد منفی ریشه ی زوج ندارند. مثلاً $\sqrt{-6}$ و $\sqrt[4]{-20}$ و $\sqrt[n]{-1}$ ریشه ندارند

★ برای جذر گرفتن از اعداد تواندار دو روش وجود دارد:

۱- پایه را تغییر نداده و توان را نصف کنیم.

$$\text{مثال: حاصل } \sqrt{4^{-40}} \text{ برابر است با: } (1) 4^{-20} \quad (2) 4^{-40} \quad (3) 4^{-10} \quad (4) -4^{20}$$

$$\sqrt{4^{-40}} = 4^{-40 \div 2} = 4^{-20}$$

توان را نصف می کنیم.

۲- توان را تغییر نداده و از پایه اش جذر بگیریم.

$$\sqrt{4^{-40}} = 2^{-40}$$

مثال) جذر عدد 4^4 عدد ۲ می شود پس:

★ برای به دست آوردن حاصل عبارت هایی که شامل چند رادیکال تو در تو باشند باید از داخلی ترین رادیکال شروع کنیم.

مثال: مقدار عبارت $\sqrt{1+2000}\sqrt{1+2001}\sqrt{1+2002}\sqrt{1+2003}\times 2005$ برابر است با: (مسابقات جهانی ریاضی)

۲۰۰۴ (۵)

۲۰۰۳ (۴)

۲۰۰۲ (۳)

۲۰۰۱ (۲)

۲۰۰۰ (۱)

(حل)

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2000}\sqrt{1+2001}\sqrt{1+2002}\sqrt{1+2003}\times 2005 &= \sqrt{1+2000}\sqrt{1+2001}\sqrt{1+2002}\sqrt{1+(2004-1)(2004+1)} = \\ \sqrt{1+2000}\sqrt{1+2001}\sqrt{1+2002}\sqrt{1+(2004)^2-1} &= \sqrt{1+2000}\sqrt{1+2001}\sqrt{1+(2003-1)(2003+1)} = \\ \sqrt{1+2000}\sqrt{1+2001}\sqrt{1+2003^2-1} &= \sqrt{1+2000}\sqrt{1+2001\times 2003} = \sqrt{1+2000}\sqrt{1+(2002-1)(2002+1)} = \\ \sqrt{1+2000}\sqrt{1+2001^2-1} &= \sqrt{1+2000\times 2001} = \sqrt{2001^2} = 2001 \end{aligned}$$

★ جمع و تفریق رادیکال ها را به شرطی می توان انجام داد که فرجه و عبارت زیر رادیکالها با هم برابر باشد. (مانند عبارت های جبری می گوئیم با هم متشابه باشند).

$$5\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} = 3\sqrt[3]{7}$$

(مثال)

★ قبل از جمع و تفریق رادیکال ها ابتدا در صورت امکان عدد زیر رادیکال را تجزیه یا به ضرب تبدیل کرده آن را ساده و سپس عبارت های متشابه را با هم جمع و یا تفریق می کنیم.

مثال: مقدار عبارت $\sqrt{20} + 3\sqrt{125} - 2\sqrt{5} - \sqrt{45}$ برابر است با:

-۱۰√۲ (۴)

-۱۲√۳ (۳)

۱۲√۵ (۲)

۱۰√۵ (۱)

$$\sqrt{20} + 3\sqrt{125} - 2\sqrt{5} - \sqrt{45} = \sqrt{4\times 5} + 3\sqrt{25\times 5} - 2\sqrt{5} - \sqrt{9\times 5} = 2\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$$\sqrt[m]{n\sqrt[p]{a}} = \sqrt[m\times n\times p]{a}$$

★ برای پیدا کردن رادیکال های تو در تو به شکل مقابل داریم:

★ هرگاه بخواهیم ضریب یک رادیکال را به داخل رادیکال ببریم باید ضریب را به توان فرجه رسانده و در عبارت زیر رادیکال ضرب کنیم.

تذکر مهم: در این حالت دقت کنید که علامت حاصل تغییر نکند.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$\sqrt[3]{4\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{4^2} \times 3} = \sqrt[6]{48}$$

مثال: حاصل $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ چه عددی می شود؟

*** عبارت های رادیکالی نامتناهی:** برای پیدا کردن حاصل عبارت های رادیکالی نامتناهی از روش A استفاده می کنیم به این صورت که کل عبارت را مساوی A قرار داده و سپس دو طرف را به توان فرجه می رسانیم و سپس آن قسمتی از عبارت را که شبیه کل عبارت است دوباره برابر A قرار داده و با کمک معادله مقدار A را حساب می کنیم.

مثال: حاصل عبارت $2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}}$ کدام است؟

$$(1) \sqrt[4]{3} \quad (2) 6 \quad (3) 2\sqrt{6} \quad (4) 6\sqrt{2}$$

$$A = 2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}} \Rightarrow A^2 = 4\left(3 + \underbrace{2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}}}_A\right) = 12 + 4A \Rightarrow A^2 = 12 + 4A$$

$$\Rightarrow A^2 - 4A - 12 = 0 \Rightarrow (A-6)(A+2) = 0 \Rightarrow A=6 \quad \text{یا} \quad A=-2 \quad \text{غیر قابل قبول}$$

مثال: کدام رابطه در مورد عبارت $M = \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{\dots}}}}}$ درست است؟ (حل به عهده دانش آموز)

$$(1) M^2 = 49M \quad (2) M^2 = 7M \quad (3) M^2 = M \quad (4) M^2 = 343M$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

توان کسری: اگر $\sqrt[n]{a^m}$ در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده باشد می توان نوشت:

$$(-216)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-216)^2} = (-6)^2 = 36$$

مثال:

*** می توان فرجه را با توان عدد زیر رادیکال ساده کرد به شرط آنکه پس از ساده شدن، حاصل عبارت تعریف شده باشد.** (زیر رادیکال با فرجه زوج منفی نشود.) و علامت عبارت زیر رادیکال حفظ شود و تغییر نکند.

$$\sqrt[n]{a^m} = k\sqrt[n]{a^{km}}$$

$$\sqrt[2]{2^7} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} \times \sqrt[6]{8} = \sqrt{8} \times \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{8} \times \sqrt[6]{2^{6 \div 3}} = \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$$

گویا کردن مخرج کسرها :

★ (الف) مخرج کسر $\frac{B}{\sqrt[n]{a^m}}$ را به شرط آنکه $a \neq 0$ و $m < n$ را با ضرب صورت و مخرج آن در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ به عددی گویا تبدیل کرد.

$$10 \times \sqrt[5]{27} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5} \times \sqrt[5]{27} \quad (3)$$

$$\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{5} \quad (2)$$

$$\text{مثال: حاصل } \frac{6}{5\sqrt[5]{3^2}} \text{ برابر است با: } (1) \quad \frac{2}{5}$$

$$\frac{6}{5\sqrt[5]{3^2}} = \frac{6}{5\sqrt[5]{3^2}} \times \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{5\sqrt[5]{3^5}} = \frac{6\sqrt[5]{3^3}}{5 \times 3} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{5} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{5}$$

★ (ب) برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها از **مجموع یا تفاضل** دو یا چند رادیکال تشکیل شده اند کافیست صورت و مخرج آن را در **مزدوج مخرج** ضرب کنیم.

$$\text{مثال: معکوس کسر } \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ کدام گزینه است؟ (تیزهوشان)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+1} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-1} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

★ اعداد متوالی هر چقدر که **بزرگتر** شوند **حاصل اختلاف جذر هایشان کمتر** می شود.

$$\sqrt{8} - \sqrt{7} < \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

مثال :

★ در عبارت های رادیکالی که در صورت و مخرج جمع یا تفریق رادیکالها قرار داردمی توان با فاکتور گیری آن را ساده کرد.

$$\text{مثال: حاصل عبارت } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 2}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{12} + 3} \text{ برابر است با:}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 2}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{12} + 3} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{2})}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

رادیکال مرکب خاص :

★ در رادیکال مرکب $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ با فرض آنکه $A^2 - B$ مربع کامل باشد و با فرض $C = \sqrt{A^2 - B}$ داریم:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

مثال : ساده شده رادیکال $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ برابر است با:

$$(1) \quad 2 + \sqrt{3} \quad (2) \quad -2 - \sqrt{3} \quad (3) \quad 2 - \sqrt{3} \quad (4) \quad -2 + \sqrt{3}$$

حل) $B = 48 \Rightarrow \sqrt{4^2 \times 3} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ پس $7^2 - 48 = 1$ مربع کامل است در نتیجه $C = \sqrt{1} = 1$ بنابراین داریم:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \Rightarrow \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} - \sqrt{\frac{7-1}{2}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

عبارات های جبری

یک جمله ای: ساده ترین نوع عبارت های جبری است که به صورت ضرب یک عدد حقیقی در توانهای صحیح و نامنفی از یک یا چند متغیر می باشد.

تذکره ۱: حروف (متغیرها) اگر در توان ، در مخرج یا در قدر مطلق و یا در زیر رادیکال باشند و یا توان آنها منفی باشد. یک جمله ای نیستند.

تذکره ۲: اعداد حقیقی یک جمله ای محسوب می شوند. مانند: $\circ$ و $\sqrt{2}$ و $-\frac{3}{4}$ و π

جملات مشابه: جملاتی که قسمت حرفی و توان حروف آنها با هم برابر باشد.

*** درجه یک چند جمله ای:** در چند جمله ای ها درجه نسبت به یک متغیر عبارت است از بزرگ ترین توان آن متغیر در تمام جمله های آن چند جمله ای.

مثال: درجه چند جمله ای $x^{10} + (x^2 + x^5 + 7)^5 (x^2 + x^5 - x^3)^3$ چقدر است؟

(10) (2) (3) (37)

حل) بزرگترین توان هر پرانتز را پیدا کرده و به توان بیرون پرانتز می رسانیم و چون بین دو پرانتز ضرب است توان آنها را جمع می کنیم.

$$(x^4)^3 \times (x^5)^5 = x^{12} \times x^{25} = x^{37}$$

ایران نوشته
توشه ای برای موفقیت

*** چند جمله ای متقارن:** چند جمله ای که با هر تبدیل چرخشی تغییر نکند.

مثال: عبارت $2x^3 + 2y^3 + 1$ نسبت به x و y متقارن است. زیرا با جابجا کردن x و y عبارت تغییر نمی کند.

$$2x^3 + 2y^3 \longleftrightarrow 2y^3 + 2x^3 + 1$$

*** چند جمله ای همگن:** اگر همگی جمله های یک چند جمله ای با یک دیگر هم درجه باشند به آن چند جمله ای همگن یا متجانس می گویند.

مثال: در چند جمله ای $7x^3y^4 + 2x^6y - 2y^7 + t^7$ همه جمله ها دارای درجه ۷ هستند پس همگن است.

★ **چند جمله ای استاندارد:** چند جمله ای که بر حسب توانهای نزولی متغیرمورد نظرش مرتب شده باشد.

★ در ضرب جملات جبری در هم می توان تعداد جملات هر پرانتز را پیدا کرد و سپس در هم ضرب نمود تا تعداد جملات حاصل جمع را مشخص کنیم.

★ هر گاه صورت کسری صفر باشد به شرط صفر نبودن مخرج، حاصل کسر همواره صفر است.

مثال: مقدار کسر مقابل به ازای $x = 1394$ پیدا کنید

$$\frac{(2016-x)(2015-x)(2014-x)\dots(1357-x)}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2016^2} =$$

صفر

$$\frac{(2016-x)(2015-x)(2014-x)\dots(1357-x)}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2016^2} = \frac{(2016-1394)(2015-1394)\dots(1394-1394)\dots(1357-1394)}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2016^2} = 0$$

★ هرگاه مجموع دو یا چند عبارت نامنفی، برابر صفر باشد هر یک از آن عبارت ها برابر صفر است.

مثال: در صورتی که بدانیم $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ آنگاه حاصل $\frac{a}{b+c}$ چند است؟

حل) چون حاصل جمع چند عبارت که هر کدام نامنفی هستند صفر شده است. تک تک عبارت ها باید صفر باشند پس

$$a-b=0, b-c=0, c-a=0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{a}{a+a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

توشه ای برای موفقیت

★ هرگاه حاصل ضرب چند عبارت صفر باشد حداقل باید یکی از آن عبارت ها باید صفر باشد.

مثال:

$$\begin{aligned} (3a-6)(2b+4) &= 0 \Rightarrow 3a-6=0 \Rightarrow a=2 \\ 2b+4 &= 0 \Rightarrow b=-2 \end{aligned}$$

★ اگر $n \in Z$ باشد به شرط تعریف شدن $(a-b)^{2n}$ همواره داریم: $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}$

یعنی هر عبارت و قرینه اش به توان عددی زوج با هم برابرند.

مثال) حاصل $(a-b)^{200} - (b-a)^{200}$ برابر است با:

(۱) $2a^{200} - 2b^{200}$

(۲) $b^{200} - a^{200}$

(۳) صفر

(۴) $2(a-b)^2$

حل) با توجه به نکته بالا $(a-b)^{200} = (b-a)^{200}$ است پس در نتیجه حاصل برابر صفر می شود.

★ هرگاه مجموع دو عدد حقیقی مثبت مقدار ثابتی باشد **بیشترین مقدار** برای حاصل ضرب آنها در صورتی حاصل می شود که دو عدد **برابر** باشند. در صورت متمایز بودن دو عدد بیشترین مقدار برای حاصل ضرب آنها در صورتی حاصل می شود که آن دو عدد **کمترین اختلاف** را داشته باشند.

مثال) اگر x, y, z اعداد طبیعی باشند و $x + y + z = 9$ باشد بیشترین مقدار عبارت xyz چند است؟

حل) اگر x, y, z اعداد متمایز نباشند بیشترین مقدار وقتی است که با هم برابر باشند یعنی $xyz = 27 \Rightarrow x = y = z = 3$ ولی اگر متمایز باشند باید کمترین اختلاف را داشته باشند که سه عدد طبیعی متوالی می شوند در نتیجه $xyz = 2 \times 3 \times 4 = 24$

مثال) فرض کنید x عددی حقیقی باشد در این صورت بزرگ ترین مقدار حقیقی که عبارت $\sqrt{2008-x} + \sqrt{x-2000}$ می تواند داشته باشد چقدر است؟

(۵) ۴

(۴) ۵

(۳) ۷

(۲) ۱۲

(۱) ۱۴

$$A = \sqrt{2008-x} + \sqrt{x-2000} \Rightarrow A^2 = 2008-x + x-2000 + 2\sqrt{(2008-x)(x-2000)} = 8 + 2\sqrt{(2008-x)(x-2000)} \Rightarrow A = \sqrt{8+2(2008-x)(x-2000)}$$

الکون به دلیل این که دو عدد $2008-x$ و $x-2000$ اعداد مثبت و مجموع آنها $2008-x + x-2000 = 8$ پس بیشترین مقدار حاصل ضرب آنها وقتی است که هر کدام ۴ باشند پس بیشترین مقدار عبارت A برابر است با:

$$A = \sqrt{8+2\sqrt{(2008-x)(x-2000)}} = \sqrt{8+2\sqrt{4 \times 4}} = \sqrt{8+2\sqrt{16}} = \sqrt{8+2 \times 4} = \sqrt{16} = 4$$

توشه ای برای موفقیت

★ **کمترین** مقدار عبارت $ax^2 + bx + c$ که در آن $a > 0$ همواره به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می آید.

مثال) کمترین مقدار عبارت $x^2 + 10x + 32$ چند است؟

★ **بیشترین** مقدار عبارت $ax^2 + bx + c$ که در آن $a < 0$ همواره به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می آید.

★ برای به دست آوردن **مجموع ضرایب** در هر عبارت به جای هر یک از حروف **عدد ۱** قرار می دهیم و حاصل را به دست می آوریم.

مثال: مجموع ضرایب بسط عبارت $(3x^2 + x - 3)^{90}$ چند می شود؟

$$(3x^2 + x - 3)^{90} = 1^{90} = 1$$

معادله

تعداد جوابهای معادله درجه یک:

هر معادله درجه یک به صورت $ax = b$ قابل نمایش دادن است که در این معادله سه حالت برای جواب ممکن است پیش بیاید.

حالت اول: اگر در $ax = b$ مقدار a غیر از صفر باشد معادله یک جواب دارد. مانند $3x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{3} = -4$

حالت دوم: اگر در $ax = b$ مجهول حذف شود یعنی $a = 0, b \neq 0$ معادله غیر ممکن است و جواب ندارد.

مثال: $4x - 2 = 5 + 4x \Rightarrow 4x - 4x = 5 + 2 \Rightarrow 0 = 7 \Rightarrow$ جواب ندارد $\Rightarrow$ غیر ممکن

حالت سوم: اگر در معادله $ax = b$ هر دو عدد a, b صفر باشند معادله مبهم است و بی شمار جواب دارد.

مثال: معادله بی شمار جواب دارد. $5x - 2 = 5x - 2 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$

تذکر: هر گاه یک معادله را ساده کردید و به یک تساوی درست عددی مانند $2 = 2$ و $-6 = -6$ و ... رسیدید معادله شما بیشمار جواب دارد.

تذکر مهم: هر معادله می تواند حداکثر به تعداد درجه ی مجهول خود جواب داشته باشد. مثلاً معادله درجه ۲ می تواند ۲ جواب داشته باشد.

معادله رادیکالی (اصم):

در این نوع معادلات مجهول زیر رادیکال قرار گرفته است برای حل این نوع معادلات بهتر است ابتدا کاری کنید که بخش رادیکالی در یک طرف تساوی و قسمت های دیگر در مقابل آن قرار گیرند سپس دو طرف تساوی را به توان ۲ (یا هر فرجه ای که رادیکال دارد) برسانید تا رادیکال از بین برود.

مثال: معادله های زیر را حل کنید

الف) $\sqrt{-5x-9} - 4 = 0$

ب) $\sqrt[3]{8-4x} = -2$

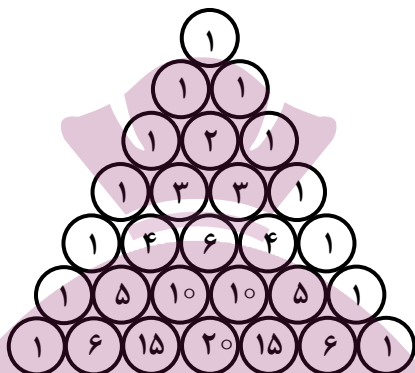
پ) $\sqrt{\sqrt{3x-9}+1} = 4$

الف) $\sqrt{-5x-9} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{-5x-9} = 4 \Rightarrow (\sqrt{-5x-9})^2 = 4^2 \Rightarrow -5x-9 = 16 \Rightarrow -5x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{-5} = -5$

ب) $\sqrt[3]{8-4x} = -2 \Rightarrow (\sqrt[3]{8-4x})^3 = (-2)^3 \Rightarrow 8-4x = -8 \Rightarrow -4x = -8-8 = -16 \Rightarrow x = \frac{-16}{-4} = 4$

$$\text{پ) } \sqrt{\sqrt{3x-9}} + 1 = 4 \Rightarrow \sqrt[4]{3x-9} = 3 \Rightarrow (\sqrt[4]{3x-9})^4 = 3^4 \Rightarrow 3x-9 = 81 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{3} = 30$$

★ از مثلث خیام - پاسکال می توان برای پیدا کردن ضرایب عبارت $(a+b)^n$ می توان استفاده کرد به این صورت که اعداد سطر n ام این مثلث ضرایب جمله های این عبارت می شود و توان a در اولین جمله n و توان b در جمله های بعدی هربار یکی کم می شود و به توان b اضافه می شود تا در آخرین جمله که توان b به n می رسد.



مثال) با کمک سطر پنجم حاصل $(a+b)^5$ را پیدا کنید.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^4b + b^5$$

★ در بسط دو جمله ای $(a+b)^n$ جمله هایی که از دو طرف به یک فاصله اند دارای ضریب برابر هستند.

ایران تونل
آتمادها
توشه ای برای موفقیت

اتحاد مربع دو جمله ای:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال: اگر $a^2 + b^2 + 5ab = 0$ باشد حاصل $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ را حساب کنید.

$$\text{حل) } a^2 + b^2 + 5ab = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = -5ab \Rightarrow \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{-5ab - 2ab}{-5ab + 2ab} = \frac{-7ab}{-3ab} = \frac{7}{3}$$

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

نتایج اتحاد مربع دو جمله ای:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

مثال: اگر $x - \frac{1}{x} = 5$ باشد $3x^2 + \frac{3}{x^2}$ مقدار است؟

حل) طبق نتیجه اتحاد $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ داریم:

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab \Rightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 3\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x}\right] = 3(5^2 + 2) = 3(27) = 81$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

اتحاد مزدوج:

مثال) حاصل عبارت $(2 + \sqrt{3})^{25} (2 - \sqrt{3})^{23}$ را به دست آورید.

$$(2 - \sqrt{3})^{23} (2 + \sqrt{3})^{25} = [(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})]^{23} (2 - \sqrt{3})^2 = [4 - 3]^{23} (2 - 4\sqrt{3} + 3) = 1^{23} (5 - 4\sqrt{3}) = 5 - 4\sqrt{3}$$

*** نکته:** گاهی مواقع حاصل ضرب چند پرانتز با ضرب در یک پرانتز دیگر و تقسیم بر همان پرانتز تشکیل یک اتحاد مزدوج می دهد که با انجام این کار و تشکیل اتحاد مزدوج می توانیم حاصل عبارت را به صورت ساده تر بنویسیم.

مثال: اگر $a = \sqrt{2} + 1$ و $b = \sqrt{2}$ حاصل عبارت $b(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) + b^8$ مقدار است؟

حل) چون $a - b = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$ شده است ضرب عدد 1 در هر عبارتی بی تاثیر است پس فقط کل عبارت را در $a - b$ ضرب می کنیم.

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8 = (a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8 = (a^4-b^4)(a^4+b^4)+b^8 = (a^8-b^8)+b^8 = a^8 = (\sqrt{2}+1)^8$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \quad \text{اتحاد مکعب دو جمله ای (چاق ولاغر):}$$

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+b^{n-1}) = a^n+b^n$$

تعمیم اتحاد چاق ولاغر:

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1}) = a^n-b^n$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{اتحاد مکعب مجموع:}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \quad \text{اتحاد فرعی مکعب دو جمله ای:}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

مثال) اگر $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ باشد حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را حساب کنید.

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} - \frac{15}{2} = \frac{65}{8}$$

تجزیه

تجزیه یک عبارت جبری، یعنی تبدیل آن عبارت به ضرب دو یا چند عبارت جبری

مهمترین روش های تجزیه:

- ۱- فاکتورگیری ۲- استفاده از اتحادها ۳- دسته بندی ۴- افزودن و کاستن ۵- شکستن یک یا چند جمله عبارت جبری

★ ۱- فاکتورگیری: در این روش «ب م م» ضرایب و حروف مشترک با کوچکترین توان را پیدا کرده و در پشت پرانتز می نویسیم (فاکتور). سپس تک تک جملات عبارت را بر فاکتور تقسیم کرده و حاصل را داخل پرانتز می نویسیم.

$$2ab^2c + 2a^2bc = 2abc(2b + a) \quad \text{مثال) تجزیه کنید}$$

$$\text{مثال) اگر } a(c+d) + b(c+d) = 42 \text{ و } c+d = 3 \text{ باشد حاصل } a+b+c+d \text{ چقدر است؟}$$

$$14 \quad (1)$$

$$17 \quad (2)$$

$$56 \quad (3)$$

$$39 \quad (4)$$

$$a(c+d) + b(c+d) = 42 \Rightarrow (c+d)(a+b) = 42 \Rightarrow 3(a+b) = 42 \Rightarrow a+b = \frac{42}{3} = 14 \Rightarrow a+b+c+d = 14+3 = 17$$

مثال) کدام عامل زیر در تجزیه عبارت $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 0$ وجود ندارد؟

$$a+b \quad (1)$$

$$b+c \quad (2)$$

$$a-c \quad (3)$$

$$a+c \quad (4)$$

ابتدا دو پرانتز را در هم ضرب می کنیم و سپس فاکتورگیری می کنیم.

$$\begin{aligned}(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc &= a^2b+abc+a^2c+b^2a+b^2c+bca+cab+c^2b+c^2a-abc= \\&= (a^2b+b^2a)+(a^2c+abc)+(b^2c+abc)+(c^2a+c^2b)=ab(a+b)+ac(a+b)+bc(a+b)+c^2(a+b)= \\&= (a+b)(ab+aa+bb+a^2)+c^2(a+b)= (a+b)(a^2+ab+bb+c^2)= (a+b)(a+c)^2\end{aligned}$$

★ ۲ - تجزیه با استفاده از اتحادها:

★ (الف) تجزیه با کمک اتحاد دو جمله ای: ۱- عبارت جبری شامل ۳ جمله باشد ۲- دو جمله عبارت باید مربع کامل باشند ۳- جمله سوم دو برابر جذر جملات اول و دوم باشد.

مثال: عبارت $x^4 - 18x^2 + 81$ را تجزیه کنید.

$$x^4 - 18x^2 + 81 = (x^2 - 9)^2$$

★ (ب) تجزیه با کمک اتحاد مزدوج: ۱- عبارت جبری شامل دو جمله باشد ۲- هر دو جمله مربع کامل باشند ۳- عملیات بین دو جمله (-) باشد.

مثال: در تجزیه کامل $a^9 - 1$ تعداد کل عامل ها برابر است با:

(۱) بیش از ۵ ۵(۲) ✓ ۴(۳) ۳(۴)

$$a^9 - 1 = (a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1) = (a - 1)(a^2 + a + 1)(a^6 + a^3 + 1)$$

مثال: حاصل عبارت $45^4 - 9^4$ بر کدام عدد بخش پذیر نیست؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۱۱

$$45^4 - 9^4 = 45^4 - (3^2)^4 = 45^4 - 3^8 = (45^4 + 3^4)(45^4 - 3^4) = (45^4 + 3^4)(45^2 + 3^2)(45^2 - 3^2) = (45^4 + 3^4)(45^2 + 3^2)(45 - 3)(45 + 3)$$

با توجه به حاصل هر پرانتز در هیچ کدام عامل ۵ وجود ندارد پس عبارت بر ۵ بخش پذیر نیست.

★ (پ) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک: ۱- عبارت جبری شامل سه جمله باشد ۲- یک جمله آن مربع کامل باشد ۳- دو عدد بتوان یافت که حاصل جمع آنها برابر ضریب متغیر بوده و حاصل ضرب آنها برابر جمله ی سوم (عدد ثابت) باشد

مثال: عبارت $x^2 - 3x - 4$ بر کدام یک از عبارت های زیر بخش پذیر است؟

(1) $x^2 + 2$

(2) $x + 1$

(3) $x - 1$

(4) $x + 2$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$$

با کمک اتحاد جمله مشترک:

تذکر مهم: در صورتیکه در تجزیه با اتحاد جمله مشترک ضریب x^2 مربع کامل نباشد از روشی به نام روش A (روش روسی) برای مربع کردن استفاده می کنیم. به صورت زیر:

۱- عبارت را برابر A قرار می دهیم ۲- دو طرف تساوی را در ضریب x^2 ضرب می کنیم. ۳- عبارت حاصل را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم ۴- هر یک از عامل های به دست آمده را در صورت امکان تجزیه می کنیم ۵- طرفین تساوی را در عدد ضرب شده تقسیم می کنیم.

مثال: عبارت $6x^2 + 7x + 2$ را تجزیه کنید. (حل) چون ضریب x^2 مربع کامل نیست از روش A استفاده می کنیم داریم:

$$A = 6x^2 + 7x + 2 \Rightarrow 6A = 36x^2 + 7(6x) + 12 \Rightarrow 6A = (6x + 3)(6x + 4) \Rightarrow$$

$$6A = 2(3x + 1)2(3x + 2) \Rightarrow A = (3x + 1)(3x + 2)$$

*** (ت) تجزیه به کمک اتحاد چاق ولاغر:** ۱- عبارت جبری شامل دو جمله باشد ۲- هر دو جمله مکعب کامل باشد.

مثال) عبارت مقابل را تجزیه کنید.

$$a^6 - 64 = (a^2 - 4)(a^4 + 4a^2 + 16)$$

*** (ث) تجزیه به کمک اتحاد مکعب دو جمله ای:**

مثال: عبارت مقابل را تجزیه کنید.

$$27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = (3x - 2)^3$$

*** (ج) تجزیه به کمک دسته بندی:**

در بعضی از عبارات لازم است که جملات آن را به صورت چندین دسته مناسب در نظر گرفته و سپس با استفاده از روش فاکتور گیری یا اتحادهای جبری هر دسته و در نهایت کل عبارت را تجزیه کنیم.

مثال: عبارت $5a^2 + 5b^2 + 10ab + 3a + 3b$ را تجزیه کنید.

$$5a^2 + 5b^2 + 10ab + 3a + 3b \Rightarrow (5a^2 + 5b^2 + 10ab) + (3a + 3b) = 5(a^2 + b^2 + 2ab) + 3(a + b) =$$

$$5(a + b)^2 + 3(a + b) = (a + b)[5(a + b) + 3]$$

***۴- تجزیه با افزودن و کاستن:**

در این روش جمله ای را به عبارت جبری اضافه واز آن کم می کنیم سپس با کمک اتحادها آن را تجزیه می کنیم.

مثال: عبارت $x^4 + 4$ را تجزیه کنید.

$$x^4 + 4 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^4 + 4 + 4x^2) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

***۵- تجزیه به کمک شکستن برخی جملات:**

در این روش بعضی از جملات را به صورت مجموع یا تفاضل دو جمله دیگر می نویسیم سپس به روش دسته بندی و فاکتور گیری و یا اتحادها عبارت جبری را تجزیه می کنیم.

مثال: عبارت $x^4 + x^2 + 1$ را تجزیه کنید.

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 - x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = [(x^2 + 1) - x][(x^2 + 1) + x]$$

(حل) به جای x^2 عبارت $2x^2 - x^2$ را قرار می دهیم.

تذکر مهم: هر چند جمله ای بر عوامل خود در تجزیه آن بخش پذیر است.

نابرابری ها و نامعادله**خاصیت نابرابری ها:**

۱- اگر به دو طرف یک نابرابری یک مقدار مساوی را اضافه و یا کم کنیم جهت نابرابری تغییر نمی کند.

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

$$a > b \Rightarrow a - c > b - c$$

۲- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی **مثبت** ضرب یا تقسیم کنیم جهت نابرابری تغییر نمی کند.

$$a > b \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad \text{و} \quad c > 0$$

$$a > b \Rightarrow ac > bc \quad \text{و} \quad c > 0$$

۳- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی **منفی** ضرب یا تقسیم کنیم جهت نابرابری **عوض می شود**.

$$a > b \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad \text{و} \quad c < 0$$

$$a > b \Rightarrow ac < bc \quad \text{و} \quad c < 0$$

۴- اگر دو طرف یک نابرابری هم علامت باشند با **معکوس** کردن آنها جهت نابرابری **عوض می شود**.

$$a < b < 0 \Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a > b > 0 \Rightarrow a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

۵- اگر دو طرف یک نابرابری هم علامت **نباشند** با معکوس کردن آنها جهت نابرابری **عوض نمی شود**.

$$a < 0, b > 0 \Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \text{مثال:} \quad -3 < 2 < 0 \Rightarrow -3 < 2 \Rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

۶- اگر دو طرف یک نابرابری به توان عددی **فرد** برسند جهت نامساوی تغییر نمی کند.

(الف) دو طرف **مثبت** باشند جهت **عوض** نمی شود.

۷- اگر دو طرف یک نابرابری به توان عددی **زوج** برسند سه حالت وجود دارد:

(ب) دو طرف **منفی** باشند جهت **عوض** می شود

(ج) اگر یکی منفی و دیگری مثبت باشد **قدر مطلق** هر کدام بزرگتر بود موقع به توان زوج رساندن همان طرف بزرگتر می شود.

$$\text{ب) } -3 > -5 \Rightarrow (-3)^4 < (-5)^4$$

$$\text{مثال الف) } 4 > 2 \Rightarrow 4^4 > 2^4$$

$$\text{ج) چون } |-7| > |4| \Rightarrow (-7)^2 > 4^2 \quad -7 < 4$$

مساله: طول مستطیلی ۳ برابر عرض آن است اگر محیط این مستطیل از ۲۰ سانتیمتر بیشتر نباشد عرض مستطیل چه مقداری را می تواند اختیار کند؟

$$x = 3y \Rightarrow 2(x + y) = 2(3y + y) = 8y \Rightarrow \text{محیط} < 20 \Rightarrow 8y < 20 \Rightarrow y < \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

و چون عرض نمی تواند مقادیر منفی اختیار کند پس $0 < y \leq 5/2$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

مختصات . بردار و معادلات خط

★ طول پاره خط AB : اگر $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ مختصات نقاط دو سر یک پاره خط باشند طول پاره خط AB به صورت زیر حساب می شود.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال: دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ دو راس مجاور یک مربع هستند طول قطر مربع چقدر است؟

حل: طول پاره خط AB برابر ضلع مربع است پس:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

حال به کمک رابطه فیثاغورس ضلع مربع را پیدا می کنیم. $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$ ضلع مربع

★ اگر مختصات دو سر یک پاره خط را m برابر کنیم ($m > 0$) طول پاره خط نیز m برابر می شود

مثال) اگر در مثال بالا مختصات نقاط A, B را ۳ برابر کنیم طول پاره خط AB چند می شود؟

نقاط جدید $A' = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $B' = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ خواهند شد پس داریم:

$$\sqrt{(9 - 6)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

و این یعنی اندازه پاره خط $A'B'$ ، ۳ برابر AB می شود.

ایران نوشته
توشه ای برای موفقیت

★ مختصات وسط پاره خط: اگر $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ مختصات نقاط دو سر یک پاره خط باشند مختصات نقطه می M که نقطه -

$$M = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix}$$

ی وسط پاره خط است از فرمول مقابل به دست می آید.

★ مختصات نقطه M نقطه تلاقی میانه های مثلث (نقطه ثقل) به راس های $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ از فرمول های زیر به دست می آید.

