

ایران توشه

- رانلور نمونه سوالات امتحانی

- رانلور گام به گام

- رانلور آزمون گام به گام و قلم چی و سنجش

- رانلور فیلم و مقاله انگلیزی

- رانلور و مشاوره



IranTooshe.Ir



@irantooshe



IranTooshe



به نام خدا

(۱۰ تجربی)

جزوه ریاضی ۱



تهیه و تنظیم: فاطمه بوربور

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

دبیر ریاضی شهرستان های استان تهران (وراین)

توشه ای برای موفقیت

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

❖ درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی

❖ درس دوم: متمم یک مجموعه

❖ درس سوم: الگو و دنباله

ایران تونش

توشه ای برای موفقیت

بارم فصل ۱:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
۵	۱/۵	۲

فصل ۱ درس ۱: مجموعه های متناهی و نامتناهی

اهداف درس ۱:

- یادآوری مختصر از مجموعه های مختلف اعداد
- آشنایی با بازه های اعداد حقیقی و اعمال روی آنها
- آشنایی با مجموعه متناهی و مجموعه نامتناهی

مجموعه های اعداد:

* معرفی مجموعه: یک دسته ی کاملاً مشخص و متمایز از اشیاء یا اعداد را مجموعه می نامیم.

* مجموعه های مهم:

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$:مجموعه اعداد طبیعی

$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$:مجموعه اعداد حسابی

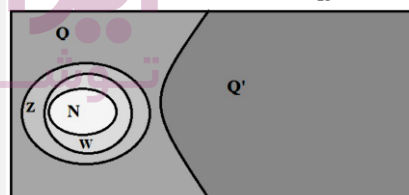
$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$:مجموعه اعداد صحیح

$Q = \{\frac{m}{n} | m, n \in Z, n \neq 0\}$:مجموعه اعداد گویا

مجموعه اعدادی که توان آنها را به صورت $Q' =$:مجموعه اعداد گنگ
نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

$R = Q \cup Q'$:مجموعه اعداد حقیقی

* نمایش مجموعه ها با نمودار ون:



$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ *

$Q' \subseteq R$ *

(گاورگلایی ص ۲)

الف) مجموعه $R - Q$ چه نام دارد؟

ب) مجموعه $W - N$ چند عضو دارد؟

بازه های اعداد حقیقی و اعمال روی آنها:

* زیر مجموعه هایی از R که مشخص کننده یک قطعه از محور

اعداد حقیقی باشد را بازه یا فاصله نامند

* پرانتز یعنی عدد عضو بازه نیست، کروشه یعنی عدد عضو بازه

است.

* $-\infty, +\infty$ اعداد حقیقی نیستند و نماد هستند و برای نمایش

آن ها از پرانتز استفاده می کنیم.

نامگذاری بازه	نمایش هندسی	نمایش با نماد بازه	نمایش به صورت مجموعه
بازه باز		(a, b)	$\{x x \in R, a < x < b\}$
بازه بسته		$[a, b]$	$\{x x \in R, a \leq x \leq b\}$
بازه نیم باز		$(a, b]$	$\{x x \in R, a < x \leq b\}$
بازه نیم باز		$[a, b)$	$\{x x \in R, a \leq x < b\}$
بازه باز		$(a, +\infty)$	$\{x x \in R, a < x\}$
بازه نیم باز		$[a, +\infty)$	$\{x x \in R, a \leq x\}$
بازه باز		$(-\infty, a)$	$\{x x \in R, x < a\}$
بازه نیم باز		$(-\infty, a]$	$\{x x \in R, x \leq a\}$
بازه باز		$(-\infty, +\infty)$	$\{x x \in R\}$

(گارد در کلاسی ۱ و ۲ ص ۵)

۱. درستی یا نادرستی هر کدام را مشخص کنید.

$$1) \{0, 1\} \subseteq [-1, 2) \quad 2) \sqrt{2} \in (0, 1)$$

$$3) [2, 5) = (2, 5] \quad 4) -1 \in \{-2, 0\}$$

۲. هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه های نظیر آن وصل کنید.

$$\frac{0}{2} \quad 10^{23} \times 0.22 / 6 \quad \frac{-5}{4} \quad -500 \quad \sqrt{3}$$

$$(-2, 3) \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (3, +\infty) \quad [2, +\infty) \quad [-2, 0) \quad (-\infty, -4)$$

* بازه ها مجموعه اند. پس اعمال مجموعه ها (اجتماع، اشتراک و تفاضل) روی آن ها قابل انجام است

(گارد در کلاسی ۳ ص ۵)

۳. نمایش هندسی بازه های $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ را روی محور رسم کرده و حاصل عبارت های زیر را بدست آورید؟

$$A \cap B = \quad A \cup B =$$

$$A - B = \quad B - A =$$

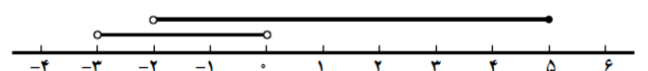
(تمرین ۴ و ۵ ص ۷)

۴. حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازه های آنها روی یک محور به دست آورید:

$$\text{الف) } (-3, 0) \cup (-2, 5]$$

✓ حل:

$$(-3, 0) \cup (-2, 5] = (-3, 5]$$

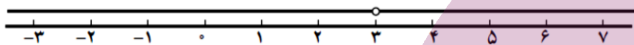


$$\text{ب) } (3, +\infty) \cap (6, 10]$$

$$\text{پ) } [2, 4) - [3, +\infty]$$

۵. مجموعه ی $R - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن

✓ حل: $R - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$



مجموعه متناهی و مجموعه نامتناهی:

* مجموعه های را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی

است، مجموعه های متناهی می نامیم.

* مجموعه هایی را که متناهی نباشند، مجموعه های نامتناهی

می گوئیم.

* نمی توان تعداد اعضای مجموعه نامتناهی را با یک عدد

بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی

که در نظر بگیریم، بزرگ تر است.

* مجموعه های $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}'$ همگی نامتناهی هستند.

* تعداد اعضای برخی از مجموعه های متناهی ممکن است

بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف

وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد

* بازه ها، نامتناهی هستند.

مجموعه متناهی و نامتناهی و اعمال روی آنها:

متناهی = متناهی $\cup$ متناهی

متناهی = متناهی $\cap$ متناهی

نامتناهی = نامتناهی $\cup$ نامتناهی

متناهی یا نامتناهی = نامتناهی $\cap$ نامتناهی

نامتناهی = نامتناهی $\cup$ متناهی

متناهی = نامتناهی $\cap$ متناهی

(تقریبی ۷)

دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه ای متناهی باشد.

(گاردوگرگلاسی و تقریبی ۷)

۱) متناهی یا نامتناهی بودن اعداد زیر را مشخص کنید.

۱. مجموعه اعداد اول یک رقمی

۲. مجموعه انسان های روی زمین

۳. مجموعه اعداد طبیعی فرد

۴. مجموعه تمام دایره های به مرکز مبدأ مختصات

۵. بازه $(0, 1)$

۶. مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۵

۷. مجموعه شمارنده های طبیعی عدد ۳۶

۸. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$

*مجموعه ای که متناهی باشد همه زیرمجموعه هایش هم متناهی است.

* اگر $A \subseteq B$ باشد، داریم:

الف) اگر A نامتناهی باشد، آنگاه B نیز نامتناهی است.

ب) اگر A متناهی باشد، آنگاه B می تواند متناهی یا نامتناهی باشد

ج) اگر B متناهی باشد، آنگاه A نیز متناهی است.

