

دیفرانسیل



به زیور آدمیزاد



مجتبی احمدی | moJYam

Version : dey 1402

Power series and Laplace

حتما باید قبل از خوندن این جزوه، نسخه اولش رو خونده باشی

چند تا نکته که به کارت میاد :

- دانشگاه دو حالت داره: یا نمیخونی و میفتی یا میخونی و میندازنت 😂 سخت نگیر
- تو به کسی تبدیل میشی که بیشتر اوقات بهش فکر می کنی!
- درد موقت رو برای لذت بلند مدت بپذیر! سختی ها فانی اند، سرسختی ها باقی!
- آلبرت اینشتین : اگر نتونی مطلبی رو به زیور ساده توضیح بدی، یعنی اونو نفهمیدی!
- به جای شکایت از دیگران، خودتو اصلاح کن، چون کفش پوشیدن راحت از فرش کردن دنیاست!
- اصل پارتو : فقط بیست درصد کارها (مهم ها)، هشتاد درصد نتیجه رو بهت میدن...
- توهم دانایی بدتر از نادانیه! (بهره ندونی تا فکر کنی میدونی)

- این جزوه به هیچ وجه رایگان نیست، هزینه اش پرداخت حداقل یک انتقاد به نویسنده برای بهتر شدنشه 😊 و فرستادنش به حداقل دو نفر از بهترین دوستانه... 😊
- از پرینت غافل نشو، جزوه ای که جرم داره تاثیر بیشتری روی یادگیری داره...

نقشه راهنما (یه وقت گم نشی 😊)



سری چیه؟!

به مجموع (یعنی جمع) یه دنباله از عددها میگن سری و با Σ نشونش میدن.

$$\sum_{n=0}^m a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_m$$

سری توانی چیه؟!

سری هایی که حول یه نقطه ای مثل a به توان برسن (این یعنی منهای اون عدد میشن)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n = (x-a)^1 + (x-a)^2 + \dots + (x-a)^n$$

یعنی به n از صفر تا بی نهایت
عدد بدی و با هم جمع کنی
معمولا ما a رو صفر میگیریم

نقطه عادی و غیرعادی معادله چیه؟

اگه یادت باشه قبلا گفتم معادله استاندارد این شکلیه که ضریب y'' باید یک باشه، اگه نبود خودت استانداردش کن.

حالا هر عددی که مخرج ضریب هارو صفر کنه بهش میگیم غیرعادی (تو حسابان می گفتیم تعریف نشده یادته 😊)

(مثلا) نقاط غیرعادی این معادله چین؟

$$(x^2 - 4)(x + 1)y'' + (x + 1)y' + (x^2 - 4)y = 0$$

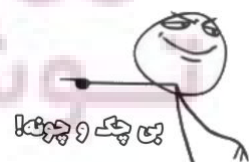
$$(x^2 - 4)(x+1)y'' + (x+1)y' + (x^2 - 4)y = 0$$

$$y'' + \frac{y'}{(x^2 - 4)} + \frac{y}{(x+1)} = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

ضرب هارو به ضریب y'' تقسیم می کنیم تا یک بشه
پس $x = -1, 2, -2$ نقاط غیرعادی معادله هستن.



خود نقطه غیرعادی ها دو نوع اند : منظم و نامنظم

بعد از اینکه استاندارد کردی فرض کن اینجوری بشه : $y'' + ay' + by = \dots$

دو معادله می سازی :

$$b(x-x_0)^2$$

$$a(x-x_0)$$

عدد (نقطه غیرعادی) رو میزاری جای x_0

و همه x ها (حد می گیری) اگه حتی

مخرج یکیشو صفر کرد اون نامنظم

غیرعادی هستش.

😊 حاجی این مخرج اش کجا بود؟ تو معادله رو بساز می بینی عزیزم 😊

مثلا نقاط این معادله رو تحلیل کن $x(x-1)^3y'' + (x-1)y' + (x+1) = 0$

$$x(x-1)^3y'' + (x-1)y' + (x+1)y = 0$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{y'}{x(x-1)^2} + \frac{x+1}{x(x-1)^3}y = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix} \text{ غیر عادی اند}$$

$$a = \frac{1}{x(x-1)^2} \text{ و } b = \frac{x+1}{x(x-1)^3} \Rightarrow \begin{matrix} a(x-x_0) \\ b(x-x_0)^2 \end{matrix} \text{ معادله}$$

$$x=0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-0)}{x(x-1)^2} = 1 \\ \frac{(x-0)^2(x+1)}{x(x-1)^3} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^3} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{مخرج هارو} \\ \text{صفر نکرد} \end{array}$$

$$x=1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} \\ \frac{(x-1)^2(x+1)}{x(x-1)^3} = \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{2}{0} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{مواضع مخرج یکی} \\ \text{رو صفر کرد} \end{array}$$

پس $x=0$ غیرعادی منظم / $x=1$ غیرعادی نامنظم
همه اعداد جز این دو تا نقطه عادی برای این معادله محسوب میشن.

برای اکثر معادله ها، همه نقاط عادی اند، پس اگه گفت حول فلان نقطه، اول چک کن، اگه هم نگفت یعنی همون حول صفر

حالا چطوری با سری توانی معادله دیفرانسیل حل کنیم؟
(برای نقاط عادی)



مرحله اول)

حول هر نقطه ای خواست اونو
میزاری جای t و سری و مشتق
هاشو می نویسی

اگه سوال نگه همیشه فرض میکنیم
حول صفره؛ جواب این شکلیه و مشتق
هاشو هم می نویسیم

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-t)^n$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-t)^{n-1}$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-t)^{n-2}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

مرحله دوم) جایگذاری میکنی

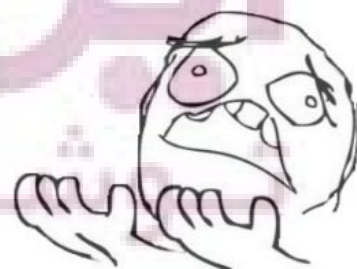
مرحله سوم) اول x هارو **هم توان** میکنی بعدش سری هارو **هم شروع** میکنی

مرحله چهارم) دنباله بازگشتی رو به دست میاری و جواب رو می نویسی!

هرچی توان x که n هستش رو دستکاری میکنی، همه n های دیگه که داخل سری هستن
رو هم همونجوری دستکاری کن، ولی زیر سری رو برعکس حرکت بده

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \begin{matrix} \nwarrow \\ \nearrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \sum_{n+1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \\ \sum_{n-2}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} \end{matrix}$$

بالا رو نگاه 🖐 مشتق هم می گیری زیر سری
برعکسه، اگه جمع کنی، تفریق میشه و برعکس



بعد از هم توان کردن x ها تو سری ها، باید سری هارو هم شروع کنی، اونایی که عقب ترن رو از سری بنداز بیرون تا باهم یکی بشن.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \stackrel{x=1}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

هرچقدر نیاز به بنداز بیرون و n پایین سری رو بیار جلو

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$$

حالا دنباله بازگشتی چیه؟ آخر این حساب کتاب ها به یه رابطه می‌رسی که وقتی به n عدد میدی به یه دنباله می‌رسی که همون جوابه؛ اما بعضی دنباله هارو میشه به یه تابع نسبتش داد (یعنی این تقریبا همون تابع هستش)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

اگه به سمت راستی ها

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

رسیدی، چپیه رو جاش

می‌نویسی

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$$

دیگه قطعا گیج شدی رفت پی کارش 🤪 مثال پایین رو به ترتیب بخون بعد بیا اینجا رو دوباره ببین.