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{و} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

★ **فاصله نقطه** $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ از مبدا مختصات برابر است با: $|AO| = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال: فاصله ی نقطه ی $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ از مبدا مختصات چقدر است؟
 $|AO| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

قرینه ی نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{محور } x \text{ ها (افقی)}} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مبدا}} \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{محور } y \text{ ها (عمودی)}} \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نیمساز ربع اول و سوم}} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{خط } x=m} \begin{bmatrix} 2m-x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نیمساز ربع دوم و چهارم}} \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{خط } y=n} \begin{bmatrix} x \\ 2n-y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نسبت به نقطه } \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2m-x \\ 2n-y \end{bmatrix}$

توشه ای برای موفقیت

مثال: دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \end{bmatrix}$ نسبت به کدام نقطه قرینه یکدیگرند؟

حل: نقطه مورد نظر باید در وسط پاره خط AB باشد بنابراین باید نقطه وسط پاره خط را پیدا کنیم.

$$\begin{bmatrix} \frac{7+(-3)}{2} \\ \frac{-9+5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

مثال: قرینه نقطه $A = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ نسبت به نقطه $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \times 4 - (-3) \\ 2 \times (-7) - (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

★ در هر **متوازی الاضلاع** (مستطیل، لوزی، مربع) **مجموع مختصات دو راس مقابل** با مجموع مختصات دو راس دیگر **برابر** است.

$$D \text{ مختصات} + B \text{ مختصات} = C \text{ مختصات} + A \text{ مختصات}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ سه راس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند مختصات راس D کرام است؟

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1) \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A + C = B + D \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + X \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (\text{حل})$$

بردار

★ **اندازه بردار** $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ از رابطه $\sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می آید.

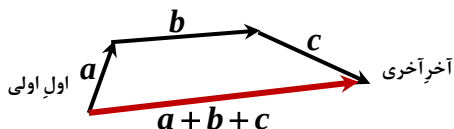
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ اندازه بردار را به دست آورید.}$$

بردارهای مساوی: بردارهایی که هم جهت، هم اندازه و هم راستا (موازی) باشند.

روش های رسم بردار حاصل جمع، برای چند بردار:

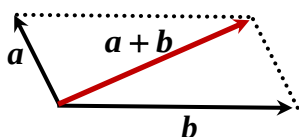
روش اول: روش مثلث: هر گاه ابتدای یک بردار انتهای بردار دیگر باشد. به عبارت دیگر بردارها پشت سرهم (متوالی) باشند.

برای رسم بردار حاصل جمع ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می کنیم. (اولی را به آخر آخری وصل می کنیم).



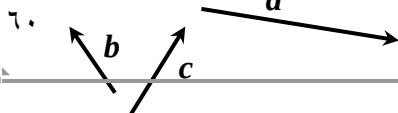
روش دوم: روش متوازی الاضلاع: هرگاه ابتدای دو بردار یکی باشد. (دو بردار از یک نقطه شروع شوند).

در این روش بردار حاصل جمع، قطری از متوازی الاضلاع می شود که از ابتدای دو بردار رسم می شود.

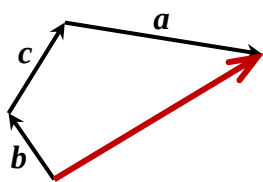


تذکر مهم: اگر بردارها هیچ یک از شرایط گفته شده در روشهای بالا را نداشته باشند. با استفاده از **بردارهای مساوی و انتقال** می

توان بردارها را به یکی از دو روش بالا تبدیل کرد و سپس بردار حاصل جمع را رسم کرد.



مثال: بردار حاصل جمع بردارهای مقابل را رسم کنید.



ابتدا یکی از بردارها رسم کرده و سپس با کمک روش مثلث بردارهایی مساوی با دو بردار و متوالی هم، رسم می کنیم و در آخر بردار حاصل جمع را رسم می کنیم.

★ اگر طول و عرض برداری k برابر شود اندازه بردار نیز k برابر می شود که اگر k مثبت باشد بردار حاصل با بردار اولی موازی و هم جهت می شود ولی اگر k منفی باشد بردار حاصل با بردار اولی موازی ولی در خلاف جهت می شود.

مثال: اگر $\vec{a}$ یک بردار دلفوا باشد بردار $3\vec{a}$ برداری موازی و هم جهت با بردار $\vec{a}$ می باشد که اندازه آن ۳ برابر بردار $\vec{a}$ است. و بردار $5\vec{a}$ برداری است که موازی و در خلاف جهت بردار $\vec{a}$ و اندازه آن ۵ برابر $\vec{a}$ می باشد.

★ **قرینه بردار:** بردارهایی که در خلاف جهت هم، هم اندازه و هم راستا (موازی) باشند.

برای قرینه کردن یک بردار کافیست جهت آن را عوض کنیم. قرینه بردار $\vec{AB}$ را با $\vec{BA}$ و قرینه بردار $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نشان می دهیم. پس برای قرینه کردن مختصات بردار می توان طول و عرض آن را قرینه کرد یا جای ابتدا و انتهای آن را عوض نمود.

★ (الف) بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ موازی محور x هاست اگر $y = 0$ باشد و موازی محور y هاست اگر $x = 0$ باشد.

★ (ب) بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ موازی نیمساز ربع اول و سوم است اگر $x = y$ باشد. و موازی نیمساز ربع دوم و چهارم است اگر $x = -y$ باشد.

ایران تونش

مثال) مقدار m را در بردار $\begin{bmatrix} 6m-12 \\ 30-2m \end{bmatrix}$ چنان تعیین کنید که:

الف) موازی محور طول ها باشد؛ ب) موازی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

$$\text{الف) } y = 0 \Rightarrow 30 - 2m = 0 \Rightarrow m = 15$$

$$\text{ب) } x = -y \Rightarrow 6m - 12 = -(30 - 2m) \Rightarrow 6m - 12 = -30 + 2m \Rightarrow 6m - 2m = -30 + 12 \Rightarrow 4m = -18 \Rightarrow m = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}$$

★ اگر طول و عرض برداری مساوی یا قرینه باشند زاویه ای که با جهت مثبت محور x ها می سازند برابر است با 45° یا 135° درجه.

مثال: بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ چون طول و عرض آن قرینه هستند زاویه 135° درجه می سازند و $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ چون طول و عرض با هم برابرند زاویه 45° درجه می سازند.

* دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ در صورتی بر هم عمودند که: $mx + ny = 0$ باشد. (یعنی مجموع حاصل ضرب طول ها با حاصل ضرب عرضهای آن دو بردار مساوی صفر شود).

مثال: اگر دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3m-5 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -m+3 \end{bmatrix}$ بر هم عمود باشند مقدار m را پیدا کنید.

حل طبق نکته بالا داریم: $2(3m-5) + 4(-m+3) = 0 \Rightarrow 6m - 10 - 4m + 12 = 0 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$

* دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ در صورتی با هم موازیند که $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ باشد. (یعنی نسبت طولهای دو بردار مساوی نسبت عرض های دو بردار باشد).

مثال:

معادله خط

رابطه خطی: بعضی مواقع با متغیرهایی روبه رو می شویم که به یکدیگر وابسته اند و می بینیم که یکی از آنها با افزایش و یا کاهش دیگری با یک نسبت ثابت و معین افزایش یا کاهش می یابد. اگر رابطه بین دو متغیر را با زبان ریاضی بیان کنیم و نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کنیم و **نمودار آنها** به صورت یک **خط راست** درآید می گوئیم رابطه بین آن دو متغیر یک رابطه خطی است. اگر یکی از متغیرها را x و دیگری را y بنامیم رابطه خطی بین این دو متغیر به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) نشان داده می شود.

* شرط آنکه نقطه ای روی یک خط باشد (یا خط از آن نقطه بگذرد) آنست که با جایگذاری طول نقطه به جای x و عرض نقطه به جای y در معادله خط تساوی برقرار شود.

مثال: آیا نقطه $A = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ روی خط $3x - 4y = 5$ قرار دارد؟

نقطه روی خط نیست $3x - 4y = 5 \Rightarrow 3 \times 5 - 4 \times (-3) = 5 \Rightarrow 15 + 12 \neq 5$

* در معادله خط $y = ax$ ، شیب خط برابر a و عرض از مبدا صفر می باشد.

* در معادله خط $y = ax + b$ شیب خط برابر a و عرض از مبدا b می باشد.

* در معادله خطی $ax + by = c$ برای به دست آوردن شیب و عرض از مبدا باید y را با ضریب یک در یک طرف تساوی و دو جمله ی شامل x و عدد ثابت را در طرف دیگر بنویسیم که در اینصورت:

$$ax + by = c \Rightarrow by = -ax + c \Rightarrow \frac{by}{b} = \frac{-ax}{b} + \frac{c}{b} \Rightarrow y = \underbrace{\left(\frac{-a}{b}\right)}_{\text{شیب}} x + \underbrace{\left(\frac{c}{b}\right)}_{\text{عرض از مبدأ}}$$

★ دو خط وقتی با هم موازی اند که شیب خط ها با هم برابر باشد.

★ دو خط وقتی بر هم عمودند که شیب آنها **تربینه و معکوس** یک دیگر باشد. (یا حاصل ضرب شیبها برابر -۱ باشد).

مثال: مقدار a برابر کدام گزینه باشد تا خط $(a-2)x + 4y = 10$ بر خط $4x - 6y = 8$ عمود باشد.

۶ (۱) -۶ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴)

$$(a-2)x + 4y = 10 \Rightarrow y = \frac{-(a-2)}{4}x + \frac{10}{4} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{-(a-2)}{4}$$

$$4x - 6y = 8 \Rightarrow y = \frac{-4}{-6}x + \frac{8}{-6} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{-(a-2)}{4} = -1 \Rightarrow \frac{-2a+4}{12} = -1 \Rightarrow -2a+4 = -12 \Rightarrow -2a = -16 \Rightarrow a = 8 \text{ باشد}$$

★ **شیب خطی** که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ می گذرد برابر است با:

$$a = \frac{\text{اختلاف عرضها}}{\text{اختلاف طولها}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

★ سه نقطه A و B و C در صورتی **روی یک خط** قرار می گیرند که شیب خطی که از A و B می گذرد با شیب خطی که از A و C یا از B و C می گذرد برابر باشد.

مثال: سه نقطه $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$ مفروضه به ازای چه مقدار k حاصل عبارت $AC + BC$ کمترین مقدار را دارد؟

۵ (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

حل) عبارت $AC + BC$ وقتی کمترین مقدار می شود که نقاط A و B و C روی یک خط راست باشند پس باید شیب خطی که از هر دو نقطه می گذرد مساوی هم باشد.

$$AB \text{ شیب} = AC \text{ شیب} \Rightarrow \frac{\frac{-1}{2} - 4}{\frac{1}{2} - 5} = \frac{0 - 4}{k - 5} \Rightarrow \frac{-\frac{9}{2}}{-\frac{9}{2}} = \frac{-4}{k - 5} \Rightarrow 1 = \frac{-4}{k - 5} \Rightarrow k - 5 = -4 \Rightarrow k = 1$$

★ **شیب مثبت** یک خط باعث می شود که خط با جهت مثبت محور x (سمت راست محور افقی) **زاویه تند** و **شیب منفی** باعث می شود که خط با جهت مثبت محور x **زاویه باز** بسازد.

★ معادله خطی که از نقطه $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ بگذرد و شیب آن a باشد از فرمول زیر به دست می آید.

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

مثال: فنی از نقاط $A = \begin{bmatrix} 3 \\ m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix}$ گذشته و محور عرضها را در نقطه ای به عرض a قطع نموده مقدار m چه عددی است؟

$$(1) \quad 4 \quad (2) \quad -2 \quad (3) \quad -4 \quad (4) \quad 2$$

(حل) چون صورت و مخرج قرینه‌ی هم هستند پس شیب برابر -1 است $\Rightarrow$ شیب $AB = \frac{m-3}{3-m} = -1$ پس معادله به صورت زیر است.

عرض از مبدا $3+m$ می شود

$$y - y_1 = a(x - x_1) \Rightarrow y - m = -1(x - 3) \Rightarrow y - m = -x + 3 \Rightarrow y = -x + 3 + m \Rightarrow$$

حال باید این عرض مبدا با a برابر باشد زیرا خط محور عرضها را در نقطه a قطع کرده است. $3 + m = 1 \Rightarrow m = -2$

★ سه خط زمانی با هم تشکیل مثلث می دهند که دو به دو با هم موازی نباشند یعنی شیب هیچ دو تایی از آنها برابر نباشد.

(مثال) دو خط $y + 2x - 1 = 0$ و $2y - x + 5 = 0$ با کدام یک از خط های زیر تشکیل یک مثلث می دهند؟

$$(1) \quad 3y + 7 = -6x \quad (2) \quad y = \frac{x}{2} - 3 \quad (3) \quad 2x - 9 = 2y \quad (4) \quad x - 2y = 8$$

(حل) با توجه به نکته بالا شیب های دو خط در صورت مساله و قطعاتی موجود در گزینه ها را پیدا می کنیم شیب هر کدام از خط های موجود در گزینه ها که با هیچ کدام از شیب های دو خط مساوی نشود همان گزینه جواب است.

★ هر خط راستی محورهای مختصات را در طول از مبدا و عرض از مبدا قطع می کند. برای پیدا کردن طول از مبدا در معادله خط به جای y عدد صفر قرار داده و مقدار x را پیدا می کنیم و برای عرض از مبدا در معادله خط به جای x عدد صفر قرار داده و مقدار y را پیدا می کنیم.

مثال: مثلث برافورد خط $3y - 2x = 4$ را پیدا کنید.

مثلث برافورد خط با محور عرضها $\Rightarrow y = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow 3y - 2x = 4 \Rightarrow 3y - 2 \times 0 = 4 \Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$ به جای x صفر قرار می دهیم

محل برخورد خط با محور طولها $\Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$ $\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow 3x - 2x = 4 \Rightarrow 3 \times 0 - 2x = 4 \Rightarrow 3y - 2x = 4 \Rightarrow 3y - 2 \times 2 = 4 \Rightarrow 3y - 4 = 4 \Rightarrow 3y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{3}$ به جای y صفر قرار می دهیم

* معادله خطی که از نقاط $A = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}$ می گذرد (یعنی طول از مبدا و عرض از مبدا آن معلوم است) برابر است با:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

مثال: معادله خطی که از نقاط $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ می گذرد را بنویسید. $\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$

خط $ax + by = c$ موازی محور طول ها (x ها) است اگر $a = 0$ باشد.

خط $ax + by = c$ موازی محور عرضها (y ها) است اگر $b = 0$ باشد.

خط $ax + by = c$ از مبدا می گذرد اگر $c = 0$ باشد.

* نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ نسبت به خط $ax + by + c = 0$ (باید ضریب y یعنی b مثبت باشد) سه حالت مختلف دارد که عبارتند از:

۱- نقطه‌ی A بالای خط قرار دارد. $\Rightarrow am + bn + c > 0$

۲- نقطه‌ی A روی خط قرار دارد. $\Rightarrow am + bn + c = 0$

۳- نقطه‌ی A زیر خط قرار دارد. $\Rightarrow am + bn + c < 0$

مثال: نقطه $A = \begin{bmatrix} 35 \\ 91 \end{bmatrix}$ نسبت به دو خط $l: y = 3x - 21$ و $d: 11y - 30x + 39 = 0$ چه موقعیتی دارد؟

(۱) بالای هر دو خط (۲) بالای l و پایین d (۳) پایین l و بالای d (۴) پایین هر دو خط

بالای خط $l \Rightarrow -3 \times 35 + 91 + 21 = +7 > 0 \Rightarrow -3x + y + 21 = 0 \Rightarrow -3x + y = -21 \Rightarrow y = 3x - 21$

پایین خط $d \Rightarrow 11 \times 91 - 30 \times 35 + 39 = -10 < 0 \Rightarrow 11y - 30x + 39 = 0$

* شرط موازی بودن دو خط $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ (یعنی اصلاً جواب نداشته باشند) آنست که: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

* شرط منطبق شدن دو خط $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ (یعنی بی شمار جواب داشته باشد) آنست که: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

*** شرط متقاطع بودن دو خط** $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ (یعنی یک جواب داشته باشد) آنست که: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

*** شرط عمود بودن دو خط** $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ آنست که: $aa' + bb' = 0$

مثال: دو خط $3x + 2y + 6 = 0$ و $2x - 3y - 6 = 0$ نسبت به هم چه وضعی دارند و به طور مشترک از کدام نواحی دستگاه مختصات می گذرند؟
(۱) موازی-ناهیه او (۲) عمود-ناهیه ۲ و ۳ (۳) موازی-ناهیه ۳ و ۴ (۴) عمود-ناهیه ۳ و ۴

حل) چون در رابطه $aa' + bb' = 0$ ضرایب صدق می کند داریم: $3 \times 2 + 2 \times (-3) = 0$ پس بر هم عمودند.

برای اینکه بفهمیم از کدام ناحیه به طور مشترک می گذرند باید شیب و عرض از مبدا خطها را پیدا کنیم که در نتیجه هر دو خط از ناحیه های سوم و چهارم می گذرند.

*** برای پیدا کردن قرینه ی هر خط نسبت به هر مورد (نیمساز ربع اول و سوم، نیمساز ربع دوم و چهارم، مبدا مختصات و ...)** ابتدا قرینه ی

نقطه ی $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را نسبت به آن مورد حساب کرده تا به نقطه ی $A' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ برسیم. سپس در معادله خط به جای x و y مقادیر x' و y' را قرار می دهیم.

مثال: قرینه ی خط $x + 2y = 3$ را یک بار نسبت به مبدا مختصات و بار دیگر نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم حساب کنید.

چون قرینه نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به مبدا $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ می شود پس معادله قرینه خط نسبت به مبدا می شود: $x + 2y = 3 \Rightarrow -x - 2y = 3$

چون قرینه نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ می شود پس معادله قرینه خط می شود: $-y - 2x = 3$

*** تذکر مهم:** اگر قرینه ی شکلی را نسبت به خط یا نقطه ای به دست آوریم **مساحت و محیط شکل تغییر نمی کند.**

*** مساحت مثلث محصور بین خط و محورهای مختصات برابر است با:**

$$S = \frac{|\text{طول از مبدا} \times \text{عرض از مبدا}|}{2}$$

مثال: مساحت مثلثی که حاصل از برخورد خط $\frac{y}{1394} + \frac{x}{1395} = 1$ با محورهای مختصات صورت می گیرد چیست؟

$$S = \frac{|\text{طول از مبدا} \times \text{عرض از مبدا}|}{2} = \frac{1395 \times 1394}{2}$$

چون طول از مبدا خط ۱۳۹۵ و عرض از مبدا خط ۱۳۹۴ است داریم

مثال) چند خط از نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ می گذرند و با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۱۵ واحد می سازند؟

با توجه به صورت سوال، طول از مبدا خط یا خطوط برابر ۳- می باشد پس عرض مبدا خط یا خطوط را m می گیریم داریم:

$$S = \frac{|\text{طول از مبدا} \times \text{عرض از مبدا}|}{2} \Rightarrow 15 = \frac{|3 \times m|}{2} \Rightarrow |3m| = 30 \Rightarrow |m| = 10 \Rightarrow m = \pm 10$$

پس با توجه به پیدا شدن دو مقدار برای m دو خط می گذرد.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

*** فاصله نقطه** $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

مثال: یک ضلع مربعی بر خط $y = x + 2$ واقع است. و $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ یک رأس آن است که روی این خط نیست قطر مربع کدام است؟

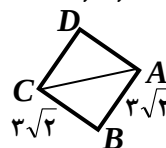
$$(1) 3\sqrt{2} \quad (2) 6 \quad (3) 2\sqrt{2} \quad (4) 4$$

حل) ابتدا فاصله نقطه A را از خط $y = x + 2$ به دست می آوریم:

$$y = x + 2 \Rightarrow y - x - 2 = 0$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

ضلع مربع



پس ضلع مربع به کمک رابطه فیثاغورس برابر است با:

$$AC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 18 + 18 = 36 \Rightarrow AC = \sqrt{36} = 6$$

ایران تونش
توشه ای برای موفقیت

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

*** فاصله دو خط موازی** $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

مثال: فاصله دو خط موازی $8x + 6y + 4 = 0$ و $4x + 3y - 19 = 0$ کدام است؟

$$(1) \frac{21}{5} \quad (2) \frac{5}{21} \quad (3) \frac{99}{21} \quad (4) \frac{21}{99}$$

حل) چون باید ضرایب x, y باید با هم برابر باشد ابتدا ضرایب معادله اول را بر ۲ تقسیم می کنیم:

$$8x + 6y + 4 = 0 \Rightarrow 4x + 3y + 2 = 0$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-19)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{2 + 19}{\sqrt{25}} = \frac{21}{5}$$

الکتون داریم؛

تذکره: البته می توان با پیدا کردن فاصله یک نقطه دلخواه از یکی از خط ها از خط دوم نیز سوال را حل کرد.

★ اگر دو خط به معادله های $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ داشته باشیم خطی از مبدا مختصات کوتاه ترین فاصله را دارد که قدر مطلق عدد ثابت آن یعنی $|c|$ یا $|c'|$ صفر یا کوچک تر از بقیه باشد. (دقت کنید ضرایب x با هم و y با هم در دو معادله باید مساوی باشد).

مثال: کدام خط زیر کمترین فاصله را از مبدا مختصات دارد؟

$$(1) \quad x + y - 2 = 0 \quad (2) \quad x + y - \sqrt{2} = 0 \quad (3) \quad x + y + \sqrt{2} = 0 \quad (4) \quad x + y + 1 = 0$$

حل) فاصله گزینه ۱ زیرا قدر مطلق عدد ثابت آن یعنی -2 از بقیه بزرگتر است.

★ دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ سه حالت مختلف می تواند داشته باشد:

۱- اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد دو خط **برهم منطبق** هستند و دستگاه **بی شمار جواب** دارد.

۲- اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد دو خط با هم **موازی**ند و دستگاه **جواب ندارد**.

مثال) شرط آنکه دستگاه $\begin{cases} (2a-1)x + 3y - 2 = 0 \\ 5y - ax = 0 \end{cases}$ جواب نداشته باشد آنست که:

$$(1) \quad a = \frac{13}{5} \quad (2) \quad 2a^2 - a + 15 = 0 \quad (3) \quad 2a^2 - a + 15 = 0 \quad (4) \quad a = \frac{5}{13}$$

حل) طبق نکته بالا داریم: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{2a-1}{-a} = \frac{3}{5} \Rightarrow 10a - 5 = -3a \Rightarrow 13a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{13}$

۳- اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد دو خط **مقاطعند** و دستگاه **یک جواب** دارد.

مثال: دستگاه $\begin{cases} 3x + 2m = 7 \\ mx + 6y = 10 \end{cases}$ به ازای چه مقداری از m دارای جواب نیست؟

$$(1) \quad m = 3 \quad (2) \quad m = -3 \quad (3) \quad m = \pm 3 \quad (4) \quad m = 6$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{3}{m} = \frac{2m}{6} \Rightarrow 2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

(حل) دو خط باید موازی باشند در نتیجه داریم:

مثال: اگر دستگاه
$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 2mx + 3ny = x + 2y + 6 \end{cases}$$
 دارای بی شمار جواب باشد مقدار $n - m$ چقدر است؟

(حل) چون دستگاه بی شمار جدول دارد داریم

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{2}{2m-1} = \frac{5}{3n-2} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2m-1} = 2 \Rightarrow 4m - 2 = 2 \Rightarrow 4m = 4 \Rightarrow m = 1 \\ \frac{5}{3n-2} = 2 \Rightarrow 6n - 4 = 5 \Rightarrow 6n = 9 \Rightarrow n = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$n - m = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

★ اگر در یک دستگاه نسبت ها برابر باشند همه را مساوی k فرض کرده و همه مجهول ها را برحسب k به دست آورده و در رابطه‌ی داده شده جایگذاری می کنیم تا مقدار k به دست آید سپس مجهولات را به دست می آوریم.

مثال: دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4} \\ x - 2y + z = 30 \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4} = k \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{5} = k \Rightarrow x+1 = 5k \Rightarrow x = 5k-1 \quad (1) \\ \frac{y}{3} = k \Rightarrow y = 3k \quad (2) \\ \frac{z-1}{4} = k \Rightarrow z-1 = 4k \Rightarrow z = 4k+1 \quad (3) \end{cases}$$

$$x - 2y + z = 30 \Rightarrow 5k - 1 - 2 \times 3k + 4k + 1 = 30 \Rightarrow 5k - 6k + 4k = 30 \Rightarrow k = 30$$

الکون مقدار k در معادلات اول و دوم قرار داده و مقدار x, y, z به دست می آوریم

$$x = 5k - 1 = 5 \times 30 - 1 = 149 \quad \text{و} \quad y = 3k = 3 \times 30 = 90 \quad \text{و} \quad z = 4 \times 30 + 1 = 121$$

تذکر مهم: در بعضی از مسائل می توان از **مجموع ملعاون** (کمکی) نیز استفاده کرد.

مثال: دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 4 \\ \frac{14}{x} - \frac{3}{y} = 2 \end{cases}$$

حل: در این دستگاه $\frac{1}{x}$ را مساوی A و $\frac{1}{y}$ را مساوی B می گیریم و سپس دستگاه جبر را حل می کنیم

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 4 \\ \frac{14}{x} - \frac{3}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6A + 5B = 4 \\ 14A - 3B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18A + 15B = 12 \\ 70A - 15B = 10 \end{cases}$$

$$88A = 22 \Rightarrow A = \frac{22}{88} = \frac{1}{4} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 4$$

$$18 \times \frac{1}{4} + 15B = 12 \Rightarrow 15B = 12 - \frac{18}{4} = \frac{48 - 18}{4} = \frac{30}{4} \Rightarrow B = \frac{30}{4} \div 15 = \frac{30}{4} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{2} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = 2$$

مساله: در یک امتحان تستی با ۲۰ سوال هر جواب صحیح ۷ نمره مثبت و هر جواب غلط ۲ نمره منفی دارد (به سوالهای برون جواب هیچ نمره ای تعلق نمی گیرد) اگر نمره ی دانش آموزی برابر ۸۷ باشد این دانش آموز به چند سوال جواب ندره است؟

۵(۱) ۷(۲) ۹(۳) ۱۳(۴)

تعداد سوال های برون جواب $z =$ تعداد جواب های غلط $y =$ تعداد جوابهای صحیح $x =$

$$\begin{cases} 7x - 2y = 87 \\ x + y + z = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 2y = 87 \\ -7x - 7y - 7z = -140 \end{cases}$$

$$-9y - 7z = -53 \Rightarrow 9y + 7z = 53$$

در بین گزینه ها تنها مقداری که به جای z می توان قرار داد فقط گزینه ۱ می باشد پس $z = 5$ داریم:

$$9y + 7 \times 5 = 53 \Rightarrow 9y = 53 - 35 = 18 \Rightarrow y = 2$$

ایران توشه

عبارت های گویا

عبارت گویا: عبارتی است که در آن، عبارت صورت و مخرج چند جمله ای می باشند و مخرج صفر نباشد.

مثال: عبارت های $\frac{\sqrt{3}}{x - \sqrt{5}}$ و $\frac{3x - 1}{7x^2 + 4x + 1}$ گویا هستند، اما عبارت های $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ و $\frac{3\sqrt{x} + 1}{4x^2 + 1}$ گویا نیستند.

تذکر: عبارت های $\sqrt[3]{x^3}$ و $|x - x|$ و $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ گویا نیستند اما اگر در سوال گفته باشد آیا بعد از ساده شدن گویا هستند؟ جواب بله

خواهد بود.

نکته: برای پیدا کردن مجموعه مقادیری که به ازای آنها برای متغیر عبارت داده شده، عبارت تعریف شده باشد ((دامنه تعریف)) باید اگر عبارت کسری بود مخرج عبارت صفر نباشد و همچنین اگر عبارت رادیکالی با فرجه زوج بود زیر رادیکال منفی نباشد.

مثال: عبارت $\frac{x-1}{x^2-1}$ به ازای چه مقادیری از متغیر x تعریف شده است؟

حل) مخرج باید صفر نشود. $x-1=0 \Rightarrow x=1$
 $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

پس عبارت به ازای تمام اعداد حقیقی به جز 1 و -1 تعریف شده است. یعنی: $R - \{1, -1\}$

مثال: عبارت $\frac{x+3}{\sqrt{x-2}}$ به ازای چه مقادیری از متغیر x تعریف شده است؟

حل) مخرج باید صفر نشود و منفی نیز نشود زیرا رادیکال با فرجه زوج است. $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$ یعنی با ازای تمام اعداد حقیقی بزرگتر از 2 تعریف شده است.

تذکره ۱: عبارت های گویایی هم هستند که هیچگاه مخرج آنها صفر نمی شود بنابراین دامنه تعریف این عبارت ها اعداد حقیقی می باشد.

مثال: عبارت گویای $\frac{5x}{x^2+1}$ مخرج هیچ گاه صفر نمی شود زیرا مخرج آن همیشه مثبت است پس به ازای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است.

تذکره ۲: تا قبل از تعیین دامنه اجازه ساده کردن عبارت جبری را نداریم.

نکته: هر گاه یک عبارت از مجموع یا تفاضل چند عبارت گویا تشکیل شده باشد طوری که دامنه تعریف آنها به صورت بازه باشد برای تعیین دامنه تعریف کل عبارت باید اشتراک آن بازه ها را حساب کنیم.

مثال:

نکته: برای ساده کردن عبارت های گویا ابتدا صورت و مخرج آن را تا حد امکان تجزیه کرده سپس عامل های مشترک را با یکدیگر ساده می کنیم.

مثال: عبارت های زیر را ساده کنید.

$$\text{الف)} \frac{4x^2 + 6x + 9}{8x^3 - 27} = \frac{4x^2 + 6x + 9}{(2x-3)(4x^2 + 6x + 9)} = \frac{1}{2x-3}$$

$$\text{ب) } \frac{9x^2 + x - 3x^3 - 3}{3x^2 - 1} = \frac{(9x^2 - 3x^3) + (x - 3)}{3x^2 - 1} = \frac{3x^2(3 - x) + (x - 3)}{3x^2 - 1} = \frac{(3 - x)(3x^2 - 1)}{3x^2 - 1} = 3 - x$$

نکته: در جمع و تفریق عبارت های گویا، پس از تجزیه مخرج ها، بین آنها «ک م م» گرفته و پس از هم مخرج کردن کسرها، و تغییر صورتها آنها را با هم جمع یا تفریق می کنیم.

مثال: ساده سره عبارت $\frac{x+4}{x^2+2x-8} + \frac{1-x}{x^2+x-2}$ کدام است؟

الف) $\frac{4}{x^2-4}$ ب) $\frac{-4}{x^2-4}$ ج) $\frac{2x}{x^2-4}$ د) $\frac{-2x}{x^2-4}$

حل)

$$\frac{x+4}{x^2+2x-8} + \frac{1-x}{x^2+x-2} = \frac{x+4}{(x+4)(x-2)} + \frac{1-x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-4}$$

نکته: برای به دست آوردن ضرایب مجهول در عبارت های گویا، ابتدا با مخرج مشترک گیری، مخرج دو طرف را با یکدیگر برابر کرده سپس صورتها را با یکدیگر هم ارز قرار می دهیم. (یعنی ضرایب x را با هم و ضرایب x^2 را نیز باهم و مقادیر ثابت را نیز باهم مساوی قرار می دهیم.)

مثال: اگر $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2-4} = \frac{3x}{x^2-4}$ باشد که مقدار B کدام است؟ $x \neq \pm 2$

الف) -6 ب) 4 ج) 6 د) -4

حل) $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2-4} = \frac{3x}{x^2-4} \Rightarrow \frac{A(x+2)+B}{(x-2)(x+2)} = \frac{Ax+2A+B}{x^2-4} = \frac{3x}{x^2-4} \Rightarrow$

$$\begin{cases} A=3 \\ 2A+B=0 \Rightarrow 2 \times 3 + B = 0 \Rightarrow B = -6 \end{cases}$$

مثال: اگر $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ آنگاه $A+B+C$ کدام است؟ $(x \neq 0, -1, -2)$

الف) صفر ✓ ب) 1 ج) 2 د) 3

نکته: تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای به یکی از دو روش زیر انجام می شود.

روش اول: از عامل مشترک صورت فاکتور گرفته و سپس با مخرج ساده کنیم.

روش دوم: از قانون تفکیک کردن (جدا سازی) در کسرها استفاده کنیم.

مثال: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{3a^2b^6 - 18ab^5 - 24a^2b^2}{3ab^2} = \frac{3a^2b^6}{3ab^2} - \frac{18ab^5}{3ab^2} - \frac{24a^2b^2}{3ab^2} = ab^4 - 6b^3 - 8a$$

نکته: برای ضرب عبارت های گویای کسری هر عبارت را تا حد امکان تجزیه و ساده می کنیم و سپس صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

مثال: حاصل عبارت $\frac{x^2-9}{x^2-4} \times \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} \times \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$ کدام است؟

$$\frac{x-1}{x+1} \quad (1) \quad \frac{x+1}{x-1} \quad (2) \quad \frac{x-2}{x+2} \quad (3) \quad \frac{x+2}{x-2} \quad (4)$$

$$\frac{x^2-9}{x^2-4} \times \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} \times \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} \times \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x-1}{x+1} \quad (5)$$

نکته: در تقسیم عبارت های گویا عبارت سمت چپ را در معکوس عبارت سمت راست ضرب می کنیم و سپس عبارت ها را تا حد امکان تجزیه کرده و ساده می کنیم و در آخر صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

نکته: در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای ، تقسیم را تا جایی ادامه می دهیم که درجه باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

مثال:

نکته: هرگاه مقدار عددی مقسوم را به ازای ریشه ی مقسوم علیه محاسبه کنیم باقیمانده تقسیم را به دست آورده ایم.

ایران توننه
تیزهوشان برای موفقیت

مثال: اگر عبارت $x^3 + 5x^2 + x + a$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد مقدار a کدام است؟

$$-3 \quad (1) \quad -4 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad -4 \quad (4)$$

حل) ابتدا ریشه مقسوم علیه را پیدا می کنیم $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ حال مقدار عبارت مقسوم بایر به ازای $x=-1$ برابر با باقیمانده یعنی صفر باشد. پس داریم:

$$x^3 + 5x^2 + x + a = (-1)^3 + 5(-1)^2 + (-1) + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

نکته:

۱- عبارت $x^n - y^n$ همواره بر $x - y$ بخش پذیر است.

۲- عبارت $x^n - y^n$ فقط وقتی بر $x + y$ بخش پذیر است که n عددی زوج باشد.

۳- عبارت $x^n + y^n$ فقط وقتی بر $x + y$ بخشپذیر است که n عددی فرد باشد.