(فعالیت و تقریبی ۷)

۱) اگر A دارای یک زیر مجموعه متناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

۲) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی است یا نامتناهی ؟

فصل ۱ درس ۲: متمم یک مجموعه

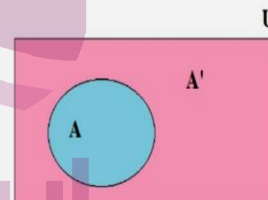
اهداف درس ۲:

- معرفی مفهوم مجموعه مرجع
- معرفی مفهوم متمم یک مجموعه
- آشنایی با مفهوم دو مجموعه جدا از هم

مجموعه مرجع و متمم مجموعه:

* در هر بحث، مجموعه ای را که همه مجموعه های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می نامیم و آن را با U نشان می دهیم

* هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه $U - A$ را متمم A می نامیم و آن را با A' نشان می دهیم به عبارتی A' عضوهایی از U است که در A نیستند



* با توجه به شکل بالا:

مرجع	تهی	متمم
$A \cup U = U$	$A \cup \emptyset = A$	$A \cup A' = U$
$A \cap U = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cap A' = \emptyset$
$A - U = \emptyset$	$A - \emptyset = A$	$A - A' = A$
$U - A = A'$	$\emptyset - A = \emptyset$	$A' - A = A'$

* متمم مجموعه مرجع، تهی است و متمم تهی، مجموعه مرجع است.

$$U \quad \emptyset' = U \quad U \quad U' = \emptyset$$

* برای پیدا کردن متمم بازه :

۱. بهترین راه پیدا کردن متمم بازه، کشیدن محور است. پس ز رسم بازه، هر قسمتی از محور که باقی مانده است، متمم بازه است.

۲. مجموعه مرجع همیشه $\mathbb{R}$ است.

۳. هر سمت بازه که بسته باشد، متمم آن باز است و هر سمت بازه که باز باشد، متمم آن بسته است

(فعالیت و کاربرد کلاسی و تمرین ص ۸ و ۹ و ۱۰)

(۱) اگر $\mathbb{Z}$ مجموعه مرجع و $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$ متمم A را مشخص کنید.

✓ حل:

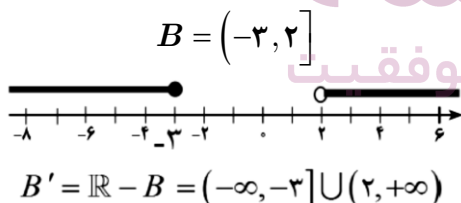
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$A' = \mathbb{Z} - A = \{\dots, -4, -3, 3, 4, \dots\}$$

(۲) اگر $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد متمم

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$ را روی محور نشان دهید.

✓ حل:

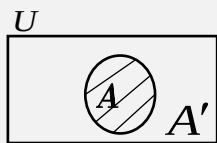


(۳) اگر $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد متمم $B = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ را روی محور نشان دهید.

(۴) الف) اگر $\mathbb{Z}$ را به عنوان مجموعه مرجع بگیریم آن گاه $\mathbb{N}'$ را نوشتن اعضا مشخص کنید.

* متمم متمم هر مجموعه برابر با خود آن مجموعه است.

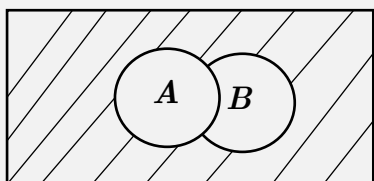
$$(A')' = A$$



* متمم اجتماع دو مجموعه، برابر با اشتراک متمم های آن دو مجموعه است.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

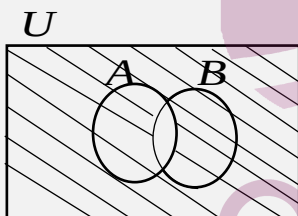
$$(A \cup B)' = U - (A \cup B)$$



* متمم اشتراک دو مجموعه برابر با اجتماع متمم های آن دو مجموعه است.

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

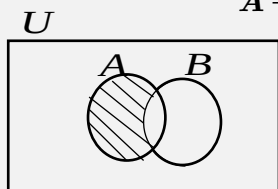
$$(A \cap B)' = U - (A \cap B)$$



* تفاضل دو مجموعه برابر است با مجموعه اول به جز اشتراک دو مجموعه

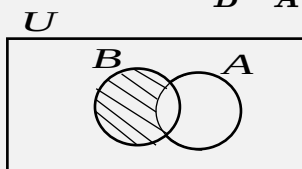
$$A - B = A - (A \cap B)$$

$$A - B = A \cap B'$$



$$B - A = B - (A \cap B)$$

$$B - A = B \cap A'$$



(۵) اگر $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع بگیریم آن گاه $\mathbb{N}'$ را روی محور مشخص کنید.

(۶) اگر $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد متمم $D = (-\infty, 1]$ را روی محور نشان دهید.

(۷) اگر مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) را مرجع بگیریم برای هر حالت مثالی بنویسید.

الف) A نا متناهی و A' متناهی

ب) A نا متناهی و A' نا متناهی

پ) مجموعه ای متناهی مانند A مثال بنویسید. A' را به دست آورید آنگاه A' متناهی است یا نا متناهی؟

* هرگاه مجموعه مرجع U و $A \subseteq B$ باشد، A و B را متمم کنیم جای A' و B' در زیرمجموعه عوض می شود:

$$A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A'$$

(گاردنر کلاسی هی ۱۰)

اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ باشد. بین A' و B' چه رابطه ای برقرار است.

(گاردو کلاسی ص ۹)

اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$ هر یک از مجموعه های زیر را با اعضا بنویسید.

$$(A')' = \text{الف}$$

$$(A \cup B)' = \text{ب}$$

$$A' \cup B' = \text{پ}$$

$$A \cap B' = \text{ت}$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه:

* تعداد عضوهای هر مجموعه متناهی مانند A را با $n(A)$ نشان می دهیم.

مثال:

اگر $A = \{2, 4, 6, 7\}$ باشد، داریم:

$$n(A) = 4$$

* اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشد داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(تمرین ۳ ص ۱۳)

اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$

آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

✓ حل:

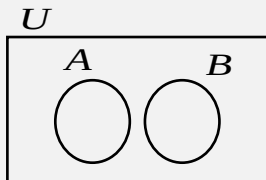
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$30 = 15 + n(B) - 5$$

$$n(B) = 30 - 15 + 5 = 20$$

دو مجموعه جدا از هم:

* به دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشد دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می گوئیم.



$$A \cap B = \emptyset$$

* اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه و جدا از هم باشند، داریم:

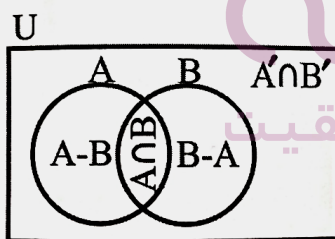
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

مثال:

دو مجموعه $A = \{a, b\}$ و $B = \{c, d\}$ جدا از هم هستند

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 \quad \text{و داریم:}$$

حل مسائل به کمک مجموعه:



* عضوهایی که حداقل (دست کم) در یکی از دو مجموعه های

A یا B هستند $A \cup B$

* عضوهایی که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B

هستند. $A \cap B$

* عضوهایی که فقط در مجموعه A هستند.

$$A - B = A - (A \cap B)$$

(گارد در کلاسی ص ۱۲)

در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

*عضوهایی که فقط در مجموعه B هستند.

$$B - A = B - (A \cap B)$$

*عضوهایی که دقیقاً در یکی از مجموعه های A و B هستند.

$$(A - B) \cup (B - A)$$

*عضوهایی که در هیچ یک از مجموعه های A و B نیستند.

$$(A \cup B)' = U - (A \cup B)$$

*عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B نیستند.

$$(A \cap B)' = U - (A \cap B) = A' \cup B'$$

(تمرین ۴ ص ۱۳)

اگر A, B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که، $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ ، مطلوب است :

