ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود گام به گام
- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش
- دانلود فیلم و مقاله آنلیزشی
- کنکور و مشاوره

IranTooshe.Ir

@irantooshe

IranTooshe

دفترچه پاسخ

آزمون ۲ دی ۱۴۰۱

اختصاصی دوازدهم ریاضی (دفترچه مشترک)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

اختصاصی	نام درس	نام طراحان
	حسابان ۲ و ریاضی پایه	کاظم اجلالی-امیرمحمد باقری‌نصرآبادی-شاهین پروازی-میلاد چاشمی-عادل حسینی-میثم حمزه‌لویی-طاهر دادستانی فرامرز سپهری-میلاد سجادی‌لاریجانی-علی شعبانی-علی شهرابی-عرفان صادقی-پویان طهرانیان-کامیار علّییون- وحید ون‌آبادی
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-فرزانه خاکپاش-محمد خندان-سوگند روشنی-سیدامیر ستوده-محسن محمدکریمی-مهرداد ملوندی- سروش موئینی
	آمارو احتمال و ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-محسن بهرام‌پور-رضا توکلی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-امیرهوشنگ خمسه مسعود درویشی-سوگند روشنی-علیرضا شریف‌خطیبی-فرشاد صدیقی‌فر-مهدی عزیزی-عزیزاله علی‌اصغری-علی اکبر علیزاده مرتضی فهیم‌علوی-نوید مجیدی-میلاد منصوری-نیلوفر مهدوی-امیر وفائی
	فیزیک	خسرو ارغوانی‌فر-حسن اسحاق‌زاده-محمد اسدی-بابک اسلامی-نصراله افاضل-عبدالرضا امینی‌نسب-زهره آقامحمدی امیرمهدی جعفری-ملیحه جعفری-محمدعلی راست‌پیمان-بهنام رستمی-مهدی سلطانی-سعید طاهری‌بروجنی-حمید عباسی عرفان عسکریان‌چایجان-علی قائمی-مسعود قره‌خانی-محسن قندچلر-بهادر کامران-علیرضا گونه-حسین مخدومی-سپهر مهرور علی نظری-حامد نیسانی-مصطفی واثقی-شادمان ویسی
	شیمی	حامد اسماعیلی-شهرام امیرمحمودی-جعفر پازوکی-محمدرضا پورجاوید-علی جدی-احمدرضا جعفری‌نژاد-مرتضی خوش‌کیش موسی خیاط علیمحمدی-فرزاد رضایی-مرتضی رضائی زاده-محمد رضائی-امید رضوانی-روزبه رضوانی-رضا سلیمانی ساجد شیری-امیرحسین طیبی‌سودکلایی-محمد عظیمیان‌زواره-حسن عیسی‌زاده-محمدپارسا فراهانی-محمدحسن محمدزاده‌مقدم رضا هنرمند

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲و ریاضی پایه	هندسه	آمارو احتمال و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	علی شهرابی	امیرحسین ابومحبوب	سوگند روشنی	بابک اسلامی	ایمان حسین نژاد
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی علی سرآبادانی	عادل حسینی علی محمدزاده شبستری	عادل حسینی علی محمدزاده شبستری	حمید زرین کفش زهره آقامحمدی	یاسر راش محمدحسن محمدزاده مقدم
		ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: مهرداد ملوندی	ویراستار استاد: سیدعلی میرنوری	بازبینی نهایی: امیرحسین عزیزی
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	بابک اسلامی	امیرحسین مسلمی
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	مجتبی خلیل‌ارجمندی	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	محمد اکبری
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: مازیار شیروانی مقدم — مسئول دفترچه: محمدرضا اصفهانی
حروف‌نگار	میلاد سیاوشی
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

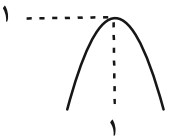
بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۳»** (میلاد سجادی‌لاریجانی)

نمودار سهمی در همسایگی $x=1$ به صورت زیر است:



پس در یک همسایگی $x=1$ ، مقادیر $f(x)$ کمتر از ۱ است و داریم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{f^2(x)-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{(f(x)+1)(f(x)-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{2(f(x)-1)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۲- **گزینهٔ «۴»** (پویان طهرانیان)

حد هرکدام از گزینه‌ها را حساب و بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{[-2x]+1}{x^3(1-x^4)}=\frac{[(-2)^-]+1}{1(1-1^+)}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{[-2x]+1}{x^3(1-x^4)}=\frac{[2^+]+1}{-1(1-1^+)}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[-2x]+1}{x^3(1-x^4)}=\frac{[0^+]+1}{0^-(1-0^+)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[-2x]+1}{x^3(1-x^4)}=\frac{[0^-]+1}{0^+(1-0^+)}=\frac{\text{صفر مطلق}}{0^+}=\text{صفر}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۳- **گزینهٔ «۱»** (طاهر دارستانی)

حدود چپ و راست در $x=1$ هر دو برابر $-\infty$ است، پس $x=1$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد، ریشه دیگر مخرج را c در نظر می‌گیریم و داریم:

$$x^3+ax+b=(x-1)^2(x-c)=(x^2-2x+1)(x-c)$$
$$\Rightarrow x^3+ax+b=x^3-(c+2)x^2+(2c+1)x-c$$
$$\Rightarrow c+2=0\Rightarrow c=-2\Rightarrow\begin{cases}a=2c+1=-3\\ b=-c=2\end{cases}$$
$$\Rightarrow 3a+b=-7$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۵)

۴- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

حد این تابع در $\pm\infty$ زمانی یک عدد حقیقی می‌شود که درجه صورت کم‌تر از یا مساوی با درجه مخرج باشد. اگر کمتر باشد، حاصل حد صفر و اگر مساوی باشد حاصل یک عدد ناصفر است.

حال در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

الف) درجه صورت و مخرج برابر باشند:

$$2n-1=3\Rightarrow n=2\Rightarrow f(x)=\frac{2x^3+5x^2-1}{2x^3-3x^2+1}$$
$$\Rightarrow m=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3}{2x^3}=1$$

ب) درجه مخرج بزرگ‌تر باشد:

$$2n-1>n,3\Rightarrow n>2$$

در این حالت $m=0$ است.

پس مجموع مقادیر m برابر ۱ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۵- **گزینهٔ «۳»** (کامیار علّیون)

ابتدا باید حاصل $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}$ را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

پس حاصل حد با حاصل $\lim_{x\to+\infty}\left[(fofof)(x)\right]$ برابر است. در این حد نیز مرحله به مرحله پیش می‌رویم:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

اما تابع از مقادیر کم‌تر از یک به آن نزدیک می‌شود:

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$$

در نهایت داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}[fofof(x)]=\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=[3^-]=2$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲ و ۶۱ تا ۶۶)

۶- **گزینهٔ «۲»** (علی شهرابی)

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2x+2}{x+1}-\frac{1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (۲-\frac{۱}{x+۱}) = \lim_{x\to+\infty} (۲-\frac{۱}{+\infty}) = ۲-۰^+ = ۲^-$$

حد $f(x)$ در $+\infty$ برابر ۲ است، ولی تابع از مقادیر کمتر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} gof = \lim_{x\to ۲^-} g(x) = \tan\left(\frac{\pi}{۲^-}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{۲}\right)^+ = -\infty$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲ و ۶۱ تا ۶۶)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(میثم حمزه‌لویی)*

ابتدا مخرج تابع را گویا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(ax-۵)\times(\sqrt{۴x^۲+۵}+۳x)}{(\sqrt{۴x^۲+۵}-۳x)(\sqrt{۴x^۲+۵}+۳x)}$$

$$= \frac{(ax-۵)(\sqrt{۴x^۲+۵}+۳x)}{۵-۵x^۲}$$

حال داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(ax-۵)(\sqrt{۴x^۲+۵}+۳x)}{۵-۵x^۲}$$

$$= \frac{۶(a-۵)}{۰^-} = -\infty$$

پس باید $a-۵>۰$ و در نتیجه $a>۵$ باشد.

حال سراغ محاسبه حد آخر می‌رویم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax-۵}{\sqrt{۴x^۲+۵}-۳x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{|۲x|-۳x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{-۵x} = -\frac{a}{۵}$$

پس حاصل این حد در محدودهٔ $(-\infty,-۱)$ تغییر می‌کند.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(شاهین پروازی)*

حد را در مزدوج عبارت داخل پرانتز ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{\frac{x-۲}{x-۱}}-\frac{x-۳}{x-۱})\times\underbrace{\frac{(\sqrt{\frac{x-۲}{x-۱}}+\frac{x-۳}{x-۱})}{(\sqrt{\frac{x-۲}{x-۱}}+\frac{x-۳}{x-۱})}}_{۲}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{۲}\left(\frac{x-۲}{x-۱}-\frac{(x-۳)^۲}{(x-۱)^۲}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{۲}\left(\frac{(x-۲)(x-۱)-(x-۳)^۲}{(x-۱)^۲}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{۲}\left(\frac{۳x-۷}{(x-۱)^۲}\right)$$

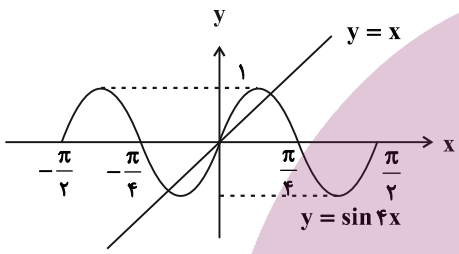
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x^۲-۷x}{۲x^۲-۴x+۲} = \frac{۳}{۲}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(علی شهرابی)*

حد تابع در $+\infty$ برابر صفر است، پس خط $y=۰$ تنها مجانب افقی f است.

ریشه‌های مخرج از حل معادلهٔ $x-\sin ۴x=۰$ یا $\sin ۴x = x$ بدست می‌آیند. از روش هندسی کمک می‌گیریم:



دو نمودار در سه نقطه متقاطع‌اند، یعنی معادله $x-\sin ۴x=۰$ سه جواب و نمودار تابع سه مجانب قائم دارد. پس در کل $۳+۱=۴$ مجانب دارد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

حد تابع f در $+\infty$ و $-\infty$ را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{|۳x+۱|-x}{x+۴} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x-x}{x} = ۲ \xrightarrow{\text{مجانب افقی}} y=۲ \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{|۳x+۱|-x}{x+۴} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-۳x-x}{x} = -۴ \xrightarrow{\text{مجانب افقی}} y=-۴ \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ فاصله مجانب‌ها $= ۶$

ریشه‌های مخرج تابع g هم، مجانب‌های قائم g هستند.

$$۲x^۲-۸x+a=۰$$

فاصله مجانب‌ها همان اختلاف ریشه‌ها است که باید برابر ۶ باشد، پس:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۶ \Rightarrow \frac{\sqrt{۶۴-۸a}}{۲}=۶ \Rightarrow ۶۴-۸a=۱۴۴ \Rightarrow a=-۱۰$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷، ۶۷ و ۶۸)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ریاضی پایه

۱۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمد باقری‌نصرآبادی)*

می‌دانیم، $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ، پس داریم:

$$\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_a b} = \log_a^b + \log_b^a \quad (*)$$

از طرفی $ab = 1$ و $b = \frac{1}{a}$ است. پس داریم:

$$\log_a^b + \log_b^a = \log_a \frac{1}{a} + \log_{\frac{1}{a}} a = \log_a a^{-1} + \log_{a^{-1}} a$$

$$= -1 - 1 = -2$$

(حسابان ۱- صفحهٔ ۸۶)

۱۲- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

با توجه به خط‌چین افقی رسم شده که معادله‌اش $y = -2$ است، نتیجه می‌گیریم $-b = -2$ ، پس $b = 2$ است.

تا این جا ضابطه به صورت $f(x) = 2^{x+c} - 2$ شد.

تابع از نقطهٔ $(0,0)$ می‌گذرد، پس: $f(0) = 0 \Rightarrow 2^c - 2 = 0 \Rightarrow c = 1$

$$\Rightarrow c - b = -1$$

پس ضابطه تابع $f(x) = 2^{x+1} - 2$ است و داریم:

$$f(c-b) = f(-1) = 2^{-1+1} - 2 = -1$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(پویان طهرانیان)*

$$3^{2x-1} = (2^3)^{1-\frac{x}{3}} \Rightarrow 3^{2x-1} = 2^{3-x}$$

از طرفین تساوی بالا در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$\Rightarrow 2x - 1 = (3-x)\log_3 2$$

با فرض $\log_3 2 = \frac{3}{5}$ داریم:

$$2x - 1 = \frac{9}{5} - \frac{3}{5}x \Rightarrow \frac{13}{5}x = \frac{14}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{14}{13}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(طاهر دادستانی)*

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)^x + \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^x = 10$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^x + \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^x = 10 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{5}{2}\right)^x = 4$$

با تغییر متغیر $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$ داریم:

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^{x_1} = 2 + \sqrt{3} \\ t_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^{x_2} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

با ضرب طرفین تساوی بالا داریم:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x_1}\left(\frac{2}{5}\right)^{x_2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x_1+x_2} = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(علی شهرابی)*

ضابطه f را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{8^x - 27}{2^x - 3} = \frac{(2^x)^3 - 3^3}{2^x - 3} = \frac{(2^x - 3)(4^x + 3(2^x) + 9)}{2^x - 3}$$

$$\xrightarrow{2^x \neq 3} f(x) = 4^x + 3(2^x) + 9$$

f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{\log_2 3\}$ است.

حد تابع در $-\infty$ و $+\infty$ ، سر و ته بازهٔ برد f را می‌دهد:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 9$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

از طرفی اگر $2^x = 3$ باشد، آن‌گاه خروجی f برابر است با:

$$(2^x)^2 + 3(2^x) + 9 = 3^2 + 3(3) + 9 = 27$$

پس: $R_f = (9, +\infty) - \{27\}$

$D_{f^{-1}}$ همان R_f است، پس $D_{f^{-1}}$ شامل ۱۰ عدد طبیعی نمی‌شود:

$$\{1, 2, ..., 9, 27\}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷۲ تا ۸۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

روش اول: $x=1$ در دامنه تابع قرار ندارد، پس گزینه‌های «۱» و «۲» نادرست‌اند. از طرفی $x=2$ نیز باید در دامنه قرار داشته باشد، پس گزینهٔ «۳» درست است.

روش دوم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x-2)\log(2x-1)}{\log x}}$$

برای هر سه عبارت جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم:

	0		$\frac{1}{2}$		1		2	
$x-2$	−	−	−	−	۰	+		+
$\log(2x-1)$	∄	∄	−	۰	+		+	
$\log x$	∄	−	−	۰	+		+	
عبارت	∄	∄	−	تن	−	۰	+	

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس با توجه به جدول بالا $D_f=[2,+\infty)$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرمحمد باقری نصرآبادی)*

از قوانین لگاریتم استفاده می‌کنیم تا پس از ساده کردن، a و b را به هم ربط دهیم:

$$a=\log_2 42=\log_2 2\times 21=\log_2 2+\log_2 21=1+\log_2 21$$
$$\Rightarrow \log_2 21=a-1$$

$$b=\log_{21} 3=\log_2 3\times\log_{21} 2=\log_2 3\times\left(\frac{1}{a-1}\right)$$
$$\Rightarrow \log_2 3=b(a-1)\Rightarrow \log_3 2=\frac{1}{b(a-1)}$$

حال حاصل $\log_9 8$ را حساب می‌کنیم:

$$\log_9 8=\log_{3^2} 2^3=\frac{3}{2}\log_3 2=\frac{3}{2b(a-1)}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(شاهین پروازی)*

$$\log_{\frac{3}{2}}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}+\log_3 a=3+\log_{\frac{1}{2}} b=T$$

$$\log_{\frac{3}{2}}(a^2+b^2)=T\Rightarrow a^2+b^2=\left(\frac{3}{2}\right)^T=3^T\left(\frac{1}{2}\right)^T \quad (*)$$

$$\frac{1}{2}+\log_3 a=T\Rightarrow \log_3 a=T-\frac{1}{2}\Rightarrow a=(3)^{T-\frac{1}{2}}\Rightarrow 3^T=\sqrt{3}a$$

$$3+\log_{\frac{1}{2}} b=T\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} b=T-3\Rightarrow b=\left(\frac{1}{2}\right)^{T-3}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^T=\frac{b}{8}$$

حال بر اساس رابطهٔ $(*)$ داریم:

$$a^2+b^2=(\sqrt{3}a)\left(\frac{b}{8}\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}ab$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(علی شعبانی)*

ابتدا از طرفین معادله داده شده، در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم تا معادلهٔ درجه دوم بسازیم:

$$x^2-x=\log_{10}^{5}=\log 5\Rightarrow x^2-x-\log 5=0$$

در این معادله درجه دوم $S=\alpha+\beta=1$ و $p=\alpha\beta=-\log 5$ است، پس داریم:

$$A=(\alpha+\beta)+(\alpha\beta)=S+P=1-\log 5=\log 2$$

حال با استفاده از ویژگی $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$ حاصل 100^A را حساب می‌کنیم:

$$100^A=100^{\log 2}=2^{\log 100}=2^2=4$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۷ و ۸۸)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(میثم حمزه‌لویی)*

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم؛ این را هم می‌دانیم که $x>1$ است.

$$\sqrt{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{\log_2 x}+2\log_2 x^{-\frac{1}{2}}=2$$
$$\Rightarrow 3\sqrt{\log_2 x}-\log_2 x=2$$

با تغییر متغیر $\sqrt{\log_2 x}=T$ داریم:

$$3T-T^2=2\Rightarrow T^2-3T+2=(T-1)(T-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}T_1=\sqrt{\log_2 x_1}=1\Rightarrow \log_2 x_1=1\Rightarrow x_1=2\\ T_2=\sqrt{\log_2 x_2}=2\Rightarrow \log_2 x_2=4\Rightarrow x_2=16\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر $x_1+x_2=18$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸۷ و ۸۸)

ایران توشه
تشنه‌ای برای موفقیت

هندسه ۳

۲۱- **گزینهٔ «۴»** (محمد خندان)

معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ متعلق به یک دایره است، هرگاه $a^۲+b^۲-۴c>۰$ باشد. با بررسی گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ «۱»: $a=۴,b=-۳,c=۵$

$$a^۲+b^۲-۴c=۱۶+۹-۲۰=۵>۰$$

گزینهٔ «۲»: $a=-۵,b=۳,c=۸$

$$a^۲+b^۲-۴c=۲۵+۹-۳۲=۲>۰$$

گزینهٔ «۳»: $x^۲+y^۲+۳x-۲y+۳=۰$

$$a=۳,b=-۲,c=۳$$

$$a^۲+b^۲-۴c=۹+۴-۱۲=۱>۰$$

گزینهٔ «۴»: $x^۲+y^۲-\frac{۳}{۲}x+۲y+۲=۰$

$$a=-\frac{۳}{۲},b=۲,c=۲$$

$$a^۲+b^۲-۴c=\frac{۹}{۴}+۴-۸=-\frac{۷}{۴}<۰$$

بنابراین معادلهٔ گزینهٔ «۴» به یک دایره تعلق ندارد.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۲۲- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