نکته:

برای تعیین مقدار های یک متغیر در یک عبارت گویا به شرط آنکه آن که آن عبارت مقدارش عددی صحیح شود می توان با استفاده از اتحادها، فاکتورگیری و یا شکستن جملات آن عبارت را به مقدارهای صحیح تبدیل کرد و در پایان روی کسری که می ماند برحسب شمارنده های صورت کسر که باید در مخرج باشند بحث کرد.

و یا به جای استفاده از اتحادها و فاکتورگیری و صورت را مستقیماً بر مخرج را تقسیم کرد اگر باقیمانده صفر شد به ازای تمام مقادیر متغیر آن عبارت گویا عدد صحیح می شود.

ولی اگر باقیمانده صفر نشد باید حاصل تقسیم باقیمانده بر مقسوم علیه عددی صحیح شود. و برای این کار باید مخرج برابر شمارنده های صورت شود.

مثال: به ازای چند مقدار طبیعی y حاصل عبارت $\frac{5y^2 + 18}{y}$ مقداری صحیح است؟

(۱) هیچ مقدار (۲) ۱ (۳) ۶ (۴) بی شمار

حل) عبارت را به صورت $\frac{5y^2}{y} + \frac{18}{y}$ می نویسیم. چون در عبارت اول یعنی $\frac{5y^2}{y}$ صورت بر مخرج بخشپذیر است. در عبارت دوم

نیز باید صورت بر مخرج بخشپذیر باشد و برای درست بودن این مطلب مخرج کسر یعنی y برابر با شمارنده های ۱۸ شود. ۱۸ و ۹ و ۶ و ۳ و ۲ و ۱ پس تعداد مقدارهای y برابر با ۶ تا می شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

هندسه

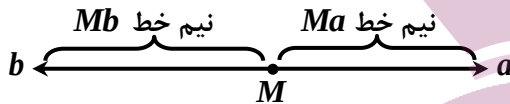
مفاهیم اولیه

نام گذاری نقطه: نقطه را با یک حرف از حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری می کنیم. از برخورد هر دو خط یک نقطه به وجود می آید.

نامگذاری خط: خط را با دو حرف کوچک که در دوسر خط قرار می دهیم و یا با یک حرف کوچک نامگذاری می کنیم.



نامگذاری نیم خط: اگر یک نقطه روی یک خط قرار دهیم آن را به دو نیم خط تبدیل می کند که آن را با دو حرف که اولی بزرگ و دومی کوچک است نامگذاری می کنیم.



نامگذاری پاره خط: قسمتی از خط است که بین دو نقطه قرار می گیرد بنا براین آن را با دو حرف بزرگ نامگذاری می کنیم.



تعداد پاره خط ها و نیم خط ها:

اگر روی یک خط راست تعدادی نقطه متمایز (n نقطه) قرار دهیم تعداد نیم خط ها و تعداد پاره خط ها برابر است با: چون با قرار دادن هر نقطه روی یک خط، دو نیم خط به وجود می آید پس تعداد نیم خط ها برابر است با:

$$\text{تعداد نیم خط} = 2n = \text{تعداد نقاط} \times 2$$

روش اول: چون نقطه اول با بقیه نقاط $n-1$ پاره خط درست می کند و نقطه دوم با بقیه نقاط (غیر از نقطه اول) $n-2$ پاره خط درست می کند و نقطه سوم با بقیه نقاط $n-3$ پاره خط درست می کند و ... که حاصل جمع اعداد 1 تا $n-1$ می باشد پس داریم:

$$\text{تعداد پاره خط ها} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(1- \text{تعداد نقاط}) \times \text{تعداد نقاط}}{2}$$

روش دوم با کمک اصل ضرب: چون برای هر پاره خط به دو نقطه نیاز داریم بنابراین برای انتخاب نقطه اول از بین n نقطه n حالت وجود خواهد داشت و برای انتخاب نقطه دوم $n-1$ حالت وجود دارد پس طبق اصل ضرب برای انتخاب این دو نقطه $n(n-1)$ حالت خواهیم داشت و چون با این روش هر دو نقطه را دو بار حساب می کنیم پس حاصل را تقسیم بر 2 می کنیم و داریم:

$$\text{تعداد پاره خط ها} = \frac{n(n-1)}{2}$$

مثال: اگر ۱۰ نقطه روی یک خط قرار دهیم چند نیم خط و چند پاره خط به وجود می آید؟

$$\text{تعداد نیم خط} = 2n = 2 \times 10 = 20$$

$$\text{تعداد پاره خط ها} = \frac{(1- \text{تعداد نقاط}) \times \text{تعداد نقاط}}{2} = \frac{10 \times (10-1)}{2} = 45$$

مثال) چند نقطه روی یک خط قرار دهیم تا :
الف) تعداد نیم خط ها و پاره خط ها با هم برابر شود؟

ب) تا تعداد پاره خط ها دو برابر نیم خط ها شود؟

تعداد نقاط برخورد چند خط: اگر n خط در صفحه همدیگر را قطع کنند حداکثر $\frac{n(n-1)}{2}$ نقطه برخورد خواهند داشت. (برای پیدا کردن این فرمول شبیه روش دوم پیدا کردن تعداد پاره خط ها که در چند سطر بالاتر گفتیم عمل می کنیم).

مساله : با n نقطه که هیچ سه تای آنها روی یک خط راست نیستند چند مثلث می توان مشخص کرد؟
حل) برای هر مثلث سه نقطه لازم داریم با این تعداد انتخاب های موجود از بین n نقطه به صورت زیر است:
برای انتخاب نقطه اول مثلث n حالت و برای انتخاب نقطه دوم $(n-1)$ حالت و برای انتخاب نقطه سوم $(n-2)$ حالت وجود دارد پس طبق اصل ضرب برای انتخاب هر ۳ نقطه با هم $n(n-1)(n-2)$ حالت وجود خواهد داشت و چون برای هر ۳ نقطه ۶ مثلث تکراری وجود خواهد داشت پس باید تقسیم بر ۶ شود یعنی داریم:

$$\text{تعداد مثلث ها} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

نکته مهم: اگر تعدادی نقطه روی یک خط و تعدادی نقطه دیگر روی خط دومی باشند وبخواهیم تعداد مثلث ها یی را که با این نقاط می توان مشخص کرد حساب کنیم. ابتدا باید تعداد پاره خط هایی را که روی هر خط وجود دارد مشخص کنیم و سپس تعداد پاره خط هایی که روی هر خط وجود دارد را در تعداد نقاطی که روی خط دیگر وجود دارد ضرب کنیم و در آخر آنها را با هم جمع کنیم.

مثال) تعداد مثلث هایی که با نقاط روی خط های زیر می توان مشخص کرد را مشخص کنید

$a \leftarrow \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$ a تعداد پاره خط های روی خط $a = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

$b \leftarrow \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$ b تعداد پاره خط های روی خط $b = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

$$\text{تعداد مثلث ها} = 4 \times 10 + 5 \times 6 = 70$$

نکته : با n خط یک صفحه را حداکثر به $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ قسمت می توان تقسیم کرد.

مثال) به کمک ۴ خط یک صفحه را حداکثر به چند ناحیه می توان تقسیم کرد؟

(۱) ۸ (۲) ۱۱ (۳) ۹ (۴) ۱۰

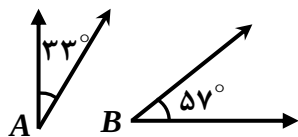
زاویه

انواع زاویه :

۱- زاویه تند (حاده) ۲- زاویه راست (قائمه) ۳- زاویه باز (منفرجه)

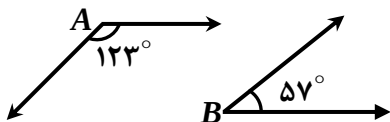
انواع دو زاویه :

۱- دو زاویه متمم: دو زاویه که مجموع اندازه آنها ۹۰ درجه باشد.



$$\hat{A} + \hat{B} = 33 + 57 = 90$$

۲- دو زاویه مکمل: دو زاویه که مجموع اندازه آنها ۱۸۰ درجه باشد.



$$\hat{A} + \hat{B} = 123 + 57 = 180$$

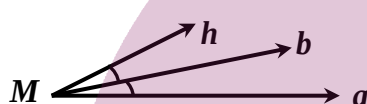


۳- دو زاویه متقابل به راس: دو زاویه که دارای یک راس و اضلاع آنها در امتداد هم باشد.

تذکر: دو زاویه متقابل به راس همیشه با هم برابرند.

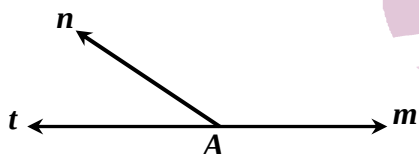
$$\begin{aligned} \hat{1} + \hat{2} &= 180^\circ \\ \hat{2} + \hat{3} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{1} + \hat{2} &= \hat{2} + \hat{3} \Rightarrow \hat{1} = \hat{3} \end{aligned}$$

۴- دو زاویه مجاور: دو زاویه که در یک راس و یک ضلع مشترک بوده و ضلع دیگر قرار داشته باشد.

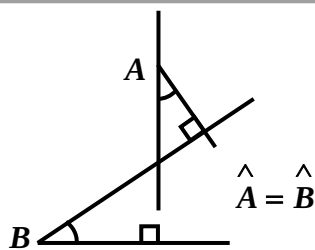
دو زاویه hMa و hMb مجاورند.

۵- دو زاویه مجانب: دو زاویه که مجاور بوده و مجموعشان ۱۸۰ درجه شود.

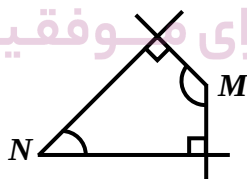
تذکر: هر دو زاویه مجانب، مکمل هستند ولی هر دو زاویه دلخواه مکمل، مجانب نیستند.



نکته: هرگاه دو ضلع از زاویه ای بر دو ضلع از زاویه دیگر عمود باشند



$$\hat{A} = \hat{B}$$

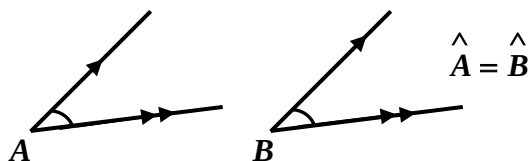


$$\hat{M} + \hat{N} = 180^\circ$$

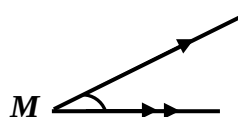
آن دو زاویه یا با هم برابرند و یا با هم مکملند.

نکته: هرگاه دو ضلع از زاویه ای با دو ضلع از زاویه دیگر موازی باشند

آن دو زاویه یا با هم مساویند و یا با هم مکملند.



$$\hat{A} = \hat{B}$$



$$\hat{M} + \hat{N} = 180^\circ$$

اگر از یک نقطه n نیم خط رسم کنیم تعداد زاویه های محدب پدید آمده برابر است با:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

زاویه بین عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار ساعت:

- ۱- عقربه دقیقه شمار در هر دقیقه ۶ درجه نسبت به وضعیت قبلی خود جابجا می شود. $360 \div 60 = 6$
- ۲- عقربه ساعت شمار در هر دقیقه 0.5 درجه نسبت به وضعیت قبلی خود جابجا می شود. $360 \div 12 = 30 \Rightarrow 30 \div 60 = 0.5$
- ۳- اختلاف زاویه بین عقربه دقیقه شمار و ساعت شمار در هر دقیقه 5.5 درجه است.
- ۴- در ساعت $(h : m')$ زاویه بین عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار از فرمول $|30h - 5.5m|$ به دست می آید.
- ۵- در صورتیکه این زاویه از 180 درجه بیشتر شد آن را از 360 درجه کم می کنیم.
- ۶- در هر ۱۲ ساعت دو عقربه ۱۱ بار روی هم منطبق می شوند.
- ۷- زمان بین دو انطباق متوالی ۶۵ دقیقه و ۲۷ ثانیه است.

انواع استدلال**۱- شهودی ۲- تمثیلی ۳- استقرائی ۴- استنتاجی ۵- مثال نقض**

استدلال شهودی: استدلال شهودی مبتنی بر درک شهودی است. وبه نوعی درک بدون استدلال است وبه وسیله ی حواس پنج گانه انجام می شود

استدلال تمثیلی: تایید صحت یک اصل ، موضوع یا یک خبری با استفاده از مثال

به عبارت دیگر: یافتن نوعی تشابه بین مفاهیم گوناگون و ارائه تناسب موضوعات جهت نشان دادن نتایج

به طور کلی منظور از استدلال تمثیلی یعنی اثبات یک حکم با استفاده از مثال و مشابه سازی موضوع

استدلال استقرائی: روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه ی محدودی از مشاهدات است و در استدلال استقرایی از جزء به کل می رسیم. به عبارت دیگر: در استدلال استقرائی ، با استفاده از انجام آزمایش و مشاهده ی تعداد محدودی از مشاهدات ، نتیجه گیری کلی می کنیم .

هر استدلالی که بر پایه تجربه باشد استقرائی است.

استقراء ریاضی یک نمونه از استدلال استقرائی است نه همه ی آن.

دانشمندان علوم تجربی به روش استقراء نتیجه گیری می نمودند یعنی چندبار آزمایش می نمودند و پس از بررسی آن رابه عنوان نتیجه کلی عنوان می نمودند.

استدلال استقرائی در صورتی عمومیت دارد و قابل استناد است که نمونه ای نادرست برای آن یافت نشود.

در استدلال استقرائی از یک حکم جزئی یک نتیجه ی کلی می گیریم و در واقع از جزء به کل می رسیم.

استدلال استنتاجی: روش نتیجه گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن ها را قبلاً پذیرفته ایم.

بهترین و محکم ترین روش استدلال ، استدلال استنتاجی است .

در اثبات ارائه شده با استدلال استنتاجی مثالی وجود ندارد که نقض کننده موضوع باشد.

مثال نقض: مثال زدن برای رد کردن یک حکم ریاضی است.

انواع چند ضلعی:

- (۱) **چند ضلعی محدب:** چند ضلعی که اندازه هر زاویه آن از 180 درجه کمتر باشد. یا پاره خطی که هر دو نقطه دلخواه آن را به هم وصل می کند کاملاً داخل چند ضلعی قرار گیرد.

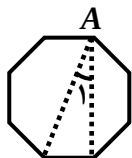
چند ضلعی منتظم: چند ضلعی که همه اضلاعش با هم برابر باشند و همه زاویه هایش نیز با هم برابر باشند.

مثال: مثلث متساوی الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهار ضلعی منتظم است.

نکته: اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{(n-2) \times 180}{n}$

نکته: اندازه هر زاویه خارجی n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{360}{n}$

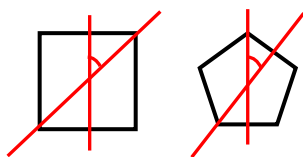
نکته: هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم با هر زاویه خارجی آن **مکمل** می شود.



نکته: اندازه زاویه بین دو قطر متوالی رسم شده از یک راس n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{180}{n}$

(مثال) در ۸ ضلعی منتظم مقابل زاویه بین دو قطر متوالی رسم شده از راس A چند درجه است؟

$$\hat{A}_1 = \frac{180}{8} = 22/5^\circ$$



نکته: اندازه زاویه بین دو محور تقارن متوالی از یک چند ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{180}{n}$

۲- چند ضلعی مقعر: چند ضلعی که حداقل یک زاویه بزرگتر از 180° درجه داشته باشد. و یا

پاره خطی که هر دو نقطه دلخواه آن را به هم وصل می کند کامل داخل چند ضلعی قرار نگیرد.

مجموع زاویه های داخلی هر چند ضلعی برابر است با: $(n-2) \times 180 = (2-\text{تعداد اضلاع}) \times 180$

مثال: مجموع زوایای داخلی یک پندر ضلعی به یکی از آنها 2750° درجه است اندازه زاویه هفتم شده کرام است؟

$$130 \quad (1) \quad 50 \quad (2) \quad 120 \quad (3) \quad 90 \quad (4)$$

(حل) چون مجموع زاویه های داخلی هر n ضلعی باید مضرب از 180° باشد با تقسیم 2750 بر 180° و یافتن مکمل باقی مانده

آن زاویه مورد نظر به دست می آید. و چون باقیمانده تقسیم $2750 \div 180$ برابر 50 می شود پس $180 - 50 = 130^\circ$ (زاویه هفتم شده)

زاویه خارجی چند ضلعی محدب: زاویه ایست که از امتداد یک ضلع با ضلع دیگر به دست می آید.

مجموع هر زاویه داخلی چند ضلعی با زاویه خارجی مجاورش 180° درجه می شود.

مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی محدب دلخواه 360° درجه می شود.

مثال: اندازه یک زاویه داخلی در n ضلعی منتظمی ۶ برابر یک زاویه خارجی آن است این شکل چند ضلعی است؟

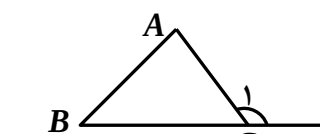
$$15 \quad (4) \quad 14 \quad (3) \quad 10 \quad (2) \quad 8 \quad (1)$$

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = 6 \times \frac{360}{n} \Rightarrow (n-2) \times 180 = 6 \times 360 \Rightarrow 180n - 360 = 2160 \Rightarrow 180n = 2160 + 360 = 2520 \Rightarrow$$

$$n = \frac{2520}{180} = 14$$

نکته: در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاورش برابر است.

$$\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$$



هر متحرکی که محیط یک چند ضلعی محدب را طی کند (یک دور کامل بزند) به اندازه 360° درجه می چرخد یعنی برابر با مجموع زاویه

های خارجی چند ضلعی محدب.

نکته: از هر راس یک n ضلعی محدب $n-3$ قطر می گذرد بنابراین تعداد کل قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

مثال: تعداد قطرهای یک پند ضلعی مربع ۲۰ تا است. از هر راس این پند ضلعی چند تا قطر می گذرد؟

نکته: بیشترین تعداد **زاویه قائمه** در یک n ضلعی که بیشتر از ۴ ضلع داشته باشد فقط ۳ تا می تواند باشد زیرا در غیر اینصورت مجموع زاویه های خارجی آن بیشتر از ۳۶۰ درجه می شود.

نکته مهم: هر n ضلعی محدب حداکثر **سه زاویه حاده (تند)** می تواند داشته باشد.

مثال: در یک ۱۳۹۳ ضلعی مربع حداکثر چند زاویه داخلی تند می تواند وجود داشته باشد؟

۱۳ (۴)

۳ (۳)

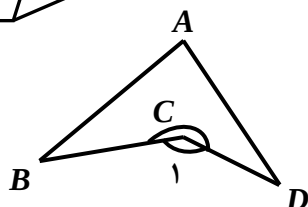
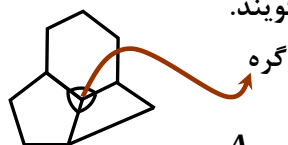
۱۵ (۲)

۱۳۹۲ (۱)

حل) حداکثر ۳ تا

کاشیکاری: قرار دادن چند ضلعیها در کنار هم طوری که روی هم نیفتند و فضای خالی نیز بین آنها نباشد را کاشیکاری می گویند.

گره: به رأسی که در آن مجموع زاویه های چند ضلعیها در موقع کاشیکاری ۳۶۰ درجه می شود گره می گویند.



$$\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{D}$$

نکته: در هر چهار ضلعی مقعر مانند ABCD داریم:

$$\hat{C} + \hat{C}_1 = 360$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} + \hat{C}_1 = 360 \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} + \hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{D}$$

تبدیل های هندسی

۱- انتقال: هرگاه شکلی را فقط با جابجا کردن وبدون تغییر جهت بتوان از نقطه ای در صفحه به نقطه ای دیگر در صفحه برد می گوئیم

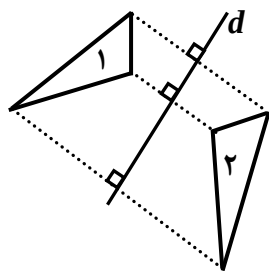
انتقال انجام داده ایم.

۲- تقارن: هرگاه شکلی را حول خطی تا بزیم طوری که آن شکل روی شکل دیگر **منطبق** شود می گوئیم تبدیل تقارن انجام داده ایم.

۳- دوران: هرگاه شکلی را حول نقطه ای طوری بچرخانیم که آن شکل بر شکل دیگری **منطبق** شود می گوئیم تبدیل دوران انجام داده ایم.

دو شکل هم نهشت (مساوی): هرگاه بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل (انتقال، تقارن، دوران) در صفحه، بر شکل دیگر منطبق کنیم می گوئیم این دو شکل با هم، هم نهشت یا مساویند.

در دو شکل هندسی هم نهشت اجزای متناظر (زاویه ها و ضلع ها) دو به دو با هم برابرند.



محور تقارن: خطی است که قرینه‌ی هر نقطه شکل نسبت به آن نقطه دیگری از شکل است. و یا خطی است که اگر شکل را روی آن تا بزنیم تمام نقاط شکل روی همدیگر قرار گیرند.

تذکر: برای پیدا کردن قرینه‌ی یک شکل نسبت به یک خط باید از نقاط آن شکل بر خط **عمود** کرده و سپس به همان اندازه امتداد دهیم.

در شکل مقابل روش انجام این کار را برای پیدا کردن قرینه مثلث ۱ می بینید.

نکته:

- ۱- بعضی از شکلهای محور تقارن ندارند مانند متوازی الاضلاع، دوزنقه قائم الزاویه
- ۲- بعضی از شکلهای یک محور تقارن دارند مانند مثلث متساوی الساقین، دوزنقه متساوی الساقین.
- ۳- بعضی از شکلهای چندین محور تقارن دارند. مانند مثلث متساوی الاضلاع (۳ محور)، مربع (۴ محور)،

مرکز تقارن: نقطه‌ای است که قرینه هر نقطه شکل نسبت به آن، نقطه‌ی دیگری از شکل می شود. یا نقطه‌ای است که اگر شکل را ۱۸۰ درجه حول آن دوران دهیم شکل بر خودش منطبق شود.

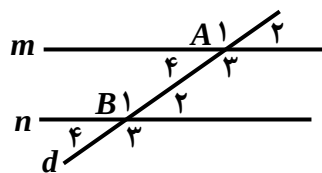
نکته: بعضی از شکلهای مرکز تقارن ندارند مانند مثلث، دوزنقه

نکته: هر شکلی که **دو محور تقارن عمود برهم** داشته باشد حتما مرکز تقارن دارد.

نکته: هر n ضلعی منتظم n **محور تقارن** دارد

نکته: هر n ضلعی منتظم به شرط آنکه n **زوج** باشد **مرکز تقارن** دارد.

خط های موازی و مورب

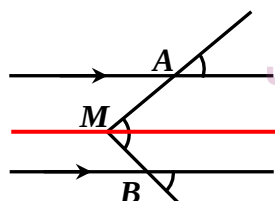


$d, m \parallel n \Rightarrow$ مورب

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_3 = \hat{B}_1 = \hat{B}_3$$

$$\hat{A}_2 = \hat{A}_4 = \hat{B}_2 = \hat{B}_4$$

نکته مهم: هر دو زاویه **تند و باز** تشکیل شده در خط های موازی و مورب با هم **مکملند**.



نکته: در شکل مقابل همواره داریم: $\hat{M} = \hat{A} + \hat{B}$

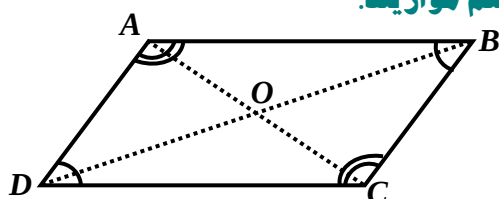
اثبات: از نقطه M خطی موازی با دو خط موازی دیگر رسم می کنیم و از قضیه خطوط موازی و مورب کمک می گیریم.

نکته: ۱- فاصله‌ی دو خط موازی همواره ثابت است. ۲- دو خط عمود بر یک خط، با هم موازیند.

چهار ضلعی ها

الف) متوازی الاضلاع: چهار ضلعی است که اضلاع رو به رو به دو به دو با هم موازیند.

خاصیت های متوازی الاضلاع:



$$\hat{B} = \hat{D} \quad \text{و} \quad \hat{A} = \hat{C}$$

$$AD = BC \quad \text{و} \quad AB = DC$$

۱- زاویه های روبه رو به دو به دو با هم برابرند.

۲- اضلاع رو به رو با هم برابرند.

۳- دو زاویه مجاور هر ضلع مکمل یکدیگرند. $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ و $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ و $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$ و $\hat{D} + \hat{A} = 180^\circ$

۴- قطرهای همدیگر را نصف می کنند. $AO = OC$ و $BO = DO$

نکته مهم: در هر متوازی الاضلاع (مربع مستطیل و لوزی) مجموع مربعهای چهار ضلع با مجموع مربع های دو قطر برابر است. یعنی:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

مستطیل: متوازی الاضلاعی که همه زاویه هایش با هم برابرند (قائمه اند)

خاصیت های مستطیل:

چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است پس تمام خاصیت های متوازی الاضلاع را دارد و علاوه بر آن خاصیت زیر را نیز دارد.
۱- در هر مستطیل دو قط با هم برابرند.

لوزی: متوازی الاضلاعی که چهار ضلع آن با هم برابرند.

خاصیت های لوزی:

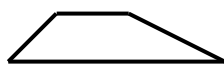
چون لوزی نوعی متوازی الاضلاع است پس تمام خاصیت های متوازی الاضلاع را دارد و علاوه بر آن خاصیت های زیر را نیز دارد.
۱- در لوزی قطرهای عمود منصف یکدیگرند.
۲- در لوزی قطرهای نیمساز زوایای مقابلشان هستند.
۳- در لوزی هر قطر محور تقارن آن است.

مربع: متوازی الاضلاعی که ۴ ضلع برابر و ۴ زاویه قائمه دارد.

خاصیت های مربع:

چون مربع نوعی متوازی الاضلاع، مستطیل و لوزی است تمام خاصیت های آنها را نیز دارد.

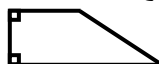
دوزنقه: چهار ضلعی که فقط دو ضلع آن با هم موازیند. به دو ضلع موازی آن قاعده کوچک و قاعده بزرگ می گوئیم و به دو ضلع دیگر آن ساق می گوئیم.



سه نوع دوزنقه داریم: ۱- دوزنقه مختلف الاضلاع که ساق هایش با هم برابر نیستند.



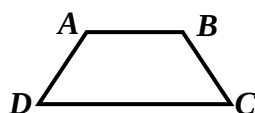
۲- دوزنقه قائم الزاویه که یکی از ساق هایش بر دو قاعده عمود است.



۳- دوزنقه متساوی الساقین که دو ساقش با هم برابرند.

خاصیت های دوزنقه:

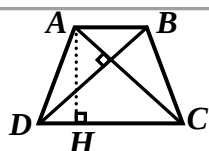
۱- در هر دوزنقه دو زاویه مجاور هر ساق (دقت کنید فقط مجاور هر ساق) مکمل یکدیگرند.

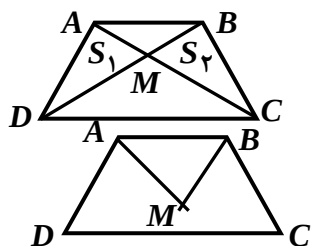


$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \quad \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

نکته: در دوزنقه های متساوی الساقین و قائم الزاویه اگر قطرهای برهم عمود باشند آنگاه:

مجذور ارتفاع دوزنقه برابر است با حاصل ضرب دو قاعده. $AC \perp BD \Rightarrow AH^2 = AB \times CD$





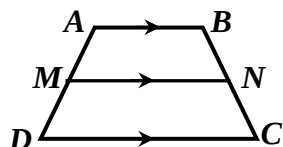
نکته: در هر دوزنقه مساحت دو مثلثی که بین ساقها و دو قطر دوزنقه تشکیل می شود با هم برابرند.

$$S_{ADM} = S_{BMC}$$

نکته: در هر دوزنقه دلخواه زاویه بین نیمسازهای دو زاویه A و B از رابطه زیر به دست می آید.

$$\hat{M} = \frac{\hat{D} + \hat{C}}{2}$$

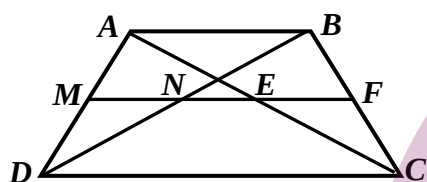
نکته: (قضیه میان خط) اگر وسط دو ساق دوزنقه ای را به هم وصل کنیم پاره خط ایجاد شده موازی با دو قاعده دوزنقه



$$MN = \frac{AB + DC}{2}$$

و برابر با نصف مجموع اندازه های آن دو است.

مثال:

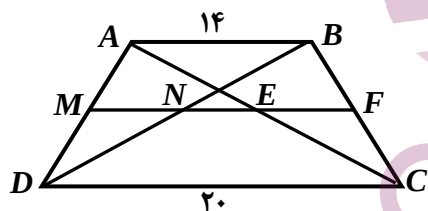


نکته: اگر در یک دوزنقه دو قطر و پاره خطی را که وسط دو ساق را به هم وصل می کند رسم کنیم داریم:

$$AB \parallel MF \parallel DC \quad \text{و} \quad MF = \frac{AB + DC}{2}$$

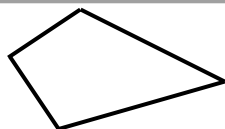
$$AE = EC \quad \text{و} \quad BN = ND$$

$$NE = \frac{DC - AB}{2} \quad \text{و} \quad MN = FE = \frac{1}{2} AB$$



مثال: در دوزنقه مقابل از وسط ساق های دوزنقه MF، موازی قاعده دوزنقه رسم می کنیم اندازه NE چقدر است؟

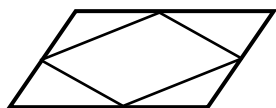
$$NE = \frac{DC - AB}{2} = \frac{20 - 14}{2} = 3$$



کایت (شبه لوزی): به چهار ضلعی گفته می شود که دو ضلع مجاورش با هم و دو ضلع مجاوردیگرش نیز با هم مساوی باشند. در هر کایت قطرهای برهم عمودند و فقط یکی عمود منصف دیگری است.

وصل کردن وسط اضلاع چهارضلعی ها

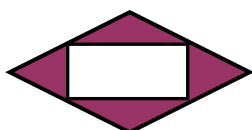
۱- اگر وسط های اضلاع یک متوازی الاضلاع را به طور متوالی به هم وصل کنیم دوباره یک متوازی الاضلاع پدید می آید.



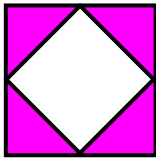
۲- اگر وسط های اضلاع یک مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم یک لوزی پدید می آید.



۳- اگر وسط های اضلاع یک لوزی را به طور متوالی به هم وصل کنیم



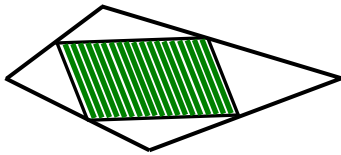
یک **مستطیل** پدید می آید.



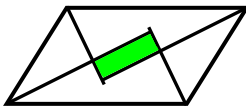
۴- اگر وسط های اضلاع یک مربع را به طور متوالی به هم وصل کنیم یک **مربع** پدید می آید.



۵- اگر وسط های اضلاع یک ذوزنقه متساوی الساقین را به هم وصل کنیم یک **لوزی** پدید می آید.



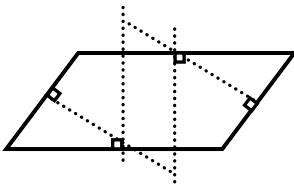
۶- اگر وسط های اضلاع یک چهار ضلعی دلخواه را به هم وصل کنیم یک **متوازی الاضلاع** می آید.



از برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی هر متوازی الاضلاع ، **مستطیل** پدید می آید.



از برخورد نیمسازهای زاویه های هر مستطیل ، **مربع** پدید می آید.



از برخورد عمود منصف های هر ضلع متوازی الاضلاع با یکدیگر متوازی الاضلاع پدید می آید.

ایران تونش

مثالها

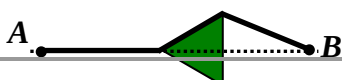
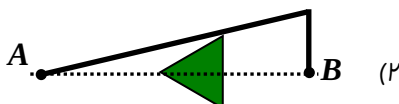
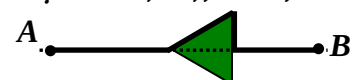
قضیه چهار (نامساوی مثلثی): در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. یا

کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه خط راستی است که از آن دو نقطه می گذرد.

مثال: آیا سه پاره خط به طول ۴ و ۶ و ۷ سانتیمتر می توانند اضلاع یک مثلث باشند.
(بله زیرا طبق قضیه چهار مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است.

$$۶+۴>۷ \quad \text{و} \quad ۴+۷>۶ \quad \text{و} \quad ۷+۶>۴$$

مثال: در کف یک انبار موشی که در نقطه A قرار دارد می خواهد با طی کوتاه ترین مسیر به فندقی که در نقطه B قرار دارد برسد و باید مواظب باشد که در تله ای که به شکل مثلث متساوی الاضلاع است نیفتد اگر خط گذرنده از دو نقطه A و B محور تقارن مثلث باشد کوتاه ترین مسیر کدام است؟

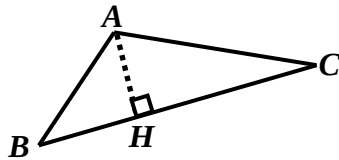


(۳)

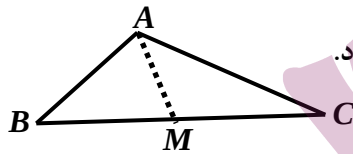
(۴)

مل (اگر راس بالای مثلث را یک نقطه در نظر بگیریم طبق قضیه همار پاسخ گزینه ۳ خواهد بود زیرا کمترین فاصله بین سه نقطه A و راس مثلث و B خواهد بود.

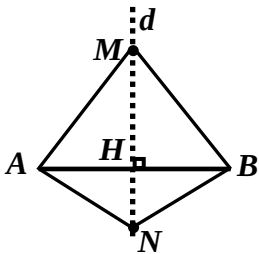
ارتفاع: پاره خطی است که از راس بر ضلع مقابل عمود می شود.



میان: پاره خطی است که از راس به میان ضلع مقابل (وسط) وصل می شود.

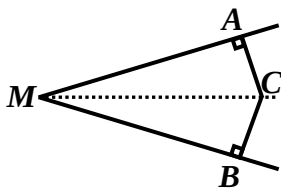


عمود منصف: خطی است که بر پاره خط عمود می شود و آن را نصف می کند.