(تمرین ۵ ص ۱۳)

در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

الف) تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

الف) $n(A \cup B) =$

ب) $n(A \cap B') =$

پ) $n(A' \cap B) =$

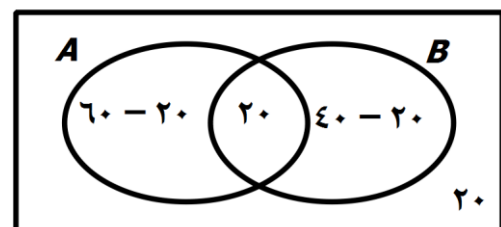
ت) $n(A' \cap B') =$

✓ حل:

$$n(A \cup B) = \cancel{n(A)} + \cancel{n(B)} - \cancel{n(A \cap B)} = 80$$

۶۰ ۴۰ ۲۰

$$U = 100$$



الف) ۸۰

ب) ۴۰

پ) ۲۰

ت) ۲۰

فصل ۱ درس ۳: الگو و دنباله

اهداف درس ۳:

- آشنایی با منغیرهای اندیس دار
- توانایی تعمیم در الگوهای مختلف
- توانایی تشخیص الگوهای خطی و غیرخطی
- آشنایی با مفهوم دنباله اعداد
- ارتقای تفکر تصویری
- مرتبط کردن الگوهای هندسی و عددی به یکدیگر

الگو:

الگو: یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و اعداد هستند.

* برای به دست آوردن جمله n ام یا جمله عمومی الگو، باید بین شماره جمله و خود جمله رابطه ای پیدا کرد.

* الگوها به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می شوند.

الگو خطی:

* الگوی خطی: الگوهایی که جمله عمومی آن ها به صورت $t_n = an + b$ است. الگوی خطی می نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

مثال:

کدام یک از رابطه های زیر جمله عمومی یک الگو خطی را مشخص می کند؟

(الف) $a_n = n^2 + 1$ (ب) $b_n = 3n + 1$

حل:

می دانیم جمله n ام یک الگو خطی به صورت $t_n = an + b$ است. بنابراین:

(الف) الگو خطی نیست (ب) الگو خطی است

* اختلاف دو جمله متوالی در الگوهای خطی، عددی ثابت است. که این عدد همان شیب خط راست در معادله خط $(y = ax + b)$ است.

* ضریب n در عبارت $t_n = an + b$ همان اختلاف دو جمله متوالی در الگوهای خطی است.

(مثال ص ۱۶)

جمله ی عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n = -4n + 15$ می باشد. اختلاف دو جمله ی متوالی این الگو کدام است؟

حل:

اختلاف دو جمله ی متوالی ضریب n (-4) است.

* برای نوشتن جمله عمومی الگو، نیاز به مقدار a و b داریم. برای به دست آوردن a می توانیم از طریق حل دستگاه یا در صورت نیاز از فرمول زیر استفاده کنیم.

اختلاف جملات

اختلاف شماره جملات

مثال ص ۱۶:

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می باشند. جمله ی عمومی الگو را بیابید.

(۲) الگو اعداد مثلثی



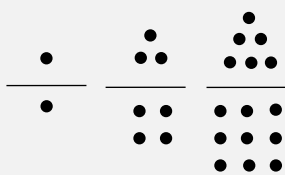
و ✓ و ۳ و ۱ اعداد مثلثی می گویند .

✓ روش یافتن اعداد مثلثی :

(شماره شکل + ۱) شماره شکل

۲

(۳) در برخی از الگوها می توان از ترکیب الگو مربعی و مثلثی استفاده کرد. مثل:



$$t_n = n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

(فعالیت ص ۱۷)

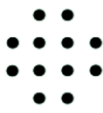
۱- شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.

شکل (۱)



۵ نقطه

شکل (۲)



۱۲ نقطه

شکل (۳)



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
t _n : تعداد نقطه ها	۵	۱۲	...	...	...
رابطه بین n و t _n	t _۱ = ۵	t _۲ =	...	...	...

۲- آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

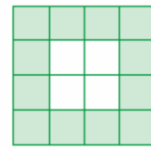
۳- جمله عمومی الگو را بیابید.

۴- شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

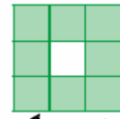
(گارد و گلاسی ص ۱۷)

۱- شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.

شکل (۳)



شکل (۲)



۸ مربع رنگی



۴ مربع رنگی

n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b _n : تعداد مربع های رنگی	۴	۸	...	...	...
رابطه بین n و b _n	b _۱ = ۴	b _۲ =	...	...	...

۲- آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

۳- جمله عمومی الگو را بیابید.

۴- شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

۵- در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است

الگو غیر خطی:

* الگو غیر خطی: به الگوهایی که خطی نیستند غیر خطی می گوئیم.

* معرفی چند الگو غیر خطی:

(۱) الگو اعداد مربعی



و ✓ و ۴ و ۱ اعداد مربعی می گویند .

✓ روش یافتن اعداد مربعی : شماره شکل ضربدر خودش

دنباله:

* دنباله: هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می گیرند یک دنباله می گوییم. این اعداد جملات دنباله نامیده می شوند.
مثل ۱، ۲، ۳، ۴ که دنباله اعداد طبیعی می باشند.

* جملات دنباله ممکن است دارای الگو یا فاقد الگو باشند.

مثال:

۱) رشته اعداد $2, 4, 6, \dots$ یک دنباله با الگوی $t_n = 2n$ می باشد.

۲) رشته اعداد $1, 2, 10, 13, \dots$ یک دنباله فاقد الگو است.

* دنباله ای که هر جمله آن نسبت به جمله قبل کمتر نباشد (غیر از جمله اول) یک دنباله صعودی است. منظور از کم تر نباشد این است که یا مساوی است یا بیشتر.

* دنباله ای که هر جمله آن نسبت به جمله قبل بیشتر نباشد (غیر از جمله اول) یک دنباله نزولی است. منظور از بیشتر نباشد این است که یا مساوی است یا کم تر.

مثال:

دنباله افزایشی $\Rightarrow 1, 3, 5, 7$

دنباله نه کاهشی نه افزایشی $\Rightarrow -1, 3, -4, 9$

دنباله کاهشی $\Rightarrow 2, -1, -5, 7$

(تمرین ۳ و ۴ ص ۲۰)

۳) در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

$$1) b_n = 3n + 1$$

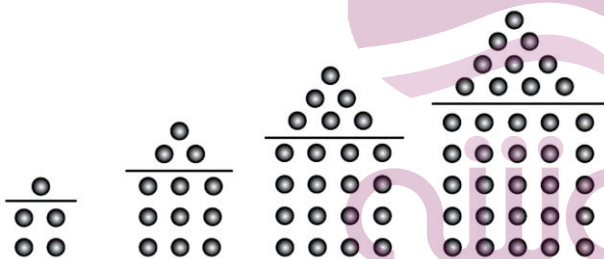
$$2) d_n = n^2 + n$$

۴) برای هر یک از دنباله های درجه دو زیر جمله عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

✓ حل:



$$t_n = (n+1)^2 + n \frac{(n+1)}{2}$$

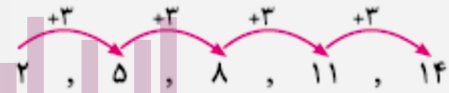
فصل ۱ درس ۴: دنباله های حسابی و هندسی

اهداف درس ۴:

- تشخیص و شناسایی دنباله های حسابی
- به دست آوردن جمله عمومی دنباله حسابی
- تشخیص ارتباط بین الگوهای خطی و دنباله های حسابی
- آشنایی با دنباله هندسی
- به دست آوردن جمله عمومی دنباله هندسی
- یافتن نمونه هایی از دنباله های حساب و هندسی در برخی پدیده های دنباله ای واقعی

دنباله حسابی:

* دنباله حسابی دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید. یک دنباله حسابی نامیده می شود. که به آن عدد ثابت قدر نسبت دنباله می گویند و آن را با d نمایش می دهند.



