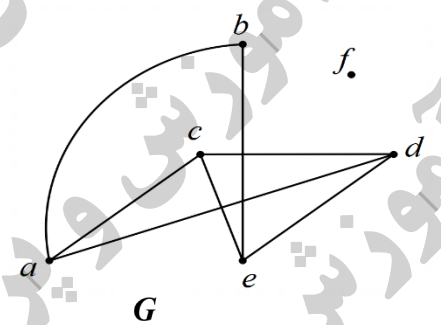
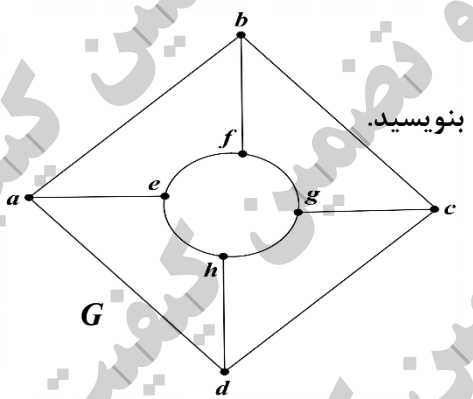
باسمه‌تعالی

سؤالات آزمون نهایی درس: **ریاضیات گسسته – ۱۲۰۷۱**	پایه: **دوازدهم**	رشته: **ریاضی وفیزیک**	تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۰/۱۰**
تعداد صفحه: **۲**	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**	ساعت شروع: **۱۰:۳۰ به وقت تهران**	نام و نام‌خانوادگی:
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران و داوطلبان آزاد (داخل و خارج از کشور) - **دی ۱۴۰۴**			مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش Azmoon.medu.ir

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) اگر n حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $۴n+۱$ مربع کامل است. ب) اگر برای هر سه مجموعهٔ دلخواه A ، B و C داشته باشیم $A\cap B = A\cap C$ آنگاه $B=C$ پ) اگر $a\mid b$ آنگاه $\lvert a\rvert = [a,b]$ (کروشه نمادِ ک.م.م است.) ت) تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۳ عضوی به مجموعه‌ای ۵ عضوی برابر ۱۰ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب، کامل کنید. الف) حاصل $(۵,۰-)$ برابر ..... است.(پرانتز نمادِ ب.م.م است.) ب) باقی‌ماندهٔ تقسیمِ ۴۳- بر ۸ برابر ..... است. پ) عدد احاطه‌گری گراف $P_{۱۰}$ برابر ..... است.	۰/۷۵
۳	با برهان خلف ثابت کنید اگر α و β دو عدد گنگ و $\beta-۲\alpha$ عددی گویا باشد، آنگاه $۳\alpha-\beta$ عددی گنگ است.	۰/۷۵
۴	به روش بازگشتی ثابت کنید: $xy+\frac{۱}{۲}(y^۲+۱)\geq x(۱-x)$	۱
۵	ثابت کنید اگر از مربع هر عدد فرد، یک واحد کم کنیم، حاصل بر ۸ بخش‌پذیر است.	۱
۶	اگر a عددی اول باشد و $۳a\mid ۴k+۲$ و $۳a\mid ۵k+۱$ آنگاه مقدار a را بیابید.	۱
۷	جواب‌های عمومی معادلهٔ هم‌نهشتی $۳۵x\overset{۱۱}{\equiv}۵۰-۲x$ را به‌دست آورید.	۱
۸	اگر ۲۵ خردادماه در یک سال یکشنبه باشد، ۱۰ آذرماه در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱
۹	گراف G را در نظر بگیرید. الف) مجموعهٔ $V(G)$ و اندازهٔ گراف G را بنویسید. ب) مسیری به طول ۴ از a به b بنویسید. پ) دوری به طول ۵ بنویسید که از رأس c شروع شود. ت) اگر $N_G(x)=\{c,b,d\}$ باشد، آنگاه x چه رأس یا رأس‌هایی می‌تواند باشد؟  G	۲
۱۰	اگردر گراف G از مرتبهٔ ۸، مجموع درجات ۴۰ باشد، تعداد یال‌های گراف مکمل G را به‌دست آورید.	۰/۷۵
۱۱	اگر در یک گراف ۳- منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q داشته باشیم $p+q=۲۰$ در این‌صورت مقدار p و q را بیابید.	۱