خاصیت عمود منصف: فاصله هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط تا دو سر آن پاره خط به یک اندازه است.

$$MA = MB, NA = NB \Rightarrow \text{خط } d \text{ عمود منصف پاره خط } AB \text{ است.}$$

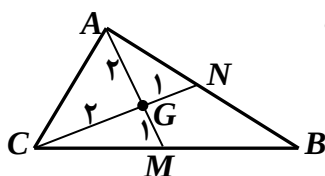


نیمساز: نیم خطی است که از راس زاویه می گذرد و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

خاصیت نیمساز: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه باشد فاصله اش تا دو ضلع زاویه به یک اندازه است.

$$MC \Rightarrow CA = CB \text{ نیمساز زاویه } M \text{ است}$$

نکته: سه ارتفاع، سه میان، سه عمود منصف و سه نیمساز مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند که این نقطه برای هر چهار نوع خط در مثلث متساوی الاضلاع یکی است ولی در بقیه مثلثها این چهار نقطه متفاوتند.



نکته: میانهای مثلث همدیگر را در نقطه ای در داخل مثلث قطع می کنند که به فاصله دو واحد از راس و یک واحد از ضلعی که آن را قطع می کنند قرار دارند. یعنی همدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کنند.

نکته: نقطه ی تقاطع میانها را (نقطه همرسی) نقطه ثقل یا مرکز ثقل مثلث می گویند.

نکته: نقطه برخورد سه نیمساز زاویه های داخلی هر مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

نکته: نقطه برخورد سه نیمساز داخلی هر مثلث مرکز دایره محاطی مثلث می شود.

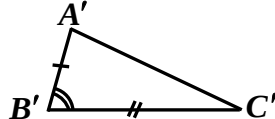
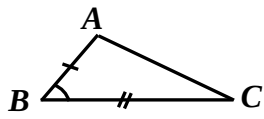
(در بخشهای بعدی تعریف می شود.)

نکته: نقطه برخورد سه عمود منصف مثلث از سه راس مثلث به یک فاصله است.

نکته: نقطه برخورد سه عمود منصف مثلث مرکز دایره محیطی مثلث می شود.

(در بخشهای بعدی تعریف می شود.)

قضیه اول: هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر به نظیر مساوی باشند ولی زاویه ی بین آنها مساوی نباشد ضلع سوم در مثلثی بزرگتر است که زاویه ی روبه رو به آن بزرگتر باشد.



$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ \hat{B}' > \hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow A'C' > AC$$

تشخیص نوع مثلث

الف) تشخیص نوع مثلث با داشتن اندازه سه ضلع آن

فرض کنیم سه ضلع مثلث برابر a, b, c باشند که $a > b > c$ در این صورت داریم.

۱- اگر $a^2 > b^2 + c^2$ باشد آنگاه یک زاویه مثلث حتماً باز است.

۲- اگر $a^2 = b^2 + c^2$ باشد آنگاه یک زاویه مثلث حتماً قائمه است.

۳- اگر $a^2 < b^2 + c^2$ باشد آنگاه هر سه زاویه مثلث تند می باشند

مثال: یک مثلث با اضلاع ۹ و ۷ و ۵ چه نوع مثلثی است؟

حل: مهزور بزرگترین ضلع مثلث ۹ می شود و مجموع مهزور های دو ضلع دیگر $7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$ می شود که چون $81 > 74$ می شود مثلث دارای یک زاویه باز است.

ب) تشخیص نوع مثلث با داشتن نسبت های سه زاویه آن

۱- اگر هر سه نسبت با هم برابر باشند مثلث متساوی الاضلاع است.

۲- اگر فقط دو تا از نسبتها با هم برابر باشند مثلث متساوی الساقین است.

۳- اگر بزرگ ترین نسبت با مجموع دو نسبت دیگر برابر باشد مثلث قائم الزاویه است.

۴- اگر بزرگ ترین نسبت، بزرگتر از مجموع دو نسبت دیگر باشد مثلث دارای یک زاویه باز است.

۵- اگر بزرگترین نسبت، کوچکتر از مجموع دو نسبت دیگر باشد مثلث دارای سه زاویه تند است.

مثال: اندازه های سه زاویه مثلثی با اعداد ۵ و ۴ و ۳ متناوب هستند این مثلث از کدام نوع است؟

(۱) متساوی الاضلاع (۲) متساوی الساقین (۳) قائم الزاویه (۴) منفرجه الزاویه

حل: با توجه به نکات بالا چون مجموع دو نسبت کوچک تر برابر است با نسبت بزرگتر پس مثلث قائم الزاویه است.

نقطه برخورد ارتفاع ها

۱- در هر مثلث که دارای زاویه باز باشد نقطه برخورد ارتفاع ها، خارج مثلث قرار می گیرد.

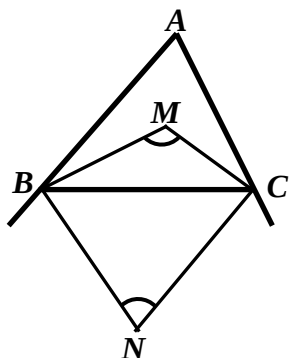
۲- در هر مثلث که دارای زاویه قائمه باشد نقطه برخورد ارتفاع ها، روی راس قائم قرار می گیرد.

۳- در هر مثلث که سه زاویه آن تند باشد نقطه برخورد ارتفاع ها، داخل مثلث قرار می گیرد.

مثال: اگر اضلاع مثلثی ۸ و ۵ و ۴ باشند محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کجا قرار دارد؟

(۱) داخل مثلث (۲) در راس مقابل به ضلع کوچک تر (۳) خارج مثلث (۴) روی ضلع بزرگ تر

حل: چون $8^2 > 4^2 + 5^2$ در نتیجه این مثلث یک زاویه باز دارد پس طبق نکته بالا نقطه برخورد ارتفاع ها خارج مثلث قرار می گیرد.

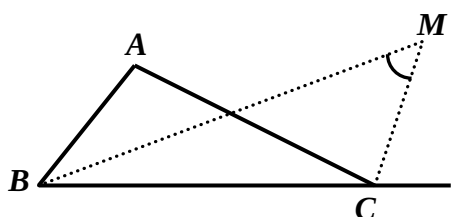


زاویه ی بین دو نیمساز داخلی در هر مثلث:

$$\hat{M} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

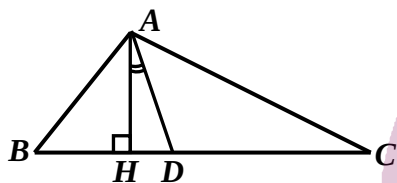
زاویه ی بین دو نیمساز خارجی در هر مثلث:

$$\hat{N} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$



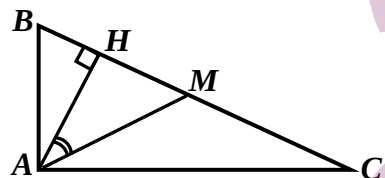
زاویه ی محل برخورد نیمساز زاویه خارجی و نیمساز زاویه داخلی غیر مجاور آن:

$$\hat{M} = \frac{\hat{A}}{2}$$



زاویه ی بین ارتفاع و نیمساز زاویه هر راس مثلث برابر نصف اختلاف دو زاویه دیگر است.

$$\hat{HAD} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$$



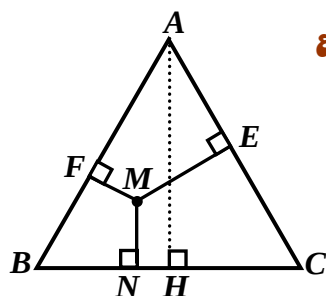
زاویه بین میان و ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه برابر است با قدر مطلق اختلاف دو زاویه تند (حاده) مثلث.

$$\hat{HAM} = \left| \hat{B} - \hat{C} \right|$$

مثال: در مثلث قائم الزاویه ای، زاویه ی بین ارتفاع و میان وارد بر وتر ۲۶ درجه است کوچک ترین زاویه ی مثلث چند درجه است؟

۲۴(۱) ۲۸(۲) ۳۲(۳) ✓ ۳۴(۴)

ایران توننه
نوشته ای برای موفقیت



مجموع فاصله های هر نقطه ی دلخواه درون یک مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر **ارتفاع** مثلث خواهد بود.

$$AB = AC = BC \Rightarrow ME + MF + MN = AH$$

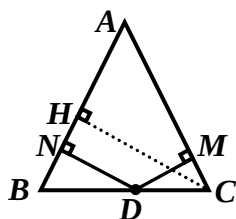
مثال: در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع $8\sqrt{3}$ اگر فاصله های نقطه ی M در داخل مثلث از ضلع های AB و AC به ترتیب ۵ و ۳ باشد فاصله ی آن از ضلع BC کدام است؟

۳/۴

✓ ۴ (۳)

۶ (۲)

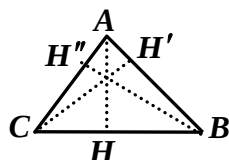
۷ (۱)



نکته: مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده **مثلث متساوی الساقین** تا دو ساق برابر ارتفاع وارد

$$DN + DM = CH$$

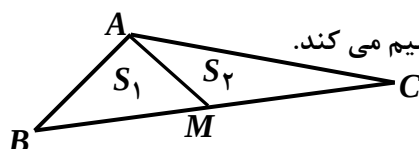
بر ساق مثلث است.



نکته: مجموع اندازه های **سه ارتفاع** هر مثلث از **محیط مثلث** کوچک تر است.

$$AH + CH' + BH'' < AB + BC + CA$$

نکته: اگر یکی از اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع را به اندازه خودش امتداد دهیم مثلث حاصل قائم الزویه است.

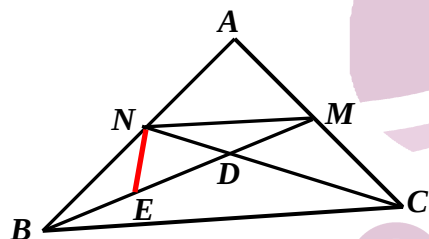


نکته: هر **میان** مثلث آن را به دو مثلث که مساحت آنها با هم برابر است (**مثلث معادل**) تقسیم می کند.

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMC} \Rightarrow S_1 = S_2$$

نکته: اگر قاعده یک مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و هر یک از نقاط تقسیم را

به راس مقابل قاعده وصل کنیم مثلث اصلی به n **مثلث معادل** تقسیم می شود.



مثال: در شکل زیر BM و CN میان اضلاع AC و AB می باشد اگر بدانیم $BD = 2DM$

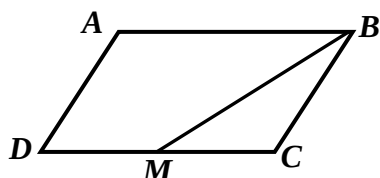
نسبت مساحت مثلث MDN به مساحت مثلث ABC کدام است؟

$$\frac{1}{12} \quad (1) \quad \frac{1}{8} \quad (2) \quad \frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{1}{5} \quad (4)$$

حل) اگر وسط BD را E بنامیم خواهیم داشت.

$$S_{\triangle MDN} = \frac{1}{3} S_{\triangle MNB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times S_{\triangle AMB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12} S_{\triangle ABC}$$

توشه ای برای موفقیت



مثال) در متوازی الاضلاع زیر نقطه M وسط ضلع DC است مساحت متوازی الاضلاع چند برابر

۳/۵ (۴)

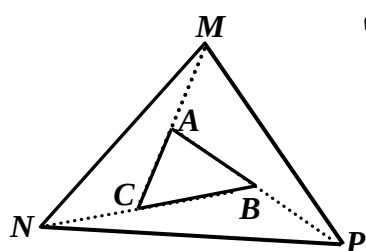
✓ ۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱) است؟ BMC مساحت مثلث

در بین مثلث ها با محیط ثابت، مثلثی دارای بیشترین مساحت است که متساوی الاضلاع باشد.

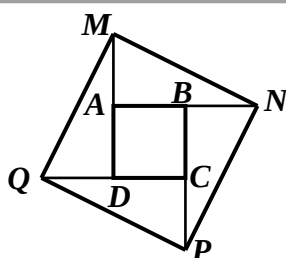
در بین مثلثهای با مساحت ثابت، مثلثی دارای کمترین محیط است که متساوی الاضلاع باشد.



اگر هر ضلع مثلث را از یک طرف به اندازه خودش ادامه دهیم و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم مثلثی پدید می آید که مساحت آن ۷ برابر مساحت مثلث اولیه است.

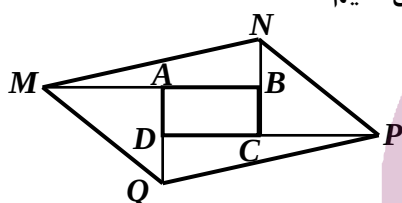
اثبات با استفاده از رسم میانه ها و مثلثهای معادل

$$S_{MNP}^{\Delta} = 7 S_{ABC}^{\Delta}$$



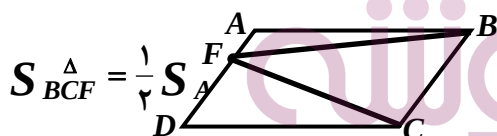
اگر هر ضلع مربع را از یک طرف به اندازه خودش ادامه دهیم و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم مربعی پدید می آید که مساحت آن ۵ برابر مساحت مربع اولیه است.

حل) مساحت هر یک از مثلث های قائم الزاویه داخل شکل با مساحت مربع اولیه برابر است.

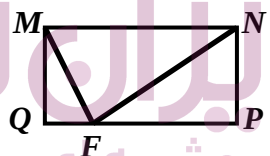


اگر هر ضلع یک مستطیل را از یک طرف به اندازه خودش ادامه دهیم و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم متوازی الاضلاعی پدید می آید که مساحت آن ۵ برابر مساحت مستطیل اولیه است.

اگر در یک مستطیل یا متوازی الاضلاع از یک نقطه واقع بر یک ضلع به دو راس غیر واقع بر آن ضلع وصل کنیم مساحت مثلث حاصل نصف مساحت مستطیل یا متوازی الاضلاع است.



$$S_{BCF}^{\Delta} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$



$$S_{MFN}^{\Delta} = \frac{1}{2} S_{MNPQ}$$

توشه ای برای موفقیت

حالت های هم نهشتی دو مثلث

حالت های هم نهشتی هر دو مثلث دلخواه:

۱- تساوی سه ضلع (ض ض ض)

۲- تساوی دو ضلع و زاویه بین (ز ض ز)

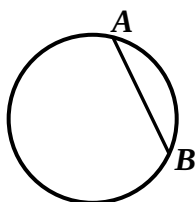
۳- تساوی دو زاویه و ضلع بین (ض ز ض)

تذکر مهم ۱: دو مثلث در حالت سه زاویه ای مساوی هیچ گاه هم نهشت نفواهند بود. یعنی حالت هم نهشتی (ز ز ز) اصلاً نداریم.

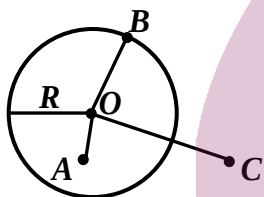
تذکر مهم ۲: هر گاه دو مثلث با یکدیگر هم نهشت شوند ارتفاع ها ، نیمساز ها و میانه های نظیر آنها نیز با یکدیگر برابرند.

حالت های هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه:

- ۱- تساوی سه ضلع (ض ض ض)
- ۲- تساوی دو ضلع و زاویه بین (ز ض ز)
- ۳- تساوی دو زاویه و ضلع بین (ض ز ض)
- ۴- وتر و یک زاویه تند (و ز)
- ۵- وتر و یک ضلع (و ض)

**دایره**

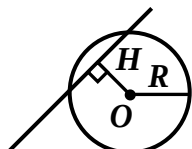
وتر: پاره خطی است که دو سر یک کمان را به هم وصل می کند.
 قطر: بزرگترین وتر دایره است و یا وتری است که از مرکز دایره می گذرد.
 کمان: قسمتی از محیط دایره است که بین دو نقطه قرار می گیرد.

**وضع یک نقطه و یک دایره:**

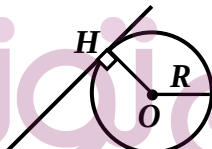
- ۱- نقطه داخل دایره $AO < R$
- ۲- نقطه روی دایره $BO = R$
- ۳- نقطه خارج دایره $CO > R$

وضع یک خط و یک دایره

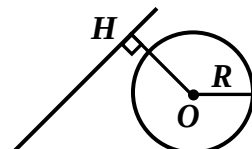
- ۱- خط و دایره نقطه مشترک ندارند (متخارج)
- ۲- خط و دایره یک نقطه مشترک دارند (مماس)
- ۳- خط و دایره دو نقطه مشترک دارند (متقاطع)



$$OH < R$$

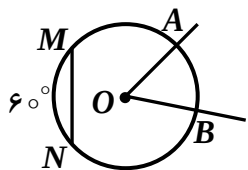


$$OH = R$$



$$OH > R$$

تذکر: دانش آموزان عزیز به یاد داشته باشید برای بررسی وضع یک دایره با نقطه یا خط باید حتماً فاصله نقطه و خط تا مرکز با شعاع دایره سنجیده شود نه با قطر آن.



$$\widehat{MN} = 60^\circ \Rightarrow$$

$$MN = R$$

نکته: هر وتری که رو به روی کمان ۶۰ درجه باشد اندازه اش با شعاع دایره برابر است.

نکته: شعاع دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است.

زاویه مرکزی: زاویه ای که راس آن روی مرکز دایره است و اضلاع آن دایره را قطع می کند.
 $\angle AOB = \widehat{AB}$
 اندازه زاویه مرکزی با اندازه کمان رو به رویش برابر است.

محاسبه طول یک کمان:

اندازهی هر زاویهی خارجی برابر با نصف اختلاف (تفاضل) دو کمان مقابل آن است.

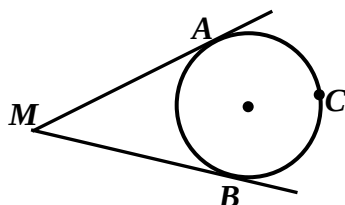
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{MN}}{2}$$

اثبات) از نقطهی M به C وصل می کنیم چون زاویهی $\hat{M}_1$ زاویه قاربی مثلث AMC است پس با دو زاویهی داخلی غیر مجاورش برابر

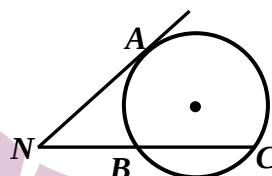
$$\hat{M}_1 = \hat{A} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = \hat{M}_1 - \hat{C} = \frac{BC}{2} - \frac{MN}{2} = \frac{BC - MN}{2}$$

است.

شکل های دیگر زاویه قاربی دایره

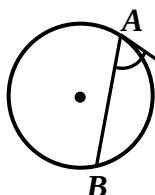


$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2}$$



$$\hat{N} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2}$$

زاویه ظلی: زاویه ای که راس آن روی محیط دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگرش وتری از دایره است.

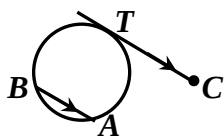
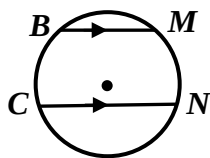


$$\hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

نکته: اندازه هر زاویه ظلی **نصف کمان رو به رویش** است. (مانند اندازه زاویه محاطی)

$$BM \parallel CN \Rightarrow \widehat{MN} = \widehat{BC}$$

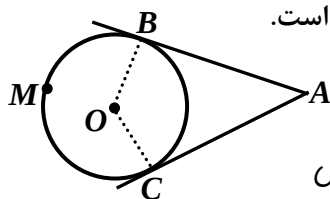
نکته: کمان های بین دو مماس موازی مساویند و بالعکس



نکته: کمان های بین یک خط مماس و وتری که با آن موازی است با هم برابرند.

$$AB \parallel CT \Rightarrow \widehat{AT} = \widehat{BT}$$

نکته ۱: از یک نقطه فقط می توان دو مماس بر دایره رسم کرد که طول این دو مماس همیشه با هم برابر است.



$$AB = AC$$

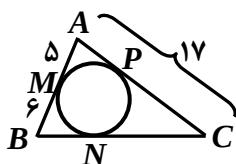
$$\hat{A} + \widehat{BC} = 180^\circ$$

نکته ۲: بین دو مماس و زاویه بین دو مماس با هم مکملند.

اثبات: از نقاط B و C به مرکز دایره وصل می کنیم و سپس با توجه با اینکه شعاع دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است و مجموع زاویه های چهار ضلعی 360° درجه است داریم:

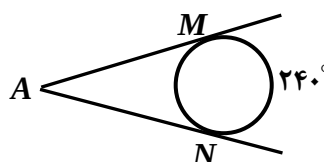
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{O} = 360^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{O} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{O} = \widehat{BC}} \hat{A} + \widehat{BC} = 180^\circ$$

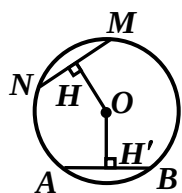
مثال: با توجه به شکل مقابل AB و BC و AC بر دایره مماسنرمحیط مثلث ABC را به دست آورید.
با توجه به اینکه دو مماس رسم شده از هر نقطه با هم برابرند. داریم:



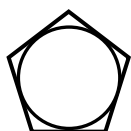
$$\left. \begin{array}{l} AM = AP = 5 \\ BM = BN = 6 \\ CP = CN = 17 - 5 = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow P_{\triangle ABC} = AM + MB + BN + NC + CP + PA = 5 + 6 + 6 + 12 + 12 + 5 = 46$$

مثال: زاویه ی A در شکل مقابل چند درجه است؟
 حل) با توجه به نکات بالا کافیهست کمان MN را حساب کنیم و از 180° درجه کم کنیم

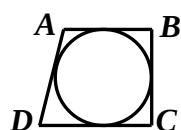
$$\widehat{MN} = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$




نکته: هر دو وترى که از مرکز دایره به یک فاصله باشند مساویند و بالعکس
 $OH = OH' \Rightarrow AB = MN$ و $AB = MN \Rightarrow OH = OH'$

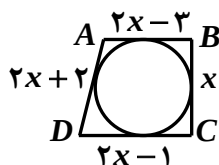


چند ضلعی محیطی: چند ضلعی است که همه ی اضلاع آن بر دایره مماس باشد.
 به دایره ای که داخل چند ضلعی محیطی قرار دارد **دایره محاطی** گفته می شود.



نکته: در چهار ضلعی محیطی مجموع اندازه دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است.

$$AB + DC = AD + BC$$



مثال) در چهار ضلعی مقابل مقرر x را به دست آورید.
 حل) $(2x-3) + (2x-1) = (2x+2) + x \Rightarrow 4x-4 = 3x+2 \Rightarrow 4x-3x = 2+4 \Rightarrow x = 6$



نکته: مرکز دایره محاطی هر چند ضلعی محل برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی آن است.

نکته: شعاع دایره محاطی هر مثلث برابر است با مساحت مثلث تقسیم بر نصف محیط یعنی $\frac{S}{P}$

مثال: در مثلثی به اضلاع ۱۰، ۲۴ و ۲۶ شعاع دایره محاطی مثلث چقدر است؟

$$6(1) \quad 8(2) \quad 7(3) \quad 4(4)$$

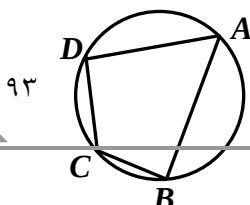
$$P = \frac{10 + 24 + 26}{2} = 30$$

حل) چون اندازه اضلاع مثلث اعداد فیثاغورسی هستند پس مثلث قائم الزویه است و داریم:

$$S = \frac{24 \times 10}{2} = 120 \Rightarrow \text{شعاع دایره محاطی} = \frac{S}{P} = \frac{120}{30} = 4$$

چند ضلعی محاطی: چند ضلعی است که تمام راس های آن روی محیط یک دایره واقع شده باشند.

نکته: به دایره ای که چند ضلعی داخل آن قرار گرفته دایره ی محیطی می گویند.



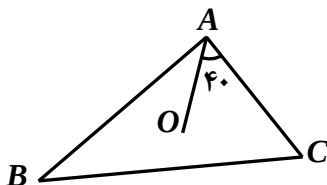
$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

نکته: در هر چهار ضلعی محاطی زاویه های مقابل مکملند.

نکته: مرکز دایره ی محیطی هر چند ضلعی محل برخورد عمود منصف های آن است.

$$\frac{abc}{4S}$$

نکته: شعاع دایره محیطی هر مثلث برابر است با حاصل ضرب اضلاع مثلث تقسیم بر ۴ برابر مساحت آن یعنی:



مثال: در مثلث ABC نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث است. اگر $\hat{OAC} = 40^\circ$ باشد.

اندازه زاویه $\hat{B}$ چند درجه است؟

۴۵ (۴)

۷۰ (۳)

۶۵ (۲)

۵۰ (۱)

حل: ابتدا O را به C وصل می کنیم چون A و B و C روی دایره محیطی قرار دارند پس مثلث AOC متساوی الساقین است بنابراین

$$\hat{OCA} = 40^\circ \Rightarrow \hat{AOC} = 180^\circ - (40^\circ + 40^\circ) = 100^\circ$$

مثال: کدام چهار ضلعی هم محاطی و هم محیطی است؟

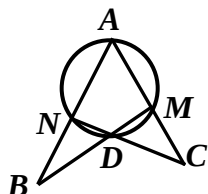
(۴) متوازی الاضلاع

(۳) مستطیل

(۲) مربع

(۱) لوزی

حل: چون در چهار ضلعی محاطی زاویه های رو به رو مکمل هستند در چهار ضلعی محیطی مجموع دو ضلع روبه رو با مجموع دو ضلع دیگر برابر است بنابراین لوزی فقط محیطی و مستطیل فقط محاطی است ولی مربع هم محیطی و هم محاطی می شود.

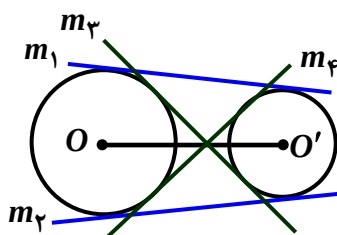


نکته: در شکل مقابل اگر نقطه برخورد دو پاره خط BM و CN روی دایره باشد و

A و M و N روی محیط دایره باشند داریم:

$$2\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

خط المרכזین: پاره خطی است که مرکز های دو دایره را به هم وصل می کند و به طور معمول آن را با حرف d نمایش می دهند.



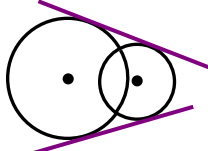
وضع دو دایره نسبت به هم:

۱- دو دایره **متفارج** هستند. $d > R + R'$

در این حالت دو مماس داخلی (m_3, m_4) و دو مماس خارجی (m_1, m_2) وجود دارد.

تذکره: برای پیدا کردن اندازه مماس خارجی، دو شعاع دایره ها را که بر نقطه تماس وارد می شوند رسم می کنیم و سپس از نقطه تماس دایره کوچکتر خطی موازی با خط المרכזین رسم می کنیم تا یک مثلث قائم الزاویه تشکیل شود و بعد از رابطه فیثاغورس کمک می گیریم.

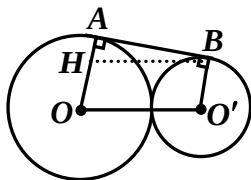
$$\text{اندازه مماس داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \quad \text{و} \quad \text{اندازه مماس خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$



۲- دو دایره **متقاطع** هستند. $R - R' < d < R + R'$

حال از رابطه فیثاغورس در مثلث AFB داریم:

$$AB^2 = AF^2 + FB^2 \Rightarrow \left(\frac{55}{3}\right)^2 = 11^2 + FB^2 \Rightarrow FB = \frac{44}{3} = CD$$



مثال: در شکل رو به رو دو دایره به شعاع های ۸ و ۶ مماس خارج اند و AB مماس مشترک خارجی آنهاست ممیت ذو زنقه ی $OABO'$ کرام است؟

$$28 + 54\sqrt{3} \quad (2)$$

$$28 + 52\sqrt{3} \quad (1)$$

$$28 + 60\sqrt{3} \quad (4)$$

$$28 + 8\sqrt{3} \quad (3)$$

حل) از نقطه B خطی موازی با خط المکزین رسم می کنیم و سپس در مثلث قائم الزاویه BAH رابطه ی فیثاغورس را می نویسیم تا طول مماس خارجی AB را حساب کنیم (طول AH برابر با اختلاف دو شعاع یعنی ۲ می باشد)

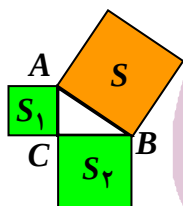
$$BH^2 = AH^2 + AB^2 \Rightarrow 14^2 = 2^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = 196 - 4 = 192 \Rightarrow AB = 8\sqrt{3}$$

$$P = AB + BO' + O'O + OA = 8\sqrt{3} + 6 + 14 + 8 = 28 + 8\sqrt{3}$$

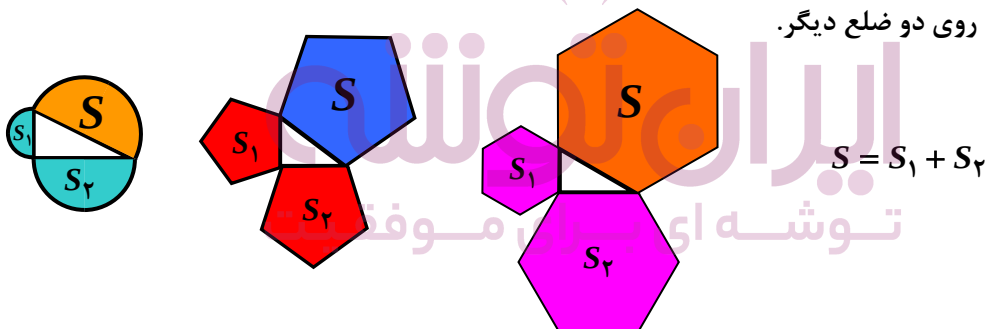
رابطه ی فیثاغورس

در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر برابر است با مجموع مربع های دو ضلع دیگر

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow S = S_1 + S_2$$

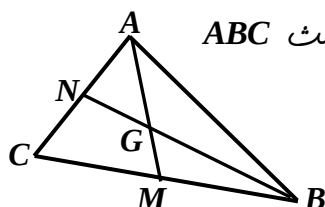


تذکر مهم: هر چند ضلعی منتظم یا نیمدایره روی اضلاع یک مثلث قائم الزاویه بسازیم همیشه مساحت شکل روی وتر برابر است با مجموع مساحت های دو شکل روی دو ضلع دیگر.



اعداد فیثاغورسی: به سه تایی های $(3, 4, 5)$ و $(5, 12, 13)$ و... مضارب آنها که در رابطه ی فیثاغورس صدق می کنند اعداد فیثاغورسی می گویند.

نکته: اگر a عدد طبیعی بزرگتر از ۱ باشد آنگاه $a^2 + 1$ و $a^2 - 1$ و $2a$ همواره اعداد فیثاغورسی هستند.



مثال: در شکل طول میانه های $AM = 7/5$ و $BN = 12$ می باشد اگر $AC = 6$ باشد مساحت مثلث ABC

$$36 \quad (4)$$

$$15 \quad (3)$$

$$24 \quad (2)$$

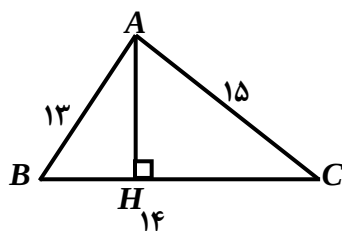
$$22/5 \quad (1) \text{ بقدر است؟}$$

$$AG = \frac{2}{3} AM \Rightarrow AG = \frac{2}{3} \times 7/5 = 14/15$$

$$NG = \frac{1}{3}BN \Rightarrow NG = \frac{1}{3} \times 12 = 4 \quad \text{و} \quad AN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

چون اضلاع مثلث ANG دارای اضلاع ۳ و ۴ و ۵ است پس قائم الزاویه می باشد در نتیجه BN ارتفاع نیز می شود بنابراین

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \times BN}{2} = \frac{6 \times 12}{2} = 36 \quad \text{داریم:}$$



مثال: در مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ مطابق شکل ارتفاع AH را رسم می کنیم طول BH کدام است؟

$$\frac{4}{5} (۴) \quad \frac{40}{7} (۳) \quad \frac{4}{5} (۲) \quad \frac{5}{1}$$

حل: در مثلثهای قائم الزاویه AHB و AHC رابطه فیثاغورس را می نویسیم

$$\begin{aligned} AH^2 &= AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH^2 = 13^2 - BH^2 \\ AH^2 &= AC^2 - CH^2 \Rightarrow AH^2 = 15^2 - (14 - BH)^2 \\ \Rightarrow (14 - BH)^2 - BH^2 &= 15^2 - 13^2 = 225 - 169 = 56 \Rightarrow \dots BH = 5 \end{aligned}$$

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به روی زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است و برعکس.

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به روی زاویه ۴۵ درجه $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است و برعکس.

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به روی زاویه ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است و برعکس.

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه که زاویه ۱۵ درجه یا ۷۵ درجه داشته باشد ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر است.

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس.

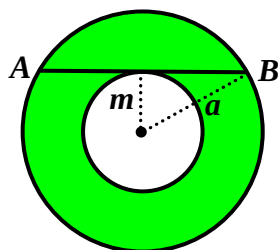
مثال: در مثلث ABC ضلع BC برابر ۱۰ سانتیمتر و میانه AM برابر ۵ است. این مثلث:

(۱) در رأس A تند است. (۲) در رأس A قائمه است.

(۳) در رأس A منفرجه است. (۴) هر سه حالت می تواند باشد.

حل: چون اندازه میانه نصف ضلع متناظرش شده است پس مثلث قائم الزاویه می باشد.