* طبق تعریف، مثلاً دنباله ۸، ۵، ۳، ۱ یک دنباله حسابی نیست، زیرا تفاضل جمله دوم از جمله اول ۲ است ولی تفاضل جمله چهارم از جمله سوم ۳ است.

* جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت زیر است.

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

* برای نوشتن جمله عمومی یک دنباله حسابی باید جمله اول و قدر نسبت دنباله را داشته باشیم.

(تقریبی ص ۲۴)

از بین دنباله های زیر، دنباله های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله عمومی و بیست و یکم را بیابید.

الف) $۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, \dots$

ب) $۱, ۲, ۴, ۸, \dots$

پ) $\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, \dots$

ت) $۱۰, ۷, ۴, ۱, \dots$

ث) $\frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۵}, ۱, \dots$

ج) $۲, ۲, ۲, ۲, \dots$

(گاورگلاسی هی ۲۳)

الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.

ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.

پ) دنباله ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

(قهرپین آهی ۲۴)

الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

* اگر جمله m ام و n ام یک دنباله حسابی معلوم باشد، اختلاف مشترک را می توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

(قهرپین آهی ۲۴)

در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید

حل:

راه اول:

تفاضل

$$\begin{cases} t_3 = 20 \\ t_7 = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 20 \\ t_1 + 6d = 56 \end{cases} \Rightarrow 4d = 36 \Rightarrow \boxed{d=9}, \boxed{t_1=2}$$

دنباله $2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, \dots$

راه دوم:

$$d = \frac{t_7 - t_3}{7 - 3} = \frac{56 - 20}{4} = 9$$

$$t_3 = a + 2d = 20 \rightarrow a + 18 = 20 \Rightarrow a = 2$$

دنباله: $2, 11, 20, 29, \dots$

* درج یک واسطه حسابی بین دو عدد:

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، در

$$b = \frac{a + c}{2}$$

اینصورت:

(قهرپین آهی ۲۴)

الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

ب) واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

* درج چند واسطه حسابی بین دو عدد:

اگر بخواهیم بین a, b چند عدد (n) درج کنیم که تشکیل یک دنباله حسابی دهند مقدار d را از رابطه زیر می یابیم:

$$d = \frac{b - a}{n + 1}$$

(گاوردرگلاسی ص ۲۳)

سه عدد را به گونه ای میان اعداد ۶۲ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

دنباله هندسی:

* دنباله هندسی: دنباله که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست آید. یک دنباله هندسی نامیده می شود. به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می گویند و آن را با حرف r نمایش می دهند و جمله اول غیر صفر می باشد.

$$2, 6, 18, 54, \dots$$

$\xrightarrow{\times 3}$
 $\xrightarrow{\times 3}$
 $\xrightarrow{\times 3}$

* طبق تعریف، مثلاً دنباله ۱، ۲، ۴، ۶، ۱۰ یک دنباله هندسی نیست، زیرا حاصل تقسیم جمله دوم به جمله اول ۳ است. اما حاصل تقسیم جمله چهارم به جمله سوم برابر برابر ۲ است؛

* جمله n ام یک دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت r به صورت زیر است.

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

(گاوردرگلاسی ص ۲۶)

در دنباله های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) ۲، ۶، ۱۸، ۵۴، ...

ب) ۴، ۲، ۱، $\frac{1}{2}$ ، ...

(تقریبی ۱ و ۵ ص ۲۷)

۱- از بین موارد زیر، دنباله های هندسی را مشخص کنید و قدرنسبت آنها را بنویسید.

الف) ۷، ۲۸، ۱۱۲، ۴۴۸، ...

ب) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$

✓ حل:

$$\frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \neq \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \text{دنباله هندسی نیست}$$

پ) $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$

ت) ۵، ۵، ۵، ۵، ...

۵- حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید. ۲، ۴، ۸، ...

✓ حل:

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{1+2+3+\dots+20} = 2^{\frac{20(20+1)}{2}} = 2^{210}$$

* اگر جمله m ام و n ام یک دنباله هندسی معلوم باشد، نسبت مشترک را می توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

(گاردور کلاسی ص ۲۶)

۱- سه عدد را به گونه ای میان اعداد ۳ و ۴۸ قرار دهید که یک دنباله هندسی تشکیل دهند.

۲- جای خالی را طوری پر کنید که یک دنباله هندسی حاصل شود.

۴					۹۷۲
---	--	--	--	--	-----

(تمرین ۶ ص ۲۷)

جمله سوم یک دنباله هندسی ۱۲ و جمله ششم همین دنباله ۹۶ است. دنباله را مشخص کنید.

☑ حل:

راه اول:

$$\begin{cases} t_6 = 96 \\ t_3 = 12 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_6}{t_3} = \frac{96}{12} \Rightarrow \frac{t_1 r^5}{t_1 r^2} = 8 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$t_1 r^2 = 12 \Rightarrow t_1 (2)^2 = 12 \Rightarrow t_1 = 3$$

دنباله : $3, 6, \underset{t_3}{12}, 24, 48, \underset{t_6}{96}, 192, \dots$

راه دوم:

دنباله : $3, 6, \underset{t_3}{12}, 24, 48, \underset{t_6}{96}, 192, \dots$

* درج یک واسطه هندسی بین دو عدد:

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، در اینصورت:

$$b^2 = a \times c$$

(گاردور کلاسی ص ۲۶)

واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ چه عددی است؟

* درج چند واسطه حسابی بین دو عدد:

اگر بخواهیم بین a, b چند عدد (n) درج کنیم که تشکیل یک دنباله هندسی دهند مقدار r را از رابطه زیر می یابیم:

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

فصل دوم

مثلثات

❖ درس اول: نسبت های مثلثاتی

❖ درس دوم: دایره مثلثاتی

❖ درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

ایران نوشته
توشه ای برای موفقیت

بارم فصل ۲:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
۵	۱/۵	۲

فصل ۲ درس ۱: نسبت های مثلثاتی

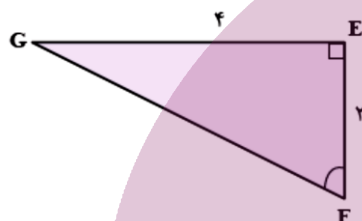
اهداف درس ۱:

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \rightarrow \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

(فعالیت ص ۳۱)

۱. نسبت های مثلثاتی زاویه F را بنویسید

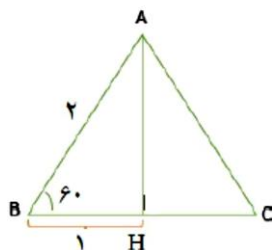


- آشنایی با نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده با استفاده از مثلث قائم الزاویه، از طریق محاسبه مستقیم.
- محاسبه تقریبی نسبت های مثلثاتی یک زاویه با استفاده از رسم آن به کمک خط کش و نقاله و تشکیل مثلث قائم الزاویه.
- ایجاد مهارت در استفاده از نسبت های مثلثاتی در حل مسئله مربوط در زندگی روزمره و کار با مقادیر تقریبی
- آشنایی با استفاده از ماشین حساب در محاسبه نسبت های مثلثاتی یک زاویه.
- آشنایی با روش محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه های
- درک رابطه بین نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم.
- درک این مفهوم که در مثلث های متشابه قائم الزاویه نسبت اضلاع ثابت است.

نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده با استفاده از مثلث قائم الزاویه

* در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

۲. با رسم یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲، نسبت های مثلثاتی زاویه 30° ، 60° را بنویسید و مقایسه کنید.