خط d و دایرهٔ C در صورتی یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند که فاصلهٔ مرکز دایره از خط، کوچکتر از شعاع دایره باشد.

$$C: x^۲+y^۲-۲x+۲y-۳=۰$$

مرکز دایره: $O(۱,-۱)$

شعاع دایره: $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+۲^۲-۴(-۳)}=\sqrt{۵}$

اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $x-۲y+m=۰$ را با d نمایش دهیم، داریم:

$$d=\frac{|۱-۲(-۱)+m|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}=\frac{|m+۳|}{\sqrt{۵}}$$

$$d<R\Rightarrow\frac{|m+۳|}{\sqrt{۵}}<\sqrt{۵}\Rightarrow|m+۳|<۵$$

$$\Rightarrow -۵<m+۳<۵\Rightarrow -۸<m<۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۲۳- **گزینهٔ «۲»** (محمد خندان)

می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، بر خط مماس بر دایره در این نقطه عمود است، پس داریم:

مرکز دایره: $O(۱,۱)\Rightarrow m_{OA}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$

اگر خط مماس را با d نمایش دهیم، آن‌گاه $m_d=-\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه معادلهٔ خط مماس به صورت زیر است:

$$y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)\xrightarrow{\times ۲}۲y-۶=-x+۲$$

$$\Rightarrow x+۲y=۸$$

در بین نقاط داده شده تنها مختصات نقطهٔ $(-۲,۵)$ در معادلهٔ این خط صدق می‌کند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۲۴- **گزینهٔ «۳»** (فرزانه خاکپاش)

ابتدا مرکز و شعاع هرکدام از دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$C: x^۲+y^۲+۲x+۴y-k=۰$$

$$O(-۱,-۲),R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+۴^۲-۴(-k)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰+۴k}=\sqrt{۵+k}$$

$$C': x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$$

$$O'(۳,۱),R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+(-۲)^۲-۴(۹)}=۱$$

طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:

$$OO'=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۱+۲)^۲}=۵$$

شرط مماس داخل بودن دو دایره عبارت است از:

$$OO'=|R-R'|\Rightarrow ۵=|\sqrt{۵+k}-۱|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{۵+k}-۱=۵\Rightarrow\sqrt{۵+k}=۶\Rightarrow ۵+k=۳۶\Rightarrow k=۳۱\\ \sqrt{۵+k}-۱=-۵\Rightarrow\sqrt{۵+k}=-۴\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۲۵- **گزینهٔ «۳»** (سوگند روشنی)

تمام قطرهای دایره از مرکز آن عبور می‌کنند، بنابراین ابتدا با انتخاب دو مقدار متفاوت برای پارامتر m، مختصات مرکز دایره را پیدا می‌کنیم.

$$m=-۱\Rightarrow ۳y=-۶\Rightarrow y=-۲$$

$$m=۲\Rightarrow ۳x=۱۲\Rightarrow x=۴$$

بنابراین نقطهٔ $O(۴,-۲)$ مرکز دایرهٔ C است. شعاع این دایره برابر است با:

$$R=OA=\sqrt{(۱-۴)^۲+(۲+۲)^۲}=۵$$

از طرفی $O'(۰,۰)$ مرکز و $R'=۲$ شعاع دایرهٔ C' است، پس داریم:

$$d=OO'=\sqrt{(۰-۴)^۲+(۰+۲)^۲}=۲\sqrt{۵}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده $R-R'<d<R+R'$ است، پس دو دایره متقاطع هستند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۲۶- **گزینهٔ «۴»** (فرزانه خاکپاش)

مرکز و شعاع دو دایره عبارتند از:

$$C: x^۲+y^۲=۱۶\Rightarrow O(۰,۰),R=۴$$

$$C': x^۲+y^۲-۶x+۸y=۰$$

$$O'(۳,-۴),R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+۸^۲}=۵$$

ایران توشه — تست‌های برای موفقیت

بنابراین دایرهٔ C از دایرهٔ C' کوچک‌تر است. برای پیدا کردن معادلهٔ وتر مشترک دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^۲+y^۲-۱۶=x^۲+y^۲-۶x+۸y \Rightarrow ۶x-۸y-۱۶=۰$$
$$\Rightarrow ۳x-۴y-۸=۰$$

فاصلهٔ نقطهٔ $O(۰,۰)$ (مرکز دایرهٔ کوچک‌تر) از وتر مشترک برابر است با:

$$D=\frac{|۳(۰)-۴(۰)-۸|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۸}{۵}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

با فرض $a=۲m$، مرکز دایرهٔ C به صورت $O(-۱,-m)$ است. خطوط داده شده بر دایرهٔ C مماس‌اند، پس فاصلهٔ مرکز دایره از این دو خط با هم برابر بوده و مساوی شعاع دایره است:

$$R=|-m-۱|=\frac{|۳(-۱)-۴(-m)-۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵m+۵=۴m-۵ \Rightarrow m=-۱۰ \Rightarrow a=-۲۰, R=۹ \quad (۱) \\ ۵m+۵=۵-۴m \Rightarrow m=۰ \Rightarrow a=۰, R=۱ \quad (۲) \end{cases}$$

در هرکدام از حالت‌ها، شعاع دایره را از روی معادلهٔ ضمنی دایره به دست می‌آوریم:

$$(۱): R=۹=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۲۰)^۲-۴b}$$
$$\Rightarrow ۴۰۴-۴b=۱۸^۲=۳۲۴ \Rightarrow b=۲۰$$
$$(۲): R=۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+۰^۲-۴b}$$
$$\Rightarrow ۴-۴b=۲^۲=۴ \Rightarrow b=۰$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث OAB به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. در این صورت داریم:

$$O(۰,۰) \Rightarrow ۰+۰+۰+c=۰ \Rightarrow c=۰$$
$$A(-۲,۴) \Rightarrow ۴+۱۶-۲a+۴b=۰ \Rightarrow a-۲b=۱۰$$
$$B(۴,۲) \Rightarrow ۱۶+۴+۴a+۲b=۰ \Rightarrow ۲a+b=-۱۰$$
$$\begin{cases} a-۲b=۱۰ \\ ۲a+b=-۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b=-۶ \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ دایره به صورت $x^۲+y^۲-۲x-۶y=۰$ است. دایره را با محور yها تلاقی می‌دهیم:

$$x=۰ \Rightarrow y^۲-۶y=۰ \Rightarrow y(y-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} y=۰ \\ y=۶ \end{cases}$$

بنابراین طول وتر ایجاد شده برابر فاصلهٔ دو نقطهٔ تلاقی دایره با محور yها، یعنی برابر ۶ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۲۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

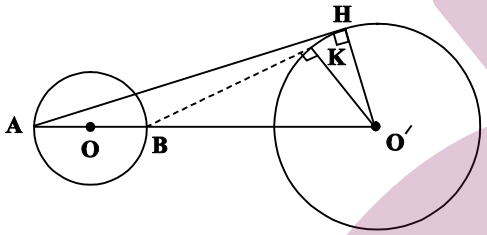
ابتدا مرکز و شعاع دو دایره را تعیین می‌کنیم:

$$C: x^۲+y^۲+۱۴x+۲y+۴۹=۰$$
$$O(-۷,-۱), R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۴^۲+۲^۲-۴(۴۹)}=۱$$
$$C': x^۲+y^۲-۱۴x+۲y-۹۴=۰$$
$$O'(۷,-۱), R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱۴)^۲+۲^۲-۴(-۹۴)}=۱۲$$

طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:

$$OO'=|۷-(-۷)|=۱۴$$

چون $OO'>R+R'$، پس دو دایره متخارج هستند.



مطابق شکل مماس‌های رسم شده از نقاط A و B به‌ترتیب، بلندترین و کوتاه‌ترین مماس‌هایی هستند که می‌توان از نقاط واقع بر دایرهٔ C، بر دایرهٔ C' رسم کرد. داریم:

$$O'A=OO'+OA=۱۵$$
$$\overset{\Delta}{O'AH}: AH^۲=O'A^۲-O'H^۲=۱۵^۲-۱۲^۲=۸۱$$
$$\Rightarrow AH=۹$$
$$O'B=OO'-OB=۱۳$$
$$\overset{\Delta}{O'Bk}: BK^۲=O'B^۲-O'K^۲=۱۳^۲-۱۲^۲=۲۵ \Rightarrow BK=۵$$

پس اختلاف طول دو مماس برابر است با:

$$AH-BK=۹-۵=۴$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

۳۰- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

مرکز و شعاع دایرهٔ $C': x^۲+y^۲-۲x-۲y+۱=۰$ به صورت زیر است:

$$O'(۱,۱), R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+۲^۲-۴(۱)}=۱$$

چون دایرهٔ C بر محور xها مماس است، شعاع آن برابر قدر مطلق عرض مرکز دایره است، پس $R=۱۶$ و در نتیجه با توجه به اینکه دو دایرهٔ C و C' مماس بیرونی‌اند، داریم:

$$OO'=R+R' \Rightarrow \sqrt{(m-۱)^۲+(۱۶-۱)^۲}=۱۶+۱$$
$$\Rightarrow (m-۱)^۲=۱۷^۲-۱۵^۲=۶۴$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m-۱=۸ \Rightarrow m=۹ \\ m-۱=-۸ \Rightarrow m=-۷ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر}=۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(رضا توکلی)*

دو یال زمانی مجاورند که در یک رأس مشترک باشند. اگر $ab \in E$ باشد. یال ab با $\deg(a)+\deg(b)-۲$ یال مجاور است. پس:

$$\deg(a)+\deg(b)-۲=۷ \xrightarrow{\deg(a)=۵} \deg(b)=۴$$

بنابراین رأس b با چهار رأس مجاور است.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ و ۳۶)

۳۲- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

هنگامی که همسایگی بسته رأس $v_۲$ برابر ۴ است، درجه این رأس ۳ می‌باشد. بنابراین ۳ یال به $v_۲$ وصل شده است.

و باید ۱ یال دیگر را انتخاب کنیم زیرا $\sum_{v\in V}\deg(v)$ یا مجموع درجات گراف ۸ و در نتجه تعداد یال‌های گراف ۴ خواهد بود.

$$(۲q=۸ \Rightarrow q=۴)$$

اگر رأس $v_۲$ را کنار بگذاریم، ۴ رأس دیگر حداکثر $\binom{۴}{۲}=۶$ یال می‌توانند داشته باشند که از میان آن‌ها ۱ یال را انتخاب می‌کنیم.

از طرفی ۳ یالی که از $v_۲$ خارج می‌شوند می‌توانند به $\binom{۴}{۳}=۴$ حالت به ۳ رأس دیگر وصل شوند.

$$\binom{۴}{۳}\times\binom{۶}{۱}=۲۴$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۳۳- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

حالاتی که حاصلضرب مرتبه و اندازه گراف ۵۰ شود برابر $\begin{cases}p=۵\\q=۱۰\end{cases}$ است که از این حالات

p	۱	۵۰	۲	۲۵	۵	۱۰
q	۵۰	۱	۲۵	۲	۱۰	۵

گراف همبند است و فقط گراف کامل مرتبه ۵ قابل قبول است.

برای زیر گراف ۳- منتظم باید ۴ رأس داشته باشیم و تعداد حالاتی که ۴ رأس از این رئوس انتخاب کنیم. $\binom{۵}{۴}=۵$ حالت است.

از طرفی گراف ۳- منتظم مرتبه ۵ وجود ندارد پس فقط ۵ حالت انتخاب گراف ۳- منتظم مرتبه ۴ را خواهیم داشت.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۳۴- **گزینهٔ «۲»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

در گراف G داریم:

$$rp=۲q \rightarrow ۶p=۲q \ (*)$$

در گراف G' داریم:

$$r'p=۶۰$$

$$\xrightarrow{\text{می‌دانیم } r+r'=p-۱} ۶+r'=p-۱ \rightarrow r'=p-۷$$

$$\rightarrow (p-۷)p=۶۰ \Rightarrow p=۱۲ \xrightarrow{(*)} ۷۲=۲q \Rightarrow q=۳۶$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۳۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مجموع درجات رأس‌های گراف $\overline{G}$ زمانی بیشترین مقدار ممکن را دارد که مجموع درجات رأس‌های گراف G دارای کم‌ترین مقدار ممکن باشد. برای این منظور لازم است که تعداد رأس‌های با درجهٔ δ، حداکثر مقدار ممکن یعنی هفت رأس از گراف باشد.

اما در این حالت گراف فقط یک رأس فرد (از درجهٔ ۷) خواهد داشت که امکان‌پذیر نیست (تعداد رأس‌های فرد گراف همواره عددی زوج است). بنابراین لازم است یک رأس گراف از درجهٔ ۳ و ۶ رأس دیگر از درجهٔ $\delta=۲$ باشند.

در این صورت داریم:

$$\text{مجموع درجات گراف } G = ۷+۳+۶\times۲=۲۲$$

$$q(G)+q(\overline{G})=\frac{p(p-۱)}{۲} \xrightarrow{\times۲} ۲q(G)+۲q(\overline{G})$$

$$=p(p-۱)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درجات گراف } G+\text{مجموع درجات گراف } \overline{G}=p(p-۱)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درجات گراف } \overline{G}=۸\times۷-۲۲=۳۴$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۱)

۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهروی)*

$$pr=۲q \Rightarrow ۱۶\times۱۲=۲q \Rightarrow q=۹۶$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

برای آن که گراف ۱۲ منتظم از مرتبه ۱۶ با برداشتن حداقل تعداد یال ناهمبند شود کافی است یک رأس گراف را تنها کنیم یعنی از یک رأس همهٔ ۱۲ یال را برداریم پس $a=12$ است.

همچنین b برابر $81=15-96$ است زیرا گراف مرتبه ۱۶ حداقل ۱۵ یال لازم دارد تا همبند باشد.

حال مرتبه گراف ۱۲ منتظم با اندازه $150=12-(2\times 81)$ برابر است با:

$$12\times p=2\times 150\rightarrow p=25$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۵ و ۳۹)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** *(محسن بهرام‌پور)*

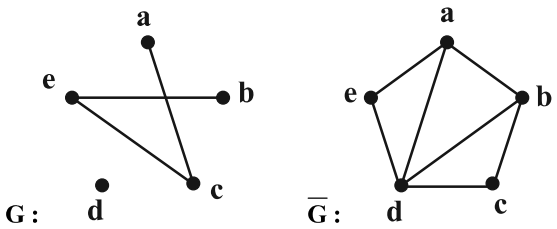
می‌دانیم در گرافی با ۶ رأس حداکثر $\binom{6}{2}=15$ یال وجود دارد. برای اینکه گرافی از مرتبه ۱۲ با ۲۱ یال بسازیم که دقیقاً ۶ رأس از درجه ۱ دارد کافی است به هر رأس گراف کامل مرتبه ۶، یک یال متصل کنیم و تعداد دور به طول ۴ برابر است با:

$$\binom{6}{4}\frac{(4-1)!}{2}=15\times 3=45$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحهٔ ۳۸)

۳۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به مجموعهٔ همسایگی باز رئوس a، b و d و مجاور بودن دو رأس c و e، گراف G و مکمل آن به صورت زیر هستند:



مسیرهای موجود از رأس a به رأس c در گراف $\overline{G}$ عبارتند از:

$$abc, adc, abdc, adbc, aedc, aedbc$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸)

۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

اگر در گرافی به ازاء هر دو رأس دلخواه $N[x]=N[y]$ باشد و یا به عبارتی یال xy وجود داشته باشد یعنی گراف کامل است و خواهیم داشت:

$$q=\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$$

$$p+q=21\Rightarrow p+\frac{p(p-1)}{2}=21\Rightarrow \frac{2p+p(p-1)}{2}=21$$

$$\Rightarrow \frac{p(p+1)}{2}=21$$

$$\Rightarrow p(p+1)=42\Rightarrow p=6$$

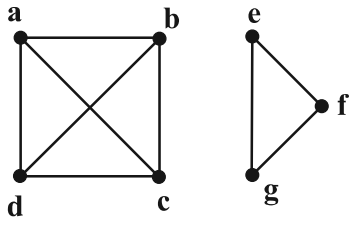
برای مسیر به طول ۳ در گراف کامل مرتبه ۶ باید به صورت a ? ? b حرکت کنیم و در نتیجه باید ۲ رأس از ۴ رأس را انتخاب کنیم و این دو رأس $2!$ جابه‌جایی دارند.

$$\binom{4}{2}\times 2!=6\times 2=12$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

۴۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به مینیمم درجه در گراف G، این گراف باید از دو بخش که به ترتیب ۳ و ۴ رأس دارند، تشکیل شده باشد. این گراف در صورتی دارای بیش‌ترین تعداد دور به طول ۳ است که شامل یک گراف K_3 و یک گراف K_4 باشد. در این صورت مطابق شکل دورهای به طول ۳ عبارتند از:



$$abca, abda, acda, bcdb, efge$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

آمار و احتمال

۴۱- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر پیشامد همرنگ نبودن دو مهرهٔ خارج شده از جعبه را با A نمایش دهیم، آنگاه پیشامد A' (متمم پیشامد A) آن است که دو مهرهٔ خارج شده همرنگ باشند. احتمال پیشامد A' برابر است با:

$$P(A') = \underbrace{\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۵}}_{\text{دو مهرهٔ قرمز}} + \underbrace{\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۵}}_{\text{دو مهرهٔ آبی}} = \frac{۶}{۳۰}+\frac{۲}{۳۰}=\frac{۸}{۳۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

بنابراین احتمال پیشامد A برابر است با:

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۴}{۱۵} = \frac{۱۱}{۱۵}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(خرزانه خاکپاش)*

احتمال فضای نمونه برابر یک است، پس با توجه به فرض سؤال داریم:

$$P(\{a,d\}) = ۳P(a) \Rightarrow P(a)+P(d) = ۳P(a)$$
$$\Rightarrow P(d) = ۲P(a)$$
$$۳P(a) = \frac{۳}{۴}P(\{a,b,c\}) \Rightarrow P(\{a,b,c\}) = ۴P(a)$$
$$P(\{a,b,c\})+P(d) = ۱ \Rightarrow ۴P(a)+۲P(a) = ۱$$
$$\Rightarrow ۶P(a) = ۱ \Rightarrow P(a) = \frac{۱}{۶}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴۳- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

اگر پیشامد A سیاه بودن مهرهٔ سوم و پیشامدهای $B_۱$ و $B_۲$ به‌ترتیب سفید بودن و سیاه بودن دو مهرهٔ اول باشند، آنگاه طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(B_۱)P(A \mid B_۱) + P(B_۲)P(A \mid B_۲)$$
$$= \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}}\times\frac{۴}{۵} + \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}\times\frac{۲}{۵}$$
$$= \frac{۱}{۷}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۷}\times\frac{۲}{۵} = \frac{۸}{۳۵}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۴۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیرهوشنگ خمسه)*

احتمال برنده نشدن فرد B را برابر x در نظر می‌گیریم. در این صورت احتمال برنده شدن افراد A، B و C به‌ترتیب $x^۲$ ، $۱-x$ و $\frac{x^۲}{۲}$ است و در نتیجه داریم:

$$P(A)+P(B)+P(C) = ۱ \Rightarrow x^۲ + (۱-x) + \frac{x^۲}{۲} = ۱$$
$$\Rightarrow \frac{۳x^۲}{۲} - x = ۰ \Rightarrow x\left(\frac{۳x}{۲}-۱\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$
$$P(A) = x^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow P(A') - P(A) = \frac{۵}{۹} - \frac{۴}{۹} = \frac{۱}{۹}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر باشند، آن‌گاه A و B' نیز مستقل از یکدیگرند و در نتیجه داریم:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A)P(B')$$
$$\Rightarrow ۰/۹ = P(A)\underbrace{(۱-P(B'))}_{P(B)} + P(B')$$
$$\Rightarrow ۰/۹ = \underbrace{P(A \cap B)}_{۰/۱} + P(B') \Rightarrow P(B') = ۰/۸ \Rightarrow P(B) = ۰/۲$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow ۰/۱ = P(A)\times ۰/۲$$
$$\Rightarrow P(A) = ۰/۵$$
$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = ۰/۵ - ۰/۱ = ۰/۴$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۴۶- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

تعداد حالت‌های فضای نمونه با در نظر گرفتن اینکه کتاب ریاضی بعد از کتاب فیزیک قرار گرفته باشد، برابر است با:

$$n(S) = \frac{۶!}{۲} = ۳۶۰$$

تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها حداقل یک کتاب بین ریاضی و فیزیک قرار داشته باشد، برابر است با کل حالت‌ها منهای حالت‌هایی که کتاب ریاضی بلافاصله بعد از کتاب فیزیک باشد که در این شرایط، دو کتاب به صورت یک بسته در نظر گرفته می‌شوند.