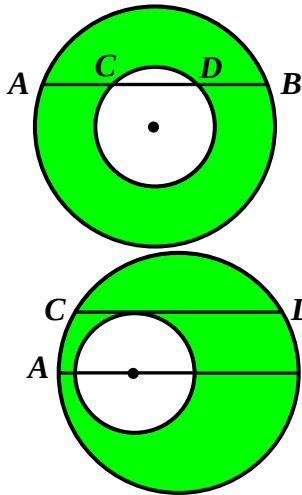
مساحت ناحیه بین دو دایره (تاج دایره)



الف) حالتی که وتر AB بر دایره مماس باشد. برابر است با: $S = \frac{\pi}{4}(AB)^2$

$$a^2 = m^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad \text{اثبات) طبق رابطه فیثاغورس داریم:}$$

$$S = \pi a^2 - \pi m^2 = \pi \left(m^2 + \frac{AB^2}{4} - m^2 \right) = \frac{\pi}{4}(AB)^2$$



ب) حالتی که وتر AB دایره کوچک تر را قطع کند برابر است با:

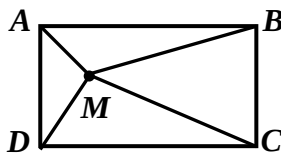
$$S = \frac{\pi}{4} (AB^2 - CD^2)$$

مثال: در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و مماس بر دایره کوچک است. اگر $AB = 8cm$ مساحت قسمت هاشور خورده چقدر است؟

$$8\pi \quad (1) \quad 4\pi \quad (2) \quad 16\pi \quad (3) \quad 32\pi \quad (4)$$

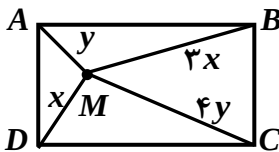
حل) با جابجایی دایره کوچک و انتقال آن به مرکز دایره بزرگ داریم:

$$S = \frac{\pi}{4} (AB)^2 = \frac{\pi}{4} \times 8^2 = 16\pi$$



نکته: اگر M نقطه ای دلخواه داخل مستطیل باشد آنگاه رابطه ی زیر برقرار است.

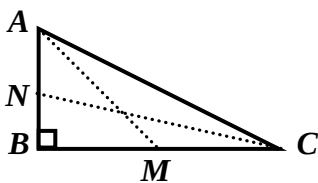
$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$



مثال) در شکل مقابل $ABCD$ مستطیل است و M نقطه ای دلخواه داخل آن است حاصل $\frac{y}{x}$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{3}{5}} \quad (4) \quad \sqrt{\frac{14}{19}} \quad (3) \quad \sqrt{\frac{4}{5}} \quad (2) \quad \sqrt{\frac{10}{17}} \quad (1)$$

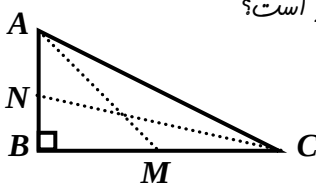
$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \Rightarrow y^2 + 16y^2 = 9x^2 + x^2 \Rightarrow 17y^2 = 10x^2 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{10}{17} \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{10}{17}} \quad (\text{حل})$$



نکته: در هر مثلث قائم الزویه مجموع مربع های دو میانه ی وارد بر دو ضلع قائمه مثلث

$$AM^2 + CN^2 = \frac{5}{4} AC^2$$

با $\frac{5}{4}$ مربع وتر برابر است.

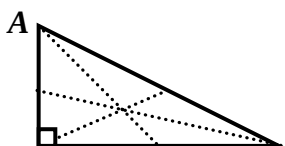


مثال: در مثلث قائم الزویه رو به رو میانه $AM = 10cm$ و میانه $CN = \sqrt{20}cm$ اندازه وتر AC چقدر است؟

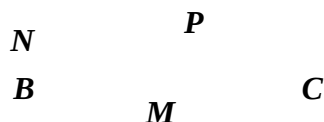
$$\sqrt{48} \quad (4) \quad \sqrt{96} \quad (3) \quad \sqrt{100} \quad (2) \quad \sqrt{200} \quad (1)$$

حل)

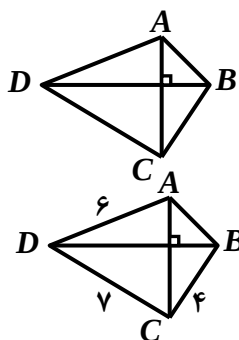
$$AM^2 + CN^2 = \frac{5}{4} AC^2 \Rightarrow 100 + 20 = \frac{5}{4} AC^2 \Rightarrow AC^2 = 120 \times \frac{4}{5} = 96 \Rightarrow AC = \sqrt{96}$$



نکته: در هر مثلث قائم الزویه مجموع مربع های سه میانه ی مثلث با $\frac{3}{4}$ مربع وتر برابر است.



$$AM^2 + CN^2 + BP^2 = \frac{3}{2} AC^2$$



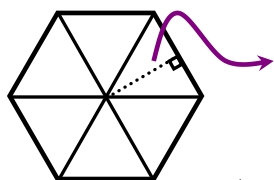
نکته: در هر چهار ضلعی که قطرهای برهم عمود باشند مجموع مربع های اضلاع مقابل با مجموع مربع های دو ضلع دیگر برابر است.

$$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$$

مثال: با توجه به شکل مقابل اندازه ضلع AB برابر است با:

$$\sqrt{3} \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad \sqrt{5} \quad (3) \quad \sqrt{6} \quad (4)$$

سهام چند ضلعی منتظم: پاره خطی که از مرکز چند ضلعی بر ضلع آن عمود می شود.



سهم

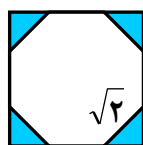
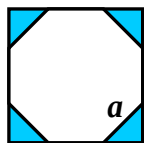
مساحت چند ضلعی منتظم: کافیست مرکز n ضلعی را به رئوس آن وصل کنیم به این ترتیب n مثلث مساوی پدید می آید در نتیجه:

$$\text{نصف محیط} \times \text{سهم} = \text{نصف ضلع} \times \text{سهم} \times n = \text{مساحت یک مثلث} \times n = \text{مساحت } n \text{ ضلعی منتظم}$$

مساحت ۸ ضلعی منتظم به ضلع a :

راه اول: ۸ ضلعی را داخل یک مربع قرار داده سپس مساحت مربع را منهای مساحت ۴ مثلث دورش می کنیم.

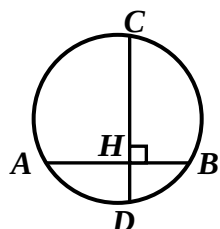
راه دوم: از فرمول $S = 2a^2(1 + \sqrt{2})$ استفاده کنیم.



مثال: طول ضلع یک ۸ ضلعی منتظم $\sqrt{2}$ است مساحت آن کدام است؟

$$6 + \sqrt{2} \quad (1) \quad 4 + 2\sqrt{2} \quad (2) \quad 6 + 2\sqrt{2} \quad (3) \quad 4 + 4\sqrt{2} \quad (4)$$

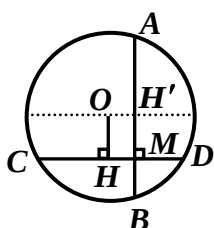
ایران تونش
توشه ای برای موفقیت



نکته: هرگاه دو وتر دایره برهم عمود باشند (R شعاع دایره است).

$$AH^2 + BH^2 + CH^2 + DH^2 = 4R^2 \quad (\text{الف})$$

$$\widehat{AD} + \widehat{BC} = \widehat{AC} + \widehat{BD} = 180^\circ \quad (\text{ب}) \text{ مجموع هر دو کمان روبه رو } 180^\circ \text{ درجه می شود.}$$



مثال: وترهای AB و CD در شکل زیر برهم عمودند و O مرکز دایره است. اگر $MB = 3$ و $MD = 4$ و

$CM = 9$ باشد طول پاره خط OH و شعاع دایره چقدر است؟

$$MC \times MD = AM \times BM \Rightarrow 4 \times 9 = AM \times 3 \Rightarrow AM = \frac{4 \times 9}{3} = 12$$

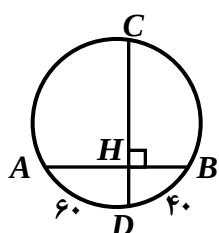
$AM + MB = 12 + 3 = 15$ = طول وتر AB پس چون قطر دایره وتر AB را نصف می کند پس $BH' = 7/5$ در نتیجه

$$OH = MH' = BH' - BM = 7/5 - 3 = 4/5$$

برای پیدا کردن شعاع از رابطه ای که در نکته بالا گفته شده استفاده می کنیم.

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 4R^2 \Rightarrow 12^2 + 3^2 + 9^2 + 4^2 = 4R^2 \Rightarrow 144 + 9 + 81 + 16 = 4R^2$$

$$\Rightarrow 250 = 4R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{250}{4} = 62/5 \Rightarrow R = \sqrt{62/5}$$



مثال: در شکل مقابل دو وتر AB و CD برهم عمودند اگر دو کمان AD و BC به ترتیب 40° و 60° درجه باشند تفاضل دو کمان AC و BC چند درجه است؟

۳۰ (۱) ۴۰ (۲) ۲۵ (۳) ۲۰ (۴)

حل () با توجه به نکته $\widehat{AD} + \widehat{BC} = \widehat{AC} + \widehat{BD} = 180^\circ$ و کمان $BC = 120^\circ$ و کمان $AC = 140^\circ$ پس تفاضل دو کمان برابر 120° درجه خواهد شد.

فرمول هرون: مساحت مثلثی که اندازه سه ضلع آن (a, b, c) معلوم باشد.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p نصف محیط دایره است.

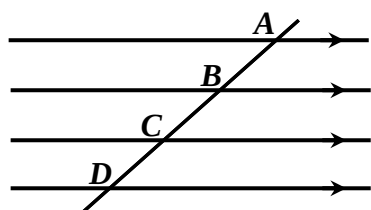
مثال: مساحت مثلثی که سه ضلع آن ۴ و ۵ و ۶ باشند را پیدا کنید.

$$\text{نصف محیط} = (5 + 6 + 4) \div 2 = 9$$

حل

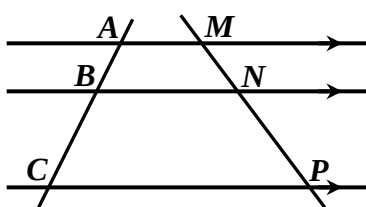
$$\Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-4)} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

خطوط موازی و قضیه تالس



نکته: هرگاه خطی توسط چند خط موازی با فاصله های برابر قطع شود. قسمت های ایجاد شده بین هر دو خط متوالی با هم برابرند.

$$AB = BC = CD$$



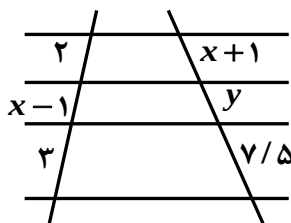
نکته: هرگاه چند خط موازی خطوطی را قطع کنند روی آنها پاره خط های متناسب ایجاد می کنند.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP} \quad \text{یا} \quad \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$

مثال: در شکل مقابل مقدار y چند است؟

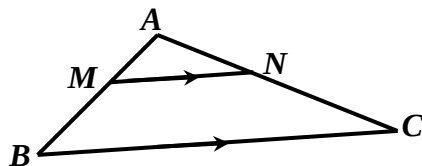
$$\frac{2}{3} = \frac{x+1}{7/5} \Rightarrow 15 = 3x + 3 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

حل



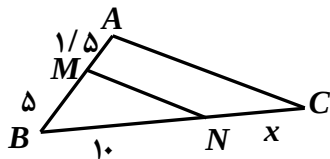
$$\frac{4-1}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 1$$

قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث خطی موازی با یکی از اضلاع آن رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند روی آن دو ضلع پاره خط متناسب ایجاد می کند.



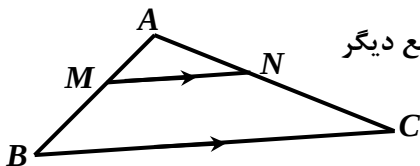
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad \text{رابطه جزء به جزء}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{رابطه جزء به کل}$$



مثال: در شکل مقابل $MN \parallel AC$ طول پاره خط NC چقدر است؟

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{5}{1/5} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{1/5 \times 10}{5} = 3$$

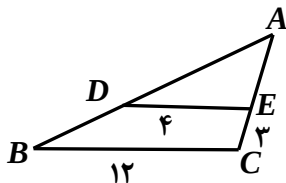


نتیجه قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث خطی موازی با یکی از اضلاع آن رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند با آن دو ضلع مثلثی می سازد که اضلاعش با اضلاع مثلث اصلی متناسبند.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

تذکره ۱: همانطور که در بالا ملاحظه می کنید در نتیجه تالس حتما باید اضلاع یکی از مثلث ها در صورت و اضلاع مثلث دیگر در مخرج نوشته شوند.

تذکره ۲: در حل سوالها زمانی از نتیجه تالس استفاده می کنیم که لازم باشد **دو خط موازی** را در حل بنویسیم.



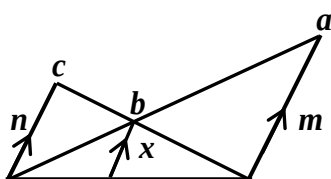
مثال: در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است طول پاره خط AE کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (1) \quad 9 \quad (3) \quad \frac{3}{8} \quad (4)$$

حل: چون از دو خط موازی DE, BC بای در حل استفاده کنیم پس از نتیجه تالس استفاده می شود.

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{AE+3} = \frac{4}{12} \Rightarrow 12AE = 4AE + 12 \Rightarrow 8AE = 12 \Rightarrow AE = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

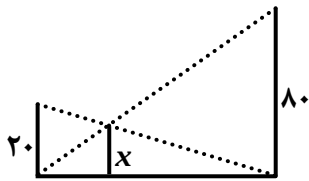
عکس قضیه تالس: هرگاه خطی روی یکی از اضلاع مثلثی پاره خط های متناسب ایجاد کند (رابطه های جزء به جزء و جزء به کل در آن صدق کند). آنگاه آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است.



نکته: در شکل مقابل اگر سه خط a و b و c موازی باشند رابطه ی زیر برقرار است.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

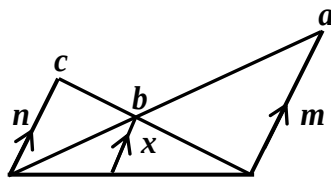
مثال: دو میله ی قائم ۲۰ و ۸۰ سانتیمتری به فاصله ی ۱۰۰ سانتیمتری یکدیگر قرار دارند بلندی نقطه ی مشترک خطوط واصل بین نوک هر میله با پای میله دیگر چقدر است؟



(۱) ۱۲ (۲) ۴۰ (۳) ۱۶ (۴) ۱۵

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{20} + \frac{1}{80} = \frac{4+1}{80} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16} \Rightarrow x = 16$$

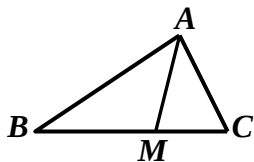
مثال: در شکل مقابل اگر سه خط a و b و c موازی باشند. حاصل $\frac{x}{m} + \frac{x}{n}$ کد ام است؟



(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

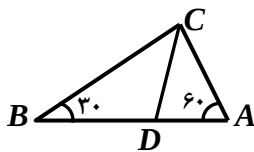
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \Rightarrow x \times \frac{1}{x} = x \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \Rightarrow 1 = \frac{x}{m} + \frac{x}{n} \quad (\text{حل})$$

نکته: در هر مثلث نیمساز هر زاویه، ضلع مقابل زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می کند.



$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \quad (AM \text{ نیمساز زاویه } A \text{ است.})$$

اثبات) از نقطه C خطی موازی با نیمساز رسم می کنیم تا امتداد AB را قطع کند و سپس رابطه ی تالس را می نویسیم.



مثال: در شکل مقابل CD نیمساز زاویه C است با توجه به اندازه های داده شده مطلوب است نسبت $\frac{AD}{AC}$

(۱) $\sqrt{3}-1$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$$\text{حل) } \hat{B} = 30^\circ, \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \text{ و چون ضلع مقابل زاویه } 30^\circ \text{ در مثلث قائم الزاویه نصف وتر و ضلع رو به رو به زاویه } 60^\circ \text{ درجه } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وتر است داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{1}{2}DB = \frac{\sqrt{3}}{2}AD \Rightarrow DB = \sqrt{3}AD$$

$$\frac{AD}{AC} \text{ اکنون نسبت } AB = AD + DB = AD + \sqrt{3}AD \Rightarrow AB = (1 + \sqrt{3})AD$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AD}{\frac{1}{2}AB} = \frac{2AD}{AB} = \frac{2AD}{(1 + \sqrt{3})AD} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \sqrt{3} - 1$$

تشابه

چند ضلعی های متشابه: دو چند ضلعی را متشابه گویند هرگاه ضلع هایشان نظیر به نظیر با هم متناسب و زاویه هایشان نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

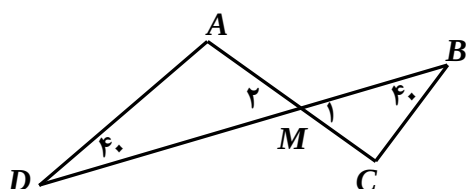
نسبت تشابه: به نسبت دو ضلع متناظر نسبت تشابه می گوئیم. یا نسبت تشابه عددی است که نشان می دهد دو شکل متشابه چند برابر یکدیگرند.

شکل های متشابه:

- ۱- همه ی مربع ها با هم متشابهند.
- ۲- هر دو n ضلعی منتظم به شرط برابر بودن تعداد اضلاعشان با هم متشابهند.
- ۳- همه مثلث های متساوی الاضلاع با هم متشابهند.
- ۴- همه مثلث های قائم الزویه متساوی الساقین با هم متشابهند.
- ۵- هر دو لوزی که یک زاویه برابر داشته باشند با هم متشابهند.
- ۶- هر دو چند ضلعی هم نهشت با هم متشابهند. و نسبت تشابه آنها ۱ می باشد.
- ۷- هر چند ضلعی با خودش متشابه است.
- ۸- هر دو دایره با هم متشابه هستند و نسبت تشابه آنها نسبت شعاع هایشان است.
- ۹- هر دو مستطیل که نسبت طول های آنها با نسبت عرض هایشان برابر باشد متشابهند.
- ۱۰- هر دو مستطیل که زاویه بین قطر هایشان برابر باشد با یکدیگر متشابهند

حالت های تشابه دو مثلث :

- ۱- برابر بودن دو زاویه متناظر
 - ۲- متناسب بودن دو ضلع و برابر بودن زاویه ی بین آن دو ضلع
 - ۳- متناسب بودن سه ضلع
- تذکر مهم :** در دو مثلث متشابه، **اضلاع متناسب روبه روی زاویه های مساوی** قرار دارند.



مثال: در شکل مقابل نشان دهید دو مثلث با هم متشابهند

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \hat{B} = 40^\circ \\ \hat{M}_1 &= \hat{M}_2 \end{aligned} \Rightarrow \triangle ADM \approx \triangle MBC$$

و تناسب اضلاع متناظر را بنویسید.

چون $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ پس اضلاع روبه روی آنها یعنی AD و BC با هم متناسبند یعنی:

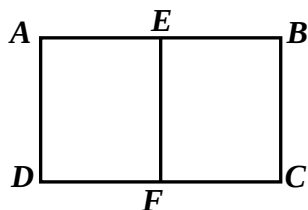
$$\frac{AD}{BC}$$

چون $\hat{D} = \hat{B}$ پس اضلاع روبه روی آنها یعنی AM و MC با هم متناسبند یعنی:

$$\frac{AM}{MC}$$

در نتیجه تناسب اضلاع متناظر به صورت مقابل می شود.

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{MC} = \frac{DM}{BM}$$



مثال: در شکل مقابل دو مستطیل $AEFD$ و $ABCD$ با هم متشابهند نقطه ی E وسط ضلع AB

است. نسبت طول به عرض هر مستطیل برابر است با:

(۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{2AE}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow 2AE^2 = AD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{2}AE \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \sqrt{2}$$

مثال: عکسی مستطیل شکل به ابعاد ۴ و ۶ سانتیمتر را بزرگ کرده ایم اگر به عرض عکس ۶ سانتیمتر اضافه کرده باشیم به طول آن چند سانتیمتر اضافه شده است؟ (۱) ۱۲ (۲) ۹ ✓ (۳) ۱۵ (۴) ۶

$$\frac{4}{6} = \frac{4+6}{x} \Rightarrow x = \frac{6 \times 10}{4} = 15 \Rightarrow 15 - 6 = 9$$

به طول اضافه شده است.

نکته مهم:

۱- در دو شکل متشابه نسبت محیط ها ، قطر ها ، ارتفاع ها ، میانه ها و نیمسازها با نسبت تشابه دو شکل برابرند.

۲- در دو شکل متشابه نسبت مساحت ها با مجذور (مربع) نسبت تشابه دو شکل برابر است.

مثال: طول اضلاع یک مثلث ۱۱ و ۵ و ۷ سانتیمتر و طول کوچک ترین ضلع مثلثی متشابه با اولی ۲۲/۵ سانتیمتر است. محیط مثلث دوم چقدر است؟ (۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۲/۵ (۳) ۱۰۳ (۴) ۱۰۳/۵ ✓

طبق نکته بالا نسبت دو ضلع متناظر در دو مثلث با نسبت محیط های دو مثلث برابر است.

$$\frac{5}{22/5} = \frac{23}{x} \Rightarrow x = \frac{22/5 \times 23}{5} = 103/5$$

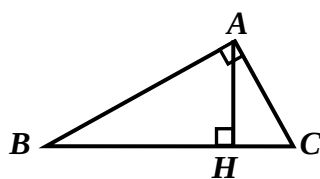
مثال: نسبت مساحت های دو پنج ضلعی منتظم برابر با $\frac{4}{9}$ است اگر اندازه ی یکی از آنها ۶ باشد اندازه ی ضلع متناظر در شکل دیگر برابر است با: (۱) ۴ یا ۸ (۲) ۴ یا ۹ ✓ (۳) ۹ یا ۸ (۴) ۵ یا ۱۳

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \text{ نسبت تشابه}$$

چون نسبت مساحت ها با مجذور نسبت تشابه برابر است داریم:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{2 \times 6}{3} = 4 \quad \text{و} \quad \frac{2}{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر داریم:



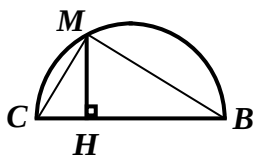
مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب دو قطعه ای که روی وتر به وجود می آورد

$$AH^2 = BH \times CH$$

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times BC$$

$$AB \times AC = AH \times BC$$

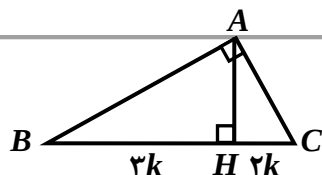


مثال (در نیم دایره مقابل $MH = 6$ و $HB = 9$ می باشد شعاع نیم دایره کدام است؟

(۱) ۴/۵ (۲) ۵/۵ (۳) ۶/۵ (۴) ۷/۵

حل) M را به B و C وصل می کنیم چون $\angle CMB$ مماسی رو به رو به قطر می باشد 90° درجه می شود داریم:

$$MH^2 = CH \times HB \Rightarrow 36 = 9CH \Rightarrow CH = 4 \quad \text{و} \quad BC = 9 + 4 = 13 \Rightarrow \text{شعاع دایره} = 13 \div 2 = 6.5$$

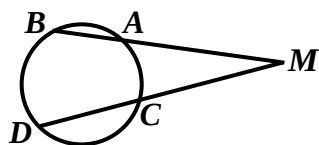


مثال: در مثلث قائم الزاویه ای طول وتر برابر $15\sqrt{6}$ واحد است اگر ارتفاع وارد بر وتر آن را به نسبت $3/2$ تقسیم کند اندازه ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۰ (۴) ۱۸

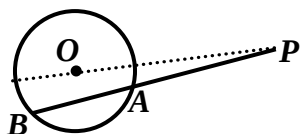
$$2k + 3k = 15\sqrt{6} \Rightarrow 5k = 15\sqrt{6} \Rightarrow k = 3\sqrt{6}$$

$$AH^2 = BH \times CH = 3k \times 2k = 6k^2 = 6 \times (3\sqrt{6})^2 = 6 \times 54 = 324 \Rightarrow AH = 18$$



نکته: اگر از یک نقطه بیرون دایره دو قاطع بر دایره رسم کنیم داریم:

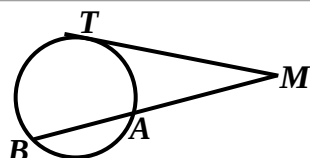
$$MA \times MB = MC \times MD$$



مثال) در شکل مقابل $PA = 5, AB = 3, R = 4 \text{ cm}$ حاصله ی نقطه P تا مرکز دایره چقدر است؟

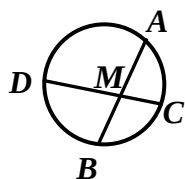
$$2\sqrt{21} \quad (1) \quad 2\sqrt{14} \quad (2) \quad 4\sqrt{7} \quad (3) \quad 3\sqrt{7} \quad (4)$$

حل) ابتدا P را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند و سپس از نکته بالا استفاده می کنیم.



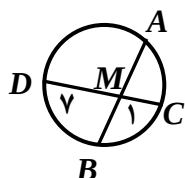
نکته: اگر MT مماس بر دایره باشد. آنگاه رابطه ی زیر را داریم:

$$MT^2 = MA \times MB$$



نکته: اگر دو وتر یک دایره را در داخل دایره در نقطه ای مانند M قطع کنند داریم:

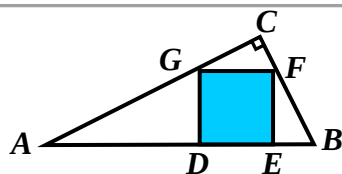
$$MA \times MB = MC \times MD$$



مثال: در شکل مقابل نقطه M وسط AB است اندازه AB چقدر است؟

$$2\sqrt{7} \quad (1) \quad \sqrt{7} \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

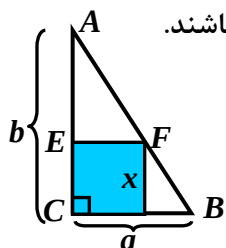
$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow MA \times MA = 1 \times 7 \Rightarrow MA^2 = 7 \Rightarrow MA = \sqrt{7} \Rightarrow AB = 2\sqrt{7}$$



نکته: اگر مربعی در یک مثلث قائم الزاویه محاط شده باشد طوری که یک ضلع مربع نیز روی وتر منطبق باشد رابطه های زیر برقرار است.

$$DG \times FE = AD \times EB \quad \text{یا} \quad DE^2 = AD \times EB$$

اثبات) ثابت کنید دو مثلث AGD و BEF با هم متشابهند سپس تناسب اضلاع متناظر را بنویسید و طرفین وسطین کنید.



نکته: اگر مربعی در یک مثلث قائم الزاویه محاط شده باشد طوری که اضلاع مربع روی دو ضلع قائم آن منطبق باشند. رابطه ی زیر برقرار است.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

یعنی معکوس ضلع مربع برابر است با مجموع معکوس های دو ضلع قائم مثلث

اثبات) ثابت کنید دو مثلث ABC و AEF متشابهند و سپس تناسب اضلاع را بنویسید.

حجم

انواع حجم:

۱- **حجم هندسی**: از شکل های هندسی و منظم و تعریف شده تشکیل شده اند.

۲- **حجم غیر هندسی**: از شکل های نامنظم و غیر مشخص درست شده اند.

انواع حجم های هندسی:

۱- **حجم های منشوری**: دارای دو قاعده برابر و موازی هستند و وجه های جانبی آنها مستطیل یا متوازی الاضلاع هستند. مثل مکعب، منشور سه پهلوی...

۲- **حجم های هرمی (مخروطی)**: دارای یک قاعده می باشند. تمامی وجه های جانبی در یک نقطه مشترک هستند که به آن راس می گویند

۳- **حجم های کروی**:

یال: به محل برخورد هر دو سطح یال می گویند.

راس: به نقطه برخورد هر سه سطح، راس می گویند.

نکته: به طور کلی در یک منشور که قاعده آن یک n ضلعی باشد داریم:

$$n + 2 = \text{تعداد وجه ها} \quad 2n = \text{تعداد راس ها} \quad 3n = \text{تعداد یالها}$$

نکته: در یک هرم که قاعده آن یک n ضلعی باشد داریم:

$$n + 1 = \text{تعداد وجه ها} \quad n + 1 = \text{تعداد راس ها} \quad 2n = \text{تعداد یالها}$$

$$V = S.h \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم منشور}$$

$$S = P.h \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی منشور}$$

$$\text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی منشور} = \text{مساحت کل منشور}$$

نکته: اگر طول یال یک مکعب یا مکعب مستطیلی را n برابر کنیم:

۱- طول قطر آن n برابر می شود.

۲- مساحت هر وجه، مساحت جانبی و مساحت کل آن n^2 برابر می شود.

۳- حجم آن n^3 برابر می شود.

مثال: اگر ابعاد یک مکعب مستطیل را ۴ برابر کنیم طول قطر آن ۴ برابر می شود و مساحت هر وجه، مساحت جانبی و مساحت کل آن 4^2 برابر یعنی ۱۶ برابر می شود. و حجم آن نیز 4^3 برابر یعنی ۶۴ برابر می شود.

نکته: هر مکعب مستطیل دارای ۶ وجه، ۸ راس، ۱۲ یال، ۴ قطر، ۱۲ قطر وجه می باشد.

نکته: مجموع اندازه همه یال های مکعب مستطیل ۴ برابر مجموع ابعاد (طول و عرض و ارتفاع) آن است.

مثال: مهم مکعب مستطیلی به اضلاع a, b, c برابر ۸ سانتیمتر مکعب و سطح کل آن ۳۲ سانتیمتر مربع است و بین ۳ یال آن رابطه $b^2 = ac$ برقرار است مجموع طول همه ی اضلاع این مکعب مستطیل چقدر است؟

(۴) ۳۶

(۳) ۴۰

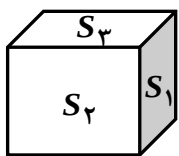
(۲) ۳۲

(۱) ۲۸

$$\left. \begin{array}{l} V = abc \\ b^2 = ac \end{array} \right\} \Rightarrow b^2 = 8 \Rightarrow b = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$S = 2(ab + ac + bc) \Rightarrow 32 = 2(2a + 4 + 2c) \Rightarrow 32 = 4(a + 2 + c) \Rightarrow 8 = a + 2 + c \Rightarrow a + c = 6$$

$$\text{مجموع طول یال ها} = 4(a + b + c) = 4 \times 8 = 32$$



نکته: در هر مکعب مستطیل حاصل ضرب مساحت سه وجه مشترک در یک راس با مجذور حجم آن برابر است.

$$S_1 \times S_2 \times S_3 = V^2$$

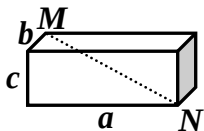
مثال: مهم مکعب مستطیلی که مساحت هر یک از وجه های جانبی و قاعده ی آن به ترتیب ۱۲، ۸، ۱۰ سانتیمتر مربع و ۶ سانتیمتر مربع می باشد بر حسب سانتیمتر مکعب کد ام است؟

(۴) ۱۰۴

(۳) ۹

(۲) ۴۴

(۱) ۵۲۶



نکته: اندازه هر قطر مکعب مستطیل به طول a و عرض b و ارتفاع c برابر است با:

$$MN = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

مثال: اگر ابعاد یک مکعب مستطیل $2\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ باشد طول قطر مکعب مستطیل چند است

$$MN = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{8 + 3 + 5} = \sqrt{16} = 4$$

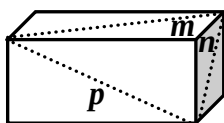
مثال: ابعاد مکعب مستطیلی $\sqrt{6}a$ ، $a\sqrt{3}$ ، $a\sqrt{2}$ است. در صورتیکه برانیم قطر مکعب مستطیل $4\sqrt{2}$ است مقدار a کد ام است؟

(۴) ۵

(۳) ۳

(۲) ۱

(۱) ۲ ✓



نکته: اگر اندازه قطرهای سه وجه مشترک از یک مکعب مستطیل به ترتیب m و n و p باشند

$$\sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}}$$

قطر مکعب مستطیل برابر است با:

مثال: در یک مکعب مستطیل قطرهای وجه های جانبی $3\sqrt{2}$ ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{13}$ است قطر مکعب مستطیل چقدر است؟

(۴) $\sqrt{22}$

(۳) ۸

(۲) $\sqrt{32}$ (۱) $\sqrt{44}$

$$\sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^2 + (3\sqrt{2})^2}{2}} = \sqrt{\frac{13 + 13 + 18}{2}} = \sqrt{22}$$

حل: روش اول: با کمک فرمول بالا

روش دوم: با استفاده از قطر های مکعب مستطیل (اگر a, b, c اضلاع مکعب مستطیل باشند).

$$\left. \begin{aligned} \text{قطر وجه اول} &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13} \Rightarrow a^2 + b^2 = 13 \\ \text{قطر وجه دوم} &= \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{13} \Rightarrow a^2 + c^2 = 13 \\ \text{قطر وجه سوم} &= \sqrt{b^2 + c^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow b^2 + c^2 = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) = 44 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 22 \Rightarrow$$

$$\text{قطر مکعب مستطیل} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{22}$$

نکته: تعداد برشها برای تبدیل یک مکعب مربع به طول یال n واحد به n^3 مکعب کوچک برابر است با: $3(n-1)$

مثال: مکعبی به ضلع ۱۰ سانتیمتر مفروض است می خواهیم آن را به ۱۰۰۰ مکعب کوچکتر و مساوی تقسیم کنیم برای این کار حداقل به چند برش نیاز داریم؟

$$\text{حل} \quad 3(n-1) = 3 \times (10-1) = 27$$

نکته: هرگاه موازی با وجه های مکعبی به آن برش بزنیم به ازای هر برش دو وجه به آن افزوده می شود.