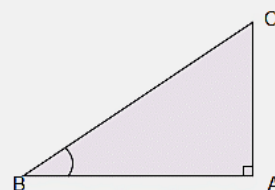


$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$$

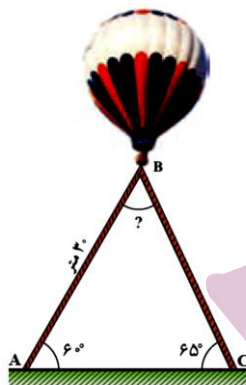
$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$



(گاردورگلاسی ص ۲۶)

بالنی را به هوا فرستاده ایم این بالن توسط دو طناب یکی به طول ۳۰ متر و با زاویه 60° و طناب دوم با زاویه 65° به زمین وصل شده است. طول طناب دوم را بیابید.



(مثال ص ۳۲)

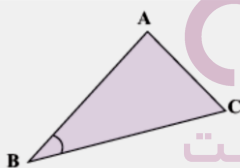
با رسم یک مربع به ضلع ۱ واحد و رسم یکی از قطر های آن، نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را حساب کنید.

*جدول مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مساحت مثلث بر حسب نسبت های مثلثاتی:

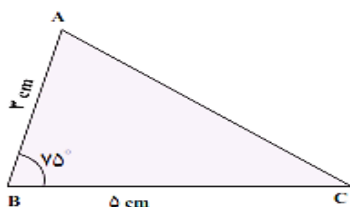
*مساحت هر مثلث را می توان با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها به دست آورد.



$$\Delta ABC \text{ مساحت} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B.$$

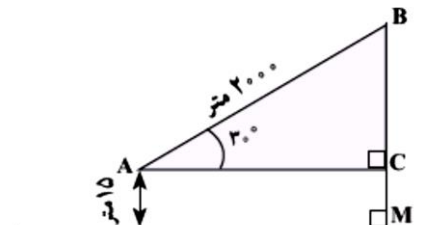
(تقریب ص ۳۵)

مساحت مثلث زیر را بیابید. ($\sin 75^\circ \approx 0.96$)



(مثال ص ۳۳)

یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه 30° پرتاب می شود. اگر موشک با همین زاویه ۲۰۰۰ متر طی کند موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

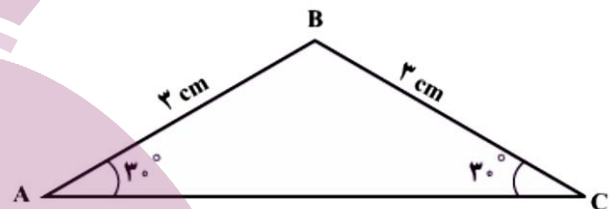


*نکته:

۱. ضلع روبرو به زاویه 30° ، $\frac{1}{2}$ وتر است۲. ضلع روبرو به زاویه 45° ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است۳. ضلع روبرو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است

(تمرین ۵۵ ص ۳۵)

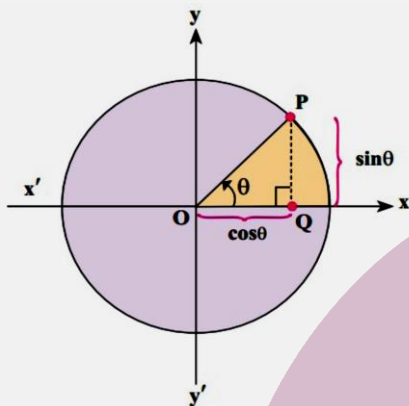
مساحت مثلث شکل زیر را محاسبه کنید.



فصل ۲ درس ۲: دایره مثلثاتی

محور $\sin \theta, \cos \theta$:

* از نقطه P عمودی بر محور طول ها رسم می کنیم سپس
نسبتهای مثلثاتی زاویه θ را محاسبه می کنیم:



$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP} = y$$

$$\cos \theta = \frac{OQ}{OP} = x$$

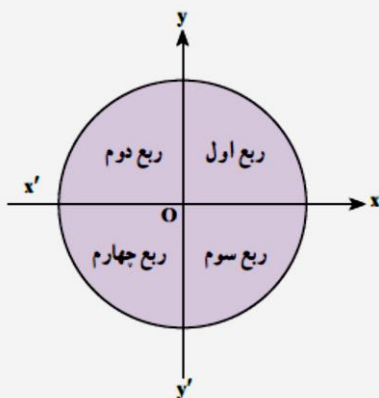
$$\tan \theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{x}{y}$$

* محور طول ها را محور کسینوس ها و محور عرض ها را محور
سینوس ها می نامیم:

$$y = \sin \theta, \quad x = \cos \theta$$

* با توجه به جهت دایره مثلثاتی داریم:



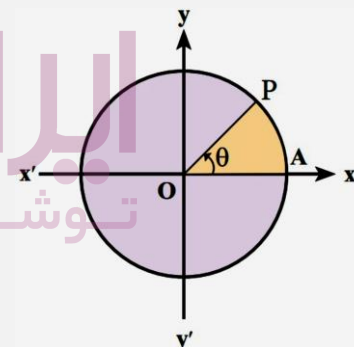
* زاویه های $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ زوایای مرزی هستند و
آنها را در هیچ کدام از ناحیه های فوق در نظر نمی گیریم.

اهداف درس ۲:

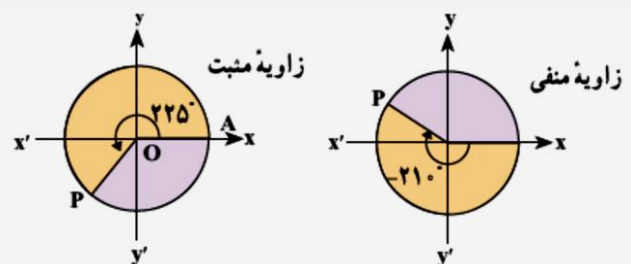
- آشنایی با دایره مثلثاتی.
- آشنایی با زاویه های مثبت و منفی در بازه $0^\circ - 360^\circ$.
- محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه های منفرجه به کمک دایره مثلثاتی.
- محاسبه سایر نسبت های مثلثاتی یک زاویه با داشتن اندازه سینوس یا کسینوس آن زاویه با استفاده از دایره مثلثاتی.
- ایجاد مهارت در استفاده از دایره مثلثاتی در تعیین محل یک زاویه مشخص در نواحی چهارگانه.
- آشنایی با رابطه بین شیب خط با تانژانت زاویه.

دایره مثلثاتی:

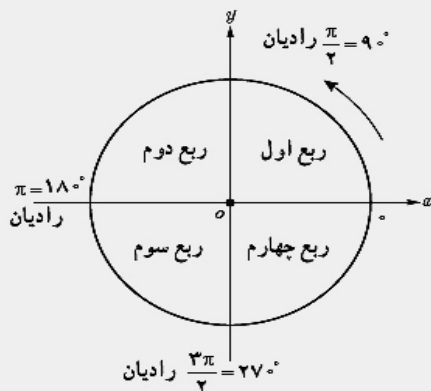
* دایره ای است به شعاع واحد و به مرکز مبدا مختصات که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه های ساعت است. به این جهت، جهت مثلثاتی می گوئیم.



* در شکل زیر دوزاویه مثبت و منفی در دایره مثلثاتی دیده می شود.



علامت نسبت های مثلثاتی در ربع های دایره و قانون هسک:



همه +	سینوس +	تانژانت کتانژانت +	کسینوس +
↓	↓	↓	↓
ه	س	ت	ک
↓	↓	↓	↓
ربع ۱	ربع ۲	ربع ۳	ربع ۴

* برای هر زاویه دلخواه θ داریم:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{ و } -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

(تقریبی ۵ ص ۴۰)

اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ آن گاه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

(تقریبی ۲ ص ۴۰)

اگر $\sin \alpha = \frac{-1}{2}$ و α در ناحیه سوم باشد نسبت های مثلثاتی زاویه α را محاسبه کنید.

(تقریبی ۱ ص ۴۰)

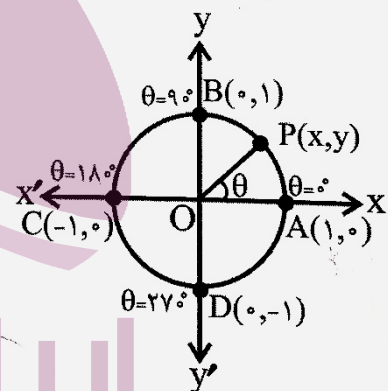
هر یک از زاویه های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدامیک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد.

۱) $+ 225^\circ$

۲) $- 135^\circ$

نسبت های مثلثاتی زوایای مرزی: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$

* دایره مثلثاتی مقادیر نسبت های مثلثاتی زوایای مرزی:

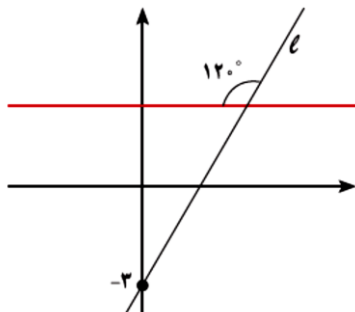


* جدول مقادیر نسبت های مثلثاتی زوایای مرزی:

α زاویه	0°	90°	180°	270°	360°
sin	۰	۱	۰	۱	۰
cos	۱	۰	۱		۱
tan	۰	ت	۰	ت	۰
cot	ت	۰	ت	۰	ت

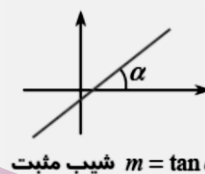
رابطه شیب خط با تانژانت زاویه:

۹- با توجه به شکل زیر، معادله خط را به دست آورید.

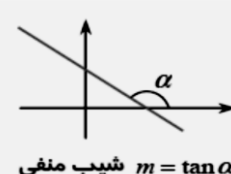


* شیب، تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد. که اگر خط، زاویه تند بسازد، شیب مثبت است و اگر زاویه باز بسازد شیب منفی است.

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$



$$m = \tan \alpha \text{ شیب مثبت}$$



$$m = \tan \alpha \text{ شیب منفی}$$

* برای به دست آوردن شیب خطی که از دو نقطه می گذرد از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(گاورگلای سی ۴۰)

معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x زاویه 30° بسازد و از نقطه $(1, 0)$ بگذرد.

✓ حل:

$$\text{شیب خط} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(تمرین ۸ و ۹ ص ۴۱)

۸- معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x زاویه 45° بسازد و از نقطه $(0, 2)$ بگذرد.

فصل ۲ درس ۳: روابط بین نسبت های مثلثاتی

(تمرین ۱ و ۲ ص ۴۵)

اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، سایر نسبت های مثلثاتی 24° درجه را پیدا کنید.

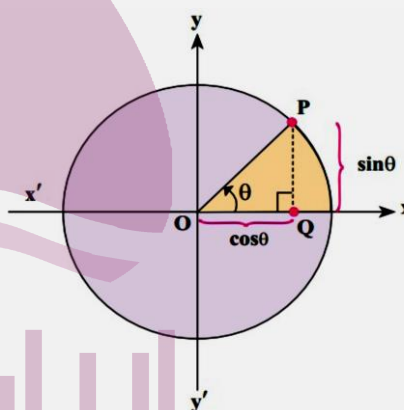
اهداف درس ۳:

- آشنایی با روابط بین نسبت های مثلثاتی
- کسب مهارت در محاسبه نسبت های مثلثاتی یک زاویه
- توانایی استفاده از روابط بین نسبت های مثلثاتی در تعیین درستی یا نادرستی یک رابطه مثلثاتی

روابط بین نسبت های مثلثاتی

اگر $\cos \alpha = \frac{-3}{5}$ و α در ناحیه سوم باشد نسبت های مثلثاتی زاویه α را محاسبه کنید.

* با توجه به دایره مثلثاتی و رابطه فیثاغورس داریم:



$$1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2) \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \\ 3) \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4) \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ 5) \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned} \rightarrow 6) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$7) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$8) 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

اتحاد مثلثاتی:

* هر یک از روابط بین نسبت های مثلثاتی را که به ازای هر α همواره برقرار است، اتحاد مثلثاتی می نامیم

* هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم.

(مثال ص ۴۴)

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید

$$\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \tan \alpha \right) (1 - \sin \alpha) = \cos \alpha$$

✓ حل:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) (1 - \sin \theta) &= \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta) \\ &= \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) (1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta \end{aligned}$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad (\text{ت})$$

(تمرین ۶۶)

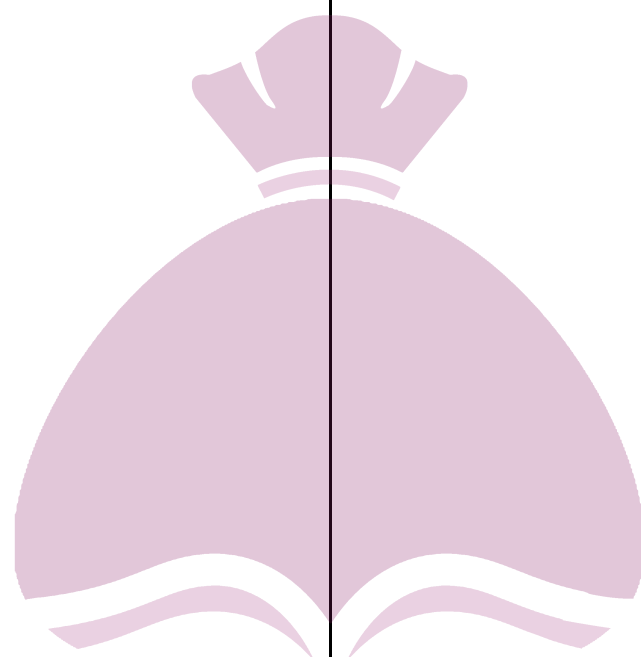
با فرض با معنی بودن کسرها درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha \quad (\text{پ})$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad (\text{ث})$$



ایران نوننه
توشه ای برای موفقیت

فصل سوم

توان های گویا و عبارت های جبری

❖ درس اول: ریشه و توان

❖ درس دوم: ریشه n ام

❖ درس سوم: توان های گویا

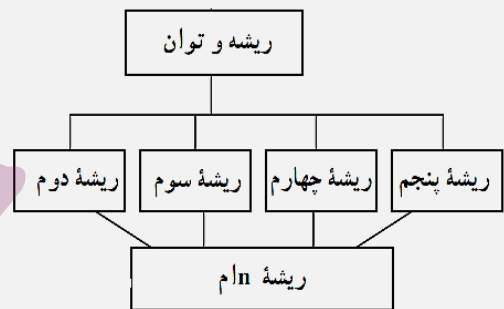
❖ درس چهارم: عبارت های جبری

بارم فصل ۳:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریوردی
۵	۲	۲/۵

فصل ۳ درس ۱ و ۲: ریشه و توان و ریشه n ام

ریشه و توان:



* ریشه و توان رابطه ای دو سویه با هم دارند.

$$b^{n \geq 2} = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b$$

مثال:

$$(-3)^3 = -27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

یعنی -27 توان سوم -3 می باشد، با ریشه گیری سوم از -27 به عدد -3 برمیگردیم

نکات ریشه n ام:

* اعداد مثبت، دو ریشه زوج دارند

$$1) b^{n \text{ زوج}} = a^{a \geq 0} \Rightarrow \pm \sqrt[n]{a}$$

مثال: ریشه دوم عدد 27 ، برابر $\pm \sqrt{27}$ می باشد

* اعداد مثبت، یک ریشه فرد دارند

$$2) b^{n \text{ فرد}} = a^{a \geq 0} \Rightarrow \sqrt[n]{a}$$

مثال: ریشه سوم عدد 27 ، برابر 3 می باشد

* اعداد منفی، ریشه دوم ندارند

$$3) b^{n \text{ زوج}} = a^{a < 0} \Rightarrow \times$$

مثال: عدد -27 ریشه دوم ندارد.