باسمه‌تعالی

سؤالات آزمون نهایی درس: **ریاضیات گسسته – ۱۲۰۷۱**	پایه: **دوازدهم**	رشته: **ریاضی وفیزیک**	تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۰/۱۰**
تعداد صفحه: **۲**	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**	ساعت شروع: **۱۰:۳۰ به وقت تهران**	نام و نام‌خانوادگی:
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران و داوطلبان آزاد (داخل و خارج از کشور)- **دی ۱۴۰۴**			مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش Azmoon.medu.ir

ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)	نمره
۱۲	گراف G را درنظر بگیرید. الف) عدد احاطه‌گری گراف G را با ذکر دلیل به‌دست آورید. ب) درگراف G یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی شاملِ رأس a بنویسید. 	۱/۵
۱۳	یک گراف از مرتبهٔ ۵ با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید.	۰/۵
۱۴	الف) محاسبه کنید ۸ نفر به چند طریق می‌توانند در یک اتاق ۴ نفره و دو اتاق ۲ نفره در یک هتل اسکان یابند؟ ب) تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۵ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی را محاسبه کنید؟	۱ ۰/۷۵
۱۵	از بین ۵ نوع گل مختلف به چند طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۸ شاخه گل انتخاب کرد به طوری‌که از گل نوع اول حداقل ۲ شاخه گل و از گل نوع پنجم فقط یک شاخه گل انتخاب شود؟	۱/۵
۱۶	درمربع لاتینِ مقابل، مقادیر x ، y ، z و t را به‌دست آورید. $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline ۳ & x & y \\ \hline t & ۲ & z \\ \hline ۲ & ۳ & t \\ \hline \end{array}$	۱
۱۷	به کمک اصل شمول و عدم شمول تعیین کنید چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری‌که $n \leq ۶۰۰$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۳ و ۷ بخش‌پذیر نباشند؟	۱/۵
۱۸	در یک دبیرستان، حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۲۱ دانش‌آموز ماهِ تولدشان یکسان است؟	۱
	موفق باشید — جمع	۲۰

باسمه‌تعالی

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: **ریاضیات گسسته–۱۲۰۷۱**	پایه: **دوازدهم**	رشته: **ریاضی وفیزیک**	تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۰/۱۰**
تعداد صفحه: **۵**	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**	ساعت شروع: **۱۰:۳۰ به وقت تهران**	
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران و داوطلبان آزاد (داخل و خارج از کشور) - **دی ۱۴۰۴**		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش Azmoon.medu.ir	

ردیف	راهنمای نمره‌گذاری	نمره
۱	الف) درست صفحه۳ ب) نادرست صفحه۳ پ) نادرست صفحه۱۳ ت) نادرست صفحه۷۸ هرقسمت(۰/۲۵)	۱
۲	الف)۵ صفحه۱۳ ب)۵ صفحه۱۴ پ)۴ صفحه۵۲ هرقسمت(۰/۲۵)	۰/۷۵
۳	فرض کنیم $3\alpha-\beta$ عددی گویا باشد(۰/۲۵)داریم: $(3\alpha-\beta)+(\beta-2\alpha)=\alpha$ با توجه به این‌که مجموع دو عدد گویا، عددی گویاست، پس α باید عددی گویا باشد(۰/۲۵)که با فرض مسأله در تناقض است.(۰/۲۵) صفحه۸	۰/۷۵
۴	$xy+\frac{1}{2}(y^2+1)\geq x(1-x)\overset{\times 2}{\Leftrightarrow}\underbrace{2xy+y^2+1\geq 2x-2x^2}_{(۰/۲۵)}\Leftrightarrow\underbrace{x^2+2xy+y^2+x^2+1-2x\geq 0}_{(۰/۲۵)}$ عبارت حاصل بدیهی است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند.(۰/۲۵) $\Leftrightarrow\underbrace{(x+y)^2+(x-1)^2\geq 0}_{(۰/۲۵)}$ تذکر: اگر به جای عبارتِ "تمامی روابط برگشت‌پذیرند"، فلش‌های نتیجه‌گیری دوطرفه، رسم شده باشند(۰/۲۵) نمره تعلق گیرد. صفحه۸	۱
۵	روش اول: $\underbrace{(2k+1)^2-1}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{4k^2+4k+1-1=4k^2+4k}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{4k(k+1)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{4(2q)=8q}_{(۰/۲۵)}$ روش دوم: می‌دانیم هر عدد فرد را می‌توان به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشت، پس داریم: $\begin{cases}\underbrace{(4k+1)^2-1=16k^2+8k+1-1}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{8k(2k+1)=8m}_{(۰/۲۵)}\\ \underbrace{(4k+3)^2-1=16k^2+24k+9-1}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{8(2k^2+3k+1)=8n}_{(۰/۲۵)}\end{cases}$ صفحه۱۵	۱