فیزیک ریاضی

$$\boxed{\text{○○}}\ \text{○}\ \text{○}\ \text{○}\ \text{○}$$
$$۵ \quad \times ۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰$$
$$n(A) = ۳۶۰ - ۱۲۰ = ۲۴۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$P(A)=\frac{۲۴۰}{۳۶۰}=\frac{۲}{۳}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۴۷- **گزینهٔ «۳»** (خرزانه خاکپاش)

$$P(A-B)-P(B-A)=\frac{۴}{۱۵}$$

$$\Rightarrow (P(A)-P(A\cap B))-(P(B)-P(A\cap B))=\frac{۴}{۱۵}$$

$$\Rightarrow P(A)-P(B)=\frac{۴}{۱۵}$$

$$P(A'\cup B')-P(A\cup B)=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow (۱-P(A\cap B))-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B)=\frac{۴}{۵}$$

$$\begin{cases}P(A)+P(B)=\frac{۴}{۵}\\ P(A)-P(B)=\frac{۴}{۱۵}\end{cases}$$

$$۲P(A)=\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۱۵}=\frac{۱۶}{۱۵}\Rightarrow P(A)=\frac{۸}{۱۵}$$

$$P(B)=\frac{۴}{۵}-\frac{۸}{۱۵}=\frac{۴}{۱۵}\qquad (۲)$$

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۸}{۱۵}}{\frac{۴}{۱۵}}=۲$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴۸- **گزینهٔ «۱»** (نیلوفر مهدوی)

با توجه به قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$B\subseteq A\Rightarrow\begin{cases}A\cup B=A\\ A\cap B=B\end{cases}$$

حال طبق قانون احتمال شرطی داریم:

$$P(A\mid B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(B')}$$

$$=\frac{P(A)-P(B)}{۱-P(B)}=\frac{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۷}}{۱-\frac{۱}{۷}}=\frac{\frac{۴}{۲۱}}{\frac{۶}{۷}}=\frac{۲}{۹}$$

$$\frac{P(A\mid B')}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\mid B')}{P(A)}=\frac{\frac{۲}{۹}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۴۹- **گزینهٔ «۱»** (نیلوفر مهدوی)

در فضای نمونهٔ $S=\{۱,۲,۳,...,۷۰۰\}$، پیشامدهای A، B و C را به‌ترتیب بخش‌پذیری بر ۷، ۲ و ۵ در نظر می‌گیریم. هدف یافتن تعداد اعضای مجموعهٔ $A-(B\cup C)$ است.

در نتیجه داریم:

$$P[A-(B\cup C)]=P(A)-P[A\cap(B\cup C)]$$
$$=P(A)-P[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$$
$$=P(A)-(P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C))$$

$$=\frac{\left[\frac{۷۰۰}{۷}\right]}{۷۰۰}-\left(\frac{\left[\frac{۷۰۰}{۱۴}\right]}{۷۰۰}+\frac{\left[\frac{۷۰۰}{۳۵}\right]}{۷۰۰}-\frac{\left[\frac{۷۰۰}{۷۰}\right]}{۷۰۰}\right)$$

$$=\frac{۱۰۰}{۷۰۰}-\left(\frac{۵۰}{۷۰۰}+\frac{۲۰}{۷۰۰}-\frac{۱۰}{۷۰۰}\right)=\frac{۴۰}{۷۰۰}=\frac{۲}{۳۵}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۵۰- **گزینهٔ «۲»** (علی‌اکبر علیزاده)

در بین ۷ مهرهٔ موجود در کیسهٔ سوم، ۳ مهره از ابتدا به کیسهٔ اول، ۲ مهره از ابتدا به کیسهٔ دوم و ۲ مهره از ابتدا به کیسهٔ سوم تعلق داشته‌اند، پس طبق نمودار درختی زیر و قانون احتمال کل، احتمال سفید بودن مهرهٔ خارج شده از این کیسه برابر است با:

$$\begin{cases}\text{کیسهٔ اول}\Rightarrow\frac{۳}{۷}\xrightarrow{\text{سفید}}\frac{۳}{۸}\\ \text{کیسهٔ دوم}\Rightarrow\frac{۲}{۷}\xrightarrow{\text{سفید}}۰\\ \text{کیسهٔ سوم}\Rightarrow\frac{۲}{۷}\xrightarrow{\text{سفید}}۱\end{cases}$$

$$P(\text{سفید})=\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۲}{۷}\times۰+\frac{۲}{۷}\times۱=\frac{۹}{۵۶}+\frac{۲}{۷}=\frac{۲۵}{۵۶}$$

طبق قانون بیز داریم:

$$P(\text{کیسهٔ سوم}\mid\text{سفید})=\frac{\frac{۲}{۷}\times۱}{\frac{۲۵}{۵۶}}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

آمار و احتمال – اختیاری

۵۱- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

برابری اندازهٔ طبقات از ویژگی‌های نمونه‌گیری سیستماتیک است. در نمونه‌گیری طبقه‌ای، جامعه صرفاً به زیرجامعه‌های مجزا تقسیم می‌شود و از هر طبقه، یک نمونهٔ تصادفی ساده انتخاب می‌گردد.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۵۲- **گزینهٔ «۲»** (میلاد منصوری)

میزان رضایت از شغل به‌صورت کم، متوسط و زیاد، دسته‌بندی می‌شود و متغیر کیفی ترتیبی است، تعداد فرزندان یک خانواده، متغیر کمی گسسته، جنسیت فرد، متغیر کیفی اسمی و میزان دمای هوا، متغیر کمی پیوسته است.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

۵۳- **گزینهٔ «۴»** (علی ایمانی)

انتخاب نفرات اول تا سوم ممتاز هر کلاس، پدیده‌ای تصادفی و احتمالی نیست و این افراد با توجه به نمرات، کاملاً معین هستند، پس نمونه‌گیری غیراحتمالی است.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۸)

۵۴- **گزینهٔ «۳»** (امیر وفائی)

چون دو قسمت از ده قسمت به طور کامل انتخاب شده است، پس نمونه‌گیری خوشه‌ای صورت گرفته است. اگر اندازهٔ نمونه را با n و اندازهٔ جامعه را با N نمایش دهیم، احتمال انتخاب هر واحد آماری برابر است با:

$$P=\frac{n}{N}=\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۵}$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۵ و ۱۰۶)

۵۵- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، آن روش نمونه‌گیری اریب است. بنابراین آمارشناسان تلاش می‌کنند تا با شناسایی منابع تولید اریبی، نمونه‌گیری‌ها را تا جایی که می‌توانند نااریب کنند و در واقع نمونه‌گیری نااریب، ارزش بالایی برای بررسی یک جامعه دارد.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۰، ۱۱۵ و ۱۲۲)

۵۶- **گزینهٔ «۲»** (خزانه خاکپاش)

میانگین این نمونه برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{۱+۱+۲+۳+۳+۴+۴+۴+۵}{۹}=\frac{۲۷}{۹}=۳$$

اگر μ میانگین جامعه و σ و n به ترتیب انحراف معیار و اندازهٔ نمونه باشند، آن‌گاه داریم:

$$\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow ۳-\frac{۲\times ۱/۵}{۳}\le\mu\le ۳+\frac{۲\times ۱/۵}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲\le\mu\le ۴\Rightarrow\mu\in[۲,۴]$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)

۵۷- **گزینهٔ «۱»** (امیر وفائی)

چون ۴ نفر تاکنون انتخاب شده‌اند، پس ۲۶ نفر باقی مانده است. حال فرد موردنظر در انتخاب پنجم نباید برگزیده شود و سپس در انتخاب ششم باید به عنوان عضو نمونه انتخاب گردد، پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P=\frac{۲۵}{۲۶}\times\frac{۱}{۲۵}=\frac{۱}{۲۶}$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ مشابه تمرین؛ صفحهٔ ۱۱۶)

۵۸- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

میانگین اعداد صحیح از صفر تا N برابر است با:

$$\mu=\frac{۰+۱+۲+\cdots+N}{N+۱}=\frac{\frac{N(N+۱)}{۲}}{N+۱}=\frac{N}{۲}$$

از طرفی میانگین اعداد انتخاب‌شده برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{۴+۵+۱۱+۱۴+۱۸+۲۰}{۶}=\frac{۷۲}{۶}=۱۲$$

بنابراین برآورد نقطه‌ای از N به کمک پارامتر میانگین به‌صورت زیر است:

$$\frac{N}{۲}=۱۲\Rightarrow N=۲۴$$

(آمار و احتمال – آمار استنباطی؛ مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۲۵)

۵۹- **گزینهٔ «۴»** (نیلوفر مهروی)

اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازهٔ n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$$ (μ میانگین و σ انحراف معیار جامعه است)

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=۳۷\\ \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=۴۳\end{array}\right\}\xrightarrow{-}\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}=۶$$

$$\Rightarrow\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{۶}{۴}=۱/۵$$

(آمار و احتمال – آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)

۶۰- **گزینهٔ «۳»** (مرتضی خویم‌علوی)

میانگین جامعه برابر است با: $\bar{x}=\frac{۱+۲+\ldots+۸}{۸}=۴/۵$

بنابراین اگر یک نمونهٔ ۶ تایی میانگین را دقیق برآورد کند، باید میانگین نمونه برابر ۴/۵ باشد، در این‌صورت مجموع اعضای این نمونه برابر است با:

$$۶\times ۴/۵=۲۷$$

و با توجه به اینکه مجموع تمامی اعضای جامعه برابر با $۳۶=۸+\ldots+۲+۱$ است، می‌توان نتیجه گرفت که مجموع دو عضوی که در نمونه نمی‌باشند برابر با ۹ است. بنابراین این دو عضو حالات زیر را دارند:

$$\{۱,۸\},\{۲,۷\},\{۳,۶\},\{۴,۵\}$$

تعداد کل نمونه‌های ۶ تایی برابر است با: $\binom{۸}{۶}=\frac{۸!}{۶!۲!}=۲۸$

بنابراین احتمال اینکه یک نمونهٔ ۶ تایی میانگین جامعه را دقیق برآورد کند، برابر است با: $P(A)=\frac{۴}{۲۸}=\frac{۱}{۷}$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۰)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۳

۶۱- **گزینهٔ «۲»** (بابک اسلامی)

با استفاده از تعریف انرژی جنبشی برحسب تکانه، داریم:

$$K=\frac{p^2}{2m}\Rightarrow K_2-K_1=\frac{p_2^2-p_1^2}{2m}\xrightarrow{p_2=(p_1+6)\frac{kg.m}{s}}$$

$$\Rightarrow K_2-K_1=\frac{(p_1+6)^2-p_1^2}{2m}$$

$$\Rightarrow 21=\frac{12p_1+36}{2\times 2}\Rightarrow p_1=4\frac{kg.m}{s}$$

بنابراین: $p_2=10\frac{kg.m}{s}$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{10}{4}=2/5$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۶۲- **گزینهٔ «۱»** (امیرمهدی جعفری)

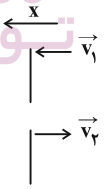
می‌دانیم: $F_{av}\Delta t=|\Delta\vec{p}|=$ مساحت زیر نمودار نیرو - زمان

اندازهٔ تغییرات بردار تکانهٔ توپ برابر است با:

$$|\Delta\vec{p}|=F_{av}\Delta t\Rightarrow m|\vec{v}_2-\vec{v}_1|=300\times(5-1)\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow 0/3|\vec{v}_2-\vec{v}_1|=1/2\frac{kg.m}{s}\Rightarrow|\vec{v}_2-\vec{v}_1|=4\frac{kg.m}{s}$$

جسم با سرعت $\vec{v}_1$ به دیوار برخورد می‌کند و با سرعت $\vec{v}_2$ از دیوار جدا می‌شود. پس بنابراین داریم: $|\vec{v}_2-\vec{v}_1|=v_1+v_2$



در نتیجه:

$$v_1+v_2=4\xrightarrow{v_1=1\frac{m}{s}}v_2=3\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۶۳- **گزینهٔ «۳»** (مسعود قره‌قانی)

با توجه به رابطهٔ اندازهٔ شتاب مرکزگرا، داریم:

$$a_c=\frac{v^2}{r}=\frac{4\pi^2r}{T^2}$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) $\frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\times\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$ ×

۲) $\frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\times\frac{r_1}{r_2}=4\times2=8$ ×

۳) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{r_2}{r_1}\times\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=\frac{1}{2}\times(2)^2=2$

۴) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{r_2}{r_1}\times\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=2\times2^2=8$ ×

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۲)

۶۴- **گزینهٔ «۱»** (عرفان عسکریان پایان)

در این سؤال، نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای سکه به همراه دیسک توسط نیروی اصطکاک ایستایی تامین می‌شود. چون کمترین دورهٔ چرخش دیسک مورد سؤال است، اصطکاک ایستایی بیشینه خواهد بود. با استفاده از قانون دوم نیوتون در حرکت دایره‌ای یکنواخت، داریم:

$$F_{net}=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow f_{s,max}=m\frac{4\pi^2r}{T_{min}^2}\Rightarrow\mu_sF_N=m\frac{4\pi^2r}{T_{min}^2}$$

$$\Rightarrow\mu_smg=m\frac{4\pi^2r}{T_{min}^2}\Rightarrow T_{min}^2=\frac{4\pi^2r}{\mu_sg}$$

$$\xrightarrow[\mu_s=0/5]{r=5cm}T_{min}^2=\frac{4\pi^2\times0/05}{0/5\times10}\Rightarrow T_{min}=\frac{\pi}{5}s$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۶۵- **گزینهٔ «۴»** (حسین مخدومی)

نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره برای حرکت دایره‌ای یکنواخت آن توسط نیروی گرانشی تامین می‌شود. با استفاده از قانون دوم نیوتون در حرکت دایره‌ای یکنواخت داریم:

$$F_{\text{مرکزگرا}}=F_{\text{گرانشی}}\Rightarrow\frac{mv^2}{r}=\frac{GmM_e}{r^2}\Rightarrow v^2=\frac{GM_e}{r}$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{r}{r'}} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{R_e+h}{R_e+h'}}=\sqrt{\frac{R_e+R_e}{R_e+3R_e}}$$

$$\Rightarrow \frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{2}{4}} \Rightarrow \frac{v'}{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(فیزیک ۳ - دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۶)

۶۶- **گزینهٔ «۴»** *(حسین مفرومی)*

با استفاده از رابطهٔ بسامد نوسان‌های هماهنگ سادهٔ سامانهٔ جرم - فنر، داریم:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{f_B}{f_A}=\sqrt{\frac{k_B}{k_A}}\times\sqrt{\frac{m_A}{m_B}}$$

$$\xrightarrow[f_B=3f_A]{k_B=4k_A} 3=\sqrt{4}\times\sqrt{\frac{m_A}{m_B}} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B}=\frac{9}{4}=2/25$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۶۷- **گزینهٔ «۲»** *(علی نظری)*

ابتدا با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان حرکت نوسانگر ساده داریم:

$$x=A\cos\omega t \Rightarrow 2\times10^{-2}=4\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{30}\times\omega\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{30}\times\omega\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{30}\omega=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega=10\frac{rad}{s}$$

از طرفی داریم:

$$F_{max}=ma_{max}=m(A\omega^2)$$

$$\Rightarrow F_{max}=0/1\times(4\times10^{-2})\times(10^2)=0/4N$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۶۸- **گزینهٔ «۱»** *(سعید طاهری‌بروجنی)*

پاره‌خطی که نوسانگر طی می‌کند از $-A$ تا $+A$ است. پس طولش دو برابر دامنهٔ نوسان است و در نتیجه دامنهٔ نوسان $6cm$ است. چون در هر دقیقه ۶۰ بار طول پاره‌خط را طی می‌کند، در هر دقیقه ۳۰ نوسان کامل انجام می‌دهد، بنابراین بسامد آن $f=\frac{N}{t}=\frac{30}{60}=0/5Hz$ است. در نتیجه داریم:

$$E=2\pi^2mA^2f^2 \Rightarrow m=\frac{E}{2\pi^2A^2f^2}=\frac{3/6\times10^{-3}}{2\times10\times(0/06)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow m=0/2kg=200g$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۶۹- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی واثقی)*

$$\begin{cases}\Delta t=4/1-2/1=2s\\ T=\frac{1}{f}=\frac{1}{0/25}=4s\end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta t}{T}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t=\frac{T}{2}$$

در مدت زمان $\frac{T}{2}$ نوسانگر مسافت $2A$ را می‌پیماید:

$$2A=40cm \Rightarrow A=20cm=0/2m$$

$$\omega=2\pi f=2\pi\times(0/25)=0/5\pi\frac{rad}{s}$$

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}(0/2)(0/2)^2(0/5\pi)^2=10mJ$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(0/2)(2\pi\times10^{-2})^2=0/4mJ$$

$$U=E-K=10-0/4=9/6mJ$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۷۰- **گزینهٔ «۱»** *(شادمان ویسی)*

می‌دانیم تعداد نوسان‌ها از رابطهٔ $n=\frac{t}{T}$ به‌دست می‌آید و دورهٔ تناوب آونگ سادهٔ کم‌دامنه طبق رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ محاسبه می‌شود. چون آونگ B طول بیشتری دارد، پس $T_B>T_A$ است و در نتیجه:

$$n_A>n_B \Rightarrow n_A-n_B=1$$

$$\Rightarrow \frac{t}{T_A}-\frac{t}{T_B}=1 \Rightarrow t\left(\frac{1}{T_A}-\frac{1}{T_B}\right)=1 \Rightarrow t=\frac{T_AT_B}{T_B-T_A}$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۱

۷۱- **گزینهٔ «۴»** *(بهادر کامران)*

کاری که محیط بر روی گاز (دستگاه) انجام می‌دهد، در هنگام تراکم، مثبت و در هنگام انبساط، منفی است و هنگامی‌که حجم ثابت باشد صفر است دقت کنید در این سؤال محور قائم نشان دهندهٔ حجم گاز می‌باشد.

$A \to B$: حجم ثابت است $\to W_{AB} = 0$

$B \to C$: حجم زیاد می‌شود $\to W_{BC} < 0$

$C \to D$: حجم زیاد می‌شود $\to W_{CD} < 0$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

۷۲- **گزینهٔ «۱»** *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

با توجه به اینکه $P_A V_A = P_C V_C$ می‌باشد لذا $T_A = T_C$ و در نتیجه $\Delta U_{ABC} = 0$ می‌باشد.

$$\Delta U_{ABC} = Q_{ABC} + W_{ABC} = 0$$
$$\Rightarrow Q_{ABC} = -W_{ABC} \Rightarrow \left|\frac{W_{ABC}}{Q_{ABC}}\right| = 1$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۵)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

در فرایند بی‌دررو بین دستگاه و محیط گرمایی مبادله نمی‌شود، یعنی: $Q = 0$

طبق قانون اول ترمودینامیک $\Delta U = W + Q$ است، پس $\Delta U = W$ بوده و چون در تراکم $W > 0$ است، پس $\Delta U > 0$ و دمای گاز افزایش می‌یابد.

$$\Delta U = W + Q \xrightarrow{Q=0} \Delta U = W \xrightarrow{W>0} \Delta U > 0$$
$$\Rightarrow \Delta T > 0 \Rightarrow T_2 > T_1$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۹)

۷۴- **گزینهٔ «۳»** *(حامد نیسانی)*

$$\begin{cases} \text{فرایند۱} \to \text{هم دما} \Rightarrow \Delta U_1 = 0 \quad (1) \\ \text{فرایند۲} \to \text{بی دررو} \Rightarrow \Delta U_2 = W_2 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق گفته‌مسئله}} \Delta U_1 + 100 = \Delta U_2$$
$$\xrightarrow{(1),(2)} 0 + 100 = W_2 \Rightarrow W_2 = 100\,J$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹)

۷۵- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود قره‌قانی)*

برای محاسبهٔ دمای گازهای کامل با استفاده از معادلهٔ حالت داریم:

$$PV = nRT \Rightarrow T_B = \frac{P_B V_B}{nR}$$
$$\Rightarrow T_B = \frac{2/5 \times 10^5 \times 8 \times 10^{-3}}{0/25 \times 8} = 1000\,K$$

$$P_A V_A = P_C V_C \Rightarrow T_C = T_A$$
$$\Rightarrow T_C = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{2/5 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-3}}{0/25 \times 8} = 500\,K$$

$$\theta_C = T_C - 273 = 500 - 273 = 227^\circ C$$

$$\theta_B = T_B - 273 = 1000 - 273 = 727^\circ C$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۴۰)

۷۶- **گزینهٔ «۳»** *(ملیحه جعفری)*

طبق متن کتاب درسی، زمانی‌که بخار آب از دیگ بخار وارد استوانه می‌شود، منبسط شده و فشار آن کاهش می‌یابد.

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۴۱)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۷۷- **گزینهٔ «۲»** *(بابک اسلامی)*

نسبت بیشترین حجم گاز به کمترین حجم آن در چرخهٔ یک ماشین گرمایی، نسبت تراکم نامیده می‌شود. بنابراین:

$$r = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{2V}{\frac{V}{3}} = 6$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۲ و ۱۴۳)

۷۸- **گزینهٔ «۱»** *(بابک اسلامی)*

در هر دقیقه ماشین گرمایی ۹۰ چرخه را طی می‌کند و $21/6kJ$ گرما از منبع دما بالا دریافت می‌کند. بنابراین گرمای دریافتی در هر چرخه برابر است با:

$$Q_H = \frac{21/6\times10^3}{90} = 240J$$

حال با توجه به رابطهٔ بازده یک ماشین گرمایی داریم:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H} = 1 - \frac{156}{240} \Rightarrow \eta = 0/35 \Rightarrow \eta = 35\%$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۵ و ۱۴۶)

۷۹- **گزینهٔ «۴»** *(بابک اسلامی)*

در چرخهٔ یک یخچال، با انجام کار W، گرمای Q_L از منبع دماپایین دریافت و گرمای Q_H به منبع دمابالا داده می‌شود.

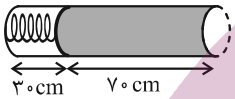
بنابراین علامت W و Q_L مثبت و علامت Q_H منفی است. از طرفی طبق قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی، امکان ندارد گرما خود به خود از منبع با دمای پایین به منبع با دمای بالا برود و همواره $W \neq 0$ است.

بنابراین با این توضیحات گزینهٔ «۴» صحیح است.

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۷)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** *(سپهر مهرور)*

در ابتدا طول هر قسمت $50cm$ است. با برداشتن گیره، فنر $20cm$ فشرده شده و طول سمت راست به $70cm$ می‌رسد.



$$V = A\times L = 50cm^2\times70cm = 3500cm^3 = 35\times10^{-4}m^3$$

تعداد مول‌های گاز آرمانی اکسیژن موجود در استوانه برابر است با:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{16}{32} = 0/5mol$$

طبق معادلهٔ حالت گازهای آرمانی داریم:

$$PV = nRT \Rightarrow P\times35\times10^{-4} = 0/5\times8\times(273+77)$$
$$\Rightarrow P = 4\times10^5 Pa$$

حال نیرویی را که گاز به پیستون وارد می‌کند را محاسبه می‌کنیم.

$$F = P\times A = 4\times10^5\times5\times10^{-3} = 2\times10^3 N$$

با توجه به قانون هوک داریم:

$$F = kx \Rightarrow 2\times10^3 = k\times2\times10^{-1} \Rightarrow k = 10^4\frac{N}{m}$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ و ۱۲۹)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فیزیک ۲

۸۱- گزینهٔ «۲» (محسن قندچلر)

گزینهٔ «۱»:

$$U=\frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow L=\frac{2U}{I^2} \Rightarrow H=\frac{J}{A^2}=\frac{W.s}{A^2}$$

گزینهٔ «۲» و گزینهٔ «۳»:

$$U=\frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{I=\frac{V}{R}} U=\frac{1}{2}L\left(\frac{V^2}{R^2}\right)$$

$$\Rightarrow L=\frac{2UR^2}{V^2} \Rightarrow H=\frac{J.\Omega^2}{V^2}=\frac{W.s.\Omega^2}{V^2}$$

گزینهٔ «۴»:

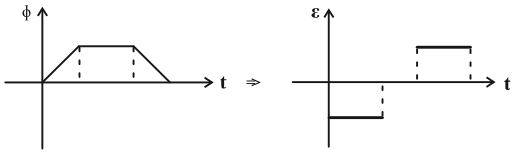
$$U=\frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{F=I\ell B\sin\theta} U=\frac{1}{2}L\left(\frac{F}{\ell B\sin\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow H=\frac{J.T^2.m^2}{N^2}$$

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۲)

۸۲- گزینهٔ «۴» (حسین مخرومی)

با ورود قاب ابتدا شار مغناطیسی عبوری از قاب افزایش و وقتی که تمام قاب درون ناحیه مغناطیسی قرار بگیرد ثابت می‌ماند و با شروع خروج قاب از ناحیه مغناطیسی، شار عبوری از قاب کم می‌شود. پس:



(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶)

۸۳- گزینهٔ «۳» (علیرضا گونه)

$$B=\mu_0\frac{NI}{\ell} \Rightarrow B=4\pi\times10^{-7}\times\frac{100\times0/5}{20\times10^{-2}}=10^{-4}\pi T$$

$$\Phi=BA\cos\theta \Rightarrow \Phi=10^{-4}\pi\times\pi\times(10\times10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow \Phi=10^{-6}\pi^2=10^{-6}\times10=10^{-5}Wb=10\mu Wb$$

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶)

۸۴- گزینهٔ «۳» (عبدالرضا امینی‌نسب)

ابتدا مساحت حلقه را به‌دست می‌آوریم.

$$A=\pi r^2=3\times(0/1)^2=0/03m^2$$

اکنون به کمک رابطهٔ نیروی محرکه القایی متوسط داریم:

$$\bar{\varepsilon}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \bar{\varepsilon}=-NBA\frac{(\cos\theta_2-\cos\theta_1)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon}=-100\times0/03\times0/02\times\frac{(-1-1)}{0/04} \Rightarrow \bar{\varepsilon}=3V$$

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶)

۸۵- گزینهٔ «۲» (عبدالرضا امینی‌نسب)

هنگام ورود پیچه به درون میدان مغناطیسی، شار مغناطیسی گذرنده از پیچه افزایش می‌یابد، طبق قانون لنز، جریان القایی با افزایش شار مخالفت می‌کند، بنابراین جهت جریان القایی باید ساعتگرد باشد. هنگام خروج پیچه از میدان مغناطیسی، شار مغناطیسی کاهش می‌یابد و طبق قانون لنز جهت جریان القایی پادساعتگرد می‌باشد.

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۸)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۶- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

چون میدان مغناطیسی و جریان عبوری از سیملوله‌ها یکسان است، داریم:

$$B_A = B_B \xrightarrow{B=\frac{\mu_0 NI}{\ell}} \frac{N_A}{\ell_A} = \frac{N_B}{\ell_B} \xrightarrow{\ell_A = 2\ell_B} N_A = 2N_B$$

با استفاده از رابطهٔ ضریب القاوری می‌توان نوشت:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{N_A}{N_B}\right)^2 \times \left(\frac{A_A}{A_B}\right) \times \left(\frac{\ell_B}{\ell_A}\right)$$

$$\xrightarrow{A=\frac{\pi}{4}d^2} \frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{N_A}{N_B}\right)^2 \times \left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2 \times \left(\frac{\ell_B}{\ell_A}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$$

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۰)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(حسین مفرومی)*

ابتدا جریان عبوری از مدار را به‌دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum r + R_{eq}} = \frac{20-8}{1+1+2+2} = \frac{12}{6} = 2A$$

(مقاومت‌های موازی ۶ و ۳ اُهمی برابر با مقاومت معادل ۲ اُهم است.)

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 = 4mJ$$

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۲)

۸۸- **گزینهٔ «۱»** *(زهره آقامحمدی)*

دوره جریان برابر $T = 5ms$ است. لحظه $1/25ms$ برابر با $\frac{T}{4}$ است.

$$I = I_m \sin\frac{2\pi}{T}t = I_m \sin\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4}$$

$$\Rightarrow I = I_m \sin\frac{\pi}{2}$$

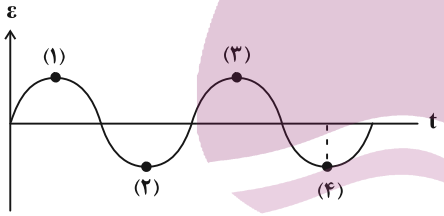
یعنی زاویهٔ بین خط عمود بر سطح پیچه و خط‌های میدان $\frac{\pi}{2}rad$ است پس زاویهٔ بین سطح پیچه و خط‌های میدان صفر خواهد شد.

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

۸۹- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی سلطانی)*

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{50\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{6}{50} = \frac{12}{100}s$$



در لحظهٔ $\frac{7T}{4}$ برای چهارمین بار، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی بیشینه خواهد شد:

$$7\frac{T}{4} = 7 \times \frac{0/12}{4} = 7 \times 0/03 = 0/21s$$

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

۹۰- **گزینهٔ «۲»** *(حسین مفرومی)*

گزینهٔ ۲ نادرست است، زیرا از ولتاژ $400kV$ استفاده می‌شود.

(فیزیک ۲ - القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۱

۹۱- **گزینهٔ «۱»** *(علی قائمی)*

اگر مؤلفه‌های ترمودینامیکی برای قبل از فرایند را با P_1، V_1 و T_1 و مؤلفه‌های ترمودینامیکی برای بعد از فرایند را با P_2، V_2 و T_2 نام‌گذاری کنیم، با نوشتن هر دو معادله حالت و تقسیم معادلهٔ دوم بر معادلهٔ اول داریم:

در حالت اول: $P_1V_1 = nRT_1$

در حالت دوم: $P_2V_2 = nRT_2$

$$\frac{P_2V_2}{P_1V_1} = \frac{T_2}{T_1} \xrightarrow[P_2=4P_1]{T_2=2T_1} \frac{4P_1V_2}{P_1V_1} = \frac{2T_1}{T_1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ و ۱۲۹)

۹۲- **گزینهٔ «۴»** *(بهنام رستمی)*

عبارت گزینهٔ (۴) نادرست است، در فرایند انبساط بی‌دررو، تغییرات انرژی درونی، منفی است.

انبساط بی‌دررو: $\Delta V > 0 \Rightarrow W < 0 \xrightarrow{\Delta U = W} \Delta U < 0$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

۹۳- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود قره‌خانی)*

در فرایند هم‌دمای مقدار معینی گاز کامل، انرژی درونی تغییری نمی‌کند.

در انبساط بی‌دررو داریم:

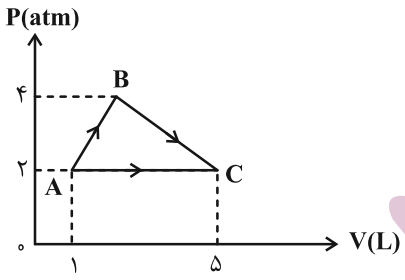
$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{Q=0} \Delta U = W$$
$$\xrightarrow{\Delta V>0 \Rightarrow W<0} \Delta U < 0$$

در انبساط هم‌فشار مقدار معینی گاز کامل، چون دمای گاز افزایش می‌یابد، بنابراین انرژی درونی گاز افزایش خواهد یافت.

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

۹۴- **گزینهٔ «۲»** *(حسن اسحاق‌زاده)*

مساحت زیر نمودار $A \to C$ را S_1 و مساحت داخل مثلث را S_2 در نظر می‌گیریم.



$$W_{A\to C} = -S_1 = -2\times(5-1)\times10^2 = -800J$$

$$W_{\text{چرخه}} = -S_2 = -\frac{4\times2}{2}\times100 = -400J$$

کار انجام شده در فرایند ABC برابر با مجموع S_1 و S_2 است.

$$W_{ABC} = -(S_1 + S_2) = -1200J$$

بنابراین:

$$\frac{W_{ABC}}{W_{AC}} = \frac{-1200}{-800} = \frac{3}{2}$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۴۰)

۹۵- **گزینهٔ «۲»** *(حمید عباسی)*

چون حاصل ضرب PV در نمودار مقدار ثابتی است، پس فرایند نشان داده شده هم‌دما است. بنابراین:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow 3\times6 = 1\times V = 18L$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} = \frac{1\times10^5\times18\times10^{-3}}{1\times8} = 225K$$

$$T = 273 + \theta \Rightarrow 225 = 273 + \theta \Rightarrow \theta = -48^\circ C$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا گونه)*

با توجه به نمودار در حجم ثابت، فشار $\frac{۲}{۳}$ برابر شده است، بنابراین دمای مطلق نیز $\frac{۲}{۳}$ برابر می‌شود.

$$T_۱ = \frac{۲}{۳}T_۲ = \frac{۲}{۳}\times ۴۶۲ = ۳۰۸K$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

۹۷- **گزینهٔ «۱»** *(محمد اسدی)*

با توجه به توضیحات صورت سوال داریم:

$$\text{فرایند } ۲ \to ۱ \text{ بی‌دررو} \Rightarrow Q_{۱۲} = ۰$$

$$\text{فرایند } ۱ \to ۳ \text{ حجم ثابت} \Rightarrow W_{۳۱} = ۰$$

$$\text{فرایند } ۳ \to ۲ \text{ دما ثابت} \Rightarrow Q_{۲۳} = -W_{۲۳}$$

در هر چرخه می‌توان نوشت:

$$\text{در کل چرخه}: \Delta U = ۰$$

$$\Rightarrow (Q_{۱۲} + W_{۱۲}) + (Q_{۲۳} + W_{۲۳}) + (Q_{۳۱} + W_{۳۱}) = ۰$$

$$\Rightarrow (۰ + W_{۱۲}) + ۰ + (Q_{۳۱} + ۰) = ۰$$

$$\Rightarrow Q_{۳۱} = -W_{۱۲} = -(-۱۲۵)J$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۴۰)

۹۸- **گزینهٔ «۴»** *(نصراله اخاضل)*

با توجه به رابطهٔ بازدهٔ یک ماشین گرمایی و کار لازم برای جابه‌جایی وزنه، می‌توان نوشت:

$$|W| = mgh = ۵۰\times ۱۰\times ۲۰ = ۱۰۰۰۰J$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱۰۰۰۰}{Q_H} \Rightarrow Q_H = ۴۰۰۰۰J = ۴۰kJ$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۶)

۹۹- **گزینهٔ «۲»** *(بابک اسلامی)*

در یک یخچال با انجام کار W، گرمای Q_L از مواد داخل یخچال (منبع دماپایین) گرفته شده و گرمای Q_H به محیط بیرون (منبع دمابالا) داده می‌شود، بنابراین در این یخچال داریم:

$$|Q_H| = \frac{۶}{۵}Q_L$$

با استفاده از قانون اول ترمودینامیک در مورد یخچال‌ها، داریم:

$$|Q_H| = W + Q_L$$

$$\xrightarrow{|Q_H| = \frac{۶}{۵}Q_L} \frac{۶}{۵}Q_L = W + Q_L \Rightarrow \frac{Q_L}{W} = ۵$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱۰۰- **گزینهٔ «۳»** *(بابک اسلامی)*

برای تبدیل جرم m از آب $\theta°C$ به یخ صفر درجهٔ سلسیوس، اندازهٔ گرمای گرفته شده و کار انجام شده توسط یخچال (۱) برابر است با:

$$Q_{L,۱} = mc\theta + mL_F$$

$$W_۱ = Pt$$

برای تبدیل جرم $۳m$ از آب $\theta°C$ به یخ صفر درجهٔ سلسیوس، اندازهٔ گرمای گرفته شده و کار انجام شده توسط یخچال (۱) برابر است با:

$$Q_{L,۲} = ۳mc\theta + ۳mL_F$$

$$W_۲ = ۱/۵P\times ۲t = ۳Pt$$

طبق قانون اول ترمودینامیک در چرخهٔ یک یخچال داریم:

$$|Q_H| = Q_L + W \Rightarrow \begin{cases} |Q_{H,۱}| = Q_{L,۱} + W_۱ \\ |Q_{H,۲}| = Q_{L,۲} + W_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |Q_{H,۱}| = mc\theta + mL_F + Pt \\ |Q_{H,۲}| = ۳mc\theta + ۳mL_F + ۳Pt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_{H,۲}}{Q_{H,۱}} = ۳$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۳

۱۰۱- **گزینهٔ «۴»** (محمدرضا پورجاوید)

تنها موردی که رخ نمی‌دهد عبارت اول است.