مثال: به موازات وجه های مکعبی ۱۲ برش زدیم. مساحت مجموع جسم های به وجود آمده چند برابر مساحت مکعب اولیه است؟

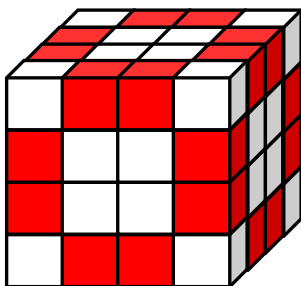
$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \end{array}$$

حل: چون با هر برش ۲ وجه به آن اضافه می شود پس با ۱۲ برش ۲۴ وجه به آن اضافه می شود و چون هر ۶ وجه برابر با مساحت کل یک مکعب می شود پس مجموع کل وجه ها را باید تقسیم بر ۶ کنیم داریم: $30 = 24 + 6 = \text{کل وجه ها در نتیجه}$

$$30 \div 6 = 5$$

نکته: پس از رنگ کردن مکعبی که از n^3 مکعب واحد تشکیل شده است داریم:

- ۱- تعداد مکعب هایی که سه وجه آنها رنگی می شود. (مکعب هایی که در گوشه ها هستند). ۸ تاست
- ۲- تعداد مکعب هایی که دو وجه آنها رنگی می شود. (مکعب هایی که روی یالها هستند). $12 \times (n-2)$
- ۳- تعداد مکعب هایی که یک وجه آنها رنگی می شود. $6 \times (n-2)^2$
- ۴- تعداد مکعب هایی که اصلاً رنگ نمی شوند. $(n-2)^3$



نکته: در مکعب مستطیل به طول a و عرض b و ارتفاع c تعداد مکعب های واحد رنگی یا غیر رنگی

برابر است با:

- ۱- سه وجه رنگی: $4 \times [(a-2) + (b-2) + (c-2)] = 4 \times [a + b + c - 6]$
- ۲- دو وجه رنگی: $2 \times [(a-2)(b-2) + (a-2)(c-2) + (b-2)(c-2)]$
- ۳- یک وجه رنگی: $(a-2)(b-2)(c-2)$
- ۴- هیچ وجه رنگی:

همواره ۸ تا

مثال: مکعب مستطیلی به ابعاد $6 \times 8 \times 10$ را در رنگ فرو برده و سپس آن را به مربع های واحد برش زدیم. اختلاف تعداد مکعب های کوچک ۲ وجه رنگی با مکعب های کوچک رنگ نشده چند تا است؟

(۱) ۹۸ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۲۴

نکته: هرگاه یک مستطیل را یک بار حول طولش و بار دیگر حول عرضش دوران دهیم همواره مساحت جانبی دو استوانه ای که به وجود می آیند با هم برابر است. اما نسبت مساحت کل آنها برابر است با:

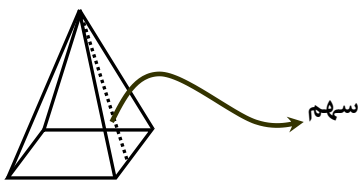
$$\frac{\text{عرض}}{\text{طول}} = \frac{\text{مساحت کل حاصل از دوران حول طول}}{\text{مساحت کل حاصل از دوران حول عرض}}$$

و نسبت حجم دو استوانه ایجاد شده برابر است با:

$$\frac{\text{عرض}}{\text{طول}} = \frac{\text{حجم حاصل از دوران حول طول}}{\text{حجم حاصل از دوران حول عرض}}$$

مثال: مستطیلی به طول ۶ و عرض ۴ را ابتدا حول طول و سپس حول عرض آن دوران می دهیم نسبت حجم حاصل از دوران اول به حجم حاصل از دوران دوم چقدر است؟

(۱) $\frac{3\pi}{2}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$



هرم

ارتفاع هرم: پاره خطی که از رأس هرم بر قاعده عمود می شود

سهم: به ارتفاع هر وجه جانبی سهم هرم می گوئیم.

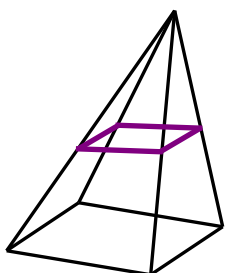
حجم . مساحت جانبی و مساحت کل هرم:

اگر مساحت قاعده هرم S و ارتفاع آن h و محیط قاعده آن P و سهم آن T باشد داریم:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

$$S_{\text{جانبی}} = \frac{1}{2} P \cdot T$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{قاعده}} + S_{\text{جانبی}}$$



هرم ناقص: اگر هرمی را با صفحه ای موازی با صفحه قاعده قطع دهیم و هرم ایجاد شده را حذف کنیم

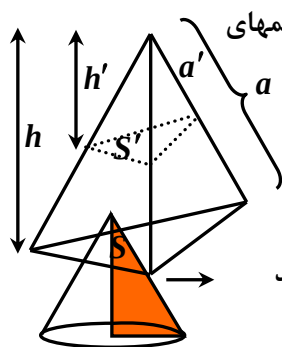
به باقیمانده شکل هرم ناقص می گوئیم.

اگر h فاصله ی دو قاعده در هرم ناقص و S, S', T مساحت دو قاعده هرم ناقص و T سهم هرم ناقص باشند

$$V = \frac{h}{3} (S + S' + \sqrt{SS'})$$

$$S_{\text{جانبی هرم ناقص منتظم}} = \frac{T}{2} (P + P')$$

$$S_{\text{کل هرم ناقص منتظم}} = S + S' + S_{\text{جانبی}}$$



نکته: اگر به موازات قاعده هرمی یک برش بزنیم دو هرم به وجود می آید که راجع به مساحت ها و حجمهای آنها نکات زیر را داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} \quad \text{و} \quad \frac{S}{S'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2 = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \quad \text{و} \quad \frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^3 = \left(\frac{a}{a'}\right)^3$$

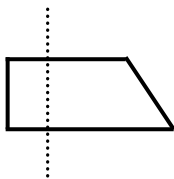
مولد

از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمش مخروط حاصل می شود.

مولد مخروط: وتر مثلث قائم الزاویه ای که مخروط را به وجود می آورد.

ضلعی که مثلث حولش دوران می کند **ارتفاع** مخروط می شود و ضلع قائم دیگر **شعاع قاعده** مخروط می شود.

از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وترش دو مخروط حاصل می شود که قاعده مشترک دارند.



تذکر مهم: اگر شکلی را حول خطی که آن را به دو قسمت دلخواه تقسیم می کند دوران دهیم

حجم ایجاد شده، حجمی است که توسط قسمت بزرگتر شکل به دست می آید. (حجم شکل مقابل مخروط ناقص می شود).

حجم، مساحت جانبی و مساحت کل مخروط:

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \times \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

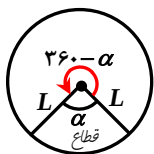
$$\text{مساحت جانبی مخروط قائم} = \frac{1}{2} \times \text{مولد} \times \text{محیط قاعده} = \pi r L$$

$$\text{مساحت کل مخروط قائم} = \text{مساحت قاعده} + \text{مساحت جانبی} = \pi r L + \pi r^2$$

گسترده یک مخروط:

اگر از یک دایره قطاعی را جدا کنیم هم با قطاع و هم با مانده دایره می توان مخروط ساخت. (شعاع دایره، مولد مخروط می شود).

الف) محیط قاعده مخروطی که با قطاع ساخته می شود.



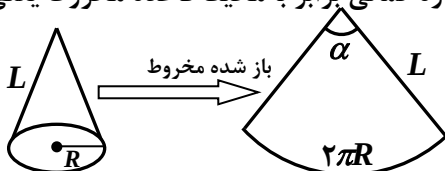
$$P_{\text{قاعده}} = \frac{\alpha}{360} \times 2L\pi = \frac{\alpha L \pi}{180}$$

ب) محیط قاعده مخروطی که با مانده دایره درست می شود.

$$P_{\text{قاعده}} = \frac{360 - \alpha}{360} \times 2L\pi = \frac{(360 - \alpha)L\pi}{180}$$

ج) از باز کردن یک مخروط قائم به شعاع R و مولد L، قطاع دایره ای به شعاع L و اندازه کمانی برابر با محیط قاعده مخروط یعنی

$$2\pi R \text{ حاصل می شود که همواره } \alpha = \frac{2\pi R}{L} \text{ پس داریم}$$



$$2\pi R = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi L \Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{\alpha}{360}$$

مثال: از دایره ای به شعاع ۱۰ قطاعی از دایره به اندازه α درجه جدا کرده و با باقیمانده دایره یک مخروط سافتیم α چند درجه باشد تا قطر قاعده مخروط سافت شده ۱۲ سانتیمتر شود.

(۱) ۱۴۴

(۲) ۱۲۰

(۳) ۱۴۵

(۴) ۱۳۰

(حل)

$$L = 10 \text{ و } 2R\pi = 12\pi \Rightarrow 2R = 12 \Rightarrow R = 6$$

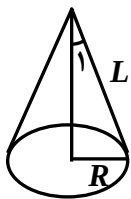
$$P = \frac{(360 - \alpha) \times L\pi}{180} \Rightarrow 12\pi = \frac{(360 - \alpha) \times 10\pi}{180} \Rightarrow 360 - \alpha = 216 \Rightarrow \alpha = 360 - 216 = 144$$

مثال: اگر مولد مخروطی ۸ و مساحت قاعده آن برابر 27π باشد مساحت جانبی آن برابر است با:

(۱) $8\pi\sqrt{3}$ (۲) $24\pi\sqrt{3}$ (۳) $3\pi\sqrt{3}$ (۴) $6\pi\sqrt{3}$

(حل)

$$\pi R^2 = 27\pi \Rightarrow R^2 = 27 \Rightarrow R = 3\sqrt{3} \Rightarrow S = \pi RL = \pi \times 3\sqrt{3} \times 8 = 24\pi\sqrt{3}$$



مثال: گسترده‌ی سطح جانبی یک مخروط دواره نیم دایره است. زاویه‌ی مولد این مخروط با ارتفاع آن چند درجه است؟

(۱) ۳۰

(۲) ۴۵

(۳) ۶۰

(۴) ۷۵

(حل)

$$\frac{R}{L} = \frac{\alpha}{360} \Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$$

برابر ۳۰ درجه می شود زیرا در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل زاویه ۳۰ درجه نصف وتر می شود.

نکته: اگر در یک مخروط:

۱- ارتفاع n برابر شود اما شعاع قاعده ثابت بماند حجم مخروط نیز n برابر می شود.

۲- شعاع قاعده n برابر اما ارتفاع ثابت بماند حجم مخروط n^2 برابر می شود.

۳- شعاع قاعده و ارتفاع هر دو n برابر شوند حجم مخروط n^3 برابر می شود.

مثال: در یک مخروط شعاع قاعده را ۲ برابر و ارتفاع را ۹ برابر می کنیم حجم چه تغییری می کند؟

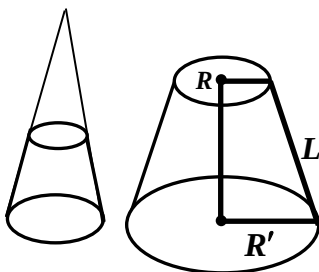
(۱) ۱۸ برابر

(۲) ۳۶ برابر

(۳) ۱۸۲ برابر

(۴) ۸۱ برابر

(حل) $9 \times 2^2 = 36$ برابر می شود.



مخروط ناقص: هرگاه مخروطی را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده قطع دهیم

و مخروط ایجاد شده را حذف کنیم به باقیمانده شکل مخروط ناقص می گوئیم.

نکته: از دوران یک **دورزنه قائم الزاویه** حول ساق قائمش یک مخروط ناقص قائم ایجاد می شود.

$$\text{مساحت جانبی مخروط ناقص} = \pi L(R + R')$$

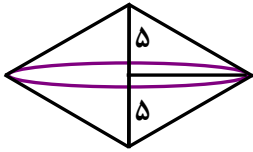
مساحت جانبی + مساحت دو قاعده = مساحت کل

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + RR')$$

نکته: حجم حاصل از دوران یک مثلث متساوی الاضلاع حول یکی از اضلاعش برابر است با: $V = \frac{\pi}{4}a^3$

مثال: مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۱۰ سانتیمتر را حول یک ضلع آن دوران می دهیم حجم شکل حاصل چقدر است؟

(۱) 750π (۲) 250π (۳) 125π (۴) 1000π



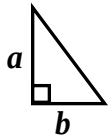
حل) شکل حاصل دو مخروط مساوی می باشد که ارتفاع آنها نصف ضلع مثلث یعنی ۵ سانتیمتر و شعاع قاعده آنها برابر ارتفاع مثلث است و چون ارتفاع مثلث ضلع رو به رو به زاویه ۹۰ درجه می شود داریم

$$V = 2 \times \frac{S.h}{3} = 2 \times \frac{(\frac{1}{2} \times 10 \times 5) \times 5}{3} = 250\pi$$

$$V = \frac{\pi}{4} a^3 = \frac{\pi}{4} \times 10^3 = \frac{\pi}{4} \times 1000 = 250\pi$$

روش دوم: با استفاده از فرمول بالا:

نکته: نسبت حجم مخروط های به دست آمده از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول اضلاع قائم آن برابر است با: معکوس نسبت اضلاعی که حول آنها دوران کرده اند.



$$\frac{V}{V'} = \frac{b}{a}$$

V حجم حاصل از دوران حول ضلع a

V' حجم حاصل از دوران حول ضلع b

مثال: نسبت حجم مخروط های به دست آمده از دوران یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائم ۱۲ و ۵ چقدر می شود؟

$$V = \frac{12 \times 12 \times \pi \times 5}{3} = 240\pi \quad \text{و} \quad V' = \frac{5 \times 5 \times \pi \times 12}{3} = 100\pi$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{240\pi}{100\pi} = \frac{12}{5}$$

نکته: اگر به موازات قاعده مخروطی یک برش بزنیم نسبت حجم مخروط های ایجاد شده با مکعب نسبت ارتفاع هایشان برابر است. ومساحت مخروط های ایجاد شده با مربع نسبت ارتفاع هایشان برابر است.

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^3 \quad \text{و} \quad \frac{S}{S'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2 \quad \text{و} \quad \frac{L}{L'} = \frac{h}{h'}$$

برای اثبات از قضیه تالس استفاده می شود.

مثال: مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ را با صفحه موازی با صفحه قاعده و به فاصله ۴ واحد از آن قطع می دهیم حجم مخروط جدا شده کرام است؟

(۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) π (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) 2π

حل: حجم مخروط اولیه برابر است با: $V = \frac{Sh}{3} = \frac{3 \times 3 \times \pi \times 6}{3} = 18\pi$ و ارتفاع مخروط دوم برابر است با $6 - 4 = 2$ پس داریم:

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^3 \Rightarrow \frac{18\pi}{V'} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 27 \Rightarrow V' = \frac{18\pi}{27} = \frac{2\pi}{3}$$

نکته: مخروط محاط درون یک مکعب زمانی بیشترین حجم را دارد که قطر قاعده مخروط مساوی با ضلع مکعب و ارتفاع مخروط نیز با ضلع مکعب مساوی باشد.

نکته: هرگاه مخروطی را به فاصله $\frac{1}{\sqrt{2}}$ از رأس آن یا $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ از قاعده آن برش دهیم مساحت جانبی دو جسم ایجاد شده با هم برابر است.

نکته: هرگاه مخروطی را به فاصله $\frac{1}{\sqrt{3}}$ از رأس برش دهیم حجم دو جسم ایجاد شده با هم برابر می شود.

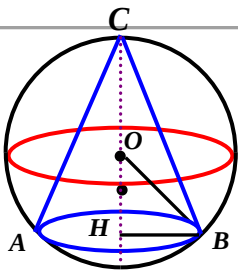
نکته: از دوران یک دایره یا نیم دایره حول قطرش کره حاصل می شود.

$$S = 4\pi R^2 \text{ کره} \quad \text{و} \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ کره}$$

مثال: مساحت کره ای معادل مساحت دو کره به شعاع های ۳ و ۴ است. شعاع این کره برابر است با:

$$7(1) \quad 5(2) \quad 6(3) \quad \frac{7}{2}(4)$$

$$4\pi R^2 = 4\pi \times 3^2 + 4\pi \times 4^2 \Rightarrow R^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = \sqrt{25} = 5$$



مثال: در کره ای به شعاع ۵ سانتیمتر یک مخروط به شعاع قاعده ۳ سانتیمتر محاط شده است حجم مخروط چقدر است؟

$$21\pi(1) \quad 24\pi(2) \quad 26\pi(3) \quad 27\pi(4)$$

حل: در مثلث قائم الزاویه OHB داریم: $OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow 5^2 = OH^2 + 3^2 \Rightarrow OH = 4$

پس ارتفاع مخروط برابر است با: $CO + OH = 5 + 4 = 9$ بنابراین حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{Sh}{3} = \frac{3 \times 3 \times \pi \times 9}{3} = 27\pi$$

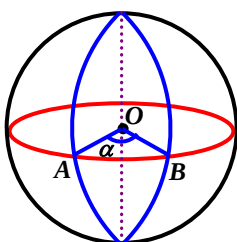
$$\frac{V}{S} = \frac{R}{3}$$

نکته: همواره نسبت حجم کره به مساحت آن، ثلث شعاع کره می باشد.

نکته: اگر شعاع کره ای ۳ باشد همواره عدد مساحت کره با عدد حجم آن برابر می شود.

نکته: اگر R و R' شعاع دو کره باشند همواره داریم: $\frac{V}{V'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^3$

نکته: هرگاه یک مکعب یا یک مکعب مستطیل در کره ای محاط باشند قطر مکعب یا مکعب مستطیل با قطر کره برابر است.



قاعه کروی: از دوران یک نیم دایره حول قطرش به اندازه a درجه قاعه کروی پدید می آید.

اگر زاویه AOB برابر a باشد.

$$V_{\text{قاعه}} = \frac{a}{360} \times \text{حجم کره}$$

$$S_{\text{پوسته قاعه}} = \frac{a}{360} \times \text{سطح کره}$$

مثال: حجم حاصل از دوران یک نیم دایره به شعاع ۶ سانتیمتر حول قطرش به اندازه ۳۰ درجه چقدر است؟

سوالات ریاضی آزمون تیزهوشان سراسر کشور در سال ۹۴-۱۳۹۳

۱= در مورد پنج عدد اول متفاوت به نام های d, c, b, a و e می دانیم $a+b$ یک عدد اول است و همچنین $c+d+e$ نیز یک عدد اول است. کدام یک از اعداد زیر می تواند اول باشد؟

$$(1) a+b+c \quad (2) a+b+c+d+e \quad (3) c+d \quad (4) \sqrt{e+b}$$

حل) چون a, b, c, d, e عدد اول هستند و مجموع $a+b$ نیز عددی اول است پس $a=2$ یا $b=2$ و چون $c+d+e$ نیز اول است پس d, c و e هر کدام فرد و عدد اول می باشند. اکنون گزینه ها را بررسی می کنیم.

گزینه ۱ غلط است زیرا $a+b$ عددی فرد و c نیز فرد می باشد پس $a+b+c$ عددی زوج است و بنابراین اول نمی باشد.

گزینه ۲ غلط است $c+d+e$ عددی فرد و $a+b$ نیز فرد می باشد پس مجموع آنها عددی زوج می شود و غیر اول.

گزینه ۳ نیز غلط است زیرا c و d نیز هر کدام عددی اول و غیر ۲ می باشند پس مجموع آنها یعنی $c+d$ نیز عددی زوج میشود و غیر اول. پس با توجه به توضیحات در ابتدای حل $e+b$ می تواند عددی اول باشد.

۲- کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

(۱) میانگین هر نه عدد بخشپذیر بر ۹، بر ۹ بخشپذیر است.

(۲) میانگین نه عدد بخشپذیر بر ۹ نمی تواند بر ۹ بخشپذیر باشد.

(۳) ۸ عدد وجود دارد که توانی از ۲ نیستند اما میانگین آنها توانی از ۲ است. ✓

(۴) میانگین هر ۸ عددی که توانی از ۲ باشند توانی از ۲ است.

$$\text{حل) گزینه ۱ غلط است زیرا: } [(-36) + (-27) + (-18) + (-9) + 9 + 18 + 27 + 36 + 45] \div 9 = 5$$

$$\text{گزینه ۲ غلط است زیرا: } \frac{1 \times 9 + 2 \times 9 + 3 \times 9 + 4 \times 9 + \dots + 9 \times 9}{9} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

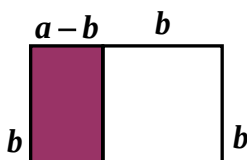
$$\text{گزینه ۳ درست است زیرا: } \frac{0 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15}{8} = \frac{64}{8} = 8 = 2^3$$

$$\text{گزینه ۴ نیز غلط است زیرا: } 5! \text{ توانی از ۲ نمی باشد. } 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 = 510$$



۳- مطابق شکل مقابل از مستطیل بزرگ یک مربع جدا کرده ایم مستطیل هاشور خورده با مستطیل بزرگ متشابه است. اگر مساحت مستطیل بزرگ ۱۰ باشد تفاضل مربعات اضلاع مستطیل بزرگ چقدر است؟

$$(1) 5 \quad (2) 5\sqrt{2} \quad (3) 10 \quad (4) 10\sqrt{2}$$



$$\text{حل) چون دو مستطیل متشابهند داریم: } \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow a^2 - ab = b^2$$

$$a^2 - ab = b^2 \text{ و } ab = 10 \Rightarrow a^2 - 10 = b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 10$$

۴- اسبی برای طی کردن مسیر ۳۶ کیلو متری اگر یورتمه برود ۳ ساعته مسیر را طی می کند و اگر آهسته برود ۹ ساعته مسیر را طی می کند اگر قرار باشد این ۳۶ کیلو متر را در ۵ ساعت طی کند چند کیلومتر از مسیر را باید آهسته برود؟

(۱) ۲۴ (۲) ۱۲ ✓ (۳) ۱۸ (۴) ۶

$x =$ ساعاتی که اسب یورتمه می رود $y =$ ساعاتی که اسب آهسته می رود
مسافتی که در هر ساعت به صورت یورتمه می رود. $36 \div 3 = 12$ مسافتی که در هر ساعت به صورت آهسته می رود $36 \div 9 = 4$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 12x + 4y = 36 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 3 \Rightarrow 3 \times 4 = 12 \text{ کیلومتر}$$

۵- در یک میهمانی ۵۰٪ میهمان ها جوان و بقیه پیر هستند. ۷۵٪ میهمان ها خانم و بقیه آقا هستند. ۴۰٪ خانم ها جوان و بقیه پیر هستند. آقایان پیر چند درصد میهمان ها هستند؟

(۱) ۲۰٪ (۲) ۱۵٪ (۳) ۱۰٪ ✓ (۴) ۵٪

حل) $100\% - 40\% = 60\%$ خانم های پیر $75\%(x+y) \Rightarrow \frac{60}{100} \left[\frac{75}{100} (x+y) \right] = \frac{9}{20} (x+y)$ تعداد خانم های پیر به کل میهمان ها

$$\Rightarrow \frac{50}{100} (x+y) = \frac{1}{2} (x+y) \Rightarrow \frac{9}{20} (x+y) \text{ و } \frac{1}{2} (x+y) = \frac{1}{2} (x+y) - \frac{9}{20} (x+y) = \frac{1}{20} (x+y) = \frac{5}{100} (x+y)$$

۶- میانگین وزن تعدادی گاو برابر با ۳۰۰ کیلو گرم است وقتی ۳ تا از گاو ها مردند میانگین وزن گاو های باقیمانده بیشتر از ۳۰۰ کیلو گرم شد. اگر وزن دو گاو از گاو های مرده ۲۸۰ و ۴۰۰ کیلو گرم باشد وزن گاو دیگر کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

(۱) ۲۲۰ (۲) ۳۲۰ ✓ (۳) ۲۱۰ (۴) ۳۱۰

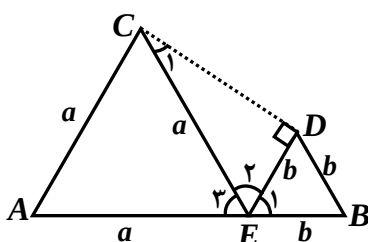
حل) چون میانگین وزن گاو های باقیمانده بیشتر از میانگین وزن تمام گاو ها شده است پس بایر میانگین وزن گاو های مرده از ۳۰۰ کیلو کمتر باشد

$$\frac{400 + 280 + x}{3} < 300 \Rightarrow 400 + 280 + x < 900 \Rightarrow x < 220$$
 در نتیجه داریم:

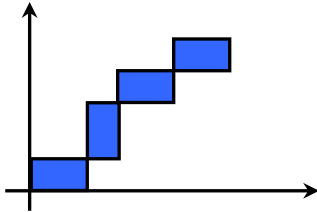
پس وزن گاو سوم باید از ۲۲۰ کمتر شود و تنها کمتر از ۲۲۰ در بین گزینه ها ۲۱۰ می باشد.

۷- در شکل مقابل طول پاره خط AB برابر 9cm است و می دانیم دو مثلث ACE و BED متساوی الاضلاع هستند اگر بدانیم پاره خط DE بر پاره خط CD عمود است. طول پاره خط AC چند سانتیمتر است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ ✓ (۳) ۶/۵ (۴) ۷



حل) اضلاع مثلث ACE را a و اضلاع مثلث BED را b نامگذاری می کنیم چون مثلث های ACE و BED متساوی الاضلاعند پس اندازه هر یک از زاویه های $E_1 = E_2 = E_3 = 60^\circ$ میشود. در نتیجه $C_1 = 30^\circ$ حال با توجه به این نکته که ضلع مقابل زاویه 30° در مثلث قائم الزاویه نصف وتر است داریم:

$$DE = \frac{1}{2}CE \Rightarrow b = \frac{1}{2}a \Rightarrow a = 2b \Rightarrow a + b = 9 \Rightarrow a = 6 = AC$$


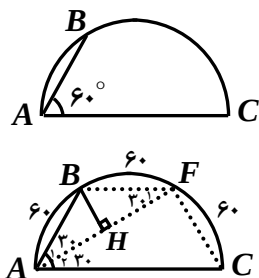
۸- علی می خواهد ۸ مستطیل 2×3 به دلخواه به صورت افقی یا عمودی در صفحه مختصات به گونه ای رسم کند که رأس پایین چپ هر مستطیل روی رأس بالای راست مستطیل دیگر قرار گیرد و رأس پایین چپ اولین مستطیل نیز بر مبدا مختصات باشد. راس بالای آخرین مستطیل در کدام مختصات می تواند قرار داشته باشد؟ (شکل مقابل نمونه ای از چیدمان چهار مستطیل است.)

$$(1) \begin{bmatrix} 18 \\ 20 \end{bmatrix} (2) \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \end{bmatrix} (3) \begin{bmatrix} 17 \\ 23 \end{bmatrix} \checkmark (4) \begin{bmatrix} 25 \\ 15 \end{bmatrix}$$

حل) گزینه ۳ صحیح است. فرض می کنیم تعداد مستطیل های قائم برابر b و تعداد مستطیل های افقی برابر a باشد اکنون به کمک دستگاه معادله هر یک از گزینه ها را بررسی می کنیم (دقت کنید چون a, b تعداد هستند باید عددی حسابی باشند).

$$\begin{cases} 3a + 2b = 18 \\ 2a + 3b = 20 \end{cases} \Rightarrow a = 2/8, b = 4/8 \quad \begin{cases} 3a + 2b = 22 \\ 2a + 3b = 14 \end{cases} \Rightarrow a = 7/6, b = -1/4$$

$$\begin{cases} 3a + 2b = 17 \\ 2a + 3b = 23 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 7 \quad \begin{cases} 3a + 2b = 25 \\ 2a + 3b = 15 \end{cases} \Rightarrow a = 9, b = -1$$



۹- در نیم دایره رو به رو طول پاره خط AB برابر یک است. نیمساز زاویه ی $\widehat{BAC}$ نیم دایره را در نقطه F قطع می کند. طول AF چقدر است؟

$$(1) \sqrt{3} \checkmark (2) \frac{\sqrt{5}}{2} (3) 2 (4) \sqrt{5}$$

حل) چون AF نیمساز زاویه ی $\widehat{BAC}$ است داریم:

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{CF} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

با توجه به این نکته که در هر مثلث قائم الزاویه ضلع روبه روی زاویه 30° درجه، نصف وتر و ضلع رو به روی زاویه 60° درجه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر

$$FH = \frac{\sqrt{3}}{2} BF, BH = \frac{1}{2} BF \Rightarrow FH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

است داریم:

$$AF = AH + FH = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

۱۰- کدام یک از بانک های زیر سود مشارکت بیشتری می دهد؟

- (۱) بانکی که سالانه 2.5% سود مشارکت می دهد. (۲) بانکی که پس از دو سال 60% سود مشارکت می دهد. ✓
(۳) بانکی که پس از سه سال 100% سود مشارکت می دهد. (۴) بانکی که پس از ۴ سال 150% سود مشارکت می دهد.

حل) گزینه ۲ درست است. فرض کنیم سرمایه اولیه ۱۰۰ تومان بوده باشد. با محاسبه هر گزینه و مقایسه آنها داریم:

گزینه (۱) برای ۴ سال متوالی سرمایه می شود: $100 \xrightarrow{+25\%} 125 \xrightarrow{+25\%} 156.25 \xrightarrow{+25\%} 195.31 \xrightarrow{+25\%} 244.14$

گزینه (۲) برای ۶ سال متوالی (۳ دوره دو ساله) می شود: $100 \xrightarrow{+60\%} 160 \xrightarrow{+60\%} 256 \xrightarrow{+60\%} 409.6$

گزینه (۳) برای ۶ سال متوالی (۲ دوره سه ساله) می شود: $100 \xrightarrow{+100\%} 200 \xrightarrow{+100\%} 400$

گزینه (۴) برای ۴ سال متوالی (۱ دوره ۴ ساله) می شود: $100 \xrightarrow{+150\%} 250$

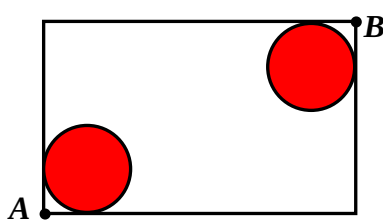
۱۱- همهی توان های ۵ از 5° تا 5^4 روی تخته نوشته شده است. محسن تعدادی از این عدد ها را به دلخواه انتخاب می کند و با علامت های مثبت یا منفی پشت سرهم قرار می دهد و سپس حاصل عبارت نوشته شده را حساب می کند حاصل این عبارت کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

(۱) ۳۳۰ (۲) ۷۱۵ (۳) ۴۸۱ ✓ (۴) ۵۴۹

حل) حاصل جمع و تفریق توانهای طبیعی عدد ۵ به صفر یا ۵ فتم می شود. چون $5^\circ = 1$ می باشد پس یکان حاصل می تواند ۱، ۴، ۹ یا ۱۶ باشد لذا گزینه های ۱ و ۲ نادرستند.

چون $5^4 + 5^3 = 750$ از گزینه ها بزرگتر است پس باید $5^4 - 5^3 = 500$ را در نظر بگیریم بنابراین داریم:

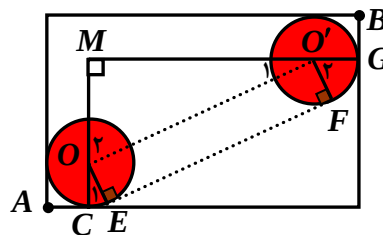
قبول $5^4 - 5^3 + 5^\circ + 5^1 - 5^2 = 481$ رد $5^4 - 5^3 + 5^\circ + 5^1 + 5^2 = 531$



۱۲- در یک مستطیل 2×3 مطابق شکل دو چاله دایره ای شکل به شعاع $\frac{1}{4}$ حفر شده است مورچه ای می خواهد از نقطه ای A به نقطه ای B برسد طول کوتاه ترین مسیری که این مورچه باید بپیماید چقدر است؟

(۱) ۵ (۲) $3 + \frac{\pi}{2}$ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $1 + \sqrt{5} + \frac{\pi}{4}$ ✓

حل)



$$\left. \begin{aligned} \Delta MOO' : \hat{O}_1 + \hat{O}'_1 &= 90^\circ \\ \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= 90^\circ \\ \hat{O}'_1 + \hat{O}'_2 &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}'_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CE} + \widehat{FG} = 90^\circ$$

AC و GB هر کدام برابر با شعاع دایره اند و EF نیز برابر با OO' است که از رابطه فیثاغورس به دست می آید.

$$OO'^2 = OM^2 + O'M^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow OO' = \sqrt{5} = EF$$

$$\widehat{CE} + \widehat{FG} = \frac{1}{4}P = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \pi = \frac{1}{4} \pi$$

پس با توجه به حل بالا نتیجه می گیریم که مجموع دو کمان CE و FG برابر با یک ربع دایره است. مسیر حرکت مورچه از نقطه A به B برابر است با:

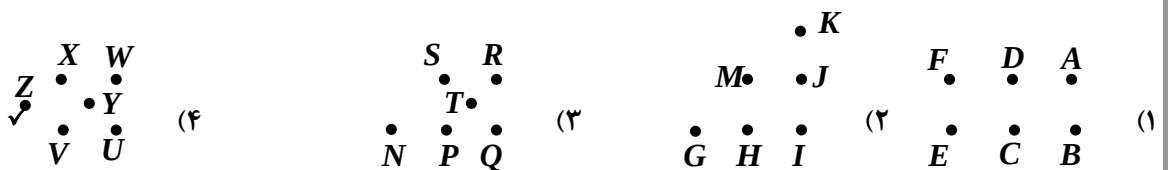
$$AC + \widehat{CE} + EF + \widehat{FG} + GB = \frac{1}{4} + \widehat{CE} + \sqrt{5} + \widehat{FG} + \frac{1}{4} = 1 + \sqrt{5} + \widehat{CE} + \widehat{FG} = 1 + \sqrt{5} + \frac{\pi}{4}$$

۱۳- تعدادی مکعب مستطیل هم اندازه داریم که با قرار دادن آنها بر روی هم ستونی به ارتفاع ۱۳۹۳ ساخته ایم اضلاع این مکعب مستطیل برابر کدام یک از گزینه های زیر نمی تواند باشد؟

- (۱) ۱۲ و ۱۸ و ۲۷ ✓ (۲) ۱۸ و ۱۴ و ۲۷ (۳) ۱۲ و ۱۴ و ۲۷ (۴) ۱۲ و ۱۱ و ۱۸

حل) گزینه ۱ صحیح است زیرا همه ی اعداد مضرب ۳ می باشند و وقتی چنین مکعبهایی را روی هم قرار دهیم مجموع این اعداد نیز مضرب ۳ می شود در صورتیکه ۱۳۹۳ مضرب ۳ نیست.

۱۴- در کدام یک از شکل های زیر تعداد بیشتری مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین می توانیم رسم کنیم که رأس های آن روی نقاط مشخص شده باشد.



حل) ابتدا مانند شکل بالا نقاط را نامگذاری می کنیم.

- مثلث های گزینه ۱ (۱۰ تا) $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB, \triangle DCE, \triangle CEF, \triangle EFD, \triangle FCD, \triangle ACF, \triangle BED$
- مثلث های گزینه ۲ (۸ تا) $\triangle KJM, \triangle KIG, \triangle KMI, \triangle GMI, \triangle GMH, \triangle JIH, \triangle JIM, \triangle JMH$
- مثلث های گزینه ۳ (۱۰ تا) $\triangle STR, \triangle STP, \triangle SPQ, \triangle SPN, \triangle SNQ, \triangle SPR, \triangle SRQ, \triangle RTQ, \triangle RPQ, \triangle TPQ$
- مثلث های گزینه ۴ (۱۱ تا) $\triangle XYZ, \triangle XYW, \triangle XZU, \triangle XUV, \triangle XWV, \triangle XWU, \triangle XYU, \triangle YZU, \triangle YUV, \triangle YWU, \triangle WVU$

۱۵- دو خط l به معادله $13x + 2y = 35$ و l' به معادله $11x - 6y + 9 = 0$ را در صفحه مختصات در نظر بگیرید. موقعیت نقطه ی

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

نسبت به دو خط l و l' چگونه است؟ (جهت مثبت محور عرض ها را بالا در نظر می گیریم.)

- (۱) بالای هر دو خط l و l' قرار دارد. (۲) بالای خط l و پایین خط l' قرار دارد. ✓
- (۳) پایین خط l و بالای خط l' قرار دارد. (۴) پایین هر دو خط l و l' قرار دارد.

حل) ابتدا معادلات خط را به شکل $ax + by + c = 0$ (بایر ضریب y مثبت باشد.) می نویسیم و مقادیر $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ را در معادلات خط

جایگذاری می کنیم داریم:

$$\begin{aligned} \text{بالای خط } l: 13x + 2y = 35 &\Rightarrow 13x + 2y - 35 = 0 \Rightarrow 13 \times 2 + 2 \times 5 = +36 > 0 \Rightarrow \\ \text{پایین خط } l': 11x - 6y + 9 = 0 &\Rightarrow -11x + 6y - 9 = 0 \Rightarrow -11 \times 2 + 6 \times 5 - 9 = -1 < 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

۱۶- عددی که دقیقاً سه مقسوم علیه اول داشته باشد را عدد «ثالثیه» می نامیم. مثلاً $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ یک عدد ثالثیه است. با توجه به این تعریف کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

(۱) ضرب هر دو عدد ثالثیه یک عدد ثالثیه است.

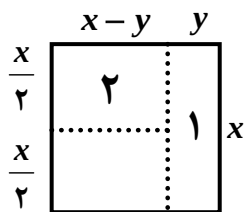
- (۲) اگر $a^2 \times b^3$ یک عدد تالثیه باشد آنگاه $a \times b$ نیز یک عدد تالثیه است. $(a, b \in N)$ ✓
- (۳) اگر ضرب دو عدد تالثیه یک عدد تالثیه باشد آن گاه یکی از آنها بر دیگری بخشپذیر است.
- (۴) جمع دو عدد فرد تالثیه نمی تواند یک عدد تالثیه باشد.

حل) گزینه ۱ غلط است زیرا: ۴ عامل اول دارد. $60 \times 70 = (2^2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 7 \times 5) = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

گزینه ۳ غلط است زیرا اگر $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ و $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ باشد ضرب این دو عدد یک عدد تالثیه است اما هیچ کدام از این دو عدد ۶۰ و ۹۰ برهم بخشپذیر نیستند.

گزینه ۴ نیز غلط است زیرا اگر $105 = 7 \times 3 \times 5$ و $375 = 11 \times 7 \times 5$ دو عدد فرد تالثیه باشند آنگاه مجموع آنها یعنی عدد $490 = 2 \times 5 \times 7^2$ یک عدد تالثیه می باشد. پس گزینه ۲ درست است.

- ۱۷- مربعی را با دو برش به سه مستطیل تقسیم کرده ایم و ققط ۲ تا از این مستطیل ها با هم برابرند. اگر محیط هر سه مستطیل برابر ۲۰ باشد مساحت مربع چند است؟



مستطیل ۱ $P_1 = 2(x+y) = 20 \Rightarrow x+y=10$

مستطیل ۲ $P_2 = 2\left(x-y+\frac{x}{2}\right) = 20 \Rightarrow 3x-2y=20$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 3x-2y=20 \end{cases} \Rightarrow x=8 \Rightarrow S=8 \times 8=64$$

✓ ۶۴ (۴) ۸۱ (۳) ۳۶ (۲) ۴۹ (۱)

حل) گزینه ۴ صحیح است.

- ۱۸- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند $A \odot B$ را به این صورت تعریف می کنیم $A \odot B = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B, b \neq 0 \right\}$ با

توجه به این تعریف اگر A مجموعه اعداد سه رقمی باشد در این صورت چند تا از اعضای مجموعه $A \odot A$ عدد طبیعی هستند؟

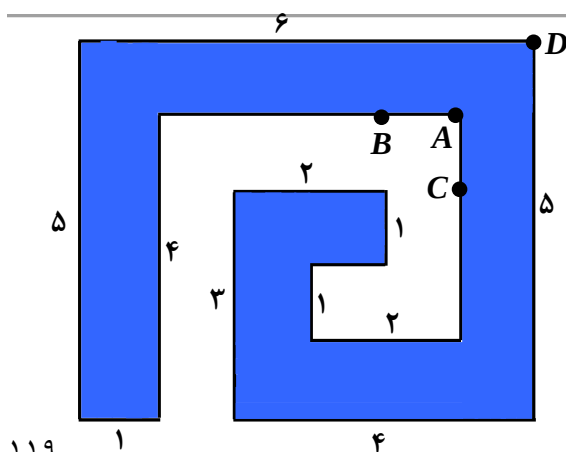
۹۹ (۴) ۹۰ (۳) ✓ ۹ (۲) ۹۰۰ (۱)

حل) اگر $a=b$ باشد آنگاه $\frac{a}{b}=1$

$$\frac{200}{100}=2 \text{ و } \frac{202}{101}=2 \text{ و } \dots \text{ و } \frac{300}{100}=3 \text{ و } \frac{303}{101}=3 \text{ و } \dots \text{ و } \frac{400}{100}=4 \text{ و } \frac{404}{101}=4 \text{ و } \dots \text{ و } \frac{900}{100}=9$$

الکون با توجه به اینکه عضوهای تکراری در هر مجموعه فقط یک بار حساب می شوند پس جواب برابر است با:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$



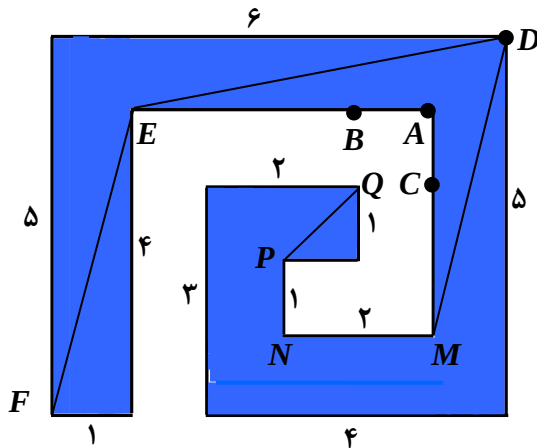
- ۱۹- قطعه ای مطابق شکل مقابل از جنس کاغذ داریم کدام یک از نقطه های مشخص شده بر روی این قطعه کاغذ را آتش بزنیم تا کل کاغذ زودتر بسوزد. (سرعت حرکت آتش بر روی کاغذ ثابت است.)

✓ A (۱) B (۲) C (۳) D (۴)

حل) با توجه به شکل مقابل داریم:

برای شروع از نقطه A به F داریم:

$$AE + EF = 4 + \sqrt{17}$$



از نقطه A به Q داریم:

$$AM + MN + NP + PQ = 2 + 2 + 1 + \sqrt{2} = 6 + \sqrt{2}$$

برای شروع از نقطه D به F داریم:

$$DE + EF = \sqrt{26} + \sqrt{17}$$

از نقطه D به Q داریم:

$$DM + MN + NP + PQ = \sqrt{17} + 2 + 1 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{17} + \sqrt{2}$$

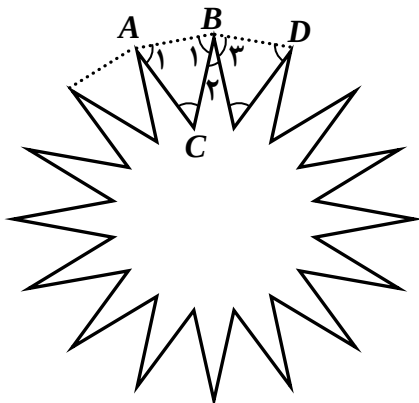
پس چون فاصله نقطه D تا F و Q از فاصله نقطه A تا همین

دو نقطه F و Q بیشتر است پس A جواب است.

۲۰- کاظم شکلی رسم کرده است که دوران های  و مجموعه دوران های آن شکل هستند. مجموعه دوران های شکلی که کاظم رسم کرده است دست کم چند عضو دارد؟

- (۱) ۸ عضو ✓ (۲) ۴ عضو (۳) ۳ عضو (۴) ۲ عضو

این سوال در مباحث کتاب های جدید ریاضی هشتم ونهم وجود ندارد.



۲۱- در شکل مقابل اندازه همه زاویه های حاده داخلی با هم برابر است.

همچنین اندازه همه زاویه های حاده خارجی نیز با هم برابر است تفاضل یک

زاویه حاده خارجی و یک زاویه حاده داخلی چند درجه است؟

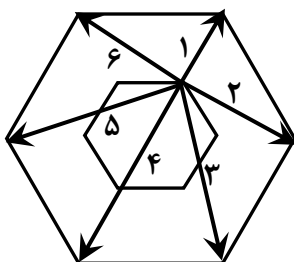
- (۱) ۲۲/۵ ✓ (۲) ۳۰ (۳) ۴۵ (۴) ۱۵

حل) مطابق شکل راس های A و B و D را به هم وصل می کنیم که این راس ها

راس های یک ۱۶ ضلعی منتظم می شوند. همچنین داریم: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{B}_3$

$$\hat{B} = \frac{(16-2) \times 180}{16} = 157/5^\circ$$

$$\hat{C} - \hat{B}_2 = \left[180 - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1) \right] - \left[157/5 - (\hat{B}_3 + \hat{B}_1) \right] = 180 - 157/5 = 22/5^\circ$$



۲۲- در شکل مقابل مرکز تقارن دو شش ضلعی منتظم بر روی هم قرار دارد. از روی

یکی از رأسهای شش ضلعی کوچک شش بردار به شش رأس شش ضلعی بزرگ

رسم می کنیم طول حاصل جمع این شش بردار کدام است؟

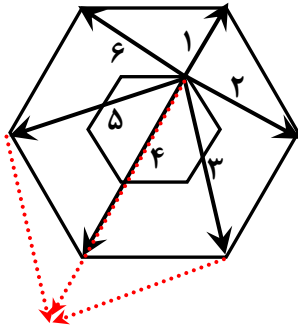
(۱) ۴ برابر طول ضلع شش ضلعی کوچک.

(۲) ۶ برابر طول ضلع شش ضلعی کوچک. ✓

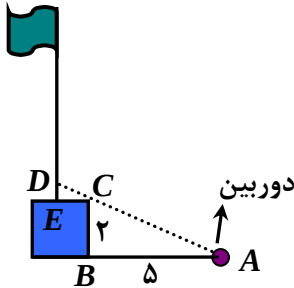
(۳) ۴ برابر طول ضلع شش ضلعی بزرگ.

(۴) ۶ برابر طول ضلع شش ضلعی بزرگ.

حل) گزینه ۲ صحیح است. بردار ۲ و بردار ۶ قرینه هم هستند. پس مجموعشان صفر می شود. داریم:



$$\begin{aligned} \vec{1} + \vec{4} &= -\vec{2} \times \vec{1} \\ \vec{3} + \vec{5} &= -\vec{4} \times \vec{1} \end{aligned} \Rightarrow \vec{1} + \vec{4} + \vec{3} + \vec{5} = \left(-\vec{2} \times \vec{1} \right) + \left(-\vec{4} \times \vec{1} \right) = -\vec{6} \times \vec{1}$$

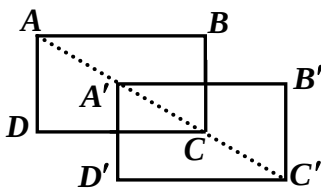


۲۳- مطابق شکل یک دوربین عکاسی روی زمین در فاصله ۵ متری از پایه ی یک پرچم قرار دارد. با توجه به این که پایه پرچم مکعبی به ضلع ۲ متر و میله ی پرچم به طول ۶ متر است این دوربین چه طولی از میله ی پرچم را می تواند ببیند؟ (میله دقیقاً در وسط وجه بالایی پایه پرچم قرار دارد.)

(۱) ۵ متر (۲) ۳/۶ متر (۳) ۵/۶ متر ✓ (۴) ۴/۴ متر

حل) با استفاده از تشابه دو مثلث ABC و DEC و نوشتن تناسب اضلاع بین آنها داریم:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{EC} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{5}{1} \Rightarrow x = \frac{2}{5} = 0.4m \quad DE \text{ اندازه} \Rightarrow \text{طولی از میله که می تواند ببیند} = 6 - 0.4 = 5.6m$$



۲۴- در شکل روبه رو دو مستطیل $ABCD$ و $A'B'C'D'$ با هم برابرند. اگر نقطه A'

محل تقاطع قطرهای مستطیل $ABCD$ باشد و بدانیم $A' = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

مجموع طول و عرض نقطه C' کدام است؟

(۱) ۳ ✓ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

حل) نقاط A و A' و C و C' را به هم وصل می کنیم چون نقطه A' مرکز مستطیل $ABCD$ می شود داریم:

$$\begin{aligned} A'C' &= 2AA' \Rightarrow C' - A' = 2A' - 2A \Rightarrow C' = 2A' - 2A = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ 6 + (-6) &= 0 \end{aligned}$$

سوالات آزمون ورودی تیزهوشان سال ۹۶-۹۵

۱- چند زیر مجموعه ی سه عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که حاصل ضرب اعضای آن در هم برابر ۴۵ شود؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

حل) گزینه ۲ صحیح است. فقط دو حالت $\{1, 3, 15\}$ و $\{1, 5, 9\}$ صحیح است و حالت هایی مانند $\{1, 1, 45\}$ قابل قبول نیستند زیرا دارای عضو تکراری هستند که با حذف آن مجموعه دو عضوی می شود.

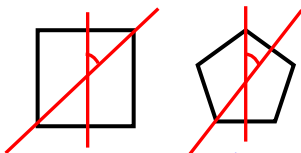
۲- از تساوی $\sqrt{a^2 b^2 c^3} \times \sqrt{-a^2 b^3 c} = 2$ کدام یک از گزینه های زیر نتیجه می شود؟

(۱) $a > 0$ (۲) $b < 0$ (۳) $abc < 0$ (۴) $ab < 0$

حل) گزینه ۴ صحیح است. چون فرجه رادیکالها زوج است پس نباید زیر رادیکالها منفی شود. بنابراین یکی از دو حالت زیر رخ می دهد
الف) $a > 0, b < 0, c < 0$ (و یا ب) $a < 0, b > 0, c < 0$ پس با توجه به مختلف علامت بودن a و b تنها گزینه ای که همواره برقرار است گزینه ۴ خواهد بود.

۳) زاویه ی بین دو محور تقارن متوالی از یک چند ضلعی، کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

(۱) $\sqrt{360}^\circ$ (۲) 31° (۳) $\frac{1}{5}^\circ$ (۴) 7°



حل) گزینه ۳ صحیح است. زاویه ی بین هر دو محور تقارن متوالی یک n ضلعی منتظم از رابطه ی $\frac{360}{2n}$ به دست می آید. که با آزمایش گزینه ها

پاسخ به دست می آید. $\frac{360}{2n} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2n = 1800 \Rightarrow n = 900$ توجه کنید که بعد از حل معادله ی قبل باید مقدار n عددی طبیعی شود.

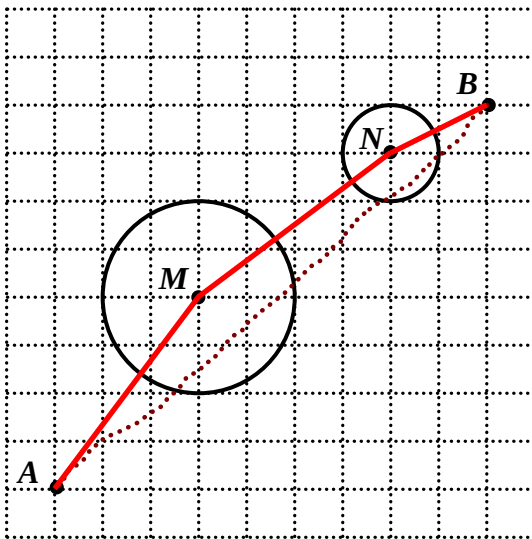
۴) مجموعه ی $\left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} < 1, b < 13, a, b \in N \right\}$ چند عضو دارد؟

(۱) ۴۹ عضو (۲) ۴۵ عضو (۳) ۷۸ عضو (۴) ۵۵ عضو

حل) گزینه ۲ صحیح است.

عدد ۱ می تواند صورت کسرهایی با مخرج ۲ تا ۱۲ باشد. (۱۱ کسر) - عدد ۲ میتواند صورت کسرهایی با مخرج فرد (۳ و ۵ و ۷ و ۹ و ۱۱) باشد. (۵ کسر)
عدد ۳ می تواند صورت کسرهایی که مخرج آنها مضرب ۳ نباشد. (۶ کسر) و به همین ترتیب برای کسرهایی با صورت ۴، ۵ کسر - برای کسرهایی با صورت ۵، ۶ کسر - برای کسرهایی با صورت ۶، ۷ کسر - برای کسرهایی با صورت ۷، ۵ کسر - کسرهایی با صورت ۸، ۲ کسر
کسرهایی با صورت ۹، ۲ کسر - کسرهایی با صورت ۱۰، ۱ کسر - کسرهایی با صورت ۱۱، ۱ کسر پس در مجموع کل این کسر ها برابر است با:

$$11 + 5 + 6 + 4 + 6 + 2 + 5 + 2 + 2 + 1 + 1 = 45$$



۵- در یک روز بارانی علی می خواهد از نقطه A به نقطه B برود مطابق شکل در مسیر او چادرهای دایره ای شکلی هستند که او را از باران حفظ می کنند. یکی از مسیر های ممکن که علی می تواند طی کند تا به مقصد برسد با خط چین مشخص شده است.

علی دست کم چه مسافتی را زیر باران خواهد پیمود؟

$$(1) 4 + \sqrt{5} \quad (2) 10 + \sqrt{5}$$

$$(3) 4 + 2\sqrt{5} \quad (4) 5 + \sqrt{10}$$

حل) گزینه ۱ صحیح است.

کوتاه ترین مسیر خط شکسته AMNB است که باید قسمت هایی از آن را که داخل دایره ها قرار دارد و برابر مجموع شعاع هائی شود را از آن کم کنیم. اکنون با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم:

$$AM^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow AM = \sqrt{25} = 5$$

$$MN^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow MN = \sqrt{25} = 5$$

$$NB^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow NB = \sqrt{5}$$

پس کوتاه ترین مسیر برابر است با:

$$5 + 5 + \sqrt{5} - [2 \times (2 + 1)] = 4 + \sqrt{5}$$

۶- دو عدد را با تقریب کمتر از یک قطع کرده ایم و حاصل را در هم ضرب کرده ایم و عدد ۱۶۰۰ به دست آمده است. اگر ابتدا دو عدد را در هم ضرب می کردیم و بعد حاصل را قطع می کردیم. حاصل برابر کدام گزینه می توانست باشد؟

$$(1) 3201 \quad (2) 3202 \quad (3) 1598 \quad (4) 1599$$

حل) گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه هر دو عدد قطع شده اند بنا براین حاصل ضرب واقعی آنها نباید از ۱۶۰۰ کمتر شود. پس گزینه های ۳ و ۴ حذف میشوند. همچنین این دو عدد هر قدر هم بزرگ باشند نمی توانند خود ۱۶۰۱ و ۲ باشند پس حاصل ضرب واقعی آنها قطعاً باید از ۳۲۰۲ کمتر باشد. (چون قرار است حاصل ضرب به صورت تقریبی و به روش قطع کردن مناسبه شود.) به این ترتیب تنها گزینه ای که می تواند درست باشد گزینه ۱ است.

۷- چه تعداد از گزاره های زیر درست است؟

(a) از چسباندن دو چند ضلعی مقعر می توان یک چند ضلعی محدب ساخت.

(b) از چسباندن دو چند ضلعی محدب می توان یک چند ضلعی مقعر ساخت.

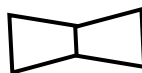
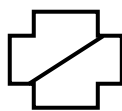
(c) از چسباندن دو چند ضلعی مقعر می توان یک چند ضلعی مقعر ساخت.

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) \text{ یک} \quad (3) \text{ دو} \quad (4) \text{ سه}$$

حل) گزینه ۴ صحیح است.

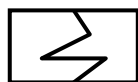
چون در هر سه عبارت از کلمه می توان استفاده شده است. هر سه درست هستند.

شکل برای چسباندن دو چند ضلعی مقعر یک چند ضلعی مقعر می شود.



شکل برای چسباندن دو چند ضلعی محدب یک چند ضلعی محدب می شود.

شکل برای چسباندن دو چند ضلعی مقعر یک چند ضلعی محدب می شود.



۸- منظورمان از دستور $a * b$ رسم دوزنقه متساوی الساقینی است که قاعده کوچک آن a و قاعده بزرگ آن b و طول دو ساق آن نیز برابر یک است. می دانیم بعضی از دستورات مثل $۱ * ۵$ قابل اجرا نیستند. اگر $a * b$ دستوری قابل اجرا باشد. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $(a+۴)*(b+۴)$ می تواند قابل اجرا باشد.
 (۲) $۴a * ۴b$ می تواند قابل اجرا باشد.
 (۳) $۴a * ۴b$ می تواند قابل اجرا نباشد.
 (۴) $(a+۴)*(b+۴)$ می تواند قابل اجرا نباشد.

حل) گزینه ۴ صحیح است.

چون در هر ۴گزینه از کلمه می تواند استفاده شده اگر برای هر کدام یک گزینه درست بیاوریم. گزینه تایید می شود.
 چون $a * b$ قابل اجراست اگر به هر یک از قاعده ها ۴ واحد اضافه کنیم دوزنقه متساوی الساقین دیگری خواهیم داشت. پس

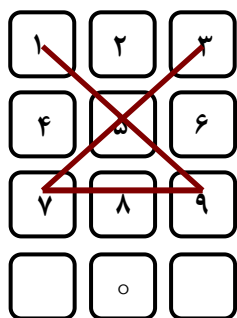
$(a+۴)*(b+۴)$ قابل اجراست. $۴a * ۴b$ هم می تواند قابل اجرا باشد و هم می تواند نباشد. زیرا اگر $a=۱$ و $b=۱\frac{۱}{۴}$ باشد دوزنقه ای به اضلاع ۴ و ۵ قابل رسم است. پس گزینه ۲ درست است. و اگر $a=۱$ و $b=۲$ باشد قابل اجرا نیست زیرا باید دوزنقه ای به اضلاع ۴ و ۸ داشته باشیم که غیر ممکن است.

گزینه ۴ همواره قابل اجراست زیرا با توجه به قابل اجرا بودن $a * b$ داریم:

$$۱ + ۱ + a > b \Rightarrow ۱ + ۱ + (a + ۴) > b + ۴$$

پس a و b هرچه که باشند همواره $(a+۴)*(b+۴)$ قابل اجراست.

۹- حرکت سرانگشت شخصی برای گرفتن یک شماره ۵ رقمی روی تلفن دیجیتالی به شکل مقابل است. با فرض این که سر انگشت او حرکت اضافه نداشته باشد. تعداد شماره هایی که او ممکن است گرفته باشد چقدر است؟



- (۱) شماره ۷ (۲) شماره ۱۴ (۳) شماره ۲۲ (۴) شماره ۲۸

حل) گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به مسیر حرکت انگشت ها ۴ رقم از شماره تلفن مورد نظر قطعاً باید ۱ و ۹ و ۷ و ۳ باشند و ترتیب آنها نیز باید به همین صورت و یا برعکس باشد همچنین اجازه نداریم از مسیر دیگری برویم مثلاً نمی توانیم از ۱ به ۷ برویم شماره های مطلوب با استفاده از راهبرد الگوسازی:

۱۹۷۳۵ و ۱۹۷۳۷ و ۳۷۹۱۵ و ۳۷۹۱۹ و ۱۵۹۷۳ و ۱۹۸۷۳ و ۱۹۷۵۳ و ۱۱۹۷۳ و ۱۹۹۷۳ و ۱۹۷۷۳ و ۱۹۷۳۳ و مقلوب آنها

۱۰- مقداری آب را در استوانه ای که سر و ته آن بسته است ریخته ایم با حرکت دادن این استوانه در جهات مختلف، سطح آب به کدام شکل نمی تواند باشد؟ (به صورت مستقیم و از بالا به سطح آب نگاه کرده ایم).



حل) گزینه ۲ صحیح است.

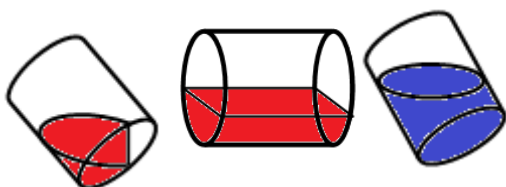
اگر استوانه را روی یکی از لبه های قاعده آن کج کنیم

طوری که آب تمام قاعده آن را بگیرد سطح آب به شکل گزینه ۱ در می آید.

اگر استوانه را روی سطح جانبی آن قرار دهیم سطح آب به شکل گزینه ۳ در می آید.

اگر استوانه را روی یکی از لبه های قاعده آن کج کنیم طوری که آب تمام قاعده

آن را بگیرد سطح آب به شکل گزینه ۴ در می آید.



۱۱- کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

- (۱) مکعب مستطیلی وجود دارد که اندازه همه ابعاد آن عددی گنگ و حجم آن عددی گویا باشد.
- (۲) کره ای وجود دارد که اندازه شعاع آن عددی گنگ و حجم و مساحت جانبی آن عددی گویا باشد.
- (۳) مکعب مستطیلی وجود دارد که مساحت همه ی وجه های آن عددی گنگ و حجم آن عددی گویا باشد.
- (۴) کره ای وجود دارد که مساحت جانبی آن عددی گنگ و حجم آن عددی گویا باشد.

حل) گزینه ۲ صحیح است. مثال برای تایید هر یک از گزینه ها

گزینه ۱: میم مکعب مستطیلی به ابعاد $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ عددی گویا می شود.

گزینه ۳: مکعب مستطیلی به ابعاد $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ مساحت وجه های آن برابر است با:

$$S_1 = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \quad \text{و} \quad S_2 = \sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{18} \quad \text{و} \quad S_3 = \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{12}$$

$$\Rightarrow V^2 = (\sqrt{6} \times \sqrt{12} \times \sqrt{18})^2 = 6 \times 12 \times 18 = 1296$$

گزینه ۴: برای کره ای به شعاع $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ مساحت جانبی و میم آن به صورت زیر است:

$$S = 4\pi \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \right)^2 = \frac{4\pi}{(\sqrt[3]{\pi})^2} \in Q'$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{\pi} = \frac{4}{3} \in Q$$

گزینه ۲ نادرست است زیرا عدد گنگی وجود ندارد که هم وقتی به توان ۲ برسد گویا باشد و هم وقتی به توان ۳ برسد گویا شود.

۱۲- علی دو نقشه از شهر خود دارد نقشه اول با مقیاس ۱ به ۱۰۰۰۰۰ و نقشه دوم با مقیاس ۱ به ۲۵۰۰۰ او محل کار و منزل خود را در هر یک از این دو نقشه با پاره خطی به هم وصل کرده و مرکز این دو نقشه را روی هم قرار داده است به طوری که شمال هر دو نقشه در یک جهت است. در مورد فاصله ی مرکز این دو پاره خط چه می توان گفت؟

- (۱) می تواند به اندازه طول نقشه اول باشد.
- (۲) قطعاً صفر است.
- (۳) می تواند به اندازه طول نقشه دوم باشد.
- (۴) نمی تواند صفر باشد.

حل) گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به مقیاسهای داده شده می توان نتیجه گرفت که طول هر پاره خط روی نقشه دوم ۴ برابر طول پاره خط متناظر آن روی نقشه اول است. اگر طول نقشه اول a باشد طول نقشه دوم $4a$ و اگر عرض نقشه اول b باشد عرض نقشه دوم $4b$ فواید بود.

با توجه به شکل مقابل و متشابه بودن دو نقشه فاصله مرکز دو پاره خط باید از طول پاره خط AB کمتر باشد.

پس داریم:

$$BC = \frac{4b - b}{2} = \frac{3}{2}b \quad \text{و} \quad AC = \frac{4a - a}{2} = \frac{3}{2}a$$

در نتیجه با کمک رابطه فیثاغورس داریم:

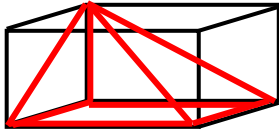
$$AB^2 = \left(\frac{3}{2}a \right)^2 + \left(\frac{3}{2}b \right)^2 = \frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{4}b^2 = \frac{9}{4}(a^2 + b^2) < \frac{9}{4}(a^2 + a^2) = \frac{9}{4}(2a^2) = \frac{9}{2}a^2 \Rightarrow AB < \frac{\sqrt{2}}{2}a \cong \frac{1}{\sqrt{2}}a$$

طرفی $a < \frac{1}{\sqrt{2}}a < 4a$ بنابراین فاصله مرکز دو پاره خط می تواند به اندازه طول نقشه اول باشد (تایید گزینه ۱) ولی نمی تواند به اندازه طول نقشه دوم باشد (رد ۳) اگر مرکز هر نقشه باشد فاصله صفر فواید شد (رد ۴) ولی اگر چنین نباشد می توانند صفر نباشد. (رد ۲)

راه دوم) مقیاس نقشه اول $\frac{1}{4}$ نقشه دوم است یعنی نقشه دوم ۴ برابر نقشه اول است پس طول و عرض نقشه دوم هر کدام ۲ برابر

نقشه اول است. اگر نقشه اول را طوری روی نقشه دوم قرار دهیم که وسط آن قرار گیرد چون طول و عرض آن نصف نقشه دوم است پس می تواند فاصله هر نقطه در آن تا نقطه مشابه آن در نقشه دوم به اندازه طول یا عرض نقشه اول باشد

۱۳- بزرگ ترین هرمی که می تواند به طور کامل در یک استخر به طول ۲۰ متر و عرض ۱۲ متر و عمق ۴ متر ساخته شود را در نظر بگیرید. حداکثر چه تعداد هرم با حجم این هرم می توان درون این استخر ساخت؟



(۱) یکی (۲) دو تا (۳) سه تا (۴) چهار تا
(حل) گزینه ۳ صحیح است.

زیرا حجم هر هرم برابر $\frac{1}{3}$ حجم منشوری است که هم مساحت و هم ارتفاع با آن باشد.

۱۴- فرض کنید A_i نشان دهنده مجموعه مقسوم علیه های عدد i باشد به عنوان مثال $A_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ مجموعه

$A_{51} \cup A_{52} \cup A_{53} \cup \dots \cup A_{100}$ چند عضو دارد؟

(۱) ۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۳۷۷۵

(حل) گزینه ۲ صحیح است.

زیرا هر عدد مقسوم علیه خودش می باشد. بنابراین تمام عدد های ۵۱ و ۵۲ و ۵۳ و ... و ۱۰۰ عضو اجتماع مجموعه ها هستند. همچنین هر یک از اعداد او ۲ و ۳ و ... و ۵۰ دست کم مقسوم علیه یکی از اعداد ۵۱ و ۵۲ و ۵۳ و ... و ۱۰۰ نیز می باشند

بنابراین: $A_{51} \cup A_{52} \cup A_{53} \cup \dots \cup A_{100} = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$

۱۵- حاصل $\sqrt{4^4(-4)^4}$ کدام است؟

(۱) $4^4(-4)^{-2}$ (۲) $4^4(-2)^{-4}$ (۳) $4^2(-4)^{-4}$ (۴) $4^2(-4)^{-2}$

(حل) گزینه ۴ صحیح است.

برای جذرگیری از اعداد تواندار یا باید توان آنها را نصف کرد و یا باید جذر پایه را گرفت بنابراین اگر جذر پایه یعنی ۴ را بگیریم به گزینه ۴ می رسیم.

۱۶- فرض کنید $0 < b < a$ باشد منظورمان از S_a مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a است. کدام یک از حالت های زیر می تواند درست باشد؟

(۱) $S_{a+b} = S_a + S_b$ (۲) $S_{2a} = 3S_a$

(۳) $S_{a+b} + S_{a-b} = 2S_a + 2S_b$ (۴) $S_{a^2} = S_a^2$

(حل) گزینه ۳ صحیح است. مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: $\frac{1}{2}$ برابر مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a یعنی

$S_a = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ حال با امتحان گزینه ها داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{a+b} = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a+b)^2 \\ S_a + S_b = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2) \end{array} \right\} \Rightarrow S_{a+b} \neq S_a + S_b$$
 گزینه ۱ رد زیرا:

$$S_{2a} = 3S_a \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}(2a)^2 = 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \Rightarrow 6\sqrt{3}a^2 \neq \frac{9\sqrt{3}}{2}a^2$$

گزینه ۲ رد زیرا:

$$S_{a^2} = S_a^2 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\right)^2 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}a^4 \neq \frac{27}{4}a^4$$

گزینه ۴ رد زیرا:

۱۷- اگر رقمهای عددی به ترتیب در عدد دیگری دیده شود عدد دوم را «سرور» عدد اول می گوئیم مثلا عدد ۲۳۱۵ سرور عدد ۲۱ است. کدام گزینه در باره کوچک ترین عددی که «سرور» هر دو عدد ۳۲۵۴۵ و ۵۲۳۴۵۲ است صحیح است؟

(۱) بین 3×10^7 و $3/3 \times 10^7$ است. (۲) کمتر از 3×10^7 است.

(۳) بین $3/3 \times 10^7$ و $5/4 \times 10^8$ است. (۴) بیش از $5/4 \times 10^8$ است.

حل (گزینه ۱ صحیح است).

با دقت در رقم های دو عدد و تعریف سرور نتیجه می گیریم که عدد فواسته شده تعداد رقم هایش از عدد ۵۲۳۴۵۲ باید بیشتر باشد حال چون سه رقم ۵ و ۴ و ۵ از عدد اولی به ترتیب در رقم های عدد ۵۲۳۴۵۲ وجود دارد پس فقط دو رقم ۲ و ۳ در عدد دوم وجود ندارد که باید آنها را به سمت چپ ۵۲۳۴۵۲ اضافه کنیم داریم. ۳۲۵۲۳۴۵۲

$$32523452 \cong 3/2 \times 10^7 \Rightarrow 3 \times 10^7 < 3/2 \times 10^7 < 3/3 \times 10^7 \Rightarrow \text{گزینه ۱ صحیح است}$$

۱۸- محسن وسعید می خواهند به مدت یک ساعت ، یک مسیر ۱۰۰ متری را به صورت رفت و برگشتی بدونند. اگر هر دو از ابتدای مسیر دویدن را آغاز کنند .وسرعت های آنها به ترتیب $\sqrt{40}$ و ۸ کیلومتر بر ساعت باشد آنها در طول این مسیر تقریبا چند بار از کنار یک دیگر عبور خواهند کرد؟

(۱) ۳۰ بار (۲) ۸۰ بار (۳) ۱۵ بار (۴) ۵۰ بار

حل (گزینه ۲ صحیح است).

$$V = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{V}$$

اگر سرعت را با V و مسافت را با d و زمان را با t نمایش دهیم داریم:

ابتدا مدت زمانی را که طول می کشد تا هر یک ۱۰۰ متر را طی کنند به دست آوریم.

$$t_1 = \frac{d}{V_1} \Rightarrow t_1 = \frac{100}{\sqrt{40}} = \frac{100}{2\sqrt{10}} = \frac{50}{\sqrt{10}} = \frac{50}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{50\sqrt{10}}{10} = 5\sqrt{10} \frac{km}{h}$$

چون هر کیلو متر ۱۰۰۰ متر و هر ساعت ۳۶۰۰ ثانیه است. پس :

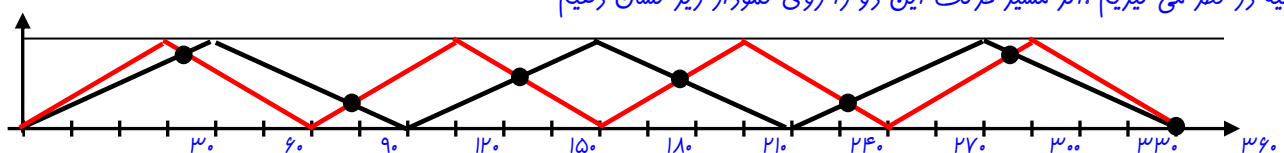
$$t_1 = 5\sqrt{10} \times \frac{3600}{1000} = 18\sqrt{10}s$$

اگر $\sqrt{10}$ را تقریبا ۳/۱ در نظر بگیریم حاصل ۵۵/۸ و اگر ۳/۲ در نظر بگیریم حاصل ۵۷/۶ می باشد.

$$t_2 = \frac{d}{V_2} \Rightarrow t_2 = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} \frac{km}{h} \Rightarrow t_2 = \frac{25}{2} \times \frac{3600}{1000} = 45s$$

برای راحتی کار مدت زمانی که مسن فاصله ۱۰۰ متری را طی می کند ۶۰ ثانیه و مدت زمانی که سعید ۱۰۰ متر را طی میکند

۴۵ ثانیه در نظر می گیریم. اگر مسیر حرکت این دو را روی نمودار زیر نشان دهیم



متوجه می شویم که در کمتر از ۳۶۰ ثانیه اول تقریباً ۷ بار از کنار هم عبور می کنند پس در طول یک ساعت یا ۳۶۰۰ ثانیه بیشتر از ۷۰ بار از کنار هم عبور خواهند کرد. که به گزینه ۲ که ۸۰ می باشد نزدیکتر است.

۱۹- سه خط به معادله های $y = ax + b$ و $y = cx + d$ و $y = ex + f$ تشکیل یک مثلث به مساحت ۱ واحد می دهند. مساحت مثلثی که از سه خط به معادله $y = ax + 2b$ و $y = cx + 2d$ و $y = ex + 2f$ به دست می آید کدام است؟

(۱) ۱ واحد (۲) ۲ واحد (۳) ۴ واحد (۴) ۶ واحد

حل) گزینه ۳ صحیح است.

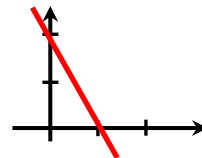
کافیست سه قطی را در نظر بگیریم که با هم مثلثی به مساحت یک تشکیل دهند.

به عنوان نمونه قط های زیر را در نظر می گیریم: (مثلث قائم الزاویه بین دو محور مختصات و قط $y = -2x + 2$)

$$y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$y = 1x + 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = -2x + 2$$

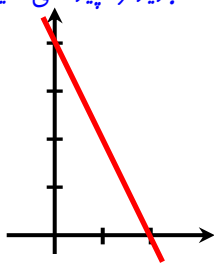


$$S_{\Delta} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

حالا معادلات قط های جدید را که عرض از مبدا هر کدام دو برابر شده است می نویسیم و مساحت مثلث جدید را پیدا می کنیم.

معادلات جدید عبارتند از: $y = 0$ و $x = 0$ و $y = -2x + 4$

$$S_{\Delta} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$



۲۰- فرض کنید k یک عدد ثابت است و $A = \{x^2 + k \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < k\}$ اگر بدانیم $\{6, 9\} \subseteq A$ ، آنگاه k عضو کدام مجموعه است؟

(۱) $\{5x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{4x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{2x + 6 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\{3x - 4 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

حل) گزینه ۴ صحیح است.

چون ۹ و ۶ عضو مجموعه A هستند پس با ازای دو مقدار ۶ و ۹ مقدار $x^2 + k$ برابر شده است در نتیجه داریم:

$$x^2 + k = 6 \Rightarrow x^2 = 6 - k$$

$$x^2 + k = 9 \Rightarrow x^2 = 9 - k$$

بنابراین $6 - k$ و $9 - k$ دو عدد مربع کاملند که با هم ۳ واحد اختلاف دارند در نتیجه این دو عدد ۱ و ۴ می شوند و از انجا مقدار k عدد ۵ به دست

می آید. حال باید با نوشتن عضوهای گزینه ها بررسی کنیم ببینیم که ۵ عضو کدام یک از مجموعه هاست؟

(۱) $\{..., 6, 11, ...\}$ (۲) $\{..., 3, 7, 11, ...\}$ (۳) $\{..., 2, 4, 6, 8, ...\}$ (۴) $\{..., -1, 2, 5, 8, ...\}$

پس k عضو مجموعه ی گزینه ی ۴ است.

سوالات آزمون ریاضی ورودی مدارس تیزهوشان دوره دوم متوسطه اردیبهشت ماه ۹۶

۱- باقیمانده تقسیم $1 + x^2 - x^4 + x^6 - \dots + x^{96} - x^{98} + x^{100} - 1$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

حل) ابتدا ریشه های مقسوم علیه را پیدا می کنیم و سپس آنها را در مقسوم به جای x جایگذاری می کنیم. (پون توانهای متغیر x همه زویندر فرقی نمی کند که ۱- قرار دهیم و یا ۱+)

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow 1^{100} - 1^{98} + 1^{96} - \dots + 1^4 - 1^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

۲- کدام گزاره در مورد عدد حقیقی و مثبت a نمی تواند درست باشد؟

- (۱) $\sqrt{a} < 1000$ و $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$ (۲) $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$
(۳) $\sqrt[3]{a} < 1$ و $\sqrt{a} > 1$ (۴) $\sqrt{a} > 10000$ و $\sqrt[3]{a} < 10000$

حل) هر یک از گزینه ها را بررسی می کنیم

$$\sqrt{a} > 1000 \Rightarrow a > (1000)^2 \Rightarrow a > 10^6 \Rightarrow 10^6 < a < 10^9 \text{ پس گزینه ۱ درست است.}$$

$$\sqrt[3]{a} < 1000 \Rightarrow a < (1000)^3 \Rightarrow a < 10^9$$

گزینه ۲ را بررسی می کنیم و برای این کار دو طرف را به توان ۶ می رسانیم داریم

$$\sqrt[3]{a} > \sqrt{a} \Rightarrow (\sqrt[3]{a})^6 > (\sqrt{a})^6 \Rightarrow a^2 > a^3 \text{ حالت مقابل وقتی درست می باشد که } 0 < a < 1 \text{ باشد پس این گزینه نیز صحیح می باشد}$$

بررسی گزینه ۳:

$$\sqrt{a} > 1 \Rightarrow a > 1 \Rightarrow a > 1 \text{ و } a < 1 \Rightarrow a > 1 \text{ و این غیر ممکن است که عددی هم از ۱ بزرگتر باشد و هم از یک کوچکتر باشد}$$

$$\sqrt[3]{a} < 1 \Rightarrow a < 1 \Rightarrow a < 1$$

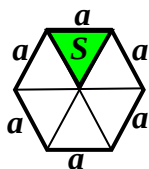
بررسی گزینه ۴:

$$\sqrt{a} > 10000 \Rightarrow a > (10000)^2 \Rightarrow a > 10^8 \Rightarrow 10^8 < a < 10^9 \text{ پس این گزینه نیز صحیح می باشد}$$

$$\sqrt[3]{a} < 1000 \Rightarrow a < (1000)^3 \Rightarrow a < 10^9$$

۳- علی با مقداری نخ یک شش ضلعی منتظم ساخته است. رضا با همان مقدار نخ، یک مثلث متساوی الاضلاع ساخته است. نسبت مساحت شش ضلعی به مساحت مثلث چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱/۵ (۳) ۱ (۴) ۲/۳



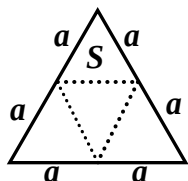
حل) اگر ضلع ۶ ضلعی منتظم را برابر a بگیریم مساوی با $\frac{1}{6}$ طول نخ می شود. با توجه به شکل مقابل مساحت ۶ ضلعی منتظم مساوی ۶ برابر مساحت یکی از مثلثهای داخل شش ضلعی می شود.

$$6S = \text{مساحت ۶ ضلعی منتظم}$$

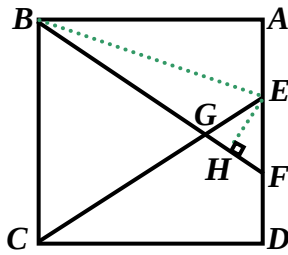
حال چون با همان نخ مثلث متساوی الاضلاع درست می کنیم اندازه هر ضلع این مثلث $\frac{1}{3}$ طول نخ

$$4S = \text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع}$$

یعنی $2a$ می شود.



$$\frac{\text{مساحت ۶ ضلعی منتظم}}{\text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع}} = \frac{6S}{4S} = 1/5$$



۴- مربع $ABCD$ به طول ضلع a را در نظر بگیرید. نقاط E و F بر روی AD

چنان قرار گرفته اند که $EF = \frac{a}{3}$ ، مساحت مثلث BEG چند برابر مساحت

مثلث GEF خواهد بود؟

(۱) دو برابر (۲) سه برابر

(۳) چهار برابر (۴) شش برابر

حل: گزینه (۲) نقطه E را به B وصل کرده و از E عمود EH را بر BF رسم می کنیم. اکنون داریم:

چون دو مثلث دارای دو ضلع موازی BC و EF می باشند پس زاویه های متناظر آنها با هم برابر می شوند پس دو مثلث با هم متشابهند و داریم:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{BG}{GF} \Rightarrow \frac{a}{\frac{a}{3}} = \frac{BG}{GF} \Rightarrow \frac{BG}{GF} = \frac{3}{1} = 3$$

چون در دو مثلث ذکر شده EH ارتفاع دو مثلث است و BG و GF ارتفاع دو مثلث ذکر شده می باشد داریم:

$$\frac{S_{\triangle BEG}}{S_{\triangle GEF}} = \frac{\frac{1}{2} BG \times EH}{\frac{1}{2} GF \times EH} = \frac{BG}{GF} = 3$$

۵- مورچه ای از نقطه ای $\begin{bmatrix} -40 \\ -27 \end{bmatrix}$ با سرعت یک واحد بر ثانیه روی خطی به معادله $4y = 3x + 12$ حرکت می کند پس از چه مدت به

محور x ها می رسد؟

(۱) ۴۵ ثانیه (۲) ۶۷ ثانیه (۳) ۳۶ ثانیه (۴) ۶۳ ثانیه

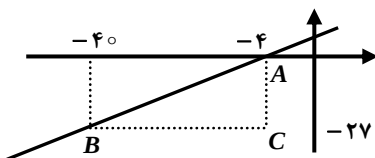
حل: گزینه (۱) ابتدا محل برخورد خط با محور x ها را پیدا می کنیم و برای این کار به جای y صفر قرار می دهیم.

$$y = 0 \Rightarrow 4 \times 0 = 3x + 12 \Rightarrow 0 = 3x + 12 \Rightarrow x = -4$$

اکنون طول AB از مثلث قائم الزاویه ABC را به کمک رابطه فیثاغورس

به دست می آوریم.

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 36^2 + 27^2 = 2025 \Rightarrow AB = \sqrt{2025} = 45$$



۶- سارا و لیلا از روی نقطه A و در جهت مخالف یکدیگر شروع به حرکت می کنند. سرعت سارا

دو برابر سرعت لیلا و جهت حرکت او ساعتگرد است. آنها پس از جدایی در کدام نقطه برای هشتمین

بار از کنار یکدیگر عبور می کنند؟

(۱) A (۲) B (۳) C (۴) D

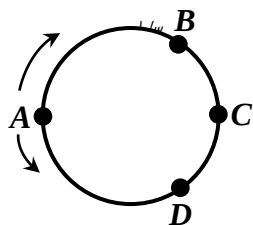
حل: گزینه (۲) اولاً با توجه به شکل سه کمان AB و BD و DA با هم برابرند و هر کدام 120° درجه می شوند.

وقتی لیلا 120° درجه را (پار ساعتگرد) طی می کند سارا دو برابر او یعنی 240° درجه را (ساعتگرد) طی می کند

پس هر دو در نقطه D برای بار اول به هم می رسند پس وقتی به همین ترتیب ادامه دهیم داریم:

$$A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} A \xrightarrow{4} D \xrightarrow{5} B \xrightarrow{6} A \xrightarrow{7} D \xrightarrow{8} B$$

نقطه شروع



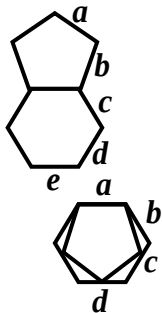
۷- دو شش ضلعی منتظم با طول ضلع یک و یک پنج ضلعی منتظم با طول ضلع یک را به چند طریق مختلف می توان از اضلاع به هم چسباند ، به طوریکه با دوران یا تقارن به هم تبدیل نشوند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۹

حل) گزینه ۴

حالت اول: اگر پنج ضلعی بیرون شش ضلعی باشد آنگاه شش ضلعی دوم را مطابق شکل مقابل می توان روی یکی از اضلاع a, b, c, d, e قرار داد.

حالت دوم: اگر پنج ضلعی داخل شش ضلعی باشد آنگاه شش ضلعی دوم را مطابق شکل می توان روی یکی از اضلاع a, b, c, d قرار داد پس مجموعاً به ۹ روش می توان این کار را انجام داد.



۸- اگر در صفحه مختصات عرض یک نقطه عددی گویا باشد آن نقطه را «خوش بیان» می نامیم. چه تعداد از خطوط زیر از هیچ نقطه «خوش بیانی» نمی گذرد؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) صفر

حل) گزینه ۴

پس خط $y = \sqrt{2}x + 1$ نقطه فوش بیان دارد. $x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 3$ یا $y = \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$

پس خط $y = x + \sqrt{3}$ نقطه فوش بیان دارد. $y = x + \sqrt{3} \Rightarrow x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$

$$y = \pi x + 2\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{-2\sqrt{3}}{\pi} \Rightarrow y = \pi \left(\frac{-2\sqrt{3}}{\pi} \right) + 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$$

پس خط $y = \pi x + 2\sqrt{3}$ نیز نقطه فوش بیان دارد.

۹- عدد اول p را به توان یک عدد طبیعی رسانده ایم و عدد a به دست آمده است. حاصل ضرب همه ی مقسوم علیه های a کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

- (۱) p^a (۲) p^{10} (۳) p^{12} (۴) p^{14}

حل) گزینه ۲

مقسوم علیه های عدد a به صورت $p^0, p^1, p^2, p^3, p^4, \dots, p^n$ می باشد اکنون باید ببینیم تا کدام توان p مجموع توانهای p برابر با یکی از اعداد ۸ یا ۱۰ یا ۱۲ یا ۱۴ فواید شده با امتحان مقادیر مختلف n گزینه صحیح را مشخص می کنیم.

$$p^1 p^2 = p^3 \quad \text{یا} \quad p^1 p^2 p^3 = p^6 \quad \text{یا} \quad p^1 p^2 p^3 p^4 = p^{10} \quad \text{یا} \quad p^1 p^2 p^3 p^4 p^5 = p^{15}$$

۱۰- امیر حسین می خواهد بین دو سرویس اینترنتی یکی را انتخاب کند. در سرویس اول، هزینه ی اولیه ۱۰۰۰۰۰ تومان و هزینه ی هر گیگابایت مصرف، ۱۰۰۰۰ تومان است. و در سرویس دوم، هزینه اولیه ۱۵۰۰۰۰ تومان و هزینه هر گیگابایت مصرف ۸۰۰۰ تومان است. با توجه به مصرف سالیانه کدام سرویس مقرون به صرفه است؟

(۱) همیشه سرویس او بهتر است. (۲) همیشه سرویس دوم بهتر است.

(۳) برای مصرف تا ۲۵ گیگابایت سرویس دوم بهتر است. (۴) برای مصرف بیش از ۲۵ گیگابایت سرویس دوم بهتر است.

حل) گزینه ۴:

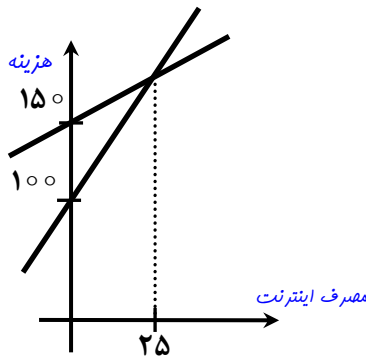
اگر هزینه کلی را با y و مجموع مصرف شده را با x نشان دهیم هزینه های هر سرویس را

می توان با معادلات روبه رو نشان داد.

نکات ریاضی آزمون های ورودی

مدارس نمونه و تیزهوشان

دبیرستان نمونه سعدی



$$\begin{cases} y = 10000x + 100000 \\ y = 8000x + 150000 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow x = 25$$

اگر این دو معادله را در یک دستگاه حل کنیم به $x = 25$ می رسیم.

نقطه برخورد این دو خط همان نقطه ای است که نشان می دهد دو سرویس هزینه

یکسان دارند و این یعنی برای x های کوچکتر از ۲۵ سرویس اول هزینه کمتر و برای

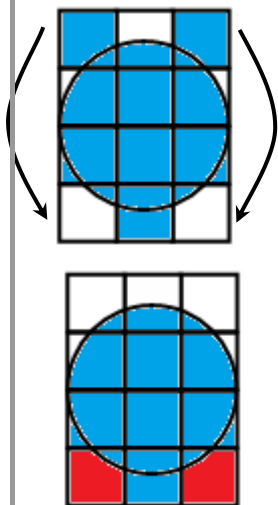
x های بزرگتر از ۲۵ سرویس دوم هزینه کمتری دارد.

۱۱- ساعتی داریم که عدد ۱۲ آن همواره روبه شمال و عدد ۳ آن همواره رو به شرق است. فاطمه راس هر دقیقه در جهت عقربه دقیقه شمار این ساعت به اندازه ۱ متر جابجا می شود. اگر فاطمه نخستین بار راس ساعت ۱۳:۰۱ به این ساعت نگاه کرده باشد لحظاتی پیش از ساعت ۱۴ در چه فاصله ای از نقطه شروع حرکت ایستاده است؟

- (۱) صفر (۲) یک متر (۳) بیش از ۱ متر و کمتر از ۳۰ متر (۴) بیش از ۳۰ متر و کمتر از ۶۰ متر
- حل: گزینه ۲

در این فاصله ی زمانی فاطمه هر حرکتی انجام دهد قرینه ی آن حرکت را نیز انجام فوادر دارد (بجز ساعت ۱۳:۳۰)

مثلا حرکت در ساعت ۱۳:۰۱ با حرکت در ساعت ۱۳:۳۱ قرینه هم هستند که فتنی می شوند. ولی حرکت در ساعت ۱۳:۳۰ قرینه اش ساعت ۱۴:۰۰ می باشد که چون در قبل از ساعت ۱۴:۰۰ متوقف شده پس حرکت در ساعت ۱۳:۳۰ قرینه فوادر داشت بنابراین در فاصله امتری شروع حرکت ایستاده است.



۱۲- شکل مقابل از ۱۲ مربع به طول ضلع ۲ و یک دایره به قطر ۶ ساخته شده است. مرکز دایره روی یکی از اضلاع مربع های هاشور خورده قرار دارد. مساحت قسمت هاشور خورده چقدر است؟

$$36 \quad (1) \quad 2(8+3\pi) \quad (2)$$

$$24 + \frac{9}{2}\pi \quad (3) \quad 24 + \frac{9}{2}\pi \quad (4)$$

حل: گزینه ۴

ابتدا قسمت هایی از دو مربع را که در دو گوشه بالا سمت چپ و راست شکل هستند را

به دو قسمت پایین سمت چپ و راست انتقال می دهیم. حال قسمت رنگی برابر است با:

یک نیم دایره و یک مستطیل 2×3 پس داریم:

$$S = 24 + \frac{9}{2}\pi \quad \text{قسمت هاشور خورده} \Rightarrow S = 6 \times 4 = 24 \quad \text{مربع} \quad S = \frac{3 \times 3 \times \pi}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{نیم دایره}$$

۱۳- جمعیت یک نوع باکتری در هر ساعت یا ۱۸ برابر می شود یا ۱۲ برابر می شود. پس از گذشت ۱۰ ساعت جمعیت این نوع باکتری چند برابر می تواند شده باشد.

$$6^{18} \text{ برابر} \quad (1) \quad 2 \times 6^{14} \text{ برابر} \quad (2) \quad 3 \times 6^{13} \text{ برابر} \quad (3) \quad 9 \times 6^{15} \text{ برابر} \quad (4)$$

حل: گزینه ۳

اگر فرض کنیم که در k ساعت ۱۸ برابر می شود پس در $10-k$ ساعت ۱۲ برابر می شود. اکنون داریم:

$$\begin{cases} 12 = 2 \times 6 \\ 18 = 3 \times 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18^k = 3^k \times 6^k \\ 12^{10-k} = 3^{10-k} \times 6^{10-k} \end{cases} \Rightarrow 18^k \times 12^{10-k} = 3^k \times 2^{10-k} \times 6^{10} \quad \star$$

حال باید ببینیم که کدام یک از گزینه ها را می توان به مانند رابطه $\star$ نوشت. (یعنی توان ۶ عدد ۱۰ باشد و جمع توانهای ۳ و ۲ نیز ۱۰ شود)

$$6^{18} = 6^{10} \times 2^8 \times 3^8$$

گزینه ۱ غلط است زیرا به شکل رابطه $\star$ نیست.

$$2 \times 6^{14} = 6^{10} \times 3^4 \times 2^5$$

گزینه ۲ غلط است زیرا به شکل رابطه $\star$ نیست.

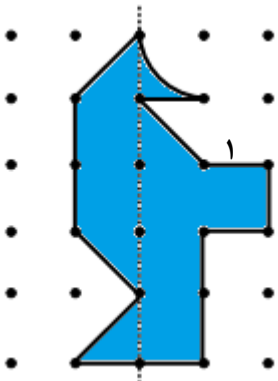
$$16 \times 6^{13} = 2^4 \times 6^3 \times 6^{10} = 2^4 \times 2^3 \times 3^3 \times 6^{10} = 2^4 \times 3^6 \times 6^{10}$$

گزینه ۳ درست است زیرا:

$$9 \times 6^{15} = 3^3 \times 6^5 \times 6^{10} = 3^3 \times 3^5 \times 2^5 \times 6^{10} = 3^8 \times 2^5 \times 6^{10}$$

گزینه ۴ نیز غلط است زیرا به شکل رابطه $\star$ نیست.

۱۴- حجم شکلی که با دوران دادن حول خط چین به دست می آید کدام است؟



$$6\frac{2}{3}\pi \quad (2)$$

$$7\frac{1}{3}\pi \quad (1)$$

$$8\pi \quad (4)$$

$$5\frac{1}{3}\pi \quad (3)$$

حل: گزینه ۱

برای حل این سوال باید این نکته را مد نظر داشته باشیم که وقتی یک شکل حول فطی که نسبت به آن تقارن ندارد دوران کند آنگاه حجم به وجود آمده به وسیله قسمت بزرگتر شکل تولید می شود و قسمت کوچکتر تاثیری در حجم به وجود آمده نخواهد داشت.

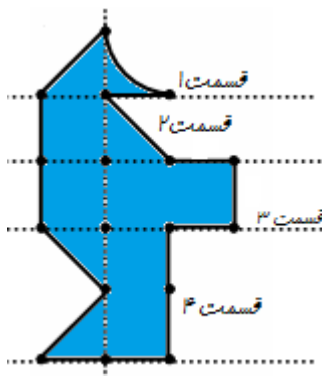
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{3}\pi$$

$$V_2 = \pi r^2 h = \pi \times 1^2 \times 1 = 1\pi$$

$$V_3 = \pi r^2 h = \pi \times 2^2 \times 1 = 4\pi$$

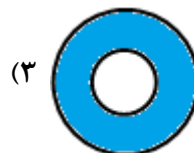
$$V_4 = \pi r^2 h = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{3}\pi + 1\pi + 4\pi + 2\pi = 7\frac{1}{3}\pi$$



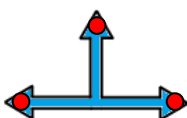
۱۵- نقشه چهار سالن (از بالا) به شکل گزینه های زیر است. (فضای سالن ها با رنگ تیره مشخص شده است). کدام یک از سالن ها

تعداد چراغ کمتری لازم دارد تا نور به صورت مستقیم به تمام نقاط آن برسد؟



حل: گزینه های ۳ و ۲

گزینه امراقل با ۴ لامپ و گزینه ۴ امراقل با سه لامپ (که در راس هر یک از فلشها قرار دارند) روشن می شود اما گزینه های ۲ و ۳ هر کدام امراقل با دو لامپ روشن می شوند. (محل قرار گرفتن لامپ ها را در شکلهای زیر می بینید.)



۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

۱۶- از کیسه ای شامل ۹ گوی شماره گذاری شده از ۱ تا ۹، در سه نوبت، هر بار یک گوی بیرون می آوریم. و در جدول رو به رو خانه مربوطه را علامت می زنیم (گوی ها را به کیسه بر نمی گردانیم). چقدر احتمال دارد که تمامی خانه های یک سطر یا یک ستون و یا یک قطر این جدول علامت دار شوند؟

$$(۱) \frac{۸}{۵۰۴} \quad (۲) \frac{۲۴}{۵۰۴} \quad (۳) \frac{۳۰}{۵۰۴} \quad (۴) \frac{۴۸}{۵۰۴}$$

حل: گزینه ۴

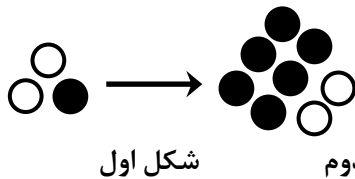
ابتدا کل حالت های ممکن یعنی $n(S)$ را به دست می آوریم.

در بار اول برای انتخاب یک گوی ۹ انتخاب داریم و در بار دوم برای انتخاب گوی، ۸ انتخاب داریم (زیرا گوی اول را به کیسه بر نمی گردانیم). و در بار سوم برای انتخاب گوی، ۷ انتخاب داریم زیرا ۲ تا از گوی ها بیرون هستند. پس تعداد کل حالت ها برابر است با:

$$n(S) = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

برای به دست آوردن تعداد حالت های مطلوب یعنی $n(A)$ ، چون ۳ سطر و ۳ ستون و ۲ قطر داریم پس کل حالت ها ۸ حالت می شود. ولی چون مثلاً حالت او ۲ و ۳ با حالت او ۳ و ۲ فرق دارد برای هر سطر و ستون و قطر ۶ حالت داریم در نتیجه:

$$n(A) = 6 \times 8 = 48 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{48}{504}$$



۱۷- مطابق الگوی مقابل در هر مرحله، هر دایره سیاه به ۲ دایره سفید و هر دایره سفید به ۳ دایره سیاه تبدیل می شوند. در شکل هشتم چند دایره سفید وجود دارد؟

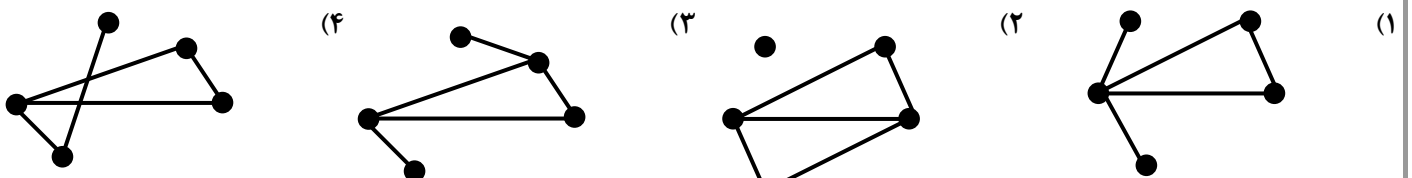
$$(۱) 6^4 \times 2 \quad (۲) 6^4 \times 3 \quad (۳) \frac{6^4}{2} \quad (۴) \frac{6^4}{3}$$

حل: گزینه ۴

فلش های رو به پایین ضربدر ۳ را و فلش های رو به بالا ضربدر ۲ را نشان می دهند. حال با توجه به جدول زیر و پیدا کردن حاصل هر گزینه، گزینه ۴ صحیح می باشد.

شماره شکل	شکل ۱	شکل ۲	شکل ۳	شکل ۴	شکل ۵	شکل ۶	شکل ۷	شکل ۸
مهره سفید	۲	۲	۱۲	۱۲	۷۲	۷۲	۴۳۲	۴۳۲
مهره سیاه	۱	۶	۶	۳۶	۳۶	۲۱۶	۲۱۶	۱۲۹۶

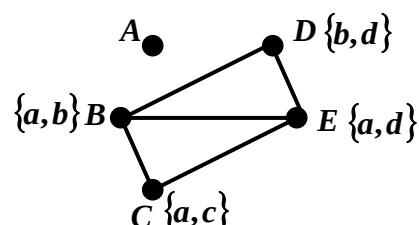
۱۸- ۵ مجموعه ی دو عضوی غیر مساوی داریم. در گزینه های زیر، هر نقطه، یکی از این مجموعه ها را نشان می دهد. اگر اشتراک دو مجموعه تهی نباشد، نقاط مربوط به آنها را به هم وصل کرده ایم. کدام یک از اشکال زیر نمی تواند مربوط به این پنج مجموعه باشد؟

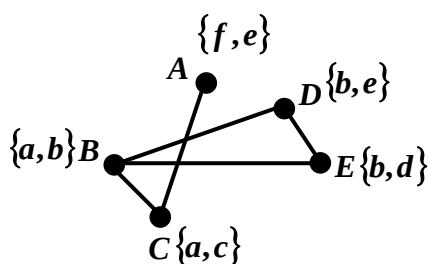


حل: گزینه ۱

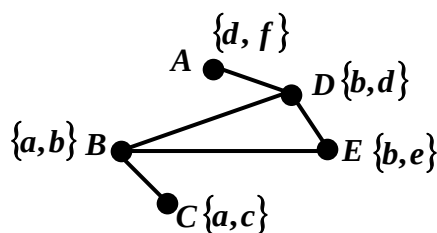
در گزینه (۱) هر کدام از D و E باید، هم با یکدیگر و هم با A اشتراک داشته باشند که چون هر کدام دو عضو دارند این غیر ممکن است.

گزینه ۲

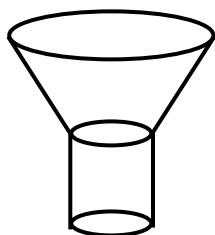




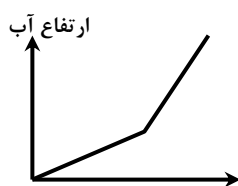
گزینه ۴



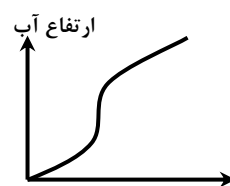
گزینه ۳



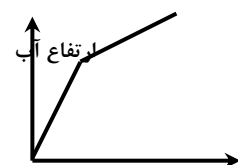
۱۹- در ظرفی مانند شکل رو به رو با سرعتی ثابت آب می ریزیم. کدام نمودار توصیف دقیق تری از ارتفاع آب در ظرف است؟



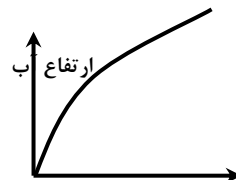
(۲) زمان



(۱) زمان



(۴) زمان



(۳) زمان

حل: گزینه ۳

در قسمت استوانه ارتفاع آب به دلیل اینکه سطح مقطع ثابت است با سرعت ثابتی افزایش پیدا می کند (یعنی به صورت یک خط راست) اما در قسمت مخروط ناقص چون سطح مقطع تغییر می کند سرعت تغییر می کند و ارتفاع کاهش می یابد (یعنی به صورت یک خط خمیده می شود).

۲۰- استوانه ای به قطر ۶، چه ارتفاعی داشته باشد که در آن سه کره به قطر ۴ مانند شکل رو به رو

قرار بگیرد؟

(۴) $6\sqrt{3} + 4$

(۳) $4\sqrt{3} + 2$

(۲) $6\sqrt{3}$

(۱) $4\sqrt{3} + 4$

حل: گزینه ۱

چون کره ها با هم تماس دارند پس دایره های عظیمه آنها در نقاط تماسشان با هم مماس هستند اکنون با توجه به شکل مقابل و رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow 4^2 = x^2 + 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AD = 2x = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

چون کره ها بر دو قاعده استوانه مماس هستند و شعاع هر کدرا ۳ نیز ۲ می باشد پس AM و DN نیز هر کدرا ۲ سانتیمتر می باشند و بنابراین ارتفاع استوانه یعنی MN برابر است با:

$$MN = 2 + 2 + 4\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3}$$