باسمه‌تعالی

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: **ریاضیات گسسته–۱۲۰۷۱**	پایه: **دوازدهم**	رشته: **ریاضی وفیزیک**	تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۰/۱۰**
تعداد صفحه: **۵**	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**	ساعت شروع: **۱۰:۳۰ به وقت تهران**	
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران و داوطلبان آزاد (داخل و خارج از کشور)- **دی ۱۴۰۴**		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش Azmoon.medu.ir	

ردیف	راهنمای نمره‌گذاری	نمره

۶

روش اول:

$$\left.\begin{array}{l}3a\mid 4k+2 \Rightarrow 3a\mid 20k+10\\ 3a\mid 5k+1 \Rightarrow 3a\mid 20k+4\end{array}\right\}(۰/۲۵)\Rightarrow \underbrace{3a\mid (20k+10)-(20k+4)\Rightarrow 3a\mid 6}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{a\mid 2}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{a=2}_{(۰/۲۵)}$$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l}3a\mid 4k+2 \Rightarrow 4k\overset{3a}{\equiv}-2 \Rightarrow 20k\overset{3a}{\equiv}-10\\ 3a\mid 5k+1 \Rightarrow 5k\overset{3a}{\equiv}-1 \Rightarrow 20k\overset{3a}{\equiv}-4\end{array}\right\}(۰/۵)\Rightarrow \underbrace{6\overset{3a}{\equiv}0 \Rightarrow 2\overset{a}{\equiv}0}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{a=2}_{(۰/۲۵)}$$

روش سوم:

$$\left.\begin{array}{l}3a\mid 4k+2 \Rightarrow 4k+2=3aq_1 \xrightarrow{\times 5} 20k+10=3aq_3\\ 3a\mid 5k+1 \Rightarrow 5k+1=3aq_2 \xrightarrow{\times 4} 20k+4=3aq_4\end{array}\right\}(۰/۲۵)\Rightarrow \underbrace{6=3aq_5}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{2=aq_5}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{a=2}_{(۰/۲۵)}$$

صفحه۱۲

۱

۷

$$35x\overset{11}{\equiv}50-2x \Rightarrow \underbrace{37x\overset{11}{\equiv}50}_{(۰/۲۵)},\ (37,11)\mid 50 \Rightarrow \underbrace{4x\overset{11}{\equiv}6}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{2x\overset{11}{\equiv}3 \Rightarrow 2x\overset{11}{\equiv}14 \Rightarrow x\overset{11}{\equiv}7}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x=11k+7}_{(۰/۲۵)} \quad (k\in Z)$$

صفحه۲۵

۱

۸

ش	ج	پ	چ	س	د	ی
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

$$\underbrace{6+3(31)+2(30)+10}_{(۰/۲۵)}\overset{7}{\equiv}\underbrace{-1+2+4+3}_{(۰/۲۵)}\overset{7}{\equiv}1$$

رسم جدول(۰/۲۵)

۱۰ آذرماه دوشنبه است.(۰/۲۵)

تذکر: درصورتی‌که بدون رسم جدول، جواب نهایی درست باشد(۰/۵)نمره تعلق گیرد.

صفحه۲۴

۱

۹

الف) $\underbrace{V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}}_{(۰/۲۵)}$ و $\underbrace{q=7}_{(۰/۲۵)}$

ب) $acdeb$ یا $adceb$ (۰/۵)

پ) $cdebac$ یا $cabedc$ (۰/۵)

ت) $x=e$ (۰/۲۵) ، $x=a$ (۰/۲۵)

صفحه۴۱

۲

باسمه‌تعالی

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: **ریاضیات گسسته–۱۲۰۷۱**	پایه: **دوازدهم**	رشته: **ریاضی وفیزیک**	تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۰/۱۰**
تعداد صفحه: **۵**	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**	ساعت شروع: **۱۰:۳۰ به وقت تهران**	
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران و داوطلبان آزاد (داخل و خارج از کشور)- **دی ۱۴۰۴**		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش Azmoon.medu.ir	

ردیف	راهنمای نمره‌گذاری	نمره
۱۰	**روش اول:** $\underbrace{2q=40\Rightarrow q=20}_{(0/25)}$ و $\underbrace{q(G)+q(\bar{G})=\frac{p(p-1)}{2}\Rightarrow 20+q(\bar{G})=28}_{(0/25)}\Rightarrow \underbrace{q(\bar{G})=8}_{(0/25)}$ **روش دوم:** $\sum \deg_{K_p}(v_i)$: مجموع درجات گراف کامل $\underbrace{\sum \deg_G(v_i)+\sum \deg_{\bar{G}}(v_i)=\sum \deg_{K_p}(v_i)\Rightarrow 40+\sum \deg_{\bar{G}}(v_i)=56}_{(0/25)}$ $\Rightarrow \underbrace{\sum \deg_{\bar{G}}(v_i)=16}_{(0/25)}\Rightarrow \underbrace{2q(\bar{G})=16\Rightarrow q(\bar{G})=8}_{(0/25)}$ صفحه ۳۸	۰/۷۵
۱۱	$\begin{cases}3p=2q\Rightarrow q=\frac{3}{2}p & (0/5)\\ p+q=20\end{cases}\Rightarrow \underbrace{p=8\ ,\ q=12}_{(0/5)}$ صفحه ۳۵	۱
۱۲	الف) **روش اول:** $\left.\begin{array}{l}\underbrace{\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{p}{\Delta+1}\right\rceil\Rightarrow\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{8}{4}\right\rceil}_{(0/25)}\Rightarrow\underbrace{\gamma(G)\geq 2}_{(0/25)}\\ \underbrace{A=\{b,h\}}_{(0/25)}\end{array}\right\}\Rightarrow\underbrace{\gamma(G)=2}_{(0/25)}$ **روش دوم:** چون هیچ رأسی در گراف G وجود ندارد که تمام رئوس را احاطه کند، پس عدد احاطه‌گری نمی‌تواند یک باشد(۰/۵) از طرفی مجموعهٔ دو عضوی $A=\{b,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است(۰/۲۵)لذا $\gamma(G)=2$ (۰/۲۵) **تذکر:** برای هر مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی دیگر به‌جای مجموعه احاطه‌گر A ، نمره تعلق گیرد. صفحه ۴۹ ب) $\{a,b,c,d\}$ یا $\{a,f,c,h\}$ (۰/۵) صفحه ۴۶	۱/۵

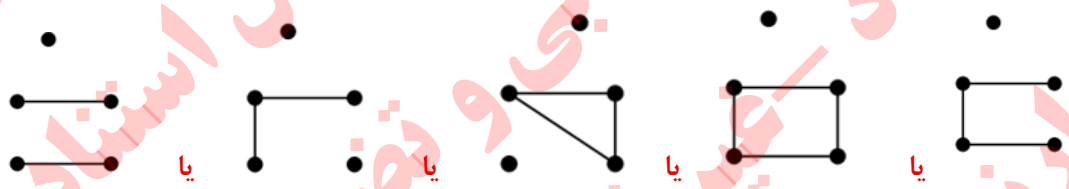
باسمه‌تعالی

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: **ریاضیات گسسته–۱۲۰۷۱**	پایه: **دوازدهم**	رشته: **ریاضی وفیزیک**	تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۰/۱۰**
تعداد صفحه: **۵**	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**	ساعت شروع: **۱۰:۳۰ به وقت تهران**	
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران و داوطلبان آزاد (داخل و خارج از کشور) - **دی ۱۴۰۴**		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش Azmoon.medu.ir	

ردیف	راهنمای نمره‌گذاری	نمره

۱۳

به رسم یک گراف از گراف‌های زیر(۰/۵)نمره تعلق گیرد.



صفحه ۵۳

۰/۵

۱۴

الف)

روش اول:

$$\underbrace{\frac{\overbrace{8!}^{(0/25)}}{4!\times 2!\times 2!}}_{(0/5)} = 420 \quad (0/25)$$

روش دوم:

$$\underbrace{\binom{8}{2}\binom{6}{4}\binom{2}{2}}_{(0/75)} = 420 \quad (0/25) \quad \text{یا} \quad \underbrace{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{4}}_{(0/75)} = 420 \quad (0/25) \quad \text{یا} \quad \underbrace{\binom{8}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}_{(0/75)} = 420 \quad (0/25)$$

صفحه ۵۹

۱

ب)

روش اول:

n : تعداد توابع پوشا

$$n = 3^m - (3\times 2^m - 3) \xrightarrow{m=5} \underbrace{3^5 - (3\times 2^5 - 3)}_{(0/5)} = 243 - 93 = 150 \quad (0/25)$$

روش دوم:

$|S|$: تعداد کل توابع از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی

$|A_1| = |A_2| = |A_3|$: تعداد توابعی که فقط شامل دو عضو از برد باشند

$$|S| = 3^5 = 243$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = 32$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$\underbrace{|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|}_{(0/5)} = 243 - (3\times 32 - 3\times 1 + 0) = 150 \quad (0/25)$$

صفحه ۸۳

۰/۷۵

باسمه‌تعالی

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: **ریاضیات گسسته–۱۲۰۷۱**	پایه: **دوازدهم**	رشته: **ریاضی وفیزیک**	تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۰/۱۰**
تعداد صفحه: **۵**	مدت آزمون: **۱۲۰ دقیقه**	ساعت شروع: **۱۰:۳۰ به وقت تهران**	
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران و داوطلبان آزاد (داخل و خارج از کشور)- **دی ۱۴۰۴**		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش Azmoon.medu.ir	

ردیف	راهنمای نمره‌گذاری	نمره
۱۵	$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ ، $x_5=1$ ، $x_1\geq 2 \Rightarrow \underbrace{x_1-2}_{t_1}\geq 0$ (۰/۲۵) $t_1+x_2+x_3+x_4=8-2-1=5$ (۰/۵) $\Rightarrow \underbrace{\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8}{3}}_{(۰/۵)}=56$ (۰/۲۵) صفحه ۷۱	۱/۵
۱۶	$t=1$ (۰/۲۵) ، $x=1$ (۰/۲۵) ، $z=3$ (۰/۲۵) ، $y=2$ (۰/۲۵) صفحه ۶۲	۱
۱۷	$\lvert S\rvert$: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۶۰۰ $\lvert A\rvert$: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۶۰۰ که بر ۳ بخش‌پذیرند. $\lvert B\rvert$: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۶۰۰ که بر ۷ بخش‌پذیرند. $\lvert A\cap B\rvert$: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۶۰۰ که بر ۲۱ بخش‌پذیرند. $\underbrace{\lvert A\cup B\rvert=\lvert A\rvert+\lvert B\rvert-\lvert A\cap B\rvert=\left[\frac{600}{3}\right]+\left[\frac{600}{7}\right]-\left[\frac{600}{21}\right]=200+85-28=257}_{(۰/۷۵)}$ (۰/۲۵) $\underbrace{\lvert\overline{A\cup B}\rvert=\lvert S\rvert-\lvert A\cup B\rvert=600-257}_{(۰/۲۵)}=343$ (۰/۲۵) صفحه ۶۳	۱/۵
۱۸	روش اول: n : تعداد لانه‌ها (ماه‌های سال) ، $k+1$: حداقل کبوترها(دانش‌آموزان دبیرستان) $k+1=21 \Rightarrow k=20$ (۰/۲۵) $\underbrace{nk+1=12\times 20+1}_{(۰/۵)}=241$ (۰/۲۵) روش دوم: m : حداقل تعداد دانش‌آموزان دبیرستان به کمک عمل تقسیم داریم: $\underbrace{m=12\times 20+1}_{(۰/۷۵)}=241$ (۰/۲۵) روش سوم: t : تعداد دانش‌آموزان دبیرستان ، $k+1$: حداقل کبوترها(دانش‌آموزان دبیرستان) $\underbrace{\left[\frac{t-1}{k}\right]=n \Rightarrow \left[\frac{t-1}{20}\right]=12}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{12\leq \frac{t-1}{20}<13 \Rightarrow t\geq 241}_{(۰/۲۵)}$ بنابراین حداقل تعداد دانش‌آموزان دبیرستان ۲۴۱ نفر است. (۰/۲۵) صفحه ۸۳	۱
	موفق باشید	۲۰
	جمع	