مثلا) معادله دیفرانسیل $y' - y = 0$ رو به روش مزخرف سری ها حل کن 😊

حل) چون نگفته حول $x=0$ فرضش میکنیم

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y' - y = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

اینجا خودش "هم شروع" شد

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = 0$$

هر n هارو یکی اضافه کردیم

حوالی ما
اینها ممنوع!!!



معادله بازگشتی $\rightarrow a_{n+1} - a_n = 0 \Rightarrow (n+1)a_{n+1} = a_n \rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$

$$\left. \begin{array}{l} n=0 \rightarrow a_0 = a_1 \\ n=1 \rightarrow a_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{a_0}{1} \\ n=2 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2} \\ n=3 \rightarrow a_3 = \frac{a_1}{3} = \frac{a_0}{3} \\ \vdots \end{array} \right\} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$= a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2} x^2 + \frac{a_0}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \dots =$$

$$a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = a_0 e^x$$

جواب نهایی

مثلا) اینو داشته باش $y'' + xy = 0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$0 = y' - xy = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

گرفتی چی شد : فقط وقتی x

تو سری ضرب بشه (یعنی

پشت y باشه مثل این سوال،

باید هم توان کنی

هم توان می‌کنیم $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$

هم شروع می‌کنیم $\rightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \rightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} - a_{n-1}) x^n$

ضرایب مساوی صفر $\rightarrow a_1 = 0 \quad (n+1) a_{n+1} - a_{n-1} = 0$

دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_{n-1} \quad n \geq 1 \quad a_1 = 0$

$a_1 = 0 \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1 = 0 \quad a_5 = \frac{1}{5} a_3 = 0 \quad a_7 = \frac{1}{7} a_5 = 0 \rightarrow a_{2n+1} = 0$

یعنی فرد ها صفرن

$a_2 = \frac{1}{2} a_0 \quad a_4 = \frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{4 \times 2} a_0 = \frac{1}{2^2 \times 2!} a_0$

$a_6 = \frac{1}{6} a_4 = \frac{1}{2^3 \times 3!} a_0 \quad a_8 = \frac{1}{8} a_6 = \frac{1}{2^4 \times 4!} a_0 \rightarrow a_{2n} = \frac{1}{2^n \times n!} a_0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots = a_0 + \frac{a_0}{2} x^2 + \frac{a_0}{2^2 \times 2!} x^4 + \dots =$$

$$a_0 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \times 2!} + \frac{x^6}{2^3 \times 3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2^n \times n!} \right) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \times n!} x^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = a_0 e^{\frac{x^2}{2}}$$

حالا معادله رو حول نقطه غیرعادی منظم چطور حلش کنیم؟

اول معادله رو استاندارد می‌کنیم : $y'' + ay' + by = 0$

$$Q = \lim_{x \rightarrow x_0} b(x-x_0)^2$$

$$P = \lim_{x \rightarrow x_0} a(x-x_0)$$

بعدش مثل نقطه عادی همون دو معادله رو می‌سازی و مثل قبل ازش حد می‌گیری (قبلا هم جای همه ایکس ها می‌گذاشتیم که یعنی همون حد)...

بعدش اون دوتارو در معادله مشخصه میزاری و دو تا ریشه درمیاری

معادله مشخصه : $r(r-1)+Qr+P=0$

حالا این دوتا ریشه رو که گیر میاری، دو جواب داری که یکیش همیشه ثابت و ولی اون یکی بستگی به این داره که ریشه ها برابر بشن یا اختلاف شون صحیح نشه...

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$$

اگر $r_1 - r_2$ صحیح نشه

$$y_2 = y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$$

اگر $r_1 = r_2$



Learn with video

به سری بالایی میگن فروبنیوس؛ هول نکن، پس همیشه باید r هارو پیدا کنیم و y_1 رو هم گیر بیاریم، کلا هم یادت باشه هر جا قفل کردی سریع برو سراغ مثال

برای حل : اول جواب رو به صورت فروبنیوس خام (یعنی توانش r داشته باشه، نه r_1) فرض میکنیم بعد با مشتق هاش جایگذاری میکنیم، حالا وقتی به معادله بازگشتی رسیدیم، اونجا r هارو میزاریم.

برای حالتی که اختلاف r ها صحیح نشه، دو تا r رو میزاری و هرکدوم به جواب به صورت سری بهت میدن... حالت دوم رو هم باید تو مثال ببینی، بدو بدو سراغ مثال پایین

نکته : وقتی از سری فروبنیوس مشتق می‌گیری، n شروعش همون صفر می‌مونه...

(مثلا) بیا اینو حول نقطه صفر حل کنیم $2x^2 y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$

$$\text{استاندارد} \Rightarrow y'' + \frac{3y'}{2x} - \frac{(1+x)y}{2x^2} = 0$$

$$Q = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-0)(3)}{2x} = \frac{3}{2} \quad P = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-0)^2(1+x)}{-2x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{معادله مشخصه} \Rightarrow r(r-1) + \frac{3r}{2} - \frac{1}{2} = 0 \xrightarrow{\Delta} r_1 = \frac{1}{2} \text{ و } r_2 = -1$$

$$|r_1 - r_2| = \frac{3}{2} \text{ عدد صحیح نیست}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

$$\text{جایگذاری} \Rightarrow 2x^2 y'' + 3x y' - (1+x)y = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}$$

$$\text{هم توان} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r}$$

$$\text{هم ضرایب} \Rightarrow (2r(r-1) + 3r - 1) a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} [2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1] a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r}$$

ضرایب رو مساوی صفر میذاریم

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1] a_n - a_{n-1} x^{n+r} = 0$$

$$2r(r-1) + 3r - 1 = 0 \rightarrow \text{که این چون معادله مشخصه است}$$

$$[2(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) - 1] a_n - a_{n-1} = 0$$

از اینجا دو تا r داریم به ترتیب میذاریم

$$r = \frac{1}{2} \rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n+3)}$$

$$h=1 \rightarrow a_1 = \frac{a_0}{\omega}$$

$$h=2 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2 \times \omega} = \frac{a_0}{2 \times \omega \times \omega}$$

$$h=3 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3 \times \omega} = \frac{a_0}{3! \times \omega \times \omega \times \omega}$$

$$h=4 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4 \times \omega} = \frac{a_0}{4! \times \omega \times \omega \times \omega \times \omega}$$

⋮

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{r}} = a_0 x^{\frac{1}{r}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \times \omega \times \omega \times \omega \times \dots \times (\omega n + \omega)} \right]$$

$$a_n = \frac{a_0}{n! \times \omega \times \omega \times \omega \times \dots \times (\omega n + \omega)}$$

$$r=-1 \rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(\omega n - \omega)}$$

$$h=1 \rightarrow a_1 = -a_0$$

$$h=2 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2 \times 1} = \frac{-a_0}{2! \times 1}$$

$$h=3 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3 \times 1} = \frac{-a_0}{3! \times 1 \times 1}$$

$$h=4 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4 \times \omega} = \frac{-a_0}{4! \times 1 \times 1 \times \omega}$$

$$h=5 \rightarrow a_5 = \frac{a_4}{\omega \times \omega} = \frac{-a_0}{5! \times 1 \times 1 \times \omega \times \omega}$$

$$a_n = \frac{-a_0}{n! \times 1 \times 1 \times \omega \times \omega \times \dots \times (\omega n - \omega)}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_0 x^{-1} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n! \times 1 \times 1 \times \omega \times \omega \times \dots \times (\omega n - \omega)} \right]$$

$$\Rightarrow y(n) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$



🤔 حالا ممکنه بگی چجوری الگو شو پیدا کردی؟!

اگه دونه دونه میخوای باید خودت قلق گیری کنی، بهش n های مختلف بده... آما آما بین خودمون باشه □ یه راه حلی داره که معمولا جواب میده، مثلا تو این سوال :

ولی کلا میتونی همون a_n (دنباله بازگشتی) رو بزاری جای a_{n-1} تو سری $y(x)$ دیگه

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n(n+3)} \rightarrow a_n = \frac{a_0}{n! \times \underset{n=1}{\uparrow} x \times \underset{n=2}{\uparrow} x \times \dots \times \underset{\sim}{\uparrow} x (n+3)}$$

اولی فاکتوریل آخری

(مثلا) بریم که دهنتم قراره سرویس بشه 😊 حول صفر حلش $x^2 y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0$

$$Q = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x)(x-1)}{x} = -1$$

$$P = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x)^2(1-x)}{x^2} = +1$$

ریشه مضاعف

$$\Rightarrow r(r-1) - r + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta} r = \pm 1$$

معادله مشخصه

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

جایگذاری $\Rightarrow x^2 y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

پس می‌تونم $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) a_{n-1} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0$

هم شروع $\Rightarrow ((r-1)r - r + 1) a_0 x^r + \leftarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [((n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1) a_n + ((n+r-1) - 1) a_{n-1}] x^{n+r} = 0$$

ضرایب رو مساوی صفر میذاریم

همون معادله مشخصه $(r-1)(r) - r + 1 = 0 \rightarrow$ است پس هیچی

$$((n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1) a_n + ((n+r-1) - 1) a_{n-1} = 0$$

ریشه مضاعف $(r=1) \rightarrow a_n = \frac{(n-1)a_{n-1}}{n^2}$

اینجاش یه کوچولو (منظورم خیلی زیاده 😊) قلق داره، ولی اینم بهت بگم که معمولا استاد از این قسمت (یعنی ۲ ها برابر بشه) تو امتحان سوال نمیدن، جهت محکم کاری آوردم یاد بگیری...

$$n=1 \rightarrow a_1 = (0) a_0 = 0$$

حالا هرچی n های بیشتر بدی چون a_1 با a_2 و a_2 با a_3 و ... رابطه داره همشون صفر میشن ← برای $n \geq 1$ داریم $a_n = 0$

$$y_1 = a_0 x \leftarrow n=0 \text{ می‌مونیم}$$

$$y_2 = \sqrt{y_1} \Rightarrow y_1 \int \frac{e^{-L P(x)} dx}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{-L \frac{x-1}{x}} dx}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-x}}{x} dx$$

حالا ما به صورت سری می‌خواهیم $\Rightarrow x \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} dx = x \int \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!} dx$

لحظه $n=0$ رو آوردیم بیرون

$$= x \left[\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{n-1} dx \right] = x \ln x + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! n} x^n$$

$$x \ln x + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! n} x^n = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! n} x^{n+1}$$

$$y(n) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (\text{یادت باشه}) \Rightarrow \text{جواب آخر}$$

یه سری نکته دم دستی: ما n منفی، زیر سری ها نداریم، پس برای "هم توان" کردن یادت

باشه اونى که توان x اش بیشتره رو باید بیاری عقب که n زیر سری (همون n شروع) بیاد جلو

برای "هم شروع" شدن باید (معمولا n زیر سری ها صفره) به جای n ها عدد بدی و بیاری بیرون، اگه نفهمیدی همین الان برگرد مثال هارو نگاه کن...

جالبه حالت دوم ($r_1 = r_2$) از همون فرمولی به دست اومده که تو نسخه قبلی گفتم اگه یه y رو بده

اون یکی رو اینجوری گیر میاریم ($y_2 = v y_1$)، اگه نمیدونی " v " چی بود برگرد نسخه اول رو بخون...

لاپلاس

کلا هدف ما اینه که یه جوری معادله دیفرانسیل رو ساده کنیم که بتونیم راحت حلش کنیم.
تو قسمت قبل داشتیم با سری ها اینکارو میکردیم (که سخت تر هم شد ولی اونم یه روشه دیگه، سخت نگیر) حالا اینجا میخوایم از انتگرال کمک بگیریم.

ما با انتگرال یه تابع رو به یه تابع دیگه تبدیل می‌کنیم و بعد از حل دوباره به حالت اول برش می‌گردونیم، به این کلا میگن تبدیل انتگرالی

$$F(s) = \int_a^{\beta} K(x,s) f(x) dx$$

↓
هسته تبدیل

هسته تبدیل چیزیه که تو تابع مون ضرب میکنیم بعد ازشون انتگرال میگیریم تا به اون تابعی که میخوایم تبدیل بشن (مبدل) که کار ما راحت بشه

پس ما کلی میتونیم از این تبدیل ها داشته باشیم اما یکی از مهم ترینش تبدیل انتگرالی لاپلاس هستش که به کار ما میاد :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

↓
هسته تبدیل

خب هر تابعی رو در e^{-st} ضرب کنی و انتگرال از صفر تا بی نهایت بگیری ازش، مبدل لاپلاس‌اش رو گیر میاری

ببین فرقی نداره $f(x)=f(t)$ این همونه

مثلا) تبدیل لاپلاس این تابع رو پیدا کن $f(t)=1$

$$L\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} = \frac{1}{-s} \left[\frac{1}{e^{st}} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(\frac{1}{-s} \right) = \frac{1}{s}$$

مخرج به نهایت هون صفره $\Rightarrow \frac{1}{\infty} = 0$ به صورت کد

$$\int t e^{-st} dt \rightarrow \text{جزء به جزء} \quad u = t \quad dv = e^{-st} \rightarrow \frac{t e^{-st}}{-s} + \int \frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{t e^{-st}}{-s} + \frac{1}{s} \int e^{-st} dt = \left[\frac{t e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s^2} \right) = \frac{1}{s^2}$$

مثلا) تبدیل لاپلاس این یکی چی میشه $f(t)=t$

مثلا) تبدیل لاپلاس این تابع رو پیدا کن $f(t)=\sin(at)$

$$L\{\sin at\} \rightarrow \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-st}}_{dv} \underbrace{\sin at}_{u} dt \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{\sin at e^{-st}}{-s} + \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-st}}_{dv} \underbrace{\cos at}_{u} dt$$

$$\frac{\sin at e^{-st}}{-s} + \frac{a}{s} \left[\frac{\cos at e^{-st}}{-s} - \frac{a}{s} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-st}}_{dv} \underbrace{\sin at}_{u} dt \right] = L\{\sin at\}$$

$L\{\sin at\}$ این دوون لاپلاسه

حرف L همون لاپلاسه تابع y

هستش که آخرش ارزش

لاپلاس معکوس می‌گیری

تا خود y رو پیدا کنی □

$$\left[\frac{\sin at e^{-st}}{-s} - \frac{a}{s^2} \cos at e^{-st} \right]_0^{\infty} - \frac{a^2}{s^2} L\{\sin at\} = L\{\sin at\}$$

$$\frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} L\{\sin at\} = L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2} = \left(\frac{a^2}{s^2} + 1 \right) L\{\sin at\}$$

$$\Rightarrow L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

مثلا) تبدیل لاپلاس این تابع بیخ ریشته $f(t) = e^{at}$

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} = \frac{e^{at} e^{-st}}{a-s} =$$

$$\left[\frac{e^{at}}{e^{st}(a-s)} \right]_0^{\infty} = \frac{-1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

حالا چجوری با لاپلاس معادله دیفرانسیل حل کنیم؟

از تک تک اجزاء معادله لاپلاس می‌گیری، به طرف لاپلاس تابع رو تنها میکنی، آخرش لاپلاس

معکوس می‌گیری تا همه برگردن سرچاشون (وحشت نکن تو مثال متوجه می‌شی)

چند تا قانون کوچولو) بیا لاپلاس تابعی که دنبالشیم (y) رو به چیزی بگیریم که راحت

باشیم، مثلا L

میدونی اگه از لاپلاس مشتق بگیر (یا حضرت دیفرانسیل 😊) چی میشه؟ بیا این دو تا رو هم حفظ کن که

خیلی به کارت میاد

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = L$$

لاپلاس تابع رو بگیریم

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sL - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2L - sf(0) - f'(0)$$

جدول لاپلاس تابع های پر کاربرد

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n $n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{a^2-s^2}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{a^2-s^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{a^2+s^2}$	$f(ct)$	$\frac{1}{c}\mathcal{L}f\left(\frac{t}{c}\right)$
$\cos(at)$	$\frac{s}{a^2+s^2}$	$u_c(t)=u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$

هی خوشگله، همیشه اول سوال
بخت چند تا مقدار اولیه هم میده پس
جوابی که به دست میاد، خصوصی

خودت بگو جواب خصوصی چی بود؟!

مثلا) بفرض سوال $y''-y'-2y=0$ ، $y(0)=1$ ، $y'(0)=0$

$$y''-y'-2y=0 \xrightarrow{\text{از جدول لاپلاس بگیر}} s^2L - sf(0) - f'(0) - sL + f(0) - 2L = 0$$

$$f'(0)=0 \text{ و } f(0)=1 \Rightarrow s^2L - s - sL + 1 - 2L = 0$$

$$L(s^2 - s - 2) - s + 1 = 0 \rightarrow L = \frac{s-1}{(s^2-s-2)}$$

$$L = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \xrightarrow{\text{تفکیک کسرها}} \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \Rightarrow$$

$$A(s+1) + B(s-2) = s-1 \rightarrow \begin{aligned} s=-1 &\Rightarrow -3B = -2 \rightarrow B = \frac{2}{3} \\ s=2 &\Rightarrow 3A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{2}{3} \frac{1}{s+1}$$

میگن قلب استخوان درد داره
پس لینا چیه تروش میشکنه!!!



$$\bar{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s-(-1)}\right) = e^{-t} \quad \text{میدونیم دیگه}$$

$$\underbrace{\bar{L}^{-1}(L)}_y = \frac{1}{3} L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{2}{3} L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \Rightarrow \text{لاپلاس معکوس}$$

$$y = \frac{1}{3} (e^{-2t}) + \frac{2}{3} (e^{-t})$$

خب غر نزن 😡 لاپلاس معکوس اون کسر رو که بلد نیستیم پس باید تفکیک شون کنیم تا ساده بشه؛ پس بگو تفکیک کسر بلد نیستم دیگه

آب دسته بزار زمین □

صفحات 67 تا 74 اینو خوب بخون بعد برگرد اینجا...



(مثلا) بفرما سوال $y'' + y = \sin(2t)$ ، $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$

$$\begin{aligned} \text{لاپلاس میگیریم} \Rightarrow L\{y''\} + L\{y\} &= L\{\sin 2t\} \Rightarrow \\ s^2 L - s y(0) - y'(0) + L &= \frac{2}{s^2+4} \quad \begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{matrix} \Rightarrow s^2 L - 1 + L = \frac{2}{s^2+4} \\ L(s^2+1) - 1 &= \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow (L)(s^2+1) = \frac{2}{s^2+4} + 1 = \frac{s^2+6}{s^2+4} \Rightarrow \\ L &= \frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)} \end{aligned}$$

$$\text{تفکیک کسرها} \Rightarrow \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$\begin{aligned} (As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4) &= s^2+6 \\ As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^3 + \epsilon Cs + Ds^2 + \epsilon D &= s^2+6 \\ (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (A+\epsilon C)s + B + \epsilon D &= s^2+6 \\ \begin{cases} A+C=0 \\ A+\epsilon C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=C=0 \\ B+D=1 \\ B+\epsilon D=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{2}{3} \\ D=\frac{5}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{-\frac{2}{3}}{s^2+4} + \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1} &\rightarrow -\frac{1}{3} L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} + \frac{5}{3} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \Rightarrow \\ L^{-1}\{L\{y\}\} = y &= \underline{-\frac{1}{3} \sin 2t + \frac{5}{3} \sin t} \end{aligned}$$

مغر عضو جالبیه

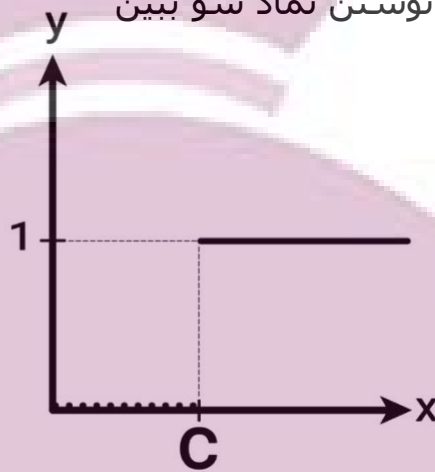
از زمان تولد کار میکنه تا

مرگ جز سر امتحان!!!!



بد نیست بدونی : اون مقدار اولیه هارو تا به مرتبه مشتق کمتر از بزرگترین مشتق (مرتبه معادله) بهت میده، مثلاً تو مثال قبلی چون معادله مرتبه دو بود، تا مقدار مشتق اول رو بهت داده بود. (جدی نگیر تا بیشتر از مرتبه دو که حل نمیکنی تو امتحان 😊)

تابع پله ای : بین یه تابع داریم که مقدارش تا قبل یه عددی مثل **C** صفره بعد اون یهو میشه یک، بهش میگیم پله ای، حالا نوع نوشتن نماد شو بین



گات زایید!



خب حالا به چه دردی میخوره؟ وقتی تابع چند ضابطه ای داری برای اینکه بتونی راحت ازش لاپلاس بگیری به این نیاز داری، یعنی چند ضابطه ای هارو به پله ای تبدیل میکنیم چون لاپلاس اونارو بلد نیستیم ولی لاپلاس اینو بلدیم

لاپلاس تابع پله

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-sc}}{s} \quad \mathcal{L}\{f(t-c)u_c(t)\} = e^{-sc}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

لاپلاس یه تابع ضربدر پله

فقط تابع هارو اینجوری به تابع پله تبدیل میکنی 📌

$$\begin{cases} g & 0 < t < c \\ h & c < t \end{cases} \xrightarrow{\text{تبدیل به تابع پله}} g + (h-g)u(t-c)$$

تابع پله ↑

جیگر اون پرانتزی که جلوی **u** میزارن برای خود تابع پله است، یه وقت فکر نکنی ضربی چیزیه، مثل این می‌مونه فکر کنی **f(x)** یعنی **f** ضربدر **x** هستش 🤔 تیق نزن...

• بین وقتی یه تابعی تو پله ضرب میشه، تو لاپلاس معکوس گرفتن، لاپلاس معکوس همون تابع رو باید بگیری ولی متغیرش (**همون t**) باید منهای **C** بشه؛ به جای اخم کردن برو مثال سوم و چهارم

فقط وقتی تابع پشت e به عدد شد دیگه منهای C نداره (چون متغیر نیست بلکه عدده) [مثال چهار]

مثلاً) لاپلاس تابع $f(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t < 1 \\ 4 & 1 < t \end{cases}$ چیه؟! $\rightarrow$

$$f(t) = g + (h-g)u(t-c) = 2 + 2u(t-1) \xrightarrow{\text{لاپلاس}}$$

$$\mathcal{L}\{2\} + 2\mathcal{L}\{u(t-1)\} = \frac{2}{s} + \frac{2e^{-s}}{s} = \frac{2(1+e^{-s})}{s}$$

مثلاً) لاپلاس تابع $f(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t < 1 \\ 4 & 1 < t \end{cases}$ چیه؟! $\rightarrow$

$$f(t) = g + (h-g)u(t-c) = 2t + (4-2t)u(t-1) =$$

$$2t + 4u(t-1) - 2tu(t-1) \xrightarrow{\text{لاپلاس}}$$

$$2\mathcal{L}\{t\} + 4\mathcal{L}\{u(t-1)\} - 2\mathcal{L}\{tu(t-1)\} = \frac{2}{s} + \frac{4e^{-s}}{s} - 2\left(\frac{1}{s^2}\right)e^{-s}$$

یاد د ب $\Rightarrow \mathcal{L}\{tu(t-1)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{t\}$ چون که

$$\Rightarrow \frac{2 - 2e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-s}}{s^2} \quad \frac{2}{s} + \frac{4e^{-s}}{s} - 2\left(\frac{1}{s^2}\right)e^{-s}$$

مثلاً) معکوس لاپلاس تابع $F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$ چیه؟! $\rightarrow$

$$\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} \xrightarrow[\text{واپس وارون}]{\text{لاپلاس}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = t - u(t-2)(t-2)$$

$\Rightarrow$ تفکیک می کنیم

به صورت چندضابطه ای $\Rightarrow \begin{cases} t & 0 < t < 2 \\ 2 & 2 < t \end{cases}$

مثلاً) معکوس لاپلاس تابع $F(s) = \frac{1-e^{3s}}{s}$ چیه؟! $\rightarrow$

$$\frac{1}{s} - \frac{e^{3s}}{s} \xrightarrow[\text{لاپلاس وارون}]{\text{لاپلاس}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{3s}}{s}\right\} = 1 - u(t+3)$$

$\Rightarrow$ تفکیک می کنیم

حالا بریم ببینیم چجوری با تابع پله و لاپلاس اش معادله دیفرانسیل حل کنیم...

مثلاً معادله $y'' + y = h(t)$ رو حل کنیم. $y(0)=0 \quad y'(0)=0$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases}$$

$$y'' + y = \begin{cases} 0 & 0 < \tau < 1 \\ 2 & \tau > 1 \end{cases} \Rightarrow y + (h - y)u(\tau - 1) \Rightarrow y'' + y = 2u(\tau - 1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y''\} = s^2 L - s f(0) - f'(0) \quad \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = L \quad \Rightarrow \text{فرض می کنیم}$$

از طرفی $y(0) = f(0) = 0$ و $y'(0) = f'(0) = 0$

از هم لاپلاس بگیر $\Rightarrow \mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = 2 \mathcal{L}\{u(\tau - 1)\} =$

$$\underbrace{s^2 L - s f(0) - f'(0)}_{\text{صفر}} + L = \frac{2e^{-s}}{s} \Rightarrow \underbrace{s^2 L + L}_{L(s^2 + 1)} = \frac{2e^{-s}}{s} \rightarrow L = \frac{2e^{-s}}{s(s^2 + 1)}$$

e^{-s} رو میزاریم کنار و بعد تفکیک کسر

$$\Rightarrow L = e^{-s} \left(\frac{2}{s(s^2 + 1)} \right) \rightarrow \begin{cases} \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} = \frac{2}{s(s^2 + 1)} \\ As^2 + A + Bs^2 + Cs = 2 \\ (A+B)s^2 + Cs + A = 2 \\ A+B=0 \text{ و } C=0 \text{ و } A=2 \\ \text{پس } B=-2 \\ \Rightarrow \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2 + 1} \end{cases}$$

پس $\Rightarrow L = e^{-s} \left(\frac{2}{s} \right) - e^{-s} \left(\frac{2s}{s^2 + 1} \right)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{L\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-s} \left(\frac{2}{s} \right) \right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-s} \left(\frac{2s}{s^2 + 1} \right) \right\} =$

$$y = 2u(\tau - 1) - 2 \cos(\tau - 1)u(\tau - 1) =$$

$$y = u(\tau - 1) [2 - 2 \cos(\tau - 1)]$$

خب تا الان از هرچی e^{-st} بود لاپلاس معکوس گرفتن رو بلد بودی که میشد خود تابع پله

حالا از تابع e^{ct} لاپلاس بگیر چیه؟

اینو بلد بودیم $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-sc}\mathcal{L}\{f(t)\}\} = f(t-c)u(t-c)$

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{ct}\} = \mathcal{L}f(s-c)$$

$$f(t)e^{ct} = \mathcal{L}^{-1}f(s)$$

لاپلاس به تابع ضرب تابع e^{ct}

در واقع تابع رو انگار تغییر متغیر میدیم به طوری که لاپلاس معکوس تابع جدید رو بلد باشیم، لاپلاس معکوس هم می‌گیریم منتها به e^{ct} هم کنار دستش می‌ذاریم...

$$\frac{1}{s^2-4s+5} \xrightarrow{\text{مربع کامل}} \frac{1}{(s-2)^2+1} \xrightarrow{s-2=s'} \frac{1}{s'^2+1} = e^{2t} \sin t$$

$\sin t$ لاپلاس معکوس

مثلا لاپلاس معکوس این تابع

$$\frac{1}{s^2-4s+5} \text{ چی میشه؟!}$$

مشتق لاپلاس

برای لاپلاس گرفتن از بعضی تابع هایی که سخت ترن (معمولا ضرب دوتا تابع) میتونیم به کاری کنیم: اول بیا از خود لاپلاس به تابع، طبق تعریفی که اون بالا بالاها گفتم مشتق بگیریم ببینیم به چی می‌رسیم...

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

خود لاپلاس

یعنی اگه کنار به تابع $-x$ بود، لاپلاس خود تابع

$$F'(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} (-x) f(x) dx$$

مشتق لاپلاس

رو بگیر و بعد از لاپلاسه به مشتق بگیر

• اگه کنار به تابع، $(X)^2$ بود، لاپلاس خود تابع

$$F''(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} (-x)^2 f(x) dx$$

مشتق دوم لاپلاس

رو بگیر و از لاپلاسنش دوبار مشتق بگیر

و تموم...

$$\mathcal{L}\{-xf(x)\} = F'(s) \quad , \quad \mathcal{L}\{(-1)^2 x^2 f(x)\} = F''(s)$$

$$\mathcal{L}\{(-1)^n x^n f(x)\} = F^{(n)}(s)$$

پس کلا اینجوری میشه ➡

کلا خواست باشه دیگه، x هایی که توان فرد دارن یه منفی هم کنارشون هست، اگه نبود خودت موقع لاپلاس گرفتن بزار (مثل این مثال)

مثلا) لاپلاس اینو بگیر $y = t \sin(at)$

لاپلاس خود $\sin at$ رو بگیر بعد ارزش یه بار نسبت به s مشتق بگیر

$$\mathcal{L}\{t \sin at\} = -\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right)' = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

مثلا) لاپلاس اینو بگیر $y = t^2 \sin t$

یادآوری $\Rightarrow (L f(s))' = -\frac{f'}{f}$

دو طرف مشتق $\rightarrow F'(s) = \frac{-1}{s(s-1)}$

دو طرف لاپلاس بگیر $\rightarrow -\tau f(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s(s-1)}\right\}$

تفکیک کسر $\rightarrow \frac{-1}{s(s-1)} \rightarrow \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} = \frac{-1}{s(s-1)} \rightarrow A(s-1) + Bs = -1 \Rightarrow \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$

$\rightarrow -\tau f(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right\} \Rightarrow -\tau f(\tau) = 1 - e^\tau \rightarrow f(\tau) = \frac{1 - e^\tau}{-\tau} = \frac{e^\tau - 1}{\tau}$

مثلا) لاپلاس اینو بگیر $y = (\cot)^{-1}$

یادآوری $\Rightarrow (L f(u))' = \frac{-u'}{1+u^2}$

مشتق کن از انت عبارت u

دو طرف مشتق $\rightarrow F'(s) = \frac{-1}{(s+1)^2 + 1}$

لاپلاس بگیر $\rightarrow -\tau f(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)^2 + 1}\right\}$

$\rightarrow -\tau f(\tau) = -e^{-\tau} \sin \tau \rightarrow f(\tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\tau} \sin \tau$

یادآوری $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = e^{ct} f(\tau) \rightarrow \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \rightarrow \frac{1}{s'^2 + 1} \rightarrow e^{-\tau} \sin \tau$

$c = -1$

انتگرال لاپلاس

اگه از لاپلاس یه تابع انتگرال بگیریم (از s تا بی نهایت) این مساوی لاپلاس همون تابع به روی متغیر خودش، اینهاش :

خب بریم مثال حل کنیم ببینیم به چه دردی می خوره؟

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s) ds$$

لاپلاس خود f

مثلاً لاپلاس اینو بگیر $g(t) = \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t}$

پس به تابعی $f(t)$ روی متغیر خودشه (هون t)

$$g(t) = \frac{\cos t - \cos(2t)}{t} \rightarrow \underbrace{f(t) = \cos t - \cos(2t)}_{\text{خودمون اینو گرفتیم}}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s) ds \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t - \cos 2t\} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow \int \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4} ds = \left[\frac{1}{2} \ln(s^2+1) - \frac{1}{2} \ln(s^2+4) \right]_s^\infty \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} [\ln(s^2+1) - \ln(s^2+4)]_s^\infty = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right) \right]_s^\infty = 0 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right) = \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2+1}\right)$$

$$\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)_s^\infty \rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right) = \ln\left(\frac{s^2}{s^2}\right) = \ln(1) = 0 \quad \text{یاد آوری} \Leftarrow$$

وقتی بنفعایت می زاری باید بسترین توان رو روی بسترین توان بزاری

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad \Leftarrow \text{یاد آوری 2}$$

مثلاً لاپلاس معکوس اینو بگیر $F(s) = \frac{s}{(s^2-4)^2}$

$$F(s) = \frac{s}{(s^2-4)^2} \quad \text{معلومه دنبال } f(t) \text{ هستیم} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s) ds \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s) ds$$

$$\int_s^\infty \frac{s}{(s^2-4)^2} ds \Rightarrow \begin{matrix} s^2-4=u \\ 2s ds = du \rightarrow ds = \frac{du}{2s} \\ s = \sqrt{u-4} \end{matrix} \Rightarrow \int_s^\infty \frac{\sqrt{u-4}}{u^2} \cdot \frac{du}{2(\sqrt{u-4})} = \int_s^\infty \frac{du}{2u^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{s^2-4}\right]_s^\infty$$

$$= -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{s^2-4}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2-4}\right) = \int_s^\infty F(s) ds = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-4}\right\} \Rightarrow \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{4} \sinh(2t) \rightarrow f(t) = \frac{t}{4} \sinh(2t)$$

مجبوریم تصویر 2 داشته باشیم پس $\frac{1}{2}$ گذاشتیم پیشش که درست بشه

مثلاً لاپلاس اینو بگیر $g(t) = \frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$

$$F(s) = \frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2} \quad \text{دنبال } f(t) \text{ هستیم} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s) ds \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s) ds$$

$$\int_s^\infty \frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2} ds \rightarrow \begin{matrix} s^2+4s+5=u \\ (2s+4) ds = du \rightarrow ds = \frac{du}{2(s+2)} \end{matrix} \rightarrow \int_s^\infty \frac{(s+2)}{u^2} \cdot \frac{du}{2(s+2)} = \frac{1}{2} \int_s^\infty \frac{1}{u^2} du$$



Learn with video

$$= -\frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{(s^2 + \gamma s + \omega)^2} \right]_s^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\gamma} \right) \left(\frac{1}{(s^2 + \gamma s + \omega)^2} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{s^2 + \gamma s + \omega} \right)$$

با پلاس مینوس

$$\xrightarrow{\frac{f(\tau)}{\tau}} \frac{f(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\gamma} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \gamma s + \omega} \right\} = \frac{1}{\gamma} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+\gamma)^2 + 1} \right\} = \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma \tau} \sin \tau$$

$$f(\tau) = \frac{\tau}{\gamma} e^{-\gamma \tau} \sin \tau$$

یادآوری $\mathcal{L}^{-1} \{ F(s-c) \} = e^{ct} f(\tau) \rightarrow \frac{1}{(s+\gamma)^2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{s'^2 + 1} \Rightarrow e^{-\gamma \tau} \sin \tau$
 $c = -\gamma$ $\sin \tau$

کانولوشن (پیچش) دو تابع

میدونستی میتونی دو تا تابع رو تو هم حل کنی؟ 🤔 طبق قانون پایین اگه متغیر یکی شونو کلا به چیز دیگه بگیری (مثلا t رو کلا x بگیری) و متغیر اون یکی رو $t-x$ بگیری و از شون از صفر تا t انتگرال بگیری بهش میگن پیچش دو تابع، فقط آخرش خوب هم بزن که شیرین بشه 😊

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x) dx$$

پیچش f و g

خب به چه دردی میخوره؟ عجله نکن اول چندتا ارزش حل کن تا یاد بگیری بعد بهت میگم...

(مثلا) کانولوشن دو تابع t و e^t رو گیر بیار

اگه فرض کنیم $f(\tau) = \tau$ و $g(\tau) = e^{\tau}$

$$f * g = \int_0^{\tau} f(\tau-x)g(x) dx = \int_0^{\tau} x e^{\tau-x} dx$$

جزء به جزء $\rightarrow$

$$\begin{aligned} u &= x \\ dv &= e^{\tau-x} \\ du &= dx \\ v &= -e^{\tau-x} \end{aligned}$$

$$uv - \int v du \rightarrow -x e^{\tau-x} + \int e^{\tau-x} dx = 2$$

$$-x e^{\tau-x} - e^{\tau-x} = e^{\tau-x} [-x-1]_0^{\tau} = -\tau-1 - e^{\tau}(-1) = e^{\tau} - \tau - 1$$

مهم نیست که کدوم تابع رو f بگیری و کدوم رو g بگیری، هر جور راحتی چون به یه جواب می‌رسی...

$$f * g = g * f$$

اینم چند تا ویژگی پیچش که تقریباً هر بلایی میتونی سرش بیاری

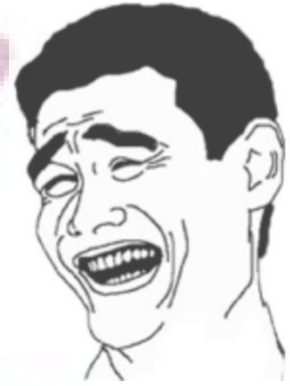
$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

چند تا فرمول تبدیل "ضرب به جمع" مثلثاتی رو هم حتما

$$f * 0 = 0 * f = 0$$

باید بلد باشی...

آب روشن قاطی کردم!!



$$\begin{aligned}\sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \sin \beta \cdot \cos \alpha &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta &= -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]\end{aligned}$$

مثلا) کانولوشن تابع $\cos(t)$ رو با خودش گیر بیار

$$\begin{aligned}f(t) = \cos t \quad f * f &= \int_0^T \cos u \cos(t-u) du = \frac{1}{2} \int_0^T (\cos t + \cos(t-u)) du \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^T \cos t du + \int_0^T \cos(t-u) du \right] = \frac{1}{2} \left[t \cos t + \int_0^T \frac{\cos u}{2} du \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[t \cos t + \frac{\sin u}{2} \right]_0^T = \frac{1}{2} \left[t \cos t + \frac{\sin t}{2} \right] = \frac{t \cos t + \sin t}{2}\end{aligned}$$

مثلا) کانولوشن تابع $\cos(t)$ رو با 1 گیر بیار

$$(f * 1)(t) = \int_0^t \cos(x) dx = \sin t$$

پس معلومه که " $f * 1$ " با " f خود" لزوما مساوی نیست، فکر نکنی مثل ضرب در یکه 😊

اما چه ربطی به لاپلاس و دیفرانسیل داره؟ اینهاش

• میگه اگه لاپلاس دو تا تابع رو تفکیک کنی (مثلا میشه

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g) &= \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g \\ (f * g) &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g)\end{aligned}$$

دوتا کسر) بعد معکوس بگیری و اون دوتایی که به

دست میان رو اگه کانولوشن بگیری، تابع اصلی رو

گیر میاری (قول میدم این آخریشه، برو سراغ مثال 🖐)

مثلا) معکوس لاپلاس این یارو چی میشه $F(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}$



Learn with video

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{s^2} \times \frac{a}{s^2+a^2} &\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} (t * \sin at) = \int_0^t (t-u) \sin au \, du \\ &= \int_0^t t \sin au \, du - \int_0^t u \sin au \, du \xrightarrow{\text{ثابت کشایدگی}} \frac{aT - \sin aT}{a^2} \\ &\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g\} = f * g \end{aligned}$$

مثلا) معکوس لاپلاس تابع $\frac{1}{(s^2+1)^2}$ رو گیر بيار

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{s^2+1} \times \frac{1}{s^2+1} &\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} (\sin t * \sin t) = \int_0^t \sin u \sin(t-u) \, du = \\ \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2u-t) - \cos t \, du &\xrightarrow{\text{خلاصه}} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2u-t) - u \cos t \right]_0^t = \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin t - t \cos t - \frac{1}{2} \sin(-t) \right) &= \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

بين ما مستقيم بلد نيستيم معكوس لاپلاس اينارو بگيريم ولي با

كانولوشن ميتونيم سر هم بياريمش 😊

يادت باشه براي لاپلاس معكوس گرفتن، تابعي كه داده رو به دو تا تابعي تفكيك كني كه لاپلاس معكوس هر كدوم رو بلد باشي

مثلا) معكوس لاپلاس تابع $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$ رو گیر بيار

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{s-1} \times \frac{1}{s+2} &\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} (e^t * e^{-2t}) = \int_0^t e^u e^{-2(t-u)} \, du = \\ \int_0^t e^u e^{-2t} e^{2u} \, du &= e^{-2t} \int_0^t e^{3u} \, du = e^{-2t} \left[\frac{e^{3u}}{3} \right]_0^t = \frac{e^t - e^{-2t}}{3} \end{aligned}$$

برای بهتر فهمیدن باید بدونی مثلا اگه به جای ضرب، جمع بود راحت لاپلاس معکوس می گرفتیم (قبل از كانولوشن همينجوري ياد گرفته بودی)

همین مثال بالا اينجوري می شد 📌

$$\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2} \xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} e^t + e^{-2t}$$

مثلا) دهنو شیرين كن به اين معادله ديفرانسيال $y''+9y=t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow s^2 \mathcal{L}\{y\} - s y(0) - y'(0) + 9 \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2(s^2+9)}$$

$$s^2 L + 9L = \frac{1}{s^2} \rightarrow L(s^2 + 9) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow L = \frac{1}{s^2(s^2 + 9)}$$

$$\text{از هجیو لایلاس معکوس} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{L\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2 + 9)}\right\} \Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \times \frac{1}{s^2 + 9}\right\} \Rightarrow$$

$$y = (t * \frac{\sin 3t}{3}) = \int_0^t \frac{1}{3} \sin(3u) (t-u) du \xrightarrow{\text{خلاصه}} y(t) = \frac{1}{9} (t - \frac{1}{3} \sin(3t))$$

مثلا) این معادله دیفرانسیل رو حل کن $y'' + y = 2t$, $y'(0)=0$, $y(0)=0$

اینو به دو روش حل کردم بینی یادآوری بشه 😊

راه اول (با کانولوشن)

$$y'' + y = 2t \xrightarrow{\text{لایلاس}} \mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{t\} \rightarrow s^2 L - s f(0) - f'(0) + L = \frac{2}{s^2}$$

$$s^2 L + L = \frac{2}{s^2} \rightarrow L(s^2 + 1) = \frac{2}{s^2} \rightarrow L = \frac{2}{s^2(s^2 + 1)} \xrightarrow{\text{لایلاس معکوس}} \mathcal{L}^{-1}\{L\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s^2 + 1)}\right\}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2} \times \frac{1}{s^2 + 1}\right\} \rightarrow y = (2t * \sin t) = \int_0^t (\sin u) (2)(t-u) du \rightarrow$$

$$2 \left[\int_0^t t \sin u - \int_0^t u \sin u \right] = 2 \left[-t \cos u + u \cos u - \sin u \right]_0^t \rightarrow$$

$$2 \left[(-t \cos t + t \cos t - \sin t) - (-1) \right] = 2t - 2 \sin t = 2(t - \sin t)$$

راه دوم (با تفکیک کسر) [همون قدیمی]

$$L = \frac{2}{s^2(s^2 + 1)} \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2 + 1} = \frac{2}{s^2(s^2 + 1)} \rightarrow \begin{cases} As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^2 + Ds = 2 \\ (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + As + B = 2 \end{cases} \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=0 \\ D=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^2 + 1} \xrightarrow{\text{لایلاس معکوس}} 2t - 2 \sin t \quad \text{هول سر}$$

خب بیا این مثال رو به همه روش هایی که یاد گرفتیم حل کنیم

تا مروری بشه : $y'' + y = e^x$

با فرض $y(0)=0$, $y'(0)=0$

راه اول (با کانولوشن)

$$y'' + y = e^x \xrightarrow{\text{لایلاس}} s^2 L - s f(0) - f'(0) + L = \frac{1}{s-1} \Rightarrow s^2 L$$

مشر

$$y'' + y = e^x \xrightarrow{\text{لایلاس}} s^2 L - s f(0) - f'(0) + L = \frac{1}{s-1} \Rightarrow s^2 L + L = \frac{1}{s-1} \rightarrow L(s^2 + 1) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow L = \frac{1}{(s^2 + 1)(s-1)} \xrightarrow{\text{لایلاس معکوس}}$$

$$y = (\sin t * e^t) = \int_0^t \sin u e^{t-u} du = \int_0^t \sin u e^t e^{-u} du = e^t \int_0^t e^{-u} \sin u du \xrightarrow{\text{خلاصه}} -\frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t + \frac{t}{4}$$

یا همچون $-\frac{1}{4} \cos u - \frac{1}{4} \sin u + \frac{e^u}{4}$

راه دوم (با تفکیک کسر)

$$L = \frac{1}{(s^2+1)(s-1)} \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} = \frac{1}{(s^2+1)(s-1)} \Rightarrow As^2 - As + Bs - B + Cs^2 + C = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=0 \\ C-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^{-1}\{L\} = -\frac{1}{2}d^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{2}d^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{2}d^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^t$$

راه سوم (ضرایب لاگرانژ)

$$y'' + y = 0 \rightarrow m^2 + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta} -4 \xrightarrow{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \pm \sqrt{-4} = \pm 2i \xrightarrow{a+ib} a=0, b=+1$$

همیشه مثبت را برمی داریم

$$\Rightarrow y = e^{ax} (\cos bx + \sin bx) \rightarrow y_1 = \cos x, y_2 = \sin x \Rightarrow y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$v_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int -e^u \sin u du = \frac{e^u}{2} (\cos u - \sin u)$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int e^u \cos u du = \frac{e^u}{2} (\cos u + \sin u)$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{vmatrix} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + v_1 y_1 + v_2 y_2 = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2} (\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin x \cos x + \sin^2 x) = \Rightarrow$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2}$$

$$y'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{e^x}{2}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) + \frac{e^0}{2} \Rightarrow 0 = c_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2} \\ y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = -c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) + \frac{e^0}{2} \Rightarrow 0 = c_2 + \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{e^x}{2}$$

راه چهارم (ضرایب نامعین)

$$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$$

$$y(x) = Ae^x \rightarrow y'(x) = Ae^x \rightarrow y'' = Ae^x$$

$$y'' + y = e^x \rightarrow Ae^x + Ae^x = e^x \Rightarrow (2A)e^x = e^x \Rightarrow 2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = Ae^x = \frac{1}{2}e^x \Rightarrow y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{e^x}{2}$$

راه پنجم (عملی)

$y_1 = \cos x$ و $y_2 = \sin x$ طبق قسمت قبلی $\Rightarrow$ اول به صورت همگی

$$y'' + y = e^x \rightarrow (D^2 + 1)y = e^x \Rightarrow \frac{1}{D^2 + 1} e^x = y \xrightarrow{\text{ضرب بتوان } e^x \text{ یعنی (1) را جای (D) می‌ذاریم}} \frac{1}{(1)^2 + 1} e^x = \frac{e^x}{2} = y_n^{(1)} \quad (\text{مستورنا همگنه})$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2} \xrightarrow{\text{جواب خصوصی طبق قبلی}} y(x) = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{e^x}{2}$$

$y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$

دیدید که همشون به جواب میشن...

به روش سری هم میشه حل کرد؟! معلومه فقط اینجا همگن هاشو خونديم (یعنی طرف راست معادله صفر بود)، اینو می‌سپرم به تو، حل کردی حتما بفروست...

اگه برات مفید بود، حتما با دوستان به اشتراک بزار ❤️

دانلود نسخه PDF

قسمت قبلی 📌



دانلود نسخه PDF

همین جزوه 📌



تجربه ای بی‌نظیر