* اعداد منفی، یک ریشه فرد دارند

$$4) b^{n \text{ فرد}} = a^{a < 0} \Rightarrow \sqrt[n]{a}$$

مثال: ریشه سوم عدد -27 ، برابر -3 می باشد

(مثال)

۱) کامل کنید

الف) هر عدد مثبت دارای ریشه چهارم است که

یکدیگرند. عددهای منفی ریشه چهارم ندارند.

ب) هر عدد مثبت یا منفی دارای ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن است.

ج) اعداد 3 و ریشه های چهارم عدد می باشند.

د) ریشه پنجم اعداد با خودشان برابر است.

ه) اگر $\sqrt[4]{16} = a$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^2 + 5$ برابر است.

۲) ریشه های چهارم و پنجم و هفتم عدد 64 ، -64 را بیابید.

ساده کردن عبارت $\sqrt[n]{a^n}$:

* با توجه به $\sqrt{a^2} = |a|$ ، $\sqrt[3]{a^3} = a$ داریم:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج و } n \geq 2 \\ a & n \text{ فرد و } n \geq 2 \end{cases}$$

(گاردرگلاسی و فعالیت ص ۵۱ و ۵۵ و ۵۶)

محاسبه کنید

$$\sqrt{(-2)^2} =$$

$$\sqrt[4]{(-2)^4} =$$

$$\sqrt[3]{2^3} =$$

$$\sqrt[4]{2^4} =$$

$$(4/1)^2 = 16/81$$

$$(4/2)^2 = 18/49$$

$$(4/3)^2 = 19/36$$

بنابراین:

$$\sqrt{19} \approx 4/2$$

* هرچه این تقریب را بیشتر کنیم عدد به دست آمده دقیق تر است.

(تمرین اسی ۵۱)

برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16}$$

$$\sqrt{-90}$$

$$-\sqrt{20}$$

ایران نوننه

تروش برای موفقیت

(گارد رگلاسی ۴ ص ۵۰)

زیر رادیکال چه عددی بگذاریم تا نامساوی برقرار باشد؟

$$9 < \sqrt{\quad} < 10$$

$$(\sqrt{-8})^2 =$$

$$(\sqrt[3]{8})^3 =$$

$$\sqrt[4]{625} =$$

$$\sqrt[3]{128} =$$

$$\sqrt[5]{256} =$$

$$\sqrt[6]{0} =$$

$$-\sqrt[4]{0/0016} =$$

$$\sqrt[5]{-0/00032} =$$

$$\sqrt[4]{3^{-4}} =$$

$$(\sqrt[4]{-16})^4 =$$

$$(\sqrt[4]{16})^4 =$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} =$$

$$\sqrt{-128} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} =$$

$$\sqrt{-1} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} =$$

$$\sqrt[5]{2^{-5}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{128}} =$$

مقدار تقریبی و دقیق $\sqrt[n]{a}$:* هرگاه عبارت $\sqrt[n]{a}$ را نتوانیم به صورت $a = b^n$ بنویسیمبنابراین مقدار دقیق $\sqrt[n]{a}$ قابل محاسبه نیست و از طریق زیر

یا ماشین حساب مقدار تقریبی آن را می یابیم:

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt{19}$ را به دست آورید.

حل:

$$\sqrt[4]{16} < \sqrt{19} < \sqrt[5]{25}$$

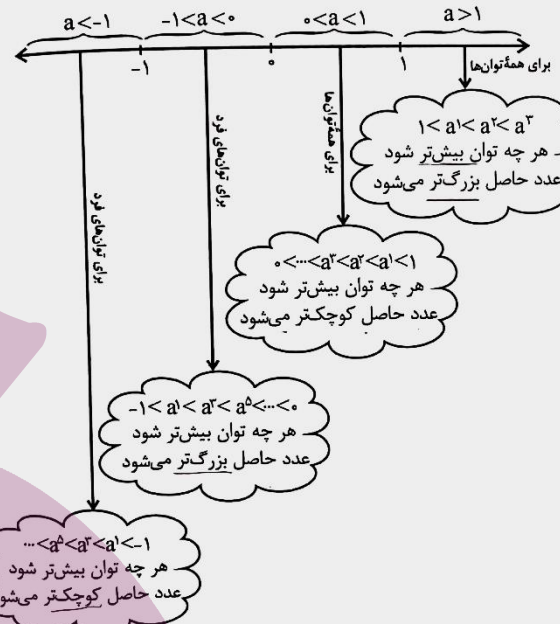
۴

۵

چون ۱۹ به ۱۶ نزدیکتر است پس اعداد اعشاری نزدیک به ۴ را انتخاب می کنیم:

مقایسه توان های یک عدد:

*مقایسه توان های یک عدد:



(تمرین صی ۵۷ و ۵۸)

مقایسه کنید.

$$(-1/5)^5 \square (-1/5)^3$$

$$(-1/5)^5 \square (-1/5)^3$$

$$(-2)^5 \square (-2)^4$$

$$a^5 \square a^3 \quad 0 < a < 1$$

$$4^2 \square 4^3$$

$$a^2 \square a^3 \quad a > 1 \quad (0/5)^2 \square (0/5)^3$$

$$(-0/5)^2 \square (-0/5)^3$$

$$(-2)^2 \square (-2)^3$$

$$(-0/5)^3 \square (-0/5)^5$$

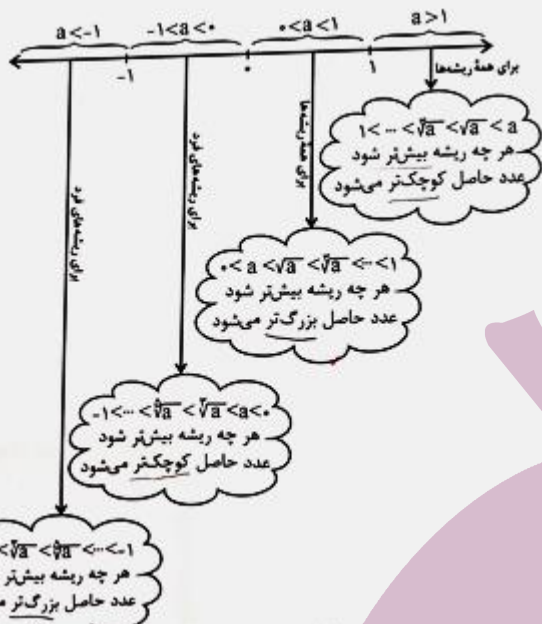
$$(-2)^3 \square (-2)^5$$

$$(0/5)^4 \square (-0/5)^2$$

$$(-2)^4 \square (-2)^2$$

مقایسه ریشه های یک عدد:

*مقایسه ریشه های یک عدد:



(تمرین صی ۵۷ و ۵۸)

مقایسه کنید.

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a} \quad 0 < a < 1$$

$$\sqrt{4} \square \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a} \quad a > 1$$

$$\sqrt{0/5} \square \sqrt[3]{0/5}$$

$$\sqrt[5]{0/5} \square 0/5$$

(تمرین ۴ صی ۵۲)

الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$ ؛ چه اعدادی می تواند باشد؟

ب) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$ ؛ چه اعدادی می تواند باشد؟

فصل ۳ درس ۳: توان های گویا

توان های گویا:

$$۱) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (n \geq 2, a > 0)$$

$$۲) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (m, n \in \mathbb{N}, a > 0)$$

$$۳) a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

* تمام قوانین توان اعداد صحیح خواندیم برای توان های گویا و حقیقی نیز برقرار است.

* هر عدد رادیکالی را نمی توان در قالب عددی با توان گویا نمایش داد. به عنوان مثال نمی توان $\sqrt[5]{-12}$ را به صورت $(-12)^{\frac{1}{5}}$ نمایش داد.

$$۴) \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{k}}} \quad (m, n, k \in \mathbb{N}, a > 0)$$

$$۵) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (m, n \in \mathbb{N}, a > 0)$$

(تمرین و گارد در کلاسی ص ۶۱)

عبارت های توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

$$۱۶^{\frac{1}{2}} =$$

$$۴^{\frac{2}{7}} =$$

$$۳۲^{-\frac{1}{5}} =$$

$$۳۲^{\frac{2}{5}} =$$

$$۱۲۵^{-\frac{2}{3}} =$$

$$۳^{\frac{1}{2}} \times ۳^{\frac{2}{3}} =$$

$$\left(۴^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} =$$

$$(۴)^{\frac{2}{3}} =$$

$$\sqrt[3]{۳^2} =$$

$$\sqrt[5]{۱۹} =$$

$$\sqrt[5]{۶۴} =$$

حساب کنید

$$\sqrt{\sqrt{5}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{۶۴}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{۸۱}} =$$

$$\frac{۶۴^{\frac{1}{2}}}{۶۴^{\frac{1}{3}}}$$

$$\sqrt[3]{a^4} =$$

$$\sqrt[5]{a^2} =$$

فصل ۳ درس ۴: عبارت های جبری

اتحاد های جبری:

و) $(x - 2)^2 =$

و) $(2x + 1)^2 =$

ز) $(x - 4)(x + 4) =$

ح) $(x + 2)(x + 3) =$

کار برد اتحاد ها:

- ۱) محاسبه سریع ضرب دو پرانتز یا یک پرانتز به توان ۲ یا ۳
۲) تجزیه چند جمله ای ها

(تمرین ۳ ص ۶۷)

با استفاده از اتحاد ها، حاصل ضرب های زیر را به دست آورید.
الف) $16 \times 14 =$

ب) $105^2 =$

ج) $9999^2 =$

د) $105^3 =$

۱) اتحاد مربع دو جمله ای:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

۲) اتحاد مربع سه جمله ای:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

۳) اتحاد مزدوج:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

۴) اتحاد جمله مشترک:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

۵) اتحاد مکعب مجموع:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

۶) اتحاد مجموع یا تفاضل مکعبات دو جمله (چاق و لاغر):

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

(مثال)

با استفاده از اتحاد ها حاصل عبارت را بدست آورید.

الف) $(2a + 1)^2 =$

ب) $(4x + 2)(16x^2 - 8x + 4) =$

ج) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) =$

د) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) =$

$$۱) x^6 - y^6 =$$

$$۲) x^6 - y^6 =$$

✓ حل:

$$x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$۳) 8a^2 + 27 =$$

$$۴) a^2b^6 - 8 =$$

۳) روش دسته بندی

* برخی عبارات عیناً مانند اتحادها نیستند، لکن با اندک تأمل و تفکری می توان از اتحادها برای تجزیه آنها استفاده کرد

(مثال ۱ و ۲ ص ۶۳)

تجزیه کنید

$$۱) 2x^3 + 3x + 1 =$$

✓ حل:

روش اول:

$$2x^3 + 3x + 1 = x^3 + 2x + 1 + x^2 + x$$

$$= (x + 1)^2 + x(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x + 1 + x) = (x + 1)(2x + 1)$$

روش دوم: معروف به روش A

$$A = 2x^3 + 3x + 1 \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{طرفین را در ضریب } x^2} 2A = 4x^3 + 3 \times 2x + 2$$

↓
جمع دو عدد

$$\rightarrow 2A = (2x + 1)(2x + 2)$$

$$\xrightarrow[\text{از ۲ فاکتور می گیریم}]{\text{طرفین را بر ۲}} 2A = (2x + 1)2(x + 1)$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم}]{\text{طرفین را بر ۲}} A = (2x + 1)(x + 1)$$

* اگر بتوانیم یک چندجمله ای را به صورت ضرب چند پرانتز بنویسیم، گوییم عبارت را به عامل های آن تجزیه کرده ایم.
* برای تجزیه از روش های زیر استفاده می کنیم:

۱) فاکتورگیری

۲) اتحادها

۳) دسته بندی

۱) روش فاکتورگیری

* در فاکتورگیری عامل مشترک با توان کمتر را به عنوان فاکتور در نظر می گیریم و بقیه را بر فاکتور تقسیم می کنیم و در پرانتز دیگری می نویسیم.

(مثال)

عبارت $2x^2 - 8x$ تجزیه کنید.

✓ حل:

$$2x^2 - 8x = 2x(x - 4)$$

۲) روش اتحادها

* اگر دو جمله داشتیم از اتحاد مزدوج یا چاق و لاغر کمک می گیریم.

* اگر سه جمله داشتیم از اتحاد مربع دو جمله ای یا جمله مشترک کمک می گیریم.

* اگر چهار جمله داشتیم از اتحاد مکعب کمک می گیریم.

(گارد رگلاسی و تعرینی ص ۶۷ و ۶۸)

تجزیه کنید

$$۱) x^2 + 1 =$$

$$۲) x^2 - 8 =$$

$$۳) x^2 - 125 =$$

$$۴) x^6 - 1 =$$

✓ حل:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^3 - 125 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$$

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) =$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

(فعالیت و تمرین و کاربرد کلاسی ص ۴۶ و ۴۷ و ۴۸)

۱) کدام یک از عبارت های زیر گویا هستند؟

ب) $\frac{x^3-1}{x^3+1}$

الف) $\frac{3x-\sqrt{7}}{x^2}$

ت) $\sqrt[3]{x^2}+x-1$

پ) $\sqrt[3]{x}-1$

۲) عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی شود؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

۳) صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید

الف) $\frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}$

ب) $\frac{x^3-1}{(x-1)^3}$

پ) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

ت) $\frac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y}$

۳) حاصل عبارت های زیر را به دست آورید

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$$

$$2) a^2 - 2ab + a^2b - 2b^2 =$$

شماره های یک عبارت:

* مضرب در عبارت های جبری همانند مضرب در حساب اعداد است. وقتی عبارتی را به عبارت های با درجه کوچک تر تجزیه می کنیم، گوییم آن عبارت مضرب عبارت های به دست آمده می باشد.

* هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک شمارنده عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می نامیم.

* هر یک از عبارت های $(a-b)(a+b)$ را یک شمارنده عبارت $a^2 - b^2$ و عبارت $a^2 - b^2$ را مضرب هر یک از این عبارت ها می نامیم.

(فعالیت ص ۴۶)

دو عبارت بنویسید که $(a-b)$ شمارنده هر یک از آنها باشد.

عبارت گویا:

* به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد.

* یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می شود، تعریف نمی گردد.

* هنگام ساده کردن هر عبارت گویا، صورت و مخرج را از طریق تجزیه به صورت حاصلضرب دو عبارت جبری می نویسیم و عبارت مشترک را در صورت و مخرج پیدا می کنیم و حذف می کنیم

* جمع و تفریق عبارت های گویا مشابه جمع و تفریق عددهای گویاست یعنی مخرج مشترک می گیریم