در سلول گالوانی «مس – نقره» نیم‌سلول مس در نقش آند بوده و نیم‌سلول نقره نیز کاتد خواهد بود. اگر دیوارهٔ متخلخل از این سلول حذف شود، الکترون‌های حاصل از اکسایش مس (در آند) جذب کاتیون‌های Ag^+ موجود در محلول شده و وارد سیم رابط (مدار بیرونی) نمی‌شوند. بنابراین فرآیند کاهش در نیم‌سلول کاتدی اتفاق نمی‌افتد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۱۰۲- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا پورجاوید)

با توجه به مقادیر E° داده شده، سری الکتروشیمیایی برای گونه‌های داده شده عبارت است از:

$$Fe^{3+}/Fe^{2+} > Cu^{2+}/Cu > Sn^{4+}/Sn^{2+} > Cd^{2+}/Cd > Zn^{2+}/Zn > Al^{3+}/Al$$

برای فراهم بودن شرایط نگهداری محلول در ظرف باید امکان انجام واکنش بین کاتیون محلول و فلز سازندهٔ ظرف وجود نداشته باشد. با توجه به امکان انجام واکنش بین گونهٔ سمت چپ بالاتر با گونهٔ سمت راست، یون Fe^{3+} با هر دو فلز Cu و Zn واکنش داده و امکان نگهداری آن در این ظرف وجود ندارد. یون Al^{3+} نیز با هیچ یک از این فلزها واکنش نمی‌دهد و می‌توان آن را در هر دو ظرف نگهداری کرد. اما یون‌های Sn^{4+} و Cd^{2+} با روی واکنش داده و با مس واکنش نمی‌دهند. بنابراین می‌توان آن‌ها را در ظرف مسی نگه داشت.

توجه داشته باشید که با توجه به اطلاعات داده شده، نمی‌توان در مورد امکان انجام واکنش بین Sn^{2+} با Cu و Zn نظری داد. زیرا هر دو در یک طرف نیم‌واکنش‌ها قرار دارند.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحهٔ ۴۷)

۱۰۳- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا پورجاوید)

با توجه به نیم‌واکنش اکسایش انجام شده در این سلول $(H_2(g) \rightarrow 2H^+(aq) + 2e^-)$ می‌توان تعداد یون‌های H^+ حاصل از آن را به صورت زیر به دست آورد:

$$179/2\,L\,H_2 \times \frac{1\,mol\,H_2}{22/4\,L\,H_2} \times \frac{2\,mol\,H^+}{1\,mol\,H_2} \times \frac{6/02\times10^{23}\,H^+\text{ یون}}{1\,mol\,H^+} = 96/32\times10^{23}\,H^+\text{ یون}$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۱۰۴- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین طیبی سورکلایی)

$$\overset{0}{W} + 2HNO_3 + 8HF \rightarrow H_2\overset{+6}{W}F_8 + 4H_2O + 2\overset{+2}{N}O$$

(W: $0 \rightarrow +6$، ۶ ↑ ؛ N: $+5 \rightarrow +2$، ۳ ↓)

W: گونهٔ کاهنده و H_2WF_8: گونهٔ حاصل از اکسایش و HNO_3: گونهٔ اکسنده و NO: گونهٔ حاصل از کاهش می‌باشند.

بررسی گزینهٔ «۳»:

$$?\,e^- : 1\,mol\,HF \times \frac{6\,mole^-}{8\,mol\,HF} \times \frac{6/02\times10^{23}\,e^-}{1\,mole^-} = 4/515\times10^{23}\,e^-$$

بررسی گزینهٔ «۴»: نادرست؛ تغییر عدد اکسایش عنصر تنگستن (۶+) بود.

عدد اکسایش C در CH_3Cl برابر با ۲- می‌باشد. $6 \neq 3\times(-2)$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۱۰۵- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین طیبی‌سورکلایی)

موارد دوم و سوم درست‌اند.

بررسی موارد نادرست:

مورد اول: بخش قابل توجهی از انرژی شیمیایی در این دستگاه به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. (نه همهٔ آن!)

مورد چهارم: نیم‌واکنش کاتدی در این سلول $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$ می‌باشد و نیم‌واکنش انجام شده در قطب مثبت (آند) سلول برقکافت آب به صورت $H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$ می‌باشد. همانطور که می‌بینید این دو واکنش با یکدیگر یکسان نیستند.

مورد پنجم: emf سلول‌های گالوانی از رابطهٔ $emf = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}}$ به دست می‌آید. به این معنا که در آن‌ها باید $E^\circ_{\text{آند}}$ را از $E^\circ_{\text{کاتد}}$ کم کنیم.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

ایران توشه
تیزهوشان برای موفقیت

۱۰۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی‌سورکلایی)*

$$۲NaCl(l) \rightarrow ۲Na(l) + Cl_۲(g) \sim ۲e^-$$

$$?gNa = ۴/۲۱۴\times۱۰^{۲۳}e^- \times \frac{۱mol\,e^-}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^-} \times \frac{۲mol\,Na}{۲mol\,e^-} \times \frac{۲۳g\,Na}{۱mol\,Na} = ۱۶/۱g\,Na$$

$$?g\,Cl_۲ = ۴/۲۱۴\times۱۰^{۲۳}e^- \times \frac{۱mol\,e^-}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^-} \times \frac{۱mol\,Cl_۲}{۲mol\,e^-} \times \frac{۷۱g\,Cl_۲}{۱mol\,Cl_۲} = ۲۴/۸۵g\,Cl_۲$$

اختلاف جرم فراورده‌های حاصل $= ۲۴/۸۵ - ۱۶/۱ = ۸/۷۵g$

در سلول‌های الکترولیتی الکترود کاتدی به قطب منفی باطری و الکترود آندی به قطب مثبت باطری متصل می‌شود.

سلول‌های گالوانی یک نوع باطری محسوب می‌شوند که قطب مثبت آن‌ها نیم‌سلول کاتدی و قطب منفی آن‌ها نیم‌سلول آندی می‌باشد. در نتیجه الکترود کاتدی در سلول برقکافت آب باید به نیم‌سلول آندی سلول گالوانی «کروم – کبالت» متصل شود.

در سلول‌های گالوانی نیم‌سلول آندی از جنس عنصری است که E° کمتری داشته باشد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹ و ۵۵)

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

در کاتد رقابت بین دو یون $Fe^{۳+}$ و $Mn^{۲+}$ است. از آنجا که نیم‌واکنش $Fe^{۳+} + ۳e^- \rightarrow Fe$ دارای E° بزرگ‌تری نسبت به نیم واکنش $Mn^{۲+} + ۲e^- \rightarrow Mn$ می‌باشد، برندهٔ این رقابت $Fe^{۳+}$ بوده و در کاتد آهن مذاب تولید می‌شود.

در رقابت آندی وضعیت کاملاً برعکس بوده و بین دو گونه I^- و Cl^- گونه‌ای که E° کمتری دارد (I^-) برنده رقابت خواهد بود. بنابراین نیم‌واکنش $۲I^- \rightarrow I_۲ + ۲e^-$ انجام شده و یُد مذاب به دست می‌آید.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

۱۰۸- **گزینهٔ «۲»** *(فرزاد رضایی)*

ابتدا تعیین می‌کنیم طی برقکافت سدیم کلرید چند مول سدیم به دست می‌آید:

واکنش موازنه شده: $۲NaCl(l) \rightarrow ۲Na(l) + Cl_۲(g)$

$$?molNa = ۱۴۲gCl_۲ \times \frac{۱molCl_۲}{۷۱gCl_۲} \times \frac{۲molNa}{۱molCl_۲} = ۴molNa$$

اکنون محاسبه می‌کنیم که هر مول صابون $RCOONa$ (R گروه آلکیلی است و برابر با $C_{۱۲}H_{۲۵}$) چند گرم جرم دارد:

$$(۱۲\times۱۲) + (۲۵\times۱) + (۱۲+۱۶\times۲+۲۳) = ۱۴۴+۲۵+۶۷ = ۲۳۶g.mol^{-۱}$$

مقدار صابون به دست آمده برابر است با:

$$۴molNa \times \frac{۱molRCOONa}{۱molNa} \times \frac{۲۳۶gRCOONa}{۱molRCOONa} = ۹۴۴gRCOONa$$

(شیمی ۳- ترکیبی؛ صفحه‌های ۵ و ۶ و ۵۵)

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** *(حامد اسماعیلی)*

نیم‌واکنش کاهش در فرایند هال: $۳e^- + Al^{۳+}(l) \rightarrow Al(l)$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۵۴، ۵۵ و ۵۷)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(محمد پارسا فراهانی)*

قطب A قطب منفی است که قاشق را به عنوان کاتد به آن متصل می‌کنیم و قطب B قطب مثبت است که تیغهٔ نقره را به عنوان آند به آن متصل می‌کنیم. الکترولیت مورد استفاده از نمک نقره است و جهت حرکت الکترون‌ها از تیغهٔ نقره به قاشق یعنی از قطب B به A است و در طول فرایند غلظت الکترولیت $[Ag^+]$، ثابت است. (رد گزینه‌های ۱ و ۲)

گزینهٔ «۳»: نیم‌واکنش کاتدی $Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s)$ است که در الکترود متصل به قطب (A) یعنی کاتد انجام می‌گیرد. (رد گزینهٔ ۳)

گزینهٔ «۴»: در فرایند هال تیغه‌های گرافیتی در آند خورده می‌شوند و در این فرایند نیز تیغهٔ نقره در آند خورده می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۲)

شیمی ۱

۱۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا جعفری‌نژاد)*

عبارت‌های «اول» و «چهارم» و «پنجم» نادرست هستند. بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: گشتاور دوقطبی ید دقیقاً صفر است.

عبارت دوم: چون انحلال مولکولی دارد.

عبارت سوم: یعنی کدام موارد در یک دیگر محلول هستند. از بین این ۴ مورد ید در پروپان و استون در اتانول محلول هستند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

عبارت چهارم: استون یک حلال مناسب چربی است که گشتاور بـزرگ‌تـر از صفر دارد.

عبارت پنجم: اگر ماده‌ای توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی داشته باشد، هـم در اتانول (که غیر آبی است) حل می‌شود و هم آب.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۱)

۱۱۲- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: به ازای هر مول آلومینیم نیترات، ۴ مول یـون آب پوشـیده تولیـد می‌شود.

$$Al(NO_3)_3 \rightarrow Al^{3+} + 3NO_3^-$$

$$?\,mol\ \text{یون} : 2/5L\ \text{محلول} \times \frac{3mol\ Al(NO_3)_3}{1L\ \text{محلول}}$$

$$\times \frac{4mol\ \text{یون}}{1mol\ Al(NO_3)_3} = 30mol\ \text{یون}$$

گزینهٔ «۲»: متانول در آب انحلال مولکولی دارد و هیچ یونی تولید نمی‌کند.

گزینهٔ «۳»: کلسیم فسفات یک مادهٔ نامحلول در آب است.

گزینهٔ «۴»: می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم.

$$\text{مولاریت} : \frac{10 \times ad}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow M = \frac{10 \times 21/2}{106} = 2\frac{mol}{L}$$

$$Na_2CO_3 \rightarrow 2Na^+ + CO_3^{2-}$$

$$?\,mol\ \text{یون} : 4L\ \text{محلول} \times \frac{2mol\ Na_2CO_3}{1L\ \text{محلول}}$$

$$\times \frac{3mol\ \text{یون}}{1mol\ Na_2CO_3} = 24mol\ \text{یون}$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحهٔ ۱۱۲)

۱۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

عبارت‌های اول و دوم نادرست هستند.

از آنجا که استون و یُد در یکدیگر حل می‌شوند، نیروی موجود در بین آن‌هـا در حالت مخلوط بیش از میانگین نیروها در حالت خالص آن‌ها خواهد بود.

انحلال آمونیوم کلرید و سدیم نیترات در آب به صورت یونی بوده و استون به شکل مولکولی در آب حل می‌شود. اما یُد در آب حل نمی‌شـود. بنـابراین در بین این مواد تنها انحلال یک ماده به شکل مولکولی انجام می‌شود.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۳)

۱۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی‌سودکلایی)*

الف) فرض می‌کنیم محلول هر دو گاز دارای $100g$ آب باشد؛ در نتیجـه در محلول O_2 ، $0/04$ گرم گاز اکسیژن و در محلول N_2 ، $0/02$ گرم گاز نیتروژن وجود خواهد داشت. می‌دانیم در مولکول O_2 $(\ddot{O} = \ddot{O})$ دو جفت الکترون پیوندی و در مولکول N_2 $(:N \equiv N:)$ ۳ جفت الکتـرون پیونـدی داریم.

$$?\ \text{جفت } e^- \text{ پیوندی} : 0/04g\ O_2 \times \frac{1mol\ O_2}{32g\ O_2}$$

$$\times \frac{2mol\ \text{جفت } e^- \text{ پیوندی}}{1mol\ O_2} = 2/5 \times 10^{-3}mol\ \text{جفت } e^- \text{ پیوندی}$$

$$?\ \text{جفت } e^- \text{ پیوندی} : 0/02g\ N_2 \times \frac{1mol\ N_2}{28g\ N_2}$$

$$\times \frac{3mol\ \text{جفت } e^- \text{ پیوندی}}{1mol\ N_2} \simeq 2/1 \times 10^{-3}mol\ \text{جفت } e^- \text{ پیوندی}$$

پس نتیجه می‌گیریم که محفظهٔ گاز O_2 ، دارای جفت e^- پیوندی بیشتری می‌باشد.

پاسخ پرسش ب) در صـورت سـؤال گفتـه شـده اسـت کـه از تغییـر حجـم محلول‌ها بر اثر انحلال صرف نظر کنیـد در نتیجـه مـی‌تـوانیم از رابطـهٔ زیـر استفاده کنیم.

$$\text{مولاریت} : \frac{10 \times \text{انحلال‌پذیری}}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow M = \frac{10 \times 0/03}{30} = 0/01\frac{mol}{L}$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۵)

۱۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

بیشتر شدن دما در یک محلول گازی موجب کاهش انحلال‌پذیری آن خواهد شد و کاهش فشار نیز موجب کمتـر شـدن انحـلال‌پـذیری گازهـا مـی‌شـود. بنابراین در فشار $0atm$ میزان انحلال‌پذیری یک گاز به کمترین مقدار خود خواهد رسید.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۱۱۶- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا جعفری‌نژاد)*

هر پنج مورد درست است. بررسی عبارات:

عبارت اول) NH_3 برای برقراری پیوند هیدروژنی، CO_2 هم برای جـرم و حجم بالا و واکنش دادن با آب

ایران توشه
توشـــه‌ای بـــرای سرنوشت

عبارت دوم) با بدست آوردن شیب دو نمودار متوجه می‌شویم که شیب نمودار مربوط به گاز NO سه برابر شیب نمودار N_2 است.

عبارت سوم) آب سرد بهتر می‌تواند گاز را در خود حل کند. CO_2 علاوه بر انحلال مولکولی، با آب واکنش هم می‌دهد که محصول آن کربنیک اسید است. هرچقدر دمای آب کمتر باشد، CO_2 بیشتری حل می‌شود، کربنیک اسید بیشتری تولید می‌شود و pH هم کمتر می‌شود.

عبارت چهارم) کمبود اکسیژن ماهی یعنی انحلال کمتر اکسیژن در آب، حل کردن نمک در آب و افزایش دما هم هر دو باعث کاهش انحلال گاز می‌شوند.

عبارت پنجم: $۰/۰۱۲۵\frac{mol}{L}\times\frac{۳۲g\,O_2}{۱mol\,O_2}\times۰/۱L=۴\times۱۰^{-۲}\frac{g\,O_2}{۱۰۰g\,H_2O}$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۱۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

طبق قانون هنری با افزایش فشار انحلال‌پذیری گازها در آب به صورت خطی افزایش می‌یابد. بنابراین نمودارهای ۳ و ۴ نادرست خواهند بود. از طرفی در فشار صفر، میزان انحلال‌پذیری گازها صفر خواهد بود و نمودار فشار – انحلال‌پذیری در آن‌ها از مبدأ مختصات عبور خواهد کرد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۴ و ۱۱۵)

۱۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا جعفری نژاد)*

مورد دوم و پنجم درست است. بررسی برخی عبارات:

عبارت اول: در لحظه تعادل، جابه‌جایی‌ها هنوز ادامه دارد ولی سرعت هر دو جهت با هم برابر شده است.

عبارت دوم: طبق فرض سوال، محلول A از محلول B غلیظ‌تر است که مولکول‌های آب به سمت آن آمده‌اند.

$$۲۰۰\frac{g}{L}\times\frac{۱mol}{۵۸/۵g}\simeq ۳/۴\Rightarrow ۳/۴>۳$$

عبارت چهارم: در هر سه مورد می‌تواند این اتفاق بیفتد. در مورد اول که غلظت محلول Bرا زیادتر می‌کنیم. در مورد دوم هم فشار هوا را از سمت چپ حذف می‌کنیم و طبق قاعده هم‌ترازی، ارتفاع سمت چپ بالاتر می‌رود. در مورد سوم که اسمز معکوس اتفاق می‌افتد.

عبارت پنجم: زمانی که گوشت‌ها نمک سود می‌شوند، غلظت محیط اطراف گوشت بسیار زیاد می‌شود و باعث می‌شود آب میان بافتی و آب درون سلول از گوشت خارج شود و گوشت دیرتر فاسد شود.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

۱۱۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی‌سورکلایی)*

موارد دوم و چهارم نادرست‌اند.

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: به دلیل انحلال‌پذیری اتانول در آب، نتیجه می‌گیریم که نیروی پیوند هیدروژنی بین اتانول و آب از نیروی پیوند هیدروژنی بین آب و آب قوی‌تر است.

مورد دوم: انحلال‌پذیری گازها در آب با افزایش دما همانند افزودن نمک به محلول، کاهش می‌یابند.

مورد سوم: نیاز روزانهٔ بدن به یون K^+ ، حدود ۲ برابر یون Na^+ می‌باشد.

مورد چهارم: در این فرایند مقداری از ویتامین‌ها و مواد آلی موجود در میوه به درون آب وارد می‌شوند.

مورد پنجم: مطابق شکل کتاب درسی درست می‌باشد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۹)

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

دیوارهٔ یاخته‌ها در گیاهان دارای غشای نیمه‌تراوا است که امکان عبور برخی از ذره‌ها و مولکول‌های کوچک نظیر آب و یون‌ها از آن وجود دارد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۱۹)

شیمی ۲

۱۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا جعفری نژاد)*

همهٔ موارد درست هستند. بررسی برخی عبارات:

عبارت اول: یک مول پلی‌استیرن سه مول پیوند دوگانه دارد که بوسیله ۳ مول H_2 سیر می‌شود.

$$۳mol\,H_2\rightarrow ۳\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}=۱/۸۰۶\times۱۰^{۲۴}H_2$$

برای سوختن کامل یک مول از آن هم به ۱۰ مول اکسیژن نیاز داریم:

$$C_8H_8+۱۰O_2\rightarrow ۸CO_2+۴H_2O$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

عبارت دوم: سیانو اتن: ۹ جفت الکترون پیوندی و ۲ الکترون ناپیوندی $\Leftarrow \frac{۹}{۲}$

تترافلوئور و اتن: ۶ جفت الکترون پیوندی و ۲۴ الکترون ناپیوندی $\Leftarrow \frac{۶}{۲۴}$

$$\frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۶}{۲۴}} = ۱۸$$

عبارت سوم: تفلون و پلی‌وینیل کلراید

(شیمی ۲- پوشاک نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحهٔ ۱۰۴)

۱۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا جعفری‌نژاد)*

فقط مورد چهارم نادرست است. بررسی برخی عبارات:

عبارت اول: اتانول را هم می‌شود از واکنش اشاره شده بدست آورد. هم آبکافت اتیل بوتانوات و اتیل هپتانوات

عبارت دوم: طبق نمودار صفحه ۱۱۰ کتاب درسی درست است.

عبارت چهارم: آب و اتانول به هر نسبتی در هم حل می‌شوند و نمی‌توان محلول سیرشده از آن‌ها تهیه کرد.

(شیمی ۲- پوشاک نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۰)

۱۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

نام دیگر استیک اسید، اتانوئیک اسید است. اسیدی که بر اثر گزش مورچه وارد بدن ما می‌شود، فرمیک اسید (متانوئیک اسید) نام دارد.

کربوکسیلیک اسیدی که گروه R آن $C_۴H_۹$ است، دارای فرمول $C_۴H_۹COOH$ بوده و نام آن پنتانوئیک اسید است.

هپتانول و اتانول به ترتیب دارای فرمول $C_۷H_{۱۵}OH$ و $C_۲H_۵OH$ هستند که بخش ناقطبی آن‌ها به ترتیب شامل ۲۲ و ۷ اتم است.

فرمول مولکولی ویتامین D به صورت $C_{۲۸}H_{۴۴}O$ بوده و فرمول مولکولی ویتامین A نیز $C_{۲۰}H_{۳۰}O$ می‌باشد. نسبت تعداد H در ویتامین D به تعداد C در ویتامین A برابر با $\frac{۴۴}{۲۰} = ۲/۲$ خواهد بود.

(شیمی ۲- پوشاک نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۱۲۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی‌سورکلایی)*

موارد اول و دوم و پنجم درست‌اند.

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: درست، گروه عاملی آن‌ها $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-H$ برخلاف گروه عاملی استری $-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-O-$ شامل ۳ عنصر می‌باشد.

مورد دوم: درست، آشناترین عضو این خانواده، استیک اسید می‌باشد.

$$CH_۳COOH + ۲O_۲ \rightarrow ۲CO_۲ + ۲H_۲O$$

$$?\,mol\,O_۲ : ۳g\,CH_۳COOH \times \frac{۱mol\,CH_۳COOH}{۶۰g\,CH_۳COOH} \times \frac{۲mol\,O_۲}{۱mol\,CH_۳COOH} = ۰/۱mol\,O_۲$$

مورد سوم: نادرست، شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در آن‌ها ثابت و برابر با ۴ است و با افزایش شمار اتم‌های کربن تغییری نمی‌کند.

$$R-\overset{\overset{:O:}{\|}}{C}-\ddot{O}-H$$

مورد چهارم: نادرست، پنتانوئیک اسید دارای ۳ گروه $CH_۲$ در ساختار خود است.

$$CH_۳-CH_۲-CH_۲-CH_۲-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$$

$$C_۵H_{۱۰}O_۲ \Rightarrow \text{جرم مولی} = ۶۰+۱۰+۳۲ = ۱۰۲\frac{g}{mol}$$

مورد پنجم: با افزایش نیروی بین مولکولی وان‌دروالسی در ترکیبات آلی، انحلال‌پذیری آن‌ها در آب کاهش می‌یابد.

برای مثال ویتامین K بخش ناقطبی بسیار بزرگی دارد و در آب نامحلول است.

(شیمی ۲- پوشاک نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۱۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا جعفری‌نژاد)*

فقط مورد سوم نادرست است. بررسی برخی عبارات:

مورد اول: ویتامین K برخلاف ویتامین A حلقه بنزنی دارد. هرکدام ۵ پیوند دوگانه کربن-کربن دارند و برای سیرشدن هر پیوند دوگانه نیز یک مولکول هیدروژن نیاز است.

مورد سوم: ویتامین K توانایی برقراری پیوند هیدروژنی ندارد. چون هیدروژن متصل به F، O و N ندارد.

مورد چهارم: به دلیل برقراری پیوند هیدروژنی بین مولکول‌های خود برخلاف آلکان‌ها، نقطه جوش بالاتری دارد.

(شیمی ۲- پوشاک نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۱۲)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۲۶- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین طیبی‌سورکلایی)

$$C_nH_{2n}O_2 + H_2O \rightarrow C_2H_5OH + C_{n-2}H_{2n-4}O_2$$

ابتدا شمار اتم‌های کربوکسیلیک اسید و استر را به دست می‌آوریم:

$$\text{مول اتانول} = \frac{9/66}{46} = 0/21\,mol \xrightarrow{1:1}$$

$$\text{مول اسید} = 0/21 \xrightarrow{\text{جرم‌مولی}} 0/21 = \frac{27/3}{M}$$

$$\Rightarrow M = 130\,g.mol^{-1} \xrightarrow{C_nH_{2n}O_2} 14n + 32 = 130$$

$$\Rightarrow n = 7 \xrightarrow{+2} \text{استر ۹ کربنی}$$

در نتیجه فرمول استر اولیه $C_9H_{18}O_2$ می‌باشد.

$$C_9H_{18}O_2 + H_2O \rightarrow C_2H_5OH + C_7H_{14}O_2$$

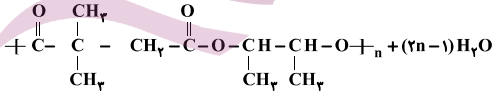
$$?g : 47/4g\,C_9H_{18}O_2 \times \frac{1mol\,C_9H_{18}O_2}{158g\,C_9H_{18}O_2} \times \frac{1mol\,C_2H_5OH}{1mol\,C_9H_{18}O_2}$$

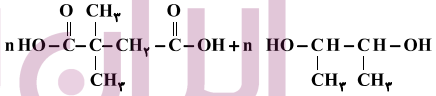
$$\times \frac{R}{100} \times \frac{46g\,C_2H_5OH}{1mol\,C_2H_5OH} = 9/66g\,C_2H_5OH \Rightarrow R = \%70$$

(شیمی ۲- پوشاک نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۲ و ۱۱۳)

۱۲۷- **گزینهٔ «۴»** (محمدرضا پورجاوید)

فرمول ساختاری دی‌اسید و دی‌الکل سازندهٔ این پلی‌استر طبق واکنش زیر به دست می‌آیند:





به این ترتیب فرمول مولکولی دی‌کربوکسیلیک اسید و دی‌الکل به ترتیب $C_6H_{10}O_4$ و $C_4H_{10}O_2$ خواهد بود.

(شیمی ۲- پوشاک نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۴)

۱۲۸- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین طیبی‌سورکلایی)

فرمول شیمیایی این پلی‌آمید برابر با $(C_{24}H_{31}O_2N_2Cl_2)_n$ می‌باشد و جرم مولی آن $449n$ گرم بر مول است.

می‌دانیم برای آبکافت یک پلی‌آمید به ازای هر مول از پلی‌آمید به $(2n-1)$ مول آب نیاز داریم.

$$(C_{24}H_{31}O_2N_2Cl_2)_n \sim (2n-1)\,H_2O$$

$$?\,\text{مولکول}\,H_2O : 224/5g\,\text{پلی‌آمید} \times \frac{1mol\,\text{پلی‌آمید}}{449ng\,\text{پلی‌آمید}} \times \frac{(2n-1)\,mol\,H_2O}{1mol\,\text{پلی‌آمید}} \times \frac{6/02\times10^{23}\,\text{مولکول}\,H_2O}{1mol\,H_2O}$$

$$= 6/02\times10^{23}\,\text{مولکول}\,H_2O$$

(شیمی ۲- پوشاک نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۷)

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** (احمدرضا جعفری‌نژاد)

فقط عبارت چهارم نادرست است. بررسی برخی عبارات:

عبارت اول: طبق نمودار صفحه ۹۹ کتاب درسی درست است.

عبارت دوم: پلی‌اتن سبک، شاخه دار است.

عبارت سوم: در این حالت پلی‌اتنی با بیشترین جرم مولی بدست می‌آید و جرم مولی بیشتر یعنی جاذبهٔ بین مولکولی بیشتر و نقطه جوش بالاتر!

عبارت چهارم: خیر، به علت نقش کاتالیزوری مولکول‌های شوینده، در آبکافت تسریع می‌شود.

(شیمی ۲- پوشاک نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۹۹، ۱۱۷ و ۱۱۹)

۱۳۰- **گزینهٔ «۱»** (احمدرضا جعفری‌نژاد)

همه موارد درست هستند. بررسی عبارات:

عبارت اول: تفاوت‌شان در این است که دی‌اسید دو تا $COOH$ دارد، دی‌آمین هم دو تا NH_2، تفاوت جرم شان می‌شود.

$$(2\times45) - (2\times16) = 58$$

عبارت دوم: ۴۱۵۰ گرم دی‌اسید یعنی ۲۵ مول $\frac{4150}{166} = 25$ و ۱۶۲۰ گرم دی‌آمین یعنی ۱۵ مول $\frac{1620}{108} = 15$. ۱۵ مول از دی‌اسید با ۱۵ مول دی‌آمین در واکنش شرکت کرده (۱۰ مول مونومر از دی‌اسید اضافی‌ست) و ۱۴ مول H_2O تولید می‌شود. این ۱۴ مول آب، ۲۵۲ گرم جرم دارند که چون چگالی آب $1g.cm^{-3}$ است. ۲۵۲ گرم آب ۲۵۲ سانتی‌متر مکعب (میلی‌لیتر) حجم دارد.

عبارت سوم: چون دو H متصل به N دارد.

عبارت چهارم: جرم هر مول واحد تکرارشونده این پلیمر ۲۳۸ گرم است.

ایران توشه
توشه ای برای توفیق

$+C_{14}H_{10}N_2O_2+_n$

۳۵۷۰ گرم یعنی ۱۵ مول، هر مول ۸ پیوند دو گانه دارد. پس ۱۲۰ مول پیوند دوگانه ۴۷۶۰ گرم یعنی ۲۰ مول، هر مول ۶ جفت الکترون ناپیوندی دارد. پس ۱۲۰ مول جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

(شیمی ۲- پوشاک نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

شیمی ۱

۱۳۱- گزینهٔ «۲» (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

عبارات اول و سوم درست‌اند. بررسی عبارات:

عبارت اول: به دلیل بالاتر بودن دمای آزمایش ۳، سرعت واکنش در آزمایش ۳ از آزمایش ۱ بیش‌تر است.

عبارت دوم: سرعت واکنش در آزمایش شمارهٔ ۲ از سرعت واکنش در آزمایش ۱ بالاتر است، زیرا پودر در مقایسه با قرص سطح تماس بیش‌تری دارد اما نسبت سرعت آزمایش (۱) به (۲) برابر ۰/۵ نیست.

عبارت سوم: واکنش در آزمایش شمارهٔ ۴ بیش‌ترین سرعت را دارد، زیرا در این آزمایش، دما و سطح تماس بالاتر از سایر آزمایش‌ها است.

عبارت چهارم: مقدار نهایی فراورده، به دمای آزمایش بستگی ندارد. بنابراین حجم گاز جمع‌آوری شده در آزمایش‌های ۲ و ۴ برابر است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۴) (شیمی ۲، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰)

۱۳۲- گزینهٔ «۳» (ساجد شیری)

بررسی موارد نادرست:

مورد ب: طبق قانون هنری، با افزایش فشار، انحلال‌پذیری گازها در آب افزایش می‌یابد.

مورد پ: انحلال‌پذیری گاز CO_2 به دلیل واکنش با آب و تشکیل کربنیک‌اسید و از طرفی جرم مولی بیشتر، از انحلال‌پذیری NO در هر دمایی بیشتر است. (دقت شود CO_2 برخلاف NO مولکولی ناقطبی است.)

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۸، ۱۱۱ و ۱۱۵)

۱۳۳- گزینهٔ «۲» (رضا سلیمانی)

موارد سوم و چهارم درست هستند.

بررسی موارد:

مورد اول: در مخلوط‌های ناهمگن به حالت مایع مانند مخلوط آب و هگزان، اجزای مخلوط به میزان ناچیزی در یکدیگر حل می‌شوند.

مورد دوم: در حالت مایع، مولکول‌های آب با یکدیگر پیوندهای هیدروژنی قوی دارند، اما روی هم می‌لغزند و جابه‌جا می‌شوند.

مورد سوم: انحلال ید در هگزان، انحلالی مولکولی است و مولکول‌های ید، ماهیت خود را در محلول حفظ می‌کنند.

مورد چهارم: سدیم سولفات در آب حل می‌شود. برای مواد محلول در آب، قدرت نیروی جاذبهٔ حلال – حل‌شونده در محلول، بیشتر از میانگین جاذبهٔ حل‌شوندهٔ خالص و حلال خالص است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۱۱)

۱۳۴- گزینهٔ «۱» (امید رضوانی)

براساس قانون هنری، در دمای ثابت، انحلال‌پذیری گازها در آب با فشار آن‌ها رابطه‌ای مستقیم و خطی دارد. پس می‌توانیم از تناسب استفاده کنیم:

$$\text{انحلال‌پذیری در فشار } (S_1)\,2\,atm = 100g\,H_2O \times \frac{0/035g\,O_2}{500g\,H_2O} = 0/007g\,O_2$$

در این دما و فشار، در $100g$ آب، $0/007g$ گاز اکسیژن حل شده است.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \frac{S_2}{0/007g\,O_2} = \frac{5atm}{2atm} \Rightarrow S_2 = 1/75\times10^{-2}g\,O_2$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۱۳۵- گزینهٔ «۲» (مرتضی رضائی‌زاده)

نمودار «انحلال‌پذیری – فشار» گازهایی که با آب واکنش نمی‌دهند، خطی است.

$$\text{انحلال‌پذیری در } 3atm = 3atm \times \frac{6mgNO}{9atm} = 2mgNO$$

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{(2\times10^{-3})g}{(100+2\times10^{-3})g} \times 10^6 \simeq 20ppm$$

نکته: نمودار انحلال‌پذیری گازهایی مانند N_2، O_2 و NO که با آب واکنش نمی‌دهند، در دمای ثابت، خطی است، به‌طوری‌که اگر فشار گاز n برابر شود، انحلال‌پذیری آن‌ها نیز n برابر خواهد شد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳۶- گزینهٔ «۲» *(روزبه رضوانی)*

اختلاف انحلال‌پذیری گاز N_2 در دو فشار ۱ و ۵ اتمسفر

$$S_2 - S_1 = 7/5\times10^{-3}(5-1) = 3\times10^{-2}\,g$$

انحلال‌پذیری به ازای ۱۰۰ گرم آب تعریف می‌شود، پس به ازای یک کیلوگرم آب، مقدار گاز N_2 آزاد شده برابر ۰/۳ گرم است.

$$?\,m\,mol\,N_2 = 0/3\,g\,N_2 \times \frac{1\,mol\,N_2}{28\,g\,N_2} \times \frac{10^3\,m\,mol\,N_2}{1\,mol\,N_2} \simeq 10/7\,m\,mol\,N_2$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۱۳۷- گزینهٔ «۱» *(رضا هنرمند)*

بررسی موارد:

آ) این گازها به‌صورت فیزیکی در آب حل می‌شوند. (درست)

ب) در مورد گازهای (CH_4, N_2) و همچنین گازهای (Ar, NO) با کاهش جرم مولی مواجه هستیم. (نادرست)

پ) درفشار ۵atm انحلال‌پذیری گاز Ar برابر با ۰/۰۳ گرم در ۱۰۰ گرم آب است:

$$\text{(درست)}\quad ppm = \frac{\text{جرم Ar}}{\text{جرم محلول}}\times10^6 = \frac{0/03}{100}\times10^6 = 300\,ppm$$

ت) انحلال‌پذیری گاز متان در فشارهای ۲ و ۶ اتمسفر به ترتیب ۰/۰۰۵ و ۰/۰۱۵ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.

مقدار افزایش انحلال CH_4 به‌ازای افزایش فشار در ۱۰۰ گرم آب:

$$\text{(در ۱۰۰ گرم آب)}\quad 0/015 - 0/005 = 0/01\,g =$$

مقدار افزایش انحلال CH_4 در نیم‌کیلوگرم آب در ۱۰۰ گرم آب:

$$\text{(درست)}\quad = 500\,g\,H_2O \times \frac{0/01\,g\,CH_4}{100\,g\,H_2O} = 0/05\,g\,CH_4$$

ث) مطابق نمودار، در فشار ۳atm مقدار NO حل‌شده برابر با ۰/۰۲ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. توجه: با توجه به اینکه چگالی آب $1\,g.cm^{-3}$ است؛ بنابراین جرم ۰/۶L آب، ۶۰۰ گرم است.

$$\text{(نادرست)}\quad ?\,g\,NO = 600\,g\,H_2O \times \frac{0/02\,g\,NO}{100\,g\,H_2O} = 0/12\,g\,NO$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۵ و ۱۱۵)

۱۳۸- گزینهٔ «۴» *(حسن عیسی‌زاده)*

مواد A و D به ترتیب کم‌ترین و بیش‌ترین قطبیت را دارند، بنابراین مخلوط حاصل از آنها، ناهمگن خواهد بود. در صورتی‌که I_2 و CS_2 هر دو ناقطبی هستند و مخلوطی همگن ایجاد می‌کنند.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحهٔ ۱۲۰)

۱۳۹- گزینهٔ «۲» *(رضا هنرمند)*

موارد دوم و چهارم نادرست‌اند. بررسی موارد:

مورد اول: اغلب محلول‌های موجود در بدن انسان، محلول‌های آبی هستند.

مورد دوم: شکر، اوزون و اتیلن‌گلیکول، ترکیب‌های مولکولی دارند و در اثر انحلال در آب، یون تولید نمی‌کنند.

مورد سوم: چربی و هگزان، هر دو ناقطبی‌اند و جاذبهٔ ذرات محلول آن‌ها از نوع واندروالسی است.

در محلول سدیم کلرید در آب، جاذبهٔ میان ذرات موجود در محلول از نوع یون ـ دوقطبی است.

مورد چهارم:

آمونیوم نیترات: $NH_4NO_3(s) \xrightarrow{H_2O} \underbrace{NH_4^+(aq) + NO_3^-(aq)}_{\text{دو مول یون}}$

پتاسیم سولفات: $K_2SO_4(s) \xrightarrow{H_2O} \underbrace{2K^+(aq) + SO_4^{2-}(aq)}_{\text{سه مول یون}}$

از انحلال یک مول آمونیوم نیترات، ۲ مول یون و از انحلال یک مول پتاسیم سولفات، ۳ مول یون در محلول ایجاد می‌شود.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

۱۴۰- گزینهٔ «۴» *(امید رضوانی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: در هر سه روش تصفیهٔ آب، به کلرزنی نیاز است، زیرا میکروب‌ها باقی می‌مانند.

گزینهٔ «۲»: در مخلوط هگزان در آب هر دو مایع هستند ولی در یکدیگر حل نمی‌شوند و مخلوط آن‌ها ناهمگن است.

گزینهٔ «۳»: استون به هر نسبتی در آب حل می‌شود. بنابراین نمی‌توان از آن محلول سیرشده در آب تهیه کرد.

گزینهٔ «۴»: افزودن نمک به آب باعث می‌شود که مولکول‌های آب اطراف یون‌ها را احاطه کرده و مقداری از مولکول‌های گازی اکسیژن از آب خارج می‌شوند.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۳، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۹ و ۱۲۱)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

حسابان ۲- اختیاری

۱۴۱- **گزینهٔ «۲»** (کاظم اجلالی)

مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x)=x^5+x^4-x^3-x^2=(x^5-x^3)+(x^4-x^2)$$

$$=x^3(x^2-1)+x^2(x^2-1)=(x^2-1)(x^3+x^2)$$

$$=x^2(x+1)^2(x-1)$$

x	$-\infty$		-1		0		1	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(-\infty,1]$ و روی هر بازهٔ زیر مجموعهٔ آن نیز اکیداً نزولی است، پس بیشترین مقدار a برابر ۱ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۱)

۱۴۲- **گزینهٔ «۴»** (میلاد چاشمی)

$$f'(1)=2x-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1}=0\Rightarrow 2-\frac{\sqrt{a}}{2}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}=4\xrightarrow{a>0} a=16$$

$$b=f(1)\Rightarrow b=1-4=-3$$

$$\Rightarrow a+b=13$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۴)

۱۴۳- **گزینهٔ «۱»** (عرفان صادقی)

$$f(x)=2\cos x+\cos 2x$$

$$f'(x)=-2\sin x-2\sin 2x=-2\sin x-2(2\sin x.\cos x)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} -2\sin x(1+2\cos x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 & \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} \{x=\pi \\ \cos x=\frac{-1}{2} & \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} \begin{cases} x=\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

معادلهٔ $f'(x)=0$ در بازهٔ $(0,2\pi)$، سه جواب دارد. حال با جدول تغییرات رفتار تابع داریم:

x		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

تابع دو نقطهٔ مینیمم نسبی و یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۴)

۱۴۴- **گزینهٔ «۴»** (عادل حسینی)

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{x}-1}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2-6\sqrt{x}}{x^3}$$

برای اینکه جهت تقعر تابع رو به بالا باشد، لازم است $f''(x)>0$ باشد. داریم:

$$\frac{2-6\sqrt{x}}{x^3}>0\xrightarrow{D_{f'}=D_{f''}=(0,+\infty)} 2-6\sqrt{x}>0\Rightarrow \sqrt{x}<\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x<\frac{1}{9}\xrightarrow{x>0} x\in\left(0,\frac{1}{9}\right)$$

بنابراین بیشترین مقدار a، $\frac{1}{9}$ است.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۱۲۹)

۱۴۵- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

مطابق قسمت (ب) مثال صفحهٔ ۱۳۳، کتاب درسی می‌دانیم طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$، $x=0$ است. پس با توجه به محدود کردن دامنهٔ آن به $x>-1$ و همچنین اینکه سهمی نقطهٔ عطف ندارد، طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f، قطعاً $x=-1$ است و داریم:

$$f(-1)=-\frac{1}{2}(1)-\frac{5}{2}=-3$$

تابع f در $x=-1$ پیوسته است. بنابراین کافی است شیب خط مماس بر آن را در $x=-1$ به‌دست آوریم:

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} & ;x<-1 \\ -x & ;x\geq -1 \end{cases}$$

تابع در $x=-1$ مشتق‌پذیر نیز می‌باشد و $f'(-1)=1$ است. بنابراین خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $(-1,-3)$ به‌صورت زیر است:

$$y=x-2$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

عرض از مبدا این خط برابر ۲- است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۳ و ۱۳۴)

۱۴۶- **گزینهٔ «۱»** (وحید ون‌آبادی)

$$y' = -2\sin(2x)$$

$$y'' = -4\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \; ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} x = \frac{\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{vmatrix} x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow m = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \\ y = 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{معادله خط مماس}} y = -2x + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{vmatrix} x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow m = y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = +2 \\ y = 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{معادله خط مماس}} y = 2x + \frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{تقاطع دو خط}} 2x + \frac{\pi}{2} = -2x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۶)

۱۴۷- **گزینهٔ «۲»** (علی شهرابی)

نقطهٔ $(1,6)$، اکسترمم نسبی تابع f است، پس:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow -3 - 6 + c = 0 \Rightarrow c = 9 \qquad (1)$$

$$f(1) = 6 \Rightarrow -1 - 3 + 9 + d = 6 \Rightarrow d = 1 \qquad (2)$$

نقطهٔ $x = k$، نقطهٔ عطف تابع است، پس $f''(k) = 0$:

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 \Rightarrow f''(x) = -6x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow k = -1$$

$$p = f(-1) = 1 - 3 - 9 + 1 = -10$$

$$\Rightarrow p + k = -10 + (-1) = -11$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰)

۱۴۸- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

$y = f(x)$ را به‌صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$I) f(0) = 1 \Rightarrow \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow b = d \Rightarrow f(x) = \frac{ax+b}{cx+b}$$

$$II) f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow f(x) = \frac{ax-a}{cx-a}$$

III) خط $y = -1$، مجانب افقی نمودار است، یعنی $\frac{a}{c} = -1$ است.

$$\Rightarrow c = -a \Rightarrow f(x) = \frac{ax-a}{-ax-a} = \frac{x-1}{-x-1} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۳)

۱۴۹- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

$x = 0$ مجانب قائم نمودار تابع است، به طوری که در همسایگی آن علامت f یکسان است، بنابراین $x = 0$، باید ریشهٔ مضاعف عبارت مخرج باشد. از طرفی نمودار تابع در $x = 1$ بر محور xها مماس است یعنی $x = 1$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت صورت باشد.

در نتیجه ضابطهٔ $y = f(x)$ را می‌توان به‌صورت $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}$ در نظر گرفت.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۰)

۱۵۰- **گزینهٔ «۴»** (فرامرز سپهری)

$x = 0$ مجانب قائم نمودار است و از آنجا که در دو طرف آن علامت تابع یکسان است، $x = 0$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت مخرج باشد، بنابراین $b = 0$ است.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+a}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}$$

$x = 2$ نیز طول نقطهٔ اکسترمم نسبی نمودار تابع است. پس باید $f'(2) = 0$ باشد:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2a}{x^3} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4} - \frac{a}{4} = 0$$

$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow a + b = -1$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۴)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۳- اختیاری

۱۵۱- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

۱) دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

۲) دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=0$.

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۹ و ۸۲)

۱۵۲- **گزینهٔ «۴»** (مهرداد ملوندی)

حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر $V=\left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|$ است. با فرض $\vec{a}=(m,-2,1)$، $\vec{b}=(1,2,-1)$ و $\vec{c}=(3,1,0)$ داریم:

$$\begin{cases}\vec{b}=(1,2,-1)\\ \vec{c}=(3,1,0)\end{cases}\Rightarrow \vec{b}\times\vec{c}=(1,-3,-5)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=m+6-5=m+1$$

$$V=\left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|\Rightarrow|m+1|=5\Rightarrow\begin{cases}m+1=5\Rightarrow m=4\\ m+1=-5\Rightarrow m=-6\end{cases}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحهٔ ۸۳)

۱۵۳- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین ابومحبوب)

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow 36=8+12+2\vec{a}.\vec{b}$$

$$\Rightarrow 2\vec{a}.\vec{b}=16\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=8$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^2+64=8\times12$$

$$\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^2=32\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=4\sqrt{2}$$

مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۴)

۱۵۴- **گزینهٔ «۱»** (سروش موئینی)

$$\begin{matrix}\vec{a}=(1,-1,-1)\\ \vec{b}=(3,2,1)\end{matrix}\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=(4,1,0)=\vec{c}$$

اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{c}$ باشد، داریم:

$$\Rightarrow|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}.\vec{c}|}{|\vec{c}|}=\frac{4-1+0}{\sqrt{4^2+1^2+0^2}}=\frac{3}{\sqrt{17}}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۱۵۵- **گزینهٔ «۳»** (عباس اسدی‌امیرآبادی)

$$(2\vec{b}-\vec{a})\times(2\vec{a}-\vec{b})=4\vec{b}\times\vec{a}-\underbrace{2\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}}-\underbrace{2\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}+\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{-\vec{b}\times\vec{a}}=3\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{b}=(1,1,-1)\\ \vec{a}=(1,-2,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\vec{b}\times\vec{a}=(-1,-2,-3)$$

$$3\vec{b}\times\vec{a}=(-3,-6,-9)\xrightarrow{\text{تصویر قائم روی صفحهٔ xy}}(-3,-6,0)$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۱۵۶- **گزینهٔ «۱»** (محسن محمد کریمی)

اگر برداری بر دو بردار $3\vec{a}-2\vec{b}$ و $-2\vec{a}+5\vec{b}$ عمود باشد، بر صفحهٔ شامل بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، پس موازی بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ می‌باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\left.\begin{matrix}\vec{a}=(۲,۳,۱)\\ \vec{b}=(۱,۱,-۱)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=(-۴,۳,-۱)$$

بردار گزینهٔ ۱، قرینهٔ این بردار است یعنی با $\vec{a}\times\vec{b}$ موازی است.

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۱۵۷- **گزینهٔ «۳»** (محسن محمد کریمی)

اگر حاصل‌ضرب داخلی هر یک از بردارهای داده شده را در بردار $\vec{a}$ محاسبه کنیم، خواهیم دید که به غیر از گزینهٔ ۳، مابقی مثبت خواهند شد. پس بردار $\vec{a}$ با بردارهای داده شده در گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ زاویه‌ای حاده می‌سازد، اما چون حاصل‌ضرب داخلی بردار $\vec{a}$ در بردار گزینهٔ «۳» منفی است، زاویه‌ای که با این بردار می‌سازد منفرجه است.

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

۱۵۸- **گزینهٔ «۳»** (سروش موئینی)

چون $\vec{a}\times\vec{b}$ بر $\vec{a}$ عمود می‌شود، زاویهٔ بین این دو بردار قائمه است، پس سینوس آن برابر ۱ است. در نتیجه داریم:

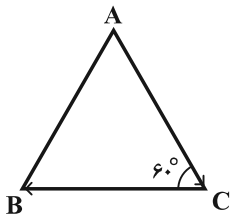
$$\left|\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\right|=|\vec{a}|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\times۱=|\vec{a}||\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

از طرفی، $|\vec{a}|=۶$ و $|\vec{b}|=۳$، پس:

$$\left|\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\right|=۶\times۶\times۳\times\sin۱۵۰^\circ=۶\times۶\times۳\times\sin۳۰^\circ=۵۴$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۱۵۹- **گزینهٔ «۱»** (سروش موئینی)



BC، AC و AB، هر سه قطر وجه‌های مکعب هستند، پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و زاویهٔ ACB برابر ۶۰° خواهد بود. چون انتهای بردار $\overrightarrow{AC}$ بر ابتدای بردار $\overrightarrow{CB}$ منطبق است، پس زاویهٔ بین دو بردار $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CB}$، مکمل زاویهٔ ACB یعنی برابر ۱۲۰° است و داریم:

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos۱۲۰^\circ$$

$$=۲\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۲}\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-۴$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۱۶۰- **گزینهٔ «۱»** (سیدامیر ستوده)

ابتدا دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(-۳,-۳,۳)\\ \overrightarrow{AC}=(-۱,-۱,۰)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(۳,-۳,۰)$$

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳^۲+(-۳)^۲}=\frac{۱}{۲}\times۳\sqrt{۲}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۸۱ تا ۸۴)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضیات گسسته- اختیاری

۱۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(نوید مجیری)*

هر سال دارای ۱۲ ماه و هر هفته دارای ۷ روز است. بنابراین به تعداد $۱۲\times۷=۸۴$ ترکیب متفاوت شامل یک روز از هفته و یک ماه از سال وجود دارد.

حال چون $\left[\frac{۳۳۷}{۸۴}\right]=۴$، پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل $۴+۱=۵$ دانش‌آموز در این دبیرستان وجود دارند که در یک روز از هفته و در یک ماه از سال متولد شده‌اند.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۱۶۲- **گزینهٔ «۱»** *(عزیزاله علی‌اصغری)*

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری هرگاه $(kn+۱)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، آنگاه لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+۱)$ کبوتر در آن قرار گرفته است. بنابراین داریم:

$$k+۱=۷\Rightarrow k=۶$$

$$۸۵\geq ۶n+۱\Rightarrow ۶n\leq ۸۴\Rightarrow n\leq ۱۴$$

بنابراین اگر ۸۵ شاخه گل را حداکثر در ۱۴ گلدان قرار دهیم، آنگاه گلدانی وجود دارد که در آن حداقل ۷ شاخه گل قرار گرفته است.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۸۲)

۱۶۳- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

زیرمجموعه‌هایی دو عضوی از مجموعهٔ A که مجموع اعضای آنها برابر ۵۸ است، عبارت‌اند از:

$$\{۲۶,۳۲\},\{۲۳,۳۵\},\{۲۰,۳۸\},\{۱۷,۴۱\},\{۱۴,۴۴\},\{۱۱,۴۷\},\{۸,۵۰\}$$

همچنین اعداد ۲، ۵ و ۲۹ در هیچ‌کدام از این زیر مجموعه‌ها قرار نمی‌گیرند. با انتخاب ۱۰ عدد (برابر مجموع تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی و اعدادی که در هیچ‌کدام از این زیرمجموعه‌ها قرار نمی‌گیرند) ممکن است مجموع هیچ دو عضوی برابر ۵۸ نباشد ولی با انتخاب عدد یازدهم، حداقل دو عدد وجود دارند که به یکی از زیرمجموعه‌های دو عضوی مشخص شده تعلق دارند و در نتیجه مجموع آنها برابر ۵۸ است.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ مشابه تمرین ۱۳ صفحهٔ ۸۴)

۱۶۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

تعداد یال‌های گراف کامل $K_{۱۱}$ برابر است با:

$$q(K_{۱۱})=\frac{۱۱\times۱۰}{۲}=۵۵$$

با توجه به اینکه $\left[\frac{۵۵-۱}{۶}\right]=۹$، پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۱۰ یال در این گراف وجود دارد که همرنگ باشند.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۱۶۵- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

گزینهٔ «۱»: مستطیلی به طول اضلاع ۶ و ۸ را می‌توان به ۴۸ مربع به طول ضلع ۱ تقسیم کرد. چون $۴۸<۵۰$، پس مربعی به ضلع ۱ در این مستطیل وجود دارد که شامل حداقل ۲ نقطه باشد.

گزینهٔ «۲»: مستطیلی به طول اضلاع ۶ و ۸ را می‌توان به ۱۲ مربع به طول ضلع ۲ تقسیم کرد. چون $۴\times۱۲<۵۰$، پس مربعی به ضلع ۲ در این مستطیل وجود دارد که شامل حداقل ۵ نقطه باشد.

گزینهٔ «۳»: مستطیلی به طول اضلاع ۶ و ۸ را می‌توان به ۶ مستطیل به طول اضلاع ۲ و ۴ تقسیم کرد. با توجه به رابطهٔ $۹\times۶>۵۰$، نمی‌توان مطمئن بود که مستطیلی به طول اضلاع ۲ و ۴ در مستطیل مفروض و شامل ۱۰ نقطه وجود داشته باشد. (ممکن است در هیچ‌کدام از مستطیل‌های کوچک‌تر، بیشتر از ۹ نقطه وجود نداشته باشد.)

گزینهٔ «۴»: مستطیلی به طول اضلاع ۶ و ۸ را می‌توان به ۸ مستطیل به طول اضلاع ۳ و ۲ تقسیم کرد. چون $۶\times۸>۵۰$، پس مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۲ در مستطیل مفروض وجود دارد که شامل حداقل ۷ نقطه باشد.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۸۰)

۱۶۶- **گزینهٔ «۲»** *(نوید مجیری)*

طبق قضیهٔ تقسیم، در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد ۶، باقی مانده یکی از

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

اعداد ۵,۴,۳,۲,۱,۰ است، یعنی تعداد لانه‌ها برابر $n=6$ است. با توجه به اینکه $k+1=4$ است، پس $k=3$ بوده و در نتیجه طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، حداقل تعداد اعداد انتخابی برابر است با:

$$kn+1=3\times6+1=19$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۱۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

یک تابع تعریف شده از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B در صورتی غیرپوشا است که برد آن فاقد حداقل یکی از اعضای مجموعهٔ B باشد. اگر توابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B که برد آنها فاقد عضوهای ۱، ۲ و ۳ باشند را به ترتیب با A_1, A_2, A_3 نشان دهیم، داریم:

$$|A_1|=|A_2|=|A_3|=2^4=16$$

$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=1$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

$$\text{تعداد توابع غیرپوشا}=|A_1\cup A_2\cup A_3|=3\times16-3\times1+0=45$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۷ تا ۷۸)

۱۶۸- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود درویشی)*

اگر S مجموعهٔ اعداد طبیعی سه رقمی و A_1 و A_2 زیرمجموعه‌هایی از S باشند که اعضای آنها به‌ترتیب بر ۷ و ۱۱ بخش‌پذیر هستند، داریم:

$$|S|=999-99=900$$

$$|A_1|=\left[\frac{999}{7}\right]-\left[\frac{99}{7}\right]=142-14=128$$

$$|A_2|=\left[\frac{999}{11}\right]-\left[\frac{99}{11}\right]=90-9=81$$

$$|A_1\cap A_2|=\left[\frac{999}{77}\right]-\left[\frac{99}{77}\right]=12-1=11$$

$$|A_1\cup A_2|=128+81-11=198$$

تعداد اعداد طبیعی سه رقمی که بر هیچ کدام از اعداد ۷ و ۱۱ بخش‌پذیر نباشند، معادل تعداد اعضای مجموعهٔ $\bar{A}_1\cap\bar{A}_2$ است.

داریم:

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=|S|-|A_1\cup A_2|=900-198=702$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۱۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید تعداد کسانی که هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند، برابر $2x$ باشد. در این صورت x نفر نیز هیچ کدام از این دو رشته را بازی نکرده و $25-x$ نفر حداقل یکی از این دو رشته را بازی می‌کنند. اگر مجموعه دانش‌آموزانی که فوتبال و والیبال بازی می‌کنند را به ترتیب با A_1 و A_2 نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$

$$\Rightarrow 25-x=16+13-2x\Rightarrow x=4$$

تعداد کسانی که در این کلاس فقط فوتبال یا فقط والیبال بازی می‌کنند، برابر است با:

$$|A_1-A_2|+|A_2-A_1|=|A_1|+|A_2|-2|A_1\cap A_2|$$

$$=16+13-2\times8=13$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۱۷۰- **گزینهٔ «۴»** *(مهدی عزیزی)*

اعداد مکعب کامل ۳ رقمی $=B$ و اعداد مربع کامل ۳ رقمی $=A$

$$100\le k^2\le999\Rightarrow10\le k\le31\xrightarrow{\text{تعداد}}|A|=22$$

$$100\le k^3\le999\Rightarrow5\le k\le9\xrightarrow{\text{تعداد}}|B|=5$$

$$100\le k^6\le999\Rightarrow k=3\xrightarrow{\text{تعداد}}|A\cap B|=1$$

بنابراین داریم:

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$$

$$=900-(22+5-1)=874$$

↓ کل اعداد ۳ رقمی

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۳- اختیاری

۱۷۱- **گزینهٔ «۱»** (محسن قندچلر)

$$\frac{f_A}{f_B}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{\lambda_A+0/15}{\lambda_A}=\frac{5}{4}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_A=0/6\mu m\\ \lambda_B=0/6+0/15=0/75\mu m\end{cases}$$

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow\begin{cases}E_A=\frac{12\times10^{-7}}{0/6\times10^{-6}}=2eV\\ E_B=\frac{12\times10^{-7}}{0/75\times10^{-6}}=1/6eV\end{cases}$$
$$\Rightarrow\Delta E=2-1/6=0/4eV$$

(فیزیک۳- آشنایی با فیزیک اتمی، صفحه‌های ۱۱۶ و ۱۱۷)

۱۷۲- **گزینهٔ «۲»** (محمدعلی راست‌پیمان)

با توجه به اطلاعات روی نمودار و معادلهٔ فوتوالکتریک، خواهیم داشت:

$$B: K_{max}=hf-W_0\Rightarrow(K_{max})_B=hf'-h(1/5\times10^{15})$$

$$A: K_{max}=hf-W_0\Rightarrow(K_{max})_A=hf'-h(10^{15})$$

بنابراین:

$$(K_{max})_A-(K_{max})_B=(hf'-10^{15}h)-(hf'-1/5\times10^{15}h)$$
$$\Rightarrow(K_{max})_A-(K_{max})_B=0/5\times10^{15}h=0/5\times10^{15}\times4\times10^{-15}$$
$$\Rightarrow(K_{max})_A-(K_{max})_B=2eV$$

(فیزیک۳- آشنایی با فیزیک اتمی، صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۲۰)

۱۷۳- **گزینهٔ «۳»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

در هر رشته، کوتاه‌ترین طول‌موج زمانی گسیل می‌شود که الکترون از تراز $n=\infty$ به تراز مربوط به آن رشته گذار انجام دهد. برای سری پاشن $(n'=3)$ داریم:

$$n'=3,n=\infty\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{min}}=R(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{\infty^2})\Rightarrow\frac{1}{\lambda_{min}}=\frac{R}{9}$$

$$\Rightarrow\lambda_{min}=\frac{9}{R}=900nm$$

در هر رشته بلندترین طول‌موج زمانی گسیل می‌شود که الکترون از یک تراز بالاتر به تراز مربوط به آن رشته گذار انجام دهد. برای سری لیمان $(n'=1)$ داریم:

$$n'=1,n=2$$

$$\frac{1}{\lambda_{max}}=R(\frac{1}{1}-\frac{1}{2^2})=\frac{3}{4}R\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{4}{3R}=\frac{400}{3}nm$$

در نتیجه:

$$900-\frac{400}{3}=\frac{2700}{3}-\frac{400}{3}=\frac{2300}{3}nm$$

(فیزیک۳- آشنایی با فیزیک اتمی، صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۴)

۱۷۴- **گزینهٔ «۴»** (بابک اسلامی)

با استفاده از تعریف داریم:

گزینهٔ «۱»:

$$\Delta E(5\to2)-\Delta E(5\to3)=(E_5-E_2)-(E_5-E_3)$$
$$=E_3-E_2=\Delta E(3\to2)$$

گزینهٔ «۲»:

$$\Delta E(4\to2)+\Delta E(2\to1)=(E_4-E_2)+(E_2-E_1)$$
$$=E_4-E_1=\Delta E(4\to1)$$

گزینهٔ «۳»:

$$\Delta E(4\to2)-\Delta E(5\to3)=(E_4-E_2)-(E_5-E_3)$$
$$=(E_3-E_2)-(E_5-E_4)=\Delta E(3\to2)-\Delta E(5\to4)$$

گزینهٔ «۴»:

$$\Delta E(6\to1)+\Delta E(2\to1)=(E_6-E_1)+(E_2-E_1)$$
$$=E_6+E_2-2E_1\neq\Delta E(6\to2)$$

(فیزیک۳- آشنایی با فیزیک اتمی، صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۸)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۷۵- **گزینهٔ «۱»** (مسعود قره‌خانی)

$$E_n=\frac{-E_R}{n^2}\Rightarrow E_5-E_2=\frac{-E_R}{5^2}-(\frac{-E_R}{2^2})=\frac{-E_R}{25}+\frac{E_R}{4}$$

$$\Rightarrow E_5-E_2=\frac{21E_R}{100}=0/21E_R$$

(فیزیک۳- آشنایی با فیزیک اتمی، صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۷)

۱۷۶- **گزینهٔ «۳»** (بابک اسلامی)

هسته‌هایی که تعداد پروتون مساوی دارند، دارای خواص شیمیایی یکسان هستند و ایزوتوپ نامیده می‌شوند. با توجه به اینکه یک عنصر به‌صورت $^{A}_{Z}X_N$ نشان داده می‌شود که در آن $A=Z+N$ است، بنابراین عنصرهای نشان داده شده در گزینهٔ «۳» با عدد اتمی $Z=19$، ایزوتوپ هستند.

(فیزیک۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحهٔ ۱۳۹)

۱۷۷- **گزینهٔ «۴»** (بابک اسلامی)

ابتدا معادلهٔ واپاشی را می‌نویسیم: $^{25}_{13}Al\rightarrow{}^{25}_{12}Mg+(^{0}_{+1}e^{+})$

بنابراین محصول نهایی منیزیم است و طبق رابطهٔ $A=Z+N$، تعداد نوترون‌های آن برابر است با: $25=12+N\Rightarrow N=13$

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۵)

۱۷۸- **گزینهٔ «۲»** (بابک اسلامی)

با استفاده از رابطهٔ تعداد هسته‌های پرتوزای فعال یک مادهٔ پرتوزا، داریم:

$$N=N_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}\Rightarrow\frac{N_A}{N_B}=\frac{N_{0A}}{N_{0B}}\times\frac{2^{\frac{t}{(T_{\frac{1}{2}})_B}}}{2^{\frac{t}{(T_{\frac{1}{2}})_A}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{16}=1\times\frac{2^{\frac{t}{24/5}}}{2^{\frac{t}{21/5}}}\Rightarrow 2^{-4}=2^{\frac{t}{24/5}-\frac{t}{1/5}}\Rightarrow 2^{-4}=2^{\frac{-4t}{9}}$$

$$\Rightarrow t=9h=540min$$

(فیزیک۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱۷۹- **گزینهٔ «۳»** (مهسن قندچلر)

ابتدا جرم مادهٔ باقی‌مانده بعد از سه نیمه‌عمر را محاسبه می‌کنیم:

$$m=m_0(\frac{1}{2})^n=24\times(\frac{1}{2})^3\Rightarrow m=3g$$

طبق رابطهٔ $E=mc^2$، انرژی حاصل از ۳ گرم ماده را برحسب ژول به‌دست آورده و سپس آن را به کیلووات ساعت تبدیل می‌کنیم.

$$E=mc^2=(3\times10^{-3})\times(9\times10^{16})=27\times10^{13}J$$

$$\Rightarrow E=\frac{27\times10^{13}}{36\times10^5}=7/5\times10^7kW.h$$

(فیزیک۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۱، ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱۸۰- **گزینهٔ «۲»** (زهره آقامحمدی)

مورد «الف» نادرست است چون در واکنش «گداخت» مجموع جرم محصولات کمتر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است و این اختلاف جرم سبب آزاد شدن مقدار زیادی انرژی می‌شود. $\left(E=mc^2\right)$

مورد «پ» نادرست است. چون در این فرایند هستهٔ هلیم و یک نوترون پرانرژی تولید می‌شود.

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۵۲ و ۱۵۳)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۳(اختیاری)

۱۸۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

آ) $CH_4(g)+H_2O(g)\xrightarrow{\text{کاتالیزگر}}CO(g)+3H_2(g)$

ب) $CO(g)+2H_2(g)\xrightarrow[\text{دماوفشارمناسب}]{\text{کاتالیزگر}}\underset{\text{متانول}}{CH_3OH(l)}$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»:

$C\overset{-4}{H_4}\rightarrow C\overset{+2}{O}$ تغییر عدد اکسایش $=2-(-4)=6$

گزینهٔ «۲»: پایداری کربن مونوکسید (CO) از پایداری کربن دی‌اکسید (CO_2) کمتر است.

گزینهٔ «۳»: در واکنش (ب) عدد اکسایش C در CO از ۲+ به ۲- در CH_3OH تغییر کرده و بنابراین کاهش یافته و نقش اکسنده را دارد.

گزینهٔ «۴»: نیروی بین مولکولی غالب در متانول از نوع پیوند هیدروژنی است و به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۱۸۲- **گزینهٔ «۲»** *(روزبه رضوانی)*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: به منظور تولید ترفتالیک اسید با بازده بالا از پارازایلن، باید از محلول پتاسیم پرمنگنات در دمای بالا استفاده کرد. البته به منظور افزایش بازدهی، استفاده از اکسیژن در حضور کاتالیزگرهای مناسب می‌تواند راه‌گشا باشد.

گزینهٔ «۳»: این مواد را نمی‌توان به‌طور مستقیم از نفت خام به‌دست آورد.

گزینهٔ «۴»: همانند پلمیرهای سنتزی، PET نیز ماندگاری بالایی دارد.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به‌سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۷)

۱۸۳- **گزینهٔ «۴»** *(علی جدی)*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: در این روش از گاز O_2 در حضور کاتالیزگر استفاده می‌شود.

گزینهٔ «۲»: کاتالیزگر، سبب افزایش بازده درصدی واکنش‌ها نمی‌شود.

گزینهٔ «۳»: متانول مایعی بی‌رنگ، بی‌بو و سمی است که می‌توان آن را از چوب تهیه کرد.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به‌سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۹)

۱۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(مرتضی خوش‌کیش)*

موارد سوم و چهارم درست است. بررسی موارد:

مورد اول: اتیل استات با فرمول $C_4H_8O_2$ دارای ۱۴ اتم است که به صورت مستقیم از واکنش اتانول و استیک اسید تهیه می‌شود.

کلرواتان با فرمول C_2H_5Cl دارای ۸ اتم است که به صورت مستقیم از واکنش اتن و گاز هیدروژن کلرید تهیه می‌شود.

مورد دوم: برای تهیهٔ اسیدها، ابتدا باید آلکن را به الکل و سپس الکل را به اسید تبدیل کرد، بنابراین نمی‌توان اتن را به‌طور مستقیم به اتانوییک اسید تبدیل کرد.

مورد سوم: با قرار دادن گاز اتن در فشار و دمای بالا ترکیب پلیمری پلی اتن تولید می‌شود که ترکیبی با جرم مولکولی بالاست و برخلاف اتن، سیرشده می‌باشد.

مورد چهارم: با توجه به شکل، ترکیب‌های اتن و اتیل آمین به ترتیب آلکن و آمین دو کربنه هستند، بنابراین ترکیب X الکل دو کربنه یعنی اتانول می‌باشد که برای ضدعفونی کردن استفاده می‌شود.

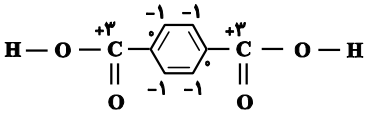
(شیمی ۳: صفحه‌های ۱۱۲ و ۱۱۳)

۱۸۵- **گزینهٔ «۳»** *(جعفر یازوکی)*

گزینهٔ «۱»: افشانه‌های بی‌حس کننده را از واکنش گاز اتیلن با هیدروژن کلرید (HCl) به‌دست می‌آورند.

گزینهٔ «۲»: پلی‌اتیلن ترفتالات یک پلی‌استر می‌باشد.

گزینهٔ «۳»: مجموع عدد اکسایش $=2(+3)+4(-1)+2(0)=+2$



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

گزینهٔ «۴»: از واکنش گاز اتن با محلول آبی و رقیق پتاسیم پرمنگنات، در شرایط مناسب اتیلن گلیکول با فرمول شیمیایی $C_2H_6O_2$ تولید می‌شود.

(شیمی ۳: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۶)

۱۸۶- **گزینهٔ «۴»** (محمد رضائی)

تنها عبارت «پ» نادرست است.

تغییر عدد اکسایش هر واحد پارازایلن در تبدیل به ترفتالیک اسید، برابر ۱۲ است. بنابراین:

$$?mole^- = ۳۳ / ۲gC_8H_6O_4 \times \frac{۱molC_8H_6O_4}{۱۶۶gC_8H_6O_4} \times \frac{۱۲mole^-}{۱molC_8H_6O_4}$$

$$= ۲ / ۴mole^-$$

(شیمی ۳: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۱۸۷- **گزینهٔ «۱»** (محمدحسن محمدزاده‌مقدم)

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۲»: استیک اسید را نمی‌توان به‌طور مستقیم از گاز اتن تهیه کرد.

گزینهٔ «۳»: کلرواتان به‌عنوان افشانه بی‌حس‌کننده موضعی مورد استفاده قرار می‌گیرد که از واکنش هیدروژن کلرید با گاز اتن تهیه می‌شود.

گزینهٔ «۴»: اتیل‌استات از واکنش اتانوییک اسید و اتانول به‌دست می‌آید.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به‌سوی آینده‌ای روشن‌تر: صفحهٔ ۱۱۲)

۱۸۸- **گزینهٔ «۱»** (شهرام امیرمحمودی)

بررسی موارد:

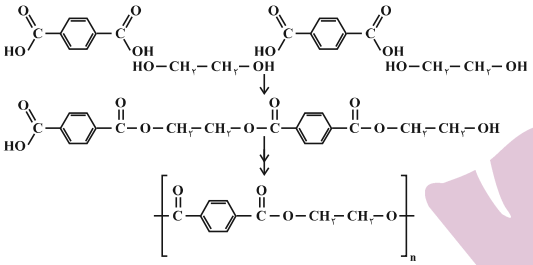
مورد اول: صحیح است. ترفتالیک اسید دارای دو گروه عاملی اسیدی و اتیلن گلیکول دارای دو گروه عاملی الکلی است.

مورد دوم: صحیح است.

مورد سوم: نادرست است. در هر واحد تکرارشونده PET، ۸ اتم هیدروژن وجود دارد.

مورد چهارم: نادرست است. ترفتالیک اسید دارای دو گروه عاملی اسیدی است. بنابراین هر مول آن با دو مول از NaOH به‌طور کامل خنثی می‌شود.

$$?gNaOH = ۳۳ / ۲gC_8H_6O_4 \times \frac{۱molC_8H_6O_4}{۱۶۶gC_8H_6O_4} \times \frac{۲molNaOH}{۱molC_8H_6O_4} \times \frac{۴۰gNaOH}{۱molNaOH} = ۱۶gNaOH$$



(شیمی ۳- شیمی، راهی به‌سوی آینده‌ای روشن‌تر: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۱۸۹- **گزینهٔ «۳»** (محمد عظیمیان‌زواره)

پتاسیم پرمنگنات در این واکنش نقش اکسنده را دارد و بازده واکنش نسبتاً خوب است، فرمول مولکولی ترفتالیک اسید $C_6H_4(COOH)_2$ یا $C_8H_6O_4$ می‌باشد.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به‌سوی آینده‌ای روشن‌تر: صفحهٔ ۱۱۵)

۱۹۰- **گزینهٔ «۱»** (موسی خیاط‌علیممدی)

واکنش a) $۸۰۰۰gCH_4 \times \frac{۱molCH_4}{۱۶gCH_4} \times \frac{۱molCO}{۱molCH_4} = ۵۰۰molCO$

واکنش b) $۵۰۰molCO \times \frac{۱molCH_3OH}{۱molCO} = ۵۰۰mol\ CH_3OH$ نظری

واکنش c) $۴۰۰۰gCH_4 \times \frac{۱molCH_4}{۱۶gCH_4} \times \frac{۲molCH_3OH}{۲molCH_4} \times \frac{۹۰}{۱۰۰}$

$$= ۲۲۵mol\ CH_3OH$$

$$\text{بازده} = \frac{\text{مقدار علمی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۲۵}{۵۰۰} \times ۱۰۰ = ۴۵\ ٪$$

حاصل‌ضرب بازده a و b باید برابر ۴۵٪ شود.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به‌سوی آینده‌ای روشن‌تر: صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۱۹)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت