ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود گام به گام
- دانلود آزمون گاج و خیلی سبز
- دانلود فیلم و مقاله آنلیزشی
- کنکور و مشاوره

IranTooshe.Ir

@irantooshe

IranTooshe

فهرست

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه، الگو و دنباله ۷
مجموعه‌ها ۸
متمم یک مجموعه ۱۱
الگو و دنباله ۱۵
دنباله‌های حسابی و هندسی ۱۹
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۲۸

فصل ۲ مثلثات

مثلثات ۴۳
نسبت‌های مثلثاتی ۴۴
دایره‌ی مثلثاتی ۵۲
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۵۸
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۶۴

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ۸۱
اتحادهای جبری ۹۲
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۱۱۱

فصل ۴ معادلات و نامعادلات

معادلات و نامعادلات ۱۳۹
معادله‌ی درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۱۴۰
سهمی ۱۵۴
تعیین علامت و نامعادله‌ها ۱۶۴
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۱۷۵

فصل ۵ تابع

تابع ۲۰۷
مفهوم تابع ۲۰۸
دامنه و برد توابع ۲۱۷
رسم نمودار تابع ۲۲۵
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۲۳۵

فصل ۶ ترکیبیات

ترکیبیات ۲۶۷
شمارش ۲۶۸
جایگشت ۲۷۴
ترکیب ۲۸۰
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۲۸۷

فصل ۷ آمار و احتمال

آمار و احتمال ۳۰۱
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۳۲۲

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مجموعه، الگو و دنباله

(فصل ۱)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مجموعه‌ها

در سال‌های قبل با مجموعه‌های مهم از اعداد آشنا شده‌اید.

الف) $\mathbb{N}$ یا مجموعه‌ی عددهای طبیعی شامل ۱، ۲، ۳ و ... است.

ب) $\mathbb{W}$ یا مجموعه‌ی اعداد حسابی، شامل ۰، ۱، ۲، ۳ و ... است.

پس $\mathbb{W}=\mathbb{N}\cup\{0\}$، به بیان دیگر $\mathbb{W}-\mathbb{N}$ یک‌عضوی است.

پ) $\mathbb{Z}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح شامل صفر و اعداد طبیعی و قرینه‌ی اعداد طبیعی است. یعنی $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$. بنابراین $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ شامل اعداد صحیح منفی است.

ت) مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ شامل اعداد گویا (کسری) است. این اعداد همان کسرها با صورت و مخرج صحیح هستند. می‌نویسیم:

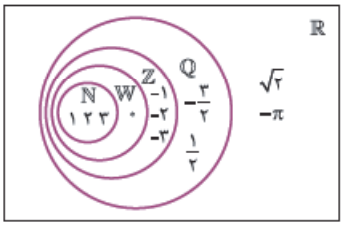
$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ b\neq 0\}$$

ث) $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی اعداد گنگ است. این اعداد را نمی‌توان به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد یعنی نمایش کسری ندارند. $\sqrt{2}$ و π نمونه‌هایی از اعداد گنگ هستند.

ج) $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است که شامل تمام اعداد گویا و گنگ می‌شود. هر نقطه روی محور اعداد، یک عدد حقیقی را نشان می‌دهد و هر عدد حقیقی جایی روی محور اعداد دارد، بنابراین $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

میان این مجموعه‌ها رابطه‌ی زیرمجموعه‌بودن به صورت $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$ برقرار است.

در نمودار ون هم داریم:



مثال در معرفی مجموعه‌های زیر به جای □ از مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ یا ترکیب آن‌ها بنویسید تا تساوی برقرار شود.

الف) $\{x\in\square\mid x^2=\frac{4}{9}\}=\varnothing$

ب) $\{x\in\square\mid -4<x\leq -1\}=\varnothing$

پ) $\{x\in\square\mid 3<x^2<8\}=\{-2\}$

ت) $\{x\in\square\mid (x-2)(2x-1)=0\}=\{\frac{1}{2}\}$

پاسخ **الف)** این یعنی در مجموعه‌ی □ هیچ عضوی نبوده که مربع آن $\frac{4}{9}$ باشد، پس در □ می‌توان $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{W}$ یا $\mathbb{Z}$ قرار داد. اما در $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ چنین عددی وجود دارد ($\pm\frac{2}{3}$). راستی $\mathbb{Q}'$ هم می‌توان قرار داد.

ب) این یعنی در مجموعه‌ی □ عددی بین -4 و -1 نیست. پس اصلن عدد منفی ندارد و حتمن $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{W}$ است.

پ) تنها عدد -2 در مجموعه‌ی □ بوده که x^2 بین ۳ و ۸ قرار گرفته. پس این مجموعه فقط اعداد صحیح منفی را داشته و می‌تواند $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ یا $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ باشد.

ت) از معادله‌ی $(x-2)(2x-1)=0$ جواب‌های x اعداد ۲ و $\frac{1}{2}$ هستند که فقط $\frac{1}{2}$ در مجموعه‌ی □ بوده. پس می‌تواند $\mathbb{Q}-\mathbb{N}$ یا $\mathbb{Q}-\mathbb{W}$ یا $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{R}-\mathbb{N}$ یا $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{R}-\mathbb{W}$ قرار گیرد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

بازه‌ها

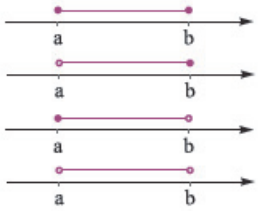
بازه‌ها زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ هستند که آن‌ها را روی محور به صورت یک قسمت نمایش می‌دهیم. بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص هستند. ۴ نوع بازه برای اعداد بین a تا b داریم:

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$: بازه‌ی بسته بین a و b

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a< x\le b\}$: بازه‌ی نیم‌باز بین a و b

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x< b\}$: بازه‌ی نیم‌باز بین a و b

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a< x< b\}$: بازه‌ی باز بین a و b



همان‌طور که می‌بینید بازه‌ها را با نمایش مجموعه‌ای یا هندسی یا نماد بازه می‌توان نشان داد. اگر در یک طرف پرانتز باشد خود آن عدد در بازه نیست و اگر کروشه باشد خود آن عدد در بازه هست.

بازه‌ی (a,a) مجموعه‌ی تُهی است و بازه‌ی $[a,a]$ مجموعه‌ی تک‌عضوی $\{a\}$ را نشان می‌دهد.

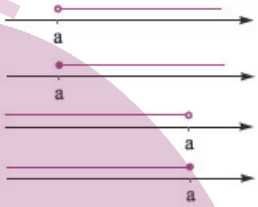
یک نوع دیگر از بازه‌ها، بازه‌هایی هستند که اعداد بیشتر از a یا کم‌تر از a را نشان می‌دهند. برای نشان‌دادن این بازه‌ها از نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌شود. دقت کنید که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند.

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x> a\}$: بازه‌ی باز اعداد بیشتر از a

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge a\}$: بازه‌ی نیم‌باز اعداد بیشتر یا مساوی a

$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\mid x< a\}$: بازه‌ی باز اعداد کم‌تر از a

$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le a\}$: بازه‌ی نیم‌باز اعداد کم‌تر یا مساوی a



با نشان‌دادن بازه‌ها روی محور اعداد می‌توانیم اجتماع و اشتراک و تفاضل آن‌ها را مشخص کنیم.

مثال اگر $A=[-2,3)$ و $B=(1,4]$ باشد، بازه‌های A و B را روی محور نشان دهید و حاصل عبارات $A-B$، $B-A$، $A\cup B$ و $A\cap B$ را مشخص کنید.

پاسخ

$A\cup B=$ قسمتی که در A یا در B باشد $=[-2,4]$

$A\cap B=B$ و A قسمت مشترک بین $=(1,3)$

$A-B=$ قسمتی که در A هست و در B نیست $=[-2,1]$

$B-A=$ قسمتی که در B هست و در A نیست $=[3,4]$

مثال حاصل عبارات زیر را به صورت بازه نشان دهید.

الف) $(-2,+\infty)\cap(-3,1)$

ب) $[2,+\infty)-(1,4]$

پ) $(0,6)-(-\infty,1]$

ت) $(0,4]-\{1\}$

ث) $\mathbb{R}-[1,4)$

ج) $\mathbb{R}-\{1,4\}$

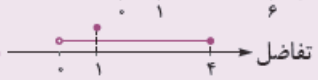
پاسخ

الف) اشتراک $=(-2,1)$

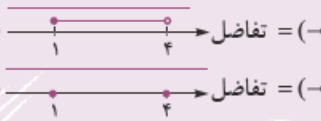
ب) تفاضل $=(1,2)$

پ) تفاضل $=(-\infty,0]$

ث) تفاضل $=(0,1)\cup(1,4]$



ج) تفاضل $=(-\infty,1)\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مثال چندتا از روابط زیر درست‌اند؟

الف) $(-1,1) \subseteq [-1,1]$ ب) $\{1,2\} \subseteq (0,3)$ پ) $-2 \in (-2,0)$ ت) $-2 \in [-3,1)$

پاسخ الف) نادرست است. بازه‌ی $[-1,1]$ زیرمجموعه‌ی بازه‌ی $(-1,1)$ نیست. چون اولی عدد ۱ را دارد و دومی ندارد.

ب) درست است. چون اعداد ۱ و ۲ در بازه‌ی $(0,3)$ هستند پس مجموعه‌ی $\{1,2\}$ زیرمجموعه‌ی $(0,3)$ خواهد بود.

پ) نادرست است. چون -2 عضو بازه‌ی باز $(-2,0)$ نیست.

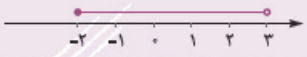
ت) درست است. چون -2 عضو بازه‌ی $[-3,1)$ هست.

مثال در بازه‌ی $[-2,3)$ چند عدد صحیح، چند عدد حسابی و چند عدد طبیعی وجود دارد؟

۱) ۲، ۲، ۵ ۲) ۲، ۳، ۳ ۳) ۲، ۳، ۵ ۴) ۱، ۳، ۲

پاسخ گزینه‌ی ۲ اعداد صحیح 0، ± 1 و ± 2 در این بازه هستند پس ۵ عدد صحیح دارد، ۳ تا عدد حسابی و دوتا عدد طبیعی هم دارد:

$1,2 \in \mathbb{N}$ و $0,1,2 \in \mathbb{W}$.



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعداد عضوهای یک مجموعه همواره عددی حسابی است؛ یعنی ۰ یا ۱ یا ۲ یا ... است. اگر مجموعه‌ای فاقد عضو باشد آن را مجموعه‌ی تُهی می‌نامیم و با $\varnothing$ یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

اگر مجموعه‌ای k عضوی باشد (تعداد محدودی عضو داشته باشد) آن را متناهی (یا باپایان) می‌نامیم.

اما وقتی تعداد اعضای یک مجموعه از هر عددی بزرگ‌تر شود (بی‌نهایت شود!) آن را نامتناهی می‌نامیم. نمونه‌هایی از مجموعه‌های متناهی و نامتناهی را می‌بینیم.

متناهی	نامتناهی
اعداد طبیعی نابیشتر از ۲۰	اعداد صحیح کم‌تر یا مساوی ۳
اعداد اول دورقمی	تمام خط‌های گذرنده از میدأ
انسان‌ها (اتم‌ها یا درختان) روی زمین	اعداد طبیعی زوج
مولکول‌ها و اتم‌ها در یک مول آب	کسرهای مثبت با مخرج ۲
سلول‌های بدن انسان	مضارب صحیح ۳
اعداد صحیح بازه‌ی $[-1,6)$	بازه‌ی $(-1,2)$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مثال کدام‌یک از موارد زیر وجود دارد؟ یک مثال بیاورید.

الف) دو مجموعه‌ی نامتناهی که اشتراک آن‌ها نیز نامتناهی است.

ب) دو مجموعه‌ی نامتناهی که اشتراک آن‌ها متناهی است.

پ) $A \subseteq B$ باشد و A نامتناهی و B متناهی باشد.

ت) دو زیرمجموعه‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی که یکی زیرمجموعه‌ی دیگری باشد.

ث) سه زیرمجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbb{Z}$ که هیچ‌کدام اشتراکی با دیگری ندارند.

ج) دو مجموعه‌ی نامتناهی که هم $A-B$ و هم $B-A$ تک‌عضوی باشند.

پاسخ الف) وجود دارد. مثلن $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ هر دو نامتناهی‌اند و اشتراک آن‌ها هم $\mathbb{N}$ است که نامتناهی است.

ب) وجود دارد. مثلن $(2,+\infty]$ و $[2,-\infty)$ هر دو نامتناهی‌اند اما اشتراک آن‌ها می‌شود $\{2\}$ که متناهی است.

پ) اگر $A \subseteq B$ باشد و A نامتناهی باشد، B حتمن نامتناهی است (چون B تمام A را در خودش دارد) پس (پ) وجود ندارد.

ت) وجود دارد. مثلن اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۴ باشد، هر دو نامتناهی‌اند و $B \subseteq A$ است.

ث) وجود دارد. دقت کنید:

اگر A مجموعه‌ی اعداد صحیح مضرب ۳ باشد، B مجموعه‌ی اعداد صحیح که بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۱ دارند و C شامل اعداد صحیح که بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۲ دارند باشند، آن‌گاه A، B و C نامتناهی و دوبه‌دو فاقد اشتراک‌اند.

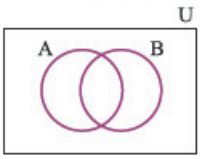
به عنوان مثالی دیگر، A مجموعه‌ی اعداد اول، B مجموعه‌ی مربع‌های کامل و C مجموعه‌ی قرینه‌ی اعداد طبیعی است.

ج) وجود دارد. مثلن اگر $A=\mathbb{N}\cup\{0\}$ و $B=\mathbb{N}\cup\{-2\}$ آن‌گاه هم $A-B$ و هم $B-A$ تک‌عضوی‌اند.

مثال بین دو عدد ۰ و ۲ چند عدد گویا وجود دارد؟

پاسخ بین دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد. پس مجموعه‌ی اعداد گویا نامتناهی است. مثلن بین ۲ و ۰ اعداد گویای $\frac{3}{2}$، ۱ و $\frac{1}{2}$ را داریم. حالا بین ۰ و $\frac{1}{2}$ اعداد گویایی مانند $\frac{1}{3}$، $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{4}$ و ... را داریم.

متمم یک مجموعه



مجموعه‌ی مرجع یا جهانی، مجموعه‌ای است که تمام مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعه‌ی آن باشند. در واقع مجموعه‌ی مرجع، چارچوب بحث را نشان می‌دهد. آن را با U یا M یا W نشان می‌دهیم. در نمایش هندسی، مجموعه‌ی مرجع شامل تمام مجموعه‌های دیگر است:

حالا اگر A زیرمجموعه‌ای از U باشد، به مجموعه‌ی $U-A$ می‌گوییم متمم A و آن را با A' نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

با این تعریف داریم:

$$\varnothing'=U\ ,\ U'=\varnothing\ ,\ (A')'=A\ ,\ A\cup A'=U\ ,\ A\cap A'=\varnothing$$

دقت کنید که اگر $A\subseteq B$ باشد حتمن $B'\subseteq A'$ است. اگر حاصل اجتماع یا اشتراک را متمم کنیم، تک‌تک مجموعه‌ها متمم شده و علامت برعکس می‌شود:

$$(A\cup B)'=A'\cap B'\ ,\ (A\cap B)'=A'\cup B'$$

این روابط را «قوانین دمرگان» می‌نامند.

اگر مجموعه‌ی مرجع متناهی باشد تمام مجموعه‌ها و متمم آن‌ها نیز متناهی‌اند. وقتی مجموعه‌ی مرجع نامتناهی باشد داریم:

A' نامتناهی است $\Rightarrow$ A متناهی است

در مورد A' نظری نمی‌توان داد $\Rightarrow$ A نامتناهی است

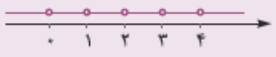
نسبت $\frac{n(A)}{n(U)}$ نشان می‌دهد چه کسری از اعضای مجموعه‌ی مرجع در مجموعه‌ی A هستند. مثلن اگر U مجموعه‌ی تمام افراد واجد شرایط ازدواج و A مجموعه‌ی متأهلین باشد، $\frac{n(A)}{n(U)}$ نرخ متأهل‌بودن و $\frac{n(A')}{n(U)}$ بیانگر نرخ تجرد است.

مثال اگر $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم متمم مجموعه‌های زیر را نشان دهید.

الف) $\mathbb{W}$ **ب)** $(-\infty,-2]$ **پ)** $(1,+\infty)$

ت) $[-1,4]$ **ث)** $\{-2,5\}$

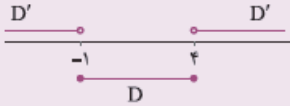
پاسخ الف) $\mathbb{W}'$ شامل اعداد حقیقی و غیرحسابی است:



ب) متمم بازه‌ی نیم‌باز $(-\infty,-2]$ به صورت $(-2,+\infty)$ است:

پ) متمم $(1,+\infty)$ به صورت $(-\infty,1]$ بیان می‌شود:

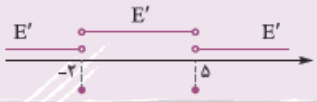
ت) متمم بازه‌ی $[-1,4]$ به صورت اجتماعی از دو بازه است:



$$D'=(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$$

ث) متمم مجموعه‌ی $\{-2,5\}$ به صورت اجتماع ۳ بازه است:

$$E'=(-\infty,-2)\cup(-2,5)\cup(5,+\infty)$$



تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

می‌توان نشان داد که: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

اگر دو مجموعه‌ی A و B اشتراکی نداشته باشند می‌گوییم جدا از هم یا مجزا هستند. در این حالت: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

در بیان فارسی $n(A\cup B)$ تعداد عضوهایی است که در A یا در B یا در هر دوی آن‌ها باشند. به بیان دیگر تعداد عضوهایی که به حداقل یکی از این دو مجموعه تعلق دارند.

متمم $A\cup B$ یعنی $(A\cup B)'$ یا $A'\cap B'$، مجموعه‌ی اعضایی است که نه در A هستند و نه در B؛ یعنی در هیچ‌یک از این دو مجموعه نیستند.

تعداد این‌گونه عضوها برابر است با: $n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

هم‌چنین تعداد عضوهایی که در A هستند و در B نیستند (یعنی فقط در A هستند) برابر است با:

$$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

بد نیست یک بار ببینید که در مورد سه مجموعه داریم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

و اگر سه مجموعه دوبه‌دو جدا از هم باشند: $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$

مثال در میان ۶۶ مشتری یک روز فروشگاه، ۳۶ نفر کارت اعتباری و ۲۹ نفر پول نقد و ۱۱ نفر هر دو را داشته‌اند.

الف) چند نفر حداقل یکی از این دو پرداخت را داشته‌اند؟

ب) چند نفر فقط پول نقد داشته‌اند؟

پ) چند نفر فقط کارت اعتباری داشته‌اند؟

ت) چند نفر هیچ‌کدام را ارائه نکرده‌اند؟

ث) چند نفر کارت اعتباری نداشته‌اند؟

پاسخ اگر کارت اعتباری را با A و پول نقد را با B نشان دهیم سؤال می‌گوید:

$$n(U)=۶۶\ ,\ n(A)=۳۶\ ,\ n(B)=۲۹\ ,\ n(A\cap B)=۱۱$$

پس داریم:

الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳۶+۲۹-۱۱=۵۴$

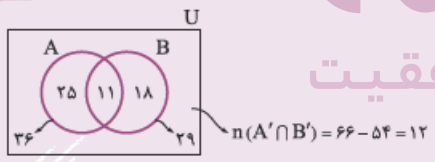
ب) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۲۹-۱۱=۱۸$

پ) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۳۶-۱۱=۲۵$

ت) $n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)=۶۶-۵۴=۱۲$

ث) $n(A')=n(U)-n(A)=۶۶-۳۶=۳۰$

راه دوم به نمودار روبه رو دقت کنید:

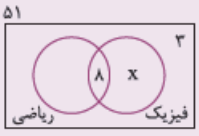


$n(A\cup B)=۲۵+۱۱+۱۸=۵۴$

مثال از ۵۱ دانش‌آموز کلاس دهم، ۸ نفر در دو کلاس تقویتی ریاضی و فیزیک و ۳۳ نفر در کلاس ریاضی ثبت نام کرده‌اند. اگر ۳ نفر در هیچ کلاسی نباشند، تعداد نفرات کلاس فیزیک کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۳ ۳) ۲۸ ۴) ۴۸

پاسخ گزینه‌ی ۲ نمودار ون را ببینید:



با توجه به شکل تعداد داوطلبان کلاس فیزیک برابر است با:

$$x=۵۱-۸-۲۵-۳=۱۵$$

$$n(\text{فیزیک})=x+۸=۲۳$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

سری [A]

۱- اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه‌ی اعداد صحیح با قدرمطلق کم‌تر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در $\mathbb{Z}$ باپایان است؟

۱) $A \cap B'$ ۲) $A' \cup B$ ۳) $A \cap B$ ۴) $A \cup B$

۲- کدام مجموعه غیرتهی و باپایان (متناهی) است؟

۱) مضارب ۶ ۲) مضارب مشترک ۷ و ۶

۳) مقسوم‌علیه‌های مشترک ۷ و ۶ ۴) مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۱

۳- تعداد اعضای کدام مجموعه کم‌تر است؟

۱) اعداد اول کم‌تر از ۲۰ ۲) اعداد طبیعی مربع کامل کم‌تر از ۷۰

۳) مقسوم‌علیه‌های صحیح ۶ ۴) کسرهای بین ۰ و ۱ با مخرج ۷

۴- کدام مجموعه نامتناهی است؟

۱) اتم‌های کره‌ی زمین ۲) درختان جنگل‌های ایران

۳) حشرات ساکن زمین ۴) تمام دایره‌های قابل رسم به مرکز (۱,۲)

۵- کدام مجموعه متناهی است؟

۱) مثلث‌ها با مساحت ۶ ۲) مربع‌ها با مساحت ۶ و یک رأس روی مبدأ

۳) خط‌ها با شیب ۲ و گذرنده از مبدأ ۴) خط‌های گذرنده از مبدأ

۶- اگر $k \in \mathbb{Z}$ (عدد صحیح نسبی) آن‌گاه مجموعه‌ی اعداد به کدام صورت می‌تواند فرد باشد؟

۱) $2k-5$ ۲) $2k+6$ ۳) $3k-1$ ۴) $3k+1$

۷- کدام جمله درست است؟ ($\mathbb{N}$ مجموعه‌ی مرجع است.)

۱) اگر A نامتناهی باشد A' حتمن متناهی است. ۲) اگر $A \subseteq B$ و مجموعه‌ی B نامتناهی باشد A هم نامتناهی است.

۳) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند $A \cup B$ برابر با $\mathbb{N}$ است. ۴) اگر $A \subseteq B$ و مجموعه‌ی A نامتناهی باشد آن‌گاه B هم نامتناهی است.

۸- کدام مجموعه دارای بزرگ‌ترین عضو است؟

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $(2,+\infty)$ ۳) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 4\}$ ۴) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 3\}$

۹- کدام مجموعه تُهی نیست؟

۱) $\mathbb{W} - \mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}'$ ۳) $\{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ ۴) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < x < 3\}$

۱۰- اشتراک دو مجموعه‌ی $(-5,4]$ و $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ چندعضوی است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۱- کدام مجموعه متناهی است؟

۱) اعداد صحیح کم‌تر از ۱۰۰ ۲) اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ ۳) اعداد گویای بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ ۴) اعداد حقیقی بین ۱ و ۲

۱۲- اگر $A = \{1,2,\{1,2,3\}\}$، $B = \{1,2,3,\{1,2\}\}$ و $C = \{1,2,3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

۱) $A - B = C$ ۲) $B - C = \varnothing$ ۳) $B - C = \{1,2\}$ ۴) $A - B = \{C\}$

۱۳- اگر $A = \{2\}$، $B = \{2,\{2\}\}$ و $C = \{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B \subset C$ ۲) $A \subset B$ ۳) $A \in B$ ۴) $B \in C$

۱۴- اگر $A = (-3,1]$، $B = (0,4)$ و $C = [-2,2]$، آن‌گاه $(A \cup C) - B$ دارای چند عضو صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۵- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -n \ , \ 3^m \leq n\}$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $A_4 \cap A_{27}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۶- اگر $i \in \{1,2,3,\ldots,9\}$ و $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$، آن‌گاه مجموعه‌ی $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

۱) $[-2,-1) \cup (1,2]$ ۲) $[-2,-1] \cup [1,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $\varnothing$

۱۷- اگر هیچ‌یک از مجموعه‌های $A \cap (-1,2)$ و $A - (-1,2)$ تُهی نباشند، کدام بازه به عنوان A مورد قبول است؟

۱) $(0,3)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(2,3)$

۱۸- اگر n عدد طبیعی و A_n بازه‌ی $(-1)^n(n,2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^{4} A_n$ تعلق دارد؟ $(\bigcup_{n=1}^{4} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

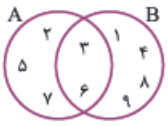
۱۹- اگر $A_n = [n-1, n+1]$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^{4} A_n - \bigcap_{n=1}^{3} A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $\{x : 1 \le x \le 5\}$ ۲) $\{x : 0 \le x \le 5\}$ ۳) $\{x : 0 \le x \le 5 \ , \ x \ne 2\}$ ۴) $\{x : 1 \le x \le 5 \ , \ x \ne 2\}$

۲۰- اگر $A = \{2,3,6,7,8\}$ و $B = \{2,4,5,6\}$ باشند، مجموعه‌ی $(A \cup B) - [A - (A \cap B)]$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۱- با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعه‌ی $A - (A - B)$ و $B - (B - A)$ چند عضو دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲- اگر A مجموعه‌ی اعداد دورقمی و $B = \{7k : k \in A\}$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $A \cap B$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۳- اگر $A = \{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ و $B = \{a,b\}$ باشد، مجموعه‌ی $A - \{B\}$ چند زیرمجموعه‌ی غیرتهی دارد؟ (کنکور ۸۹)

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۳۱ ۴) ۱۵

۲۴- کدام نادرست است؟

۱) $A \subset B \Leftarrow B' \subset A'$ ۲) $A \subset B \Leftarrow A - B = \varnothing$

۳) $A = B \Leftarrow A \cap C = B \cap C$ ۴) $A \subset B \Leftarrow A \cap B = A$

۲۵- اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، حاصل $A - (B - (A \cap B))$ کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) B ۳) $A \cap B$ ۴) $A \cup B$

۲۶- متمم مجموعه‌ی $A - (B - A)'$، نسبت به مجموعه‌ی جهانی کدام است؟

۱) $A \cup B$ ۲) $A \cap B$ ۳) A ۴) B

۲۷- متمم مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ نسبت به مجموعه‌ی مرجع $[\frac{1}{2},4]$ از اجتماع حداقل چند بازه ساخته شده است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸- اگر مجموعه‌ی مرجع دارای ۲۲ عضو و دو زیرمجموعه‌ی A و B در آن دارای ۱۷ و ۱۲ عضو باشند، $A - B$ حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۷ ۴) ۷

۲۹- اگر $A \cup (B - A) = B$ باشد، آن‌گاه:

۱) $A \subseteq B$ ۲) $B \subseteq A$ ۳) $A = \varnothing$ ۴) $B = \varnothing$

۳۰- اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) B' ۲) $\varnothing$ ۳) $A \cap B$ ۴) $A - B$

۳۱- مجموعه‌ی $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ برابر کدام است؟

۱) $B - A$ ۲) B ۳) $\varnothing$ ۴) A'

۳۲- متمم مجموعه‌ی $[A - (A - B)] \cup (A \cap B)'$ کدام است؟

۱) A ۲) B' ۳) $A' \cup B'$ ۴) $\varnothing$

۳۳- اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، مجموعه‌ی $[(B - A) \cup (B \cap A)] \cap [A \cup (A \cap B)]'$ برابر کدام است؟

۱) $A' - B'$ ۲) $(A - B)'$ ۳) A' ۴) $\varnothing$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۴- اگر A، B و C سه مجموعه‌ی غیرتهی به طوری که $A \subset B$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $(A \cap (B-C)) - (A \cap B \cap C)$، کدام است؟

۱) $A \cap C'$ ۲) $A \cap C$ ۳) A ۴) B

۳۵- متمم مجموعه‌ی $C \cup A' \cup B'$، نسبت به مجموعه‌ی جهانی با کدام مجموعه برابر نیست؟

۱) $(A \cap B) - (A \cap C)$ ۲) $(A-C) \cup (B-C)$ ۳) $A \cap (B-C)$ ۴) $(A \cap B) - C$

۳۶- اگر $A \cap B = \varnothing$ و $A \cap C = \varnothing$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $B \cap C = \varnothing$ ۲) $B \cap C \neq \varnothing$ ۳) $A \cap (B \cup C) = \varnothing$ ۴) $A \cap (B-C) \neq \varnothing$

۳۷- اگر مجموعه‌ی A دارای ۵ عضو، مجموعه‌ی B دارای ۶ عضو و مجموعه‌ی $A \cap B$ دارای ۲ عضو باشد، مجموعه‌ی $(A \cap B') \cup (A \cup B')'$ چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۳۸- مجموعه‌ی A دارای ۱۴ و مجموعه‌ی B دارای ۱۷ و مجموعه‌ی $A \cap B$ دارای ۵ عضو است، چند عضو فقط در یکی از این دو مجموعه هستند؟ (کنکور ۸۱)

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۳۹- مجموعه‌ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه‌ی A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعه‌ی جدید با مجموعه‌ی B، کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۱ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵

۴۰- اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌های اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید، کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

[Z] سری

۴۱- اگر $A_i = \{m \in \mathbb{Z} \mid -i \leq m \leq 8-i\}$ باشد، مجموعه‌ی $\bigcup_{i=1}^{8} A_i - \bigcap_{i=1}^{8} A_i$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۴۲- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n \ , \ 3^m \leq 2n\}$ آن‌گاه مجموعه‌ی $(A_6 - A_4) \cup A_1$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پاسخ تشریحی مجموعه، الگو و دنباله

۱- گزینه‌ی ۴ A شامل تمام اعداد صحیح ۰، ۳±، ۶±، ۹± و ... است و در B اعداد صحیح بین ۹۹− تا ۹۹ را داریم. پس $A\cap B$ شامل اعداد صحیح مضرب ۳ بین ۹۹− تا ۹۹ است که تعدادشان محدود می‌شود (۶۷ تا هستند).

در سایر گزینه‌ها، $A\cap B'$ نامتناهی است (مضارب بزرگ ۳ را دارد)؛ هم‌چنین $A'\cup B$ نامتناهی است (اعداد خیلی بزرگ در B هستند)؛ $A\cup B$ نیز همین‌طور است.

۲- گزینه‌ی ۴ مضارب ۶، کلیه‌ی اعداد به صورت $6k$ هستند. (نامتناهی)

مضارب مشترک ۶ و ۷، تمام اعداد به صورت $42k$ هستند. (نامتناهی)

مقسوم‌علیه‌های مشترک ۶ و ۷ اعداد ۱± هستند. (متناهی است)

مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۱ هم تهی است. چون ۱ هیچ مقسوم‌علیه اولی ندارد.

۳- گزینه‌ی ۳ مجموعه‌ی اعداد اول کم‌تر از ۲۰، هشت عضوی است: $A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی مربع کامل و کم‌تر از ۷۰ نیز هشت عضوی است: $B=\{1,4,9,16,25,36,49,64\}$

مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صحیح ۶ نیز هشت عضو دارد: $C=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$

اما مجموعه‌ی کسرهای بین ۰ و ۱ با مخرج ۷ دارای شش عضو است: $D=\{\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\cdots,\frac{6}{7}\}$

۴- گزینه‌ی ۳ مجموعه‌ی اتم‌ها، درختان یا حشرات قطعن انتها دارد و تعداد اعضای آن‌ها عددی مشخص است (هر چه‌قدر بزرگ باشد باز هم محدود است)؛ اما تعداد تمام دایره‌های قابل رسم به مرکز (۱،۲) تا بی‌نهایت می‌رود و متناهی نیست.

۵- گزینه‌ی ۳ فقط یک خط با شیب ۲ و گذرنده از مبدأ وجود دارد. اما تعداد «مثلث‌ها با مساحت ۶»، «مربع‌ها با مساحت ۶ و رأس روی مبدأ» و «خط‌های گذرنده از مبدأ» نامتناهی است.

۶- گزینه‌ی ۲ اعداد $2k+6$ همواره زوج‌اند. اعداد $3k+1$ یا $3k-1$ می‌توانند زوج یا فرد باشند. اما اعداد $2k-5$ همیشه فرد هستند.

۷- گزینه‌ی ۱ ۱) نادرست است. مثلن اگر A مجموعه‌ی اعداد زوج باشد A' مجموعه‌ی اعداد فرد است و هر دو نامتناهی‌اند.

در ۲) اگر B نامتناهی باشد، زیرمجموعه‌ی آن یعنی A می‌تواند متناهی باشد. مثلن B اعداد فرد ولی $A=\{1\}$ زیرمجموعه‌ی آن متناهی است.

۳) نیز نادرست است. مثلن A مجموعه‌ی مضارب ۵ و B مجموعه‌ی اعداد اول است و هر دو نامتناهی‌اند و اجتماع آن‌ها $\mathbb{N}$ نیست.

۴) درست است. وقتی A نامتناهی می‌شود حتمن B هم نامتناهی است چون B تمام عضوهای A را دارد!

۸- گزینه‌ی ۳ بزرگ‌ترین عدد صحیح یا بزرگ‌ترین عدد بازه‌ی $(2,+\infty)$ وجود ندارد. بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر از ۳ هم وجود ندارد (اگر k بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر از ۳ باشد، $\frac{k+3}{2}$ از آن بیشتر است و به ۳ هم نزدیک‌تر؛ پس اصلن k وجود ندارد.)؛ اما در ۳) بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر یا مساوی ۴، برابر ۲ است و وجود دارد!

۹- گزینه‌ی ۳ تمام اعداد حسابی، صحیح هم هستند پس $\mathbb{W}-\mathbb{Z}$ تُهی است. تمام اعداد طبیعی، گویا هستند پس $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}'$ عضوی ندارد. عدد صحیح بین ۲ و ۳ هم نداریم. اما در ۳) اعداد طبیعی بین ۲ و ۲− عبارت‌اند از: $\{1,2\}$

۱۰- گزینه‌ی ۳ در $\mathbb{Z}$ اعداد صحیح و در $\mathbb{W}$ عددهای حسابی داریم؛ پس $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ شامل اعداد صحیح منفی است و اشتراک آن با بازه‌ی $(-5,4]$ به صورت $\{-1,-2,-3,-4,-5\}$ خواهد بود که ۵ عضو دارد.

۱۱- گزینه‌ی ۲ در ۱) اعداد صحیح کم‌تر از ۱۰۰ تا $-\infty$ می‌روند، پس نامتناهی است.

در ۳) اعداد گویای بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ نامتناهی‌اند. چون بین هر دو عدد گنگ، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد، پس نامتناهی است. در ۴) هم بی‌شمار عدد حقیقی در (۱،۲) وجود دارد، پس نامتناهی است؛ اما در ۲) اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰، دقیقن از ۱ تا ۹۹ هستند که مجموعه‌ای متناهی با ۹۹ عضو است.

ایران توشه
توشه‌ی تو برای موفقیت

۱۲- گزینه‌ی ۴ به بررسی تک‌تک گزینه‌ها بپردازیم:

۱) مجموعه‌ی $A-B$ شامل عضوهایی از A است که در B نباشند. فقط عضو چهارم یعنی $\{۱,۲,۳\}$ در مجموعه‌ی A در B نیست (اعضای ۱ و ۲ از A، در B هم هستند)، پس $A-B=\{\{۱,۲,۳\}\}$ که با C مساوی نیست.

۴) در واقع $A-B=\{C\}$ و ۴) درست است.

۲) $B-C$ مجموعه‌ی اعضایی است که در B هستند و در C نیستند که $\{۱,۲\}$ این‌طور است پس $B-C=\{\{۱,۲\}\}$ و تهی نیست.

۳) همان‌طور که دیدیم $B-C=\{\{۱,۲\}\}$، پس ۴) درست شد!

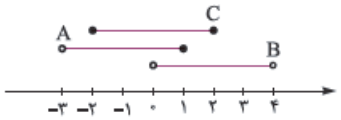
۱۳- گزینه‌ی ۱ ۱) B زیرمجموعه‌ی C نیست چون ۲ عضو مجموعه‌ی B است که آن را در C نمی‌بینیم (به عنوان عضو نمی‌بینیم).

۲) A زیرمجموعه‌ی B است چون تنها عضو A را در B می‌بینیم.

۳) A عضو B هم هست چون A را به صورت عضو در B داریم. ببینید: $B=\{۲,\underbrace{\{۲\}}_{\text{این } A \text{ است}}\}=\{۲,A\}$

۴) B عضو C است. چون خود B را به طور کامل در C داریم: $C=\{\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}=\{A,B\}$

۱۴- گزینه‌ی ۲ بازه‌ها را روی محور ببینید:



پس $A\cup C$ به صورت بازه‌ی $[-۳,۲)$ است و اگر از آن B را برداریم، تفاضل موردنظر $[-۳,۰)$ خواهد بود که ۳ عضو صحیح $\{-۲,-۱,۰\}$ را دارد.

۱۵- گزینه‌ی ۴ مجموعه‌های $A_۴$ و $A_۳$ را می‌نویسیم (به جای n اعداد ۳ و ۴ را می‌گذاریم):

$$A_۳=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\geq -۳\ ,\ ۲^m\leq ۳\}=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱\}$$

$$A_۴=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\geq -۴\ ,\ ۲^m\leq ۴\}=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

پس $A_۳\subset A_۴$ و اشتراک آن‌ها می‌شود $A_۳$ که ۵ عضو و ۳۲ زیرمجموعه دارد.

۱۶- گزینه‌ی ۳ بازه‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_۵$ و $A_۷$ را می‌نویسیم:

$$A_i=[-i,\frac{۹-i}{۲}]\Rightarrow A_۱=[-۱,۴]\ ,\ A_۲=[-۲,\frac{۷}{۲}]$$

$$A_۵=[-۵,۲]\ ,\ A_۷=[-۷,۱]$$

پس:

$$A_۲\cap A_۵=[-۲,\frac{۷}{۲}]\cap[-۵,۲]=[-۲,۲]\ ,\ A_۱\cap A_۷=[-۱,۴]\cap[-۷,۱]=[-۱,۱]$$

تفاضل آن‌ها برابر است با:

$$[-۲,۲]-[-۱,۱]=[-۲,-۱)\cup(۱,۲]$$

۱۷- گزینه‌ی ۱ بازه‌ی A حتمن با $(-۱,۲)$ اشتراک دارد و حتمن قسمتی دارد که در $(-۱,۲)$ نیست. پس بین گزینه‌ها فقط ۱) مناسب است.

۱۸- گزینه‌ی ۴ ۴ بازه‌ی اول را بنویسیم:

$$A_n=((-۱)^n n,۲n)\Rightarrow A_۱=(-۱,۲)\ ,\ A_۲=(۲,۴)$$

$$A_۳=(-۳,۶)\ ,\ A_۴=(۴,۸)$$

اجتماع این‌ها می‌شود $(-۳,۸)$ که در آن اعداد صحیح $-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷$ هستند یعنی ۱۰ عدد صحیح دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

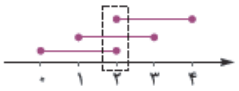
۱۹- گزینه‌ی ۴ مجموعه‌های A_1 تا A_4 را بنویسیم:

$$A_n=[n-1,n+1]$$

$$A_1=[0,2]\ ,\ A_2=[1,3]\ ,\ A_3=[2,4]\ ,\ A_4=[3,5]$$

اشتراک ۳ تای اول برابر است با:

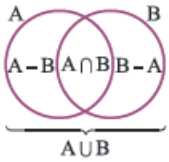
$$\bigcap_{n=1}^{3}A_n=\{2\}$$



اجتماع ۴ تای اول هم برابر است با: $\bigcup_{n=1}^{4}A_n=[0,5]$.

و تفاضل این‌ها $[0,5]-\{2\}$ است که در ۳ آمده است.

۲۰- گزینه‌ی ۴ اول به نمودار دقت کنید:



$A-(A\cap B)$ می‌شود $A-B$. حالا سؤال تفاضل $A\cup B$ و این مجموعه را می‌خواهد یعنی $(A\cup B)-(A-B)$ که با توجه به شکل می‌شود B پس:

$$(A\cup B)-\underbrace{[A-(A\cap B)]}_{(A-B)}=(A\cup B)-(A-B)=B=\{2,4,5,6\}$$

و دارای ۴ عضو است.

۲۱- گزینه‌ی ۲ $A-(A-B)$ همان $A\cap B$ است. $B-(B-A)$ نیز همان $A\cap B$ است. به نمودار دقت کنید:

پس در واقع اجتماع $A\cap B$ با خودش را می‌خواهیم که همان $A\cap B=\{3,6\}$ می‌شود که دو عضو دارد.

۲۲- گزینه‌ی ۳ اعضای A عبارت‌اند از:

$$A=\{10,11,12,\ldots,98,99\}$$

حالا B شامل ۷ برابر اعضای A است:

$$B=\{70,77,84,\ldots,\underbrace{693}_{7\times99}\}$$

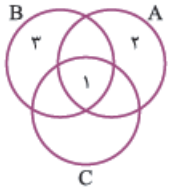
عضوهای مشترک A و B عبارت‌اند از $70,77,84,91,98$؛ یعنی $A\cap B$ پنج عضو دارد.

۲۳- گزینه‌ی ۲ اول $A-\{B\}$ را تشکیل دهیم:

$$A-\{B\}=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}-\{\{a,b\}\}=\{a,b,\{a\}\}$$

پس این مجموعه سه‌عضوی است و $2^3=8$ زیرمجموعه دارد و بنابراین ۷ زیرمجموعه‌ی غیرتهی دارد.

۲۴- گزینه‌ی ۱ ۱ درست است. می‌دانیم اگر در رابطه‌ی زیرمجموعه‌بودن، مجموعه‌ها را متمم کنیم جهت برعکس می‌شود یعنی از رابطه‌ی $A\subset B$ نتیجه می‌شود $B'\subset A'$.



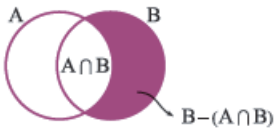
۲ درست است. اگر $A-B$ تُهی باشد تمام اعضای A در B هستند و در نتیجه A زیرمجموعه‌ی B خواهد بود.

۳ نادرست است. اگر $A\cap C=B\cap C$ باشد نمی‌توان نتیجه گرفت A با B برابر است. مثلن این را ببینید:

$$A\neq B\ \text{اما}\ A\cap C=B\cap C=\{1\}$$

۴ درست است. اگر اشتراک A و B برابر A باشد یعنی تمام اعضای A با B مشترک‌اند پس A زیرمجموعه‌ی B است.

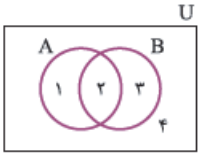
۲۵- گزینه‌ی ۴ $B-(A\cap B)$ همان $B-A$ است.



پس $A-(B-A)$ را می‌خواهیم و چون A و $B-A$ اشتراکی ندارند، جواب تفاضل همان A می‌شود:

$$A-(B-A)=A$$

۲۶- گزینه‌ی ۴ شکل را ببینید:



$B-A$ ناحیه‌ی ۳ است؛ پس $(B-A)'$ نواحی ۱، ۲ و ۴ است؛ حالا $(B-A)'-A$ می‌شود $\{1,2\}-\{1,2,4\}$ یعنی ۴.

صورت سؤال متمم این را می‌خواهد، متمم ناحیه‌ی ۴ می‌شود نواحی ۱، ۲ و ۳ یعنی $A\cup B$.

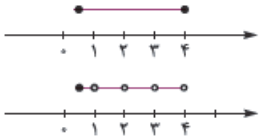
از روابط مجموعه‌ها داریم:

$$(B-A)'-A\xrightarrow{\text{تعریف تفاضل}}=(B\cap A')'\cap A'\xrightarrow{\text{دمرگان}}=(B'\cup A)\cap A'\xrightarrow{\text{پخشی}}=(B'\cap A')\cup\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}=B'\cap A'$$

$$\xrightarrow{\text{متمم}}=B\cup A$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۷- گزینه‌ی ۴ بازه‌ی $[\frac{1}{2},4]$ را ببینید:

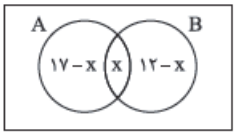


اگر اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را حذف کنیم داریم:

این مجموعه از اجتماع ۴ بازه‌ی $(3,4)$، $(2,3)$، $(1,2)$ و $[\frac{1}{2},1)$ ساخته شده است.

۲۸- گزینه‌ی ۲ $A-B$ یعنی عضوهایی از A که در B نباشند.

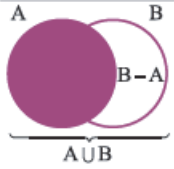
برای این‌که تعداد عضوهای $A-B$ حداکثر شود باید تا حد امکان A و B کم‌ترین اشتراک را داشته باشند. اگر تعداد عضوهای مشترک را x بگیریم داریم:



$$17-x+x+12-x\le 22 \Rightarrow 29-x\le 22 \Rightarrow x\ge 7$$

یعنی حداقل ۷ عضو مشترک لازم است؛ پس $A-B$ حداکثر ۱۰ عضو دارد.

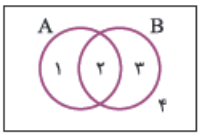
۲۹- گزینه‌ی ۳ $A\cup(B-A)$ همان $A\cup B$ است:



پس سؤال گفته $A\cup B=B$ و این یعنی $A\subset B$ بوده است.

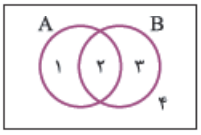
۳۰- گزینه‌ی ۴ $A\cap B'$ همان $A-B$ است. پس $(A-B)-(B-A)$ را می‌خواهیم. چون $A-B$ و $B-A$ اشتراک ندارند، تفاضل آن‌ها همان $A-B$ خواهد بود.

۳۱- گزینه‌ی ۳ اول به نمودار دقت کنید:



$A-B$ ناحیه‌ی ۱ است پس $(A-B)'$ نواحی ۲، ۳ و ۴ است. $A\cup B$ نواحی ۱، ۲ و ۳ است و A' ناحیه‌ی ۳ و ۴ است. بنابراین اشتراک این‌ها می‌شود ناحیه‌ی ۳ که همان $B-A$ است.

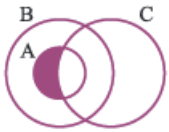
۳۲- گزینه‌ی ۴ $A-(A-B)$ همان $A\cap B$ است:



پس متمم $\underbrace{(A\cap B)\cup(A\cap B)'}_{\text{این برابر مجموعه‌ی مرجع است}}$ را می‌خواهیم و جواب می‌شود $U'=\varnothing$.

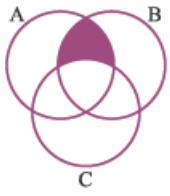
۳۳- گزینه‌ی ۲ $A\cup(A\cap B)$ همان A است. اجتماع $B\cap A$ و $B-A$ هم خود B است. پس $A'\cap B$ را می‌خواهیم که می‌شود $B-A$ یا $A'-B'$.

۳۴- گزینه‌ی ۳ اول شکل را ببینید:



دقت کنید که A زیرمجموعه‌ی B است و باید درون B قرار گیرد. حالا $A\cap(B-C)$ ناحیه‌ی سایه‌زده از A است و $A\cap B\cap C$ ناحیه‌ی سایه‌نخورده‌ی A است که اشتراکی ندارند. پس جواب می‌شود همان $A\cap(B-C)$ که با توجه به شکل $A\cap C'$ است.

۳۵- گزینه‌ی ۴ متمم $C\cup A'\cup B'$ می‌شود $(C\cup A'\cup B')'=C'\cap A\cap B$. حالا به نمودار دقت کنید:

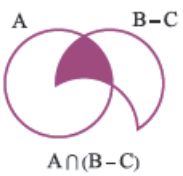


(ناحیه‌ی موردنظر در A و B هست و در C نیست)

حالا گزینه‌ها:

۱) $(A\cap B)-(A\cap C)$

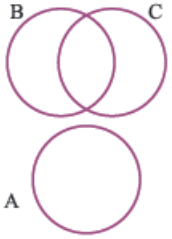
۲) $(A-C)\cup(B-C)$

۳) $A\cap(B-C)$ 

۴) $(A\cap B)-C$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

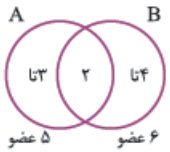
۳۶- گزینه‌ی ۴ A با هیچ‌کدام از مجموعه‌های B و C اشتراک ندارد. این‌شکلی:



پس A با اجتماع آن‌ها هم اشتراکی ندارد: $A\cap(B\cup C)=\varnothing$

در مورد اشتراک B و C نظری نمی‌توان داد (۱ و ۲ نیستند) و چون $B-C$ قسمتی از B است با A اشتراکی ندارد.

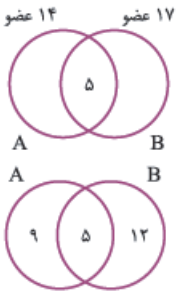
۳۷- گزینه‌ی ۲ به نمودار دقت کنید:



پس $A-B$ دارای ۳ و $B-A$ دارای ۴ عضو است. حالا خواسته‌ی سؤال:

که با توجه به شکل، $3+4=7$ عضو دارد. $(A\cap B')\cup(A\cup B')'=(A-B)\cup(\underbrace{A'\cap B}_{B-A})=(A-B)\cup(B-A)$

۳۸- گزینه‌ی ۴ به نمودار ون دقت کنید:



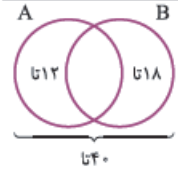
۵ عضو در ناحیه‌ی مشترک‌اند، پس $14-5=9$ عضو فقط در A قرار دارند و $17-5=12$ عضو فقط در B هستند:

بنابراین $9+12=21$ عضو فقط در یکی از دو مجموعه هستند.

۳۹- گزینه‌ی ۳ اجتماع دو مجموعه در حالت اول $36+28-15=49$ عضو دارد. حالا ۱۶ عضو از A کم شده که ۹ تای آن‌ها از اشتراک حذف شده‌اند. پس الان A دارای $36-16=20$ عضو است و اشتراک جدید هم $15-9=6$ عضو دارد. مجموعه‌ی B که تغییری نکرده پس تعداد اعضای اجتماع مجموعه‌ی A جدید با B برابر است با: $20+28-6=42$

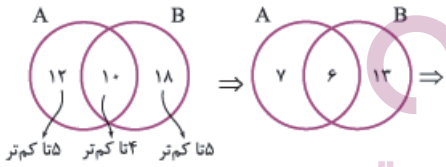
۱۶ عضو از A کم شده که ۹ تای آن‌ها در اشتراک‌اند یعنی در B حضور دارند. پس عملن ۷ عضو از اجتماع کم می‌شود: $49-7=42$

۴۰- گزینه‌ی ۴ به نمودار دقت کنید:



پس در ناحیه‌ی وسط یعنی $A\cap B$ باید $40-12-18=10$ عضو باشد.

حالا از هر یک از مجموعه‌های A و B ته عضو برداشته شده و از اشتراک آن‌ها ۴ تا کم شده است. پس از قسمت غیرمشترک هر کدام، ۵ تا کم می‌شود.



$\Rightarrow n(A\cup B)=7+6+13=26$

اجتماع دو مجموعه‌ی اولیه ۴۰ تا عضو دارد. ما ۹+۹ یعنی ۱۸ تا را برداشته‌ایم که ۴ تایش مشترک بوده پس $40-18+4$ یعنی ۲۶ تا می‌ماند.

۴۱- گزینه‌ی ۲ اول مجموعه‌های A_1 تا A_8 را معلوم کنیم:

$A_1=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,-1\le m\le 7\}=\{-1,0,1,2,\ldots,7\}$

$A_2=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,-2\le m\le 6\}=\{-2,-1,0,\ldots,6\}$

$\vdots$

$A_7=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,-7\le m\le 1\}=\{-7,-6,\ldots,1\}$

$A_8=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,-8\le m\le 0\}=\{-8,-7,\ldots,0\}$

اجتماع همه‌ی این‌ها از ۸- تا ۷ را دربرمی‌گیرد و اشتراک همه‌ی این‌ها اعداد صحیح ۱- و ۰ است.

$\bigcup_{i=1}^{8}A_i=\{-8,-7,-6,\ldots,6,7\}\Rightarrow$ شانزده عضو

$\bigcap_{i=1}^{8}A_i=\{-1,0\}\Rightarrow$ دو عضو

و تفاضل این‌ها $16-2=14$ عضو دارد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۲- گزینه‌ی ∞ به جای n اعداد ۱، ۴ و ۶ را بگذاریم:

$A_۴ = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \le ۴ \ , \ ۲^m \le ۸\}$

$A_۶ = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \le ۶ \ , \ ۲^m \le ۱۲\}$

$A_۱ = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \le ۱ \ , \ ۲^m \le ۲\}$

می‌دانیم که جواب $|m| \le k$ به صورت $-k \le m \le k$ است.

پس:

$A_۴ = \{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$

$A_۶ = \{-۶,-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$

$A_۱ = \{-۱,۰,۱\}$

پس $A_۶ - A_۴$ می‌شود $\{-۶,-۵\}$ و اجتماع آن با $A_۱$ دارای ۵ عضو است: $(A_۶ - A_۴) \cup A_۱ = \{-۶,-۵,\pm ۱,۰\}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت