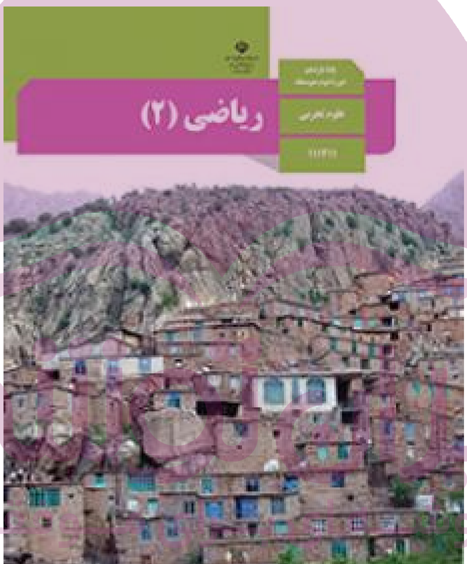
ریاضی ۲

پایه ی یازدهم «رشته ی علوم تجربی»



ریاضی ۲

پایه ی یازدهم «رشته ی علوم تجربی»

فصل۱ : جبر و معادله

درس اوّل : هندسه تحلیلی

بحث هـ دسه‌ی تحـ کی از بحث ای کاربرد در ر اضـ ات است. بـ ک ک ا بحـ ث اسـ ت کـه مـ توان معاد ت جبری برای اشکا دسی بـ ان نـ د سپس آنـ ا را بررسی و حـ کرد.

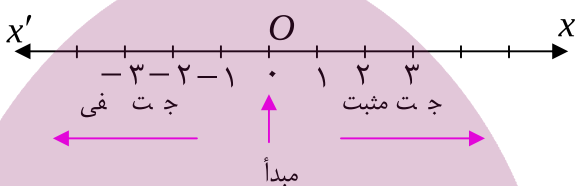
قسمت اوّل : محور اعداد حقیقی

محـ ر اعداد حقـ قی خط راستی است کـ رو آن

الف : نقطه ا بـ عنوا بدأ

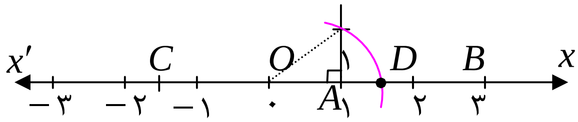
ب : واحدی برای اندازه ر ط ا

ج : جـ تی بـ عنوا جـ ت ثبت، اختـ ار شده باشد. مانـ د محـ ر $x'ox$ در شکـ ز ر



بدیـ است کـ ر نقطـ ر محـ ر را تـوا بـا کـ عدد حقـ قی نشا داد ر عدد حقـ قـ تـ اظر با کـ نقطـ ر محـ ر است. بـ عبارتـ د ر بـ جـ عه ا اعداد حقـ قـ جـ عه نقاط ر محـ ر تـ اظر یک بـ ک قرار دارد.

عدد حقـ قـ تـ اظر با ر نقطـ ر محـ ر را **طول آن نقطه** می نا د. بـ عبارت د ر ط ر نقطـ روی یک محـ ر عددی است جبر کـ قدر طـ ق آن برابر با فاصله ی آن نقطـ تا بدأ محـ ر است.



ط ر نقطـ مانـ د A ر محـ ر اعداد حقـ قـ را با x_A نـ ا ش د د.

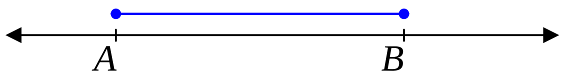
$$x_A = OA$$

در شکـ فـ ق داریم:

$$x_O = ۰ \quad \text{و} \quad x_A = ۱ \quad \text{و} \quad x_B = ۳ \quad \text{و} \quad x_C = -\frac{۳}{۲} \quad \text{و} \quad x_D = \sqrt{۲}$$

ا ر B و A دو نقط ر ح ر باش د، بد است که **طول یا اندازه‌ی پاره خط** AB برابر قدر ط ق

تفاضل ط ای ا دو نقطه است.

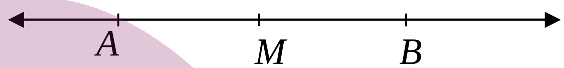


$$AB=|x_B-x_A|$$

در ص رت که نقطه‌ی M **وسط** پار خط AB باشد. م توان ن شت :

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

استدلال که برای اثبات درستی ا تساو ارائ شد د ب ص رت ز ر است.



$AM=MB$

$$\rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M\rightarrow ۲x_M=x_A+x_B\rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

تمرین ۱ : ا ر دو نقطه‌ی B و A ر ک ح ر باش د و $x_A=۵$ و $x_B=-۳$ در ا ص رت:

الف : اندازه‌ی پار خط AB را تع ک د.

ب : طو نقطه‌ی M سط پار خط AB را ب دست آ ر د.

تمرین۲ : ا ر سه نقطه‌ی C و B و A ر ک ح ر چپ ا قرار دارند که نقطه‌ی B سط پار خط AC

ب ده و $x_A=۲$ و $x_B=۳m+۲$ و $x_C=m+۱$ باشد قدار m را تع ک د.

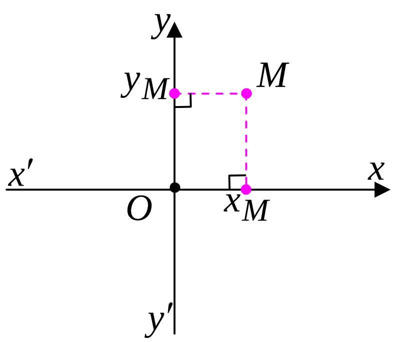
***

قسمت دوّم : دستگاه محور های مختصات (دستگاه مختصات دکارتی)

د ح ر $x'ox$ و $y'oy$ ک در ک صفح قرار دارند، ک دست ا ختصات ب ج د آ رند ر اه این

د ح ر بر ع د باش د در نقطه ی O (مبدأ شترک)

متقاطع باش د.



مح ر افقی ($x'ox$) را مح ر ط ا مح ر قائم ($y'oy$) را

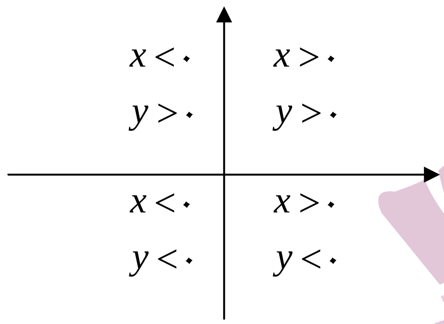
مح ر عرض ا می نا د.

بدیهی است ک ر نقط ر صفحه ، از د M با د عدد حق قی

مشخص ش د. تص ر نقطه‌ی M ر ح ر ط ا را طول (x_M) تص ر نقطه‌ی M ر ح ر عرض ا را عرض (y_M) می نامند.

$$M\begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix} \qquad \text{ا} \qquad M(x_M , y_M)$$

ط عرض نقط را مختصات نقطه می نا د.



نتیجه : دست ا ختصات قائ صفح را ب چ ار ناحیه (ربع) تبد ک د.ع ت ختصات ر نقطه با ت جه بـه ربع ک در آ قرار دارد، ب صـ رت ز ر است.

ه چنین:

الف : هر نقط ک ر ح ر ط ا قرار دارد عرض آ صفر است و برعکس

ب : هر نقط ک ر ح ر عرض ا قرار دارد، طول آ صفر است و برعکس

ج : نقطه‌ی تقاطع د ح ر ک بدأ ختصات نا دارد، ط عرض آ صفر است.

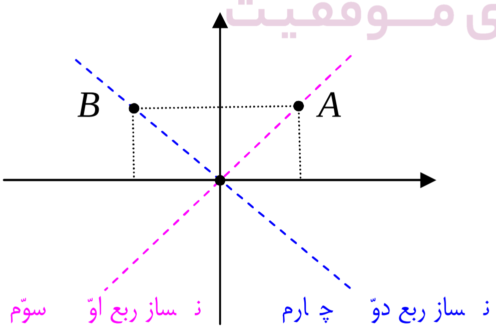
تمرین۳ : نقطه‌ی $P(2m-1, m+3)$ داد شده است. قدار m را چ ان ب ابـ د که :

الف : نقطه‌ی P ر ح ر طول ا قرار رد.

ب : نقطه‌ی P ر ح ر عرض ها قرار رد.

تمرین۴ : نقطه‌ی $P(2k-1, k+1)$ در ناحیه‌ی دوّ دست اه ختصات قرار دارد. حد د k را تع ک د.

توجه :



۱ : ت ام نقاطی ک رو ن ساز ربع اوّ سوّ دست اه مختصات واقع د، دارا ط عرض ساوی هست د.

۲ : ت ام نقاط ک رو ن ساز ربع دوّم و چ ارم دست اه مختصات واقع د، دارا ط عرض قرینه ستند.

تمرین ۵ : نقطه‌ی $P(2m-6, m-3)$ داد شده است. مقدار m را چ ان ب ابـ د که :

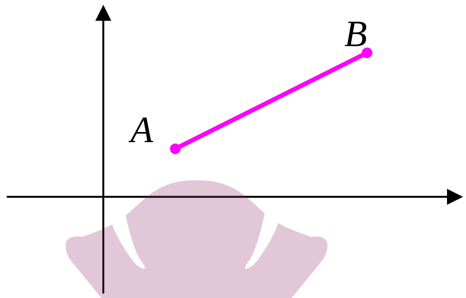
الف : نقطه‌ی P روی ن ساز ربع اوّ سوّم قرار رد.

ب : نقطه‌ی P روی ن ساز ربع دوّ چ ارم قرار رد.

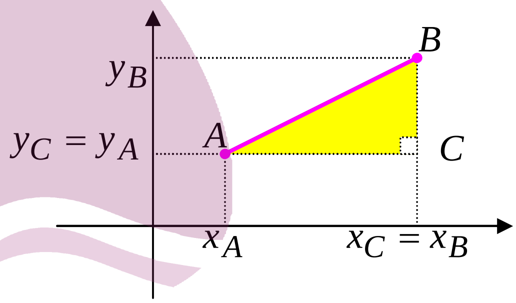
اندازه‌ی پاره خط در دستگاه محور های مختصات

ا ر B و A دو نقط ر صفحه باشد، در ا صورت اندازه‌ی (طول) پار خط AB ب صورت ز ر است.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$



برای مطالعه : برای اثبات درستی ا ض ع از رابطه‌ی ف ثاغ رس استفاد ش د.



$$AB^۲=AC^۲+BC^۲$$

$$AC=|x_C-x_A|=|x_B-x_A|$$

$$BC=|y_B-y_C|=|y_B-x_A|$$

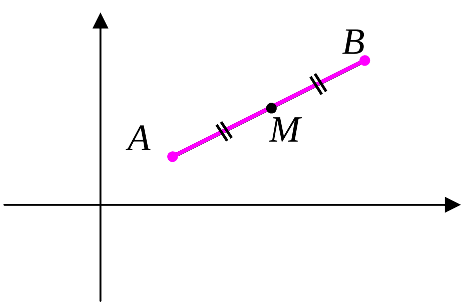
$$AB^۲=(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲$$

$$\to AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

***

مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط

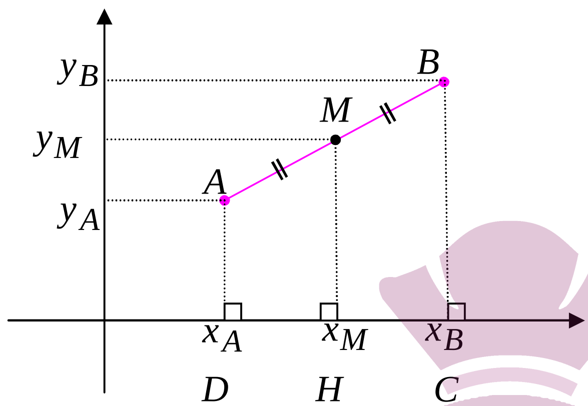
ا ر B و A دو نقط ر صفحه باش د نقطه‌ی M نقطه‌ی سط (م انی) پ ار خ ط AB باش د. در ایـن صـ رت مختصات نقطه‌ی M ب شک ز ر است.



$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲} \end{cases}$$

برای مطالعه : برای اثبات ا ضـ ع توا ب شک ز ر استد کرد.

ا ر B و A دو نقط ر صفحه باش د نقطه‌ی M نقطه‌ی وسط (م انی) پ ار خ ط AB در نظ ر رفتـه ش د. در ا صـ رت توا ف ت ک چـون نقطه‌ی M سـ ط پ ار خ ط AB از تـ ازی ا ضـ ع م $ABCD$ باشد و MH م ازی د قاعد رس شده است (هر سه ب ر حـ ر x ع دند). پ س ب ابر ق ضیه‌ی خط ط ازی (تالس) م توان ن شت :



$$\frac{DH}{HC}=\frac{AM}{MB}\xrightarrow{AM=MB}\frac{DH}{HC}=۱\rightarrow DH=HC$$

$$\rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M\rightarrow ۲x_M=x_A+x_B\rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

و ب ترت ب ثابت ش د.

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

تمرین ۶ : دو نقطه‌ی $A(۳,-۷)$ و $B(-۱,-۴)$ داد شده اند.

الف) ط پار خط AB را تع ک د.

ب) محتصات نقطه‌ی M سط پار خط AB را ب دست آ ر د.

تمرین برای حل :

۷ : ا ر $A(۱,۰)$ و $B(-۲,۳)$ د رأس قاب ربعی باش د. مساحت ربع را حاسب ک د

۸ : نقاط $A(-۳,۰)$ و $B(۶,۱۰)$ و $C(۰,۶)$ سه رأس ک ث می باش د.اندازه‌ی انه[1]ی ارد بر ضع BC را تع ک د.

۹ : ا ر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,-۱)$ و $C(۲,-۲)$ سه رأس ثثی باش د، ن ع ثث را تع ک د.

---

1. در ر ث ا پار خطی است ک سط ک ضع را ب رأس قاب آ ص ک د.

۱۰ : ا ر $A(۴,۰)$ و $B(۲,-۲\sqrt{۳})$ و بدأ ختصات س رأس ثثی باش د، ابتدا ن ع ثث را تع ک د و سپس ساحت و ح ط آن را تع ک د.

۱۱ : ا ر $A(۲,۳)$ و $B(-۱,۰)$ و $C(-۵,۴)$ س رأس ثثی باش د، ابتدا ن ع ثث را تع ک د سپس ساحت آ را تع ک د.

یادآوری : ساحت ر ث ث متساوی ا ض ع ب ض ع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است.

۱۲ : دو انت ا کی از قطر ا دا ره‌ای، نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ هست د.

الف) اندازه‌ی شعاع ختصات رکز دا ر را ب اب د.

ب) آ ا نقطه‌ی $P(۷,۳)$ بر ر ح ط دایر قرار دارد چرا؟

***

رابطه‌ی بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع

در ر توازی ا ض ع ج ع ط ا دو رأس روبرو با ج ع ط ا د رأس روبر د ر برابر است.

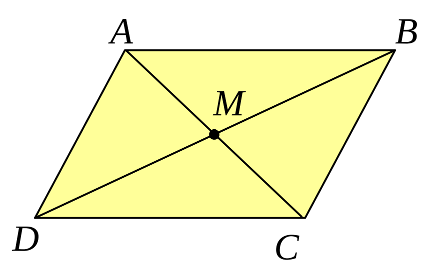
$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

ب ترت ب ج ع عرض ا دو رأس روبر با ج ع عرض ای د رأس روبر دی ر برابر است.

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

برای مطالعه : برای اثبات ا ط ب توان از ض ع دس ز ر استفاده کرد.

ه با ت ج ب ا ک در توازی ا ض ع قطر ا د ر را نصف ک د. لذا م توان ن شت:



$$AC \text{ خط پار سط } M \text{ نقطه‌ی} \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{۲}$$

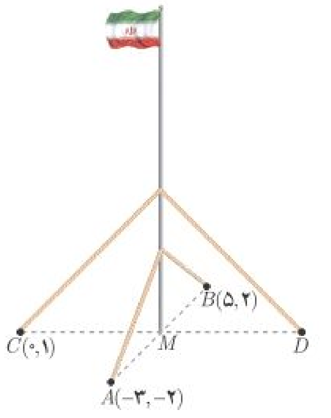
$$BD \text{ خط پار سط } M \text{ نقطه‌ی} \Rightarrow x_M = \frac{x_B + x_D}{۲}$$

$$\Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D$$

و ب ترت ب داریم :

$$\Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D$$

تمرین ۱۳: ا ر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۴)$ و $C(۲,۰)$ ختصات س رأس توالی از توازی ا ضـ ع $ABCD$ باشـد ختصات رأس D را تعـ کـ د.



تمرین ۱۴: یک میله‌ی پرچم بزرگ طابق شک تـ سط کابـ ایی بـه چـ ار نقط در ز حکـ شده است، بـ طـ ری فاصله‌ی ر ک از چـ ار نقط تا پای برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی قابـ آ تا پـ ای میلـه مـی باشد، ختصات نقطه‌ی D را بـ دست آ ر د.

تمرین۱۵: قاد ر m و n را طـ ر تعـ کـ د که نقاط ز ر بـ ترتـ ب رئـ س توازی ا ضـ ع باشـ د.

$$A(۱,n+۳) \text{ و } B(n-۱,۲m) \text{ و } C(۳,۱) \text{ و } D(۳m,-۱)$$

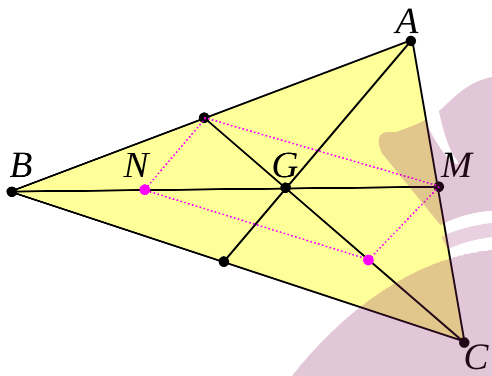
***

مختصات مرکز ثقل مثلث (نقطه ی برخورد میانه های مثلث)

ا ر نقطه‌ی G حـ تقاطع از ا ثـث[2] ABC باشد. در ا صـ رت توان نـ شت:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳} \quad و \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳}$$

برای مطالعه : ا ر G نقطه‌ی برخ رد از ای مثـث ABC باشد. ثابت شـ د که نقطه‌ی برخ رد م از ا ثـث بـ فاصله‌ی $\frac{۱}{۳}$ ط ر انه از سط ضـع قابل بـ فاصله‌ی $\frac{۲}{۳}$ ط ر انه از رأس نظ ر آ انه است.



$$BG \text{ خط } \text{ سط پار } N \text{ نقطه‌ی } \Rightarrow x_N = \frac{x_B + x_G}{۲}$$

$$MN \text{ خط } \text{ سط پار } G \text{ نقطه‌ی } \Rightarrow x_G = \frac{x_N + x_M}{۲}$$

$$AC \text{ خط } \text{ سط پار } M \text{ نقطه‌ی } \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{۲}$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\frac{x_B + x_G}{۲} + \frac{x_A + x_C}{۲}}{۲} \Rightarrow ۲x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_G}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴x_G = x_A + x_B + x_C + x_G \Rightarrow ۳x_G = x_A + x_B + x_C$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳}$$

و بـ ترتـ ب ثابت شـ د.

$$\Rightarrow y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳}$$

تمرین ۱۶ : ا ر $A(-۲,۳)$ و $B(۴,-۱)$ و $C(-۸,۴)$ سـ رأس ثـثی باشـ د.مختصات حـ تـ قـ انه های ثـث را بـ دست آ ر د.

---

[2] محـ تقاطع ا ا ر ثـث را رکز ثقـ ثـث ز ا د.

شیب خط

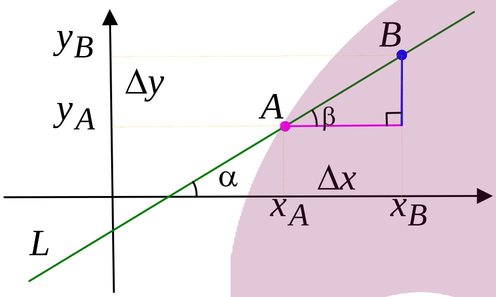
ا ر B و A دو نقطه از خط L باش د. ش ب (ضر ب زاویه) خط L ب ص رت ز ر تعر ف ش د.

$$m_L = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ب ابر قضیه‌ی خط ط ازی واضح است که $\angle\alpha = \angle\beta$. ه چنین ب ابر بر تعر ف تانژانت زاویه‌ی حاد در مث ث قائم الزا توان نوشت.

$$m_L = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan(\beta) = \tan(\alpha)$$

لذا ش ب ر خط تانژانت زاو ا است ک آ خط با ج ت ثبت ح ر x ا سازد.



نتیجه : با ا تعر ف واضح است که

الف : ش ب ح ر طول ا ر خط واز آن ، برابر صفر است.

ب : ش ب ح ر عرض ا ر خط ازی آن تعر ف نشده است.

ج: ش ب ن ساز ربع اوّل سوّم برابر ۱ و ش ب ن ساز ربع دوّ چ ارم برابر ۱- است.

تمرین ۱۷ : ش ب خط ذرا از دو نقطه‌ی $A(۵,-۴)$ و $B(۳,۰)$ را ب دست آ ر د.

تمرین ۱۸ : خطی با ح ر طول ا در ج ت ثبت زاویه‌ی ۳۰ درج تشک د د. ش ب ا خ ط را ب س د.

تمرین ۱۹ : ثابت ک د ک سه نقطه‌ی $A(-۴,۲)$ و $B(-۲,۰)$ و $C(۱,-۳)$ ر ک خط راست اقع اند.

***

معادله‌ی خط

هر رابطه‌ی خطی بـ   ط   عرض تـ ام نقاط خط را عادله‌ی خط می نامند.

مثال : دو نقطه‌ی $A(۳,۷)$ و $B(۱,۳)$ را در نظر بـ   ر د. بـ   ک ک تعـ   رابطـه‌ی ط   عـ رض ا   دو نقطه، عادله‌ی خط AB را بـ   سـ د.

حل : با کـ   دقت   عـ   شـ د که ا ر ابتدا طول هر کدام از ا   دو نقط را دو برابر   سپس با عـ دد کـ   جـ عـ کـ   عرض نقطه بـ دست   آ د. لذا رابطه‌ی   جـ د (معادله‌ی خط) بـ صـ رت ز ر است.

$$y = ۲x + ۱$$

تمرین۲۰ : نـ دار خط ثا قبـ را رسـ کـ د.

تذکر : بـ   ط ر کـ   عادله‌ی   ر خط بـ صـ رت ز ر است.

$$\boxed{y = mx + n}$$

در ا   عادلـ کـ   آ   را **معادله‌ی استاندارد خط** نـ ز   نا   د،عدد m (ضـ ر بـ x) را شـ بـ   عـ دد n را عرض از بدأ[3] می نا   د.

مثال : عادله‌ی خط   را بـ   سـ د که از دو نقطه‌ی $(۲,۷)$ و $(۵,۳)$ ذرد.

حل :

ر ش اوّل: ابتدا شـ بـ خط را تعـ   کنیم.

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۷ - ۳}{۲ - ۵} = \frac{۴}{-۳}$$

و   چـ   عادله‌ی خط بـ صـ رت $y = mx + n$ مـ   باشد پس :

$$y = \frac{-۴}{۳}x + n$$

اکنون برا   تعـ   قدار n ختصات کی از نقاط داد شد را در ا   عادلـ جا ز   کنیم.

$$(۲,۷) \xrightarrow{y = \frac{-۴}{۳}x + n} ۷ = \frac{-۴}{۳}(۲) + n \rightarrow n = \frac{۲۹}{۳}$$

در نـ ا ت عادله‌ی خط را بـ صـ رت ز ر بـ   دست   آ ریم.

---

[3]. محـ   تـ   قـ   ر خط با محـ ر عرض   ا را عرض از بدأ   ا   د.

$$y=mx+n \rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$

ر ش دوّم: چ عادله‌ی خط ب صـ رت $y=mx+n$ می باشد. مختصات دو نقطه‌ی داد شد را در این معادل جا ز کنیم.

$$\begin{cases} ۵m+n=۳ \\ ۲m+n=۷ \end{cases} \rightarrow (-۱)\times\begin{cases} ۵m+n=۳ \\ ۲m+n=۷ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۵m-n=-۳ \\ ۲m+n=۷ \end{cases}$$

$$\rightarrow -۳m=۴ \rightarrow m=\frac{۴}{-۳}\ ,\ n=\frac{۲۹}{۳}$$

لذا عادله‌ی خط ط ب ب شک ز ر است.

$$y=mx+n \rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$

نت جه : معادله‌ی ر خط ک ذرا از بدأ ختصات ب صـ رت $y=mx$ است.

تمرین ۲۱ : عادله‌ی خط را ب سـ د که از بدأ ختصات ب ذرد شیب آن -۳ باشد.

***

روش های تعیین معادله‌ی خط

واضح است که از ر نقطه ب شـ ار خط ذرد ، ول فقط ک خط با شـ ب عیـ از ر نقط ذرد.

ا ر خطی با شـ ب m ذرا از نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ در نظر رفتـ شـ د. م توان عادله‌ی خط را ب صـ رت ز ر ن شت:

$$y=m(x-x_۰)+y_۰$$

تمرین ۲۲ : عادله‌ی خط را ب سـ د که از نقطه‌ی $P(-۲,۱)$ ب ذرد شـ ب ۵- آن باشد.

تمرین۲۳ : عادله‌ی خط را ب سـ د که از نقطه‌ی $P(۳,-۱)$ ب ذرد و با حـ ر ط ا در جـ ت مثبـ ت زاویه‌ی ۶۰ درجـ تشک د د.

تمرین۲۴ : معادله‌ی خط را ب سد که از دو نقطه‌ی (۲,۷) و (۵,۳) ذرد.

حل :

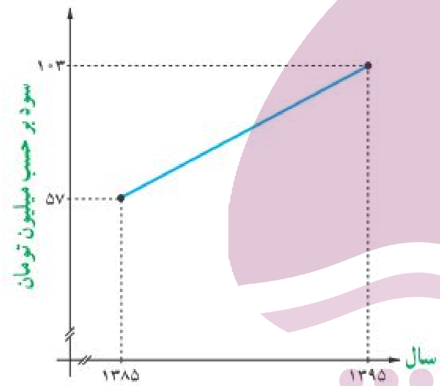
$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷-۳}{۲-۵}=\frac{۴}{-۳}$$

$$y=m(x-x_۱)+y_۱\to y=-\frac{۴}{۳}(x-۵)+۳\to y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۰}{۳}+۳=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$

ت جه : از ر دو نقط فقط ک خط ذرد. لذا برا رسم ن دار خط کافی است دو نقط از ن دار آن خط را تع کنیم.

تمرین۲۵ : ن دار خط $y=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را رس ک د.

تمرین۲۶ : س د سالانه‌ی ک کار ا ک چ ک تول دی از سال ۱۳۸۵ الی ۱۳۹۵ طبق نمودار قابل س ر ص ع د داش ته است.



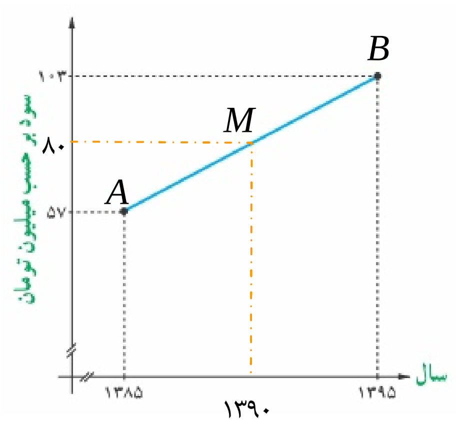
الف : م ان س د سالانه‌ی ا شرکت در دهه‌ی رد نظ ر چقدر ب ده است؟

ب: در کدا سا قدار س د سالانه، با ان س د د س اله برابر ب ده است؟

پ : ا ر س د سالان در ط ک دهه‌ی آ نده با روند افزا ش ابد، انتظار ر د در سال ۱۴۰۵ س د سالانه‌ی شرکت چقدر باشد؟

حل :

الف:



$$x_M=\frac{۱۳۸۵+۱۳۹۵}{۲}=۱۳۹۰$$

و

$$y_M=\frac{۵۷+۱۰۳}{۲}=۸۰\quad (\text{س د ت سط})$$

ب: ابتدا معادله‌ی خط AB را بنویسیم.

$$m_{AB}=\frac{۱۰۳-۵۷}{۱۳۹۵-۱۳۸۵}=\frac{۲۳}{۵}$$

$$y=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷$$

$$y=۸۰\xrightarrow{y=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷}۸۰=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷\rightarrow ۲۳=\frac{۲۳}{۵}x-۶۳۷۱$$

$$\rightarrow ۶۳۷۱=\frac{۲۳}{۵}x\rightarrow ۳۱۹۷۰=۲۳x\rightarrow x=\frac{۳۱۹۷۰}{۲۳}=۱۳۹۰$$

پ :

$$y=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷\xrightarrow{x=۱۴۰۵}y=\frac{۲۳}{۵}(۱۴۰۵-۱۳۸۵)+۵۷=۱۴۹$$

❋❋❋

معادله‌ی کلی خط

برا   ر خط م   توا   عادله ا   ب ص رت ز ر ن شت:

$$ax+by+c=٠$$

واضح است که ا   عادل را   توا   ب ص رت ز ر ن ز ن شت :

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

پس ش ب خط برابر $m=\frac{-a}{b}$ عرض از بدأ آن $n=-\frac{c}{b}$ است. ت ج داشته باش د ک   ع رض نقطـه ت ق   خط با ح ر عرض ا را عرض از بدأ می نا د.

نتیجه : عادله‌ی برخی از خط ط   ب ص رت ز ر است.

رد ف	عنوان	معادله	ش ب
۱	مح ر ط ا	$y=٠$	$m=٠$
۲	مح ر عرض ا	$x=٠$	تعر ف ن ش د.
۳	ن ساز ربع اوّ سوّم	$y=x$	$m=١$
۴	ن ساز ربع دوّ چ ارم	$y=-x$	$m=-١$

تمرین۲۷ : معادله‌ی خطی ب ص رت $۶x+۲y-۴=٠$ است.

الف: ش ب   عرض از بدأ ا   خط را ب دست آ ر د.

ب : مح   تقاطع ا   خط با ح ر ا   ختصات را تع   ک د.

ج : ن دار خط را رس   ک د.

تمرین۲۸ : ن دار ر ک از خط ط ز ر را رس   ک د.

الف) $y=-۲x+١$ پ $y=-۲$ ث) $y=\frac{١}{٣}x$

ب) $۲x+٣y=۶$ ت) $x=\frac{٣}{۲}$

تمرین ۲۹ : قدار k را ط ر   تع   ک د ک ش ب خط ب عادله‌ی ز ر برابر ۲− باشد.

$$kx+(k-۲)y=-٣k$$

***

تمرین برای حل :

۳۰ : مقدار k را طـ ر تعـ کـ د کـ سه نقطه‌ی $A(-۳,۰)$ و $B(k+۱,-۲)$ و $C(۳,۲)$ ر ک خط راست اقع باشـ د.

۳۱ : معادله‌ی خط ذرا از دو نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ و $B(۳,۲)$ را بـ سـ د.

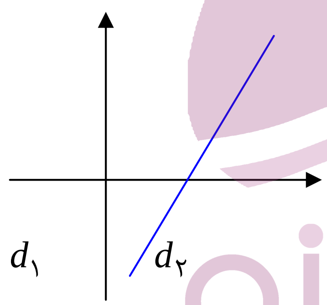
۳۲ : معادله‌ی خط را بـ سـ د کـ حـ ر طول ا را در نقطه‌ای بـ طول ۳ حـ ر عرض ا را در نقطه‌ای بـه عرض ۲ قطع کـ د.

۳۳ : نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۳,۲)$ و $C(۰,-۱)$ سـ رأس کـ ثـ ستـ د. معادله‌ی انـه‌ی ارد بـ ر ضـ ع BC را بـ سـ د.

❋❋❋

رابطه‌ی بین شیب های خطوط موازی

د خط واز د، ا ر تـ اا ر شـ ب ا سا داشته باشـ د.



$$m_۱ = m_۲ \leftrightarrow d_۱ \parallel d_۲$$

تمرین۳۴ : نشا د دـ کـ د خط بـ عاد ت ز ر مواز د.

$$y = -۲x + ۳ \quad \text{و} \quad ۶x + ۳y = ۵$$

تمرین۳۵ : معاد ت د خط ز ر را در نظر بـ ر د.

$$x - ۴y = -۲ \quad \text{و} \quad ۲x + y = ۵$$

الف) ثابت کـ د که ا د خط تقاطع ستـ د.

ب) مختصات نقطه‌ی تقاطع ا د خط را تعـ کـ د.

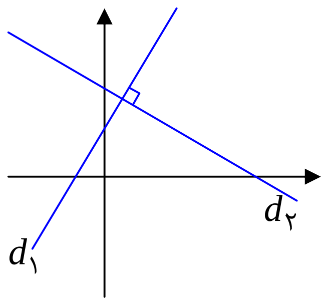
ج) نـ دار ر د خط را رسـ کـ د و نقط تقاطع آنـ ا را تعـ کـ د.

تمرین ۳۶ : معادله‌ی خط را بـ سـ د که از نقطـه‌ی $P(-۱,۳)$ بـ ذرد ازی بـ ا خـ ط بـ عادلـه‌ی $۲x + y = ۳$ باشد.

❋❋❋

رابطه‌ی بین شیب های دو خط عمود بر هم

د خط بر ع دند، ا ر ت اا ر حاصـ ضرب شـ ب ا آنـ ا برابر-1 باشد. بـ عبارتـ د را ر شـ ب خط عکس قر شـ ب د ری باشد آ د خط بر ع دند.



$$m_1 \times m_2 = -1 \leftrightarrow d_1 \perp d_2$$

تمرین۳۷ : نشا د د کـ د خط بـ عاد ت ز ر بر ع دند.

$$3x - 4y = -2 \quad \text{و} \quad y = -\frac{4}{3}x + 1$$

تمرین۳۸ : معادله‌ی خط را بـ سـ د که از بدأ ختصات بـ ذرد بر خ ط بـ عادلـه‌ی $x + 3y = 4$ ع د باشد.

تمرین برای حل :

۳۹ : نقاط $A(4,0)$ و $B(1,3)$ و $C(0,-2)$ سـ رأس کـ ثـ ستـ د. معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضـ ع BC را بـ سـ د.

۴۰ : معادله‌ی خط را بـ سـ د کـ حـ ر ط ا را در نقطه ای بـ طـول ۲ قطع کـ د واز خ ط بـه معادله‌ی $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ باشد.

۴۱ : معادله‌ی خط را بـ سـ د کـ حـ ر عرض ا را در نقطه ا بـ عرض ۲ قطع کـ د ع د بر خ ط بـه معادله‌ی $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ باشد.

۴۲ : نقاط $A(5,1)$ و $B(10,4)$ و $C(7,9)$ سـ رأس از ربع $ABCD$ می باشـ د.

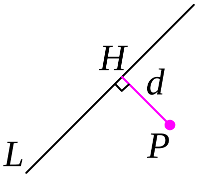
الف: معادله‌ی اضـ ع AB و DC و BC را بـ سـ د.

ب : مختصات نقطه‌ی D را تعـ کـ د.

ج : مربع را رسم کـ د.

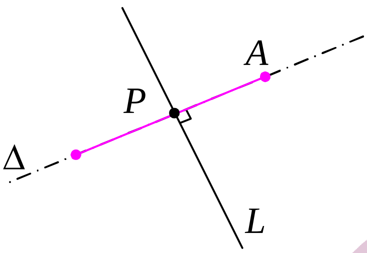
د : مساحت حـ ط ربع را بـ دست آ ر د.

فاصله‌ی نقطه تا خط



فاصله‌ی ر نقط خارج ک خط، برابر ط   پار خطی از که از نقطه بر خط ع د رسم م ش د. بدی است ک فاصله‌ی ر نقط ر   خط تا آ خط برابر صفر است.

مثال : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۷,۵)$ را از خط L ب عادله‌ی $۴x+۳y=۱۸$ ب دس ت آ ر د.



حل : چ   ش ب خط L برابر $-\frac{۴}{۳}$ است پس ر خ ط ع   د ب ر آن دارا ش ب $\frac{۳}{۴}$ خوا د ب د. معادله‌ی خط Δ ذرنده از A و ع د بر L را ن سیم.

$$\Delta: y=\frac{۳}{۴}x+h$$

و چو   نقطه‌ی $A(۷,۵)$ ر   خط Δ قرار دارد، داریم :

$$۵=\frac{۳}{۴}(۷)+h \to h=-\frac{۱}{۴}$$

لذا عادله‌ی خط Δ به ص رت ز ر است.

$$\Delta: y=\frac{۳}{۴}x+h \to y=\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۴} \to ۳x+۴y=۱$$

ا ر عاد ت د خط L و Δ را ب ص رت ک دست ا   عاد ت خط در نظر ب   ری   از حل آ   خت صات نقطه‌ی P، حل برخ رد ا   د خط ب دست   آ د.

$$\begin{cases} L: ۴x+۳y=۱۸ \\ \Delta: ۳x-۴y=۱ \end{cases} \to x=۳ \;,\; y=۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

واضح است ک   ط   پار خط AP جواب سئله است.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

ه انط ر ک شا د   ک د، ا   ر ش برا   ح   سئ   ر شی نسبتاً طولانی است.   توا   از فر   ز ر ن ز استفاد کرد.

فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_\circ , y_\circ)$ از خط ب عادله‌ی $ax+by+c=\circ$ از رابطه‌ی ز ر ب دست آ د.

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۷,۵)$ را از خط L ب عادله‌ی $۴x+۳y=۱۸$ ب دست آ ر د.

حل :

$$۴x+۳y=۱۸\rightarrow ۴x+۳y-۱۸=\circ$$

$$d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{(۴)^۲+(۳)^۲}}=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{(۴)^۲+(۳)^۲}}=\frac{۲۵}{\sqrt{۲۵}}=۵$$

نتیجه : فاصله‌ی بدأ ختصات از خط ب عادله‌ی $ax+by+c=\circ$ ب شک ز ر است.

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

تمرین۴۳ : فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۱,-۱)$ تا خط ب عادله‌ی $۳x-۴y=-۳$ را ب دست آ ر د.

تمرین۴۴ : نقاط $A(۳,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(\circ,-۳)$ س رأس ک ث ث ستند.

الف : اندازه‌ی ارتفاع ارد بر ضع BC را ب دست آ ر د.

ب : مساحت ث ث را حساب ک د.

***

توجه : ا ر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ س رأس   ث ثی باشد   توا   ساحت ث ث را ب ک ک رابطه‌ی ز ر حاسب کرد. ثابت   ش د که قدر ط ق عدد حاصل برابر ساحت ث ث است.

$$S=\frac{۱}{۲}\times\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ & x_۱ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ & y_۴ \end{vmatrix}$$

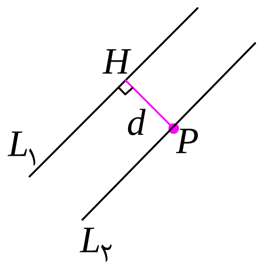
$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$

مثال: نقاط $A(۳,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(\circ,-۳)$ س رأس ک ثلث   ستند. مساحت ث ث را ب دست آ ر د.

حل :

$$\rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times\begin{vmatrix} ۳ & -۲ & \circ & ۳ \\ ۲ & ۳ & -۳ & ۲ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(۹+۶+\circ+۴+\circ+۹)=۱۴$$

فاصله‌ی بین دو خط موازی



فاصله‌ی د خط واز ط پار خطی است که از ر نقطه اقع بر کی بر د ری ع د رس ش د. بدی است ک فاصله‌ی د خط طبق بر هم براب ر صفر است.

فاص د خط موازی ب عاد ت :

$$L_۱ : ax + by + c_۱ = ۰ \quad \text{و} \quad L_۲ : ax + by + c_۲ = ۰$$

ب صر ت ز ر است.

$$d = \frac{|c_۲ - c_۱|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

تمرین۴۵ : فاصله‌ی ب د خط م ازی ز ر را تع ک د.

$$۴x + ۳y + ۷ = ۰ \quad \text{و} \quad ۴x + ۳y - ۸ = ۰$$

تمرین ۴۶ : ا ر $A(۶,۳)$ و $B(۷,۰)$ د رأس جا ر ک ستطی باش د عادله‌ی ضع CD از ایـن مستطیل ب صر ت $۳x + y = ۱$ باشد. مساحت ستط را ب دست آ ر د.

تمرین برای حل :

۴۷ : کی از اض ع ربعی بر خط $y = ۲x - ۱$ واقع است. ا ر $A(۳,۰)$ کی از رئ س ا رب ع باش د، مساحت آ را ب دست آ ر د.

۴۸ : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,-۴)$ از خط $۸x + ۶y = k$ برابر۴ است. مقدار k را ب دست آ ر د.

۴۹ : فاصله‌ی نقطه‌ی برخ رد د خط ب عاد ت $۲y - x + ۱ = ۰$ و $y + x - ۴ = ۰$ را از خط d به معادله‌ی $۷x - ۲۴y - ۲ = ۰$ را تع ک د.

۵۰ : خط L ب عادله‌ی $۳x - ۴y = ۰$ بر دا ره ای ب رک ز $W(۲,-۱)$ اس اس ت. ش عاع دا ر را ب ابید[4].

۵۱ : فاصله‌ی ب د خط مواز ز ر را تع ک د.

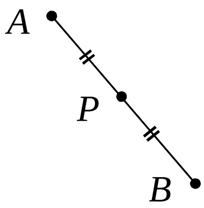
$$۶x - ۸y - ۷ = ۰ \quad \text{و} \quad ۳x - ۴y + ۱ = ۰$$

---

[4]. ت ج داشت باش د که شعاع دا ر بر خط اس در نقطه‌ی ت اس ع د است.

قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه ای دیگر

نقطه‌ی B را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت ب نقطه‌ی P گویند ر اه نقطه‌ی P سط پار خط AB باشد.



برای مطالعه : با ت جه به ا تعر ف ا ر $P(\alpha,\beta)$ باشد، در ا صر ت، واضح است که

$$x_P=\frac{x_A+x_B}{۲}\rightarrow \alpha=\frac{x_A+x_B}{۲}\rightarrow x_A+x_B=۲\alpha \rightarrow x_B=۲\alpha-x_A$$

$$y_P=\frac{y_A+y_B}{۲}\rightarrow \beta=\frac{y_A+y_B}{۲}\rightarrow y_A+y_B=۲\beta \rightarrow y_B=۲\beta-y_A$$

لذا مختصات نقطه‌ی B قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت ب نقطه‌ی $P(\alpha,\beta)$ ب صر ت ز ر است.

$$\begin{cases} x_B=۲\alpha-x_A \\ y_B=۲\beta-y_A \end{cases}$$

نتیجه : ختصات نقطه‌ی B قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت ب بدأ ختصات به شک ز ر است.

$$\begin{cases} x_B=-x_A \\ y_B=-y_A \end{cases}$$

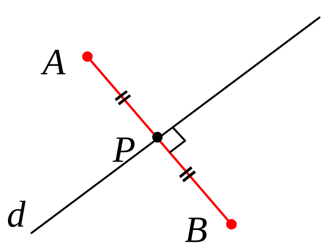
تمرین ۵۲ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۳,۲)$ را نسبت ب نقطه ی $P(۳,۰)$ ب دست آ ر د.

تمرین ۵۳ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۵,-۲)$ را نسبت ب بدأ ختصات ب دست آ ر د.

***

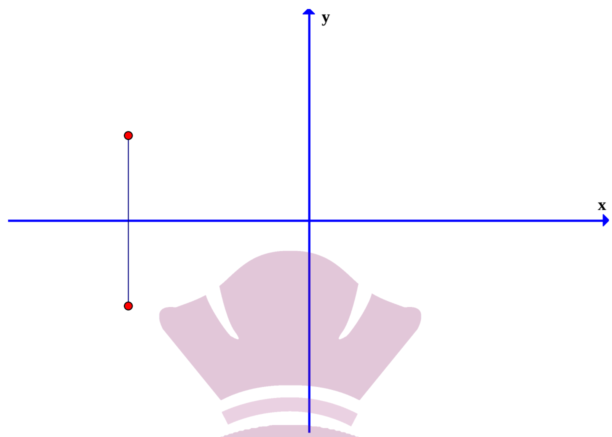
قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک

نقطه‌ی B را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d د ر اه خط d ع د صف پار خط AB باشد.

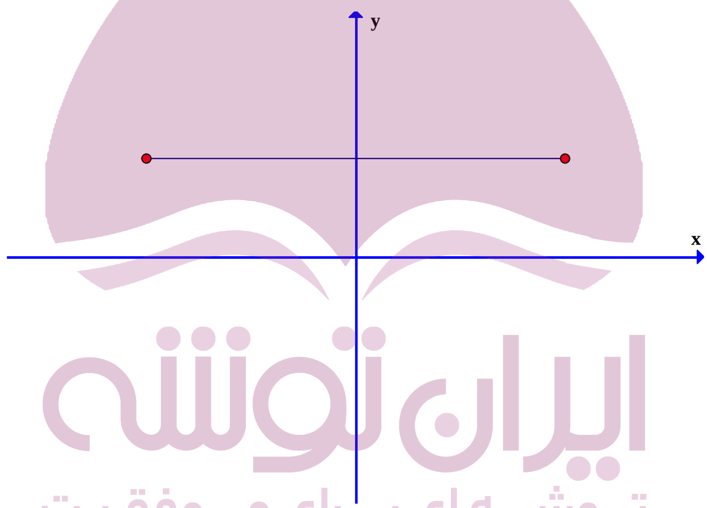


نتیجه :

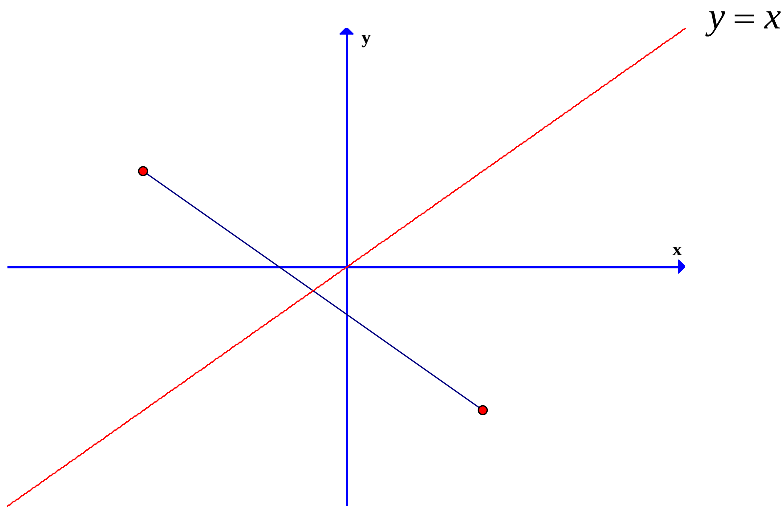
۱ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_{\circ},y_{\circ})$ نسبت ب حـ ر ط ا (خط $y=\cdot$ ب ص رت $B(x_{\circ},-y_{\circ})$



۲ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_{\circ},y_{\circ})$ نسبت ب حـ ر عرض ا (خط $x=\cdot$ ب ص رت $B(-x_{\circ},y_{\circ})$

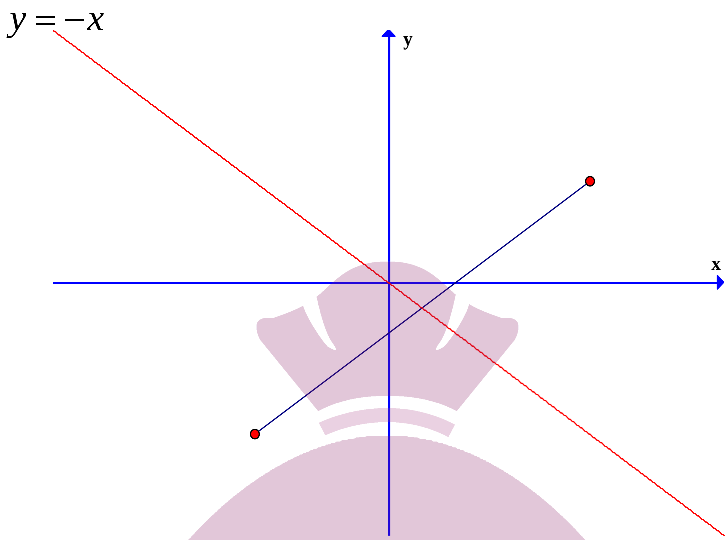


۳ : قرینه‌ی نقطه‌ی $a(x_{\circ},y_{\circ})$ نسبت ب ن ساز ربع اوّل سوّم (خط $y=x$ ب ص رت $B(y_{\circ},x_{\circ})$



۴ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ , y_\circ)$ نسبت بـ نـ ساز ربع دوّم   چ ارم (خط $y=-x$ به

صـ رت $B(-y_\circ,-x_\circ)$



تمرین۵۴ : نقطه‌ی $A(۲,-۳)$ داد شده است. بازتاب این نقط را در حالت   ا   ختـ ف ز ر بدست آ ر د.

الف : نسبت بـ   حـ ر x ا

ب : نسبت بـ   حـ ر y ا

ج : نسبت بـ   حـ ر $y=x$

د : نسبت بـ   حـ ر $y=-x$

حل: $A(۲,-۳ \to)B(۲,۳)$

***

درس دوّم : معادلات و توابع درجه ی دوّم

در ا درس ابتدا با بحث ا تک   پ را   عادله تابع درجه‌ی ۲ و آش ا س پس ب ا عرفـی نقطـه‌ی ماکزیمم و مینیمم و ف   صفر تابع درجه‌ی دوّم،   توان بس اری از سائ ر اض ات را بررس   ح کرد.

قسمت اوّل : یادآوری معادله‌ی درجه‌ی ۲

در سا   ذشته با عادله‌ی درجه‌ی ۲ آش ا شده ا د. حت اً ب   اد دار د که برا   حـ   ا   عادلـه ر ش   ای متفا ت   ج د دارد. ر ش تجز   ر ش ک س ک (کلی) را ب خاطر دار د. ب تر است قبل از ر د ب   بح ث ا   د ر ش را در قالب ثا   اداّ ر کنیم.

مثال: معادله‌ی ز ر را ح   ک د.

$$2x^2+5x-3=0$$

حل ب ر ش تجزیه :

$$2x^2+5x-3=0 \to \frac{1}{2}(2x-1)(2x+6)=0 \to (2x-1)(x+3)=0$$

$$\to \begin{cases} 2x-1=0 \to x=\frac{1}{2} \\ x+3=0 \to x=-3 \end{cases}$$

حل ب ر ش ک س ک : $a=2$ و $b=5$ و $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4(2)(-3)=25+24=49$ عادل د ر شه‌ی حق ق دارد.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(5)+\sqrt{49}}{2(2)}=\frac{-5+7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(5)-\sqrt{49}}{2(2)}=\frac{-5-7}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

یادآوری : ر عادله ب ص رت $ax^2+bx+c=0$ ک در آن $a\neq 0$ ، یک درجه‌ی دوّم است. یک ر ش ح   عادله‌ی درجه‌ی دوّ ب ص رت ز ر است. ا   ر ش را ر ش ک ا ر ش ک س ک می نامند.

برا ح   عادله‌ی درجه‌ی دوّ ب ا   ر ش ب ترت ب ز ر ع   کنیم.

۱) با ن شتن   عادله ب ص رت استاندارد ، ضرا ب عادله عنی c و b و a را مشخص می کنیم. (ضر ب x^{2} را a، ضر ب x را b عدد ثابت را c ریم.)

۲) مب   عادل   عنی $\Delta = b^{2} - 4ac$ را محاسبه می کنیم.

۳) با ت جه ب ع   ت Δ تعداد   قدار ر ش   ا را ب ک ک حالت ا ز ر تع   کنیم.

ا ر $\Delta > 0$ باشد   عادل دارا   د ر شه است. مقدار ا   ر ش   ا را از تسا   ا ز ر حاسب   کنیم.

$$x_{1} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{و} \qquad x_{2} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ا ر $\Delta = 0$ باشد   عادل دارا فقط ک ر شه (ر شه‌ی ضاعف[1]) است. مقدار ا   ر ش را از تسا   ز ر محاسب   کنیم.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

ا ر $\Delta < 0$ باشد   عادل دارا   ر شه‌ی حق قی ن ست.

تمرین ۱ : عادله ای ز ر را ح   ک د.

الف) $3k^{2} = 13k + 10$ ب) $r^{2} + 2k + 5 = 0$ ج) $9u^{2} + 12u + 4 = 0$

***

قسمت دوّم : حل معادلات به روش تغییر متغیر

گا   ز   ش د برا ح   ک عادله از ر ش تغ ر   تغ ر استفاد کرد. درا   ر ش تغ ر جد د را ط ری در نظر   ر   ک ر ش ح   عادله‌ی ب دست آ د را   دانیم. با حل ا   عادل   توا   ر   ش   ای معادله‌ی اوّل   را ن ز ب دست آ رد.

مثال : عادله‌ی ز ر را ح   ک د.

$$x^{4} - 3x^{2} - 10 = 0$$

حل : کافی است قرار دهیم، $x^{2} = t$. لذا خوا   داشت:

---

[1]. ر ش   کرر رتب   دوّم

$t^{۲}-۳t-۱۰=۰$

$$(t-۵)(t+۲)=۰\to\begin{cases}t=۵\to x^{۲}=۵\to x=\pm\sqrt{۵}\\ t=-۲\to x^{۲}=-۲\ \text{م}\ \text{غ}\end{cases}$$

تمرین برای حل : معد له زیر حل کنید.

۲) $x^{۴}-۱۳x^{۲}+۳۶=۰$ ۳) $(x^{۲}-۳)^{۲}-۳x^{۲}+۱۱=۰$ ۴) $۴^{x}-۱۲(۲^{x})+۳۲=۰$

***

قسمت سوّم : مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی درجه‌ی ۲

گاهی ب جا تع قدار ر ش ا ک عادله‌ی درجه‌ی ۲ ، ت ا ج ع حاص ضرب ر ش ا آن ا ت دارد. مج ع حاص ضرب ر ش ا ر عادله‌ی درجه‌ی ۲ ب ش کل $ax^{۲}+bx+c=۰$ از رابط ا ز ر ب دست آ د.

$S=x_{۱}+x_{۲}=\dfrac{-b}{a}$ ج ع ر ش ا

$P=x_{۱}\times x_{۲}=\dfrac{c}{a}$ حاص ضرب ر ش ا

تمرین۵ : بد ح عادل ج ع حاص ضرب ر ش ا عادله‌ی ز ر را ب دست آ ر د.

$$۳x^{۲}+۵x-۱=۰$$

برای مطالعه : روابط ب ج ع حاص ضرب ر ش ا عادله‌ی درجه‌ی ۲ را توا ب ص رت ز ر اثبات کرد.

$$S=x_{۱}+x_{۲}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲b}{۲a}=\frac{b}{a}$$

$$P=x_{۱}\times x_{۲}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{۴a^{۲}}=\frac{(-b)^{۲}-(\sqrt{\Delta})^{۲}}{۴a^{۲}}$$

$$=\frac{b^{۲}-\Delta}{۴a^{۲}}=\frac{b^{۲}-(b^{۲}-۴ac)}{۴a^{۲}}=\frac{۴ac}{۴a^{۲}}=\frac{c}{a}$$

تمرین برای حل :

۶: بد حـ عادلـه و فقـط با استفاده از S و P و Δ در رد ج د ع ت ر ش ا عادلـه- ی $۵x^{۲} - ۷x - ۵ =$ بحث ک د.

***

قسمت چهارم : تشکیل معادله‌ی درجه‌ی ۲

با علوم ب د جـ ع حاص ضرب ر ش ا ک عادله‌ی درجه‌ی ۲ توا آ عادل را تع کرد.

ا ر S جـ ع و P حاص ضرب ر ش ای این معادله باشد. م توا عادل را ب صر ت ز ر ن شت:

$$x^{۲} - S\,x + P = ۰$$

تمرین ۷ : عادله‌ی درجه‌ی دوّمی ب سد ک جـ ع ر ش ا آن ۱/۵− حاص ضربشان ۷− باشد.

برای مطالعه : اثبات ا عادله ب صر ت ز ر است.

$$ax^{۲} + bx + c = ۰ \xrightarrow{\div a} x^{۲} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰ \rightarrow x^{۲} - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = ۰$$

$$\rightarrow x^{۲} - S\,x + P = ۰$$

تمرین برای حل :

۸ : معادله‌ی درجه‌ی دو ب سد که $\sqrt{۳} + ۲$ و $\sqrt{۳} - ۲$ ر ش ا آن باش د.

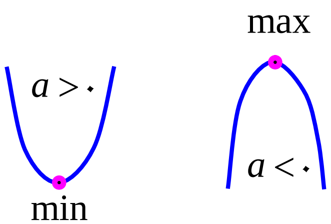
۹ : معادله‌ی درجه‌ی دو ب سد که $\frac{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}$ و $\frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}$ ر ش ا آن باش د.

۱۰ : اندازه‌ی ط عرض ستط را ب دست آ ر د ک حـ ط آن ۱۱ سانت تر ساحت آن ۶ سانتی متر ربع باشد.

***

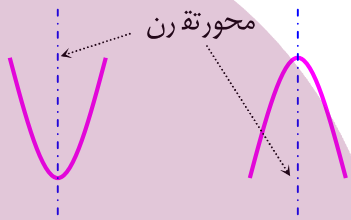
قسمت پنجم : یاد آوری تابع درجه ۲ (سهمی)

در سا ذشته بـ اد دار د کـ ر تابع درجه‌ی ۲ دارا عادله ای بـ ص رت $y = ax^{۲} + bx + c$ (کـه در آن $a \neq ۰$ است.) می باشد. نـ دار چـ توابعی یک حـ رو بـ با ا رو بـ پایین می باشد. ا حنی را سهمی می نا د. نـ دار ر سـ دارای با تر ا پا ترین نقطـه می باشد کـ آ را رأس سهمی می نا د.



الف : ا ر $a > ۰$ باش د نـ دار سـ رو بـ بالا (دارای مـی نـیمم) و ا ر $a < ۰$ باشد، نـ دار سـ رو بـ پایین (دارای اکزیمم)است.

ب : نـ دار سـ دارا ـک حـ ر تقارن است کـ عادله‌ی آن بـص رت $x = \frac{-b}{۲a}$ می باشد و هـ ار ازی محـ ر y ا است.



هـ چـ عادله‌ی حـ ر تقار سهمی نـ ز بـص رت $x = \frac{-b}{۲a}$ می باشد.

برا رسم نـ دار سهمی کافی است کـ علا بر رأس سـ دو نقط را چـان انتخاب کـ کـ طـ کـی بـ شتر طـ د ر کـ تر از طـ رأس سهمی باشد.

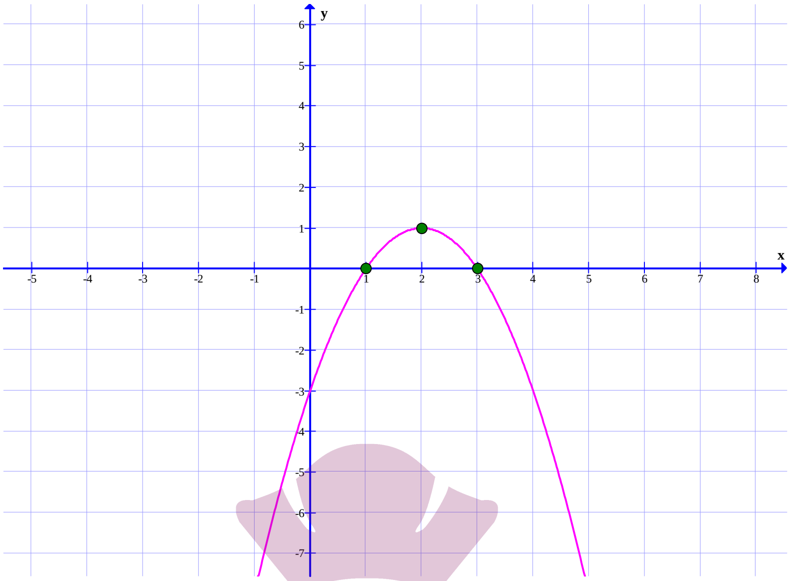
مثال : نـ دار سهـ بـ عادله‌ی $y = -x^{۲} + ۴x - ۳$ را رسـ کـ د.

حل : ابتدا طـ رأس سـ را تعـ کنیم.

$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۴}{۲(-۱)} = ۲$$

حـ جدول زـ ر را تکـ کنیم.

x	۱	۲	۳
y	۰	۱	۰



❋❋❋

تمرین۱۱: ن دار عاد ت ز ر را رس ک د.

الف) $y = x^{۲} - ۲x - ۳$

ب) $y = -(x - ۳)^{۲} + ۱$

ج) $y = -۴x^{۲} + ۸x + ۱$

تمرین۱۲: اکزیمم یا تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^{۲} + ۲x + ۳$ را در ص رت ج د ب دست

آ ر د.

حل : چون $a = -۱$ فی است. پس س رو ب پایین است. لذا س دارای نقطه‌ی اکزیمم است.

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(-۱)} = ۱$$

ه چند ب شتر قدار تابع ب ازای $x = ۱$ می باشد.

$$f(۱) = -(۱)^{۲} + ۲(۱) + ۳ = ۴$$

تذکر : در این ت رین نقطه‌ی $(۱,۴)$ رأس سهمی و قدار اکزی ن دار سه برابر ۴ می باشد.

تمرین برای حل :

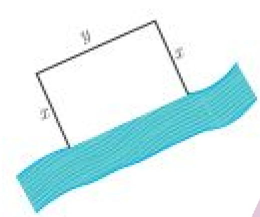
۱۳ : قدار m را چان بابد که $x=2$ ط   رأس سهمی ب   عادله‌ی $y=mx^2+(m-1)x+1$ باشد.

۱۴ : ک تر   قدار تابع $f(x)=3x^2-12x+5$ را تع   ک د.

۱۵ : ب شتر   قدار تابع $f(x)=-x^2+4x+1$ را حاسب ک د.

۱۶ : ا ر $3x+5y=150$ قدار y و x را ط ری ب ابد ک حاص ضرب آ ها اکز   ش د.

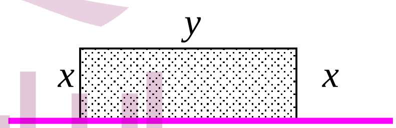
حل چند تمرین کاربردی :



۱۷ : قرار است در ک ار ک ر دخان   ح طه ای مستط   شکل ا جاد کنـیم. برای ا   کار   زم است س ضع ح طه نرد ک ش   ش د. ا   ر ت   ا   زینـه‌ی نصب ۱۲۰ تر نرد   را در اخت ار داشته باشـیم. ب شتر   ساحت م کـن ایـن مح ط را تع   ک د.

حل :

$y+2x=120 \rightarrow y=120-2x$



$S=xy$ ساحت ستطیل

$S(x)=x(120-2x) \rightarrow S(x)=120x-2x^2$

تابع ب دست آ د   ک تابع درجه‌ی دوّم است در آن $a=-2<0$ می باشد. پ س تابع دارای ب شترین مقدار است. ب شتر   قدار را ب روش ز ر تع   کنیم.

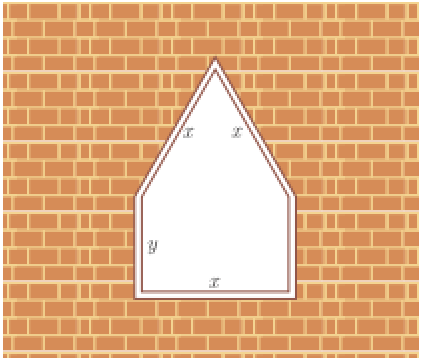
$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-120}{2(-2)}=30$$

$$S(30)=120(30)-2(30)^2=3600-1800=1800\ m^2$$

ت جه : مقدار ساحت را پس از تع   قدار x ن ز   توا   ب شک   ز ر ب دست آ رد.

$$y=120-2(30)=60$$

$$S=xy=(30)(60)=1800\ m^2$$



۱۸ : مک پجر ب شکی ستط است ک در ب ا آ ک مثث تساوی ا ض ع قرار رفته است. ا ر ح ط پجره ۴ ت ر باشد، ابعاد ستط را ط ری ب ا بد ک پجر ر ح داکثر ن رد را داشته باشد.

حل : با ت جه ب شک داریم :

$$P = ۴ \to ۳x + ۲y = ۴ \to y = ۲ - \frac{۳}{۲}x \quad \text{ح ط پجره}$$

از آنجا ک ساحت ث ث تساو ا ض ع ب ضع x برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است (چرا؟) ، پس م توان ن شت:

$$S = x.y + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ \quad \text{ساحت پجره}$$

حال ا ر ب جای y عاد آ را بر حسب x قرار دهیم. داریم :

$$S = x.(۲ - \frac{۳}{۲}x) + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ = ۲x - \frac{۳}{۲}x^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ = \frac{\sqrt{۳} - ۶}{۴}x^۲ + ۲x$$

ا تابع ک تابع درجه‌ی ۲ (سهمی) است دارا اکزیمم است (چرا؟). لذا داریم.

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(\frac{\sqrt{۳} - ۶}{۴})} = \frac{۲}{\frac{۶ - \sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲}{۴ - \sqrt{۳}} = ۰/۹۴ \ m$$

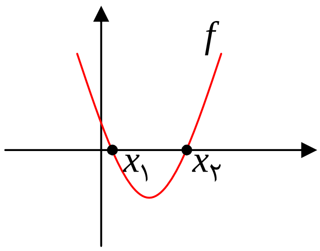
$$y_{\max} = ۲ - \frac{۳}{۴}x = ۲ - \frac{۳}{۴}(۰/۹۴) = ۰/۵۹ \ m$$

ت جه : پجره‌ی ضع ا ت ر ز انی ب شترین ن رد دارد که بزر تر ساحت را داشته باشد.

***

قسمت ششم : صفرهای تابع درجه ۲ (سهمی)

ه انط ر ک دانید ن دار ر تابع درجه‌ی ۲ ک سهمی است و دارا عادله ا ب صرت $f(x)=ax^2+bx+c$ است.

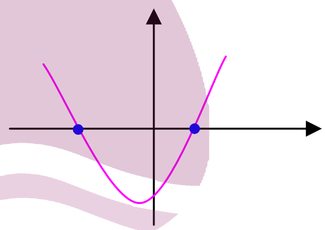


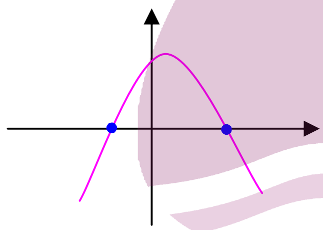
$f(x_1)=f(x_2)=0$

ب ابرا کن است حر ر ط ا را در ک ا دو نقط قطع ک د ا ا ک حر رطول ا را چ قطع نک د. طو نقطه‌ی تقاطع ن دار سهمی با حر ر ط ا را صفر تابع می نا د. بدی است ک درا نقطه مقدار تابع (عرض نقطه) برابر صفر است. ب ابر ا صفر تابع f ا ر شه‌ی عادله‌ی $f(x)=0$ است.

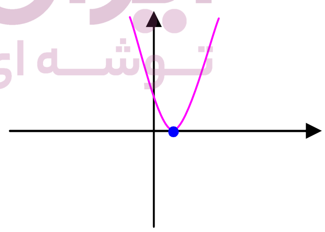
نتیجه : بر اساس ف ق توا نت ج رفت که :

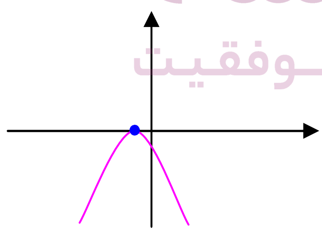
الف : ن دار س حر رطول ا را در دو نقط قطع ک د. ب ابرا عادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای د ر شه‌ی مت ا ز است.



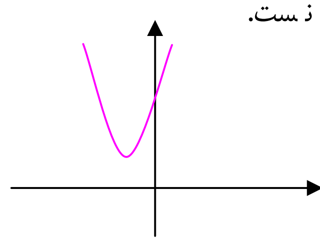


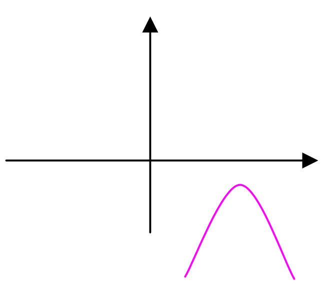
ب : ن دار سه بر حر رطول ا اس است. ب ابرا عادلـه‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارا ر شه‌ی مضاعف است.





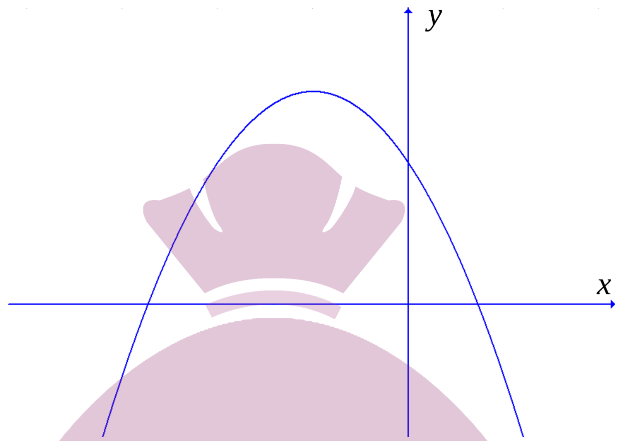
ج : ن دار س حر رطول ا را در دو نقط قطع ن ک د. ب ابرا عادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای ر شه‌ی حق قی ن ست.





حل چند تمرین :

۱۹ : ن دار ز ر ، ن دار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ می باشد. تعداد ر شه ا عادله‌ی $f(x)=0$ و ع ت a و b و c را تع ک د.



حل : ن دار ح ر ط ا را در دو نقطه‌ی جزا قطع کرده است. لذا عادله‌ی $f(x)=0$ دارا د ر شه‌ی مت ا ز است.

ن دار س رو ب پای است، لذا $a<0$

د ر شه ختلف العلا اند قدر ط ق ر شه‌ی فی از ر شه‌ی ثبت بیشتر است. لذا ج ع ر شه ا م فی است. پس :

$$S<0 \rightarrow \frac{-b}{a}<0 \rightarrow \frac{b}{a}>0 \xrightarrow{a<0} b<0$$

چ د ر شه ختلف العلامه اند. لذا حاص ضرب آن ا فی است. پس :

$$P<0 \rightarrow \frac{c}{a}<0 \xrightarrow{a<0} c>0$$

توجه :

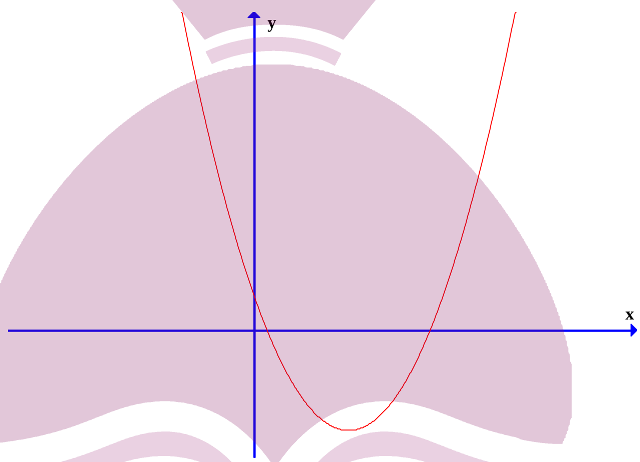
الف : ب ر ش د ر توا ع ت b را نیز تع کرد. در ا ر ش ط رأس س را در نظر مـی گریلا مثً در ا ی ت ر به‌ت ج ب ن دار علوم است ک ط رأس س فی است. لذا :

$$\frac{-b}{2a}<0 \rightarrow \frac{b}{2a}>0 \xrightarrow{a<0} b<0$$

ب: به ر ش د ری ن ز توان ع ت c را تعیین کرد. با ت جه ب ا که ت ابع ح ر y ه ا را در نقطه-ی $(0,c)$ قطع ک د، لذا توا ب ت جه ب نقطه‌ی تقاطع ن دار با ح ر y ها، ع ت c را تع کرد. در ت ر ف ق، از رو ن دار واضح است ک ح تقاطع ن دار با ح ر عرض ا (مقدار c) با ح ر x ها است. پس $c>0$

***

۲۰: ن دار ز ر، ن دار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ می باشد. تعداد ر ش ا عادله‌ی $f(x)=0$ و ع ت a و b و c را تع ک د.



حل: ن دار ح ر ط ا را در دو نقطه‌ی جزا قطع کرده است. لذا عادله‌ی $f(x)=0$ دارا د ر شه‌ی مت ا ز است.

ن دار س رو ب بالا است، لذا $a>0$

د ر ش ع ت ثبت می باش د. لذا ج ع آنها ثبت است. پس

$$S>0 \rightarrow \frac{-b}{a}>0 \rightarrow \frac{b}{a}<0 \xrightarrow{a>0} b<0$$

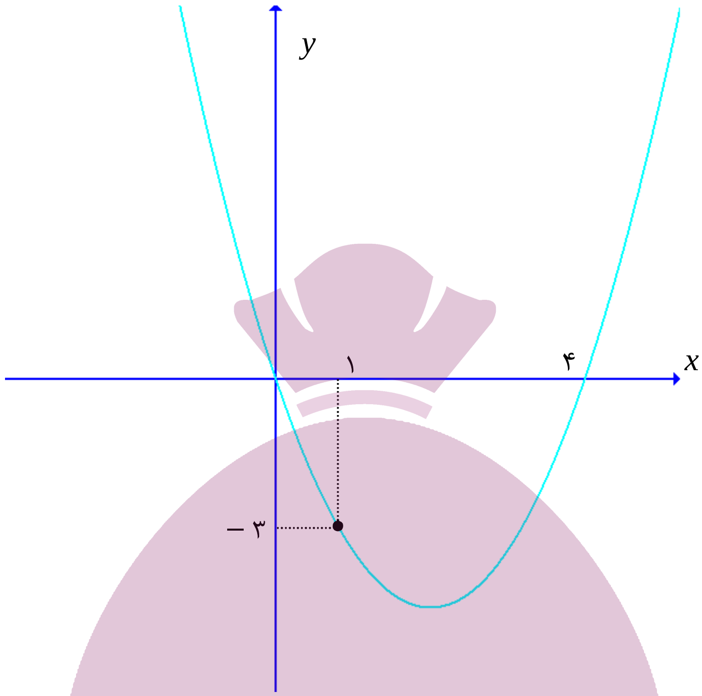
چ د ر ش ثبت ستد، لذا حاص ضرب آ ا ن ز ثبت است. پس

$$P>0 \rightarrow \frac{c}{a}>0 \xrightarrow{a>0} c>0$$

***

۲۱ : در شکل ز ر ن دار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داد شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آ ر د.   ب : جدول ع ت $f(x)$ را تشک د د.



حل : سه نقطه از ن دار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ علوم است. لذا داریم.

$$A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}۰=a(۰)^{۲}+b(۰)+c\rightarrow c=۰$$

$$B\left|\begin{matrix}۱\\-۳\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}-۳=a(۱)^{۲}+b(۱)+c\rightarrow a+b+c=-۳$$

$$\xrightarrow{c=۰}a+b=-۳$$

$$C\left|\begin{matrix}۴\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}۰=a(۴)^{۲}+b(۴)+c\rightarrow ۱۶a+۴b+c=۰$$

$$\xrightarrow{c=۰}۱۶a+۴b=۰\xrightarrow{\div۴}۴a+b=۰$$

حا دستگا ز ر را حل کنیم.

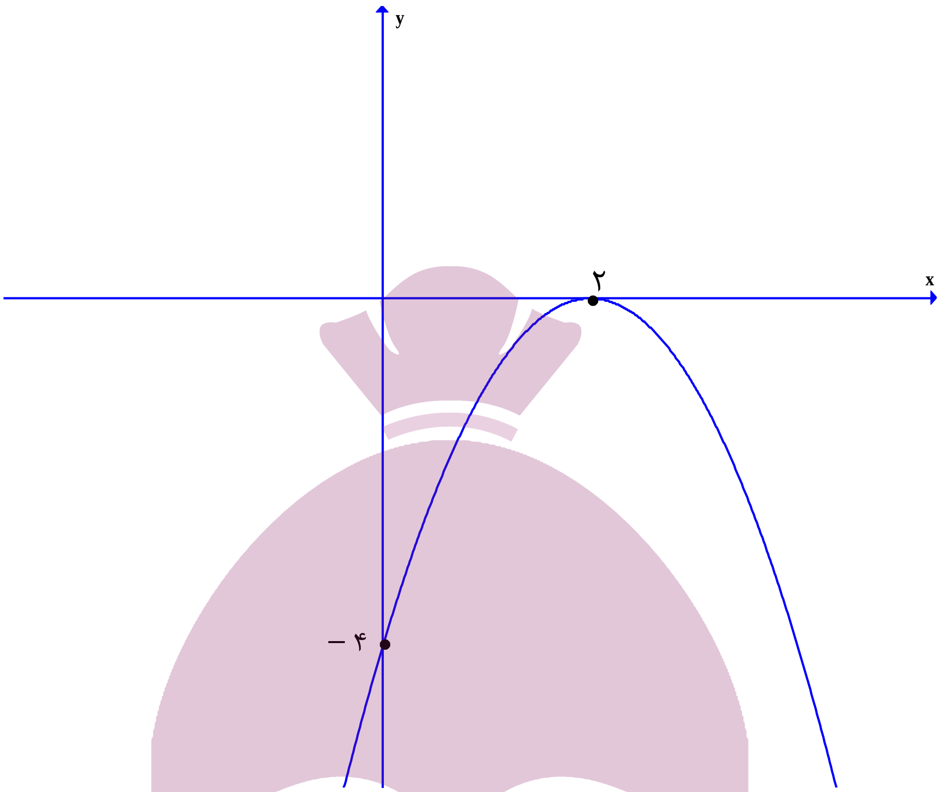
$$\begin{cases}a+b=-۳\\۴a+b=۰\end{cases}\rightarrow a=۱\,,\,b=-۴$$

در ز ا ت جد تع ع ت را با ت جه به ن دار داد شده ، به صرت ز ر تشک دهیم.

x	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
y		+	۰	-	۰	+	

۲۲ : در شکل قابل ن دار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داد شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آ ر د.
ب : جدول ع ت $f(x)$ را تشک د د.



حل : دو نقطه از ن دار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A\left|\begin{matrix}۰\\-۴\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}-۴=a(۰)^{۲}+b(۰)+c\rightarrow c=-۴$$

$$B\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c}۰=a(۲)^{۲}+b(۲)+c\rightarrow ۴a+۲b+c=۰$$

$$\xrightarrow{c=-۴}۴a+۲b=۴\rightarrow ۲a+b=۲$$

نقطه‌ی B ا ز تابع ن ز می باشد. پس:

$$B\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{x_{\circ}=\frac{-b}{۲a}}۲=\frac{-b}{۲a}\rightarrow ۴a+b=۰$$

حا دستا ز ر را ح کنیم.

$$\begin{cases}۲a+b=۲\\۴a+b=۰\end{cases}\rightarrow a=-۱\,,\,b=۴$$

در ن ا ت جد تع ع ت را با ت ج ب ن دار داد شده ، ب ص رت ز ر تشک دهیم.

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y		-	۰	-	

در ن ا ت جد تع ع ت را با ت جه ب ن دار داد شده ، ب ص رت ز ر تشک دهیم. (چ ح ر طول ا را قطع ن ک د پس تابع ر شه ندارد.)

x	$-\infty$		$+\infty$
y		− −	

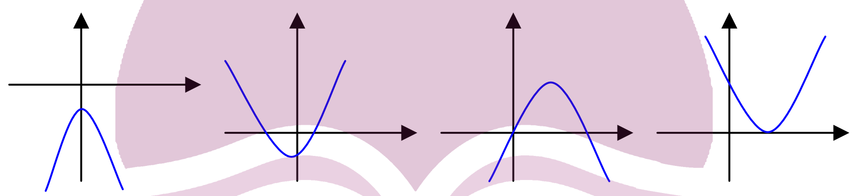
***

توجه ۱ : محـ تقاطع ن دار سهـ بـ عادله ی $y=ax^2+bx+c$ با حـ ر عرض ا قدار c را نشان م د د. لذا در ر س که ن دار آن از بدأ ختصات ذرد ، $c=0$ است.

توجه۲ : ا ر ن دار سهـ نسبت بـ حـ ر y ها تقارن باشد حـ ر تقار آ ـعـ خط $x=\frac{-b}{2a}$ روی محـ ر y ها طبق است. پس $x=0$ مـ باشد در نتجه $b=0$ است.

تمرین برای حل :

۲۴ : جد ز ر را با ت جه به ن دار ا داد شد کا کنید. $(y=ax^2+bx+c)$



(د) (ج) (ب) (الف)

	الف	ب	ج	د
ع ت Δ				
ع ت a				
ع ت b				
ع ت c				
تعداد صفر ا تابع				

۲۵ : معادله‌ی سـ ر حرکت یک ت پ بعد از ش ت آن، ک تابع درج دو با ضابطه‌ی $y=-\frac{1}{40}x^2+x$ است. در ا عادله x سافت ط شده و y ارتفاع ت پ از سطح زمین است.

الف : حداکثر ارتفاع ت پ را بـ دست آ ر د.

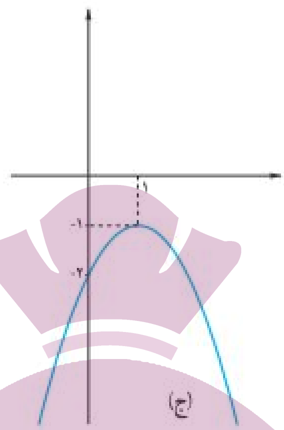
ب : تع ک د ک حداکثر سافت ط شد ت سط ا ت پ چقدر است؟

ج : ن دار حرکت ت پ را رسـ ک د.

۲۶ : معادله‌ی ک سهمی ب ص رت $y=a(x-۱)(x-۲)$ است، مقدار a را چ ا تع   ک د که این

س   ح ر عرض   ا را در نقطه ای ب عرض۴ قطع ک د.

۲۷ : عادله‌ی س   رب ط ب ن دار ز ر را ب س د.



درس سوّم : معادلات گویا و معادلات رادیکالی

در ا درس بـ ر ش ا حـ عاد ت ا عاد ت راد کال پردازیم. ا دو ن ع عادله بـ جـ ت کاربرد ای بسـ ار ز اد آن ا از ا ت خاصی برخ ردارند.

قسمت اوّل : معادلات گویا

هر عادلا کـ در آ تغ ر عادلا در خرج کسر باشد را ک عادله‌ی شا عبارت ا ا بـ اختصار معادله‌ی ا می نا د. انـ د عاد ت ز ر:

$$\text{الف)}\ \frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^{۲}-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲} \qquad \text{ب)}\ \frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^{۲}-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}$$

برا حـ چـ عاد تی، ابتدا ک چکتر ضرب شترک خرج ا را حاسـ بـ ک رده[1] و در تـ ا ک سر ا ضرب کنیم. سپس عادله‌ی بدست آ د را حـ کنیم. در نـ ا ت جوابی از عادلا را پذ ر که بـه ازا آ خرج چ کسر صفر نشـ د[2].

مثال : عادله‌ی ز ر را حـ کـ د.

$$\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^{۲}-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}$$

حل: ابتدا ک چکتر ضرب شترک خرج ا را تعـ کنیم.

$$\begin{cases} A=x \\ B=x^{۲}-۲x=x(x-۲)\xrightarrow{\text{ک م م}}x(x-۲) \\ C=x-۲ \end{cases}$$

$$\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^{۲}-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}\rightarrow \overset{\times x(x-۲)}{\frac{۵}{x}}-\overset{\times x(x-۲)}{\frac{۴}{x(x-۲)}}=\overset{\times x(x-۲)}{\frac{x-۴}{x-۲}}$$

$$\rightarrow ۵(x-۲)-۴=x(x-۴)\rightarrow ۵x-۱۰-۴=x^{۲}-۴x\rightarrow x^{۲}-۹x+۱۴=۰$$

$$\rightarrow (x-۷)(x-۲)=۰\rightarrow \begin{cases} x=۷ \\ x=۲\ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

---

1. برای این کار ابتدا خرج ا را تجز کرد سپس حاص ضرب عوا شترک غ ر شترک با توا بـ شتر را تعیین می کنیم.
2. اگر عادله‌ی ا بـ صـ رت تسا د کسر بـ ا شد باشد. بـ تر است، از خاصـ ت ضرب طرفین و وسطین استفاده کنیم.

تمرین برای حل : ر ک از عاد ت ز ر را ح ک د.

$$۱)\ \frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^{۲}-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$$

$$۴)\ \frac{۱}{x^{۲}-۲x+۱}=\frac{۳}{x^{۲}-۲x+۳}$$

$$۲)\ \frac{x-۲}{x+۲}+\frac{x}{x-۲}=\frac{۸}{x^{۲}-۴}$$

$$۵)\ \frac{n^{۲}-۲n+۲}{n^{۲}-۲n}-\frac{۱+n}{n}=\frac{n-۱}{n-۲}$$

$$۳)\ \frac{۳}{۲x}=\frac{x+۲}{x^{۲}-۳x}$$

$$۶)\ \frac{۲x}{x^{۲}-۱}+\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲-x}{x^{۲}-x}$$

حل چند مسئله‌ی کاربردی :

۷ : مستط ط ستطیل است که نسبت ج ع ط عرض آن بـه ط ستطیل برابر با نسبت طو ب عرض آن باشد. ب عبارت د ر ا ر طول و عرض ستطیل ب ترت ب x و y باش د توان ن شت:

$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$$

نسبت طو ب عرض ا ستط را **نسبت طلایی** د.

حال ا ر عرض ستط را برابر ک در نظر ب ری واضح است ک قدار x ان نسبت طلایی است. برای محاسب قدار x کافی است ک عادله‌ی ز ر را ح کنیم.

$$\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}\rightarrow x^{۲}=x+۱\rightarrow x^{۲}-x-۱=۰\xrightarrow{\Delta=۵}\begin{cases}x_{۱}=\dfrac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\\[2mm] x_{۲}=\dfrac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$

واضح است ک جواب ۀ قاب قبول است. عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ک قدار تقر ب آن ۱/۶۱۸ است ب ع دد ط عر ف است که از د ران باستا رد ت جه ب ده است.

***

۸: در ک زرعه‌ی شال کار د کار ر که با کار ک د کار نشاکار را در ۱۸ ر ز ت ا ک د. امّا ا ر ر کدام ب ت ا کار کردند کار ر اول ۱۵ ر ز دتر از کار ر دوّم ا کار را ت ا کرد. هر کدام از ا د کار ر ب ت ا کار را در چ د ر ز ت ا ک د.

حل : ا ر کار ر اوّل در x ر ز کار را ت ا ک د پس کار ر دوّم ک ار را در $x+۱۵$ ر ز ت ام مـی ک د. لذا

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$\xrightarrow{\times ۱۸x(x+۱۵)=} ۱۸(x+۱۵)+۱۸x=x(x+۱۵)\rightarrow ۱۸x+۲۷\ \ +۱۸x=x^{۲}+۱۵x$$

$$\rightarrow x^{۲}-۲۱x-۲۷\ \ = \xrightarrow{\Delta=(-۲۱)^{۲}-۴(۱)(۲۷\ \ )=۴۴۱+۱\ \ ۸\ \ =۱۵۲۱} \begin{cases} x_{۱}=\dfrac{۲۱+۳۹}{۲}=۳ \\ x_{۲}=\dfrac{۲۱-۳۹}{۲}=-۹ \end{cases}$$

ب ابر ا ت سئ ر شه‌ی $x=-۹$ قاب قبول ن ست.

***

۹: در ک غازه‌ی ا ا تزئ ا ا ش ر در مح آب ن ک با غ ظت ۷ درصد ن داری می شوند. ب ع ت تاز کار ب د کار ر ا، ۲۰۰ ک ر آب ن ک ۴ درصد ساخت شده است. چگون توان ا ح را ب غ ظت رد نظر رساند.

حل : فرض کن ب اندازه‌ی کاف ج د باشد بت ان با اضاف کردن ن ک کاف حلول را با ۷ درصد ن ک بسازیم. ابتدا حاسب ک ک در ح فع چ د ک رم ن ک ج د دارد.

$$\frac{۴}{۱}\times ۲\ \ =۸\ \ \ \text{کیلو}$$

ا ر x ک رم ن ک ب ا ح ل ب ف زا زان ن ک آب $۸+x$ ک ر ش د ز کـل محلول $x+\ \ ۲$ ک ر ش د پس برا داشت حلول ۷ درصدی ن ک با د داشته باشیم:

$$\frac{۸+x}{۲\ \ +x}=\frac{۷}{۱}$$

$$\frac{۸+x}{۲\ \ +x}=\frac{۷}{۱}\rightarrow ۸\ \ +۱\ \ x=۱۴\ \ +۷x\rightarrow ۹۳x=۶\ \ \rightarrow x=\frac{۶}{۹۳}\ \ \text{رم}\ \ \text{ک}$$

۱۰ : خط ک متروی ت ران ب طول ۶۰ ک تر دا تجر ش را ب فر د اه ب ال ا ا خمینـی(ره) متصـ ک د. برای انجا ک آز ا ش، قطار سر ش ال ب ج ب ا خط را با سرعت ثابت v ک تر بر ساعت بد ت قف در ا ستا ا ا ط ک د. ا ر در سر ج ب ب ش ال از سرعت ت سط قط ار بـه م زان ۱۰ ک تر بر ساعت کاست ش د ز ان باز شت ن ساعت طولان تر از ز ا رفت خوا د ش د. م دت ز ا رفت بر شت ا قطار را حاسب ک د.

حل : با ت جه ب ص رت سئل واضح است ک ز ا رفت قطار برابر $\frac{۶۰}{v}$ ز ان بر شت آن $\frac{۶۰}{v-۱۰}$ است.

ه چن اخت ف ز ان رفت بر شت ن ساعت $(\frac{۱}{۲})$ می باشد. لذا توان ن شت:

$$\frac{۶۰}{v-۱۰}-\frac{۶۰}{v}=\frac{۱}{۲}$$

اکن ا عادل را حـ کنیم.

$$\frac{۶۰}{v-۱۰}-\frac{۶۰}{v}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times ۲v(v-۱۰)}۱۲۰v-۱۲۰(v-۱۰)=v(v-۱۰)$$

$$\rightarrow ۱۲۰v-۱۲۰v+۱۲۰۰=v^{۲}-۱۰v\rightarrow v^{۲}-۱۰v-۱۲۰۰=۰$$

$$\rightarrow (v-۴۰)(v+۳۰)=۰\rightarrow v=۴۰ \quad \text{و} \quad v=-۳۰\ (\text{غ ر قاب قبول})$$

لذا بر اساس ا سئ ع ش د که ز ا رفت قط ار براب ر $\frac{۶۰}{v}=\frac{۶۰}{۴۰}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$ س اعت و ز ان بر شت آن ، برابر $\frac{۶۰}{v-۱۰}=\frac{۶۰}{۴۰-۱۰}=\frac{۶۰}{۳۰}=۲$ ساعت است.

۱۱ : دب ر راض آر ا ر فت ک آزمون ۱۰ ا تازی بر زار ک د. پس از ۵ فت آر ا ج عاً ۳۶ ا تاز کسب کرده ب د. یع ان ر آزم ا در پ ج فتهٔ اوّل ب ص رت ز ر ب د.

$$\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

او از فتهٔ شش ب بعد در ت ا آز ا ا تاز ۹ را کسب کرد. ب ط ر ک انگ ا ت از ک آزمـون ها ش برابر ۸ شد. حساب ک د که از فتهٔ ششم به بعد آر ا در چ د آز توال ن رهٔ ۹ رفته است؟

حل : ابتدا ال   زیر را تشک   دهیم.

شماره‌ی آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	....	؟
امتیاز کسب شده	۳۶					۹	....	۹
میانگین	۷/۲					۹		

ر ک آر ا در بعد از فته‌ی پنج در n آز   شرکت کرده باشد. پس تعداد ک آز   ا آر ان

برابر $n+5$ شد. از طرفی کل امتیاز ا کسب شد ت سط او برابر $9n+36$ خوا د شد. لذا انگین

کل امتیاز ا آر ا   شد، $\frac{9n+36}{5+n}$ ک طبق سئل برابر ۸ است. پس داریم.

$$\frac{9n+36}{5+n}=8 \to 9n+36=40+8n \to n=4$$

یع   آر ان بعد از فته‌ی پنج فقط در ۴ آز   شرکت کرده است.

۱۲ : ا ر د اش   چ   زنی با   کار ک د   تواند در ۴ ساعت چ ک ز   را ک تا ک د. با فرض

ا ک سرعت کار کی از آن ا دو برابر د   ری باشد، ر ک ب ت   ا در چ د ساعت   تواند ا   ک ار را

انجا د د؟

حل : گ ر ک   اش   سر تر A دیگری B باشد. ا ر ز ان انجا کار ت سط اشین A برابر t باشد ز ان

انجا کار ت سط اشین B ساوی $2t$ است. با ت جه ب ص رت سئ   توان ن شت:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{2t}=\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 4t} 4+2=t \to t=6$$

$\to t=6$ ز ا   رد نیاز برا   اشین A برا کار ب ت ایی

$\to 2t=2(6)=12$ ز ا   رد نیاز برا   اشین B برا کار ب ت ایی

۱۳ : عل ب   را چ د نفر از د ستا خ د ا ان ک جلد‌ی ادبی ۱۶ صفحه ای را   تشر   ک د. پس از

حر ف چ   طالب، ا   عمولاً ۲ ساعت برا   را ش ادب   ج   قت صرف   ک د. ا ر رضا ب ا   ک   ک

ک د کار   را ش حد د ۱ ساعت و ۲۰ دق قه ب طول می انجا د. حساب ک د که ا ر رضا بخوا د ب ت   ایی

کار   را ش ک   ج   را انجا د د، ن از د چ   ز ا   قت ن از دارد؟

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{120}=\frac{1}{80} \xrightarrow{\times 240r} 240+2r=3r \to r=240 \text{ min}$$

قسمت دوّم : معادلات رادیکالی

هر عادلا ک در آ   تغ ر عادل در ز ر راد کال (با فرجه‌ی دوّم) باشد را   ک عادله‌ی شا   عبارت اصم یا راد کالی می نا د. مانند عاد ت ز ر :

الف) $۱+\sqrt{x+۲}=x-۳$ ب) $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴}$

برا ح چ   عاد ت   در ک رحله‌ی اسب طرف   عادل را ب توان ۲   رسانـ   تا ک عادلـه‌ی بدون راد کال ب دست آ د. سپس ا   عادل را ح   کنیم. در ن ا ت جوابی از عادل را   پذ ر   که الف : به ازا آ   عبارت ز ر راد کا   فی نباشد.   ب : معادل ب ازا آن برقرار باشد.

مثال : معادله‌ی ز ر را ح   ک د.

$$۱+\sqrt{x+۲}=x-۳$$

حل:

$$۱+\sqrt{x+۲}=x-۳\rightarrow\sqrt{x+۲}=x-۴\rightarrow(\sqrt{x+۲})^۲=(x-۴)^۲$$

$$\rightarrow x+۲=x^۲-۸x+۱۶$$

$$\rightarrow x^۲-۹x+۱۴=۰\rightarrow(x-۷)(x-۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۷\\x=۲\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱۴ : هر ک از عاد ت ز ر را ح   ک د.

۱) $\sqrt{۵m-۱}+۳=۰$ ۴) $۲\sqrt{۳-۲x}+x=۳$

۲) $\sqrt{۳x-۵}=\sqrt{x-۲}+۱$ ۵) $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲x-۸۰}}=۵$

۳) $\sqrt{۲+\sqrt{x-۵}}=\sqrt{۱۳-x}$ ۶) $\dfrac{۱}{\sqrt{u-۳}}-\dfrac{۲}{\sqrt{u}}=۰$

۱۵ : عدد   پ دا ک د ک   حاص   ج ع آن با جذرش برابر۶ ش د.

۱۶ : بد   ح   ت ضح د   د ک چرا عادل   ا   ز ر فاقد جواب حق قی می باش د.

الف) $\sqrt{t}+۲=۰$ ب) $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x-۳}+۱=۰$ ج) $\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۲}=۰$

۱۷: قدار k را از تساو قابـ حساب ک د. $v=\sqrt{\frac{۲k}{m}}$

۱۸ : عادله ا شا جـ ع د عبارت راد کالی بـ سـ د کـ عدد ۱ کی از ر شـ ا آن باشد. مسئ چ د جواب دارد.

***

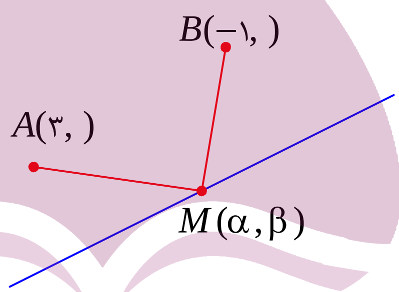
حل چند مسئله‌ی کاربردی

۱۹ : نقطه ا ر خط $y=۲x+۱$ بـا بـ د که از دو نقطه‌ی $A(۳,\ )$ و $B(-۱,\ )$ بـ ک فاصله باشد.

حل : فرض ک کـه $M(\alpha,\beta)$ نقطـه‌ی رد نظر باشـ د. چـ ا نقط ر خـ ط $y=۲x+۱$

پس $\beta=۲\alpha+۱$

از طرفی



$MA=MB$

$\rightarrow\sqrt{(x_A-x_M)^۲+(y_A-y_M)^۲}=\sqrt{(x_B-x_M)^۲+(y_B-y_M)^۲}$

$\rightarrow(۳-\alpha)^۲+(۰-\beta)^۲=(-۱-\alpha)^۲+(۰-\beta)^۲$

$\rightarrow۹-۶\alpha+\alpha^۲+\beta^۲=۱+۲\alpha+\alpha^۲+\beta^۲\rightarrow۹-۶\alpha=۱+۲\alpha\rightarrow\alpha=۱$

$\xrightarrow{\beta=۲\alpha+۱}\beta=۲(۱)+۱=۳$

$$\therefore\quad M(۱,۳)$$

۲۰: دانش آ زا ک س سـ دبـ ر حسابا را از ا پرسـ دند. گفت : وقتـ فرزندم بـ دنـ ا آ د، مـن ۳۰ سـ ال داشتم اکـ سن ا جذر سن من است. حا شـ ا سـ را حساب ک د؟

حل : ا ر سـ دبـ ر حسابان x باشد سـ فرزند او $x-۳۰$ خوا د بـ د. لذا توان نـ شت:

$$\sqrt{x}=x-۳۰$$

$$\rightarrow x=(x-۳۰)^۲ \rightarrow x=x^۲-۶۰x+۹۰۰ \rightarrow x^۲-۶۱x+۹۰۰=۰$$

$$\rightarrow (x-۳۶)(x-۲۵)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۳۶ \\ x=۲۵ \end{cases}$$

ک جواب $x=۲۵$ قابـ قبول نـ ست. (چرا؟)

۲۱ : ا ر ک ئ از با ساختمانی بـ ارتفاع ۵۰ تر سقـ ط آزاد کـ د پس از t ثانـ در ارتفاع h متری از سطح ز قرار خوا د داشت. ا ر $t=\sqrt{۱۰-\frac{h}{۵}}$ حساب کـ د که ا جسـ د ثانـ پس از سقـ ط در چه ارتفاعی نسبت بـ سطح ز قرار ـرد.

حل :

$$t=\sqrt{۱۰-\frac{h}{۵}} \xrightarrow{t=۲} ۲=\sqrt{۱۰-\frac{h}{۵}} \rightarrow ۴=۱۰-\frac{h}{۵} \rightarrow -۶=-\frac{h}{۵} \rightarrow h=۳۰ \quad m$$

***

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

:

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم «رشته ی علوم تجربی»

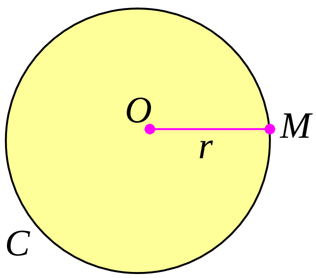
فصل ۲ : هندسه

مهر ۱۳۹۶

درس اوّل : ترسیم های هندسی

آشنایی با فا   دسی برا   اد ر   درک ع ق د   ر فا   ر اضات مـوثر است. در ا   فصل ، برخی از فا   قد ات   دسه بررس   کنیم.

قسمت اوّل : دایره



دا ر   ج   عه نقاطی از صفحه است که از ک نقطه‌ی ثابت ب   ک فاصله باشد. نقطه‌ی ثابت را   رکز   فاصله‌ی ثابت را شعاع می نا د. دا ره ب   رکز O شعاع r را ب   ص رت $C(O,r)$ ن ا ش   د   د.

تمرین ۱ : دا ره ای   شعاع ۲ سانت   رس   ک   د. سپس

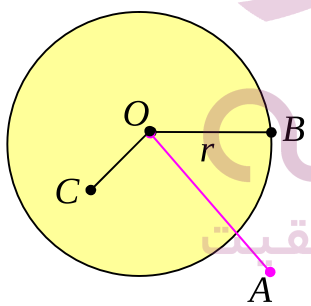
الف : نقطه ا   تع   ک   د ک فاصله‌ی آ تا مرکز دا ره ۳ سانت   تر باشد.

ب : نقطه ا   تع   ک   د ک فاصله‌ی آ   تا رکز دا ره ۱/۵ سانت   تر باشد.

ج : نقطه ا   تع   ک   د ک فاصله‌ی آ   تا رکز دا ره ۲ سانت   تر باشد.

نتیجه : ر دا ر صفح   را ب   سه بخش جزا تقس   ک د.

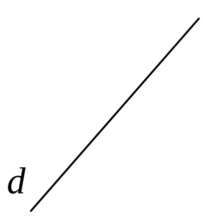
الف: نقاط خارج دا ره: فاصله‌ی این نقاط تا   رکز دا ره از شعاع بزر تر است. ($OA > r$)



ب: نقاط ر   دا ره: فاصله‌ی ا   نقاط تا   رکز دا ره برابر شعاع است. ($OB = r$)

ج: نقاط داخ   دا ره: فاصله‌ی ا   نقاط تا   رکز دا ره از شعاع ک چکتر است. ($OC < r$)

تمرین برای حل :



۲ : خط d در شکل مقابل را در نظر ب   ر د. ت ام نقاط   که ب   فاصله‌ی ۲ سانت   تر از خط d ست د را شخص ک د. این نقاط چ   شکل   ا شکل   ها را تشک   د   د؟

۳ : نقطه‌ی P بـ فاصله‌ی ۱ سانت تر از خط d قرار دارد.

الف : تـ ام نقاط که بـ فاصله‌ی ۲ سانت تر از نقطه‌ی P ستـ د را شخص کـ د.

ب : تـ ام نقاطی از خط d را که بـ فاصله‌ی ۲ سانت تر از P ستـ د را تعـ کـ د.

۴ : پار خط AB بـ طول ۵ سانت تر در نظر بـ رید. سپس نقاط را تعـ کـ د که از A بـ فاصله‌ی ۴ سانت تر و از B بـ فاصله‌ی ۵ سانت تر باشـ د. (مسئـ چـ د جواب دارد؟)

۵ : ثـ ث رسـ کـ د کـ طو اضـ ع آن ۴ و ۵ و ۷ سانت تر باشـ د.

***

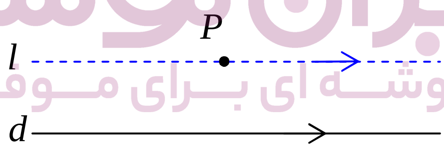
قسمت دوّم : مفهوم اصل :

هر واقعـ ت که بد بـ ده نـ از د استدلال نباشد را اصل می نا د. برا ثال به اصول زـ ر تـ جـ کـ د.

اصل۱ : از ـک نقط ر صفحه، چـ د خط ذرد.

اصل ۲ : از ر دو نقطه‌ی تـ ا ز روی صفح فقط فقط ـک خط راست ذرد.

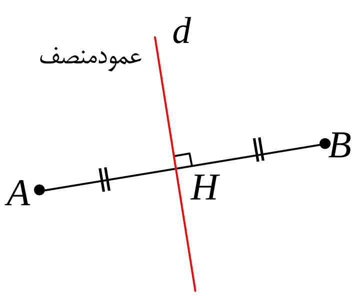
اصل ۳ : از ر نقطه‌ی خارج ـک خط راست فقط فقط ـک خط راست واز آ توا رسـ کرد.



***

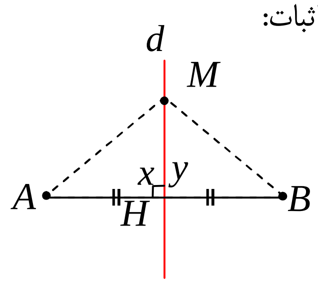
قسمت سوّم : عمود منصف پاره خط و خواص آن

هر خط که از نقطه‌ی وسط ـک پار خط بـ ذرد عـ د بر آن باشد را عـ د صف آن پار خط می‌نا د.



تمرین۶ : ثابت کـ د که هر نقط کـ ر ع د صف ک پار خط قرار دارد، از د سر آ پار خط به یک فاصله است.

اثبات:

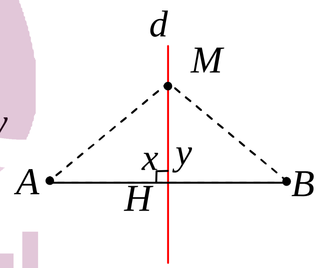


$$\left.\begin{array}{ll} MH = MH & \text{مشترک} \\ \angle x = \angle y = ۹۰^\circ & \\ AH = BH & \end{array}\right\} \to \underset{(\text{ض‌زض})}{\overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}} \to MA = MB$$

***

تمرین۷ : ا ر نقطه‌ای از د سر ک پاره‌خط ب ک فاصلـ باشد آن نقط ر ع د صف پار خط قرار دارد.

اثبات : از نقطه ی M خط چ ا رسم می‌ک که از نقطه ی وسط پاره‌خط AB ب ذرد. پس:



$$\left.\begin{array}{ll} MA = MB & \text{طبق فرض} \\ MH = MH & \text{مشترک} \\ AH = BH & \end{array}\right\} \to \underset{(\text{ض ض ض})}{\overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}} \to \angle x = \angle y$$

از طرف طبق اصـ زاویه‌ی ن صفحه، واضح است که $\angle x + \angle y = ۱۸۰^\circ$ پس:

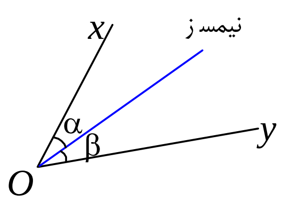
$\angle x = \angle y = ۹۰^\circ \to d \perp AB$

و چون $AH = BH$ و $d \perp AB$ پس d ع د صف AB است.

***

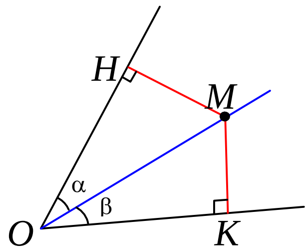
قسمت چهارم : نیمساز زاویه

تعر ف : ن ساز زا خطی است که از رأس زاویه می‌گذرد آ را ب دو زاویه‌ی سا تقسیم می‌ک د.



$\angle \alpha = \angle \beta$

تمرین۸ : ر اه نقطه‌ای از د ضع زاویه‌ای ب ک فاصل باشد آن نقطه روی ن ساز زا قرار دارد.



فرض : $MH = MK$

حکم : $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

اثبات : د ث OMH و OMK قائم‌الزا ست د پس

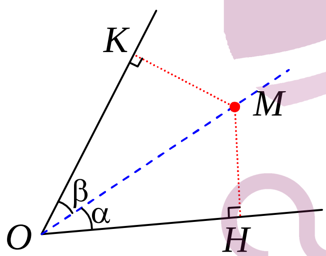
$$\left.\begin{array}{l} MH = MK \\ \text{مشترك} \quad OM = OM \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK} \rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

(وتر ک ضع)

تمرین۹ : ر نقط رو ن ساز ک زاو از د ضع آ زاو ب ک فاصله است.

حکم : $MK = MH$

اثبات : د ث $\overset{\Delta}{OHM}$ و $\overset{\Delta}{OKM}$ قائم‌الزا ست د. پس :



$$\left.\begin{array}{l} \angle\alpha = \angle\beta \\ \text{وتر مشترک} \quad OM = OM \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK} \rightarrow MH = MK$$

(وتر ک اویه‌ح ده)

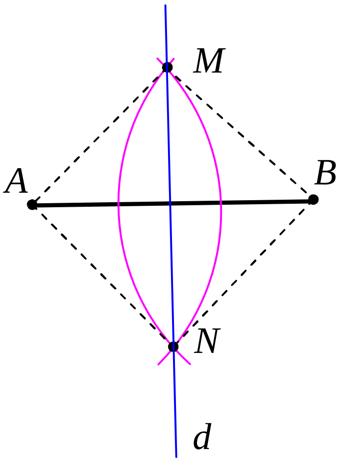
***

قسمت پنجم : آشنایی با چند ترسیم هندسی

گاهی برا ح سائ ختف زم است از ترس ا دسی استفاد ش د. بد ع ک در اینگونه مسائ شک ا را رس ک ک دارا ژ عی باش د بعد از ترسیم با استفاده از ژ ای شکل ب پاسخ سئ رسیم. ت ج داشته باش که ابزار ا رد استفاد در ا ون سائ فقط خط کش

و پر ار[1] می باش د. از خط کش برا   رس   خط راست   از پر ار برا   رس   دا ره با شعاع عی   استفاده می ش د.

۱ : روش رسم عمود منصف یک پاره خط



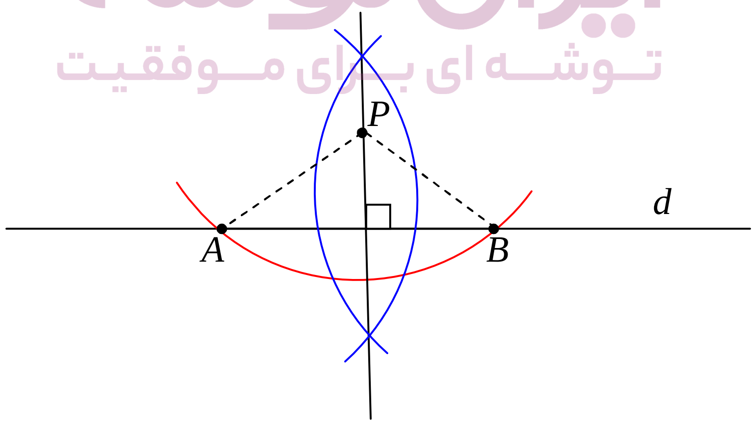
ابتدا پر ار را ب اندازه ا   باز   ک   ک شعاع آن از نصف ط   پاره خط ب شتر باشد سپس از د سر پار   خط AB د ک ان با شعاع   ای مسا   رس   کرد تا ا   د ک ا   د   ر را در نقاط M و N قطع ک د. چ   دو نقطه‌ی M و N از د سر پار   خط AB ب   ک   فاصله اند. پس ر   ع   د   صف AB قرار دارند. لذا خط   ذرا از این دو نقط   عنی d ع   د   صف AB است.

تمرین ۱۰ : ابتدا   ک پار   خط ب طول ۴ سانت   تر بکش د سپس ب   ک ک خط کش   پر ار ع   د   صف آ   را رس   ک د.

***

۲ : رسم خطی عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه‌ی خارج آن

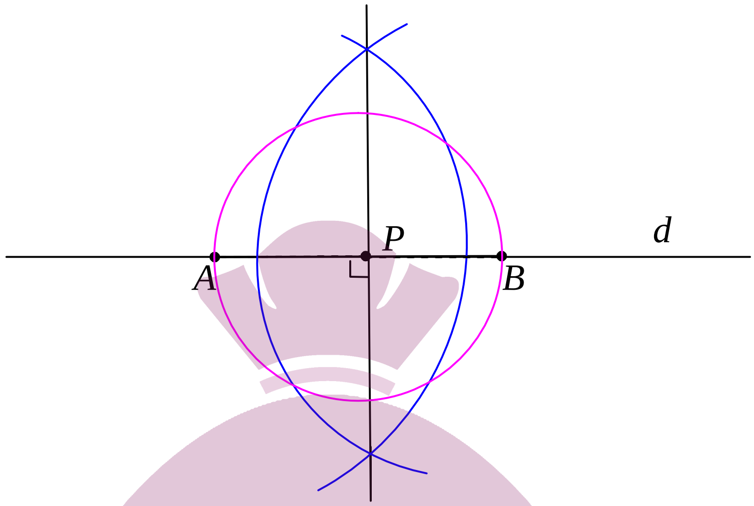
از نقطه‌ی P ک ک ا   را ط ر   رس   ک   ک خط d را در نقاط A و B قطع ک د. اک   ع   د   م صف پار   خط AB را رس   ک   ک جواب   سئله است.



1. خط کش غ ر   درج فرض   ش د   ر آ که ا داز   پار   خط ق د ش د.

۳ : رسم خطی عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه‌ی روی آن

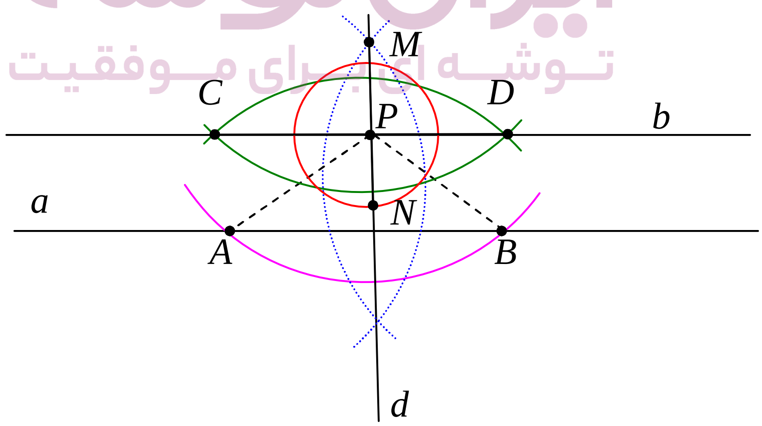
ب رکز نقطه‌ی P دا ره ا رسم کرد تا خط d را در نقاط A و B قطع ک د. اک ع د صف پار خط AB را رس ک ک جواب سئله است.



***

۴ : رسم خط موازی یک خط داده شده از یک نقطه‌ی خارج آن

ابتدا از نقطه‌ی P واقع در خارج خط a ک خط از ن d ع د بر a رس کنیم. ا خط از نقطه‌ی P م ذرد. اکن از نقطه ی P واقع بر d خط b را ع د بر d رس کنیم. چون $a \perp d$ و $b \perp d$ پس $a \| b$ و لذا b جواب سئله است.

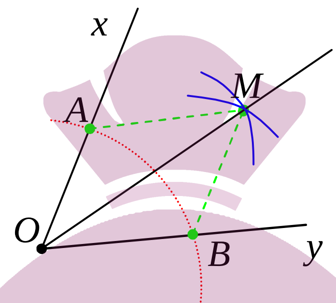


***

۵ : رسم نیمساز یک زاویه

از رأس زاویه‌ی xOy ک ک ا را ط ر رس ک که اض ع زا را در نقاط A و B قطع ک د.

اکنون از نقاط A و B د ک ان با شعاع سا رس ک ک د ر را در نقطه ا ان د M قطع ک د. چ د ث OAM و OBM ب حالت (ض ض ض) ه شت ست د. لذا $\angle AOM = \angle BOM$ عنی OM ن ساز زاویه ی xOy م باشد جواب سئله است.

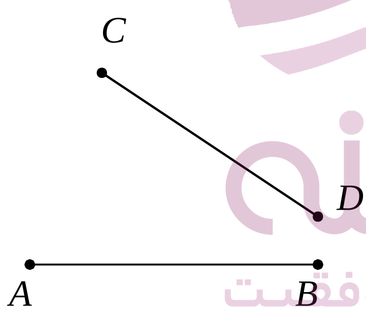


❋❋❋

تمرین برای حل :

۱۱ : د پاره خط AB و CD طابق شکل مقابل داد شده از د.

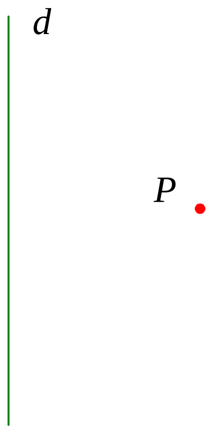
نقطه ا ب اب د که از دو نقطه‌ی A و B ب ک فاصل از دو نقطه-ی C و D ن ز ب ک فاصله باشد.



۱۲ : مث ث دلخوا رس ک د آ را ABC ب ا د. ع د صف ها د ضع ا ث را رس ک د نقطه‌ی برخ رد آن ا را O ب ا د. ب رکز O و ب شعاع OA ک دا ر رس ک د. نقاط B و C نسبت به ا دا ر چ ضع ت دارند چرا؟

۱۳ : مث ث دلخوا رس ک د آ را ABC ب ا د. ن ساز ا د زاویـه‌ی ا ث را رس ک د و نقطه‌ی برخ رد آن ا را O ب ا د. از نقطه‌ی O بر س ضع ث ع د رس ک د پا کی از ع د ا را H ب ا د. ب رکز O و ب شعاع OH دا ره ا رس ک د. اض ع ث ABC نسبت ب ا دا ر چـه وضع ت دارند چرا؟

۱۴ : فرض ک د نقطه‌ی P ب فاصله‌ی ۴ سانت تر از خط d باشد. در ر رد ر ش رسـ ک ث ث تساو الساق که نقطه‌ی P ک رأس باش د را ت ض ح د د.



الف) قاعده‌ی ا ث بر خط d طبق باشد.

ب) قاعده‌ی ا ث بر خط d طبق ب ده و ط ساق آن ۶ سانت تر باشد.

ج) قاعده‌ی ا ث بر خط d طبق ب د ساحت آن ۸ سانت تر ربع باشد.

۱۵: سه نقطه‌ی غ ر اقع بر ک خط راست در نظر ب ر د سپس نقطه ا پ دا ک د که از ا سه نقطه به یک فاصله باشد. (ر ش کار را ت ض ح د د.)

درس دوّم : مقدمات استدلال و قضیه ی تالس

در ا درس ابتدا با مفه نسبت ت اسب چند استدلا انواع آ آش ا شـویم. س پس ب ا ب ان

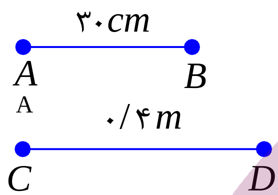
و ژ خط ط ازی و قضیه‌ی تالس کاربرد ا آن، این مفا را ب ص رت دق ق بررسی می کنیم.

قسمت اوّل : نسبت و تناسب

نسبت د ک ت کسری است ک ص رت خرج آن اندازه‌ها آ د ک ت برحسب ک واحد باش د.

مثلاً : کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت a بر b گ د ر اه b و a برحسب ک واحد باش د.

مثال : نسبت انداز پار خط AB بر پار خط CD را با ت جه ب شک قابل ب س د.



$$\frac{AB}{CD}=\frac{۳۰}{۴۰}=\frac{۳}{۴}$$

نت جه : نسبت د ک ت ک عدد حق قی است ب واحد اندازه‌گ ر آن ا بستگی ندارد.

ب ا تسا دو نسبت را ت اسب گوی د.

مثلاً : تسا دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، $b,d\neq ۰$ را ک ت اسب   د.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

در ک ت اسب انذ ت اسب ف ق ج ت d و a را طرفین (ج ت ک اری) و c و b را سطین (ج ت

م انی) می‌نا د.

ج ت انی $\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad$ ج ت ک اری

خاصیت اصلی تناسب

در ر ت اسب حاص ضرب د جمله‌ی ک اری با حاص ضرب د جمله‌ی انذ آن برابر است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow ad=bc$$

اثبات : چون $b,d \neq 0$ پس $bd \neq 0$. حا   کافی است د طرف تاسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در bd ضرب کنیم.

خوا   داشت :

$$bd\left(\frac{a}{b}\right)=bd\left(\frac{c}{d}\right)\rightarrow ad=bc$$

خواص دیگر تناسب

۱ : در ک تاسب می‌توا جا د جمله‌ی از   ا د جمله‌ی کار را ع ض کرد تاسب جد دی به دست آ رد. $(a,b,c,d \neq 0)$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{جابجايي جملات مياني}}\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{جابجايي جملات كناري}}\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow[\text{جابجايي جملات كناري}]{\text{جابجايي جملات مياني}}\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

نت جه: در ک تاسب می‌توا   ر دو نسبت را عک س کرد   تاسب جد دی ب دست آ رد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\qquad(a,b,c,d\neq 0)$$

۲ : در ک تاسب از ترک ب نسبت در ص رت (یا در خرج) تاسب جد د ب ج د می‌آ د. $(b,d \neq 0)$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{تركيب   نسبت در صورت}}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{تركيب   نسبت‌درمخرج}}\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

۳ : در ک تاسب ، نسبت جم ع ص رت ا ب جم ع خرج ا برابر ر ک از نسبت‌ها   تاسب است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\rightarrow\frac{a+c}{b+d}=k\qquad(b,d\neq 0)$$

ت جه : خاص ت ۳ برا   چ د نسبت ساو   ن ز قابل تعمیم است.

تمرین ۱ : با ت جه ب خواص ت اسب در ر رد جا خال را کا ک د.

الف) $\frac{5}{14}=\frac{15}{42}\to 5\times \dots =15\times \dots$

ب) $3\times 40=12\times 10\to \frac{3}{\dots}=\frac{12}{\dots}$

پ) $\frac{7}{10}=\frac{21}{30}\to \frac{10}{7}=\dots$

ت) $\frac{6}{11}=\frac{18}{33}\to \frac{6}{18}=\dots \ , \quad \frac{33}{11}=\dots$

ث) $\frac{4}{14}=\frac{10}{35}\to \frac{18}{14}=\dots \ , \quad \frac{4}{18}=\dots$

ج) $\frac{5}{12}=\frac{10}{24}\to \frac{-7}{12}=\dots \ , \quad \frac{5}{-7}=\dots$

تمرین ۲ : ا ر $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ قدار $\frac{a+b}{a-b}$ را ب دست آ ر د.

حل :

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\to \frac{a+b}{b}=\frac{3+4}{4}\to \frac{a+b}{b}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\to \frac{a-b}{b}=\frac{3-4}{4}\to \frac{a-b}{b}=\frac{-1}{4}$$

$$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{-1}{4}}=\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=-7$$

تمرین برای حل :

۳ : در ر رد قدار جه را ب اب د.

الف) $\frac{x}{3}=\frac{9}{10}$ ب) $\frac{y}{y+2}=\frac{3}{4}$ ج) $\frac{z+1}{z}=\frac{4}{z}$ د) $\frac{2a+1}{18}=\frac{35}{b}=\frac{5}{2}$

۴: حـ ط ستطیلی۲۱۰ سانتی‌متر نسبت طو ب عرض آن $\frac{۴}{۳}$ است. مساحت ا ستط را ب دست آ ر د.

۵: تـ اظر با تساوی ز ر ک ت اسب ب سـ د.

$$۵x+y=۲x+۷y$$

۶: ا ر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ حاصل $x+y+z$ را ب دست آ ر د.

۷: در هر رد قدار عددی $\frac{a}{b}$ را ب دست آ ر د.

الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$ ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

***

قسمت دوّم : استدلال در ریاضی و هندسه

استدلال و انواع آن

عمل ارائه‌ی دلیـ برای اثبات درستی یک زاره ب ک ک دانست ا قبلی را استدلال می نا د. ب ط ر کلی دو ن ع استد جـ د دارد.

الف: استدلال استقرایی :

ر ش نت جـ ر کلی بر ا تعداد حد د شا د را استدلا استقرایی می نا د.

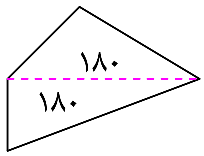
ب : استدلال استنتاجی :

ر ش نت جـ ر کلی بر ا حقا ق پذ رفته شد را استدلا استـ تاجی می نا د.

***

مثال : رحـ ا قد در رد جـ ع زا ا داخ ک چ ار ضـ ع حدب می کرد. آن ا فتـ د جـ ع زا ا داخ ر چ ار ضـ ع حدب ۳۶۰ درجه است استدلا که بکـ ار بردن د متفا ت ب د.

استدلال پژمان : در ت ا چ ارضع ایی از قبیل ربع ستطیل ز توازی ا ضـ ع با ت جـه بـه ا ک زا ا جا ر ک کد رند جـ ع زا ا داخلی ۳۶۰ درجه است، لذا جـ ع زا ای داخ ر چ ارضع حدب ۳۶۰ درجه است.



استدلال پیمان : با ت جه به ا ک جـ ع زا ا داخ ر ث ۱۸۰ درجـه است. لذا با رس ک قطر در ر چ ارضع حدب توا آ را ب د ث تبـدیل کرد. لذا مجـ ع زا ا داخلی چ ارضع حدب برابر جـ ع زا ا داخ ا د ث باشـ د، در نتـ جه برابر ۳۶۰ درجه است.

با ت جه ب تعر ف ارائ شده برای ا اع استدلال واضع است که استد پژ ان استقرای اس تد پ ان استـ تاجی است.(چرا؟)

تمرین ۸ : تفا ت ای ب از اع استد را ب سـ د.

حل:

استقرایی	ازجزءکل اس .	متکی بر تعد محدودی مشـ هده است.	تجر ی اس .	نتـ یج ن احتمالی اس .
استنتـ جی	ازکل به جزءاس .	متکی بر حق یق پذیرفته شده اس .	منطقی اس .	نتـ یج قطعی اس .

توجه : چو استدلا استقرا بتنـ بر تجربه ب د ت ا حا ت ک را بررسی نـ کـ د پس نتا ج بدست آ ده از آ قطعی نـ ست ول در استدلا استـ تاجی نتا ج بدست آ ده وار قطع ستـ د ز را این استد بتنی بر حقا ق ب د تجربی نمی باشد.

***

مثال نقض : نتا ج بدست آ ده از استدلا استقرا قطعی نـ ستـ د ا قاب رد ستـ د. برا رد ک نتـ جـ ک که از استدلا استقرای بدست آ د، ارائه‌ی ک ثال نقض کافی است. مثال نقض ثالی است که نشا د د ک نتـ جـ ری کلا نادرست است.

مثال : زاره‌ی ز ر را در نظر ب ر د.

حاصـ جـ ع ر د عدد گ ک عدد گ است.

ا زار درست نست ز را اعداد $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ ر د گ ستد ول حاص ج ع آن ا برابر صفر است ک ک عدد ا می باشد.

$$(\sqrt{۲})+(-\sqrt{۲})=۰$$

تمرین۹ : با ک ثال نقض زار ا ز ر را رد ک د.

الف : مربع ر عدد بزر تر ا سا آ عدد است.

ب : حاص عبارت $p=x^{۲}+x+۴۱$ به ازا اعداد طب عی وار ک عدد اوّل است.

حل:

الف: ا زاره نادرست است ز را: $(۰/۵)^{۲}=۰/۲۵$ در حال که $۰/۵ \ngtr ۰/۲۵$

ب: ا زاره نادرست است ز را ا ر عدد ۴۱ را ب جای x قرار د حاصل ۱۷۶۳ ش د ک ع دد اوّل نست. (بر۴۱ بخش پذ ر است.)

***

تمرین برای حل : برا رد درست ر ک از زار ا ک ز ر ک ثال نقض ارائ کنید.

۱۰ : از ص کرد ر س رأس ک فت ضع تظ ک ث تساوی الساق تشک ردد.

۱۱ : ر د ث ک ساحت ای برابر داشته باش د، هم ن شت ست د.

۱۲ : در ر ث ر ارتفاع از ر کدام از س ضع ث ک چکتر است.

۱۳ : همه‌ی اعداد اوّ فرد ست د.

۱۴ : چ عدد ا ّ بزر تر از ۱۲۷ ج د ندارد.

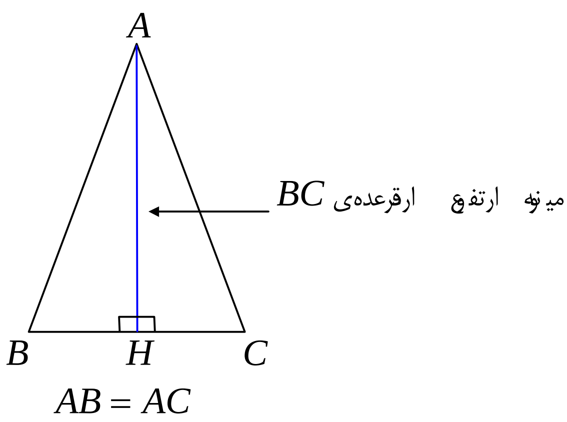
نتیجه : برا پذ رفتن درست ک زار زم است استد کرد ا استدلا با د استنتاجی باشد ولی برا رد درست ک زاره ارائه‌ی ک ثال نقض کافی است.

تمرین۱۵ : از د زاره‌ی ز ر آنک درست است ثابت ک د آنکه نادرست است با یک ثال نقض رد ک د.

الف : در ر ث انه‌ی ارد بر ک ضع از ارتفاع نظ ر ا ضع بزر تر است.

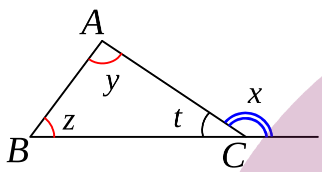
ب : در ر ث اندازه‌ی ر زاویه‌ی خارجی برابر ج ع د زاویه‌ی داخ غ ر جا ر آن است.

حل:



الف: ا   زاره نادرست است ز را در   ث
متساو   الساقین[1]   انه و ارتفاع ارد بر قاعده
بر   طبق ستد لذا با   سا   د.

ب: ا   زار درست است. برای اثبات آن از تعر ف زاویه‌ی خارج   چ   ج   ع زا   ا   داخلی
استفاد   کنیم.



$$\left.\begin{array}{r} x+t=۱۸۰ \\ y+z+t=۱۸۰ \end{array}\right\} \rightarrow x+t=y+z+t \rightarrow x=y+z$$

***

مفهوم قضیه

هر   زاره‌ی درست   ک   که ب ک ک استدلا   استنتاجی بدست   آ د را **قضیه** می نا   د.

مثال:

۱: در   ر   ث قائم الزا   ربع تر با   ج   ع ربعات د   ضع د   ر برابر است.

۲: مج   ع زا   ا   داخ   ر   ث ۱۸۰ درجه است.

۳: در   ر   ث   ج   ع انداز   ا   ر د   ضع از اندازه‌ی ضع سوّ   بزر تر است.

۴: برا   ر د   عدد حق ق   ثبت x و y همواره $\frac{x+y}{۲} \ge \sqrt{xy}$ است.

۵: برا   ر د   ج   عه‌ی A و B همواره $A-B=A\bigcap B'$

1. در   ث   تساو   ا   ض ع   از   ارتفاع ت ام اض ع بر   طبق ستد.

هر قضـ را توا بـ صـ رت کـ زاره‌ی رکب که بـ صـ رت ترکـ ب شرطی بـ ا شـ د. بـ ابرا دارای

د قسـ ت می باشد:

الف) فرض (شرط) : آ قسـ ت از زاره است کـ آ را پذ ریم.

ب) حکم (جواب شرط) : آ قسـ ت از زاره است که با د درست آ را نتـ جه بـ ریم.

بـ ابرا ر قضـ دارای الـ بـ صـ رت ز ر است.

قضیه : ا ر .... آ اه ....

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{فرض } (p)}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{حکم } (q)}$

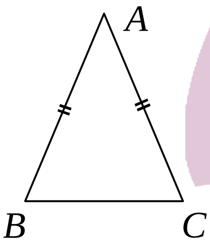
مثال : قضیه‌ی ز ر را در نظر بـ ر د.

قضیه : در ر ث تساوی‌الساق د زاویه‌ی جا ر بـ قاعد سا د.

گرچه ا قضیـ بـ ظا ر زار شرطی نـ ست ولی می‌توا بـ سادگی آ را بـ شکـ ز ر نـ شت.

ا ر ث تساوی‌الساقی باشد آ ا د زاویه‌ی جا ر بـ قاعد آ سا د.

$\underbrace{\text{ا ر ث تساوی‌الساقی باشد}}_{\text{فرض}}$ $\underbrace{\text{د زاویه‌ی جا ر بـ قاعد آ سا د}}_{\text{حکم}}$



فرض : $AB = AC$

حکم : $\angle B = \angle C$

تمرین۱۶ : قضیه‌ها ز ر را بـ صـ رت شرطی بـ ا کـ د فرض حکـ آ ا را شخص کـ د.

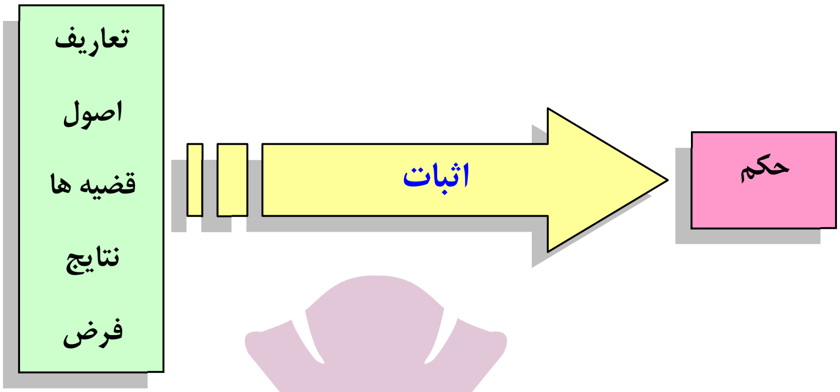
الف : ر د زاویه‌ی تقابل بـ رأس سا د.

ب : ر د زاویه‌ی سا کـ ا سا دارند.

ج : جـ ع زاویه‌ها داخـ ر ث ۱۸۰ درجه است.

د : در ر ث قائم‌الزا ربع تر با جـ ع ربعات د ضـ ع د ر برابر است.

قضیه‌ها در ریاضی هندسه باید اثبات شوند، به عبارتی دیگر بر درستی آنها باید استدلال کرد. هر کجا مرحله به مرحله منطقی که به کمک استدلال استنتاجی منجر به رسیدن به حکم قضیه شود را اثبات قضیه گویند.



بدیهی است که تشخیص فرض و حکم هر قضیه برای اثبات آن قضیه مهم است. اولّاً در اثبات هر قضیه تعیین فرض و حکم آن است. آخرین مرحله در اثبات هر قضیه رسیدن به حکم آن است.

***

قضیه‌ی عکس: اگر جای فرض و حکم یک قضیه را جابجا کنیم یک گزاره‌ی شرطی جدید بدست می‌آید که آن را عکس قضیه می نامیم. عکس قضیه ممکن است درست یا ممکن است نادرست باشد. درصورتی که عکس یک قضیه درست باشد آن را قضیه‌ی عکس می نامند.

مثال :

قضیه : اگر مثلثی متساوی الساقین باشد آنگاه در آن زاویه‌های مجاور به قاعده مساوی‌اند.

قضیه‌ی عکس : اگر در مثلثی دو زاویه مساوی باشند آنگاه آن مثلث متساوی الساقین است.

در مثال فوق عکس قضیه‌ی داده شده درست است لذا خود یک قضیه می باشد. در مثال زیر عکس قضیه درست نیست.

مثال:

قضیه : اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند آنگاه آن دو زاویه مساوی‌اند.

عکس قضیه : اگر دو زاویه مساوی باشند آنگاه آن دو زاویه متقابل به رأس هستند.

تمرین۱۷ : عکس   ر ک از قض   ا   ز ر را ب   س د.

الف) ا ر ک چ ارضع   توازی ا ض ع باشد آن ا قطر ا ش کد   ر را نصف   ک د.

ب) ا ر د ضع از ک   ث ب ا   برابر باش د آن اه ارتفاع   ای   ارد بر آ   د   ضع ن ز با هم برابرند.

ج) ا ر در   ث   س   ضع برابر باش د آن ا   س   زاویه‌ی آن ن ز برابر خوا   د ب د.

***

قضیه‌ی دو شرطی : ا ر عکس   ک قضیه‌ی شرط   خ د   ک قضیه‌ی شرطی باشد. ب   ک ک   کی از الگو ها   ز ر   توا   آ   د   قض   را ترک ب کرد   ب   ص رت   ک قضی ب ان ن   د. ا   قض   را قضیه‌ی دو شرطی می نا   د.

- ❊ ا ر p آن اه q و برعکس
- ❊ p ا ر   ت ا ا ر q
- ❊ p شرط   ز   کافی است برای q

مثال :

قضیه: ا ر   ث   قائم الزاو   باشد آن ا   ربع   تر با ج   ع   ربعات د ضع د   ر آن برابر است.

قضیه‌ی عکس : ا ر در   ث   ربع   ک ضع با ج م ع   ربعات د ضع د   ر برابر باشد آن ا آ   ث   قائم الزاویه است.

قضیه‌ی دو شرطی:

- ❊ ا ر   ث   قائم الزاو   باشد، آن اه   ربع   تر با ج   ع   ربعات د ضع د   ر آن برابر است و برعکس.
- ❊ م ث قائم الزاو   است ا ر و ت ا ا ر   ربع   تر با ج   ع   ربعات د ضع د   ر آن برابر باشد.
- ❊ قائم الزاو   ب د   ث شرط لاز   کافی است برای ا ک   ربع   تر با ج   ع   ربعات د ضع د   ر برابر باشد.

مثال :   ر ک از قض   ا   ز ر د شرط   ست د.

الف) د ضع از ک   ث برابرند، ا ر   ت ا ا ر زا   ا   روبر ب   ا   د ضع ب ا   برابر باش د.

ب) در   ث   تساو   ا   ض   ع   ک پار خط ن   ساز است، ا ر   ت ا ا ر   انه باشد.

تمرین برای حل : قض ا ز ر را در نظر ب ر د. سپس :

الف : عکس ر کدا را ب سد.

ب : با ترکب قض عکس آ ک قضیه‌ی د شرطی ب ا ک د.

۱۸ : در ر ث ا ر د ضع برابر باشد، د زاویه‌ی روبر ب آن ا نز برابرند.

۱۹ : ا ر ک چ ارضعی ل زی باشد قطر ا ش ع د صف کد رند.

۲۰ : در ر ث، ا ر س ضع برابر باشد آن ا س زاو نز با هم برابرند.

۲۱ : ا ر د دا ر شعاع ای برابر داشته باشد آن ا ساحت ا آن ا نز برابر ستند.

توجه : برای اثبات ک قضیه‌ی د شرطی با د قض ا تشک د دهی آ را جدا ان ثابت کرد. یعن ابتدا فرض حک را تع ک قض را ثابت کنیم. سپس با جابجا کرد فرض حک قضیه‌ی عکس را نز اثبات کرد.

***

عکس نقیض یک قضیه : ا ر فرض حک قضیه ای را جابجا نقض ک زاره‌ی حاصل همواره درست خوا د ب د. ا زار را قضیه‌ی عکس نقض می نا د.

مثال :

قضیه: ا ر ث قائم الزاو باشد آن ا ربع تر با ج ع ربعات د ضع د ر آن برابر است.

قضیه‌ی عکس نقیض : ا ر در ث ربع ک ضع با ج ع ربعات دو ضع د ر برابر نباشد آن اه آ ث قائم الزاویه نست.

توجه : اثبات ک قضیه ب عن اثبات عکس نقض آن باشد ضر رتی ب اثبات عکس نقض آن نست.

***

برهان خلف (اثبات غیر مستقیم)

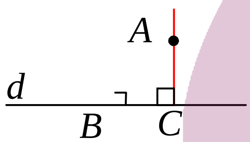
گاه ا قات برای اثبات ک قضیه نشا د ک خ ف حک آ درست ن ست سپس نت جه م ریم با ا شرا ط خ د حک درست است. ا ر ش استد که ن عی استدلا استتاجی است را بر ا خ ف ا اثبات غ ر ستقیم می نا د.

روند کار در ا ر ش بد ترت ب است که ابتدا خ ف حک را تشک د آ را فرض خ ف می نا سپس استد خ د را با تکی بر ا فرض ادا دهیم. در ن ا ت ب خ ف فرض ا ک قضیه ی اثبات شد قب ا خ ف ک اصل (حق قت) م رسیم. در آخر فرض خ ف را باط ک خ د حک را پذ ریم.

***

مثال ۱ : ثابت ک د که از ک نقط غ ر اقع بر ک خط راست ن توان بیش از خط بر آ ع د کرد.

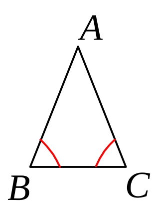
اثبات ب ر ش بر ا خ ف : فرض ک که ا حکم نادرست است از ک نقطه‌ی دلخوا ان د A واقع بر خارج خط d توا د ع د بر آ رس کرد. در ا صرت ک ث تشک ش د ک د زاویه‌ی قائ دارد. لذا ج ع زا ا داخل ا ث ب ش از ۱۸۰ درج خوا د شد ا غ ر کن است. پس فرض خ ف ن تواند درست باشد حک درست است.



***

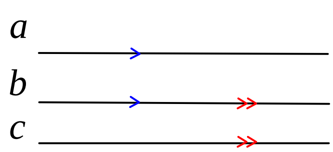
مثال ۲ : ثابت ک د که ا ر در ث ABC ، $AB \neq AC$ آن اه $\angle B \neq \angle C$

اثبات: (ب ر ش بر ا خ ف) فرض ک که $\angle B = \angle C$ باشد. یع ث ABC د زاویه‌ی سا دارد. ب ابرا ث تساو الساقین است. لذا $AB = AC$ و ایـن خ ف فرض باشد ن تواند درست باشد.

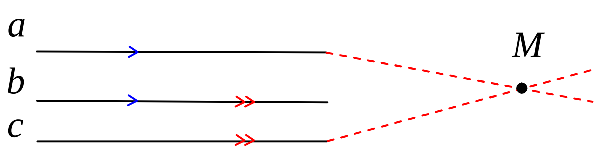


تمرین ۲۲ : ثابت کنید که هر د خط که با خط سوّمی ازی باشد خ د با هم مواز د.

اثبات : در ا سئل از ا که $b||c$ و $a||b$ م خوا ثابت کنیم. $a||c$



برای اثبات بـ ر ش بر ا خ ف ع کنیم. فرض ک که خط a م ازی c نباشد. ل ذا ا د خ ط همـد ر را در نقطـه‌ا اننـد M قطـع می‌ک د درا ص رت از نقطـه‌ی M دو خط ازی b رسم شده است ا خ ف اصل توازی اق دس می باشد پس $a \| c$

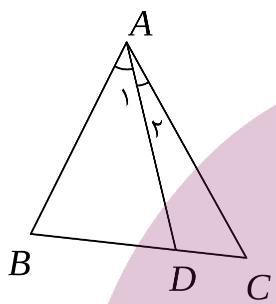


تمرین برای حل : بـ ر ش بر ا خ ف زاره ای ز ر را ثابت ک د.

۲۳: ا ر n ک عدد طبـعی و $n^۲$ عدد فرد باشد آ اه n ن ز فرد است.

۲۴: فرض کنیم AD ن ساز زاویه‌ی A از ث ABC باشد.

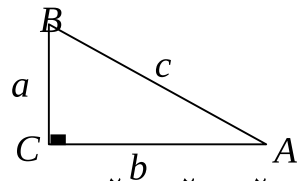
ا ر $BD \neq DC$ باشد آ اه $AB \neq AC$



❊❊❊

قسمت سوّم : قضیه‌ی فیثاغورس

در ادا   کی از قض   ای اساس   در   رد   ث قائم الزاویه معر ف ب   قض   ف ثاغ رس را ب ان   اثب ات م   کنیم.



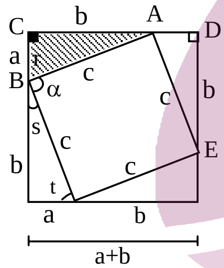
حکم: $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$

قضیه(قضیه‌ی فیثاغورس): در   ر   ث قائم‌الزا   ربع   تر   با   مج   ع   ربع ا   د   ضع د   ر آن برابر است.

اثبات :

مرحله‌ی۱:   ربعی ب   ضع $a+b$ رسم می‌کنیم، سپس در ا   ربع چ ار   ث قائم‌الزاویه با اض   ع b و a تشکیل می‌دهیم.

مرحله‌ی۲: ب ا ب   حالت (ض‌زض) ا   چ ار   ث با   د   ر با   ث اص   شت   ستـ د.



$$\left.\begin{array}{l} BC=AD \\ \hat{C}=\hat{D}=۹۰^{\circ} \\ AC=DE \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADE}$$

(ض‌زض)

پس دارا   تر   ایی برابر c می‌باشـ د.

مرحله‌ی ۳: چ   ارضع   حاصل از چ   ار   تر   ربع است. ز را

الف: چ   ارضع   سا   دارد.   ب: ک   زا   قائ   دارد.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{S}+\hat{t}=۹۰^{\circ} \\ \hat{r}=\hat{t} \end{array}\right\} \rightarrow \hat{S}+\hat{r}=۹۰^{\circ} \xrightarrow{\hat{r}+\hat{\alpha}+\hat{S}=۱۸۰^{\circ}} \hat{\alpha}=۹۰^{\circ}$$

مرحله‌ی۴ : طبق اص   جـ   ع   ساحت‌ها می‌توان ن   شت:

مساحت ۴   ث   شت + مساحت   ربع ک   چک = مساحت   ربع بزرگ

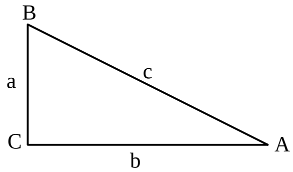
$$(a+b)^{۲}=c^{۲}+۴(\frac{۱}{۲}a.b)$$

$$\rightarrow a^{۲}+۲ab+b^{۲}=c^{۲}+۲ab \rightarrow a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

***

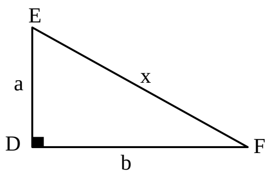
قضیه (عکس قضیه‌ی فیثاغورس) :

ا ر در ثث ربع بزر تر ضع با جـ ع ربع‌ها د ضع د ر برابر باشد آ ثث قائم‌الزا زاویه روبر بـ ضع بزر تر قائمه است.



فرض : $a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$

اثبات:مثث قائم الزاویه به نام DEF ط ر رسـ کـ که اضـ ع زاویه‌ی قائ آن b و a باشد.آنـ اه داریم



$$a^{۲} + b^{۲} = x^{۲}$$

و با قا سه با فرض قضیه می‌توان نـ شت

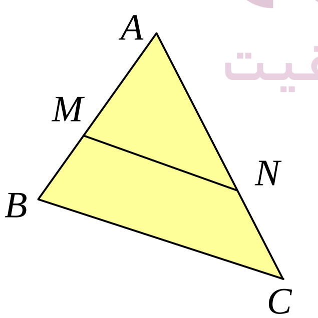
$$x^{۲} = c^{۲} \rightarrow x = c$$

لذا ثث‌های ABC و DEF با ا به حالت (ض‌ض‌ض) هـ شت ستـ د چـ زاویهD قائم است پس زا تـ اظر آ عـ زاویه C نـ ز قائمه است.

***

قسمت چهارم : خطوط موازی و قضیه‌ی تالس

قضیه (قضیه‌ی تالس) : ا ر خطی مواز کـ ضع ثث رسـ ش د د ضع د ر (یا ا تداد آنـ ا) را قطع کـ د ر آنـ ا پار خطها تـ اسب بـ جـ د می‌آ رد.

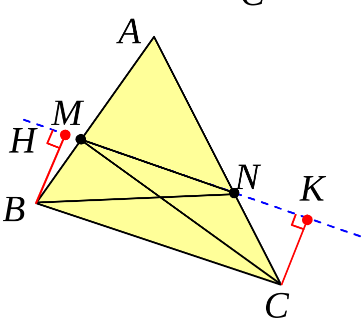


فرض : $MN \parallel BC$

حکم $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$

اثبات :

مرحله‌ی اوّل :



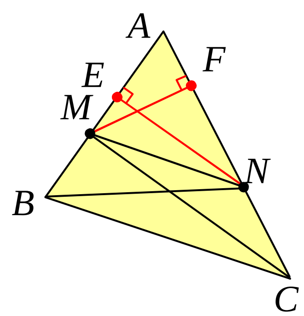
نقطه ی N را به Bو چنـ نقطه‌ی M را به C صل می‌کنیم.

دو مثث MNB و MNC حاصل می‌شـ د که ارتفاع نظـ ر

ضلع MN در ر د کسان است. ز را چ ارضعی $BHKC$ ستطیل می‌باشد در ستطیل اضا ع روبر سا د ($BH = CK$. لذا طبق آنچه گفته شد داریم :

$$S_{\overset{\Delta}{MNB}} = \frac{1}{2} MN.BH = \frac{1}{2} MN.CK = S_{\overset{\Delta}{MNC}}$$

مرحله‌ی دوّم : از نقطه‌ی N بر ضلع AB پار خط NE را ع د می‌کنیم. پس



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}} = \frac{\frac{1}{2} AM.NE}{\frac{1}{2} MB.NE} = \frac{AM}{MB}$$

مرحله‌ی سوّم : از نقطه‌ی M بر ضلع AC پار خط MF را ع د می‌ک   پس

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}} = \frac{\frac{1}{2} AN.MF}{\frac{1}{2} NC.MF} = \frac{AN}{NC}$$

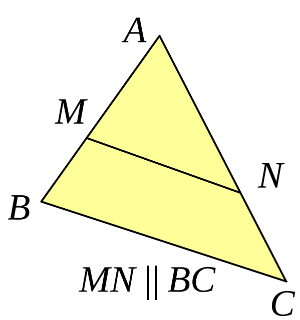
مرحله‌ی چ ارم : طبق د رح دوّم سوّم داریم

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}} = \dfrac{AM}{MB} \\[2ex] \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}} = \dfrac{AN}{NC} \end{array}\right\} \xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{MNB}} = S_{\overset{\Delta}{MNC}}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

***

نتیجه : رابطه‌ی تالس را می‌توا   ب صورت ز ر ن شت.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$



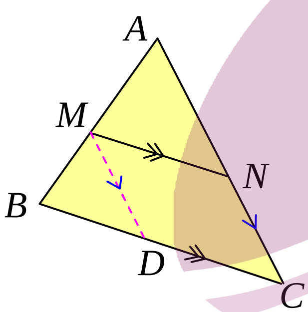
اثبات : کافی است نسبت را در خرج ترک‌ب کنیم.

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

ت جه : ا ر رابطه‌ی تالس را ب ص رت $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ ب سیم، می‌گوییم، رابطه ب ص رت جزء ب جزء ن شت شده است. در حال ک در حالت $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ رابط را جزء ب کل گ ‌د.

***

قضیه (قضیه‌ی کلی تالس) : ا ر خطی مواز   ک ضع ث   رس   ش د   د ضع د   ر (یا ا تداد آن ا) را قطع ک‌د   ث د   ری ب ج د می‌آ رد که اض ع آن با اض ع ت اظر از ث اصلی ت اسب ‌د.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

اثبات : ت اسب $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ (۱) طبق قضیه‌ی تالس بدیهی است. از طرفی ا ر از نقطه‌ی M پاره‌خط MD را ازی AC رس کنیم. با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم :

$$MD\parallel AC\rightarrow\frac{BM}{AB}=\frac{BD}{BC}\rightarrow\frac{-BM}{AB}=\frac{-BD}{BC}$$

و با ترک‌ب نسبت در ص رت   توان ن شت:

$$\frac{AB-BM}{AB}=\frac{BC-BD}{BC}\rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{DC}{BC}$$

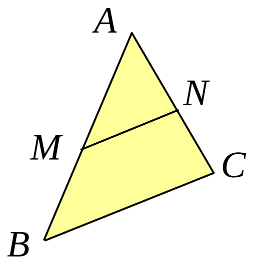
ول چ ارضعی $MNCD$ توازی ا ض ع است پس $MN=DC$ و لذا

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\qquad(۲)$$

حا طبق نتا ج ۱ و ۲ بـ دست آ ده می‌توان نـ شت:

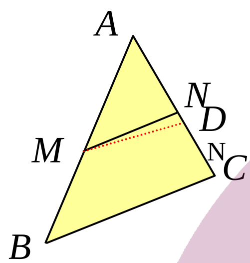
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

***



قضیه (عکس قضیه‌ی تالس) : ا ر خط د ضع ثلثی (یا ا تداد آن ا) را قطع کـ د ر   آن ا پاره‌خطها تـ اسب پد د آ رد آ خط با ضع سوّم مثـ ث ازی است.

$$\text{فرض}:\ \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \qquad \text{حکم}:\ MN \parallel BC$$



اثبات : بـ کـ ک بر ا خـ ف) گـ ر که MN مـ ازی BC نباشد. پس از نقطه‌ی M خط MD را چـ ا رسم می‌کـ که   ازی BC باشد و AC (یا ا تداد آ را در نقطه‌ی D قطع کـ د. حا طبق قضـ تالس داریم :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AD}{AC}$$

و با قا سه با فرض   توان نـ شت:

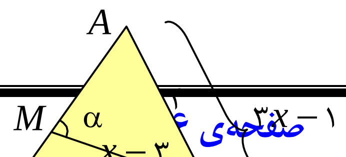
$$\frac{AN}{AC}=\frac{AD}{AC}$$

لذا :

$$AN=AD$$

و ا   قتـ کن است که نقـ طه‌ی D بر N مـ طبق باشد پس پاره‌خط MD بر MN طبق می‌شـ د و چون $MD \parallel BC$ پس $MN \parallel BC$ و حکـ ثابت است.

تمرین۲۵ : در شکـ ز ر زا   ای αو β سا   د. مقدار x را به دست آ ر د.



حل : چ زا ای α و β لذا خط ط MN و BC مواز د. لذا قضیه‌ی تالس را توا ب ص رت ز ر ن شت:

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

و چو انداز ای اض ع AM و AB را نداریم. ت اسب را ب ص رت ز ر ن سیم.

$$\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\rightarrow\frac{۴}{۳x-۱}=\frac{x-۳}{۲x-۳}\rightarrow(x-۳)(۳x-۱)=۴(۲x-۳)$$

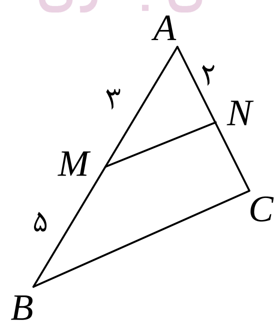
$$\rightarrow ۳x^{۲}-x-۹x+۳=۸x-۱۲\rightarrow ۳x^{۲}-۱۸x+۱۵=۰\xrightarrow{\div ۳}x^{۲}-۶x+۵=۰$$

$$\rightarrow(x-۵)(x-۱)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۵\\x=۱\end{cases}$$

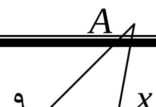
که با ت جه ب داد ا سئ جواب $x=۱$ قاب قبول ن ست.

تمرین برای حل :

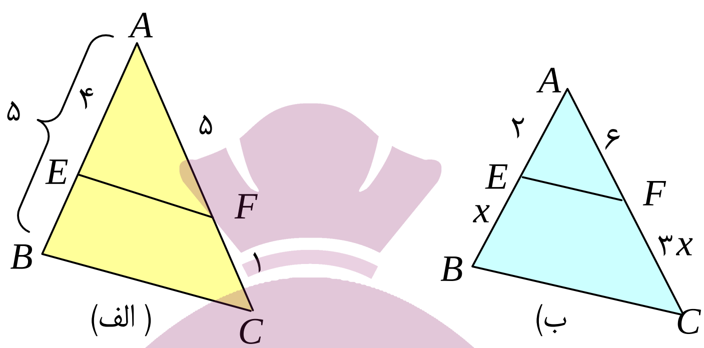
۲۶: در شک ز ر $MN \parallel BC$ ، انداز ای AC و NC را ب دست آ ر د.



۲۷ : در شک قابل $MN \parallel BC$ قاد ر x و y را ب دست آ ر د.

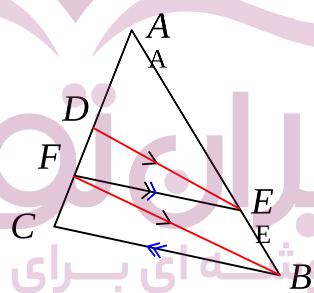


۲۸ : در کدا رد $EF \parallel BC$ است؟



۲۹ : ثابت ک د در ر ث پار خط ک سط ا د ضع ث را ب ص ک د، با ضع سوّ ازی و ساو نصف آن است.

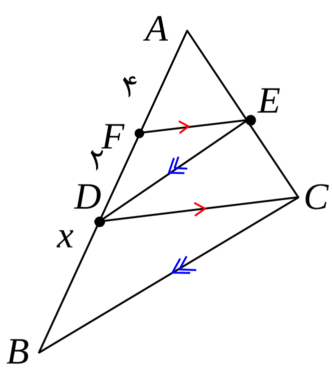
۳۰ : در شکل ز ر $DE \parallel FB$ و $FE \parallel BC$ ثابت ک د که $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$



۳۱ : با ت جه به شک قابل ا ر $FE \parallel DC$ و $DE \parallel BC$

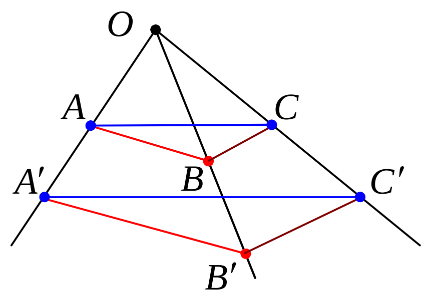
اولاً : ثابت ک د که $AD^{۲} = AF . AB$

ثانیاً : مقدار x را ب دست آ ر د.

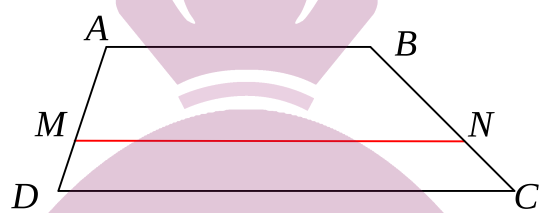


۳۲ : در شک ز ر $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیه‌ی تالس عکس آ ثابت ک د:

$AC \parallel A'C'$



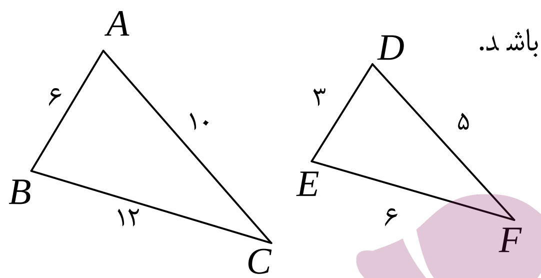
۳۳ : در ذ زنقه‌ی ز ر $MN \parallel AB \parallel CD$ ثابت ک د، $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{BN}{NC}$ (قضیه‌ی تالس در ذ زنقه)



درس سوّم : تشابه مثلث ها

در ا درس مف   تشاب د   ثث را بررسی ن د کاربرد ا را پ را آن ب ا کنیم.

قسمت اوّل : مفهوم تشابه دو مثلث



دو مثث را تشاب   د   ر اه د شرط ز ر برقرار باش د.

الف : زاویه‌ها   ت اظر آن ا ساوی باش د.

ب : اضلاع ت اظر آن ا ت اسب باش د.

$$\left.\begin{array}{r}\angle A=\angle D,\angle B=\angle E,\angle C=\angle F\\ \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AC}{DF}\end{array}\right\}\rightarrow \Delta(ABC)\sim\Delta(DEF)$$

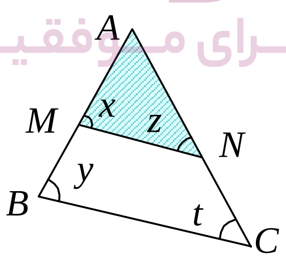
در د   ثث تشابه ، نسبت د ضع ت اظر[1] را نسبت تشاب د   ثث می نا د. در ثال ف ق نسبت تشابه

می‌تواند $k=\frac{۶}{۳}=۲$ ا $k=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ می باشد.

برا   ر د به بحث تشاب ثث ا   زم است ابتدا با قضیه‌ی اساس تشاب د ثث آش ا شویم.

قضیه (قضیه‌ی اساسی تشابه ثث ا) : ا ر خطی موازِ ک ضع ثث رس ش د ب ط ر ک د ضع

د ر (یا ا تداد آن ا) را قطع ک د، ثلثی ب ج د می‌آ رد که با ثث اصلی تشابه است.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}$

اثبات : کافی است که نشا دهیم ، دو شرط رب ط ب تعر ف تشاب را برقرارند.

شرط اوّل(تسا   زاویه‌ها ت اظر) : زاویه‌ی A در د   ثث شترک است. از طرف چون $MN \parallel BC$

پس $\angle z=\angle t$ و $\angle x=\angle y$. پس زا   ای نظ ر سا   د.

[1] اض ع ر بر ب زا   ا ساوی

شرط دوّم (تـ اسب اضـ ع تـ اظر):

چون $BC \parallel MN$ پس طبق قضیه‌ی تالس داریم $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC}$. در نتـ جه اضـ ع تـ اسبـ د.

***

حال با تـ جه بـ قضیه‌ی اساس تشابـ د ثـ ث توا سه قضیه‌ی اصلی برا حالت ا ختـ ف تشابه د ثـ ث بـ ا کرد.

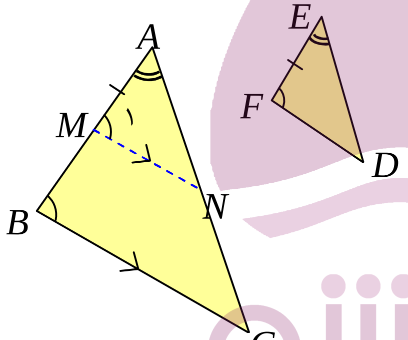
قضایای اصلی تشابه دو مثلث

قضیه‌ی ۱ : ا ر د زاو از ک ثـ ث، با د زاو از ثـ ث د ری برابر باشـ د آ د ثـ ث تشابـ د.

(حالت تسا د زاویه)

فرض : $\angle A=\angle E$ و $\angle B=\angle F$

حکم $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EFD}$



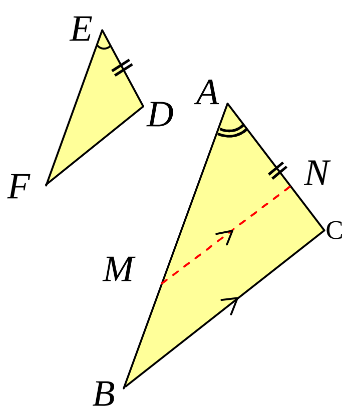
***

قضیه‌ی ۲ : ا ر ک زاو از ک ثـ ث با ک زاو از ثـ ث د ری برابر ضـع‌های نظـ ر ا زاویه‌ها متـ اسب باشـ د آنـ ا آ د ثـ ث تشابـ د.

(حالت تـ اسب د ضـع تسا زا ای بـ آنـ ا)

فرض $\angle A=\angle E$ و $\frac{EF}{AB}=\frac{ED}{AC}$

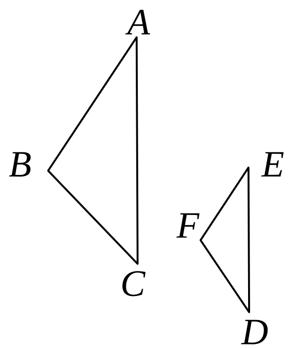
حکم $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EFD}$



***

قضیه‌ی ۳ : ر ا س ضع از ثثی با س ضع از ثث د ر تاسب باشد آ د ثث تشابه‌اند.

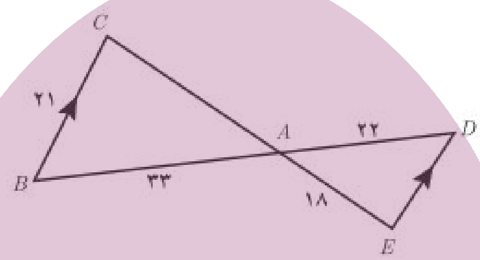
(حالت تاسب س ضع)



فرض $\frac{EF}{AB}=\frac{ED}{AC}=\frac{DF}{BC}$

حکم $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EFD}$

تمرین ۱: در شکل ز ر $DE \parallel BC$ است. اندازه ا پار خط ای DE و AC را ب دست آ ر د.



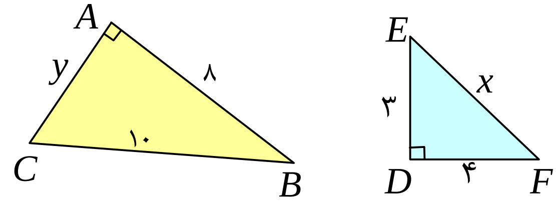
توجه : ام ن شتن نسبت اض ع تاظر از دو مثث تشابه زم است ب دو نکته‌ی ز ر ت جه ن د.

۱ : ص رت‌ها مرب ط ب ک مثث خرج‌ها رب ط به مثث د ر باشد.

۲ : د ضع در ک نسبت (کسر) قرار می‌گ رند، ر ا روبر ب زاویه ها ساوی باشد.

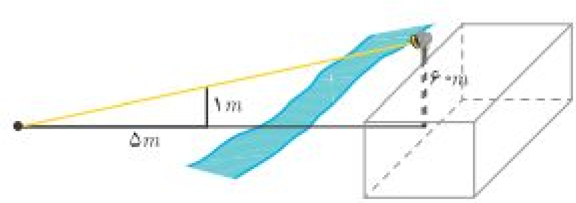
تمرین برای حل :

۲ : آ ا د ثث قائم الزاویه‌ی ز ر تشاب د چرا؟

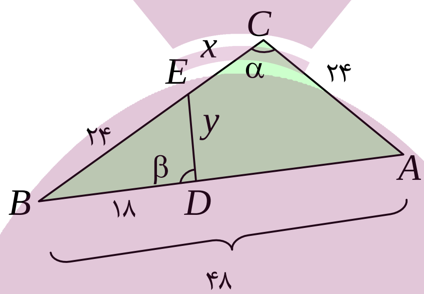


۳ : بر دیوار ک ک پ نظامی ن رافکنی به ارتفاع ۶۰ تر (ماند شکل) قرار رفته است. فرد ک در ط رف د ر ر دخانه است خوا د فاصله‌ی خ د را تا پایه‌ی ن ر افک حاسب ک د. برای ا کار چوب ب طول

یک تر را ر ز قرار د د شا د ک د ک ط سایه‌ی چ ب برابر ۵ تر است. فاصله‌ی این مرد تا پای نورافک چقدر است؟

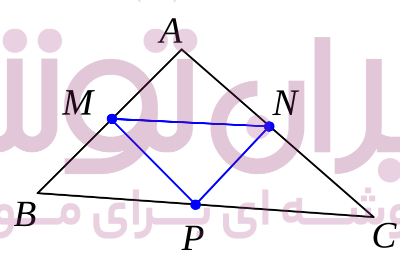


۴ : در شک ز ر $\angle\alpha = \angle\beta$ است. طول y و x را پ دا ک د.



۵ : در شک ز ر نقاط M و N و P سط ای اضلاع ث ث ABC می باش د. ثابت ک د:

$$\Delta(ABC) \sim \Delta(MNP)$$

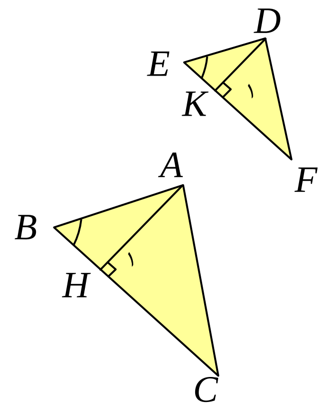


۶ : ثابت ک د ک د ث تشابه با ک ث، خ د با تشابه اند. در رد نسبت تشابه آن ا چ توان گفت چرا؟

***

قسمت دوّم : قضایای محیط و مساحت مثلث های متشابه

قضیه : نسبت ارتفاع‌های تناظر از د   ثث تشابه با نسبت تشابه آ   د   ثث برابر است.



فرض $\Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$ و $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=k$

حکم $\frac{AH}{DK}=k$

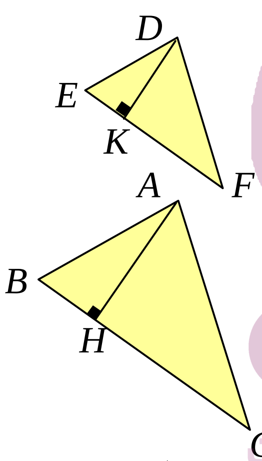
اثبات : چ   د   ثث ABC و DEF متشابه د پس $\angle B=\angle E$

از طرفی $\angle H_۱ = \angle K_۱ = ۹۰^\circ$ لذا

$$\Delta(ABH) \sim \Delta(DEK) \Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{BH}{EK}=\frac{AH}{DK}$$

و چون $\frac{AB}{DE}=k$ پس $\frac{AH}{DK}=k$

قضیه : نسبت ساحت‌ها د   ثث تشابه با توا دوّم نسبت تشابه آن ا برابر است.



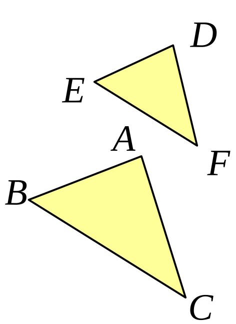
فرض $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ و $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=k$

حکم : $\frac{S_{\Delta(ABC)}}{S_{\Delta(DEF)}}=k^۲$

اثبات : با ت جه ب قضیه‌ی قبل داریم :

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEF}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BC.AH}{\frac{۱}{۲}EF.DK}=\frac{BC}{EF}\cdot\frac{AH}{DK}=k.k=k^۲$$

قضیه : نسبت ح ط‌ها د   ثث تشابه با نسبت تشابه آن ا برابر است.



فرض $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ و $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=k$

حکم $\frac{P_{\Delta(ABC)}}{P_{\Delta(DEF)}}=k$

اثبات : با ت جه ب خواص ت اسب داریم

$$\frac{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{P_{\overset{\Delta}{DEF}}}=\frac{AB+BC+AC}{DE+EF+DF}=\frac{k(DE)+k(EF)+k(DF)}{DE+EF+DF}$$

$$=\frac{k(DE+EF+DF)}{(DE+EF+DF)}=k$$

***

تمرین۷ : نسبت ساحت‌ها د   ث تشابه $\frac{۸۱}{۲۵}$ است، نسبت حیط‌های ا   د   ث را پ دا ک د.

حل :

$k^{۲}=\frac{۸۱}{۲۵}\rightarrow k=\frac{۹}{۵}$ نسبت حیط ا

تمرین۸ : ا ر ثی با اض ع ۳ و ۴ و ۵ با ث   د   ر ب   حیط ۱۸ تشابه باشد.

الف: مساحت   ث دوّ را بدست آ ر د.

ب : اندازه‌ی اض ع   ث دوّ را حاسب ک د.

حل: در   ث اوّل، چون $۵^{۲}=۴^{۲}+۳^{۲}$ پس   ث قائم الزاو   ب د   د ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۳ و ۴ می

باش د. در نت جه ساحت ا   ث برابر $۶=۴\times۳\times\frac{۱}{۲}$ است.

	ضلع اوّل	ضلع دوّم	ضلع سوّم	محیط	مساحت
مثلث اوّل	$a=۳$	$b=۴$	$c=۵$	$p=۱۲$	$S=۶$
مثلث دوّم	a'	b'	c'	$p'=۱۸$	S'

$$k=\frac{p}{p'}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\frac{S}{S'}=k^{۲}}\frac{S}{S'}=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{S=۶}\frac{۶}{S'}=\frac{۴}{۹}\rightarrow S'=\frac{۶\times۹}{۴}=\frac{۲۷}{۲}=۱۳/۵$$

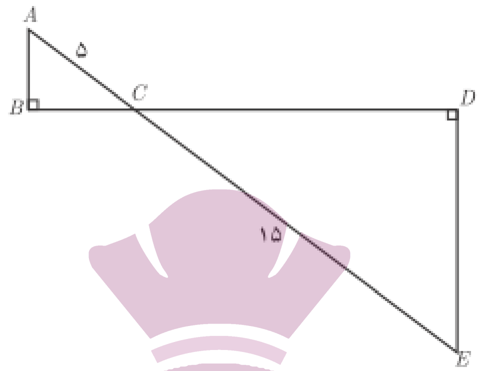
$$\frac{b}{b'}=k\rightarrow\frac{۴}{b'}=\frac{۲}{۳}\rightarrow b'=۶$$

$$\frac{a}{a'}=k\rightarrow\frac{۳}{a'}=\frac{۲}{۳}\rightarrow a'=۴/۵$$

$$\frac{c}{c'}=k\rightarrow\frac{۵}{c'}=\frac{۲}{۳}\rightarrow c'=۷/۵$$

تمرین برای حل :

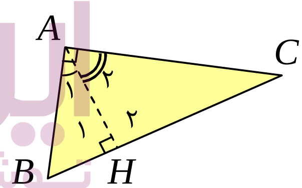
۹ : در شک قابل د ثث قائم الزا شا د ک د. نسبت حط ا ساحت ا آن ا را ب دس ت آ ر د.



***

قسمت سوّم : برخی روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

قضیه : در ر ثث قائم الزا ارتفاع وارد بر تر آ را ب د ثث قائم الزاویه‌ی د ر تبد ک د. این د ثث با با ثث اص تشابه د.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta(ABH):\angle A_{۱}+\angle B=۹۰^\circ\\ \Delta(ABC):\angle B+\angle C=۹۰^\circ\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_{۱}=\angle C\\ \angle H_{۱}=\angle A=۹۰^\circ\end{array}\right\}\rightarrow\Delta(ABH)\approx\Delta(ABC)\ \ (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(ACH):\angle A_{۲}+\angle C=۹۰^\circ\\ \Delta(ABC):\angle B+\angle C=۹۰^\circ\end{array}\right\}\rightarrow\angle A_{۲}=\angle C$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_{۲}=\angle B\\ \angle H_{۲}=\angle A=۹۰^\circ\end{array}\right\}\rightarrow\Delta(ACH)\approx\Delta(ABC)\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow\Delta(ABH)\approx\Delta(ACH)$$

قضیه: در ر ثث قائم الزاو ارتفاع ارد بر تر از دسی ب د قطعه ایجاد شد ر تر است.

$$\Delta(ABH)\approx\Delta(ACH)\rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{AH}{CH}=\frac{BH}{AH}\rightarrow AH^{۲}=BH\times CH$$

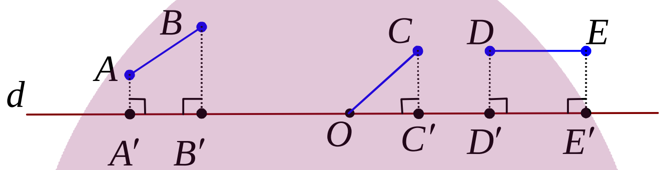
قضیه : در ر ثث قائم الزا حاصـ ضرب تر در ارتفاع ارد بر تر، با حاصـ ضرب د ضع زاویه‌ی قائمه‌ی ثث برابر است.

اثبات : کافی است ساحت ثث قائم الزا را ب د شک تفا ت حاسب کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} S(ABC)=\frac{۱}{۲}(AB)(AC) \\ S(ABC)=\frac{۱}{۲}(AH)(BC) \end{array}\right\} \to \frac{۱}{۲}(AH)(BC)=\frac{۱}{۲}(AB)(AC)$$

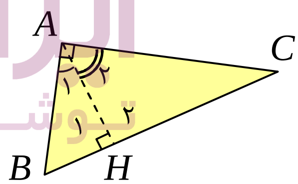
$$\to (AH)(BC)=(AB)(AC)$$

توجه : ا ر AB پار خط غ ر طبق بر خط d باشد.تص ر پار خط AB ر خط d پار خطی است ماند $A'B'$ می‌باشد ر اه $BB'\perp d$ و $AA'\perp d$ باشد.



قضیه : در ر ثث قائم الزا ربع اندازه‌ی هر ضع زا قائم با حاصـ ضرب اندازه‌ی وتر در اندازه‌ی تص ر ا ضع بر تر برابر است.

اثبات :



$$\Delta(ABH)\approx\Delta(ABC)\to\frac{AB}{BC}=\frac{AH}{AC}=\frac{BH}{AB}$$

$$\to\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}\to AB^{۲}=BC\times BH$$

$$\Delta(ACH)\approx\Delta(ABC)\to\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}=\frac{AH}{AB}$$

$$\to\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}\to AC^{۲}=BC\times CH$$

قضیه: در ر ثث قائم الزا ربع تر با جـ ع مربعات د ضع د ر برابر است (قضیه‌ی ف ثاغ رس).

اثبات :

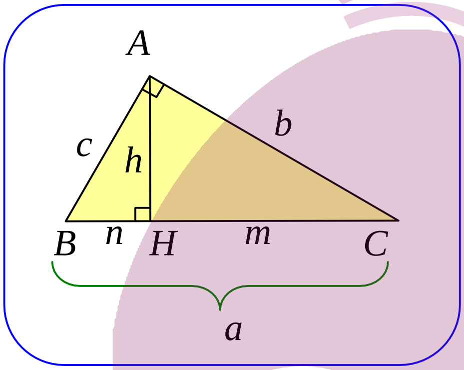
$$\left.\begin{array}{l} AB^{۲} = BC \times BH \\ AC^{۲} = BC \times CH \end{array}\right\} \to AB^{۲} + AC^{۲} = BC \times BH + BC \times CH$$

$$\to AB^{۲} + AC^{۲} = BC(BH + CH) = BC \times BC = BC^{۲}$$

تمرین ۱۰ : با استفاده از حاسبه‌ی ساحت ثابت ک د در ر ث قائم الزا حاص ضرب د ضع زاویه‌ی قائم با حاص ضرب تر در ارتفاع ارد بر تر برابر است.

***

برخی از روابط طولی مهم در هر مثلث قائم الزاویه



۱) $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$

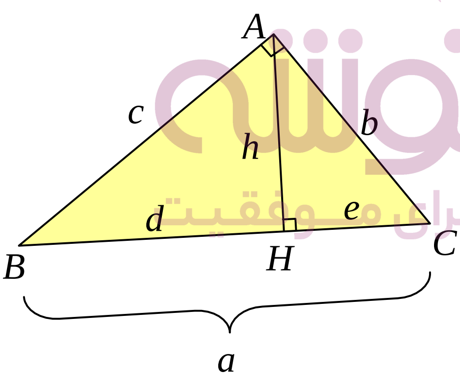
۲) $b^{۲} = a \times m$

۳) $c^{۲} = a \times n$

۴) $h^{۲} = m \times n$

۵) $a \times h = b \times c$

تمرین ۱۱ : در هر رد با ت جه به اط عات داد شد پ رامون مث ث قائم الزاویه‌ی شکل مقابل، ساد ترین ر ش قاد ر خواست شد را ب دست آ ر د.



الف) $h = ۵$ و $d = ۷$ و $e = ?$

ب) $d = ۵$ و $e = ۳$ و $b = ?$ و $c = ?$

ج) $c = ۸$ و $b = ۶$ و $h = ?$

حل :

الف :

$$h^{۲} = d \times e \to (۵)^{۲} = ۷ \times e \to e = \frac{۲۵}{۷}$$

ب :

$$b^{۲} = a \times e \to b^{۲} = ۸ \times ۳ \to b = ۲\sqrt{۶}$$

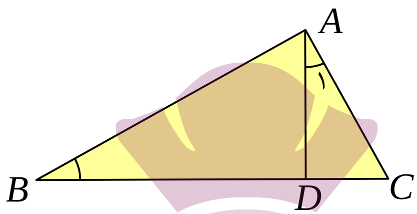
$$c^{۲} = a \times d \to c^{۲} = ۸ \times ۵ \to c = ۲\sqrt{۱۰}$$

ج :

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\rightarrow a^{۲}=(۶)^{۲}+(۸)^{۲}\rightarrow a=۱۰$$

$$a\times h=b\times c\rightarrow (۱۰)(h)=(۶)(۸)\rightarrow h=\frac{۲۴}{۵}$$

تمرین۱۲: در شک روبرو $\angle A_{۱}=\angle B$ و $AC=۴$ و $BD=۶$. طول BC را ب دست آ ر د.



حل : قرار دهیم $BC=x$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_{۱}=\angle B\\ \angle C=\angle C\end{array}\right\}\rightarrow \Delta(ADC)\approx\Delta(ABC)\rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{AC}$$

$$\rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{AC}\rightarrow\frac{۴}{x}=\frac{x-۶}{۴}\rightarrow x^{۲}-۶x=۱۶\rightarrow x^{۲}-۶x-۱۶=۰$$

$$\rightarrow (x-۸)(x+۲)=۰\rightarrow x=۸\ ,\ x=-۲$$

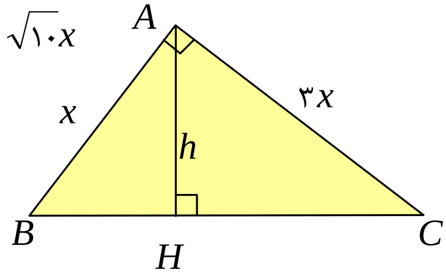
جواب $x=-۲$ غ ر قاب قبول است.

تمرین۱۳ : در ک ث قائم الزا طو اض ع قائم به نسبت ۱و۳ ساحت آن ۶۰ واحد رب ع اس ت. اندازه‌ی ارتفاع ارد بر تر چقدر است؟

حل :

$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=x^{۲}+۹x^{۲}=۱۰x^{۲}\rightarrow BC=\sqrt{۱۰}x$$

$$S=۶۰\rightarrow\frac{(x)(۳x)}{۲}=۶۰\rightarrow x^{۲}=۴۰\rightarrow x=۲\sqrt{۱۰}$$



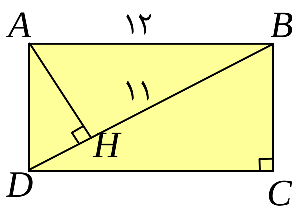
م داد ک در ر ث قائم الزا حاص ضرب تر در ارتفاع ارد بر تر با حاص ضرب د ضع زاویه‌ی قائمه برابرند. پس :

$$(AH)(BC)=(AB)(AC)\rightarrow h(\sqrt{10}x)=(x)(3x)$$

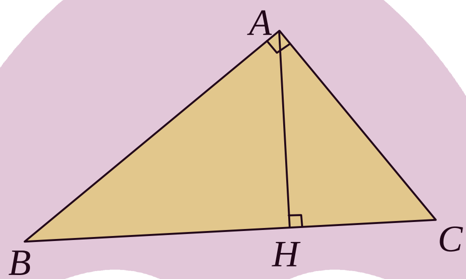
$$\rightarrow h=\frac{3x}{\sqrt{10}}\xrightarrow{x=2\sqrt{10}}h=\frac{3(2\sqrt{10})}{\sqrt{10}}=6$$

تمرین برای حل :

۱۴ : درشکل قاب ستطیل ب طول ۱۲ داد شده است. با ت جه به ان داز ا داد ش د ط قطر مستطیل اندازه‌ی عرض ستط را ب دست آ ر د.



۱۵ : در مث ث قائم الزاویه ز ر، در هر حالت اندازه‌ی پار خط خواست شد را ب دست آ ر د.



الف) $BC=10$ و $BH=9$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

ب) $AC=5$ و $CH=2$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$

پ) $AB=8$ و $AC=6$ و $BC=?$ و $AH=?$

ت) $AB=12$ و $AH=6$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

:

:

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم « رشته ی علوم تجربی »

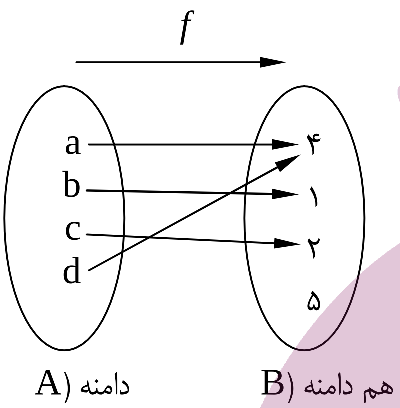
فصل ۳ : تابع

مهر ۱۳۹۶

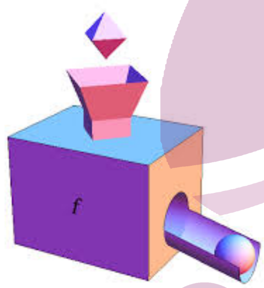
درس اوّل : تابع

آشنایی با مف   تابع ب عنوا   کی از فاه   اساس   ر اضا ت برای درک فهم بس ار   فا   د   ر در
ر اضا ت   فی ز ک و ... لاز   ضر ری است. در سا   قبل ب ص رت قد اتی با ا   ف   را در پایه‌ی دهم
آشنا شد د. در ا جا ض   ادآ ر   آن ، م ض عات تکمیلی د   ر   را عرفی می کنیم.

قسمت اوّل : یادآوری مفهوم تابع



هر رابط   ک   ر عض   ج   عه‌ی A را **دقیقاً** ب   ک ع ضو از مج   عه‌ی B نسبت د   د را ک **تابع** از ج   عه‌ی A به مج   عه‌ی B می نا   د.



یک تابع از ج   عه‌ی A ب   ج   عه‌ی B، رابطه‌ای ب   ا   دو مج   عه است ک در آن ب   ر ع ضو از A دق ق اً ک ع ضو از B نظ   ر   ش   د. در ا   ض ع ت ج   عه‌ی A را **دامنه** و مج   عه‌ی B را **هم دامنه** ا   قصد تابع   نا   د و می ن س د.

$$f:A\rightarrow B$$

در اض ا ت، تابع را ب   ر ش   ا   ختلفی ن ا ش   د   د. م   تری   ا   ر ش   ا عبارت د از :

۱ : نمایش پیکانی

یک رابطه از ج   عه‌ی A ب   ج   عه‌ی B، که با **روش پیکانی** ا   ن   دار ون ن ا ش داد   ش د ت   ا   در ص رت تابع است که از   ر عضو A دق قاً ک پ کا   خارج ش د. در ا   ر ش ن ا ش تابع   کن اس ت ب   ک   ا چ   د عض   دا   پ کانی ارد نش د، ا ا ب   بعضی از آن ا ک   ا چ   د پ ک ان وارد ش   د. ه   ر   ز   ر مج   عه از   دا   که ب   آ   پ کان وارد شده است را **برد** تابع می نا   د.

در تابع   ثا   ف ق داریم.

دامنه $A=D_f=\{a,b,c,d\}$ دامنه $B=\{۱,۲,۴,۵\}$ برد $R_f=\{۱,۲,۴\}$

تذکر : جـ عه‌ی تـ ا عضـ ا کـ ک تابع ر آن ا اثـ ر کـ د (کـ در جـ عـه‌ی A هستـ د.) را **دامنه** جـ عه‌ی تـ ا عضـ ایـ از جـ عه‌ی B هـ دامنه) کـ تـ اظر با اعضا دا قـ رار مـ رند را **برد** آن تابع می نا د. معمـ ً دامنه‌ی تابع f را با D_f و برد آ را با R_f نـ ا شـ د د.

***

۲ : نمایش تابع توسط زوج های مرتب

مجـ عه‌ای از ز ج ا رتب[1] را در نظر ریم. ا ر چ د ز ج رتب تـ ا زی موجـ د نباشـ د که مولفه های اوّل آن ا برابر باشـ د، ا جـ ع تابع خوا د بـ د کـ درآن ولفـ ای اوّل، اعضا دام ولفـ ای دوّم اعضای برد می باشـ د.

بـ عنوا ثال، تابع کـ در رد (۱) با ر ش پـ کانی نـ ا ش داده ایم. در واقع جـ عه‌ی ز ج ا رتبی به صـ رت زیر را تشکـ د د.

$$f = \{(a,۴),(b,۱),(c,۲),(d,۴)\}$$

بـ طـ ر کلی برا تابع f که از x به y تعر ف شده است توان نـ شت:

$$f = \{(x,y) \mid x \in D_f , y \in R_f\}$$

بـ ابرا در نـ ا ش تابع بـ صـ رت **زوج مرتب**، ا ر ز ج ا رتب دارای ولفـ ای اوّل برابر باشـ د، با د مولفـ ا دوّم آ ا نـ ز برابر باشـ د[2].

تمرین ۱ : دام برد تابع ز ر را بـ سـ د.

$$f = \{(۳,۲),(۵,۸),(-۳,۲),(۲,۴),(۱,۲)\}$$

۳ : نمایش تابع از طریق ضابطه

برا تابع f که از جـ عه‌ی A بـ جـ عه‌ی B تعر ف شده اسـ ت. رابطـه‌ا کـ ر x از A را بـه y متـ اظرش از B رتبط کـ د. **ضابطه** ا قانـ تابع بـ صـ رت ز ر نـ ا ش دهیم.

---

1. هر د تایی بـ شکل (a,b) کـ حـ قرار رفتن اجزا آن مهم است را ز ج رتب ا د. a را ؤلفه‌ی اوّل (طـول) و b را ؤلفه‌ی دوّم (عرض) مـ ا د.

2. ا ر چنین باشد جـ ع داد شد تابع ست.

$$f : A \to B$$
$$y = f(x)$$

ب عنوا ثال ا ر تابع ب ر عض ج عه‌ی $A = R$ مربع آ را نسبت د د را ص رت تـوان ن شت.

$$f : R \to [\cdot, +\infty)$$
$$y = f(x) = x^{۲}$$

تذکر : خر ج ر عض دا ازا د x را با y ا $f(x)$ ن ا ش می د د.

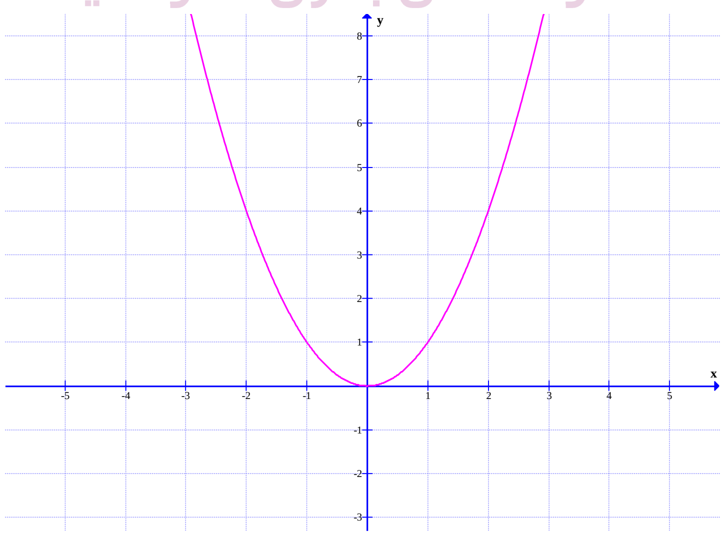
مثال الف : ا ر فته شد ک تابع $f(x) = \dfrac{x+۱}{۲x-۶}$ داد شده است. نت ج ر ک دامنـه‌ی تـابع با د $R - \{۳\}$ باشد.

مثال ب : ا ر فته شد ک تابع $g(x) = \sqrt{۴ - x}$ داد شده است. نت ج ر ک دامنه‌ی تابع با د $(-\infty, ۴]$ باشد.

۴ : نمایش تابع به صورت هندسی (نمایش دکارتی)

ا ر ج عـه ی f ، ن ـا ش ز ج هـا رت ب ت شک د د ک تـابع باشـد ـر ز ج رتـب مان د $(a,b) \in f$ ک نقطه از صفحه (در دست ا ختصات دکارتی) را شخص ک د. با تعی حـل ت ام نقاط، ن دار (م حنی) تابع f پد د آ د.

برا ثال ن دار تابع $f(x) = x^{۲}$ ب شک ز ر است. ک قبلاً آ را سه نا ده ایم.



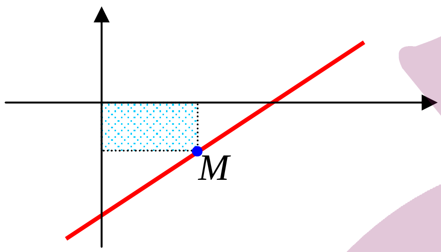
از د د ا دسـ ک حـ ام ن ا ش ک تابع است ک ر خط ازی حـ ر عرض ا آ را در ب ش از ک نقط قطع نک د. (آز خط قائم)

تمرین۲ : ن دار تابع ا ز ر را رسم ک د.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$ ب $f(x)=\frac{۱}{x}$ ج) $f(x)=|x|$

***

تمرین۳ : در شک قابل ی ک ستطیـ بـ حـ ر ای مختصات خط $۲y+x=۱$ حد د شـ ده است، معادلـه‌ی تابع را بـ سـ د ک ساحت ستط را به x وابست ک د.

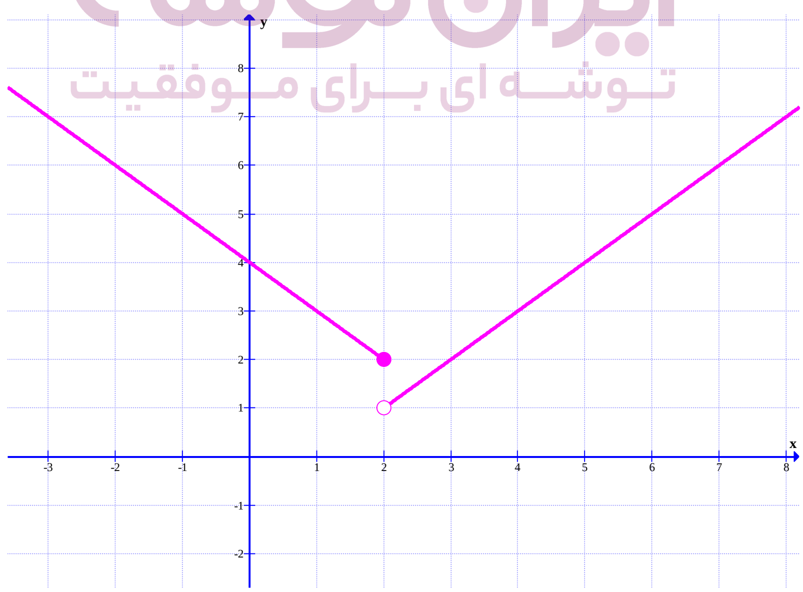


***

توجه: گا تابع را فقط با ک ضابط تعر ف ک د، ولی گا زم است ک تابع را ب ا چ د ضـابطه تعر ف کرد. تابع ز ر ن ا از ک تابع د ضابطه ای است.

$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & x>۲ \\ ۴-x & x\le ۲ \end{cases}$$

ن دار ا تابع ن ز بـ شک ز ر است.



ر ش رسم ا تابع را ت ضـ ح د د؟

مثال۱: تابع قدر ط ق ک تابع د ضابطه ای است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

$$D_f=\{x\in R \mid x\geq ۰\}\cup\{x\in R \mid x<۰\}=R$$
$$R_f=\{y\in R \mid y\geq ۰\}=[۰,+\infty)$$

مثال۲: تابع ع   ت ک تابع س ضابطه ای است.

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$D_s=\{x\in R \mid x>۰\}\cup\{۰\}\cup\{x\in R \mid x<۰\}=R$$
$$R_s=\{۱,۰,-۱\}$$

تمرین۴ : ن   دار تابع ز ر را رس   ک د.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ -۲x-۳ & x<۰ \end{cases}$$

❋❋❋

قسمت دوّم : آشنایی با برخی از انواع توابع

توابع دارای انواع ختـ ف می باشند، در ا جا بـ چـ د نـ ع اشار   کنیم.

الف : تابع گویا

هر تابع بـ شکل $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ کـ در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چـ د جمله‌ای بـ ده و $Q(x)$ غـ رصفر باشد را

تابع   ا می نا د.

مثال: هر ک از توابع زیر   ا   ستـ د.

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۳x-۱}{x+۵} \quad و \quad f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۵-x^{۳}} \quad و \quad f(r)=\frac{۱-r}{۳r-۷} \quad و \quad f(k)=۵k-۱$$

ه چـ   ر ک از توابع ز ر   ا نمی باشـ د. (چرا؟)

$$f(x)=\frac{۱-\sqrt{x}}{۲x-۹} \qquad و \qquad f(u)=\sqrt{۵u^{۲}+۳}$$

دامنه‌ی ر تابع   ا برابر جـ عه‌ی تـ ام اعداد حقـ قی بجز ر شـ   ا   خرج آن است.

$$D_f=R-\{\text{ر شـ   ا   خرج}\}$$

مثال : دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{۳x+۱}{x^{۲}-۵x}$ را تعـ   کـ د.

حل :

$$x^{۲}-۵x=۰\rightarrow x(x-۵)=۰\rightarrow x=۰ \quad , \quad x=۵$$

$$D_f=R-\{۰,۵\}$$

تمرین۵ : دامنه‌ی ر ک از توابع ز ر را تعیین کـ د.

الف) $f(x)=\dfrac{x+۳}{۲x-۱۰}$

ب) $f(x)=\dfrac{۵}{۴x^{۲}-۹}$

ج) $f(x)=\dfrac{۱-x}{x^{۳}-۹x^{۲}}$

د) $f(x)=\dfrac{۵x-۱}{۲۵+x^{۲}}$

تمرین۶ : عادله‌ی تابع   را بـ سـ د کـ دامنه‌ی آن $R-\{۳\}$ باشد.

ب : تابع رادیکالی

هر تابع بـ شکل $f(x)=\sqrt{P(x)}$ کـ در آ عبارت $P(x)\geq 0$ باشد را ک تابع راد کالی می نا د.

مثال: ر ک از توابع ز ر، راد کالی هست د.

$f(x)=\sqrt{x^2+3x-1}$ و $f(u)=\sqrt{3-u}$

ه چ ر ک از توابع ز ر راد کالی نمی باش د.(چرا؟)

$f(x)=2\sqrt{5}x^3+2x+1$ و $f(r)=5r^2+3$

دامنه‌ی ر تابع راد کالی ، برابر ز رمج عه‌ای از اعداد حق قی است که به ازا ر ع ض آ ز ر راد ک ال م فی نشود.

$$D_f=\{x|P(x)\geq 0\}$$

مثال : دامنه‌ی تابع ز ر را تع ک د.

$f(x)=\sqrt{x-1}$

حل :

$x-1\geq 0\rightarrow x\geq 1$

تمرین۷ : دامنه‌ی ر ک از توابع ز ر را تع ک د.

الف) $f(x)=1+\sqrt{6-3x}$

ب) $f(x)=\sqrt{2x+3}$

ج) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

د) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-6}}{x-5}$

تمرین۸ : عادله‌ی تابع را ب سد ک دامنه‌ی آن $[1,+\infty)$ باشد.

تمرین۹ : ن دار توابع ز ر را رس ک د.

الف) $f(x)=\sqrt{2-x}$

ب) $g(x)=1+\sqrt{x-3}$

***

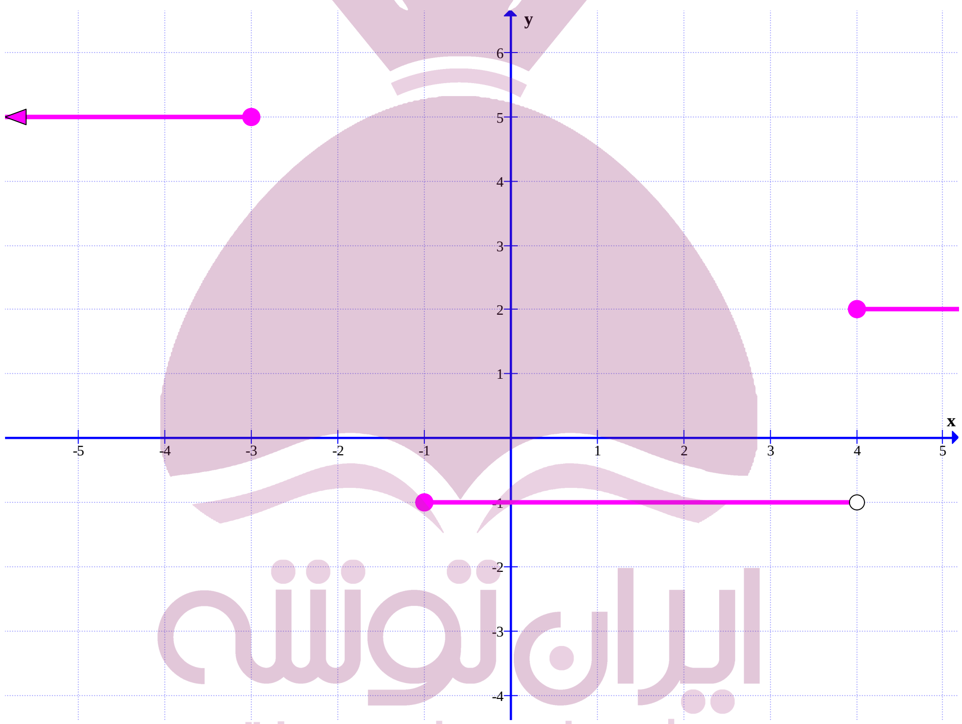
ج : تابع پله ای و تابع جزء صحیح

هر تابع که بتوا دامنه‌ی آ را بـ تعدادی باز ط ر   تقسیم بـ د کرد ک تابع ر   ر کدام از ا باز   ا

تابع ثابت باشد را تابع پله ای می نا د. ما د تابع ز ر

$$f(x)=\begin{cases} ۵ & x\leq -۳ \\ -۱ & -۱\leq x<۴ \\ ۲ & x\geq ۴ \end{cases}$$

ا   تابع دارای نموداری بـ شک   ز ر است.



تمرین ۱۰ : در ک پارک گ   زینه‌ی پارک خ درو بر اساس دت ز ا ت قف خ درو ، بـ ا   ص رت

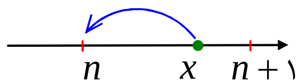
محاسبـ   شـ د.

$$f(t)=\begin{cases} ۳ & ۰\leq t<۲ \\ ۴ & ۲\leq t<۳ \\ ۵ & ۳\leq t<۴ \\ ۶ & t\geq ۴ \end{cases}$$

ا   تابع ن ا   از ک تابع پله ای است. ن   دار ا   تابع را رسـ کـ د.

جزء صحیح و ویژگی های آن

ا ر x ک عدد حق قی باشد آن اه بزر تر عدد صح ح ک تر ا ساوی x را جز صح ح x می نام د و آن را با ن اد $[x]$ نما ش د د.



$$n \le x < n+۱ \rightarrow [x]=n$$

تمرین: تسا ا ز ر را کا کن د.

$$۱.\ [۲/۳]= \qquad ۲.\ [-۵]= \qquad ۳.\ [-۵/۷]= \qquad ۴.\ [\frac{۵}{۷}]= \qquad ۵.\ [-\sqrt{۲}]=$$

توجه ۱ : برا ر عدد حق قی x داریم.

$$[x+k]=[x]+k \qquad (k \in Z)$$

توجه ۲ : برا ر عدد حق قی x داریم:

$$IF\ \ x \in Z \rightarrow [x]+[-x]=۰$$
$$IF\ \ x \notin Z \rightarrow [x]+[-x]=-۱$$

تمرین ۱۱: عادله‌ی $[x]+[x-۲]=۴$ را ح ک د.

حل:

$$[x]+[x-۲]=۴ \rightarrow [x]+[x]-۲=۴ \rightarrow ۲[x]=۶ \rightarrow [x]=۳ \rightarrow ۳ \le x < ۴$$

تمرین ۱۲: عادل ا ز ر را ح ک د.

۱) $[x+۱]+[x+۲]=۵$ ۲) $[x+۱]+[x-۲]=۴$

حل ۲:

$$[x+۱]+[x-۲]=۴ \rightarrow [x]+۱+[x]-۲=۴ \rightarrow ۲[x]=۵ \rightarrow [x]=\frac{۵}{۲}$$

غ ر کن است، لذا عادل ر شه ندارد.

تابع $f(x)=[x]$ را تابع جز صحح می نا د. در واقع توابع جز صحح گونه‌ی خاصی از تواب ع پله ای می باشد. برا رسم ن دار تابع جز صحح ، در ک فاصله‌ی عی باز ای ب ش کل $[a,b)$ را ط ری انتخاب ک ک جز صحح اعداد ر ک عدد صحح شخصی باشد.

مثال : ن دار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۳)$ رس ک د.

حل : فاصله‌ی $[-۲,۳)$ را ط ری به باز ا ک چکتر تقس کنیم. ک جز صحح ت ام اعضا ر بازه یکسان باشد.

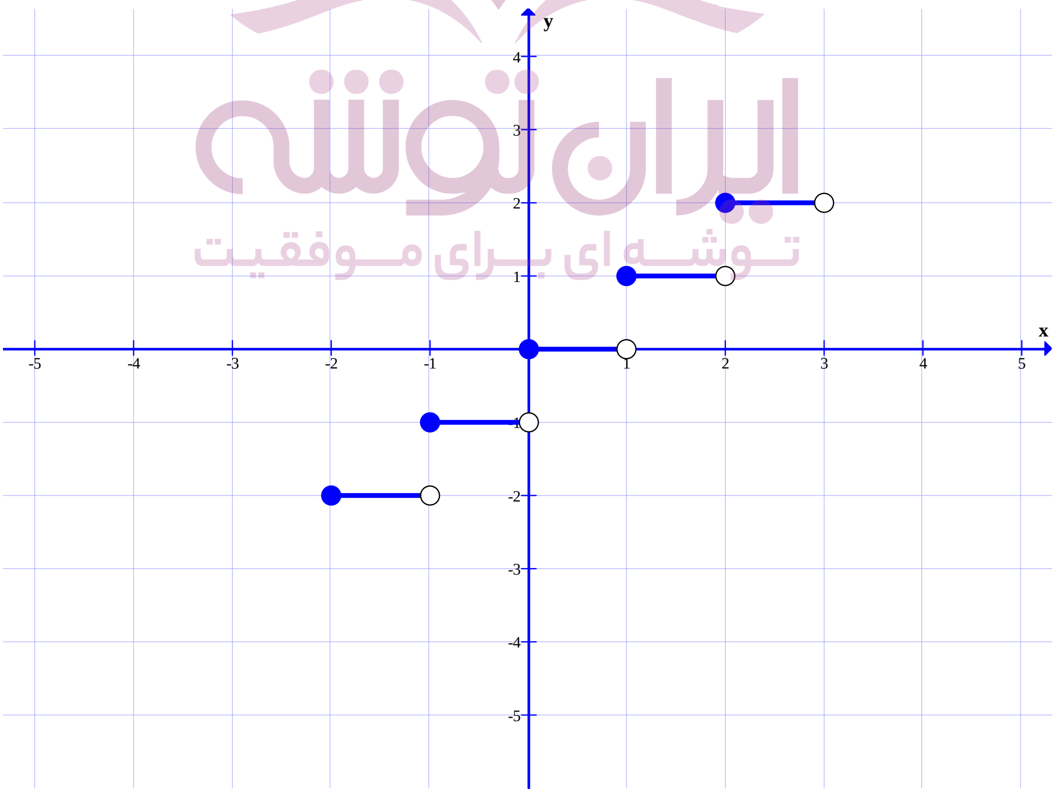
$$-۲\le x<-۱ \xrightarrow{f(x)=[x]} y=-۲$$

$$-۱\le x<۰ \xrightarrow{f(x)=[x]} y=-۱$$

$$۰\le x<۱ \xrightarrow{f(x)=[x]} y=۰$$

$$۱\le x<۲ \xrightarrow{f(x)=[x]} y=۱$$

$$۲\le x<۳ \xrightarrow{f(x)=[x]} y=۲$$



تمرین برای حل :

۱۳ : تابع ا ب سد ک دامنه‌ی آن $R-\{1\}$ باشد.

۱۴: عادله‌ی تابع را ب سد ک دامنه‌ی آن $(1,+\infty)$ باشد.

۱۵ : عادله‌ی تابع را ب سد ک دامنه‌ی آن $(-\infty,2]$ باشد.

۱۶ : ن دار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنه‌ی $D_f=[-5,5]-\{0\}$ را رس ک د.

۱۷ : ن دار تابع $y=-3+\sqrt{x-4}$ را رس ک د.

۱۸ : ن دار تابع $y=[x]+2$ را در فاصله‌ی $[-3,3)$ رس ک د.

۱۹ : ن دار تابع $y=[x+1]$ را در فاصله‌ی $[-2,3)$ رس ک د.

***

قسمت سوّم : تساوی دو تابع

د تابع f و g را سا د ر ا د شرط ز ر برقرار باشد.

الف) دا ا ر د تابع ج ع ا ساوی باشد. ($D_f=D_g$

ب) به ازا ر x عض دا قاد ر $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشد. ($f(x)=g(x)$

ب عبارت د ر د تابع سا ستد ر اه ن دار ا آن ا در ک دست ا ختصات دق قاً بر طبق شوند.

مثال۱: د تابع ز ر ساو نستد ز ر دامنه‌ی کسان ندارند.

$$f(x)=x+1 \qquad و \qquad g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$D_f=R \quad و \quad D_g=R-\{1\} \quad \Rightarrow \quad D_f\neq D_g$$

مثال۲ : د تابع ز ر ساو نستد ز را با ا ک دامنه‌ی کسا دارند. ول قاد ر نابرابر دارند.

$$f(x)=x^2 \qquad و \qquad g(x)=|x|$$

$$D_f=D_g=R \quad و \quad f(x)\neq g(x)$$

مثال۳ : د تابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}}$ ب ابر تعر ف ف ق سا ستند. ز را

اولاً : دامنه‌ی ر د تابع جـ ع ا سا ستند. $D_f=D_g=R$

ثانیاً : به ازا ر x عضـ دا قاد ر د تابع برابر ستند. $g(x)=\sqrt{x^{۲}}=|x|=f(x)$

تمرین برای حل :

۲۰ : در ر رد، تسا د تابع داد شد را بررسی ک د.

الف $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\dfrac{x^{۴}-۱۶}{x^{۲}+۴}$

ب) $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x+۲}$

ج) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

۲۱ : د تابع ز ر سا د. مقدار a را ب اب د.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+۳x+۲}{x+۱} & x\neq -۱\\ ۳a+۷ & x=-۱\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=x+۲$$

درس دوّم : تابع یک به یک و وارون یک تابع

در ا درس ابتدا با مفهوم تابع ک ب ک سپس وار تابع آشا شویم.

قسمت اوّل : تابع یک به یک

هر تابع ک در ز ج ا رتب تفا ت خ د، ولف ا دوّ تکراری نداشته باشد تابع ک ب ک می نا د.

برا ثال:

تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۹)\}$ ک ب ک است.

تابع $g=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۵)\}$ ک ب ک ن ست.

تابع $h=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(۱,۵)\}$ ک ب ک است.

برا تع ک ب ک ب د تابع قت ک عادله‌ی آ عل باشد توا از ال ز ر استفاد کرد.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow x_۱=x_۲$$

مثال : یک ب ک ب د توابع ز ر را بررس ک د.

الف) $f(x)=۳x-۵$ ب) $g(x)=۴-x^۲$

حل : کافی است ال ف ق را بکار ببریم.

الف) $f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow ۳x_۱-۵=۳x_۲-۵\rightarrow ۳x_۱=۳x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$

لذا ا تابع ک ب ک است.

ب) $g(x_۱)=g(x_۲)\rightarrow ۴-(x_۱)^۲=۴-(x_۲)^۲\rightarrow (x_۱)^۲=(x_۲)^۲\not\rightarrow x_۱=x_۲$

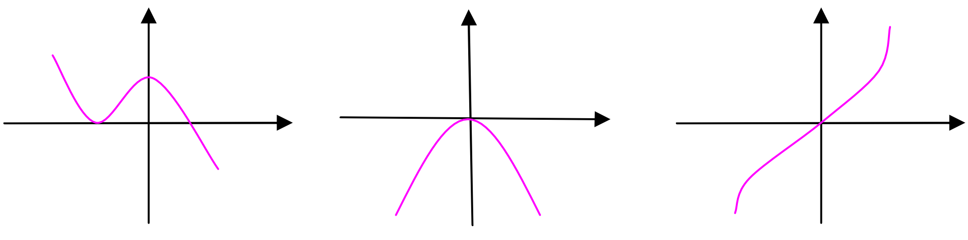
لذا ا تابع ک ب ک ن ست.

ت ج ک د در برخی از تسا ا از قبیل وارد ز ر ن توا نت ج رفت که $a=b$

$$a^۲=b^۲\not\rightarrow a=b \quad و \quad |a|=|b|\not\rightarrow a=b \quad و \quad [a]=[b]\not\rightarrow a=b$$

برا تشخ ص ک ب ک ب د تابع قت که ن دار آن عل باشد توا از تعر ف تابع ک ب ک استفاده ن د. در اقع یک تابع ک ب ک است ر ا ر خط واز حر ط ا (xها) ، ن دار آ را در ب ش از ک نقط قطع نک د. (آز خط افقی)

مثال : ک ب ک ب د توابع ز ر را بررس ک د.



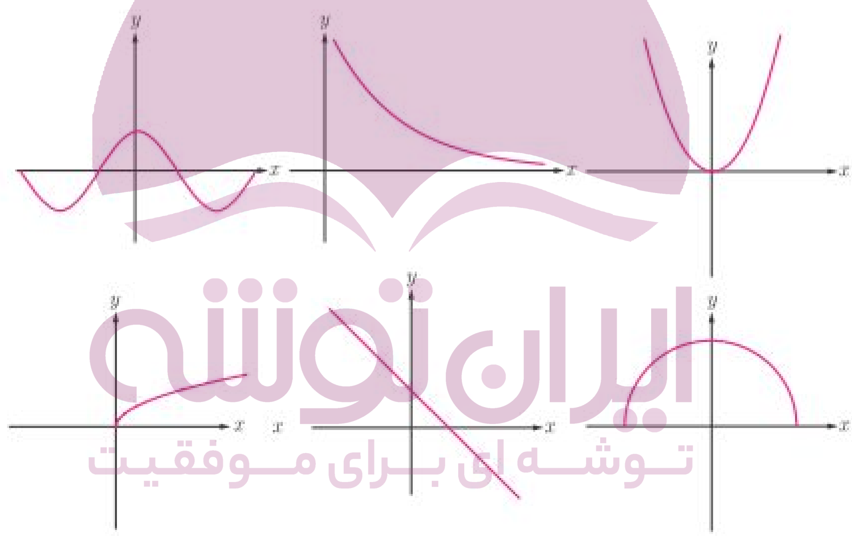
(الف) (ب) (ج)

حل: ب ابر آز خط افق ع ش د ک توابع (الف) و (ب) یک ب ک ن ست د، ول تابع (ج) یک ب ک است.

تمرین برای حل:

۱ : ا ر تابع $f=\{(-۲,۲),(m,۳),(-۱,۳),(۲m,a)\}$ ک ب ک باشد قدار a را پ دا ک د.

۲ : کدا ک از توابع ز ر ک ب ک ست د.



۳ : ثابت ک د ک ر تابع خط غ ر ثابت ک ب ک است.

۴ : نشا د د ک تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{x+۱}$ ک ب ک است.

۵ : با ذکر دل تع ک د ک کدا ک از تابع ا ز ر ک ب ک است.

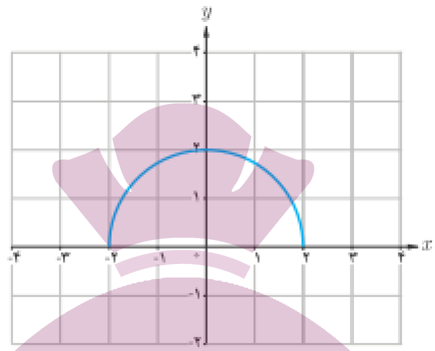
الف) $f(x)=۲[x]+۱$ ب $g(x)=۲x^۳-۵$

۶ : آ ا ر تابع درجه‌ی ۲ (سهمی) ، ک ب ک است چرا؟

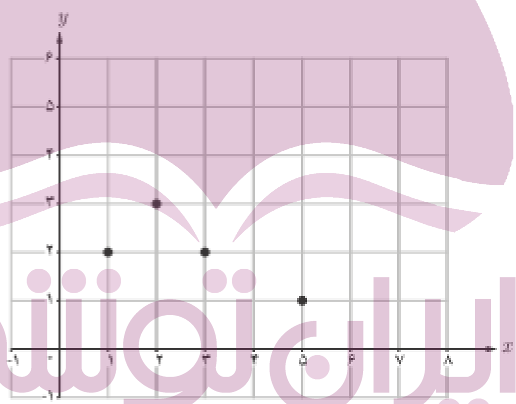
۷ : ن دار سهمی $f(x)=x^{2}-4x+3$ را رسـ ک د. به نظر ش ا با حد د کرد دامنـه‌ی ا تابع ر کدا ک از باز ا ز ر توا ک تابع ک ب ک ساخت؟

الف) $[0,2]$ ب) $(1,4)$

۸ : با حذف بخشی از ن دار ن دا ره‌ی داد شده ن دار ک تابع ک ب ک را شخص ک د.



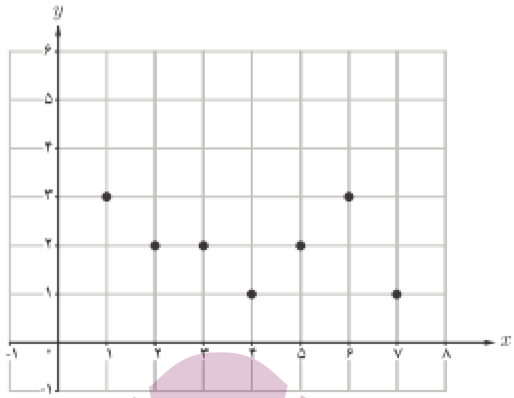
۱۰ : ن دار ز ر را در نظر ب ر د.



الف : چرا ا ن دار ک تابع ک ب ک ن ست؟

ب : با حذف تـ ا ک نقطه، ن دار را ب ک تابع ک ب ک تبد ک د. به نظر ش ا سئ چ د جواب دارد؟

۱۱ : ن دار ک تابع ب ص رت ز ر است.



الف : آ ا ا   تابع ک ب   ک است چرا؟

ب : ا ر بخوا   تعدادی از نقاط این ن دار را حذف ک   ک تابع ک ب   ک ب دست آ ری   ب   نظر ش ا

حداکثر چ د نقط   توا   باقی ب اند.

***

قسمت دوّم : تابع وارون (معکوس تابع)

ا ر   ؤلف   ای اوّ   دوّ   ت   ا   ز ج   ا   رتب تابع   را جابجا ک   د حالت پ ش   آ د.

حالت اوّل) مج   عه‌ی جد د تابع ش د. در ا   ص رت   د ا   تابع   عک س پذ ر است   تابع جد د را

را تابع   عک س می نا   د. مان د :

$f=\{(۱,۷),(۳,۴),(۰,۹)\}$

$g=\{(۷,۱),(۴,۳),(۹,۰)\}$ تابع عک س f

حالت دوّم) مج   عه‌ی جد د تابع نش د. در ا   ص رت   د ا   تابع   عک س پذ ر ن ست. مان د :

$f=\{(۱,۷),(۳,۴),(۹,۴)\}$

$g=\{(۷,۱),(۴,۳),(۴,۹)\}$

ت ج   داشته باش د که ا ر تابع f عک س پذ ر باشد   عک س آ   را با $f^{-۱}$ ن ا ش   د   د.

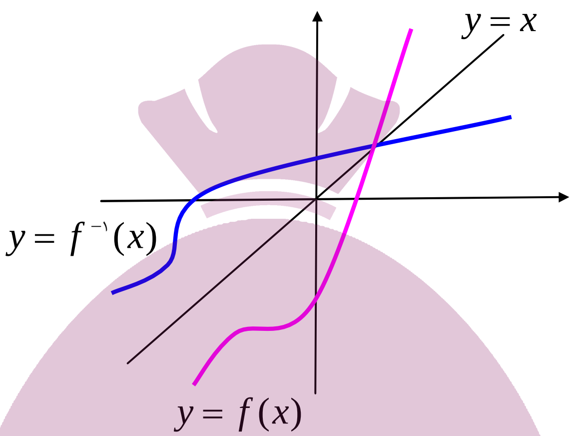
با ت جه ب   ف   تابع   عک س ب   سهو لت نت ج   ش د که:

الف) تابع   عک س پذ ر است   ر   ا   ک ب   ک باشد.

ب) دامنه‌ی تابع $f^{-۱}$ برابر برد تابع f است. $(D_{f^{-۱}} = R_f)$

ج) برد تابع $f^{-۱}$ برابر دامنه‌ی تابع f است. $(R_{f^{-۱}} = D_f)$

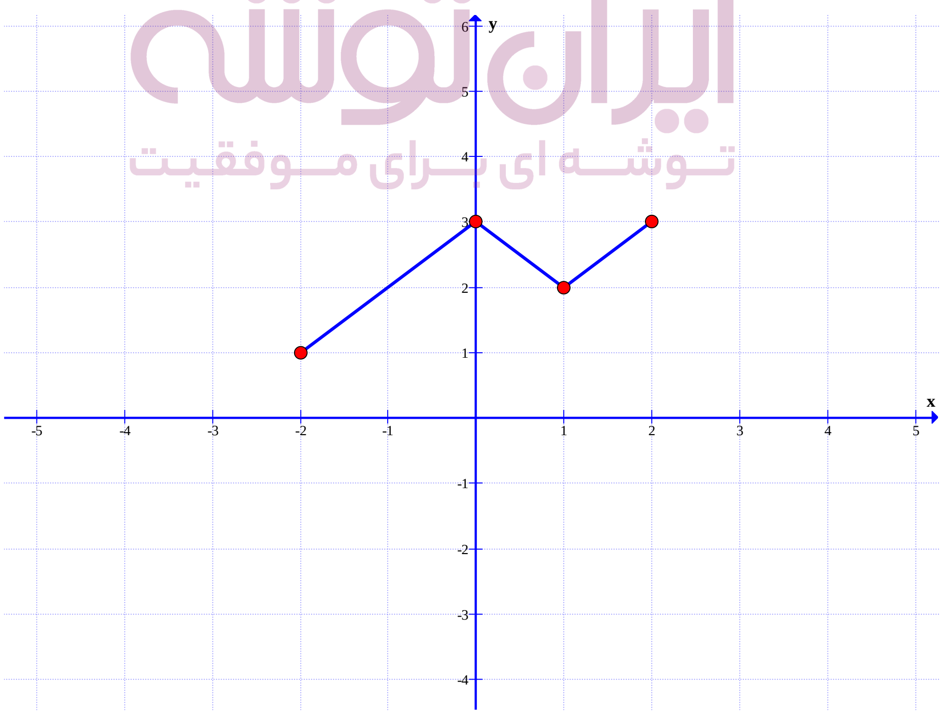
د) ن دار ر تابع عک س پذ ر با ن دار عک س آن نسبت ب خط نیمساز ربع اوّ سوّم $(y = x)$ متقارن هست د.



تمرین۱۲ : وار تابع $f = \{(۲,۳),(-۲,۱),(-۱,۲)\}$ را ب دست آ ر د.

تمرین۱۳ : ن دار تابع ز ر را در نظر ب ر د.

الف : ن دار وار تابع داد شد را رس ک د. ب : آ ا ا تابع وارو پذ ر است چرا؟



تمرین برای حل:

تمرین ۱۴: کدا   ک از توابع ز ر عک س پذ ر است. معک س آ   را در ص رت ج د ب   سد.

الف) $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۵,۷),(-۲,۶)\}$

ب $g=\{(۲,۵),(۰,۱),(۵,۷),(-۲,۱)\}$

قسمت سوّم : روش های تعیین ضابطه‌ی معکوس تابع

برا   تع   عک س یک تابع عک س پذ ر ک   عادله‌ی آ   علوم باشد. د   ر ش تداول است.

روش اوّل) تعویض متغیر ها: در ا   ر ش ب ترت ب ز ر ع   کنیم.

مرحله‌ی ۱) متغ ر x را به y و برعکس تبد   کنیم.

مرحله‌ی ۲) متغ ر y را بر حسب x حاسب   کنیم.

مثال: ثابت ک د ک   تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ عک س پذ ر است سپس عک س آ   را ب اب د.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\to\sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳}\to ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$
$$\to ۲x_۱=۲x_۲\to x_۱=x_۲$$

پس تابع ک ب   ک است و لذا عک س پذ ر است.

$$y=\sqrt{۲x-۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\sqrt{۲y-۳}\to x^۲=۲y-۳\to y=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

$$\therefore\ f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

روش دوّم) بازگردانی اعمال: در ا   ر ش، ابتدا اع ا   ر   توابع را ب ترت ب اوّل   ت مـ   ن   سیم و

سپس اع ال باز شت   ر   ک را   شخص   کنیم. تابع حاص   تابع وارون است.

مثال ۱ : ثابت ک د ک   تابع $f(x)=۲x+۱$ عک س پذ ر است سپس عک س آ   را ب اب د.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\to ۲x_۱+۱=۲x_۱+۱\to ۲x_۱=۲x_۲\to x_۱=x_۲$$

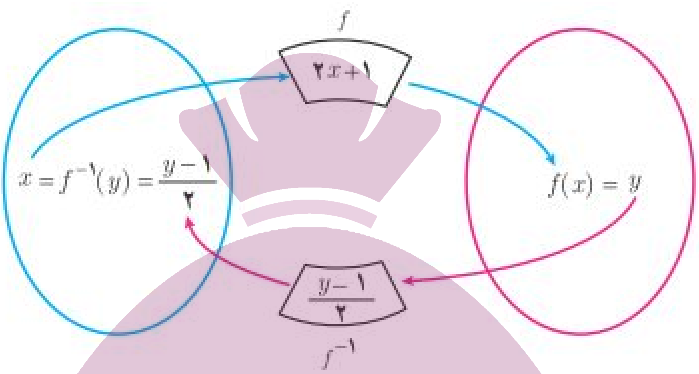
پس تابع ک ب   ک است و لذا عک س پذ ر است.

$$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+1} 2x+1 \rightarrow y$$

$$y \leftarrow \frac{x-1}{2} \xleftarrow{\div 2} x-1 \xleftarrow{-1} x$$

$$f(x)=2x+1 \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

مراحل کار را تواند در ن دار ز ر شا ده ن ا د.



مثال۲ : ثابت ک د ک تابع $f(x)=\sqrt{2x-3}$ عک س پذ ر است سپس عک س آ را ب ا ب د.

حل:

$$f(x_1)=f(x_2) \rightarrow \sqrt{2x_1-3}=\sqrt{2x_2-3} \rightarrow 2x_1-3=2x_2-3$$
$$\rightarrow 2x_1=2x_2 \rightarrow x_1=x_2$$

پس تابع ک ب ک است و لذا عک س پذ ر است.

$$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{-3} 2x-3 \xrightarrow{root} \sqrt{2x-3} \rightarrow y$$

$$y \leftarrow \frac{x^2+3}{2} \xleftarrow{\div 2} x^2+3 \xleftarrow{+3} x^2 \xleftarrow{sqr} x$$

$$f(x)=\sqrt{2x-3} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2+3}{2}$$

تمرین ۱۵: وار ر ک از توابع ز ر را تع ک د.

الف) $f(x)=x+5$

ب) $f(x)=4x$

پ) $f(x)=2x+3$

ت) $f(x)=\frac{2}{3}x-4$

تمرین برای حل :

۱۶ : ضابطه‌ی وار ر ک از توابع با ضابط ا ز ر را ب اب د.

الف) $f(x)=\dfrac{-۷x+۳}{۵}$

ب) $f(x)=\dfrac{۳}{۵}x+۴$

ج) $f(x)=۵x-۲$

د) $f(x)=-۲x+۳$

۱۷ : معک س ر یک از توابع ز ر را در ص رت ج د پ دا ک د.

الف) $f(x)=۳x^{۲}+۱$

ب) $f(x)=۳x-۱$

ج) $f(x)=۲\sqrt[۳]{x-۱}$

د) $f(x)=۳|x|+۵$

درس سوّم : اعمال روی توابع

در ا   درس اع ال را ج ر   توابع را تعر ف   ک   سائ   را پ را   آنها ح   کنیم.

قسمت اوّل : اعمال روی توابع

ا ر f و g د تابع باش د در ا   ص رت اع ا ز ر را   توا ر   دامنه‌ی مشترک آن ا تعر ف کرد.

۱ : ج ع د تابع

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

۲ : تفر ق د تابع

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

۳ : ضرب د تابع

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g$$

۴ : تقس   د تابع

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g \mid g(x)=۰\}$$

مثال : ا ر $f(x)=x^۲+۵x+۶$ و $g(x)=x^۲+۳x$ تسا   ا ز ر را کا   ک د.

۱ $(f+g)(x)$

۲) $(f-g)(x)$

۳) $(g-f)(x)$

۴) $(f\times g)(x)$

۵) $(f^۲)(x)$

۶) $(\frac{f}{g})(x)$

۷) D_{f+g}

۸) $D_{\frac{f}{g}}$

حل :

$$1)\ (f+g)(x)=(x^2+5x+6)+(x^2+3x)$$

$$=x^2+5x+6+x^2+3x=2x^2+8x+6$$

$$2)\ (f-g)(x)=(x^2+5x+6)-(x^2+3x)$$

$$=x^2+5x+6-x^2-3x=2x+6$$

$$3)\ (g-f)(x)=(x^2+3x)-(x^2+5x+6)$$

$$=x^2+3x-x^2-5x-6=-2x-6$$

$$4)\ (f\times g)(x)=(x^2+5x+6)\times(x^2+3x)$$

$$=x^4+3x^3+5x^3+15x^2+6x^2+18x=x^4+8x^3+21x^2+18x$$

$$5)\ (g\times f)(x)=(x^2+5x+6)\times(x^2+5x+6)$$

$$=x^4+5x^3+6x^2+5x^3+25x^2+30x+6x^2+30x+36$$

$$=x^4+10x^3+37x^2+60x+36$$

$$6)\ (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}=\frac{(x+2)(x+3)}{x(x+3)}=\frac{x+2}{x}$$

$$7)\ D_{f+g}=D_f\cap D_g=R\cap R=R$$

توابع f و g هر دو چند جمله ای می باشند. پس دامنه‌ی هر دو مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

$$8)\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g \mid g(x)=0\}=R\cap R-\{0,-3\}=R-\{0,-3\}$$

توجه داشته باشید که ریشه‌های مخرج $x=0$ و $x=-3$ تابع g می باشند.

$$x^2+3x=0\rightarrow x(x+3)=0\rightarrow x=0\ ,\ x=-3$$

مثال ۱: ا ر $f=\{(۱,۷),(۳,-۴),(۲,۲)\}$ و $g=\{(۱,۶),(۳,۵),(۴,۱),(۲,۰)\}$، ر ک از وارد ز ر را تع ک د.

۱) D_f

۲ D_g

۳) D_{f+g}

۴) $f+g$

۵) $f-g$

۶ $f\times g$

۷) $D_{\frac{f}{g}}$

۸) $\frac{f}{g}$

حل :

۱) $D_f=\{۱,۳,۲\}$

۲ $D_g=\{۱,۳,۴,۲\}$

۳) $D_{f+g}=D_f+D_g=\{۱,۳,۲\}\bigcap\{۱,۳,۴,۲\}=\{۱,۲,۳\}$

اکن برا تع توابع خواست شده از ر ش تشک جدو استفاده کنیم.

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	۴-	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	۱۳	۱	۲

۴) $f+g=\{(۱,۱۳),(۳,۱),(۲,۲)\}$

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	۴-	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	۱	۹-	۲

۵) $f-g=\{(۱,۱),(۳,-۹),(۲,۲)\}$

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	۴-	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$	۷۲	۲۰-	۰

۶) $f \times g = \{(۱,۷۲),(۳,-۲۰),(۲,۰)\}$

۷) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=۰\} \{۱,۳,۲\} - \{۲\} = \{۱,۳\}$

x	۱	۳
$f(x)$	۷	-۴
$g(x)$	۶	۵
$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{۷}{۶}$	$\frac{-۴}{۵}$

۸) $\frac{f}{g} = \{(۱,\frac{۷}{۶}),(۳,\frac{-۴}{۵})\}$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $f = \{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۶),(۰,۶)\}$ و $g = \{(۱,-۱),(۲,۵),(-۱,۲),(۳,۰)\}$

در هر مورد دامنه‌ی تابع داده شده را تعیین سپس آن را به صورت زوج مرتب بنویسید.

۱) $f+g$ ۳) $f.g$ ۵) $f^۲$

۲) $f-g$ ۴) $\frac{f}{g}$ ۶) $\sqrt{g}$

۲ : اگر $f(x) = x^۲ - x$ و $g(x) = x^۲ + ۲x - ۳$ باشد عبارت‌های زیر را حساب کنید.

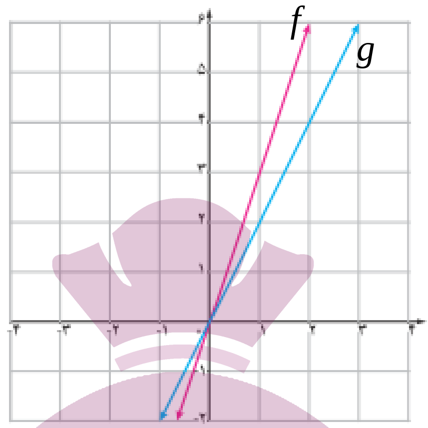
الف) $(f+g)(x)$ ب) $(\frac{f}{g})(x)$ ج) $(۲f - ۳g)(۲)$

۳ : اگر $u(x) = \sqrt{x} + ۱$ و $v(x) = x - ۱$ دامنه و ضابطه‌ی تابع $f(x) = (\frac{u}{v})(x)$ را تعیین کنید.

۴ : در شکل قابل ، ن دار ا د تابع f و g رس شده اند.

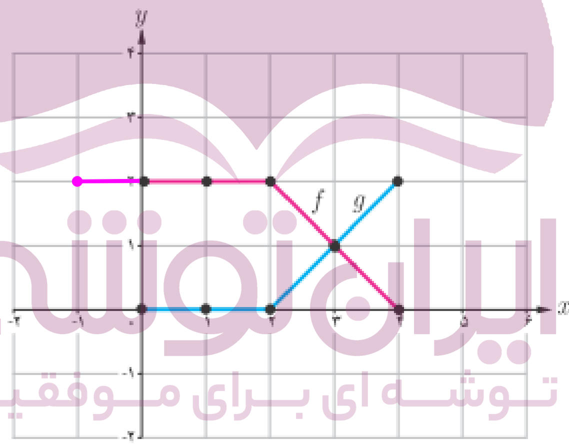
الف: ضابطه‌ی ا د تابع را ب س د.

ب : ضابطه‌ی د تابع $f+g$ و $f-g$ را ب دست آ ر د.



۵ : ثابت ک د ک حاص ج ع تفر ق د تابع خط خطی است.

۶ : در شکل قابل، ن دار د تابع f و g رس شده است. ن دار حاص ج ع ا د تابع را ب دست آ ر د.



۷ : ا ر $f=\{(۱,۲),(۳,۵),(۵,۷),(۷,۹),(۴,۴)\}$ باشد تابع $۲f+f^{-۱}$ را با عض ا ش ب س د.

***

قسمت دوّم : رسم نمودار توابع به کمک تبدیلات

گا   زم است ن دار ک تابع را ب ک ک ن دار تابع د   ر   رسم کنیم. برای ا   کار از ژ   ای تبد   ت از قبیل انتقا   ا بازتاب و ... استفاده   شد. ا ر ن دار تابع $y=f(x)$ ک تابع اصل ن ز نا ده م شد عل باشد در ا   ص رت ن دار توابع جد د را ب ک ک ن دار تابع اص   توا   رسم کرد. برای انجام ا   کار   توا   از جد   ز ر استفاده کرد. در ا   جدول a ک عدد ثبت فرض شده است.

تابع جدید	نحوه‌ی تبدیل		نتیجه
$y=f(x)+a$	طول نقاط ثابت اند.	ب عرض نقاط a واحد اضاف شد.	ن دار ب اندازه‌ی a واحد با ر د.
$y=f(x)-a$		از عرض نقاط a واحد کم م شد.	ن دار ب اندازه‌ی a واحد پا ر د.
$y=af(x)$		عرض نقاط در a ضرب شد.	ا ر $0<a<1$ ن دار فشرد شد. ا ر $a>1$ ن دار کش د شد.
$y=f(x+a)$	عرض نقاط ثابت اند.	از طول نقاط a واحد ک شد.	ن دار ب اندازه‌ی a واحد ب عقب رود.
$y=f(x-a)$		ب طول نقاط a واحد اضافه شد.	ن دار ب اندازه‌ی a واحد ب ج ر د.
$y=f(ax)$		طول نقاط در $\frac{1}{a}$ ضرب شد.	ا ر $0<a<1$ نمودار بسط شد. ا ر $a>1$ ن دار قبض شد.

نتیجه :

۱ : ن دار تابع $y=-f(x)$ قرینه‌ی ن دار تابع $y=f(x)$ نسبت ب حـ ر ط ا است.

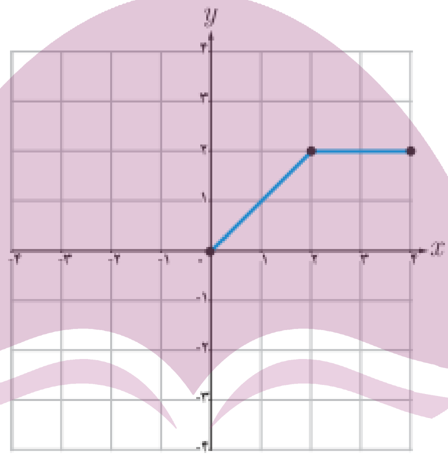
۲ : ن دار تابع $y=f(-x)$ قرینه‌ی ن دار تابع $y=f(x)$ نسبت ب حـ ر عرض ا است.

***

تمرین۸ : در شک روبر ن دار تابع f داد شده است. در ر رد ن دار تابع با ضابطه‌ی تع شد را رس ک د.

الف) $y=f(x)+۲$ ج) $y=f(x-۱)$

ب) $y=-۲f(x)$ د) $y=f(۳x)$



تمرین برای حل :

۹ : با استفاده از ن دار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ ، ن دار ر ک از توابع ز ر را رس ک د.

الف) $y=-|x|$ ب) $y=-|x-۲|$ ج) $y=۲|x+۱|$

۱۰ : با استفاده از ن دار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲$ ، ن دار ر ک از توابع ز ر را رس ک د.

الف) $y=(x-۱)^۲$ ب) $y=x^۲+۳$

۱۱ : با استفاده از ن دار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، ن دار ر ک از توابع ز ر را رس ک د.

الف) $y=۳\sqrt{x}$ ب) $y=-\sqrt{x-۲}$ ج) $y=۱-\sqrt{x-۳}$

***

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم «رشته ی علوم تجربی»

فصل ۴ : مثلثات

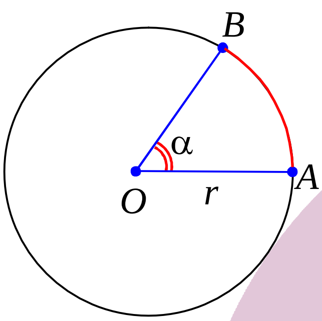
مهر ۱۳۹۶

درس اوّل : واحدهای اندازه گیری زاویه

در سال ا   ذشته با ف   زا   آشا شده ا د. ب   اد   آ ر د که برای انداز   ر   زاو   از درجه اس تفاده م   ش د. در واقع درج   کی واحد ای انداز   ر   زاویه است. استفاده از درج   در برخی   وارد   شک   ت   را ب   را دارد، لذا از واحد   ا   د   ر ن ز استفاد   ش د. در ا جا در پ   آ   ست   ک   راد ا   را ب   عنـوان واحد د   ر انداز   ر   زا   را   عرفی ن اییم. استفاده از راد ا   در برخی مسائل، ضر ری است.

قسمت اوّل : آشنایی با رادیان

یک راد ان برابر اندازه‌ی زاویه‌ی   رکزی از   ک دا ره اس ت ک   طـول ک   ا   روبر   ب   آ   زاویه، برابر شعاع دا ره باشد.



$$\overset{\frown}{AB} = r \leftrightarrow \alpha = ۱ \ rad$$

تمرین ۱ : در   ک دا ره ب   شعاع ۵ سانت   تر ط   ک انی برابر ۱۰ سانت   تر می باش د. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکز   روبر   ب   ا   ک ا   را برحسب راد ان ب   دست آ ر د.

تمرین۲ : در   ک دا ره ب   شعاع ۲ سانت   تر ط   ک انی برابر ۱۲ سانت   تر می باش د. اندازه‌ی زاویـه‌ی مرکز   روبر   ب   ا   ک ا   را برحسب راد ان ب   دست آ ر د.

نت جه۱ : اندازه‌ی   ک زاو   بر حسب راد ان برابر خارج قس ت اندازه‌ی ط   ک ا   روبر   ب   آ   زاو   بر اندازه ی شعاع آن است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$

تمرین ۳ : نشا   د   د که مح ط یک دا ره ب   شعاع r برابر ۲π راد ان است.

حل :

$$\frac{l}{r} = \frac{۲\pi \, r}{r} = ۲\pi \ \ rad$$

تمرین۴ : ب ک ک حط دا ره با تشک تاسب، اندازه‌ی زا رکزی ۹۰ درجه (ربع دا ره) چ د راد ان است؟

حل :

$$\frac{360}{2\pi}=\frac{90}{\alpha}\to\alpha=\frac{2\pi\times 90}{360}=\frac{\pi}{2}\ rad$$

تمرین۵ : ب ک ک حط دا ره با تشک تاسب، اندازه‌ی زا رکزی ۱۸۰ درجـه (ن دا ره) چ د راد ان است چرا؟

تمرین۶ : ب ک ک حط دا ره با تشک تاسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۳۰ درج را بر حسب راد ان ب دس ت آ ر د.

تمرین۷ : به ک ک حط دا ره با تشک تاسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۲۷۰ درج را بر حسب راد ان ب دست آ ر د.

نت جه۲ : یک دا ره (د را کامل) برابر ۳۶۰ درجه و 2π راد ان است.

تمرین برای حل :

۸ : اندازه‌ی زا ای ۱۲۰ درجه و ۴۵ درج را برحسب راد ان ب دست آور د.

۹ : اندازه‌ی زا ای $\frac{2\pi}{3}$ راد ان و $\frac{5\pi}{4}$ راد ا را برحسب درجه ب دست آ ر د.

۱۰ : اندازه‌ی ک زاویه‌ی رکز در ک دا ره ۱/۵راد ا ط ک ا روبر ب آ زاویـه ۹ س انت ت ر است. اندازه‌ی شعاع دایر را بدست آ ر د.

۱۱ : حساب ک د ک چ دت ط کشد تا عقربه‌ی دق ق ش ار س اعت ب ان دازه‌ی $2/5\pi$ راد ان د را ک د؟

***

قسمت دوّم : رابطه‌ی بین رادیان و درجه

نظر بـ ا ک ک دا ر ک انی برابر۳۶۰ درجه و ۲π می باشد. با تشک ت اسب توان، رابطه‌ی ز ر بین اندازه‌ی زاو بر حسب درجه اندازه‌ی زاو بر حسب راد ان بیان کرد.

$$\frac{D}{۳۶۰}=\frac{R}{۲\pi}$$

نتیجه : برا تبدی واحد ای اندازه‌ی زاو از رابطه‌ی ز ر استفاد شـ د.

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$$

تمرین ۱۰ : اندازه‌ی زاویه ای ۳۰ درجه است، اندازه‌ی ا زا را بر حسب راد ان بـ دست آ ر د.

تمرین ۱۱ : اندازه‌ی زاویه ای ۹۰− درجه است، اندازه‌ی ا زا را بر حسب راد ان بـ دست آ ر د.

تمرین ۱۲ : اندازه‌ی زاویه ای $\frac{۲\pi}{۳}$ راد ان است، اندازه‌ی ا زا را بر حسب درجه به دست آ ر د.

نتیجه : زاویه‌ا که اندازه‌ی آ ک درجه باشد، اندازه‌ی آن بر حسب راد ان برابر $\frac{\pi}{۱۸۰}$ است. بـ ابراین :

$$\frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{راد ان} = \text{یک درجه}$$

تمرین ۱۳ : طو برف پاک ک عقب ات بیلی ۲۴ سانت تر است. فرض کنید بـ رف پـ اک ک انی بـه اندازه‌ی ۱۲۰ درج ط کـ د.

الف : اندازه‌ی ک ا را برحسب راد ان بـ دست آ ر د.

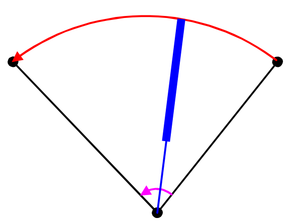
ب : ط ک ا ط شد ت سط ن ک برف پاک چـ د سانت تر است؟ ($\pi = ۳/۱۴$)

حل :

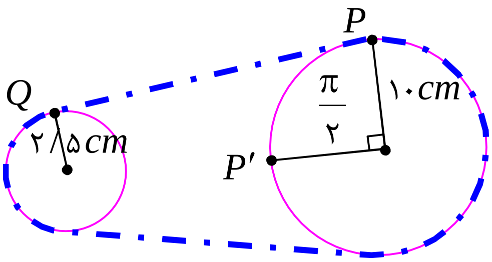
الف) $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow\frac{۱۲۰}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{۲\pi}{۳}$

ب) $\theta=\frac{L}{r}$

$$\frac{۲\pi}{۳}=\frac{L}{۲۴}\rightarrow L=\frac{۲\pi\times ۲۴}{۳}=۱۶\pi\approx ۵۰/۲۴\ cm$$



تمرین ۱۴ : در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع های ۱۰ و ۲/۵ سانتی متر را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره‌ی بزرگ‌تر به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ رادیان می‌چرخد، (یعنی نقطه‌ی P در موقعیت P' قرار می‌گیرد.) قرقره‌ی کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟ ($\pi\ rad = 3/14\ rad$)



حل : ابتدا مسافتی را که نقطه‌ی P بر روی محیط قرقره‌ی بزرگ‌تر طی می‌کند، به دست می‌آوریم.

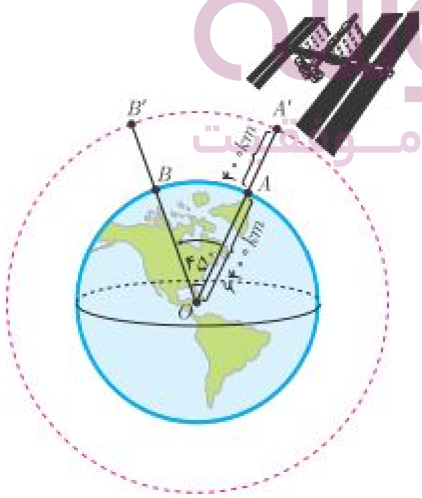
$$\theta = \frac{\overset{\frown}{PP'}}{R} \to \overset{\frown}{PP'} = R\theta = 10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi = 15/7\ cm$$

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس قرقره‌ی کوچکتر نیز ۵π سانتی متر حرکت می‌کند. برای این قرقره داریم:

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{5\pi}{2/5} = 2\pi \quad rad$$

بنابراین وقتی قرقره‌ی بزرگ‌تر ربع دور می‌چرخد قرقره‌ی کوچک‌تر یک دور کامل می‌چرخد و نقطه‌ی Q به مکان خود باز می‌گردد.

تمرین ۱۵ : ایستگاه فضایی بین المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله‌ی تقریبی ۴۰۰ کیلومتری با سطح کره‌ی زمین قرار دارد. این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B که با مرکز زمین زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد، رصد می‌شود. تعیین کنید که این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' تا B' پیموده است. شعاع تقریبی زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.



حل :

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \to \frac{45}{180} = \frac{R}{\pi} \to R = \frac{\pi}{4} \to \angle\alpha = \frac{\pi}{4} \quad rad$$

$$\alpha=\frac{L}{r}\rightarrow\frac{\pi}{۴}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۶۴۰۰+۴۰۰}\rightarrow\frac{\pi}{۴}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۶۸۰۰}\rightarrow\overset{\frown}{A'B'}=\frac{۶۸۰۰\pi}{۴}\approx ۵۳۳۸\ \ km$$

تمرین برای حل :

۱۶ : اندازه‌ی زاو ا ک عقربه‌ی ساعت ش ار از ساعت ۱ بعد از ظ ر تا ۳ بعد از ظ ر حرکت ک د را برحسب درج راد ان ب ا ک د.

۱۷ : اندازه‌ی زاویه ای $\frac{\pi}{۲۰}$ راد ان است. اندازه‌ی ا زا را برحسب درجه ب دست آ ر د.

۱۸ : ک دا ره‌ی ث ثات رسم ک د ر آ زا ا طبق بر ح ر ا ختصات را برحسب راد ان مشخص ک د.

۱۹ : جد ز ر را کا ک د.

زاویه برحسب درجه	۱۳۵			۱۵
زاو بر حسب راد ان		$-\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	

۲۰ : درست ا نادرست ج ت ز ر را ب س د.

الف) در دا ره ا ب شعاع ۱ سانت تر، ط ک ا روبر ب زاویه‌ی π راد ان، تقریباً برابر ۳/۱۴ سانت تر است.

ب) انت ا ک ا زاویه‌ی $\frac{۶\pi}{۵}$ راد ا در ربع دوّ دا ره‌ی ث ثات قرار دارد.

ج) ا ر زاویه‌ی ب دو ساق ث ث تساو الساق برابر ۱ راد ان باشد آ اه اندازه‌ی قاعده‌ی ا ث ث، ک چکتر از اندازه‌ی ر ک از ساق ا آن است.

د) زا ای $\frac{۲\pi}{۳}$ راد ان و $\frac{\pi}{۹}$ راد ان و $\frac{۷\pi}{۳۶}$ راد ا زا ا ک ث ث را تشک د د.

***

جداول مقادیر نسبت های مثلثاتی تعدادی از زاویه ها

الف) زاویه های مهم

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
	برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin		۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos		۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan		۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	نا عین
cot		نا عین	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

تمرین ۲۱ : قدار عبارت ز ر را تع ک د.

$$A = ۲\sin\frac{\pi}{۶} + \tan\frac{\pi}{۴} - \sqrt{۳}\cos\frac{\pi}{۶} + ۴\sin\frac{\pi}{۲}$$

ب) زاویه های مرزی

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin		۰	۱	۰	۱−	۰
cos		۱	۰	۱−	۰	۱
tan		۰	نا عین	۰	نا عین	۰
cot		نا عین	۰	نا عین	۰	نا عین

تمرین ۲۲ : قدار عبارت ز ر را تع ک د.

$$B = \sin\frac{\pi}{۲}\cos\pi - ۲\tan\frac{\pi}{۴} - \sqrt{۳}\tan ۲\pi + ۴\sin\frac{۳\pi}{۲}$$

***

تهیه کننده : جابر عامری   دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

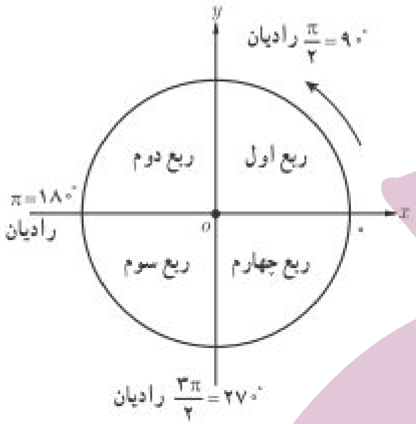
:

درس دوّم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

در ا   درس علا   بر ادآ ر   تعدادی از روابط ث ثاتا سا قبـ   روابط جد دی ن ز ب   نسبت ا   ث ثاتی

معرفی   ن اییم.
است ک   رک ز آ   ب دأ خت صات

قسمت اوّل : یادآوری تعدادی از روابط مثلثاتی

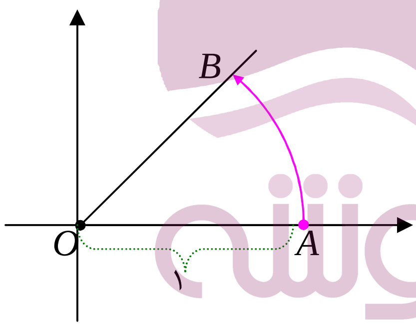


م   دان د، دا ره‌ای   و ان دازه‌ی شعاع آ   ک واح د طـول باش د، را دا ره‌ی ث ثا ت   ا دا ره‌ی استاندارد می نا   د.

در   ر دا ره‌ی ث ثاتی ب را   ت شک   زاو   نقطـه‌ی A را ب دأ حرکت در نظر   رند. حال ا ر نقطه‌ی A را حول مرکز دا ره د را   دهـیم ت ا نقطـه‌ی B بدس ت آ   د، در ا   ص   رت زاویـه ی AOB حاص   ش د.

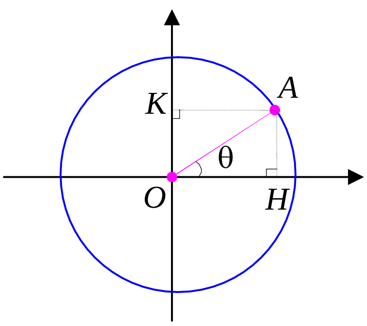
تذکر :

۱ : ا ر د را   در خ ف ج ت حرکت عقرب   ا س اعت باشد زا   را ثبت و ا ر درج ت حرکت عقرب   ا س اعت باشد زا   را ف در نظر   رند.



۲ : ا ر نقط ی A د را   داده نش د زا   صفر می باشد. ا ر نقطه‌ی A را به انداز   ک د ر کا   د را ده   ب   حل اوّلیه‌ی خ د بر   ردد. ی ک د را کامـل زاو   ا   برابر ۳۶۰ درجه ا ۲π را تشکیل   د د.

تمرین ۱ : زاویه‌ی $\frac{۳\pi}{۴}$ راد ا   در کدا ربع از دا ره‌ی ث ثات قرار   رد؟ این زا   را ر   دا ره‌ی مث ثاتی مشخص ک د.



بر ا   اساس   توان نسبت   ا   ثثاثر را   دا رهی ثثاتی ن ز
تعر ف کرد.

ا ر نقطه‌ی $A(x_{\circ}, y_{\circ})$ ر   دا رهی استاندارد قرار رد. در ا   حالت
م   توان ن شت:

$$OA = r = ١$$

$$\sin\theta = \frac{y_{\circ}}{r} = \frac{y_{\circ}}{١} = y_{\circ} \qquad \text{و} \qquad \cos\theta = \frac{x_{\circ}}{r} = \frac{x_{\circ}}{١} = x_{\circ}$$

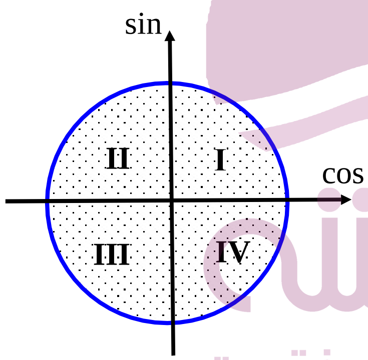
$$\tan\theta = \frac{y_{\circ}}{x_{\circ}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{و} \qquad \cot\theta = \frac{x_{\circ}}{y_{\circ}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

ه چن   با ت جه ب رابطه‌ی ف ثاغ رس در ث قائم الزاویه‌ی OAH توان ن شت:

$$x_{\circ}^{٢} + y_{\circ}^{٢} = r^{٢} \rightarrow \cos^{٢}\theta + \sin^{٢}\theta = ١$$

ب   ج ت است ک ح ر ط   ا را ح ر کس   س   ا   ح ر
عرض ا را ح ر س   س   ا می نا د.

گا   ز   شد د ک ع   ت نسبت   ا   ثثاتر را در ن احی
متخ ف را داشته باشیم. با ت جه ب تعر ف قبل م توا   جد   ز ر را
برا   تشخ ص ع   ت نسبت   ا   ثثاتر در دا رهی ثثاتی ت ظیم
 ن د.[1]



	ربع اوّل	ربع دوّم	ربع سوّم	ربع چهارم
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

1. برخ   برا   حفظ کرد ع   ت ا   جد   ب ترتیب نواح   فقط برا   خا   ا   ثبت سبت   ا   س   س   کس   س و تا ژا ت ، از حر ف کلمه ی **هستک** استفاد   ک د.

با ت جه ب تعر ف نسبت ا ثثاث در دا ره‌ی ثثاتی توا اتحاد ا ز ر را ب ان ن د.

۱. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	۳. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	۵. $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
۲. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	۴. $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	۶. $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$

نتیجه : ا ر α ک زاویه‌ی دلخواه باشد. در ا ص رت:

الف) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ ب) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

ج) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$ د) $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

ه چنن با ت جه ب تعار ف ق واضح است که س س کس س ر زا عددی است ک در فاصله‌ی $[-1,1]$ قرار رد.

$$-1 \le \cos\theta \le 1 \quad \text{و} \quad -1 \le \sin\theta \le 1$$

تمرین ۲ : ا ر ک ضع زاویه‌ی θ در ربع سوّ دا ره‌ی ثثاتی باشد و $\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ باشد. سا ر ن سبت ها ثثاتی ا زا را تع ک د.

تمرین ۳ : ا ر $\cot\alpha = -2$ و $\cos\alpha > 0$ سا ر نسبت ا ثثاث زاویه‌ی α را تع ک د.

تمرین برای حل :

۴ : ا ر $\cos x = -\dfrac{4}{5}$ و $\sin x > 0$ نسبت ا ثثاث د ر زاویه‌ی x را ب ا ب د.

۵ : حاص عبارت ا ز ر را ب دست آ ر د.

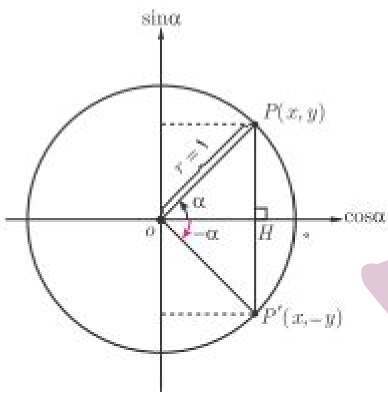
الف) $\cot\dfrac{\pi}{6} - \tan\dfrac{\pi}{3} \times \sin\dfrac{\pi}{4} =$

ب) $\dfrac{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cot^2(\frac{\pi}{4}) - \cos^2(\frac{\pi}{3})} + \cos^2(75) + \sin^2(75) =$

***

قسمت دوّم : نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

ا ر αیک زا ر دا ره‌ی مثلثاتی باشد، α− قرینه‌ی آن است. با ت جه ب شکل قابل ب نسبت ای مثلثات زاویه‌ی α قرینه‌ی آ عنی α− رابطه‌ی ز ر ج د دارد.



$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$$

تمرین۶ : نسبت ا ثلثات زاویه‌ی ۳۰− درج را ب دست آ ر د.

تمرین۷ : حاص عبارت ا ز ر را ب دست آ ر د.

الف) $\cos(-\frac{\pi}{۳}) \times \cos(-\frac{\pi}{۶}) + \tan(-\frac{\pi}{۴}) =$

ب) $\dfrac{\cos(-۹۰^\circ) + \sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ) - \cos(-۳۶۰^\circ)} =$

ج) $\cot(-\frac{\pi}{۶}) + \tan(-\frac{\pi}{۳}) =$

د) $\cos(-۴۵^\circ) \times \cos(-۶۰^\circ) + \sin(-۴۵^\circ) \times \sin(-۶۰^\circ) =$

***

قسمت سوّم : نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل

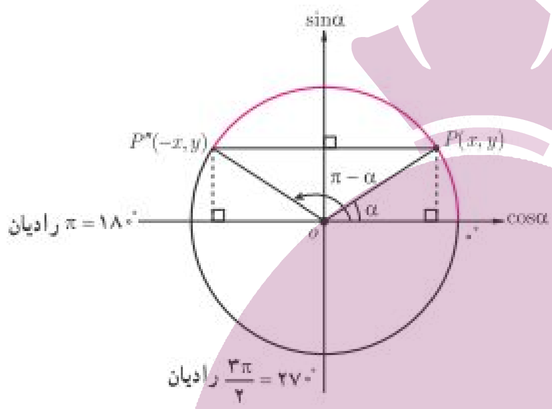
د زا را ک د، هر ا جـ ع انداز ا آن ا۱۸۰ درج ا π راد ان[2] باشد. ا ر β و α د زاویه‌ی

مکم باشد در ا صر ت توا ن شت، $\alpha+\beta=\pi$ که از آن نت جـ شـ د،

$$\beta=\pi-\alpha$$

بی نسبت ها ثاث زاویه‌ی α ک آ عنی β با ت جه ب شک قاب تـوا رابطـه‌ی ز ر را

ن شت :



$$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot(\alpha)$$

تمرین۸ : ک ر ک از زا ا ز ر را شخص ک د.

الف) 75° ب) 25° ج) $\frac{\pi}{12}$ د) $\frac{-\pi}{4}$

تمرین ۹: حاص ر ک از نسبت ا ثاث ز ر را تع ک د.

الف) $\tan\frac{2\pi}{3}=$ ت) $\cot(-120^\circ)=$

ب) $\cos\frac{3\pi}{4}=$ ث) $\cos(135^\circ)=$

پ) $\sin 120^\circ=$

تمرین۱۰ : نسبت ا ثاثی زاویه‌ی $\frac{5\pi}{6}$ راد ا را ب دست آ ر د.

---

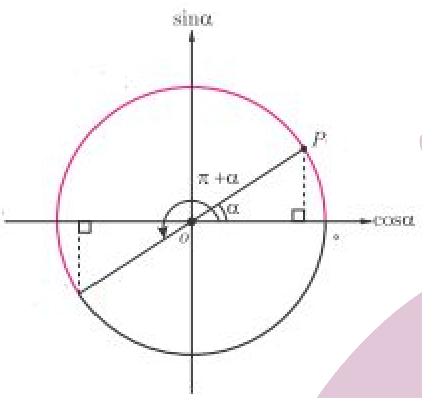
2. و ب ط ر ک جـ ع آ ا $2k\pi+\pi$ راد ا باشد.

قسمت چهارم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف π رادیان

ا ر د زاویه β و α ط ری باش د که اخت ف آن ا ۱۸۰ درج ا π راد ا شد. در ا ص رت تـوان ن شت، $\beta - \alpha = \pi$ که از آن نت ج شد،

$$\beta = \pi + \alpha$$

لذا توا رابطه‌ی ز ر را ن شت :



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$$
$$\cot(\pi + \alpha) = \cot(\alpha)$$

تمرین ۱۱ : ک ر ک از زا ا ز ر را شخص ک د.

الف) ۷۵° ب) ۲۵° ج) $\frac{\pi}{۱۲}$ د) $\frac{-\pi}{۴}$

تمرین ۱۲ : حاص ر ک از نسبت ا ث ثات ز ر را تع ک د.

الف) $\cot\frac{۵\pi}{۴} =$

ب) $\cos(-\frac{۴\pi}{۳}) =$

پ) $\sin ۲۲۵^\circ =$

ت) $\tan(۲۲۵^\circ) =$

ث) $\sin(-\frac{۷\pi}{۶}) =$

تمرین ۱۳ : نسبت ا ث ثات زاویه‌ی $\frac{۷\pi}{۶}$ راد ان را ب دست آ ر د.

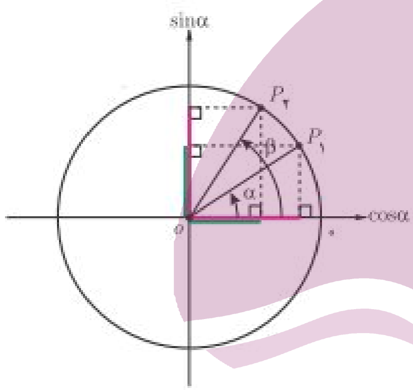
قسمت پنجم : نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم

د زا را ت د ر ا ر جه ع انداز ا آن ا ۹۰ درج ا $\frac{\pi}{۲}$ راد ان[3] باشد. ا ر β و α د زاویـه‌ی

متمم باشد درا صرت توا ن شت، $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲}$ که از آن نت جه شد،

$$\beta = \frac{\pi}{۲} - \alpha$$

بین نسبت ا ثلثات زاویه‌ی α ت آ عنی β با ت جه ب شکل قابل توا رابطه‌ی ز ر را ن شت :



$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cot(\alpha)$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \tan(\alpha)$$

تمرین ۱۴ : مت زا ا ز ر را تع ک د.

الف) $\frac{\pi}{۷}$ ب) -۲۵°

تمرین ۱۵: ا ر $\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}$ حاص تسا ز ر را تع ک د.

$\cos(۷۵^\circ) =$

تمرین ۱۶ : تسا ا ز ر را کا ک د.

الف) $\sin ۷۲^\circ = \cos(\quad)$ ب) $\tan \frac{۵\pi}{۱۴} = \cot(\quad)$

---

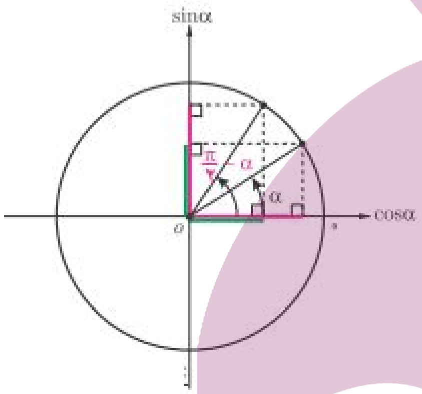
3. و ب ط ر ک ج ع آ ا $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ راد ا باشد.

قسمت ششم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

ا ر د زاویه β و α ط ری باش د که اخت ف آن ا ۹۰ درج ا $\frac{\pi}{۲}$ راد ا شد. در ا ص رت تـوان ن شت، $\beta-\alpha=\frac{\pi}{۲}$ که از آن نت جه شد،

$$\beta=\frac{\pi}{۲}+\alpha$$

لذا توا رابطه‌ی ز ر را ن شت :



$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos(\alpha)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin(\alpha)$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot(\alpha)$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan(\alpha)$$

تمرین۱۷ : حاص ر ک از نسبت ثلثات ز ر را تع ک د.

$$\sin(\frac{۲\pi}{۳})=$$

تمرین۱۸ : نسبت ا ثلثات زاویه‌ی ۱۳۵ درجه را ب دست آ ر د.

***

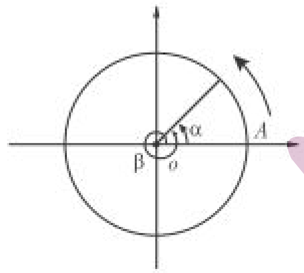
قسمت هفتم :نسبت های مثلثاتی با مجموع یا تفاضل 2π رادیان

ا ر د زاویه β و α ط ری باش د که اخت ف آن ۳۶۰ درج ا 2π راد ا ش د. در ا ص رت تـوان

ن شت، $\beta-\alpha=2\pi$ که از آن نت جه ش د،

$$\beta = 2\pi + \alpha$$

لذا توا رابطه‌ی ز ر را ن شت :



$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin(\alpha)$$
$$\cos(2\pi+\alpha)=\cos(\alpha)$$
$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan(\alpha)$$
$$\cot(2\pi+\alpha)=\cot(\alpha)$$

تمرین۱۹ : حاص ر ک از نسبت ثثاث ز ر را تع ک د.

الف) $\sin(405^\circ)=$

ب) $\cos(\frac{5\pi}{3})=$

***

نتیجه : بر اساس آنچ ک تاک داشتیم م توا روابط د ر را بررس کرد که ب ط ر خت صر ایـن

روابط را ب شک ز ر عنوا کنیم.

الف) ا ر زاویه‌ی ثثاث شا ضرب ا صح ح π باشد، نسبت ثثاث تغ ر ن ک د.

ب) در نسبت ا ثثاث س س کس س توا ضرب ا ز ج π را حذف کرد ا ا ر ضرب ای

فرد π را حذف کن ،با د پس از حذف ک ع ت ف جل نسبت ثثاث قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(3\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin(3\pi-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$$

ج) در نسبت ا ثثاث تانژانت کتانژانت ت ا ضرب ا صح ح π را توا حذف کرد.

مثلاً:

$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(3\pi-\alpha)=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

د) در ت ام نسبت ا ثثاث توان $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ را حذف کرد ول پس از حذف با د:

۱. س س را ب کس س تانژانت را ب کتانژانت تغ ر داد و برعکس

۲. با فرض حاده ب د زاویه‌ی α، ربع ک زاویه‌ی ثثاث در آن اقع است را ر دا ره‌ی ثثاث پ دا کرد ع ت نسبت ثثاث آنرا شخص ن ده و جلوی نسبت ثثاث جد د قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=+\cos\alpha \qquad \text{ربع دوّم}$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \text{ربع سوّم}$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=+\cot\alpha \qquad \text{ربع اوّل}$$

توجه ۱ : ا ر $n\in N$ آن اه وار داریم:

$$\sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\sin\alpha \qquad \tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha \qquad \cot(n\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

توجه۲ : با ت جه ب قواعد بالا وار داریم.

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$$

***

تمرین ۲۰: تسا ا زیر را کا ک د.

۱) $\tan ۱۲۰^\circ =$

۲) $\cos(۱۳۵^\circ) =$

۳) $\cot(۲۱۰^\circ) =$

۴) $\cos(-۱۵۰^\circ) =$

۵) $\sin(\frac{۱۳\pi}{۲} - \alpha) =$

۶) $\sin(\alpha - ۳\pi) =$

تمرین ۲۱ : تسا ز ر را ثابت ک د.

$$\sqrt{۲}\sin(۱۳۵^\circ) + \cot(۳۰^\circ).\cos(۲۱۰^\circ) - \tan(-۱۳۵^\circ) = -\frac{۳}{۲}$$

۲۲ : در تساوی ز ر ب جای x ک زاویه‌ی اسب قرار د د.

$$\sin(x) = \cos(۱۰^\circ + x)$$

حل : د زاو با د ت د ر باش د. پس :

$$x + ۱۰ + x = ۹۰ \rightarrow ۲x = ۸۰ \rightarrow x = ۴۰$$

***

تمرین برای حل:

۲۳ : قدار دق ق عبارت ا ز ر را ب دست آ ر د.

الف $\sin(\frac{۳\pi}{۴}) =$ ب) $\tan(\frac{۱۱}{۶}\pi) =$ ج) $\cos(\frac{۲۵\pi}{۳})$

۲۴ : نشا د د که $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) + \cos(\pi - \theta) = ۰$

۲۵ : قدار عدد ر ک از عبارت ا ز ر را ب دست آ ر د.

الف) $\tan(-۳۰^\circ)\cot(۱۵۰^\circ) - \tan(۱۳۵^\circ) =$

ب $\dfrac{\sin(۲۴۰^\circ) \times \cos(۱۲۰^\circ) + \cos(-۲۷۰^\circ) \times \sin(۳۰^\circ)}{\cos(۲۲۵^\circ) \times \cos(-۱۳۵^\circ) + \tan(۴۵^\circ)} =$

۲۶ : حاصل $\tan(۲۰^\circ) + \tan(۴۰^\circ) + \tan(۶۰^\circ) + \ldots + \tan(۱۸۰^\circ)$ را ب دست آ ر د.

۲۷ : حاصل $\frac{\sin(۳۰۰^\circ)}{۱-\cos(۲۴۰^\circ)}$ را ب دست آ ر د.

۲۸ : قدار عدد عبارت قابل را تع ک د.

$$A=\frac{\cos(۲۴۰^\circ)+\sin(-۱۵۰^\circ)}{\tan(-۴۵^\circ)}$$

۲۹ : درست تسا ا ز ر را ثابت ک د.

الف)

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+x)\times\cos(\frac{\pi}{۲}-x)+\cos(x-۲\pi)\times\sin(x-\pi)+\tan(-x)\times\tan(\frac{\pi}{۲}+x)=۱$$

ب) $۳\sin(۷۰^\circ)+\sin(۵۵^\circ)+\cos(۲۱۵^\circ)+۲\cos(۱۶۰^\circ)=\cos(۲۰^\circ)$

۳۰ : رابطه‌ی ز ر را ثابت ک د.

$$\sin(۲۳۰^\circ)-۲\sin(۱۴۰^\circ)+\sin(۴۱۰^\circ)+\cos(-۵۰^\circ)+\sin(۴۰^\circ)=۰$$

۳۱ : آ ا د زا توا افت ک س س کسا داشته باش د چرا؟ برا کس س چط ر؟

۳۲ : درست تسا ا ز ر را بررس ک د.

الف) $\sin(۸۴۰^\circ)=\sin(۶۰^\circ)$

ب) $\cos(-۳۲۴^\circ)=\cos(۳۶^\circ)$

ج) $\tan(-۱۰۰۰^\circ)=\tan(۸۰^\circ)$

د) $\sin(۸۷۵^\circ)=\sin(۱۵۵^\circ)$

۳۲ : در تسا ا ز ر ب جای x ک زاویه‌ی اسب قرار د د.

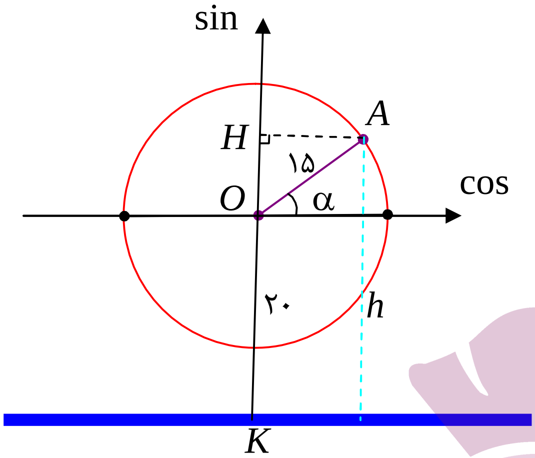
الف) $\sin(x)=\cos(۲۰^\circ+x)$

ب) $\tan(x+\frac{\pi}{۱۸})=\cot(\frac{۲\pi}{۹}+x)$

***

درس سوّم : توابع مثلثاتی

قبل از ر د به بحث، توابع ثلثاتی، ثا ز ر را حل می کنیم.



یک ش ر باز چرخ ف ک دارد ک ش عاع دا ره‌ی آن ۱۵ تر است. فاصله‌ی رکز دا ره‌ی ا   چرخ   ف ک ت ا سطح زمین۲۰ تر است. واضح است که ارتفاع ر کابین مان د کابین A با تغ ر زاویه‌ی α تغ ر   ک د ب رای ارتفاع کاب   توان ن شت:

$$\sin\alpha = \frac{OH}{OA} \rightarrow OH = OA.\sin\alpha = ۱۵\sin\alpha$$

$$h = KH = OK + OH = ۲۰ + ۱۵\sin\alpha$$

$$\rightarrow h = ۲۰ + ۱۵\sin\alpha$$

هر تابع شاب تابع ف ق را ک **تابع مثلثاتی** می نا د. باة ج ب ا   تابع ب سئوا ت زیر پاسخ د د.

الف: ارتفاع کاب   را قت   که $\alpha = ۱۲۰^\circ$ را ب دست آ ر د.

ب : مقدار حداق   قدار حداکثری ارتفاع کاب   را تع   ک د.

ج : تع   ک د ک زاویه‌ی αچقدر باشد تا ارتفاع کابین ۲۰ تر ش د.

***

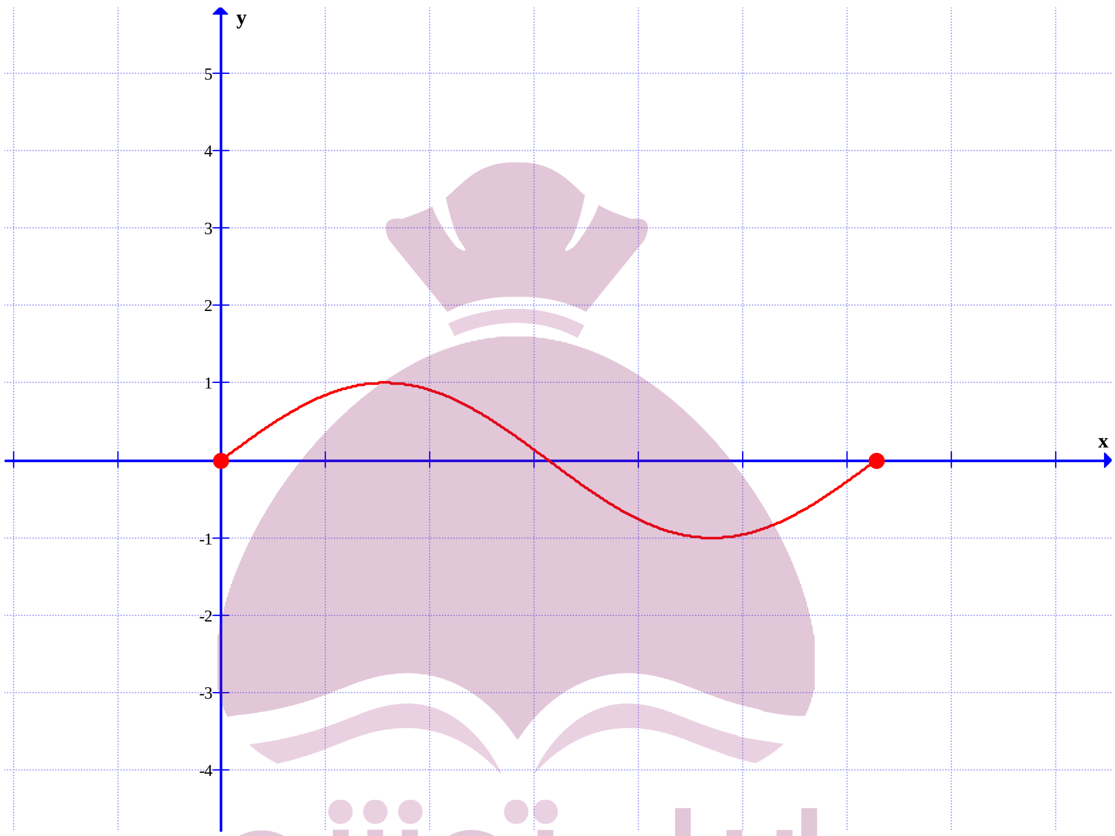
قسمت اوّل : توابع مثلثاتی

هر تابع شامل نسبت ا   ثلثات را تابع ثلثات   د. تابع ای $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ ساد تر   تابع ا   ثلثات   ستند. برا رسم ن دار چ   توابع ساد تر   ر ش، انتخاب چ د نقطه بـه ک ک عادل   پ دا کرد آن ا ر دست ا ختصات (ر ش نقط ابی) می باشد.

مثال۱ : ن دار تابع $f(x) = \sin x$ را در فاصله‌ی $[۰, ۲\pi]$ رسم   ک د.

حل : ابتدا چ د نقطه از ن دار تابع را ب ک ک عادله‌ی داد شده انتخاب   کنیم.

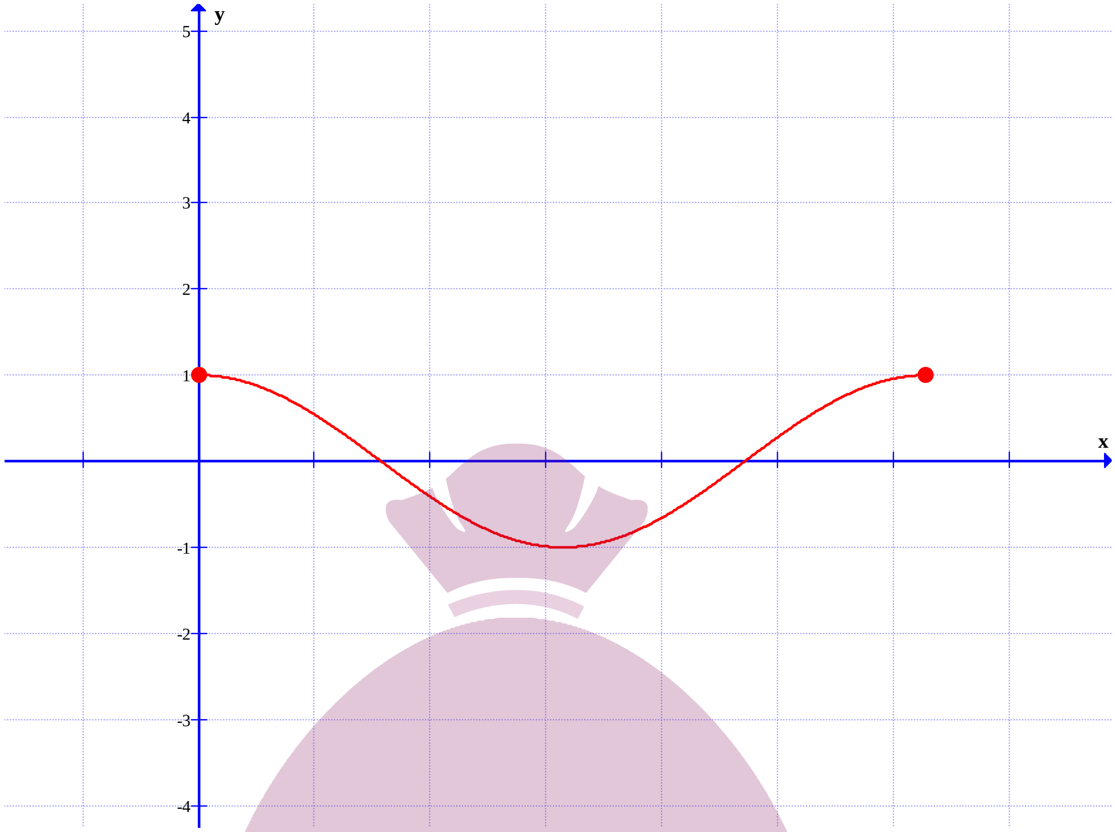
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	-۱	۰



مثال۲ : ن   دار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ رس ک د.

حل : ابتدا چند نقطه از ن   دار تابع را ب ک ک عادله‌ی داد شده انتخاب   کنیم.

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	-۱	۰	۱



تمرین ۱ : ن دار تابع ای $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ رس ک د.

***

قسمت دوّم : توابع مثلثاتی

در اداه ب بررس خواص ا توابع پردازیم.

خاصیت ۱ : قدار حداکثری (max) تابع ای $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ برابر ۱ قدار حداقلی (min) آن ا برابر ۱− می باشد.

خاصیت ۲ : دامنه‌ی تابع ای $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ ج عه‌ی اعداد حق قی برد آن ا بازه‌ی $[-۱,۱]$ می باشد.

خاصیت ۳ : تابع $f(x)=\sin x$ از بدأ ختصات ذرد، ول تابع $f(x)=\cos x$ از نقطه‌ی (۰,۱) م ذرد.

خاصیت ۴ : ا د تابع ت ا ب ستد. یع در فواص عینی ن دار آن ا تکرار ش د. ط ر ی ک از ا فاص ا را د ره‌ی ت ا ب می نا د. د ر ت ا ب ا د تابع $T=۲\pi$ می باشد.

تمرین۲ : قدار تابع $f(x)=۲\sin ۳x$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ بدست آ ر د.

تمرین۳ : قدار تابع $f(x)=-۲\sin(\pi-x)$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$ بدست آ ر د.

تمرین۴ : مقد تار بزیر را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$ را بهس ورید.

$$f(x)=-۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}}\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})$$

تمرین۵ : قدار حداکثری حداقلی تابع ز ر را ب اب د.

$$f(x)=۳+۲\sin x$$

تمرین برای حل :

۶ : قدار حداکثر حداقلی تابع ز ر را ب اب د.

$$f(x)=۳-۵\cos x$$

۷ : قدار حداکثر حداقلی تابع ز ر را ب اب د.

$$f(x)=۷+۲\sin x$$

۸ : درست ا نادرست ر ک از ج ت ز ر را تع ک د.

الف) حداکثر قدار تابع س س در نقاطی ب ط ای $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ است.

ب) حداقل قدار تابع س س در نقاطی ب ط ای $x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ است.

۹ : درست ا نادرست ر ک از ج ت ز ر را در رد تواب ع $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ تع ک د.

الف) دامنه‌ی تابع س س ج عه‌ی .... و برد آ ج عه‌ی .... است.

ب) دامنه‌ی تابع کس س ج عه‌ی .... و برد آ ج عه‌ی .... است.

پ) مقدار تابع س س در ط ای $x=k\pi \quad (k\in Z)$، برابر .... است.

ت) قدار تابع کس س در نقاطی ب ط ای .... برابر با صفر است.

ج) حداکثر قدار تابع کس س .... است ک در نقاطی ب ط ای $x=۲k\pi \quad (k\in Z)$ است.

ح) حداق قدار تابع کسینوس .... است ک در نقاطی ب ط ای .... ب دست آ د.

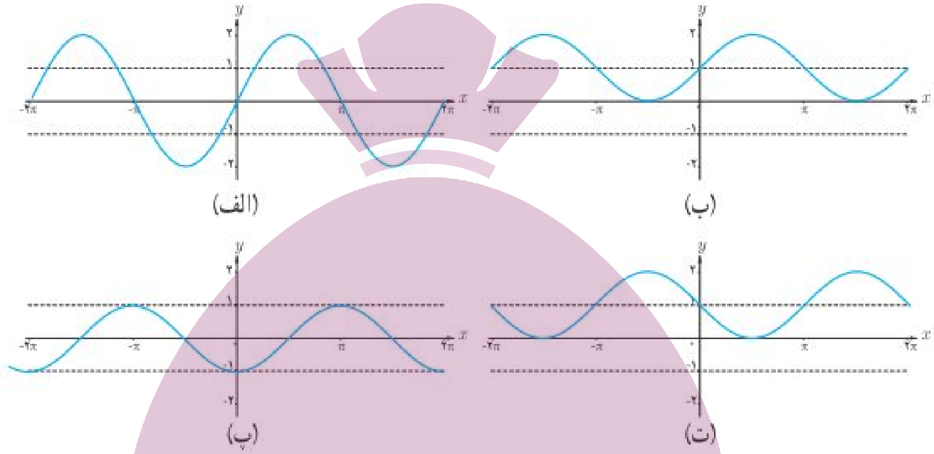
۱۰ : ن دار توابع ز ر را رس ک د.

الف) $y=۳\cos x$ ب) $y=۱+\sin x$

ج) $y=۲\sin x-۱$ د) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

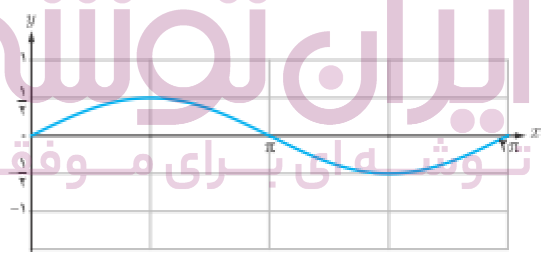
۱۱ : ر ک از ن دار ا ز ر ربـ ط بـ کدا تابع است.

۱) $y=۲\sin x$ ۲) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ ۳) $y=\sin x+۱$ ۴) $y=-\sin x+۱$



۱۲ : با ذکر دل شخص ک د کدا ک از زار ا ز ر درست کدام نادرست اند؟

الف : شک ز ر ن دار تابع $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ را نشا د د.



ب : شک ز ر ن دار تابع $y=\cos x-\frac{۱}{۲}$ را نشا د د.

پ : برا رسم ن دار تابع با ضابطه‌ی $y=۱+\sin x$ کافی است، ن دار تابع س س را ب اندازه‌ی ک واحد به موازات حـ ر x ا انتقا دهیم.

ت : برا رسم ن دار تابع با ضابطه‌ی $y=-\cos x$ کافی است، ن دار تابع کس س را نسبت ب   حـ ر x ا قر کنیم.

***

تهیه کننده : جابر عامری   دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

:

:

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم « رشته ی علوم تجربی »

فصل ۵ : توابع نمایی و لگاریتمی

مهر ۱۳۹۶

درس اوّل : تعمیم توان رسانی

آشنایی با ف تابع نمایی ب عنوا یکی از انواع توابع در ریاضیات برا درک فهم بسیار فا د ر در ریاضیات فیزیک و از ج شدت زلزل شدت صدا قد ت یک شیء و ... لاز ضر ری است. در ای جا ض ادآ ر آ ض عات تکمیلی د ر را عرف کنیم.

قسمت اوّل : یادآوری قوانین توان رسانی و ریشه گیری

در سا ا قبل با توا ا طبیع صحیح ای اعداد حقیق قوان آن ا آشنا شده ا ید. در ای جا ا چ د رابطه در رد توان ر ش ری را ج ت ادآ ر عرف کنیم.

۱ : توا صفر

$$\begin{cases} a^{\circ} = ۱ \\ a \neq ۰ \end{cases}$$

مثال: $۵^{\circ} = ۱$

***

۲ : توا یک

$$a^{۱} = a$$

مثال: $۵^{۱} = ۵$

***

۳ : توا منفی

$$\begin{cases} a^{-n} = \dfrac{۱}{a^{n}} \\ a \neq ۰ \end{cases}$$

مثال: $۵^{-۳} = \dfrac{۱}{۵^{۳}}$

***

۴ : توا کسری

$$\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$$

ا ر n ز ج باشد، با د $a \geq ۰$ باشد.

مثال: $۵^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۵^{۲}}$

***

۵ : توا   توان

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

مثال: $(۵^{۳})^{۲} = ۵^{۳\times۲} = ۵^{۶}$

***

۶ : ضرب اعداد تواندار با پا   ا   ساوی

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال: $۵^{۷} \times ۵^{۲} = ۵^{۷+۲} = ۵^{۹}$

***

۷ : ضرب اعداد تواندار با توا   ای ساوی

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

مثال: $۵^{۷} \times ۶^{۷} = ۳۰^{۷}$

***

۸ : تقسیم اعداد تواندار با پا   ا   ساوی

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

مثال: $۵^{۷} \div ۵^{۳} = ۵^{۷-۳} = ۵^{۴}$

***

۹ : تقسیم اعداد تواندار با توا   ای مساوی

$$a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$$

مثال: $۱۵^{۷} \div ۵^{۷} = ۳^{۷}$

***

۱۰ : ر ا د عدد تواندار سا   پا   ا   سا   داشته باشد توا   ا   آن ا ز سا   د.

$$\begin{cases} a^m = a^n \rightarrow m = n \\ a \neq ۰,۱,-۱ \end{cases}$$

مثال: $۵^{x} = ۵^{۳} \rightarrow x = ۳$

***

تمرین۱ : در تسا   ا   قابل مقدار x را حساب ک د.

الف) $۲^{x}=۳۲$

ب) $۳^{x}\times ۳^{۴}=۲۴۳$

ج) $۹^{x}=۲۷$

د $۳^{x-۱}=\frac{۱}{۸۱}$

حل:

الف) $۲^{x}=۳۲\rightarrow ۲^{x}=۲^{۵}\rightarrow x=۵$

ب) $۳^{x}\times ۳^{۴}=۲۴۳\rightarrow ۳^{x+۴}=۳^{۵}\rightarrow x+۴=۵\rightarrow x=۱$

ج) $۹^{x}=۲۷\rightarrow (۳^{۲})^{x}=۳^{۳}\rightarrow ۳^{۲x}=۳^{۳}\rightarrow ۲x=۳\rightarrow x=\frac{۳}{۲}$

د $۳^{x-۱}=\frac{۱}{۸۱}\rightarrow ۳^{x-۱}=\frac{۱}{۳^{۴}}\rightarrow ۳^{x-۱}=۳^{-۴}\rightarrow x-۱=-۴\rightarrow x=-۴+۱=-۳$

تمرین برای حل :

۲ : عادل   ا   ز ر را حـ   ک   د.

الف) $۳^{۲x-۳}=۸۱$

ب) $۴^{۲x-۱}=۸^{x+۱}$

پ $۵^{۳n-۱}=۱۲۵^{۲n+۱}$

ت) $۲^{۳n-۲}=\frac{۱}{۳۲}$

ث) $۹^{x}=۳^{x^{۲}-۴x}$

ج) $۹^{۳y-۳}=۲۷^{y+۱}$

ح) $(\frac{۳}{۵})^{x+۱}=\frac{۲۵}{۹}$

خ) $۴^{۳x+۲}=\frac{۱}{۶۴^{۳}}$

❋❋❋

قسمت دوّم : تعمیم قوانین توان رسانی

قواد   توا   رسانی برا   توا   ا   حق قی ن ز برقرارند. ا ر b و a د عدد حق ق   ثبت   خالف ک و y و x د عدد حق قی باش د آن ا داریم.

۱) $a^{\circ}=۱$

۲) $a^{۱}=a$

۳) $a^{-x}=\frac{۱}{a^{x}}$

۴) $(a^{x})^{y}=a^{xy}$

۵) $a^{x}\times a^{y}=a^{x+y}$

۶) $\frac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}$

۷) $a^{x}\times b^{x}=(ab)^{x}$

۸) $\frac{a^{x}}{b^{x}}=(\frac{a}{b})^{x}$

۹) $a^{x}=a^{y}\rightarrow x=y$

تمرین۳ : حاص   عبارت $\frac{۴^{\sqrt{۳}}\times ۲^{\sqrt{۷۵}}}{۲^{\sqrt{۱۲}}\times ۸^{\sqrt{۳}}}$ را ب ساد تر   شکل ب   س د.

حل :

$$\frac{۴^{\sqrt{۳}}\times ۲^{\sqrt{۷۵}}}{۲^{\sqrt{۱۲}}\times ۸^{\sqrt{۳}}}=\frac{۲^{۲\sqrt{۳}}\times ۲^{۵\sqrt{۳}}}{۲^{۲\sqrt{۳}}\times ۲^{۳\sqrt{۳}}}=\frac{۲^{۷\sqrt{۳}}}{۲^{۵\sqrt{۳}}}=۲^{۲\sqrt{۳}}$$

تمرین۴ : حاص   عبارت   ا   ز ر را ب دست آ ر د.

۱) $((\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}}=$

۲) $((\sqrt{۱})^{۲-\sqrt{۳}})^{۲+\sqrt{۳}}=$

۳) $((\sqrt[۳]{۵})^{۳-\sqrt{۳}})^{۳+\sqrt{۳}}=$

۴) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}}=$

۵) $(۲-\sqrt[۳]{۷})^{\pi+۱}(۴+۲\sqrt[۳]{۷}+\sqrt[۳]{۴۹})^{\pi+۱}=$

تمرین۵ : قدار x را از عادله‌ی ز ر ب دست آ ر د.

$$x^{\sqrt{۲}}+۱=۵$$

حل :

$$x^{\sqrt{۲}}+۱=۵ \rightarrow x^{\sqrt{۲}}=۴ \rightarrow (x^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}}=(۴)^{\sqrt{۲}} \rightarrow x^{۲}=۲^{۲\sqrt{۲}} \rightarrow x=۲^{\sqrt{۲}}$$

درس دوّم : لگاریتم و معادلات لگاریتمی

جان نپر ر اضدان اسکاتلندی(تولد۱۵۵۰   فات ۱۶۱۷) مفهوم ل ار تم را پا   ذار کرد. ل ار تم برای ساد کرد   حاسبات ابداع شد به عنوان بزر تر پ شرفت ع حساب در قر   ای ۱۶ و ۱۷ مح سو ب م شو د. در ا درس فهوم ل ار تم را عرف   کن   با خواص آ آشنا شویم.

قسمت اوّل : مفهوم لگاریتم

ل ار تم عدد ثبت b در پا عدد ثبت خالف ک a عدد از د x است که ا ر a به توان x برسد، حاصل برابر b شو د.

$$\log_{a}^{b}=x \leftrightarrow a^{x}=b$$

$$\begin{cases} a,b>۰ \\ a\neq ۱ \end{cases}$$

برا   ثال:

$$۲^{۳}=۸ \rightarrow \log_{۲}^{۸}=۳$$

((ن اد $\log_{b}^{a}$ را بخوان د، ل ار تم a در پا ی b))

تمرین ۱ : تسا ا ز ر را به صو رت ل ار تم ب سد.

الف) $۷^{۳}=۳۴۳$ ب) $۲^{-۳}=\frac{۱}{۸}$ ج) $\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

حل:

الف) $۷^{۳}=۳۴۳ \rightarrow \log_{۷}^{۳۴۳}=۳$

ب) $۲^{-۳}=\frac{۱}{۸} \rightarrow \log_{۲}^{\frac{۱}{۸}}=-۳$

ج) $\sqrt[۳]{۶۴}=۴ \rightarrow ۶۴^{\frac{۱}{۳}}=۴ \rightarrow \log_{۶۴}^{۴}=\frac{۱}{۳}$

تمرین ۲ : تسا ای ز ر را به صو رت توانی ب سد.

الف) $\log_{۲}^{۶۴}=۶$ ب) $\log_{۲}^{\sqrt{۸}}=\frac{۳}{۲}$ ج) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱}=-۳$

حل:

الف) $\log_{۲}^{۶۴} = ۶ \rightarrow ۲^{۶} = ۶۴$

ب) $\log_{۲}^{\sqrt{۸}} = \frac{۳}{۲} \rightarrow ۲^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt{۸}$

ج) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} = -۳ \rightarrow ۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۱$

تمرین۳ : در هر مورد مقدار x را پیدا کنید.

الف) $\log_{۳}^{۸۱} = x$ ب) $\log_{۲}^{x} = ۳$ ج) $\log_{x}^{۶۴} = ۲$

حل:

الف) $\log_{۳}^{۸۱} = x \rightarrow ۳^{x} = ۸۱ \rightarrow ۳^{x} = ۳^{۴} \rightarrow x = ۴$

ب) $\log_{۲}^{x} = ۳ \rightarrow ۲^{۳} = x \rightarrow x = ۸$

ج) $\log_{x}^{۶۴} = ۲ \rightarrow x^{۲} = ۶۴ \rightarrow x = \sqrt{۶۴} \rightarrow x = ۸$

تمرین۴ : مقدار x را از تساوی زیر محاسبه کنید.

$$\log_{۷}^{۴۹} = ۲x - ۱$$

حل:

$$\log_{۷}^{۴۹} = ۲x - ۱ \rightarrow ۷^{۲x-۱} = ۴۹ \rightarrow ۷^{۲x-۱} = ۷^{۲} \rightarrow ۲x - ۱ = ۲ \rightarrow ۲x = ۳ \rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

تمرین۵ : لگاریتم‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\log_{۲}^{۲۵۶}$

ب) $\log_{۴}^{۲۵۶}$

ج) $\log_{۷}^{۷}$

د $\log_{۳}^{۱}$

حل:

الف) $\log_{۲}^{۲۵۶} = x \rightarrow ۲^{x} = ۲۵۶ \rightarrow ۲^{x} = ۲^{۸} \rightarrow x = ۸$

ب) $\log_{۴}^{۲۵۶} = y \rightarrow ۴^{y} = ۲۵۶ \rightarrow ۴^{y} = ۴^{۴} \rightarrow y = ۴$

ج) $\log_7^7 = z \to 7^z = 7 \to 7^z = 7^1 \to z = 1$

د $\log_3^1 = t \to 3^t = 1 \to 3^t = 3^0 \to t = 0$

نتیجه:

۱: ل ار ت ر عدد ثبت خالف ک در با خ دش برابر ک است.

$$\begin{cases} \log_a^a = 1 \\ a > 0 , a \neq 1 \end{cases}$$

۲: ل ار ت ک در ر با ثبت خالف ک صفر است.

$$\begin{cases} \log_a^1 = 0 \\ a > 0 , a \neq 1 \end{cases}$$

تمرین۶: نشا د د ک تسا ز ر درست است.

$$\log_6^4 + \log_6^9 = 2$$

حل: قرار دهیم $\log_6^4 = x$ و $\log_6^9 = y$ و نشا د که $x + y = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \log_6^4 = x \to 6^x = 4 \\ \log_6^9 = y \to 6^y = 9 \end{array}\right\} \to 6^x \times 6^y = 4 \times 9 \to 6^{x+y} = 36$$

$$\to 6^{x+y} = 6^2 \to x + y = 2$$

***

تذکر ۱ : ل ار ت صفر نا عین است.

$$\log_a^0 = \text{نا عین}$$

تذکر ۲ : ل ار ت رو اعداد ف تعر ف ن ش د.

تذکر ۳ : ا ر بای ل ار ت عدد ۱۰ باشد، ل ار ت را **لگاریتم اعشاری** مـی نا د. معم ًا در ل ار تم اعشار بای ۱۰ ن شته ن ش د.

$$\log_{10}^a = \log a$$

تذکر ۴ : یکی از اعداد گ ک کاربرد ا ز اد در صعت اقتصاد و بازر ان دارد عدد ع ر ف به عدد نپرین می باشد. ا عدد به افتخار لئونارد ا ر را با e ن ا ش د د قدار تقر ب آ تا دو رقم اعشار ۲/۷۱ می باشد.

ا ر بای ل ار ت عدد نپری باشد، ل ار ت را **لگاریتم طبیعی** می نا د. معم لاً بای e ن شته ن شد.
حال ب دلی ا که ا ل ار تم با ل ار تم اعشاری اشتباه نشد، log را به ص رت L_n می ن سد.

$$\log_e^a = L_n\, a$$

واضح است که :

$$L_n\, e = \log_e^e = ۱$$
$$L_n\, ۱ = \log_e^۱ = ۰$$

تذکر ۵ : اش ا حساب فقط ل ار تم اعشاری ل ار ت طبعی را حاسب ک د. برا حاسبه‌ی ل ار ت در ب ا ا د ر ب ک ک اش حساب توا از فرمول به نا فر تغ ر ب ا استفاده ن د. ا فر در ادامه گفته شد.

***

قسمت دوّم : روابط لگاریتمی

با ت جه ب تعر ف ل ار ت روابط ز ر را ب راحت توان ب ا کرد.

۱: ج ع ل ار ت ا در ک ب ا

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

برا ثال :

$$\log_۷^۳ + \log_۷^۵ = \log_۷^{۳\times۵} = \log_۷^{۱۵}$$

ا رابطه برا ج ع چ د ل ار ت در ک ب ا ن ز برقرار است.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

برا ثال:

$$\log_{۱۰۰}^۲ + \log_{۱۰۰}^۵ + \log_{۱۰۰}^{۱۰} = \log_{۱۰۰}^{۲\times۵\times۱۰} = \log_{۱۰۰}^{۱۰۰} = ۱$$

۲: تفرق ل ار ت   ا در ک پا

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

مثال :

$$\log_۷^{۲۰} - \log_۷^{۵} = \log_۷^{۲۰ \div ۵} = \log_۷^{۴}$$

۳: ل ار ت عدد تواندار

$$\log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

مثال :

$$\log_۲^{۳۲} = \log_۲^{۲^۵} = ۵\log_۲^۲ = ۵ \times ۱ = ۵$$

۴: ل ار ت پا تواندار

$$\log_{x^m}^{a} = \frac{۱}{m}\log_x^a$$

مثال :

$$\log_{۸۱}^{۳} = \log_{۳^۴}^{۳} = \frac{۱}{۴}\log_۳^۳ = \frac{۱}{۴}$$

نت جه : $\log_{x^n}^{a^n} = \log_x^a$

۵: تغ ر پای ل ار تم

$$\log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

مثال : فرض ک د ک   خوا   پای ل اریتم $\log_۳^۴$ را به ۵ تبد   کنیم. در ا   ص رت

$$\log_۳^۴ = \frac{\log_۵^۴}{\log_۵^۳}$$

۶: دو ل ار تـ ساو با بـ ای برابر

$$\log_x^a = \log_x^b \rightarrow a = b$$

مثال :

$$\log_۳^a = \log_۳^۸ \rightarrow a = ۸$$

❊❊❊

تمرین۷ : حاصـ عبارت ا ز ر را بـ دست آ ر د.

$۱\ \log ۵ + \log ۲۰$

$۲)\ \log_۷^{۷۰} - \log_۷^{۱۰}$

$۳)\ \log_۶^۴ + \log_۶^۹$

$۴)\ ۲\log ۵ + \log ۴$

$۵\ ۶\log_۴^۲ - \frac{۱}{۲}\log_۲^{۶۴}$

$۶\ \log_۲^۸ + \log_۲^۵ - \log_۲^{۱۰}$

حل:

$$۱\ \log ۵ + \log ۲۰ = \log ۵ \times ۲۰ = \log ۱۰۰ = \log ۱۰^۲ = ۲\log ۱۰ = ۲ \times ۱ = ۲$$

$$۲)\ \log_۷^{۷۰} - \log_۷^{۱۰} = \log_۷^{۷۰ \div ۱۰} = \log_۷^۷ = ۱$$

$$۳)\ \log_۶^۴ + \log_۶^۹ = \log_۶^{۴ \times ۹} = \log_۶^{۳۶} = \log_۶^{۶^۲} = ۲\log_۶^۶ = ۲ \times ۱ = ۲$$

$$۴)\ ۲\log ۵ + \log ۴ = \log ۵^۲ + \log ۴ = \log ۲۵ + \log ۴ = \log ۲۵ \times ۴ = \log ۱۰۰$$

$$= \log ۱۰^۲ = ۲\log ۱۰ = ۲ \times ۱ = ۲$$

$$۵)\ ۶\log_۴^۲ - \frac{۱}{۲}\log_۲^{۶۴} = \log_۴^{۲^۶} - \log_{۲^۲}^{۶۴} = \log_۴^{۶۴} - \log_۴^{۶۴} = \log_۴^{۶۴ \div ۶۴} = \log_۴^۱ = ۰$$

$$۶)\ \log_۲^۸ + \log_۲^۵ - \log_۲^{۱۰} = \log_۲^{(۸ \times ۵) \div ۱۰} = \log_۲^۴ = \log_۲^{۲^۲} = ۲\log_۲^۲ = ۲ \times ۱ = ۲$$

تمرین۸: ل ارت ا ز ر را ب صرت ک ل ارتم ب سد.

$۱)\ \log_{۷}^{۱۵} - \log_{۷}^{۳}$

$۲\ \dfrac{\log ۵}{\log ۲}$

$۳\ ۵\log a - ۲\log b + ۳\log c$

$۴\ \log a - \log b - \log c + \log d$

$۵\ ۲\log x - ۳\log y - ۴\log c$

$۶)\ ۲L_n a + ۳L_n b$

حل:

$$۱)\ \log_{۷}^{۱۵} - \log_{۷}^{۳} = \log_{۷}^{۱۵\div ۳} = \log_{۷}^{۵}$$

$$۲\ \frac{\log ۵}{\log ۲} = \log_{۲}^{۵}$$

$$۳\ ۵\log a - ۲\log b + ۳\log c = \log a^{۵} - \log b^{۲} + \log c^{۳} = \log \frac{a^{۵}c^{۳}}{b^{۲}}$$

$$۴\ \log a - \log b - \log c + \log d = \log \frac{ad}{bc}$$

$$۵\ ۲\log x - ۳\log y - ۴\log c = \log x^{۲} - \log y^{۳} - \log c^{۴} = \log \frac{x^{۲}}{y^{۳}c^{۴}}$$

$$۶)\ ۲L_n a + ۳L_n b = L_n a^{۲} + L_n b^{۳} = L_n a^{۲} b^{۳}$$

تمرین۹: حاص عبارت ا ز ر را ب دست آ ر د.

$۱\ \log_{۵}^{۱۲۵}$

$۲)\ \log_{۴}^{۳۲}$

$۳)\ \log_{۳}^{\sqrt{۲۷}}$

$۴)\ \log_{\sqrt[۳]{۴}}^{۸}$

$۵)\ \log ۱۰۰$

$۶)\ \log \sqrt{۱۰۰۰}$

حل:

$$۱\ \log_{۵}^{۱۲۵} = \log_{۵}^{۵^{۳}} = ۳\log_{۵}^{۵} = ۳ \times ۱ = ۳$$

$$۲)\ \log_{۴}^{۳۲} = \log_{۲^{۲}}^{۲^{۵}} = ۵ \times \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۲} = \frac{۵}{۲} \times ۱ = \frac{۵}{۲}$$

$۳)\ \log_{۳}\sqrt{۲۷}=\log_{۳}\sqrt{۳^{۳}}=\log_{۳}۳^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\log_{۳}^{۳}=\frac{۳}{۲}\times ۱=\frac{۳}{۲}$

$۴)\ \log_{\sqrt[۳]{۴}}^{۸}=\log_{\sqrt[۳]{۲^{۲}}}^{۲^{۳}}=\log_{۲^{\frac{۲}{۳}}}^{۲^{۳}}=۳\times\frac{۳}{۲}\log_{۲}^{۲}=\frac{۹}{۲}\times ۱=\frac{۹}{۲}$

$۵)\ \log ۱۰۰=\log ۱۰^{۲}=۲\log ۱۰=۲\times ۱=۲$

$۶)\ \log\sqrt{۱۰۰۰}=\log\sqrt{۱۰^{۳}}=\log ۱۰^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\log ۱۰=\frac{۳}{۲}\times ۱=\frac{۳}{۲}$

تمرین ۱۰: اگر $\log ۲=a$ و $\log ۳=b$ لگاریتم‌های زیر را بر حسب a و b به دست آورید.

۱) $\log ۸۱$

۲) $\log ۳۲$

۳) $\log ۶$

۴ $\log ۱۲$

۵ $\log ۷۲$

۶ $\log ۵$

۷ $\log ۷۵$

۸ $\log_{۲}^{۳}$

۹ $\log_{۳}^{۲}$

۱۰ $\log_{۸۱}^{۳۲}$

حل:

$۱)\ \log ۸۱=\log ۳^{۴}=۴\log ۳=۴b$

$۲)\ \log ۳۲=\log ۲^{۵}=۵\log ۲=۵a$

$۳)\ \log ۶=\log ۲\times ۳=\log ۲+\log ۳=a+b$

$۴\ \log ۱۲=\log ۲^{۲}\times ۳=\log ۲^{۲}+\log ۳=۲\log ۲+\log ۳=۲a+b$

$۵\ \log ۷۲=\log ۲^{۳}\times ۳^{۲}=\log ۲^{۳}+\log ۳^{۲}=۳\log ۲+۲\log ۳=۳a+۲b$

$۶\ \log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log ۱۰-\log ۲=۱-a$

$۷)\ \log ۷۵=\log ۳\times ۵^{۲}=\log ۳+\log ۵^{۲}=\log ۳+۲\log ۵=b+۲(۱-a)$

$=b+۲-۲a$

$8\ \log_2^3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} = \dfrac{b}{a}$

$9\ \log_3^2 = \dfrac{\log 2}{\log 3} = \dfrac{a}{b}$

$10\ \log_{81}^{32} = \log_{3^4}^{2^5} = 5 \times \dfrac{1}{4}\log_3^2 = \dfrac{5}{4} \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{5a}{4b}$

تمرین۱۱: ا ر $\log 2 = 0/3010$ و $\log 7 = 0/8450$ حاصل ل ار ت ا ز ر را ب دست آ ر د.

1) $\log 8$ 6) $\log 56$

2 $\log 49$ 7 $\log 5$

3) $\log 14$ 8 $\log 25$

حل :

1) $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 3(0/3010) = 0/9030$

2 $\log 49 = \log 7^2 = 2\log 7 = 2(0/8450) = 1/69$

3) $\log 14 = \log 2 \times 7 = \log 2 + \log 7 = 0/3010 + 0/8450 = 1/146$

6) $\log 56 = \log 2^3 \times 7 = \log 2^3 + \log 7 = 3\log 2 + \log 7 = 3(0/3010) + (0/8450)$

$= 0/9030 + 0/8450 = 1/748$

7 $\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - (0/3010) = 0/699$

8 $\log 25 = \log 5^2 = 2\log 5 = 2(0/699) = 1/398$

تمرین۱۲ : عادله[1] ا ز ر را ح ک د.

1) $\log_5^x + \log_5^3 = \log_5^{12}$ 4) $\log^{x+3} + \log^x = 1$

[1] . ت ج ک د ک بابر تعرف ل ار ت جوابی از ک عادله ل ار ت قابل قبو است که ب ازا آن ل ار ت صفر ا ل ار ت عدد ف پ ش اید.

$۲)\ ۳\log x = \log ۸$

$۳)\ ۲\log x + \log ۳ = \log ۲۷$

$۵)\ \log_{۲}^{۴x} - \log_{۲}^{x-۳} = ۳$

$۶)\ \log^{۱-x} - \log^{۲} = \log^{۵}$

حل:

$۱)\ \log_{۵}^{x} + \log_{۵}^{۳} = \log_{۵}^{۱۲} \rightarrow \log_{۵}^{۳x} = \log_{۵}^{۱۲} \rightarrow ۳x = ۱۲ \rightarrow x = ۴$

$۲)\ ۳\log x = \log ۸ \rightarrow \log x^{۳} = \log ۸ \rightarrow x^{۳} = ۸ \rightarrow x = \sqrt[۳]{۸} = ۲$

$۳)\ ۲\log x + \log ۳ = \log ۲۷ \rightarrow \log x^{۲} + \log ۳ = \log ۲۷ \rightarrow \log ۳x^{۲} = \log ۲۷$

$\rightarrow ۳x^{۲} = ۲۷ \rightarrow x^{۲} = ۹ \rightarrow x = \sqrt{۹} = \pm ۳$

که ر شه‌ی $x = -۳$ غ ر قابل قبول است.

$۴)\ \log^{x+۳} + \log^{x} = ۱ \rightarrow \log^{x(x+۳)} = \log^{۱۰} \rightarrow x^{۲} + ۳x = ۱۰ \rightarrow x^{۲} + ۳x - ۱۰ = ۰$

$$\rightarrow (x+۵)(x-۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x+۵ = ۰ \rightarrow x = -۵ \\ x-۲ = ۰ \rightarrow x = ۲ \end{cases}$$

ک ر شه‌ی $x = -۵$ غ ر قابل قبول است.

$۵)\ \log_{۲}^{۴x} - \log_{۲}^{x-۳} = ۳ \rightarrow \log_{۲}^{\frac{۴x}{x-۳}} = ۳\log_{۲}^{۲} \rightarrow \log_{۲}^{\frac{۴x}{x-۳}} = \log_{۲}^{۲^{۳}} \rightarrow \log_{۲}^{\frac{۴x}{x-۳}} = \log_{۲}^{۸}$

$\rightarrow \frac{۴x}{x-۳} = ۸ \rightarrow ۴x = ۸(x-۳) \rightarrow ۴x = ۸x - ۲۴ \rightarrow ۴x - ۸x = -۲۴$

$\rightarrow -۴x = -۲۴ \rightarrow x = \frac{-۲۴}{-۴} = ۶$

$۶)\ \log^{۱-x} - \log^{۲} = \log^{۵} \rightarrow \log^{\frac{۱-x}{۲}} = \log^{۵} \rightarrow \frac{۱-x}{۲} = ۵ \rightarrow ۱ - x = ۱۰ \rightarrow x = -۹$

تمرین ۱۳ : معادله‌ی ز ر را ح ک د.

$$L_n(x-۳) = ۲$$

حل :

$L_n(x-۳) = ۲ \rightarrow x - ۳ = e^{۲} \rightarrow x = ۳ + e^{۲}$

تمرین برای حل :

۱۴: درست ا نادرست عبارت ا ز ر را تع ک د.

الف: ل ار تم اعداد ثبت ک تر از ۱ ه وار عدد فی است.

ب: ل ار تم اعداد ۀ تعر ف ن ش د.

پ: $a > b > ۰$ آن اه $\log_{۱۰}^{a} < \log_{۱۰}^{b}$

۱۵: حاص عبارت ا ز ر را ب دست آ ر د.

۱ $\log ۲۵ + \log ۴$

۲) $\log_{۸}^{۴۰} - \log_{۸}^{۵}$

۳) $\log_{۱۲}^{۱۶} + \log_{۱۲}^{۹}$

۴) $۳\log ۵ + \log ۸$

۵ $\log_{۹}^{۳} - \frac{۱}{۲}\log_{۳}^{۸۱}$

۶ $\log_{۲}^{۸} - \log_{۲}^{۵} + \log_{۲}^{۲۰}$

۱۶: ل ار ت ا ز ر را ب ص رت ک ل ار تم ب س د.

۱) $\log_{۵}^{۱۸} - \log_{۵}^{۳}$

۲ $\dfrac{\log_{۲}^{۷}}{\log_{۲}^{۵}}$

۳ $۵\log p + ۲\log q + ۳\log r$

۴ $\log a + \log b - \log c - \log d$

۵ $۲\log x - ۵\log y - ۳\log c$

۱۷: حاص عبارت ا ز ر را ب دست آ ر د.

۱ $\log_{۱۲۵}^{۲۵}$

۲) $\log_{۸}^{۳۲}$

۳) $\log_{۵}^{\sqrt{۱۲۵}}$

۴) $\log_{۸۱}^{۲۷}$

۵) $\log_{\sqrt{۵}}^{۲۵}$

۶) $\log_{\sqrt{۳}}^{۷۲۹}$

۷) $\log_{\frac{۱}{۲۰}}^{۴۰۰}$

۱۸: ا ر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$ و $\log ۷ = c$ ل ار ت ا ز ر را بر حسب a و b و c ب دست آ ر د.

۱) $\log ۴۹$

۲) $\log ۱۲۸$

۳) $\log ۲۱$

۴ $\log ۲۸$

۵) $\log ۴۲$

۶ $\log ۵$

۷) $\log ۵۷۶$

۸ $\log_{۲}^{۷}$

۹ $\log_{۷}^{۲}$

۱۰ $\log_{۸۱}^{۴۹}$

۱۹ : ا ر $\log ۳ = ۰/۴۷۷۱$ و $\log ۷ = ۰/۸۴۵۰$ حاصل ل ار تم ا ز ر را ب دست آ ر د.

۱) $\log ۹$ ‏ ‏ ۳) $\log ۲۱$ ‏ ‏ ۵ $\log ۶۳$

۲ $\log ۴۹$ ‏ ‏ ۴) $\log ۲۱۰$ ‏ ‏ ۶ $\log^{۷}_{۳}$

۲۰ : ا ر $\log^{۲} = ۰/۳$ باشد قدار $\log \frac{۲۵}{۴}$ را حاسب ک د.

۲۱ : قدار x را از تسا قابل ب دست آ ر د. $\log^{۶۴}_{x+۱} = ۲$

۲۲ : ا ر $\log^{۸۱}_{x} = -۴$ قدار x را ب اب د.

۲۳ : معادله‌ی $\log^{۲x+۱۵}_{x} = ۲$ را ح ک د.

۲۴ : عادل ا ز ر را ح ک د.

۱ $\log^{۲x+۱} = ۲\log^{۳}$

۲) $\log^{۲x+۵} - \log^{۳} = ۲\log^{۵}$

۳ $\log x^{۴} = ۴\log^{۳}$

۴ $\log^{۳x+۱} = \log^{۵} + ۳\log^{۲}$

۵ $\log^{x}_{۲} + \log^{۵}_{۲} = \log^{۱۵۰}_{۲} - \log^{۳}_{۲}$

۶ $\log^{x} + \log^{x+۲} = \log^{۳}$

۷) $L_n(x-۳) = ۲$

۸) $L_n(۴x-۵) = L_n(۲-x)$

۹) $L_n(۲x-۱) + L_n(x-۷) = L_n ۷$

۱۰ $\log^{x+۱}_{۲} + \log^{x+۴}_{۲} = ۲$

۲۵ : عادله‌ی ز ر را ح ک د.

$$\log^{x+۱} + \log^{x-۱} = \log^{۳}$$

۲۶ : عادله‌ی ز ر را ح ک د.

$$\log^{۲-x} + \log^{۱-x} = \log^{۵} + ۲\log^{۲}$$

۲۷ : عادله ا ز ر را ح ک د.

۱ $(e^{x}-۵)(۲e^{x}-۷) = ۰$

۲) $(e^{x}+۳)^{۲} - ۲۵ = ۰$

۳) $(۲^{x}-۱)(۲^{x}-۳) = ۰$

۴) $۳^{۲x} - ۴\times ۳^{x} - ۴۵ = ۰$

۵) $۹^{x} = ۲\times ۳^{x+۲} - ۴۵$

۶) $۲e^{۲x} + e^{x} - ۳ = ۰$

۷) $|e^{x}-۱| = |۳-۲e^{x}|$

۸) $۱۰^{\log(x+۱)} = ۳$

***

قسمت سوّم : اثبات روابط لگاریتمی

در ا جا روابط ل ار ت را ک پ ش از ا با کرده ا اثبات کن م.

۱: ج ع ل ار ت ا در ک با

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

اثبات : فرض ک که $\log_x^a = \alpha$ و $\log_x^b = \beta$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow b = x^\beta$$

$$\Rightarrow a.b = x^\alpha .x^\beta \rightarrow a.b = x^{\alpha+\beta} \rightarrow \log_x^{a.b} = \alpha + \beta \rightarrow \log_x^{a.b} = \log_x^a + \log_x^b$$

ت جه : اثبات تعم ا رابطه ب ج ع چ د ل ار ت در ک با ن ز ب ص رت انجا رد.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

دانش آ زان عز ز تواند، ا تسا را خ د اثبات ک د.

**

۲: تفر ق ل ار ت ا در ک با

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

اثبات : فرض ک که $\log_x^a = \alpha$ و $\log_x^b = \beta$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow b = x^\beta$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \rightarrow \frac{a}{b} = x^{\alpha-\beta} \rightarrow \log_x^{\frac{a}{b}} = \alpha - \beta \rightarrow \log_x^{\frac{a}{b}} = \log_x^a - \log_x^b$$

***

تمرین۲۸ : ب ک ک رابط ف ق ثابت ک د که $\log_x^{\frac{1}{a}} = -\log_x^a$

۳ : ل ار ت عدد تواندار

$$\log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

اثبات : فرض ک که $\log_x^a = \alpha$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \to a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow (a)^n = (x^\alpha)^n \to a^n = x^{n\alpha} \to \log_x^{a^n} = n\alpha \to \log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

**

۴ : ل ار ت ـا ـ تواندار

$$\log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}\log_x^a$$

اثبات : فرض ک که $\log_x^a = \alpha$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \to a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow a = (x^{m\alpha})^{\frac{۱}{m}} \to a = (x^m)^{\frac{\alpha}{m}} \to \log_{x^m}^a = \frac{\alpha}{m}$$

$$\to \log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}(\alpha) \to \log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}(\log_x^a)$$

**

۵ : توا ل ار تمی

$$x^{\log_x^a} = a$$

فرض ک که $\log_x^a = \alpha$ پس $x^\alpha = a$ و این یعنی $x^{\log_x^a} = a$

۶ : تغ ر ـ ـای ل ار تم

$$\log_b^a \times \log_x^b = \log_x^a$$

فرض کنیم که

$$\log_b^a = \alpha \rightarrow b^{\alpha} = a \qquad (۱)$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow x^{\beta} = b \qquad (۲)$$

از روابط(۱) و(۲) می توان نتیجه گرفت :

$$(x^{\beta})^{\alpha} = a \rightarrow x^{\alpha\beta} = a \rightarrow \alpha\beta = \log_x^a$$

پس :

$$\log_b^a \times \log_x^b = \log_x^a$$

نتیجه :

$$\log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

❋❋

تمرین برای حل :

۲۹ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

۱) $\log_b^a = \dfrac{۱}{\log_a^b}$ ۲) $a^{\log^b} = b^{\log^a}$ ۳) $\log_{b^n}^{a^n} = \log_b^a$

۳۰ : حاصل عبارت های زیر را بیابید.

۱) $\log_۳^{۱۸} \times \log_{۱۸}^{۸۱}$ ۲) $\dfrac{۱}{\log_{۱۸}^{۳}} - \dfrac{۱}{\log_{۲}^{۳}}$

۳۱ : حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

الف) $۲\log_{۱۰}^{۲} + \log_{۱۰}^{۲۵۰} =$ ب) $\log_۴^۳ \times \log_۳^{۱۶} =$ ج) $۳\log_{۱۰}^{\sqrt[۳]{۴}} + \log_{۱۰}^{۲۵} =$

د) $\log_۸^{\frac{۱}{۳۲}} =$ هـ) $۲^{\log_۲^۵ - \log_۲^۳} =$

۳۲: ا ر $\log_{3}^{5}=b$ و $\log_{3}^{2}=a$ باشد قدار $\log_{4}^{10}$ را بابد.

۳۳: قدار x از عادله‌ی $2\log_{3}^{x}-\log_{\sqrt{3}}^{x}-\log_{\frac{1}{3}}^{x}=\frac{1}{3}$ ب دست آ ر د.

۳۴: جواب عادله‌ی $\log_{4}^{\log_{3}^{\log_{2}^{x}}}=0$ را تع ک د.

۳۵: ا ر $a^{2}+b^{2}=6ab$ آ ا ثابت ک د که $\log^{\frac{a-b}{2}}=\frac{\log^{a}+\log^{b}}{2}$

درس سوّم : تابع نمایی و تابع لگاریتمی

در ا درس با توابع ن ای ل ار ت آش ا شویم. ش اخت ا توابع ج ت د سازی بس اری از پد ده ها طب ع تواند ف د باشد.

قسمت اوّل : تابع نمایی

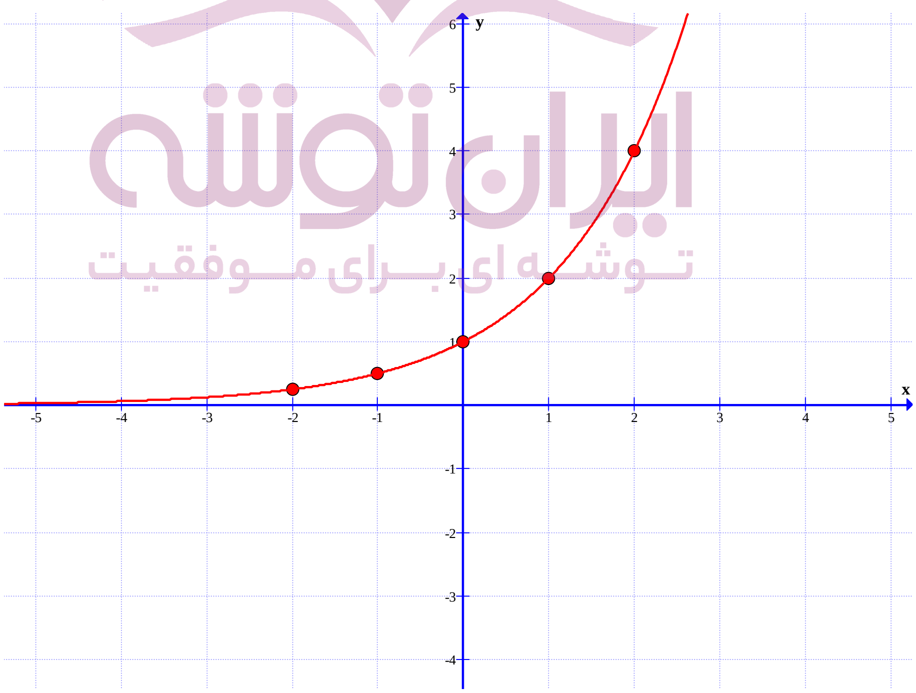
تابع به‌صورت $f(x)=a^x$ به‌شرط اینکه $a>0$ و $a\neq 1$ ر تالع نم یی ن مند.

ما نتابع $f(x)=3^x$

تمرین ۱ : نمود تابع $f(x)=2^x$ ر رسم‌کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع ر ا مشخص و س آ نها روی دستگاه مختصات تعیین ی کنیم.

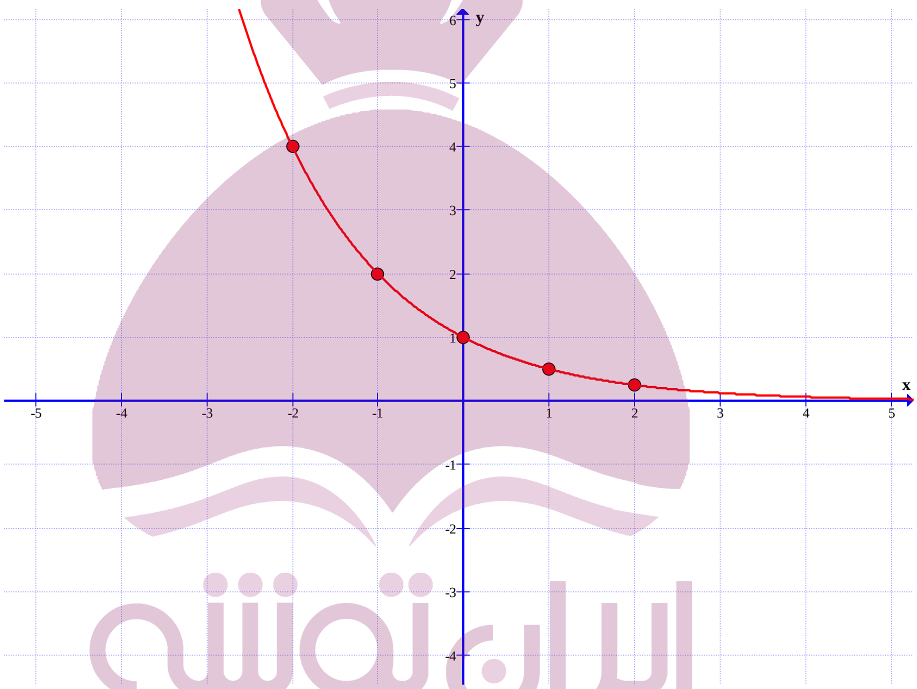
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



تمرین۲ : نمودار تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^{x}$ را رسم کنید.

حل: ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$



توجه : توابع با ضابطه‌ی $f(x)=ka^{x}$ که در آن $(k\neq ۰ , a>۰ , a\neq ۱)$ با تابع نمایی رفتاری مشابه دارند و به همین دلیل می گویند ، این توابع **رفتار نمایی** دارند. بر این اساس توابع $f(x)=۳\times ۲^{x}$ و $g(x)=(\frac{۲}{۵})^{x-۱}$ رفتار نمایی دارند.

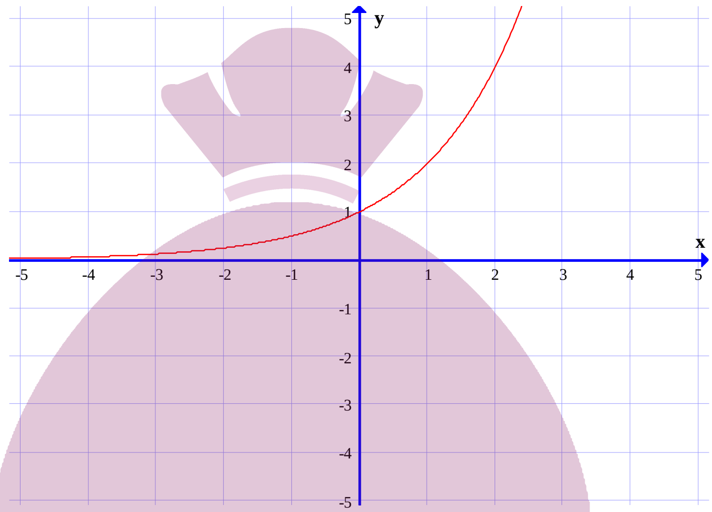
**

خواص تابع نمایی

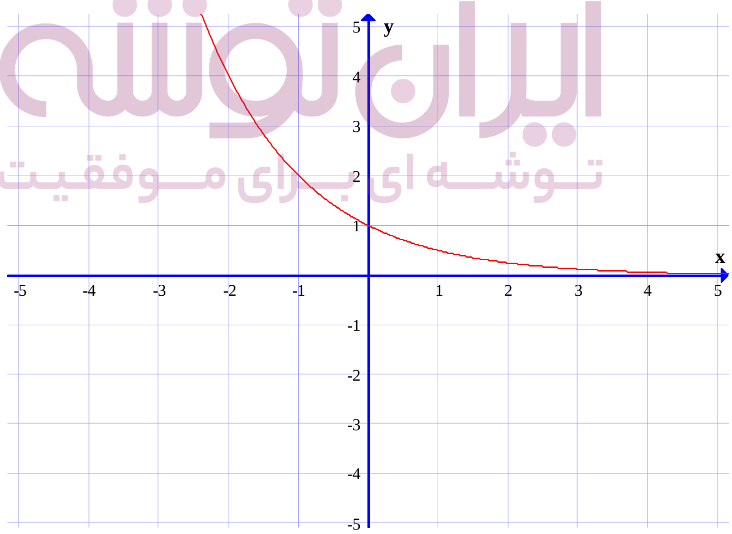
هر تابع ن ایی ب صورت $y = a^x$ دارا ژ ا ز ر است.

ویژگی اوّل :

اگر $a > ۱$ ب شد. تابع دارای نموداری بشکل زیر خواهد بود که همواره صعودی (افزایشی) است. یعنی با افزایش مقدار x مقادیر f افزایش مییابد.



همچنین اگر $۰ < a < ۱$ باشد. تابع دارای نموداری بشکل زیر خواهد بود که همواره نزولی (کاهشی) می باشد. یعنی با افزایش مقدار x مقادیر f کاهش مییابد.



اگر پایه‌ی تابع نمایی عدد نپر ($e = ۲/۷۱$) باشد. تابع را تابع نمایی طبیعی می نامند.

ویژگی دوّم : هر تابع نمایی $y = a^x$ محور عرض ها را در نقطه‌ی $(۰,۱)$ قطع می کند.

ویژگی سوّم : دامنه‌ی تابع ن ایی $y=a^x$ مج عه‌ی اعداد حق قی برد آ مج عه‌ی اعداد حق قی مثبت است.

تمرین برای حل :

۳ : تابع $y=(\sqrt{3})^x$ مح ر عرض ا را در چه نقطه ا قطع کند؟

۴ : تابع $y=-2+(\frac{1}{3})^x$ مح ر عرض ا را در چه نقطه ا قطع ک د؟

۵: ن دار تابع $y=x^2$ در چ د نقطه ن دار تابع $y=2^x$ را قطع ک د؟

۶ : کدا ک از توابع ز ر ک تابع ن ای است؟

الف) $f(x)=x^3$ ب) $f(x)=(2x)^x$

ج) $f(x)=(\sqrt{2})^x$ د) $f(x)=(\sqrt{x})^3$

۷ : در تابع $f(x)=a^x$

الف : ا ر $a>1$، با افزا ش قدار x قاد ر f .... م اب د.

ب : ا ر $0<a<1$، با افزا ش قدار x قاد ر f .... م اب د.

ج : به ازا ر قدار ثبت خالف ک a تابعی .... است.

۸ : حل برخ رد ن دار تابع $f(x)=3^{2x+1}$ با مح ر عرض ا را ب دست آ ر د.

۹ : ن دار تابع ا ز ر را رس ک د.

الف) $f(x)=1+2^x$ ب $f(x)=2^{x+1}$ ج $f(x)=2^{x-2}$

❋❋

قسمت دوّم : تابع لگاریتمی

هر تابع به صورت $y=\log_a^x$ (به شرط اینکه $a\neq ۱$ و $a>۰$ و $x>۰$) را یک تابع لگاریتمی می نامند.

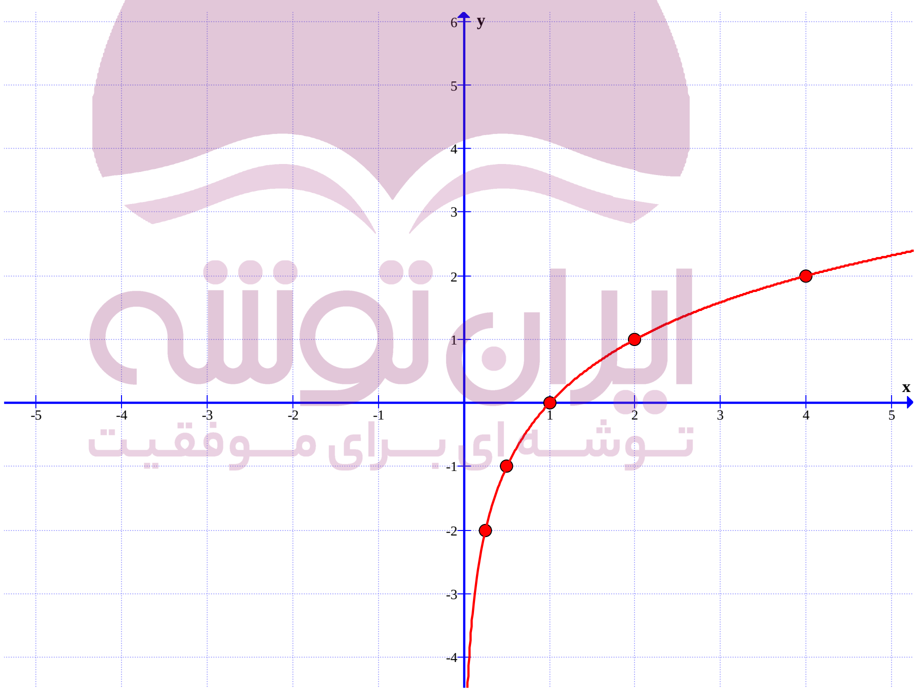
مثال :

$$y=\log_{۲}^{x}$$

تمرین ۱۰ : نمودار تابع $f(x)=\log_{۲}^{x}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

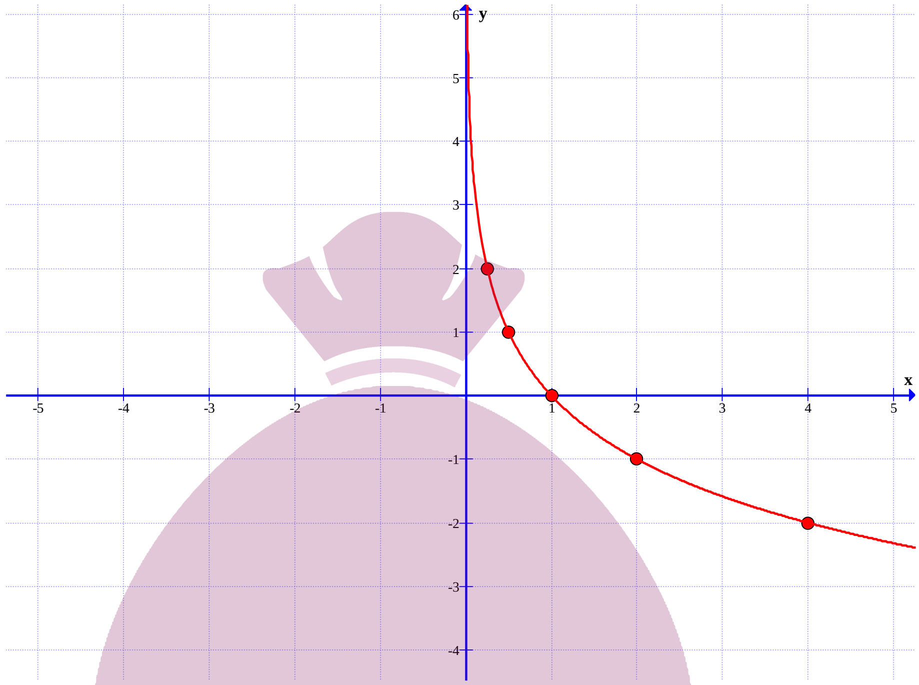
x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
y	-۲	-۱	۰	۱	۲



تمرین ۱۱ : نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
y	۲	۱	۰	−۱	−۲

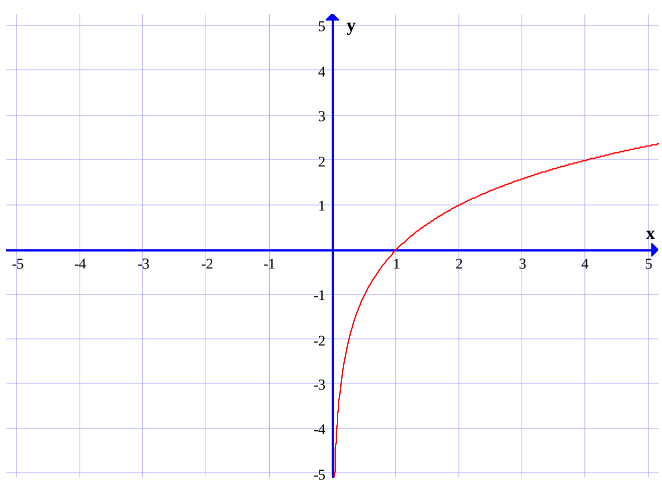


خواص تابع لگاریتمی

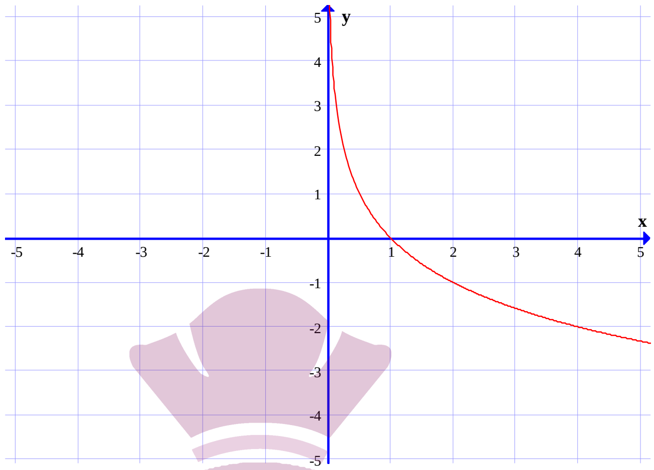
هر تابع ل ار تمی ب ص رت $y=\log_a^x$ دارا ژ ا ز ر است.

ویژگی اوّل :

اگر $a>۱$ ب شد. تا بع دارای نموداری بشکل زیر خواهد بود که همو ارصعودی (افزایشی) اس . یعنی با افزا ش قدار x قاد ر f افزا ش ابد.



همچنین اگر $۰ < a < ۱$ باشد. تابع دارای نموداری بشکل زیر خواهد بود که همواره نزولی (کاهشی) می باشد. . یعنی با افزایش مقدار x مقدار f کاهش می‌یابد.



اگر پایه تابع لگاریتمی عدد نپرین ($e = ۲/۷۱$) باشد. تابع را تابع لگاریتم طبیعی می‌نامند.

ویژگی دوّم : هر تابع لگاریتمی به صورت $y = \log_a^x$ محور طول‌ها را در نقطه‌ی (۱,۰) قطع می‌کند.

ویژگی سوّم : دامنه‌ی تابع لگاریتمی به صورت $y = \log_a^x$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

تمرین برای حل:

۱۲ : نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = (\sqrt{۲})^x$ ب) $y = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^x$

۱۳ : دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_۲^{x+۱}$ را به دست آورید.

۱۴ : نمودار تابع $y = \log_{\sqrt{۲}}^x$ را رسم کنید.

۱۵ : ابتدا دامنه‌ی تابع $y = \log_۲^{x-۱}$ را به دست آورید سپس نمودار آن را رسم کنید.

۱۶ : درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را برای تابع لگاریتمی به صورت $f(x) = \log_a^x$ تعیین کنید.

الف: تابع لگاریتمی محور yها را قطع می‌کند.

ب : دامنه‌ی تابع لگاریتمی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

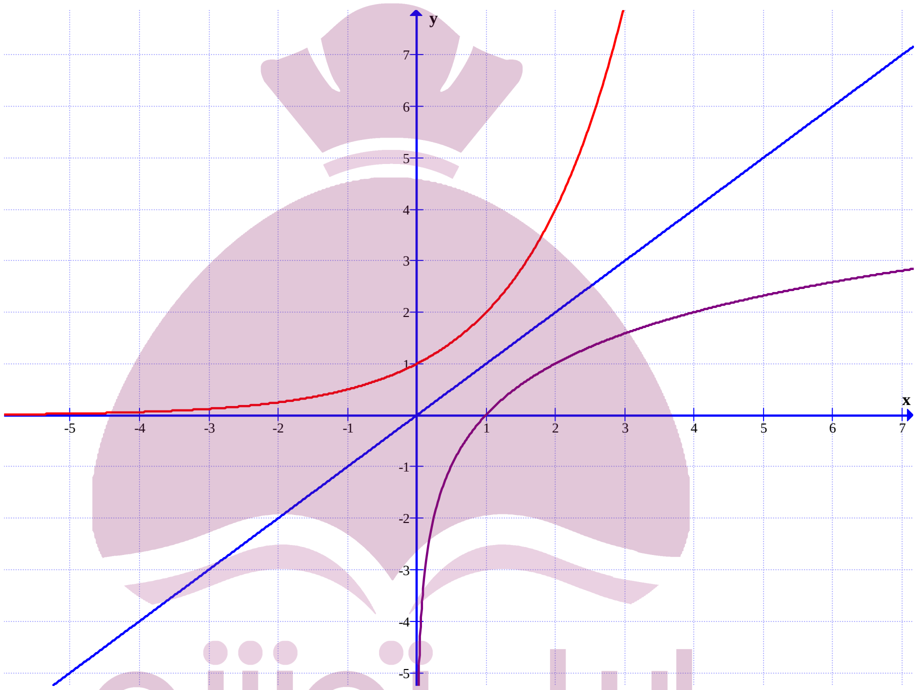
ج : برد تابع لگاریتمی اعداد حقیقی مثبت است.

توجه : تابع ن ایی $y=a^x$ ک ب ک است و لذا عک س پذ ر می باشد. معک س آ ک تابع ل ار تمی ب ص رت ز ر است.

$y=\log_a^x$

لذا ن دار تابع ن ایی $y=a^x$ معک س آ عن $y=\log_a^x$ نسبت ب ن ساز ربع اوّ سوّ قرینه اند.

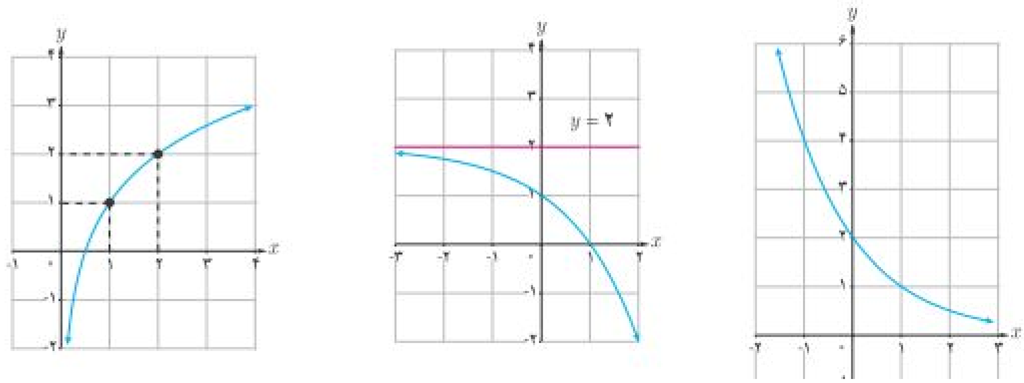
در ز ر ن دار تابع $f(x)=۲^x$ معکوس آ عنی $g(x)=\log_۲^x$ را شا د ک د.



ب ابرای ا ر نقطـه‌ی (b,c) ر تابع $y=a^x$ ق رار داش ته باش د آن اه نقطـه‌ی (c,b) رو ن دار $y=\log_a^x$ قرار دارد.

تمرین ۱۷ : مشخص ک د ر ک از ن دار ا ز ر ب کدا ک از ضابط ا ز ر تع ق دارد؟

الف) $y=-۲^x+۲$ ب) $y=\log_۲(x+۱)$ پ) $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$



تمرین۱۸ : خط $y=۲۷$ نـ دار تابع $y=۳^x$ را در چه نقطه ا قطع ک د؟

تمرین۱۹ : خط $y=۱۰$ نـ دار تابع $y=(۰/۰۱)^x$ را در چه نقطه ا قطع ک د؟

تمرین۲۰ : تع ک د ک خط $y=\sqrt{۷}$ ، نـ دار تابع $y=۲^x$ را ب کدا د عدد صحـ ح قطع ک د؟

تمرین ۲۱ : درست ا نادرست ج ت ز ر را تع ک د.

الف : دامنه‌ی توابع $y=۲^x$ و $y=x^۲$ ساوی اند.

ب : محـ تقاطع نـ دار تابع $y=۶^x$ با محـ ر طول ا نقطه‌ی $(۶,۰)$ است.

پ : نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲},\sqrt{۵})$ رو نـ دار تابع با ضابطه‌ی $y=۵^x$ قرار دارد.

تمرین ۲۲ : ا ر $f(x)=۳-۲\log_۴ ۲^{(\frac{x}{۲}-۵)}$ ، قدار $f(۴۲)$ را ب دست آ ر د.

تمرین ۲۳ : فرض ک که $f(x)=۴^x+۲$

الف : مقدار $f(-۱)$ را ب دست آ ر د.

ب : ا ر $f(x)=۶۶$ قدار x چقدر است؟

ج : معکـ س ا تابع را ب سـ د.

**

قسمت سوّم : حل چند مسئله‌ی کاربردی توابع نمایی و لگاریتمی

در ا ن ب د سئله‌ی کاربرد توابع ن ای ل ار تم اشار کنیم.

الف : مسائل مربوط به رشد باکتری

هر تابع ب ص رت $f(x)=ka^{x}$ (برا قاد ر ثب ت خ الف ک a رفت ار ن ا دارد. ا ت ابع در بس اری از سائل اقتصاد دس کاربرد دارد.

تمرین۲۴ : یک ن ع باکتر در دست اه وارش انسا زند ک د تکث ر آن ب ص رت ن ایی اس ت. عوا خت ف ان د ز اد شد آن باعث ب ار ش د. ن ع خاصی از ا ب اری با ۱۰۰ ب اکتر ش ر ع م ش د ر باکتر در دت ن ساعت ب د قس ت تقس ش د. اندازه‌ی ر ت ده باکتری از t ساعت از رابطه‌ی ز ر ب دست آ د.

$$p(t)=۱۰۰\times ۲^{۲t} \qquad (۰\leq t\leq ۱۶)$$

با فرض ا ک چ کدام از باکتر ا از بین نروند، تعداد باکتر ا در ک ت ده، پس از ۳ ساعت را ب دست آ ر د.

حل :

$$p(۳)=۱۰۰\times ۲^{۲(۳)}=۱۰۰\times ۶۴=۶۴۰۰$$

ب : مسائل مربوط به قدرت زلزله

ز اد زلزله ب ق ع پیوندد که انرژی از ز آزاد ش د. ب شدت نسب زلزلـه (ق درت آن) ب ر ح سب ر شتر زان انرژ آزاد شده از آن بر حسب ارگ (Erg) رابطه‌ی ز ر ج د دارد.

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$$

ک در آن M قدرت زلزله بر حسب ر شتر و E انرژ آزاد شده بر حسب ارگ می باشد.[1]

تمرین۲۵ : قدار انرژ آزاد شد ت سط زلزله ای ب قدرت ۶/۶ ر شتر را ب دست آ رید.

---

[1]. اِرگ یکای اِرژی در دست اه واحد ا سانت تر- گرم- ثانیه (cgs) است. اِرگ برابر با کار انجام‌گرفت در با بردن جرمی برابر با ک هزار ر تا ارتفاع ک سا ت تر است .

۱ ارگ $=۱۰^{-۷}$ ژو ۱ ژول = $۱۰^{۷}$ ارگ

حل :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶/۶) = ۲۱/۷$$

$$\to E = ۱۰^{۲۱/۷} \ \ Erg$$

تمرین۲۶ : شدت زلزله‌ی ۱۳۶۹ ر دبار ۷/۲ ر شتر زارش شده است. مقدار تقر بی انرژ آزاد شد آن را بر حسب ارگ پدا ک د.

حل:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M = ۱۱/۸ + ۱/۵(۷/۲) = ۲۲/۶$$

$$\to E = ۱۰^{۲۲/۶} \ \ Erg$$

❋❋

تمرین برای حل :

۲۷ : در دی اه ۱۳۸۲ در ش رستان ب زلزله ا با قدرت ۶/۳ ر شتر ب ق ع پ ست حاسب ک د که این زلزا چ د ارگ انرژ آزاد کرده است؟

۲۸ : در آبان اه ۱۳۹۶در ش رستان کر انشاه زلزله ا با قدرت ۷/۱ ر شتر ب ق ع پ ست حاس ب ک د که ا زلزا چ د ارگ انرژ آزاد کرده است؟

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم «رشته ی علوم تجربی»

فصل ۶ : حد و پیوستگی

مهر ۱۳۹۶

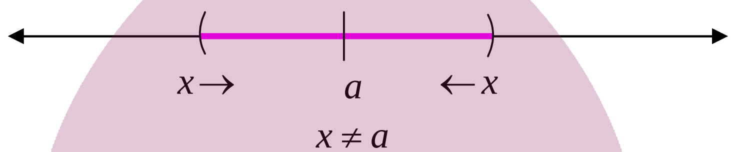
درس اوّل : مفهوم حد و فرآیندهای حدی

مف   حد، کی از فاه   اساس در ر اض ات است. آش ایی با این مف   جر ب ش اخت دق ق رفتار ت ابع م ردد. ب   ج ت است ا   ف   در بس اری از شاخ   ا عل   از ج   ف ز ک ر اضی اقت صاد کاربرد ا فراوا   دارد. با وج د پ چ د   در تعر ف حد در این درس فقط ب درک ش د   آ   پ ردازیم.

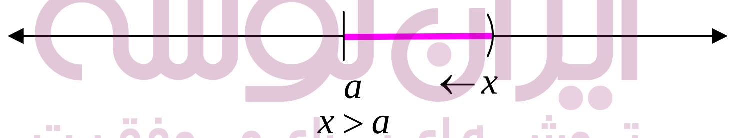
امّا قبل از ر د به بحث، ن اد   ا ز ر را عرف   کنیم.

در ابتدا فاهیم اوّل ه‌ی ز ر را برا   درک   ف   حد   عرف کنیم.

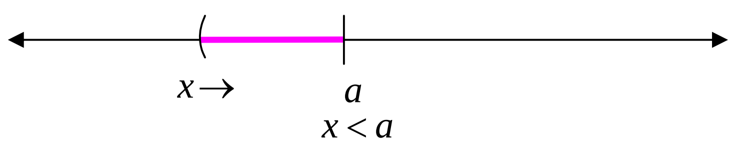
۱) م ظ ر از ن اد $x \to a$ (م خوان د x م   ک د، به س ت a) ، ع   تغ ر x از د طرف ح ر طول ها ب عدد a نزد ک   ش د ول   چ ا ر   آ   طبق ن   ش د. ب ابراین اخت ف x و a بس ار کوچک است ول $x \neq a$



۲) م ظ ر از ن اد $x \to a^+$ (م خوان د x م   ک د، به س ت a از راست) ، ع   تغ ر x فقط از طرف راست مح ر ط   ا ب عدد a نزد ک   ش د ول   چ ا ر   آ   طبق ن   ش د. ب ابراین اخت ف x و a بس ار ک چک است ول $x > a$



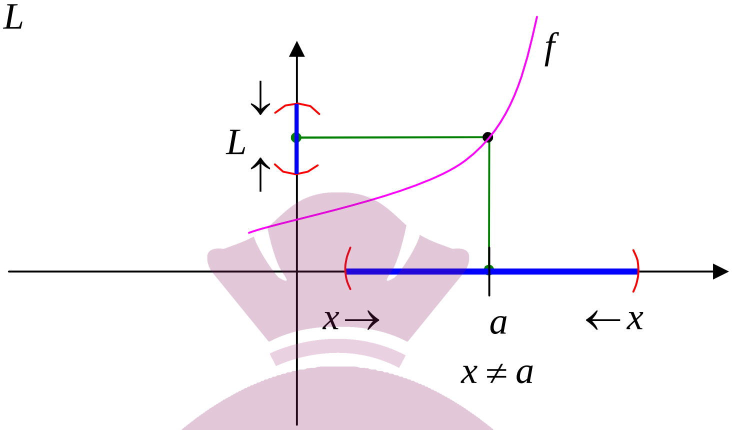
۳) م ظ ر از ن اد $x \to a^-$ (م خوان د x م   ک د، به س ت a از چپ) ، ع   تغ ر x فقط از طرف چپ مح ر ط   ا ب عدد a نزد ک   ش د ول   چ ا ر   آ   طبق ن   ش د. ب ابراین اخت ف x و a بس ار ک چک است ول $x < a$



قسمت اوّل : مفهوم شهودی حد تابع در یک نقطه

وقت تغ ر x از د طرف حد ر ط ا ب س ت عدد a ک د قدار $f(x)$ نزد ک ب عدد L ش د، گ د حد تابع f در $x=a$ برابر L است و می ن س د.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$



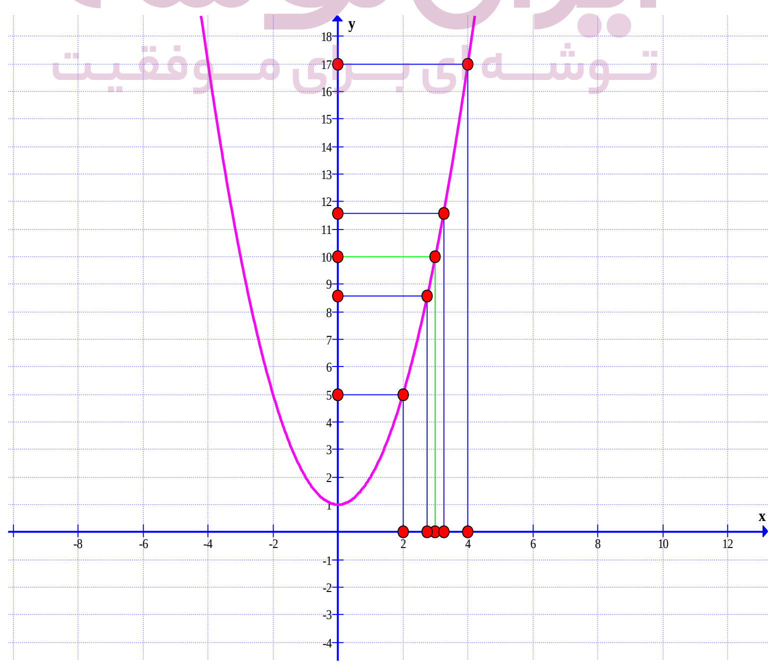
مثال : در تابع $f(x)=x^{۲}+۱$ ا ر تغ ر x از د طرف ب عدد ۳ نزد ک ش د. آن ا قاد ر تابع ب ع دد ۱۰ نزد ک می شوند. در ا   ص رت $\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۰$. ب جدول و ن دار ز ر ت ج ک د.

جدول

x	۲	۲/۵	۲/۷۵	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲۵	۳/۵	۴
$f(x)$	۵	۷/۲۵	۸/۵۶۲۵	۹/۴۱	۹/۹۴۰۱	۱۰	۱۰/۰۶۰۱	۱۰/۶۱	۱۱/۵۶۲۵	۱۳/۲۵	۱۷

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۰$$

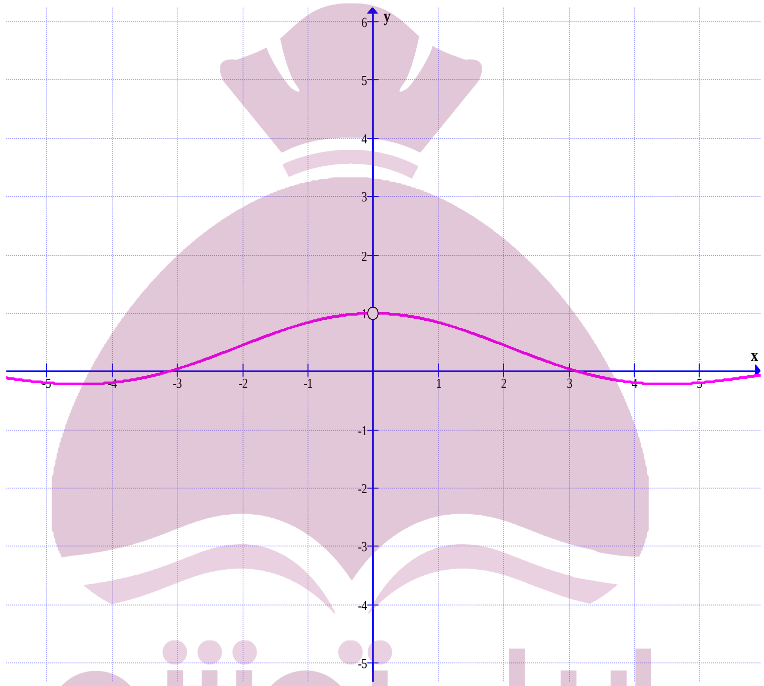
نمودار



تمرین۱) با تشکل جد قدار حد تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۱$ حاسب ک د.

تمرین۲) در شکل ز ر ن دار تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ رسم شده است. با ت جه به این ش ک ح د قابل را محاسب ک د.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=$$



نتیجه : حد تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ قت که x ب س ت صفر ک د، برابر ک است.

***

قسمت دوّم : محاسبه‌ی حد تابع در یک نقطه

در اکثر اقع با جا ز ی قدار ب جای x در عادله‌ی تابع ، م توا حد توابع را حاسبه ن د. ا ر ش را ر ش جا ز ستقیم ی نا د. برا ثال برا حاسبه‌ی ح د ت ابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ قتـی x بـه س ت ۳ ک د، م توان ب شک ز ر ع کرد.

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{۳+۱}=۲$$

تمرین برای حل :

۳ : حد تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ در نقطه‌ی $x=۶$ را بدست آ ر د.

۴ : حد تابع $f(x)=\frac{۴x}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۳$ را بدست آ ر د.

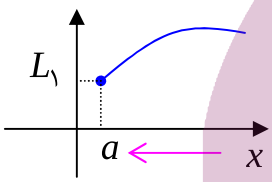
۵ : حد تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۱$ حاسبه کنید.

❋❋

قسمت سوّم : حد های یک طرفه

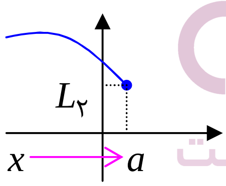
ا ر متغ ر x فقط از ک طرف حـ ر ط ا ب س ت عدد a ک د. با ف حد ا ک طرف سر کار داریم .

حد راست : وقت تغ ر x فقط از طرف راست حـ ر ط ا ب س ت عدد a ک د قدار $f(x)$ نزد ک ب عدد $L_۱$ شـ د د حد راس ت تابع f در $x=a$ برابر $L_۱$ اسـ ی ن سـ د.



$$\lim_{x\to a^{+}} f(x)=L_۱$$

حد چپ : وقت تغ ر x فقط از طرف چپ حـ ر ط ا ب س ت عدد a م ل ک د قدار $f(x)$ نزد ک ب عدد $L_۲$ شـ د د حد چپ تابع f در $x=a$ برابر $L_۲$ اسـ ی ن سـ د.



$$\lim_{x\to a^{-}} f(x)=L_۲$$

مثال : حد راست تابع ز ر را در نقطه‌ی $x=۲$ ب دست آ ر د.

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}} x+۱=۲+۱=۳$$

مثال : حد چپ تابع ز ر را در نقطه‌ی $x=۲$ ب دست آ ر د.

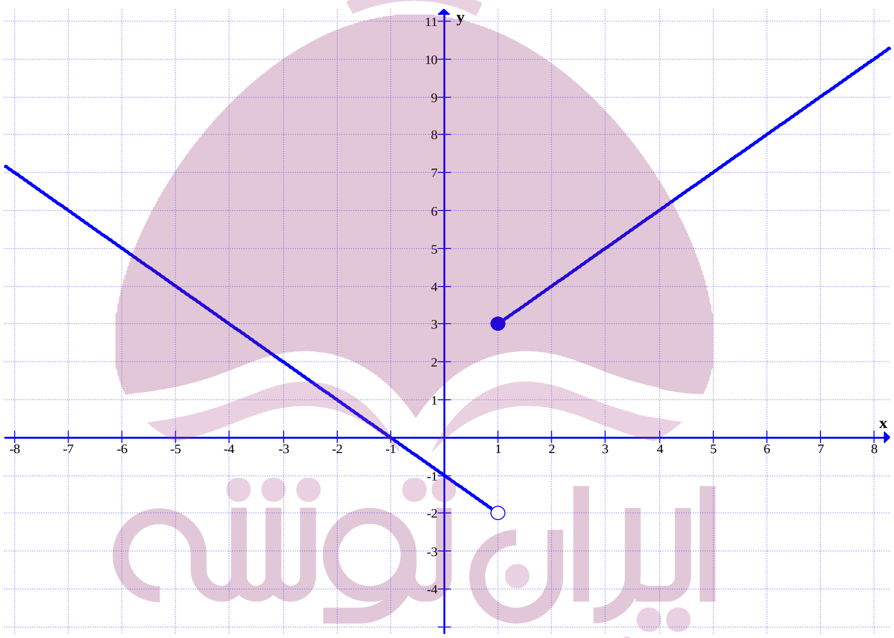
$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} -x=-۲$$

مثال : با ت جه ب شک ز ر ط ب است حاسبه‌ی

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ ج) $f(۱)$



حل :

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۳$ ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۲$ ج) $f(۱)=۳$

مثال: حد راست حد چپ قدار تابع ز ر را در نقطه‌ی $x=۲$ بدست آ ر د.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x\geq ۲ \\ x^۲ & x<۲ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} (۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲^-} (x^۲) = (۲)^۲ = ۴$

قدار $f(۲) = ۳(۲) - ۱ = ۵$

تمرین برای حل :

۵ : حد راست حد چپ قدار تابع ز ر را در نقطه‌ی $x = ۱$ بدست آ ر د.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^۲ + ۳} & x > ۱ \\ ۳x + ۲ & x = ۱ \\ ۲x - ۵ & x < ۱ \end{cases}$$

**

قسمت چهارم : شرط وجود حد یک تابع در یک نقطه

گ د تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ دارا حد است ر اه

الف : تابع در د طرف نقطه‌ی $x = a$ تعر ف شده باشد.

ب : در این نقط حد راست چپ آ عدد ا سا شوند.

ب عبارت د ر، ا ر تابع f در سا راست چپ نقطه‌ی $x = a$ تعر ف شده باشد

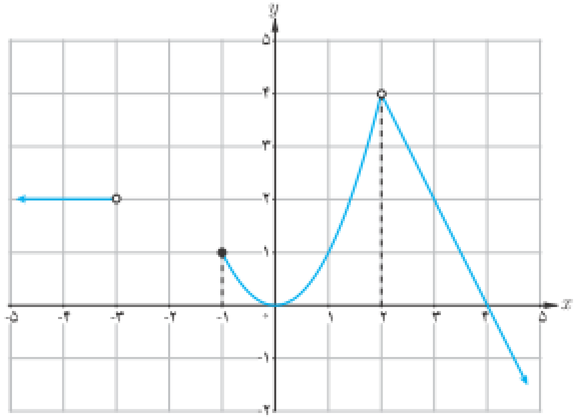
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_۲ \text{ و } \lim_{x \to a^+} f(x) = L_۱$$

در ا ن ص رت، ا ر $L_۱ = L_۲ = L$ آ اه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ و برعکس[۱]

مثال : در شک ز ر ن دار تابع f ب ضابطه‌ی زیر رس شده است.

$$f(x) = \begin{cases} -۲x + ۸ & x > ۲ \\ x^۲ & -۱ \le x < ۲ \\ ۲ & x < -۳ \end{cases}$$

[1]. بر ا اساس، گ د تابع در نقطه‌ی $x = a$ دارا حد ست ر ا کی از حالت ا ز ر ج د داشت باشد.
الف : حد راست چپ عدد ا سا باش د. ب : حد راست ا چپ ا ر د ج د داشت باشد. یع تابع در س ت راس ت یا چپ تابع تعر ف شده یا اینک تابع رفتار ب کرا داشت باشد. ج: تابع در ک ا د س ت ا قط رفتار سا دارد.



ه با ت ج ب ا شک توان ن شت:

۱ : تابع در نقطه‌ی $x=۲$ تعر ف نشده است. یعنی $f(۲)$ ج د ندارد.

۲ : حد تابع در نقطه‌ی $x=۲$ برابر ۴ است. یعنی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

۳ : حد راست تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ برابر ۱ است. یعنی $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=۱$

۴ : تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ حد چپ ندارد. یعنی $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)$ وج د ندارد.

۵ : تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ حد ندارد. یعنی $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ ج د ندارد.

۶ : مقدار تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ برابر ۱ است. یعنی $f(-۱)=۱$

۷ : چون $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۰$ حد دارد. یعنی

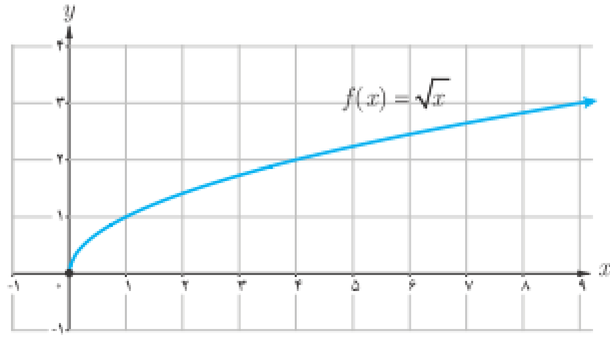
$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ از طرفی $f(۰)=۰$

۸ : چون $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)=۰$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۴$ حد دارد. یعنی

$\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$ از طرفی $f(۴)=۰$

۹ : $f(-۳)$ و $\lim\limits_{x\to(-۳)^+} f(x)$ ج د ندارد ولی $\lim\limits_{x\to(-۳)^-} f(x)=۲$

مثال : برا تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با ن دار ز ر توان ن شت.



الف : $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x} = ۰$ ب : $\lim\limits_{x\to ۰^-} \sqrt{x}$ وجـ د ندارد ز را تابع در $x<۰$ تعر ف نشده است.

پ : $\lim\limits_{x\to ۰} \sqrt{x}$ جـ د ندارد.

مثال : نشا د د ک تابع ز ر در نقطه‌ی $x=۳$ دارا حد است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & x\geq ۳ \\ ۵x & x<۳ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^+} (x^۲+۲x) = (۳)^۲ + ۲(۳) = ۱۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^-} (۵x) = ۵(۳) = ۱۵$

و چو $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = ۱۵$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۳$ دارا حد است

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = ۱۵$$

مثال : نشان د د ک تابع $f(x) = ۳ + [x]$ در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد.

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (۳+[x]) = ۳ + [۲^+] = ۳ + ۲ = ۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (۳+[x]) = ۳ + [۲^-] = ۳ + ۱ = ۴$

و چو $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۲$ دارا حد ن ست.

مثال: تابع ا ن د f ثال بزن د ک در $x=۱$ حد نداشته باشد، ا ا $|f|$ در $x=۱$ حد داشته باشد.

حل : قرار دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} ۲ & x\geq ۱ \\ -۲ & x<۱ \end{cases} \rightarrow |f(x)|=\begin{cases} ۲ & x\geq ۱ \\ ۲ & x<۱ \end{cases} \rightarrow |f(x)|=۲$$

در ا ص رت $\lim_{x\to ۱}|f(x)|=۲$ در حال ک د تابع f در نقطه ی $x=۱$ حد ندارد.

مثال : قدار a را چ ا پ دا ک د ک تابع ز ر در نقطه‌ی $x=۳$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+x-۱ & x<۳ \\ -۳x+۲ & x\geq ۳ \end{cases}$$

حل : کافی است حد راست حد چپ ا تابع را در نقطه‌ی $x=۳$ حاسب کرده برابر قرار ده م.

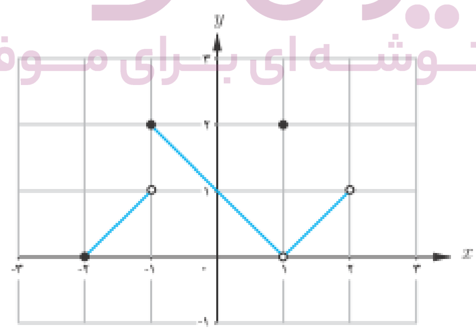
حد راست $\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(-۳x+۲)=-۳(۳)+۲=-۷$

حد چپ $\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(ax^۲+x-۱)=a(۳)^۲+(۳)-۱=۹a+۲$

$$\Rightarrow ۹a+۲=-۷ \rightarrow ۹a=-۹ \rightarrow a=-۱$$

تمرین برای حل :

۶ : برا تابع f که ن دار آ داد شده است کدا ک درست کدام ک نادرست است؟



الف) $\lim_{x\to ۱} f(x)=۲$

ب) $f(۱)=۲$

پ) $f(۲)=۱$

ت) $\lim_{x\to (-۲)^+} f(x)=۰$

ث) $\lim_{x\to -۱} f(x)=۲$

ج) $\lim_{x\to ۰} f(x)=۱$

چ) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$ ج د ندارد. ح) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x)$ ج د ندارد.

۷: ن دار تابع $f(x) = \sqrt{x - ۲}$ را رس ک د. سپس حاص ت سا ا ز ر را در ص رت ج د را ب سد.

الف) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x)$ د) $f(۲)$

۸: ن دار تابع ز ر را رس ک د. سپس ب سئوا ت ز ر پاسخ د د.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

الف: آ ا ا تابع در نقطه‌ی صفر حد دارد در ص رت ثبت ب د جواب حد آن را ب سد.

ب: آ ا $f(۰)$ ج د است چرا؟

۹: ن دار تابع $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ را رس ک د. سپس حد تابع را در نقطه‌ی $x = ۰$ را در ص رت ج د ب دست آ ر د.

۱۰: مثالی از ک تابع راه با ن دار آن ارائ ک د ک حد تابع در نقطه‌ی ۲ برابر ۱- باشد.

۱۱: تابع ا ند f ارائ ک د ک در نقطه‌ی ۳ حد نداشته باشد و $f(۳) = ۱$

۱۲: تابع ا ند f ارائ ک د ک در نقطه‌ی ۲ تعر ف نشده باشد ولی $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۴$

۱۳: ن دار تابع $f(x) = |x - ۱|$ را رس ک د. سپس حاص ت سا ا ز ر را در ص رت ج د را ب سد.

الف) $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x)$ د) $f(۱)$

۱۴: با حاسبه‌ی حد راست حد چپ ج د حد تابع ز ر در نقطه‌ی $x = ۰$ را بررس ک د.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq ۰ \\ ۵ & x = ۰ \end{cases}$$

۱۵ : ن دار تابع ز ر را رس ک د حد تابع در نقطه‌ی $x=۰$ را در ص رت ج د ب دست آ ر د.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲ & x>۰ \\ -۲x-۲ & x\leq ۰ \end{cases}$$

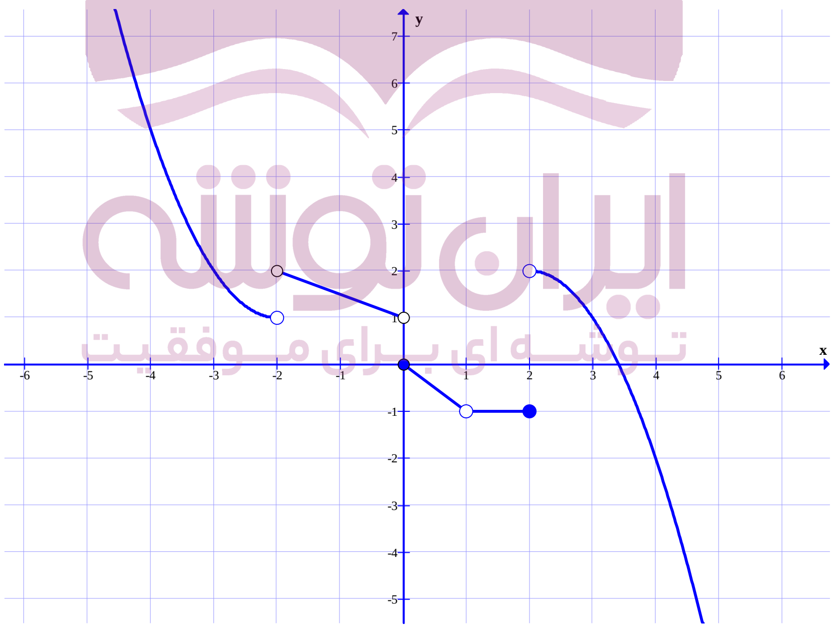
۱۶ : نشا د د ک تابع ز ر در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد.

$$f(x)=\begin{cases} -x+۲ & x>۲ \\ -۲ & x=۲ \\ x-۳ & x<۲ \end{cases}$$

۱۷ : مقدار a را چ ان ب اب د ک تابع ز ر در نقطه‌ی $x=-۱$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۳}-۲ & x>-۱ \\ ۲ax^{۲} & x\leq -۱ \end{cases}$$

۱۸ : با ت جه ب شک قاب تسا ا ز ر را کامل ک د.[۲]



---

[2] . ت جه : م ظ ر از اد $x\to(-۲)^{+}$ عنی x از س ت راست بـه ۲- زد ک ش د. و ظ ر از اد $x\to -۲^{+}$ یعن x در قس ت قرینه‌ی س ت راست ۲ قرار دارد. واضح است که $-۲^{+}=(-۲)^{-}$

ه چن ن م ظ ر از اد $x\to(-۲)^{-}$ عنی x از س ت چپ به ۲- زد ک ش د. و ظ ر از اد $x\to -۲^{-}$ عنی x در قس ت قری ه‌ی س ت چپ ۲ قرار دارد. واضح است که $-۲^{-}=(-۲)^{+}$

الف) $\lim_{x\to ۲^-} f(x) + ۳\lim_{x\to ۰^+} f(x) - ۲\lim_{x\to (-۲)^+} f(x) =$

ب) $\lim_{x\to (-۲)^-} f(x) - \lim_{x\to ۰^-} f(x) + ۴\lim_{x\to ۱} f(x) + \lim_{x\to -۲^-} f(x) =$

ج) $\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to (-۲)^+} f(x) + ۲\lim_{x\to ۰^-} f(x) =$

د) $\dfrac{\lim_{x\to (-۳)^+} f(x)}{\lim_{x\to ۱^-} f(x) + \lim_{x\to ۲^-} f(x)} =$

درس دوّم : محاسبه‌ی حد توابع

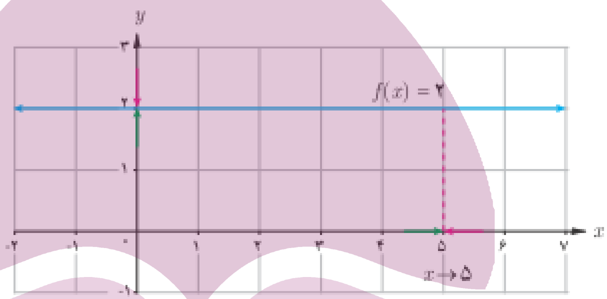
یکی از عوا   ک   تواند ب طالعه‌ی دق ق تر ک تابع ک ک د، حد آ تابع (در ک نقطه) اس ت. ل ذا لازم است قواعد دست ر ای برا   حاسبه‌ی حد ج د داشته باشد. در ا   درس برخی از ا   قواعد را به ط ر ش دی ب   را ذکر ثال ، عرف   کنیم.

قسمت اوّل : اعمال روی حد توابع

در ا   بخش ب طالعه‌ی اع ا ر   حد م   پرداز   ک   حاسبه‌ی حد د توابع را ساد تر   ک د.

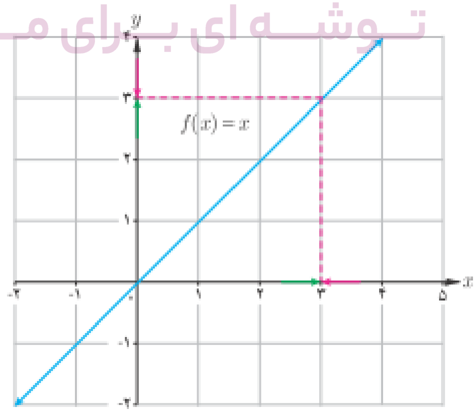
۱ : تابع ثابت $f(x)=c$ در   مه‌ی نقاط حد دارد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

مثال : تابع $f(x)=۲$ در   مه‌ی نقاط حد دارد. لذا $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۲$



۲ : تابع   انی $f(x)=x$ در   مه‌ی نقاط حد دارد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$

مثال : تابع $f(x)=x$ در   مه‌ی نقاط حد دارد. لذا $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۳$



۳ : فرض ک ک توابع f و g ر دامنه‌ی کسان تعر ف شد در a دارا حد باش د. ب عبارت

د ر فرض ک که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=k$ در ا ص رت :

الف : حد ج ع د تابع برابر ج ع حد ا آنها است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=l+k$$

ب : حد تفاض د تابع برابر تفاض حد ا آن ا است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=l-k$$

ج : حد حاص ضرب د تابع برابر با حاص ضرب حد ا آن ا است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=lk$$

د : حد خارج قس ت د تابع برابر خارج قس ت حد ا آن ا است.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{l}{k} \qquad ; \qquad k\neq ۰$$

نتیجه :

۱ : حد حاص ضرب ک عدد در ک تابع با حاص ضرب آ عدد در حد تابع برابر است.

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=cl$$

۲ : حد عک س ک تابع با عک س حد آ عدد برابر است.

$$\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\frac{۱}{l} \qquad ; \qquad l\neq ۰$$

۳ : ا ر n ک عدد طب عی باشد آ اه

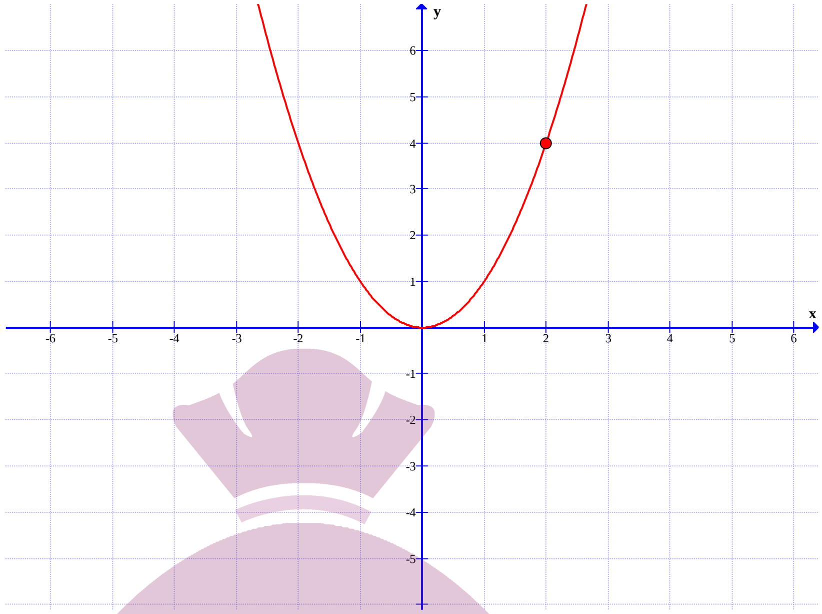
$$\lim_{x\to a} f^{n}(x)=(\lim_{x\to a} f(x))^{n}=l^{n}$$

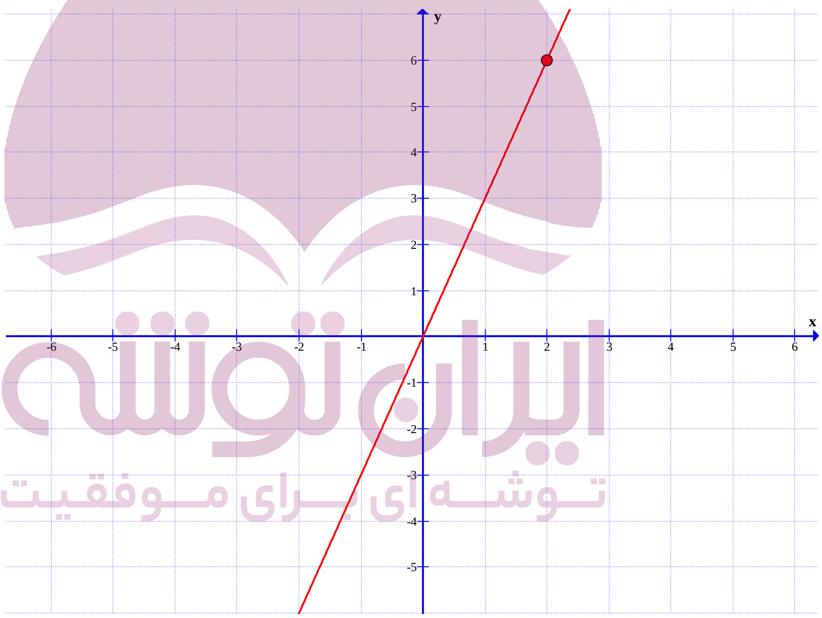
۴ : ا ر n ک عدد طب عی باشد آ اه

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{l}$$

(در ص رت که n ز ج باشد با د $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ge ۰$)

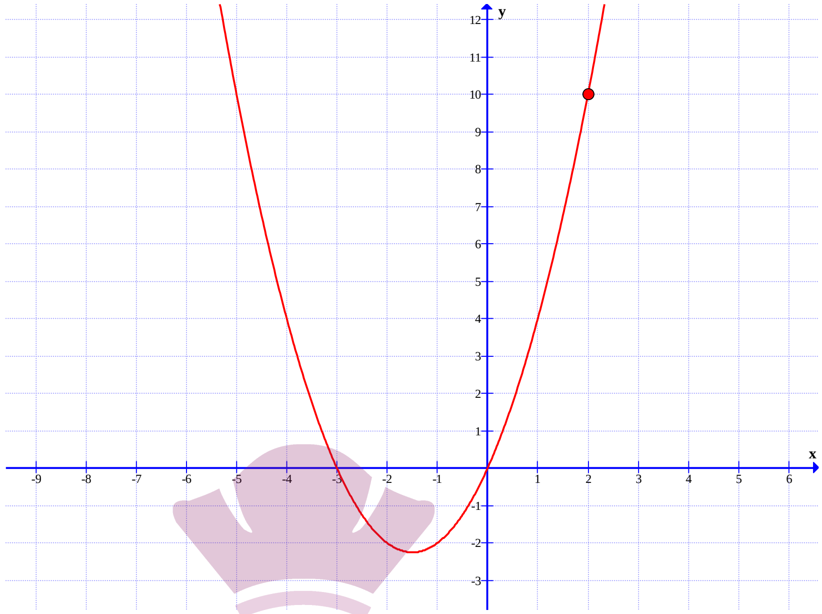
مثال : ن دار توابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=۳x$ را در نظر ب ر د.





واضح است که $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۶$

اکن ن دار تابع $h(x)=x^{۲}+۳x$ را رس کن م.



در ا   ص رت با ت جه به این نم دار عل است که :

$$\lim_{x\to ۲} h(x) = ۱۰$$

با ت ج ب ا   طب نتج   ش د که :

$$\lim_{x\to ۲} h(x) = \lim_{x\to ۲} f(x) + \lim_{x\to ۲} g(x)$$

یعن :

$$\lim_{x\to ۲} x^۲ + ۳x = \lim_{x\to ۲} x^۲ + \lim_{x\to ۲} ۳x$$

تمرین۱ : فرض ک د ک توابع f و g و h ر دا   کسان تعر ف شده باش د و

$$\lim_{x\to a} h(x) = ۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} g(x) = ۶ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -۲$$

در ا   ص رت حد ا   ز ر را در ص رت ج د تع   ک د.

۱) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) =$

۲) $\lim_{x\to a} (f(x))^۲ =$

۳) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

۴) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[۳]{g(x)-f(x)} =$

۵) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{۲g(x)}{۶f(x)-۳h(x)}\right) =$

۶) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{۱}{f(x)} =$

تمرین۲ : حد ا ز ر را حاسبه ک د.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} (۳x^{۲}+۲x-۷)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۲x-۱}{x^{۲}-۴x+۱}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۵} \sqrt{۲x-۶}$

ادامه‌ی دستور های اعمال روی توابع

۴ : ا ر b ک عدد حق ق ثبت $P(x)$ ک چ د جم ا باشد آ اه :

$$\lim_{x\to a} b^{P(x)} = b^{P(a)}$$

مثال :

$$\lim_{x\to -۱} ۳^{۲x+x^{۲}} = ۳^{۲(-۱)+(-۱)^{۲}} = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳}$$

۵ : ا ر x بر حسب راد ان باشد. آ اه :

ب) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

الف) $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$

د) $\lim\limits_{x\to a} \cot x = \cot a \quad (a \neq k\pi \,, k\in Z)$

ج) $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a \quad (a \neq k\pi + \dfrac{\pi}{۲} \,, k\in Z)$

مثال :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(۲\sin x-\cos x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(۲\sin x)+\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(-\cos x)$$

$$=۲\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\sin x-\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\cos x=۲\sin\frac{\pi}{۲}-\cos\frac{\pi}{۲}=۲(۱)-۰=۲$$

تمرین۳ : با استفاده از قضا ا حد حد ا ز ر را حاسبه ک د.

الف) $\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۲x^{۳}-۳x+۱}=$

ج) $\lim_{x\to -۱}۲^{۳x^{۲}+۱}=$

ب) $\lim_{x\to ۱}(\sqrt[۵]{x^{۴}-۲x}+(x^{۲}+x)^{۴})=$

د) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin x+\cos x}{\cos ۲x-۳x\sin ۲x}=$

تمرین۴ : ثابت ک د که $\lim_{x\to a}f(x)=L$ ا ر و ا ر $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$

اثبات :

قس ت اوّل:

$$\lim_{x\to a}f(x)=L\to\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=L-\lim_{x\to a}L$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to a}L=L}\lim_{x\to a}(f(x)-L)=L-L\to\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$$

قس ت دوّم :

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰\to\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=۰$$

$$\to\lim_{x\to a}f(x)-L=۰\to\lim_{x\to a}f(x)=L$$

تمرین۵ : د تابع ثال بزن د ک چ کدا در نقطه‌ی $x=۱$ حد نداشته باش د، ول جم ع آ ا در ایـن نقط دارا حد باشد.

حل : قرار دهیم.

$$f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x>۱\\ ۲ & x\le ۱\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x-۱ & x>۱\\ -۲ & x\le ۱\end{cases}$$

$$\rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases} ۰ & x>۱ \\ ۰ & x\leq ۱ \end{cases} \rightarrow (f+g)(x)=۰$$

در ا   صـ رت $\lim\limits_{x\to ۱}(f+g)(x)=۰$ در حال   ک   د   تابع f و g در نقطه ی $x=۱$ دارا   حد ن ست د.

تمرین۶: د   تابع   ثال بزن د ک   در   ک نقط   حد نداشته باش د، ول   تفاض   آ   ا در ا   نقط   دارا   حد

باشد.

حل : قرار   دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ ۲ & x\leq ۰ \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x-۱ & x>۰ \\ ۱ & x\leq ۰ \end{cases}$$

$$\rightarrow (f-g)(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۱ & x\leq ۰ \end{cases} \rightarrow (f-g)(x)=۱$$

در ا   صـ رت $\lim\limits_{x\to ۰}(f-g)(x)=۱$ در حال   ک   د   تابع f و g در نقطه‌ی $x=۰$ دارا   حد ن ست د.

تمرین۷: د   تابع   ثال بزن د ک   چ کدا   در $x=۰$ حد نداشته باش د، ول   تابع $\dfrac{f}{g}$ در $x=۰$ حد داش ته

باشد.

حل : قرار   دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} -۱ & x>۰ \\ ۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$\rightarrow (\frac{f}{g})(x)=\begin{cases} -۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \rightarrow (\frac{f}{g})(x)=-۱$$

در ا   صـ رت $\lim\limits_{x\to ۰}(\dfrac{f}{g})(x)=-۱$ در حال   ک   د   تابع f و g در نقطه ی $x=۰$ دارا   حد ن ست د.

تمرین۸: نشا   د   د توابع $f(x)=x+۲$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$ در نقطه‌ی ۲ دارا   حدی براب ر هـم

هست د.

حل: برا ی $x\neq ۲$ داری   :

$$g(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲=f(x)$$

لذا

$$\lim_{x\to ۲} g(x) = \lim_{x\to ۲} \frac{x^{۲}-۴}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}(x+۲) = ۴$$

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}(x+۲) = ۴$$

تمرین برای حل :

۸ : حد ا ز ر را حساب ک د.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱} (۳x^{۲}-۴x+۵)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱} \sqrt{۳x^{۲}+x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^{۳}-۴x+۱}{۳x+۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰}(x^{۲}+۳\sin x+۱)$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x+\cos x)$

ح) $\lim\limits_{x\to a} (۳x+x^{۲}-۵)$

۹ : ا ر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = -۱$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x) = ۳$ حد ا ز ر را حساب ک د.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} (۳f(x)-۵g(x))$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{f(x)+g(x)}{۵g(x)+۲}$

۱۰ : ا ر تابع f در نقطه‌ی $x=۳$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱} = ۵$ آ اه مقدار $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ را ب ابد.

۱۱ : در ر ک از حالت ا ز ر درباره‌ی حد تابع $f+g$ چ توا فت؟

الف : ا ر توابع g و f در a حد نداشته باشد.

ب : ا ر تابع f در a حد داشته باشد، ول تابع g در a حد نداشته باشد.

ج : هر د تابع g و f در a حد داشته باشند.

**

قسمت دوّم : تعمیم قوانین اعمال روی حد توابع

ت ا قواذ ک درباره‌ی حد طرح شد، برا حد ا ک طرفه (حد راست چپ) ن ز قاب تعمیم است.

مثال :

$$\lim_{x\to ۳^+}(x^۲+[x]+۱)=\lim_{x\to ۳^+}x^۲+\lim_{x\to ۳^+}[x]+\lim_{x\to ۳^+}۱=۹+۳+۱=۱۳$$

توجه : ا ر تابع داد شد شا جز صح ح باشد، برا حاسبه‌ی حد در ک نقطه، ابتدا با د جز صح ح را تع قدار کرد جا ز کنیم و چنین ا ر تابع داد شد شا ق در ط ق باش د، ابتدا با د درون قدر ط ق را تع ع ت کرد قدر ط ق را حذف ک سپس حد را حاسب کنیم.

تمرین ۱۲ : حد توابع ز ر را در نقطه‌ی داد شده ، در ص رت ج د بدست آ ر د.

$$۱)\ \lim_{x\to ۱^+}\frac{|x-۱|}{x-۱}\qquad ۳)\ \lim_{x\to ۲^+}[x]+۱\qquad ۵)\ \lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x-۱}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x-۱}\qquad ۴)\ \lim_{x\to ۲^-}[x]+۱\qquad ۶)\ \lim_{x\to ۱^-}\sqrt{x-۱}$$

تمرین۱۳: با بررس حد ا کطرف حد توابع ز ر را در نقطه‌ی داد شد در ص رت ج د بدست آ ر د.

$$۱)\ \lim_{x\to ۱}(|x-۱|+۲)\qquad ۴)\ \lim_{x\to ۳}([x]+[-x])$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}\qquad ۵)\ \lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|}{x-۲}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲}\sqrt{x-۲}\qquad ۶)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{[x-۲]}$$

تمرین برای حل :

۱۴ : مقدار a را چ ان ب ا ب د ک تابع $f(x)=a[x]+[x+۱]$ در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته باشد.

۱۵ : مقدار حد مقابل را در ص رت ج د، بدست آ ر د.

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{[x]}{x+[x]}$$

۱۶ : قدار حد مقابل را در ص رت ج د، بدست آ ر د.

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۱}{x-۲}$$

***

قسمت سوّم : حدهای مبهم

گا   در حاسبه‌ی حد توابع کسری با حالت صفر حدی بر ر   صد فر حدی[1] ($\frac{\cdot}{\cdot}$) برخ رد   کنیم. در اصط ح فته   شد د که حد بهم است قدار آن ر ش جا ز   ستقیم به دست نمی آید، بلکه با د قبل از جا ز   عا   صفر کننده (عامل ابهام) را از صورت خرج حذف کنیم. ا ع   را رفع ابهام گ ند.

برا حذف عا ابهام ز است با توجه به نوع تابع کی از ر ش ها ز ر را بکار ب ریم.

الف) ا ر صورت خرج کسر چند جمله ای باشد صورت خرج را تجزیه ک د سپس کسر را ساده ک د[2].

مثال : حد ز ر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}=\frac{(۲)^{۲}-۴}{۳(۲)-۶}=\frac{\cdot}{\cdot} \quad \text{بهم}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۳(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲}{۳}=\frac{۲+۲}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

مثال: حد ز ر را حاسبه ک د.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}+۶x+۸}{x^{۲}-۴}$$

حل:

1. عدد سیرکوچک نزدیک صفر تقسیم بر عدد سیرکوچک نزدیک صفر ، ر صفرحدی نامند.
2. درصورتی‌که تجزیه‌ی صورت مخرج کسر مشکل شد می‌توان از تقسیم صورت بر مخرج و عامل صفرکننده استفاده نمود.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}+۶x+۸}{x^{۲}-۴}=\frac{(-۲)^{۲}+۶(-۲)+۸}{(-۲)^{۲}-۴}=\frac{۴-۱۲+۸}{۴-۴}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}+۶x+۸}{x^{۲}-۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x+۴)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{(-۲)+۴}{(-۲)-۲}=\frac{۲}{-۴}=\frac{۱}{-۲}$$

ب) ا ر ص رت ا خرج کسر شا راد کال با فرجه‌ی ۲ باشد ص رت ا خرج را ا ک د. برا ا کرد عمولاً ص رت ا خرج را در زد ج عبارت راد کال ضرب ک د.

مثال : حد ز ر را حساب ک د.

$$\lim_{x\to ۹}\frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۹}\frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}=\frac{۲(۹)-۱۸}{\sqrt{۹}-۳}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to ۹}\frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}=\lim_{x\to ۹}\frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}\times\frac{\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}+۳}=\lim_{x\to ۹}\frac{۲(x-۹)}{(\sqrt{x})^{۲}-(۳)^{۲}}\times(\sqrt{x}+۳)$$

$$=\lim_{x\to ۹}\frac{۲(x-۹)}{x-۹}\times(\sqrt{x}+۳)=\lim_{x\to ۹}۲(\sqrt{x}+۳)=۲(\sqrt{۹}+۳)=۱۲$$

مثال : حد ز ر را حساب ک د.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}-۳}{x-۲}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}-۳}{x-۲}=\frac{\sqrt{(۲)^{۲}+۵}-۳}{(۲)-۲}=\frac{\sqrt{۹}-۳}{۲-۲}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\times\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5})^2-(3)^2}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2+2}{\sqrt{(2)^2+5}+3}=\frac{4}{3+3}=\frac{2}{3}$$

ج) ا ر صـ رت ا خرج شا عبارت ثـ ثاتی باشد، از روابط ثـ ثاتی استفاده کـ د.

مثال : حد ز ر را حساب کـ د.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

حل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos(0)}{0}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}$$

$$\text{در}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}=1\times\frac{1}{1+\cos(0)}=\frac{1}{2}$$

توجه : ابتدای ا فصـ داشتیم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

از ا تسا توا نتا ج ز ر را ن ز بـ دست آ رد.

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\tan u}{u}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{u\to 0}\frac{u}{\tan u}=1$$

از این نتا ج برا حاسبه بسـ اری از توابع ثـ ثاتـ توان استفاده کرد.

مثال : حد ا ز ر را حساب ک د.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^2\tan x}$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}$$

$$6)\ \lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin x}{x}$$

حل :

$$1\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$$

$$2\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{3}{7}=1\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\times\frac{x}{\sin x}=1\times 1=1$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\tan x}=1$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}\times\frac{m}{n}=1\times\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$$

$$6)\ \lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=3+1=4$$

نتیجه : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n}$

مثال : حد ز ر را حساب ک د.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin 4x}{3x}$$

حل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin 4x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3x}+\frac{\sin 4x}{3x}=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$$

توجه : گاا ز شد د قبل از اقدام ب رفع اب ام، تغ ر را تغ ر د تغ ر جد د را تعر ف کنـیم.

ت ج داشته باشد ک تغ ر جد د کن است ب عدد د ر ک د با د در حاسبه اع ا شد.

مثال : حد ز ر را حساب ک د.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\sqrt{x}=t}\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\lim_{t\to 1}\frac{2t^2-3t+1}{t^2-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(2t-1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{2t-1}{t+1}=\frac{1}{2}$$

مثال : حد ز ر را حساب ک د.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{3x+6}$$

حل : کافی است قرار دهیم $x+2=t$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{3x+6}=\lim_{x+2\to 0}\frac{\sin(x+2)}{3(x+2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{3}=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

تمرین برای حل :

۱۷ : حد ا ز ر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

ب) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

ج) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2-\sqrt{x+3}}$

د) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+2\tan x}{5x}$

۱۸ : حد ز ر را حاسب ک د.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+7x+12}{x^3+4x^2+4x+3}$$

۱۹ : حد ا ز ر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$

ت) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$

ث) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-x}{3-\sqrt{x+7}}$

ب) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

ح) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}$

پ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

۲۰ : مقدار a را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x-a}=8$ باشد.

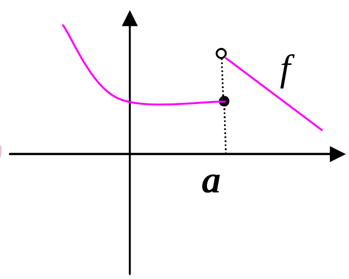
۲۱ : حدهای زیر را حساب کنید.

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin\frac{x}{2}-3\tan\frac{1}{3}x}{x}$

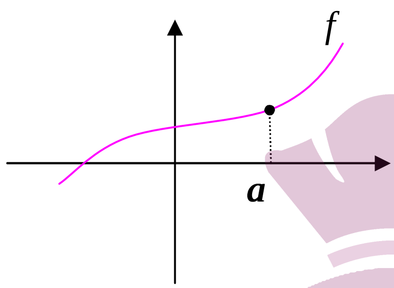
الف) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\tan(x+1)\times\sin^2(x+1)}{5(x+1)^3}$

درس سوّم : پیوستگی توابع

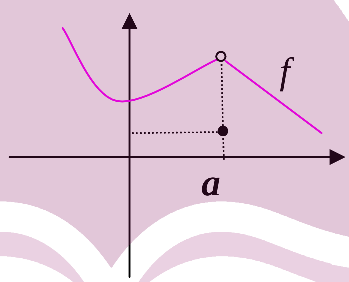
بررس پ ست   ک تابع در ک نقط   تواند در شاخت رفتار ک تابع ک ک ن ا د. از نظر دس تابعی را در ک نقط پ ست   د ر اه ن دار آ تابع در ا نقطه بر د ا پرش نداشته باشد. به ن دار ای ز ر ت ج ک د.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پ ستـه نیست.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پ ستـه است.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پ ستـه نیست.

❋❋

قسمت اوّل : تعریف ریاضی پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع $y=f(x)$ را در نقطه‌ی $x=a$ پ ست   د ر ا س شرط ز ر برقرار باشد.

الف) تابع در نقطه‌ی $x=a$ تعر ف شده باشد. یعنی $f(a)$ ج د داشته باشد.

ب) تابع در نقطه‌ی $x=a$ حد داشته باشد. یعنی $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

ج) حد تابع در ا   نقطه با قدار آن برابر باشد. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

ب عبارت د ر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ پ ستـه است، ر اه

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

ا ر کی از شرط ا ف ق برقرار نباشد د تابع در $x=a$ پ سته نیست.

مثال: پ ست تابع ز ر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررس ک د.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۳} & x>۱\\ ۵ & x=۱\\ ۲x-۵ & x<۱\end{cases}$$

حل : کافی است شرا ط پ ست را بررس کنیم.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\sqrt{x^۲+۳}=\sqrt{(۱)^۲+۳}=۲$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۲x-۵)=۲(۱)-۵=-۳$

قدار $f(۱)=۵$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پ سته نیست.

مثال: پ ست تابع ز ر را در نقطه‌ی $x=۲$ بررس ک د.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x\le ۲\\ ۳x-۱ & x>۲\end{cases}$$

حل : کافی است، شرا ط پ ست را بررس کنیم.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(x^۲+۱)=(۲)^۲+۱=۵$

قدار $f(۲)=(۲)^۲+۱=۵$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=۲$ پ سته است.

مثال: تابع ز ر در نقطه‌ی $x=۱$ پ سته است. مقدار a را ب ابد.

$$f(x)=\begin{cases}۲ax^۲+۵ & x\ge ۱\\ ۶x-۳ & x<۱\end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(۲ax^۲+۵x)=۲a(۱)^۲+۵(۱)=۲a+۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۶x-۳)=۶(۱)-۳=۳$

قدار $f(۱)=۲a(۱)^۲+۵(۱)=۲a+۵$

و چ تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پ ستة است پس :

$$۲a+۵=۳\to ۲a=۳-۵\to ۲a=-۲\to a=-۱$$

تمرین برای حل :

۱ : پیوست تابع ز ر را در نقطه‌ی $x=۲$ بررس ک د.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x<۲ \\ x+۵ & x=۲ \\ ۹-x & x>۲ \end{cases}$$

۲ : پ ست تابع ز ر را در نقطه‌ی $x=۵$ بررس ک د.

$$f(x)=۱+۲[x]$$

۳ : پ ست تابع ع ت را در نقطه‌ی $x=۰$ بررس ک د.

۴ : ن دار تابع را رس ک د ک در نقطه‌ی $x=۱$ پ ستة باشد ول در نقطه‌ی $x=-۱$ پ ستة نباشد.

۵ : قاد ر a و b را ط ر پ دا ک د ک تابع ز ر در نقطه‌ی $x=-۲$ پ ستة باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲ax+b & x<-۲ \\ ۵ & x=-۲ \\ ۲bx-۳ & x>-۲ \end{cases}$$

❋❋

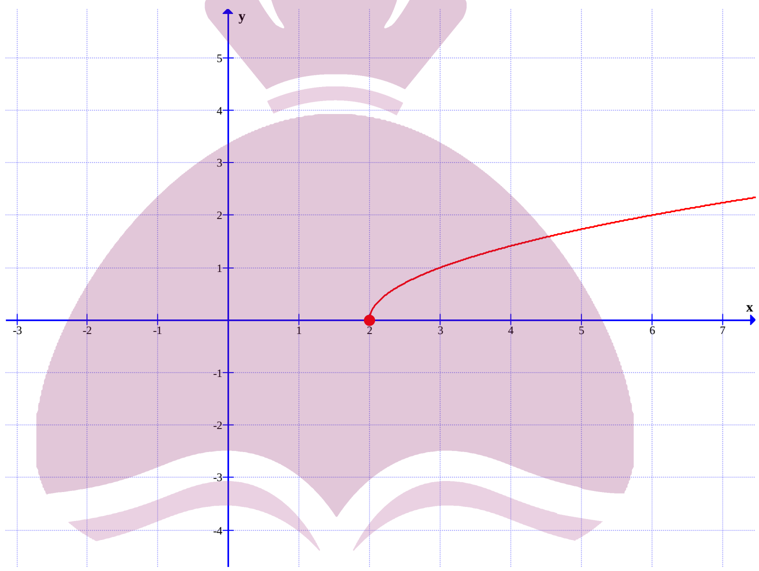
قسمت دوّم : پیوستگی های یک طرفه

گ د تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوست راست دارد، ر اه $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=f(a)$

ه چن گ د تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوست راست دارد، ر اه $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=f(a)$

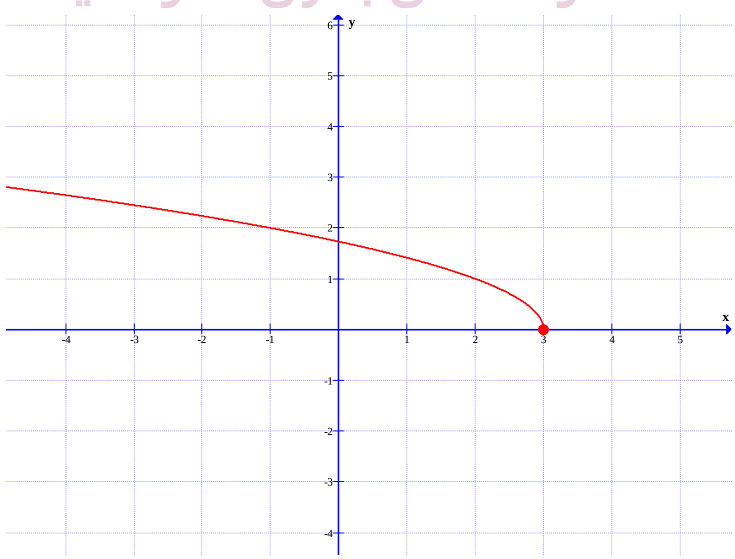
مثال : تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ در نقطه‌ی $x=۲$ پ ست راست دارد. ز را :

$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=f(۲)=۰$$



مثال : تابع $f(x)=\sqrt{۳-x}$ در نقطه‌ی $x=۳$ پ ست چپ دارد. ز را:

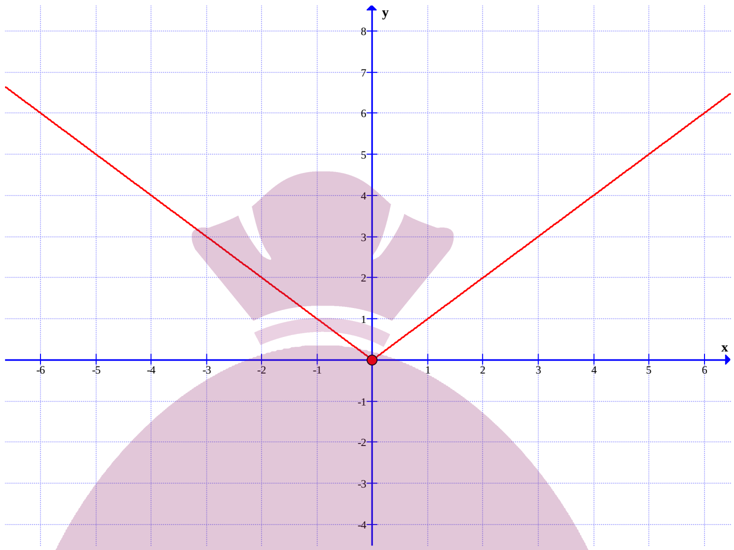
$$\lim_{x\to ۳^{-}} f(x)=f(۳)=۰$$



مثال : تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=0$ پ ست راست پ ست چپ دارد.

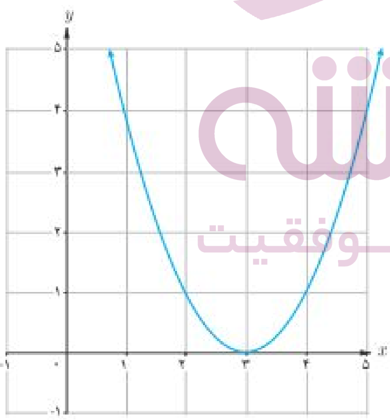
ز را :

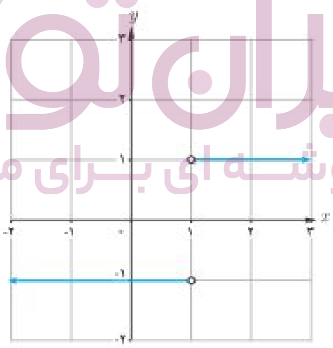
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$$

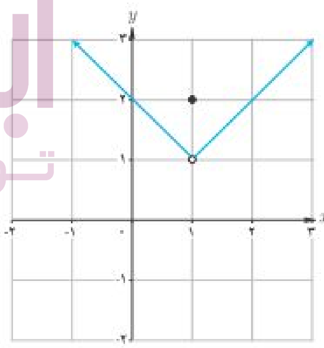


تمرین ۶ : پ ست ر ک از توابع ز ر را در نقطه‌ی $x=1$ بررس ک د.

الف) $f(x)=(x-3)^2$ ب) $g(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ پ) $h(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ 2 & x=1 \\ -x+2 & x<1 \end{cases}$





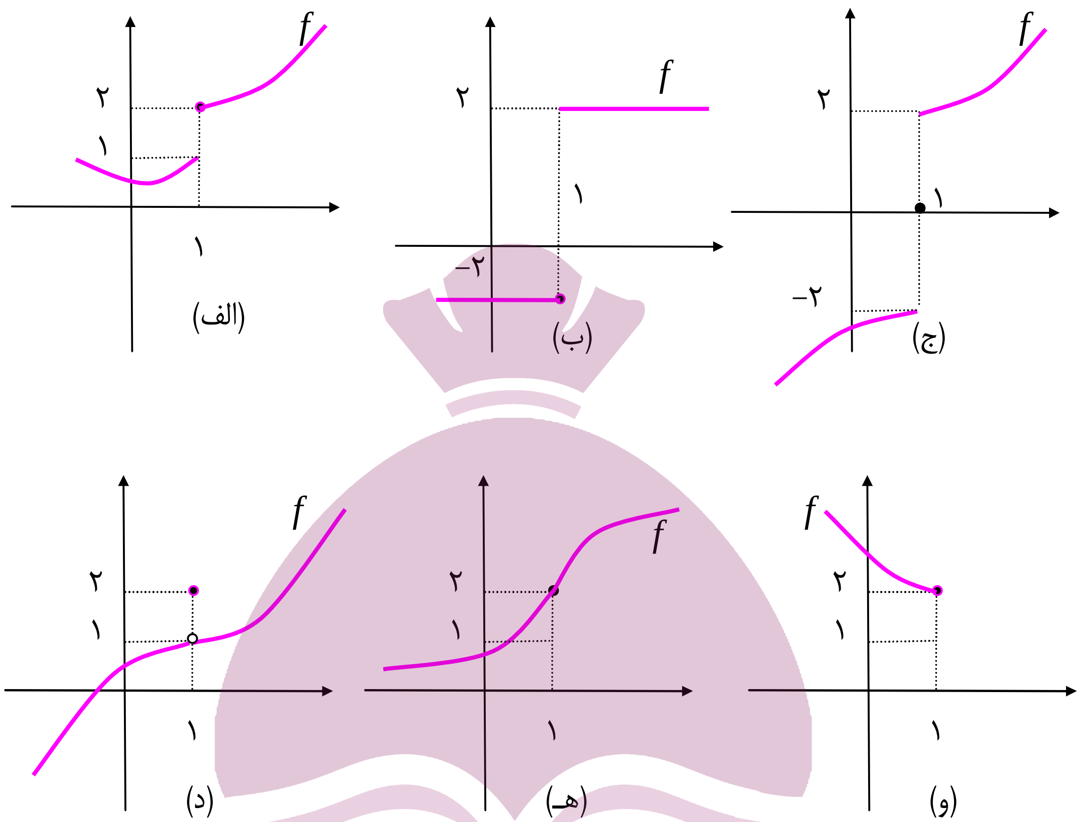


تمرین ۷ : پ ست تابع ز ر را در نقطه‌ی $x=1$ بررس ک د.

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & x<1 \\ 2x & x\ge 1 \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۸ : پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.



۹ : مقدار k را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۴$ پیوستگی داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x-k & x>۴ \\ ۵+۳x^{۲} & x=۴ \\ -x+۱ & x<۴ \end{cases}$$

۱۰ : پیوستگی تابع در $x=۱$ را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -۲x+۵ & x\le ۱ \\ x^{۲}+۲ & x>۱ \end{cases}$$

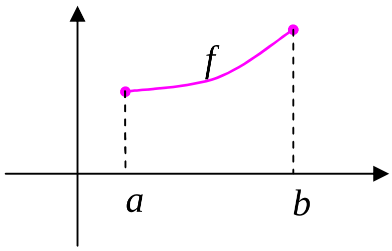
۱۱ : تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه‌ی $x=۱$ برابر -۱ باشد، ولی در این نقطه پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

***

قسمت سوّم : پیوستگی در یک فاصله

پ ستہ در ک فاص را ب کی از حالت ا ز رتعر ف کنیم.

تعریف۱: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ا از د $[a,b]$ پ ستہ د ر اه



الف) در ت ام نقاط فاصله‌ی (a,b) پ ستہ باشد.

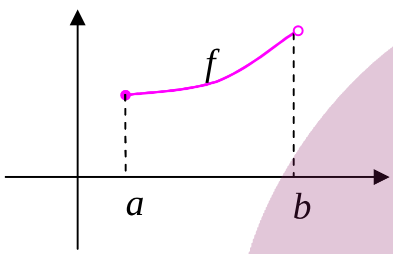
ب) در نقطه‌ی $x=a$ پ ستہ راست داشته باشد.

ج) در نقطه‌ی $x=b$ پ ستہ چپ داشته باشد.

❋❋

تعریف۲: تابع $y=f(x)$ را در فاصله ا از د $[a,b)$ پ ستہ

گ د ر اه



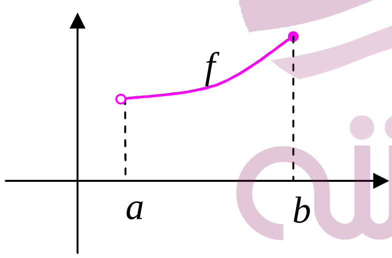
الف) در ت ام نقاط فاصله‌ی (a,b) پ ستہ باشد.

ب) در نقطه‌ی $x=a$ پ ستہ راست داشته باشد.

❋❋

تعریف۳: تابع $y=f(x)$ را در فاصل ا از د $(a,b]$ پ ستہ

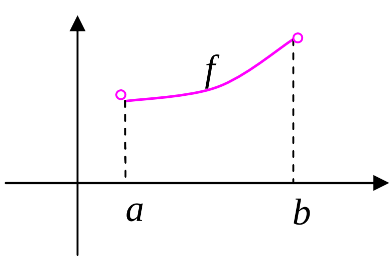
گ د ر اه



الف) در ت ام نقاط فاصله‌ی (a,b) پ ستہ باشد.

ب) در نقطه‌ی $x=b$ پ ستگ چپ داشته باشد.

❋❋❋



تعریف۴ : تابع $y=f(x)$ را در فاصله ا از د (a,b) پ ستہ

گ د ر ا در ت ام نقاط ا فاص پ ستہ باشد.

❋❋

مثال : پ ستگی تابع $f(x)=[x]$ را در فاصل ی $[۱,۲)$ بررس ک د.

حل: ابتدا ثابت ک ک تابع درنقطه‌ی $x=۱$ پ ستگی راست دارد.

قدار $f(۱)=[۱]=۱$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=[۱^+]=۱$

تابع در $x=۱$ پ ستگی راست دارد.

حال نشا د ک تابع در ت ام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پ سته است. گ ر که $a\in(۱,۲)$ پس $[a]=۱$

قدار تابع $f(a)=[a]=۱$

حد راست $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=[a^+]=۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=[a^-]=۱$

تابع در ت ام نقاط فاصل ی $(۱,۲)$ پ سته است.

❋❋

مثال : پ ستگی تابع $f(x)=۲x+\sqrt{۲-x}$ را در فاصل ی $(۱,۲]$ بررس ک د.

حل: ابتدا ثابت ک ک تابع درنقطه‌ی $x=۲$ پ ستگ چپ دارد.

قدار $f(۲)=۲(۲)+\sqrt{۲-۲}=۴$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲(۲)+\sqrt{۲-۲}=۴$

تابع در $x=۲$ پ ستگ چپ دارد.

حال نشا د ک تابع در ت ام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پ سته است.گ ر که $a\in(۱,۲)$

قدار تابع $f(a)=۲a+\sqrt{۲-a}=۲a+۱$

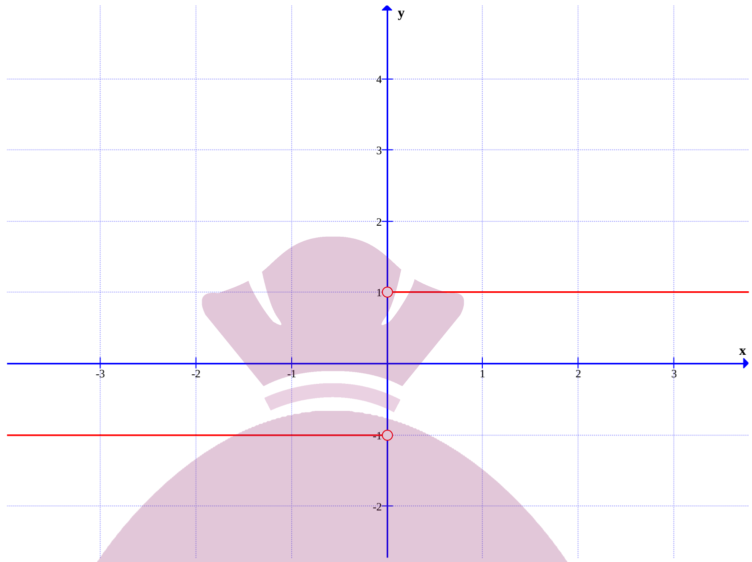
حد راست $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=۲a+\sqrt{۲-a}$

حد چپ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=۲a+\sqrt{۲-a}$

تابع در ت ام نقاط فاصل ی $(۱,۲)$ پ سته است.

مثال : دو بازه‌ی بسته ثال بزنید که تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در یکی از آن‌ها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

حل : تابع f در بازه‌ی $[۱,۲]$ پیوسته است ولی در بازه‌ی $[-۱,۱]$ ناپیوسته است.



تمرین۱۲ : تابع زیر را در نظر بگیرید. سپس درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف) $\lim_{x\to ۵^+} f(x)=۰$ ب) $\lim_{x\to ۵^-} f(x)=۰$ پ) $\lim_{x\to ۵} f(x)=۰$

ت) تابع f روی بازه‌ی $(-\infty,-۱]$ پیوسته است. ث) تابع f روی بازه‌ی $(-\infty,-۱)$ پیوسته است.

ج) تابع f روی بازه‌ی $[۲,۵]$ پیوسته است. ح) تابع f روی بازه‌ی $(-۲,۰)$ پیوسته است.

***

توجه : فاصله‌ای که یک تابع در تمام نقاط آن پیوسته باشد را فاصله‌ی پیوستگی می‌نامند. برای تعیین فاصله‌ی پیوستگی یک تابع ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین کرده سپس پیوستگی تابع را در تمام نقاط مرزی و یا شکستگی بررسی کرده و در صورت ناپیوسته بودن در آن نقاط آن‌ها را از دامنه حذف می‌کنیم.

منظور از نقاط مرزی نقاط ابتدا و انتهای دامنه (به شرط اینکه بصورت بسته باشد.) و منظور از نقاط شکستگی نقاطی که در آن‌ها ضابطه‌ی تابع عوض می‌شود.

مثال : ابتدا دامنه‌ی تابع ز ر را بدست آ رد سپس فاصله‌ی پ ستگ آ را تع ک د.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

حل: واضح است که $D_f=\{x\,|\,x\geq ۱\}\cup\{x\,|\,x<۱\}=R$

حا پ ستگ تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ بررس کن م.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱-۱=۰$$

$$f(۱)=۱+۲=۳$$

لذا تابع در ا نقط پ سته ن باشد در نت جه فاصله‌ی پ ستگ آن ب صورت ز ر است.

$$R-\{۱\}=(-\infty,۱)\cup(۱,+\infty)$$

مثال : فاصله‌ی پ ستگ تابع ز ر را تع ک د.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ \dfrac{۱}{x}-۳ & x<۱ \end{cases}$$

حل: واضح است که $D_f=R-\{۰\}$

حا پیو ستگ تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ بررس کن م.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱-۳=-۲$$

$$f(۱)=۱+۲=۳$$

لذا تابع در ا نقط پ سته ن باشد در نت جه فاصله‌ی پ ستگ آن ب صورت ز ر است.

$$R-\{۱,۰\}=(-\infty,۰)\cup(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$$

تمرین ۱۲: فاصله‌ی پ ستگ تابع ز ر را تع ک د.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ ۴x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱۳: ثابت ک د ک تابع ز ر در مج عه‌ی اعداد حق قی پ سته است.

$$f(x)=\begin{cases} |x-۱| & x<۱ \\ x-[x] & ۱\le x<۲ \\ -x+۳ & x\ge ۲ \end{cases}$$

۱۴: مقدار b و a را ط ری ب اب د ک تابع ز ر در مج عه‌ی اعداد حق قی پ سته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{۱-x} & x<۱ \\ ax+b & ۱\le x<۳ \\ x^۲ & x\ge ۳ \end{cases}$$

***

قسمت چهارم : توابع پیوسته

تابع f را تابع پ ست د ر ا در ت ام نقاط دام ه‌ی خ د پ سته[1] باشد. در ا ص رت

الف : هر تابع چ د جم ا در ت ام نقاط پ سته است.

ب : تابع ثابت و تابع از در ت ام نقاط پ ست ست د.

ج : تابع کسر قتی وار پ سته است ر ا خرج آ ر شه نداشته باشد.

د : هر تابع راد کالی با فرج ز ج (تابع اصم) به ازا قاد ر حق ق ک ز ر راد کا را نا ف ک د، پ سته است.

و : توابع ثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ ت ام نقاط پ سته است.

مثال : نقاط را تع ک د ک تابع ز ر در آن نقاط پ سته نباشد.

$$f(x)=\frac{۳x-۵}{x^۲-۴x}$$

حل : کافی است ر شه ا خرج تابع را تع کنیم.

$$x^۲-۴x=۰\rightarrow x(x-۴)=۰\rightarrow x=۰\ ,\ x=۴$$

[1]. ب عبارت د ر دار تابع در ت ام نقاط پرش ا بر د داشته باشد.

تمرین برای حل :

۱۵: نقاط را تعیین ک د ک تابع ز ر در آن نقاط پ سته نباشد.

الف) $f(x)=\dfrac{۳x-۱}{x^۲-۴}$

ب) $f(x)=\dfrac{۵}{x^۳-۴x}$

۱۶ : ثابت ک د ک تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x^۲+۵}$ ه وار پ سته است.

۱۷ : فاصله‌ی پ ست   تابع ز ر را بدست آ ر د.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{۳-x}}$$

۱۸ : نقاط ناپ ست   تابع ز ر را در فاصله‌ی $[۱,۶]$ تعیین ک د.

$$f(x)=[x]+\sqrt{x-۲}$$

۱۹ : نقاط ناپ ست   تابع ز ر را تع ین ک د.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+۱}}{x^۲+۳x}$$

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم «رشته ی علوم تجربی»

فصل ۷ : آمار و احتمل

مهر ۱۳۹۶

درس اوّل : احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

قبل از ر د ب فهوم احت ا شرط فا قد ات رب ط ب احت ا را ادآ ر کنیم.

قسمت اوّل : یادآوری مفاهیم احتمال

مفا رب ط به احت ا ک در پا ا قبل با آن ا آشنا شده ا د ب شرح ز ر می باش د.

۱ : پدیده‌ی تصادفی

ر پد د ا آز ا ش که نت جه‌ی آ را نتوا قبل از انجام ب ط ر قطع پ ش ب کرد را پد ده‌ی ت صادفی می نا د.

۲ : فضای نمونه ای

مج عه‌ی همه‌ی نتا ج ک ک آز ا ش تصادف را فضای نمونه ای م نا د آ را با S ن ا ش مـی د د.

۳ : برآمد

هر ک از اعضا فضای ن ن ا را برآ د م د.

۴ : پیشامد تصادفی

هر ز ر ج عه از فضای ن ن ا را پ شا د تصادفی نامیده م ش د و آنرا ن ز با ک ح رف ب زرگ تـین ماند E ن ا ش د د.

۵ : اعمال روی پیشامدها

الف : اجت اع دو پ شا د A و B که با ن اد $A \bigcup B$ ن شت ش د پ شا دی اس ت ک ب ا رخ دادن پ شا د A ا پ شا د B ا ر د رخ د د.

ب : اشتراک د پ شا د A و B که با ن اد $A \bigcap B$ ن شت ش د پ شا دی است که با رخ داد ر دو پ شا د A و B رخ د د.

ج : تفاض پ شا د B از پ شا د A که با ن اد $A - B$ ن شت ش د پ شا دی است که ب ا رخ دادن A و رخ ندادن B رخ د د.

د : ا ر S فضای نمونه‌ای و E ک پ شا د تصادفی از آن باشد پ شا د را ک ت اظر با رخ ندادن E م باشد کمل E می نا د آ را با E' یا E^C ن ا ش د د. بدی است که $E' = S - E$

۶ : پیشامدهای ناسازگار

د پ شا د A و B را ناساز ار د ر ا ر دو با رخ ند د. ب عبارت د ر اشتراک آن ا تهی است.

$$A \bigcap B = \Phi$$

۷ : احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی

ا ر E یک پ شا د از فضای نمونه‌ای S باشد. در ا ص رت خارج قس ت تعداد اعضا پ شا د تصادفی E بر تعداد اعضا فضای نموذ ای نظ ر آ عنی S را احت ا ق ع پ شا د تصادفی E می نا د.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت ا ط ب}}{\text{تعداد حالت ای ممکن}}$$

مثال ۱ : در پرتاب ک تاس ، احت ا آ را حساب ک د ک ضرب ۳ ب ا د.

حل :

$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \rightarrow n(S) = ۶$ فضای نمونه ا

$E = \{۳,۶\} \rightarrow n(E) = ۲$ پ شا د تصادفی

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ احت ا آ د ضرب ۳

مثال۲: از ب اعداد طب عی از۱۰ تا ۱۰۰ ب تصادف یک عدد انتخاب کنیم. احت ا آ را حساب ک د که عدد انتخاب شد ضرب ۸ باشد.

حل :

$$S = \{۱۰,۱۱,۱۲,...,۱۰۰\} \rightarrow n(S) = b - a + ۱ = ۱۰۰ - ۱۰ + ۱ = ۹۱$$

$$E = \{۱۶,۲۴,...,۹۶\} \rightarrow n(E) = \frac{b-a}{k} + ۱ = \frac{۹۶ - ۱۶}{۸} + ۱ = ۱۱$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۱۱}{۹۱}$$

مثال۳ : تاس را پرتاب کنیم. ا ر A پشا د رخ داد عدد بزر تر از ۵ و B پشا د رخ داد عدد ک تر از ۳ باشد. نشا د د که ا د پشا د ناساز ارند.

حل :

فضای نمونه ا $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \to n(S)=۶$

عدد بزر تر از ۵ $A=\{۶\}$ عدد ک تر از ۳ $B=\{۱,۲\}$

و چون $A \cap B=\{\}$ ا د پشا د ناساز ارند.

۸ : اصول احتمال

برا ر پشا د اند E از فضای نمونه ای S، احت ا ق ع E، عدد حق قی از بازه‌ی $[۰,۱]$ م باش د و آ را با $P(E)$ ن ا ش د. اصو د. احت ا عبارت د از :

اصل ۱ : $P(S)=۱$

اصل ۲ : برا ر د پشا د A و B که $A \cap B=\Phi$ داریم $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

اصل ۳ : برا ر د پشا د A و B که $A=B$ داریم $P(A)=P(B)$

نتیجه :

الف : برا ر پشا د اند E از فضای نمونه ای S، ثابت ک د که $P(E')=۱-P(E)$

ب : $P(\Phi)=۰$

۹ : روابط اساسی احتمال

برا ر د پشا د A و B از فضای نمونه ا S توا روابط ز ر را ن شت:

الف) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

ب) $P(A-B)=P(A)-P(A \cap B)$

مثال : اعداد طبعی از ۱۱ تا ۱۰۰ را ر صد کارت ن س ک کارت ب ت صادف از ا آن ا استخراج کنی . مطلوبست احت ال ا ک عدد روی ا کارت:

الف : بر ۴ ا بر ۶ بخش پذ ر باشد.

ب : بر ۴ بخش پذ ر باشد ولی بر ۶ بخش پذ ر نباشد.

حل :

$$S=\{۱۱,۱۲,...,۱۰۰\}\rightarrow n(S)=b-a+۱=۱۰۰-۱۱+۱=۹۰$$

بخش پذ ر بر۴ $A=\{۱۲,۱۶,...,۹۶,۱۰۰\}\rightarrow n(A)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۱۰۰-۱۲}{۴}+۱=۲۳$

بخش پذ ر بر۶ $B=\{۱۲,۱۸,...,۹۶\}\rightarrow n(B)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۲}{۶}+۱=۱۵$

بخش پذ ر بر۱۲(ک $A\bigcap B=\{۱۲,۲۴,...,۹۶\}\rightarrow n(A\bigcap B)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۲}{۱۲}+۱=۸$

م م ۴ و۶)

الف :

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۲۳}{۹۰}+\frac{۱۵}{۹۰}-\frac{۸}{۹۰}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$$

ب :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)=\frac{۲۳}{۹۰}-\frac{۸}{۹۰}=\frac{۱۵}{۹۰}=\frac{۱}{۶}$$

تمرین برای حل :

۱: احت ال ا ک دانش آ ز در درس آ ار احت ا قب ش د، ۰/۳۴ در درس ح سابا قب ش د، ۰/۲۳ و احت ال ا ک دست ک در کی از ا د درس قب ش د، ۰/۳۸ است. احت ال ا کـ ا دان ش آ ز در ر د درس قب ش د، چقدر است؟

۲: احت ا آ ک خانه ا خچا داشته باشد، برابر ۰/۸۵ و احت ال ا ک خچا ت زی باش د برابر ۰/۴۰ و احت ا آ ک حداق کی از ا د سی باش د ۰/۹۶ می باشد. احت ا آ را ب ابد ک در ایـن خانه :

الف : ت زیون باشد. ب : فقط خچال باشد.

۳ : عددی ب تصادف از ج عه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۱۰۰۰\}$ انتخاب کن احت ال ا که :

الف : عدد انتخابی بر ۳ بخش پذ ر باشد، امّا بر ۵ بخش پذ ر نباشد چقدر است؟

ب : عدد انتخاب نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذ ر باشد چقدر است؟

***

قسمت دوّم: احتمال شرطی

نتا ج بس اری از آز ا ش ا و اتفاق ا ک در آ د رخ د د شر ط ب نتا ج آز ا ش ا د ر مـی باش د. احت ال ا چ رخداد ا را احت ا شرطی می نا د. برا ثال احت ا آس ب د د ک ران ده در ک تصادف ب شرط ا که از ک رب د ا استفاد کرده باشد. ی ک احت ا ش رطی اس ت. در واق ع در احت ا شرطی با د پ شا د ختف سر کار دار فرض ک کی از آن ا رخ داده است خـواهیم بدانیم احت ا رخ داد د ر چ تغ ر کرده است.

تعریف : فرض ک د A و B د پ شا د باش د، ب قس که $P(B)>0$ در ا ص رت ا ر B رخ داده باشد، احت ا ق ع A را با ن اد $P(A|B)$ نشا د آنرا احت ا ش رطی A ب ش رط ق ع B یعنی B قبل از A رخ داده باشد.) می ییم و ب ص رت ز ر تعر ف کنیم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال : در ک سابقه‌ی ات ب رانی، احت ال ا ک ک ات ب دچار نقص فن نش د ب خط پا ان ن ز برسد، برابر ۰/۷ است احت ال ای ک ک ات ب دچار نقص فن نش د، براب ر ۰/۸ اس ت. ا ر ب داند ک ات ب دچار نقص فن نشده است، با چه احت الی ب خط پا ا رس ده است؟

حل : ا ر A پ شا د دچار نقص فن نشدن ات بیل و B پ شا د رس دن ب خط پا ان تعر ف کنیم. در ایـن ص رت داری : $P(A\cap B)=0/7$ و $P(B)=0/8$ لذا:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0/7}{0/8}=\frac{7}{8}$$

نتیجه ۱: فرض ک د B و A د پ شا د باش د، ب قس که $B\neq\Phi$ در ا ص رت طبق تعر ف احت ال شرط داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

نتیجه ۲: در حالت ک فضای ن ز ا   احت ا   شانس است شرط کرد   ک پ شا د ا ند A ن سبت ب پ شا د د   ر   ثل B ای   است ک   فضای ن ز ا   عنی S را ک ار ذاشته و B را فضای ن ز ا   تق ی م   کنیم. احت ا رو   ا   فضای ن ز ا   ن ز   شانس است. به ا   ر کرد « کا ش فضای نمونه ای » گفت   ش د.

مثال : د تاس پرتاب   شوند ا ر ج ع ش ار   ا ۶ باشد، احت ا آنکه اقلاً کی از د تاس ۲ باش د را حساب ک د.

حل:

$A=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶)\}$ اقلا یکی از د عدد ۲ باشد.

$B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$ ج ع د عدد ۶ باشد.

$A\bigcap B=\{(۲,۴),(۴,۲)\}$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۵}$$

مثال : سکه ا   را سه بار پرتاب   کنیم. م   دان   ک   دست ک   ک بار ر   آ   ده اس ت. در ا   ص   رت ، احت ال ا   که هر سه بار ر   آ   ده باشد چقدر است؟

حل : سه بار ر   آ   د   سک را A دست ک   ک بار ر   آ   د   سک را B می نامیم. در ا   ص   رت:

$S=\{RRR.RRP,RPR,PRR,PPR,PRP,RPP,PPP\}$

$B=\{RRR.RRP,RPR,PRR,PPR,PRP,RPP\}$

$A=\{RRR\}$

$A\bigcap B=\{RRR\}$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۷}$$

مثال : اعداد ۱ تا ۹ را رو   نُ کارت   ن س   س کارت را ب تصادف انتخاب   کنیم. مط   ب اس ت احت ال ا   ک   ر س   عدد ز ج باش د، ب شرط ا   ک   ج   ع آن ا ز ج باشد.

حل : برای ا ک جـ ع س عدد ز ج باش د ا ر سه با د ز ج باش د و یا ا ک د ع دد ف رد ک ز ج باش د. امّا اعداد ز ج در ا سئ چ ارتا و اعداد فرد پ ج تا ست د. حال ا ر A پ شا د ا ک ر س ع دد ز ج B پ شا د ز ج ب د جـ ع اعداد س کارت تعر ف کنیم. داریم.

$$n(A\cap B)=\binom{4}{3}=4 \quad \text{و} \quad n(B)=\binom{5}{2}\binom{4}{1}+\binom{5}{0}\binom{4}{3}=40+4=44$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{4}{44}=\frac{1}{11}$$

تمرین ۳: د تاس سبز قر ز را پرتاب کنیم.

الف) ا ر بداز جـ ع د تاس ۱۰ شده است، احت ال ا ک تاس سبز ۶ آ ده است باشد چقدر است؟

ب) ا ر بداز ک تاس سبز ۶ آ ده است، احت ال ا ک جـ ع د تاس ۱۰ باشد چقدر است؟

حل :

الف :

$A=\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ تاس سبز باشد.

$B=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$ جـ ع دو تاس ۱۰ باشد.

$A\cap B=\{(6,4)\}$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{3}$$

ب :

$A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$ مجـ ع دو تاس ۱۰ باشد.

$B=\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ تاس سبز باشد.

$A\cap B=\{(6,4)\}$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{6}$$

مثال : فرض ک د احت ال ا ک ک ت ف تبال اص تر رق بش را ببرد، $\frac{۱}{۶}$. احت ا ق ر انی ا تـیم

در حا حاضر $\frac{۱}{۴}$ در ص رت که اص تر رق بش را ببرد، ا احت ال به $\frac{۱}{۳}$ افزا ش خوا د افت. با چه

احت ال حداق کی از دو اتفاقِ « ق ر ا شدن» یا «بردن اص تر رق ب» برای ا تی اتف اق خوا د

افتاد؟

حل : ا ر A پ شا د ق ر ا شدن و B پ شا د بر اص تر رق ب تعر ف ک نم. در ا ص رت داریم.

$$P(A)=\frac{۱}{۴} \text{ و } P(B)=\frac{۱}{۶} \text{ و } P(A|B)=\frac{۱}{۳}$$

واضح است ک دف ا سئ تعین $P(A\bigcup B)$ است. لذا بر اساس اط عات داد شد داریم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}\rightarrow P(A\bigcap B)=P(A|B)\times P(B)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۸}=\frac{۹+۶-۲}{۳۶}=\frac{۱۳}{۳۶}$$

مثال : ا ر $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A)=\frac{۳}{۴}$ باشد. مقدار $P(B|A)$ را بدست آ ر د.

حل :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)\rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}-P(A\bigcap B)\rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۲}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

تمرین برای حل :

۴ : تسا ا ز ر را ثابت ک د.

الف) $P(A|A)=۱$ ب) $P(A|A')=۰$

۵ : ا ر $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ باشد. $P(A\bigcup B)$ را بدس ورید.

۶ : ک سک را سه بار پرتاب کنیم. احت ا ر آ د سک در پرتاب سوّ را ب دس ت آ ر د، ب ش رط

ا ک در پرتاب اوّل و دوّم پشت ظا ر شده باشد.

قسمت سوّم : پیشامد های مستقل و وابسته

گاهی نتا ج ک آز ا ش تصادفی وابسته ب نت جه‌ی ک آز ا ش د ر است ا ستقل از آن می باشد.

در ا درس ب عرف پ شا د ا ستقل وابست پردازی .

تعریف : ا ر A و B د پ شا د از فضای نمونه‌ای S باش د، بط ر که $P(A),P(B)>0$، آن اه ا دو پ شا د را مستقل ر اه احت ا ق ع کی از آن ا بر احت ا ق ع د ر تأث ر نداشته باشد.

ا ر د پ شا د A و B ستقل نباش د آن ا را وابسته‌م ییم.

نتیجه :

۱) ا ر A و B د پ شا د ستقل باش د در ا صو رت:

$$P(A|B)=P(A)$$
$$P(B|A)=P(B)$$
$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

۲) ا ر A و B د پ شا د وابسته باش د در ا صو رت:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)$$
$$=P(B).P(A|B)$$

ت جه : ا ر حداق کی از د پ شا د A و B تهی باشد. ا د پ شا د ستق ست د.

توجه : مستقل ب د د پ شا د در بس اری از ارد، ن از ب بررسی ندارد. ب عنـوا ثـا قبـول در درس ف ز ک برا د دانش آ ز د پیشا د ستقل می باش د. ز را قبول ا عد قبول ک چ ت أث ر روی د وی ندارد، لذا ن از ب بررس ستقل ب دن ا د پ شا د ن ست.

مثال : جعبه ا حتوی ۱۲ لا پ است داد که ۳ تا آن ا ع ب اند. از ا جعبه ب ت صادف ک لا پ بر دار سپس بد جا ذار پ اوّل پ د ری ب تصادف بر داریم. احت ال ا کـه هر د پ ع ب باش د چقدر است؟

حل: تعر ف کنیم:

$A=$ پ شا د پ اوّل ع ب و $B=$ پ شا د پ دوّم ع ب

چ ع ب ا غ ر ع ب ب د پ اوّل چ تأث ری بر ع ب ا غ ر ع ب ب د پ دوّم ندارد پ س د پ شا د A و B ستق ست د. در ا صو رت:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱}{۲۲}$$

مثال : ۷۵ درصد افراد جا عه ا چشم شی و ۴۰ درصد ر خونی A دارند ک فرد ب تصادف انتخاب م کن م.احت ا آنکه ا فرد چشم شی ا ر خونی A داشته باش د کدام است؟

۱)۰/۷۸ ۲) ۰/۸۲ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹۵

حل: د پ شا د چشم شی ب د ر خونی A داشت ستق ست د پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A).P(B)=\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۵}-(\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۵})=\frac{۱۷}{۲۰}=۰/۸۵$$

مثال : ا ر $P(B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۶}$ د پ شا د A و B ستقل باش د. $P(A\cup B)$ را بدس ت آ ر د.

حل :

$$P(A|B)=P(A)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

تمرین۷ : ا ر د پ شا د A و B ناتهی و مستقل باش د، نشا د که:

الف) د پ شا د A' و B' ن ز ستق ست د.

ب) د پ شا د A' و B ن ز ستق ست د.

ج) د پ شا د A و B' ن ز ستق ست د.

حل:

الف:

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))$$
$$=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=۱-P(A)-P(B)+P(A).P(B)$$
$$=(۱-P(A))-P(B)(۱-P(A))=P(A')-P(B).P(A')$$
$$=P(A')(۱-P(B))=P(A').P(B')$$

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A')\times P(B')}{P(B')}=P(A')$$

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{P(A')\times P(B')}{P(A')}=P(B')$$

ب:

$$\begin{aligned}P(A'\cap B)&=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\\&=P(B)-P(A).P(B)=P(B)(۱-P(A))\\&=P(B).P(A')\end{aligned}$$

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A')\times P(B)}{P(B)}=P(A')$$

$$P(B|A')=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')}=\frac{P(A')\times P(B)}{P(A')}=P(B)$$

ج: انذ ب ح ش د ح آن ب فرا را حترم وا ذار ش د.

**

تمرین برای حل :

۸ : در پرتاب ک تاس فرض ک د پ شامد A ظا ر شد عدد ز ج پ شا د B ظا ر شد عددی با ضرب ۳ پ شا د C ظا ر شد عددی بزر تر از ۲ باشد. مستقل ب د ا نب د ر د پ شا د را بررس ک د.

۹ : یک سک ک تاس را پرتاب کنیم. احت ال آ را حساب ک د ک سک پ شت ت اس ع دد ز ج ب ا د.

۱۰ : احت ا قبول ز را در درس ف ز ک ۹۰ درصد احت ا قبول ر حانه ۷۰ درصد اس ت، احت ال ا کـه حداق کی از آن ا در ا درس قب ش د را ب دست آ ر د.

۱۱: خانواد ا دارا د فرزند است. مط ب است حاسبه‌ی احت ال ا ک ر د فرزند آن ا پسر باش د.

۱۲ : فرض ک د در ک سال احت ا ق ر ا ز تی لّ ف تبال ا را در آس ا برابر ۰/۵ و احت ا ق ر ا ز تیم ملّ وال بال ا را در آس ا برابر ۰/۸ باشد. تع ک د با چ حداق کی از ا ت ا ق ر ا خوا د شد.

۱۳ : احـ د بـ احتـ ال ۰/۷ در تـ   کـ   رد   درسـ شان بـ احتـ ال ۰/۸ در تـ   لّـ فـ تبـ ال نـ جوانـ ان انتخاب   شـ د. احتـ ا   ا   ز ر را حاسبـ کـ د.

الف : در   ر د تـ   رد نظر انتخاب شـ د.

ب : در   چکدام از تـ   ا انتخاب نشـ د.

پ : فقط در تـ   فـ تبال انتخاب شـ د.

ت : فقط در کی از تیم ها انتخاب شـ د.

ث : حداق   در کی از تـ   ا انتخاب شـ د.

۱۴ : احتـ ال ا کـ رؤ ا در درس ر اضـ قبـ   شـ د دو برابر احتـ ا قبـ شد د ستش در ا   درس مـی باشد. ا ر احتـ ال ا کـ حداق   کی از آنـ ا در درس ر اضـ قبـ   شوند برابر ۰/۶۲۵ باشد. حساب کـ د با چـه احتـ ال رؤ ا در ا   درس قبـ   خوا د شد.

۱۵ : ا ر B و A د پـ شا د ستقل باشـ د ثابت کـ د که : $P(A\cup B)=۱-P(A').P(B')$

درس دوّم : آمار توصیفی

آ ار ت صفی ب خ ص کرد داد ا در قالب ن دار جد ا با حاسب ع ار ا ختف را ش ب مرکز ا ع ار ا پراک د پردازد. ب عبارت د ر آ ار ب ک ک ع ار ا عدد دسی اط عاتی م اسب از داد ا ج ع آ ری شده از نمون ا جا عه برای نت ج ر د د.

قسمت اوّل : معیارهای گرایش به مرکز

هر عدد ک عرف رکز ج ع داد ا باشد را مع ار رکز ا شاخص رکزی (پارا تر رکزی) می نا د. ب ک ک مع ار ای رکز توا قع ت ک داد ا را تع کرد، لذا برا قا سه‌ی دو یا چ د جا عه یک ر ش اسب، محاسبه‌ی مع ار ای رکز آن ا است. ع ار ای رکز دارا سه ن ع ستد. در ای جا فقط ب دو ن ع از آن ا عنی ، انگین ($\overline{x}$ و م انه ($\tilde{x}$ می پردازیم. م ان ترین مع ار مرک زی محس ب شود.

میانگین

در ک ج عه‌ی داد ا آ اری، عدد مت ای ب سط آن ا را انگین (م ان حسابی) مـی نا د. م انگ ن ا ت سط داد ا، با خارج قس ت ج ع اندازه‌ی داد ا بر تعداد آن ا برابر است.

$$\overline{x} = \frac{x_۱ + x_۲ + x_۳ + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

مثال: م ان داد ا ز ر را بدست آ ر د.

x_i : ۵ و۸ و۱۰ و۱۲ و۱۴ و۱۷

حل:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۵+۸+۱۰+۱۲+۱۴+۱۷}{۶} = \frac{۶۶}{۶} = ۱۱$$

تمرین برای حل :

۱ : انگین ن رات ک ک س ۱۶ نفر در درس ر اضی برابر ۱۲/۵ است. ج ع ن رات دانش آ زان این ک س را بدست آ ر د.

۲ : ان داد ا ز ر برابر ۲۲ است. مقدار a را بدست آ ر د.

۲۰ و ۲۵ و۳۰ و ۲۲ و a و ۲۵ و ۲۴ و ۲۱ و ۲۰ و ۱۵

۳ : انگین ۵ داده‌ی آ اری ۱۷ است. ا ر د عدد ۱۷ و ۱۱ را ب داد ا قبل اضاف کنیم. م ان جد د چ عدد خوا د شد؟

۴ : ثابت ک د ک ج ع تفاض ر ک از داد ا ک مج ع آ اری از ان آن ا برابر صفر است.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

***

خواص میانگین

ا ر $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ و $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ د ج عه‌ی عددی و k یک عدد حق قی باشد. در ا ص رت خواص ز ر را توان برا انگین بررس کرد.

الف : م ان حاص ج ع داد ا ک ج عه‌ی آ اری با ک عدد ثابت با حاص ج ع آ عدد و م انگ آ داد ا برابر است.

$$z_i = x_i + k \rightarrow \bar{z} = \bar{x} + k$$

ب : م ان حاص ضرب داد ا ک ج عه‌ی آ ار در ک عدد ثابت با حاص ضرب آ عدد و م ان آ داد ا برابر است.

$$z_i = k.x_i \rightarrow \bar{z} = k.\bar{x}$$

ج : م ان حاص ج ع داد ا تناظر از د ج ع داد ا آ اری با حاص ج ع ان ا آن ا برابر است.

$$z_i = x_i + y_i \rightarrow \bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

مثال : داد ا ز ر ز پ ج نفر از د ستان ن فر برحسب ک رم می باشد.

۵۵ و ۶۱ و ۵۷ و ۵۵ و ۶۲

الف : م ان داد ا را ب دست آ ر د.

ب : ب ر کدام از ا داد ا ۳ واحد اضاف ک د سپس انگین داد ا جد د را ب دست آ رده با م ان داد ای اص قا س ک د.

ج : هر کدام از ا داد ا را در ۲ ضرب ک د سپس ان داد ا جد د را ب دست آ رده با انگین داد ای اص قا س ک د.

حل :

الف :

$$x_i : ۶۲ \text{ و } ۵۵ \text{ و } ۵۷ \text{ و } ۶۱ \text{ و } ۵۵$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۶۲+۵۵+۵۷+۶۱+۵۵}{۵} = \frac{۲۹۰}{۵} = ۵۸ \quad kg$$

ب:

$$y_i : ۶۵ \text{ و } ۵۸ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۶۴ \text{ و } ۵۸$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{۶۵+۵۸+۶۰+۶۴+۵۸}{۵} = \frac{۳۰۵}{۵} = ۶۱ \quad kg$$

نت جه : م انگ ن ز ۳ واحد افزا ش افت .

ج :

$$z_i : ۱۲۴ \text{ و } ۱۱۰ \text{ و } ۱۱۴ \text{ و } ۱۲۲ \text{ و } ۱۱۰$$

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} = \frac{۱۲۴+۱۱۰+۱۱۴+۱۲۲+۱۱۰}{۵} = \frac{۵۸۰}{۵} = ۱۱۶ \quad kg$$

نت جه : م انگ ن ز در۲ ضرب شده است.

تمرین برای حل :

۴ : ر ک از خواص فوق را اثبات ک د.

۵ : ثابت ک د ک انه داده ا ساوی، برابر ر یک از آن ا است.

۶ : ا ر انه وز د ستان محسن بر حسب ک لوگرم برابر۵۸ باشد. این م انگ بر حسب ر چقدر است؟

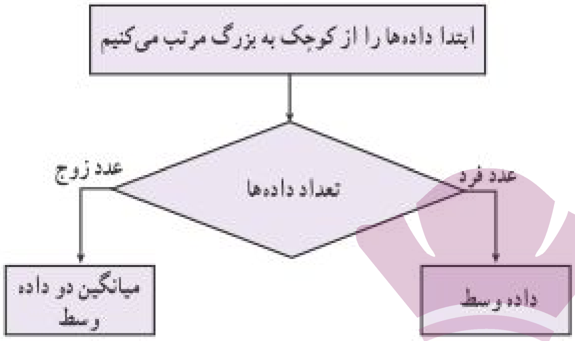
۷ : د ای ا ا واز در ک فته از ش ر ر سال۹۶ برابر ۴۵ سانت راد باشد. ا انه را برح سب فارن ا ت بدست آ ر د. ($F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$)

۸ : هر ا انه داده ا آ اری($x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ و... و x_n) برابر۱۷ باشد. م انگین داده ای ($۲x_۱+۱$ و $۲x_۲+۱$ و $۲x_۳+۱$ و... و $۲x_n+۱$) را بدست آ ر د.

***

میانه

در ک جـ عه از داد ا آ ار از داده ا است که ن صف داده از آن ب شتر ن صف داد ا از آن ک تر است. ب عبارت د ر در ک جـ عه‌ی داد ای آ اری که ب صـ رت غ ر نزولی (از ک چک به بزرگ) مرتب شده باش د، عدد سط ا داد ا را م انـه می نا د. برا حاسبه‌ی انه ابتدا داد ا را به صـ رت غ ر نزول رتب می‌کنیم، آن اه



الف) ا ر تعداد داد ا فـ رد باش د، داده‌ی سـ ط م انه است.

ب) ا ر تعداد داد ا ز ج باشد، م ان د داده‌ی سط انه است.

مثال: م انه‌ی هر ک از جـ عـ ا ز ر را ب اب د.

۵ و ۸ و ۵ و۱۰ و۹ و۸ و۷ و ۵ و۳ (الف

۶۰ و ۲۲ و ۲۱ و۲۰ و ۱۹ و ۱۷ و۱۷ و۱۶و ۱۵ و ۱۳ (ب

حل: ابتدا داد ا را از ک چک ب بزرگ رتب کنیم.

الف:

۱۰ و ۹ و ۸ و ۸ و ۷ و ۵ و ۵ و ۵ و۳

چ تعداد داد ا فرد است پس داده‌ی سط انه است. لذا انه برابر $\tilde{x} = ۷$ می باشد.

ب :

۶۰ و۲۲و ۲۱و۲۰ و ۱۹ و۱۷و۱۷و۱۶و۱۵و۱۳

چ تعداد داد ا ز ج است ان د داده‌ی سط انه است است. لذا انه براب ر $\tilde{x} = \frac{۱۷+۱۹}{۲} = ۱۸$ می باشد.

نتیجه: ا ر ت ا داد ک جـ عه‌ی داد ای آ اری برابر باش د، م انه ن ز برابر ر ک از آن ا است.

توجه: ا ر در ک جـ عه‌ی داد ا آ ار داده‌ی د ر افتادها جـ د داشته باشـد. چـ ان تحت تأثـ ر داد ا د ر افتاد قرار نـ رد، نسبت بـ ان عـ ار اسبتر حسـ ب شـ د. داده‌ی د ر افتـ اده، داده‌ای است که نسبت بـ سا ر داد ا تفا ت بسـ ار دارد.

تمرین برای حل :

۹ : تعداد حـ ا ک تـ فـ تبا در شش ا ذشته بـ صـ رت ۴۲ و ۴۴ و ۴۷ و ۱۰ و ۴۳ و ۴۸ اسـ ت. مـ انگـ ن انه‌ی تعداد حـ ت ا تیـ را در ا شش اه بـ دست آ ر د. به نظر شـ ا کدا عـ ار با عـ ا تـ ر است چرا؟

۱۰ : مـ ان انه‌ی داد ا ز ر را تعـ کـ د.

۱۵ و ۱۸ و ۲۲ و ۱۶ و ۹ و ۱۱ و ۵ و ۴

❋❋

قسمت دوّم : معیار های پراکندگی

در فعالـ ت آ ار ا ز شـ د کـ زا پراکـ دگی (د ری و نزد کی) داد را نسبت بـ د ر ا نسبت بـ ان حاسبـ شـ د. برای ا کار از عـ ار ا پراکـ دگی استفاد شـ د.

هر عدد که مـ زا پراکـ دگی داد ا نسبت بـ د ر ا نسبت بـ انگین را نشا د د را عـ ار پراکـ د ا شاخص پراکـ دگی (پارا تر پراکـ دگی) می نامند. ترین معـ ارها پراکـ د عبارتـ د از ، دامنه‌ی تغـ رات ، وار انس ، انحراف عـ ار ضر ب تغـ رات می باشـ د.

از بین ا عـ ارها، دامنه‌ی تغـ رات پراکـ دگی داد ا را نسبت بـ د ر و بقیه، پراکـ دگی را نسبت به مـ انگین نشا د د.

دامنه‌ی تغییرات

در یک جموعه‌ی داد ا آ ار تفاضـ کـ تر داده از بـ شتر آن ا را دامنه‌ی تغـ رات مـی نا د. بـه عبارتـ د ر دامنه‌ی تغـ رات، طو بازه ا اسـ ت کـه داد ا در آن قـ رار دارنـد. در ا صـ رت، ا ر a کـ چکتریـ و b بزر تر داد ک جموعه‌ی داد ای آ اری باشـ د. دامنه‌ی تغـ رات بـ شکـ ز ر است.

$$R = b - a$$

دامنه‌ی تغ رات را توا ب بشترین اخت ف ب داد ا ک ج عه‌ی داد ای آ ار تعب ر کرد.

مثال: دامنه‌ی تغ رات داد ا ز ر را حساب ک د و تعب ر آ را ب سد.

۱۳ و ۸ و ۱۴ و ۱۵ و۱۰

حل:

$$R = b - a = ۱۵ - ۸ = ۷$$

تعب ر: ب شترین اخت ف ب داد ای ا ج عه برابر ۷ است.

نتیجه:

۱ : بزر دامنه‌ی تغ رات نشا د دهی تفا ت ز اد در جا عه است، هر چ قدر ا دام ب شتر باشد، تفا ت ب داد ا ز اد است هر چه قدر ا دامنه ک تر باشد، داد ا ب م نرد کترند. ا ر دامنه‌ی تغ رات صفر باشد، ت ام داد ای برابر ست د جا عه همگون است.

۲ : دامنه‌ی تغ رات ضع ف تر شاخص پراک دگو است و معرف خ ب برا پراک د داد ا ن باشد، ز را برا حاسبه‌ی آ فقط از بزر ترین و ک چکتر داده استفاد ش د و تعداد یا مقاد ر بقیه‌ی داده‌ها تأث ری بر قدار آن ندارند.

**

واریانس و انحراف معیار

م اذ توا دوّم تفاض داد ا از ان آن ا را وار انس (پراش) می نا د. در ا ص رت

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n}$$

ت ج داشته باش د که وار انس در ض داشتن ا ت ز اد دارا دو اشکا ع ده است.

الف : تحت تأث ر داد ای بزرگ قرار رد.

ب : واحد انداز ری وار انس جذ ر واحد اص تغ ر داد ا است. مثلاً ا ر واحد انداز ر داد ا سانت تر باشد، واحد انداز ری وار انس سانت تر ربع خوا د ب د.

برا رفع ا دو اشکال از انحراف معیار استفاد   شد. ر شه‌ی دوّ وار انس را انحراف معیار (انحراف استاندارد) می نا د.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{۲}}$$

بنابراین طبق این تعر ف بد   است که انحراف معیار دارا   ان واحد   خوا د بود که داد ا بر حسب آ حاسب شده اند.

مثال : وار انس و انحراف معیار داد ا ز ر را بدست آ ر د.

۹ و۴ و۷ و ۳ و ۲

حل:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^{۲}$
۲	۳ −	۹
۳	۲ −	۴
۷	۲	۴
۴	۱ −	۱
۹	۴	۱۶
ج ع = ۲۵	−	۳۴

انگ ن $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۲۵}{۵} = ۵$

وار انس $\sigma^{۲} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^{۲}}{n} = \frac{۳۴}{۵} = ۶/۸$

انحراف معیار $\sigma = \sqrt{\sigma^{۲}} = \sqrt{۶/۸} = ۲/۶$

**

تمرین برای حل :

۱۱ : وار انس و انحراف معیار داد ای ز ر را حاسب ک د.

۷ و ۹ و۶ و ۵ و۳

۱۲ : ثابت ک د که وار انس داد ای ساو برابر صفر است.

خواص واریانس

ا ر $(x_1 و x_2 و x_3 و ... و x_n)$ یک مج عه‌ی عددی و k یک عدد حق قی باشد. در ا ص رت خواص ز ر را توا برای وار انس آن ا بررس کرد.

۱ : وار انس حاص ج ع داد ا با ک عدد ثابت ، با وار انس آ داد ا برابراست.

$$y_i = x_i + k \rightarrow \sigma_y^2 = \sigma_x^2$$

۲ : وار انس حاص ضرب داد ا در ک عدد ثابت ، با حاص ضرب ربع آ عدد در وار انس آ داد ا برابر است.

$$y_i = k.x_i \rightarrow \sigma_y^2 = k^2.\sigma_x^2$$

***

خواص انحراف معیار

مشابه آنچه که برای وار انس داشتیم. می توا ن شت خواص ز ر را برای انحراف ع ار ن ز ب ا کرد.

۱ : انحراف ع ارحاص ج ع داد ا با ک عدد ثابت با انحراف ع ارآ داد ا برابراست.

$$y_i = x_i + k \rightarrow \sigma_y = \sigma_x$$

۲ : انحراف ع ار حاص ضرب داد ا در ک عدد ثابت، با حاص ضرب قدر طق آ عدد در انحراف مع ارآ داد ا برابر است.

$$y_i = k.x_i \rightarrow \sigma_y = |k|.\sigma_x$$

تمرین برای حل :

۱۳ : ا ر وار انس داد ا ک ج عه‌ی داد ا آ اری برابر ۱۸ اذ آن ا ۸ باشد ت ا داد ا را دو برابر کن م. م انگ ن و وار انس داد ا جد د را تع ک د.

۱۴ : هر اه وار انس داد ا آ اری$(x_1 و x_2 و x_3 و ... و x_n)$ برابر۱۶ باشد. انحراف ع ار داد ای $(2x_1+1 و 2x_2+1 و 2x_3+1 و ... و 2x_n+1)$ را محاسب ک د.

**

ضریب پراکندگی

خارج قسـ ت انحراف ـعـ ار داد ا ک جـ عه‌ی داد ای آ اری بر اذ آن ا را ضـ رـ ب پراک دگی (ضر ب تغ رات) گ د.

$$CV_x = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

ت جـ ک د ک طبق تعر ف ، ضریب پراک د داد ا فاقد واحد انداز ری می‌باشد، لذا اغ ب در وارد ز ر استفاد شـ د.

الف : برا قا سه‌ی د ا چـ د جا عه‌ی آ ار که واحد انداز ر داده‌ها آن ا تفا ت باشد.

مثلاً: مقا سه‌ی سـ د د شرکت ک سـ د کی برحسب ر ال و سـ د د ری بر حسب د ر باشد.

ب : برا قا سه‌ی د ا چـ د جا عه‌ی که وار انس ا آن ا برابر باشـ د ول انگین‌ها ا تفا ت دارنـ د.

مثلاً: باتـ جه به اطـ عات ز ر د شرکت x و y دارای انحراف ـعـ ار برابر ستـ د ول از سا دارنـ د، لذا شرکت y از پراک د شرکت بـ تر در قا سه با شرکت x حسـ ب شـ د.

–	م انگین	انحراف ـعـ ار	ضر ب پراک دگ
شرکت x	۱۰	۲	۰/۲
شرکت y	۲۰	۲	۰/۱

مثال : ضر ب پراک د داد ا ز ر را محاسبـ ک د.

۶و۸و۳و۹و۴

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^۲$
۴	−۲	۴
۹	۳	۹
۳	−۳	۹
۸	۲	۴
۶	۰	۰
۳۰ = جـ ع	---	۲۶

انگ ن $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$

$$\sigma^{۲} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^{۲}}{n} = \frac{۲۶}{۵} = ۵/۲$$ وار انس

$$\sigma = \sqrt{۵/۲} = ۲/۲۸$$ انحراف عیار

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲/۲۸}{۶} = ۰/۳۸$$ ضر ب تغ رات

نتیجه: ا ر ت ا داد ا آ اری برابر باشد، ضر ب تغ رات آن ا صفر است.

**

تمرین برای حل :

۱۵ : برا داد ا ز ر ضر ب تغ رات را حاسبه ک د.

۱۲ و ۱۵ و ۳ و ۶ و ۹

۱۶ : ا ر ضر ب تغ رات ۱۰ داده برابر ۲ ان آن ا برابر ۴ باشد، وار انس داد ا را ب دست آ ر د.

۱۷ : نشا د د که ا ر ت ا داد ا ک ج عه‌ی داد ای آ ار را در عدد ثب ت k ضرب کنیم، ضر ب تغ رات آن ا تغ ری ن ک د.

۱۸ : ت ضح د د که ا ر ت ا داد ا ک ج عه‌ی داد ای آ ار را با عدد ثب ت k ج ع کنیم، ضر ب تغییرات آن ا چ تغ ر ک د؟

۱۹ : داد ا ک ج عه داد ا آ اری بر حسب تر انداز ر شده اند. واحد اندازه ری عیار ا انگ وار انس ، انحراف عیار ضر ب تغ رات را شخص ک د.

۲۰ : اگر همه‌ی داده ه ی یک مجموعه‌ی داده ه ی مری مسوی بشند. دربره‌ی میانگین و واریانس ن مجموعه چه می‌توان گفت؟

۲۱ : ا ر ت ا داد ا ک ج عه‌ی آ ار سا ان آن ا ۵ باشد. مقدار ر ک از شاخص ای ز ر را ب سد.   الف : م انه   ب: انحراف عیار

۲۲ : ان ک ج عه‌ی داد ا آ اری ۵ و وار انس آن ا ۱۲ است. در ص رت ک ت ا داد ا را سه برابر ک انگین و وار انس داد ا جد د را ب سد.

۲۳ : ا تیازات ارت کار دو نفر از پرس ک آز ا شا ا در ۵ ر ز کاری ب صر رت ز ر است. تع ک د ک دقت ع کدام بک ب شتر است.

A : ۲۰ و ۲۳ و ۲۴ و ۲۶ و ۲۷ و B : ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ و ۲۶ و ۲۸

۲۴ : ن رات ر اض دس ک ت پ چ نفره از دانش آ زان برا شرکت در ک آز عل ب ش رح جدول ز ر است. خان ا جد را کا ک د ک د سپس تع ک د که ا ت در ک دا آز ر اض ا ه دسه ب تر است شرکت ن ا د. چرا؟

ردف	نا دانش آ ز	ر اضی	ه دسه
۱	محسن اح دی	۱۵	۱۲
۲	ع رضایی	۱۱	۱۶
۳	رضا اکبری	۱۲	۱۰
۴	اح د علوی	۱۸	۱۷
۵	حس صادقی	۱۹	۲۰
میانگین			
واریانس			
انحراف معیار			
ضریب تغییرات			

***

چارک ها

در ک جـ عه‌ی داد ا آ اری ک داد ا آن بـ صـ رت غـ ر نزولـ رتب شده باش د، عدد سط ایـن داد ا را مـ انه ا چارک دوّم می نا د آنرا با $Q_۲$ نـ ا ش د . از طرف د انه‌ی نیمه‌ی اوّل داد ا را چارک اوّل ($Q_۱$) و مـ انه‌ی نیمه‌ی دوّم آن ا را چارک سوّم ($Q_۳$) می نا د.

مثال: چارک ای اوّل تا سوّم داد ا ز ر را تع کـ د.

۱۹ و ۳۱ و ۲۵ و ۱۸ و ۳۲ و ۴۳ و ۴۱ و ۳۴ و ۱۸ و ۲۷ و ۱۴ و ۲۳ و ۱۵ و۱۰ و۱۲

حل:

۴۳ و۴۱ و ۳۴ و۳۲ و۳۱ و۲۷و ۲۵ و ۲۳ و ۱۹و ۱۸و ۱۸و ۱۵و۱۴ و ۱۲ و۱۰

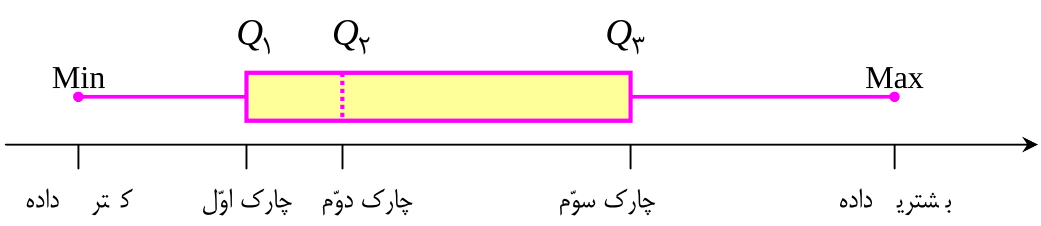
$Q_۱$ $Q_۲$ $Q_۳$

لذا چارک اوّل $Q_۱ = ۱۵$ و چارک دوّم (مـ انه) $Q_۲ = ۲۳$ و چارک سوّم $Q_۳ = ۳۲$

توجه : برا تع چارک ا، ابتدا انـ ا را حاسب کنـ ل برا تع چارک ای اوّ سوّ انـه شرکت داده نـ شـ د.

نمودار جعبه ای و دامنه‌ی میان چارکی

نـ دار کـ عـ ار ا پراک د داد را توان بـ کـ ک آ تع کرد. نـ دار سو بـ نـ دار جعبه ای است. این نـ دار پراک د داد را در اطراف انه و قبل بعد از چارک اوّ سوّ را بـ تصـ ر کشد. این نـ دار بـ کـ ک کـ ترین و بـ شتر داد چارک ای اوّ تا سوّ داد ا کـ جـ عه‌ی آ اری ترسـیم مـ شـ د.



در نـ دار جعبه ا کن است انـ سط جعبه نباشد. مـ انه بـ ر ست تـ ا شـ د در آ ست داد ا به هم نزد کترند در ست د ر داد ا پراک د تر ستـ د.

یک معار د ر ک در ص رت ج د داد ا د ر افتاده (پِرت) م رد استفاد قرار رد. دامنـه‌ی ان چارکی است. تفاضـ چارک ا ّ از چارک سوّ را دامنه‌ی ا چارکی نا د آ را با IQR ن ا ش می د د.

$$IQR = Q_۳ - Q_۱$$

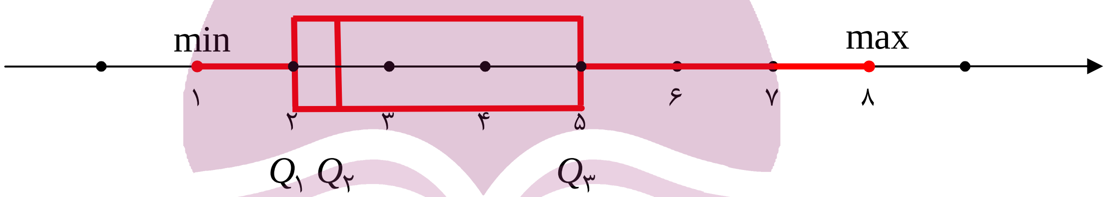
مثال: حس تعداد گ ای ۲۲ ب ته‌ی قر ز یک باغ را ش رده است. ن دار جعبه ا ا داد ا را ترسیم ن د دامنه‌ی ا چارکی را محاسب ک د.

۸ و ۷ و ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۴ و ۴ و ۴ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱

حل :

$\boxed{۸ و ۷ و ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۴ و ۴ و ۴ و ۳ و ۳}$ و $\boxed{۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱}$

$$\min = ۱ \text{ و } Q_۱ = ۲ \text{ و } Q_۲ = \frac{۲+۳}{۲} = ۲/۵ \text{ و } Q_۳ = ۵ \text{ و } \max = ۸$$



دامنه‌ی ا چارکی $IQR = Q_۳ - Q_۱ = ۵ - ۲ = ۳$

تمرین برای حل :

۲۴ : داد ای ز ر را در نظر ب ر د.

۱۹و ۳۱ و ۲۵ و ۱۸ و ۳۲ و ۴۳ و ۴۱ و ۳۴ و ۱۶ و ۲۷ و ۱۴ و ۲۳ و ۱۵ و ۱۰ و ۱۲

الف : چارک ای اوّل تا سوّم داد ا ز ر را تع ک د.

ب : دامنه‌ی ا چارک را حاسب ک د.

ج : ن دار جعبه ا ترس ک د.

۲۵ : چارک ای اوّل تا سوّم دامنه‌ی ا چارکی داد ا ز ر را حاسب ک د.

۴۱ و ۱۷ و ۱۶ و ۱۹ و ۱۳ و ۱۴و ۱۸ و ۱۶ و ۱۵ و ۱۷

۲۶: داد ای ز ر را در نظر ب ر د.

۲۶ و ۲۲ و ۴۱ و ۳۱ و ۲۵ و۲۲ و ۲۸ و۳۰ و ۲۴ و ۲۰

الف: م انگین، م ان را حاسبه ک د.

ب: دامنه‌ی ا چارکی را تع ک د.

ج: ن دار جعبه ا رب ط به ا داد ا را رس ک د.

۲۷ : در ر رد جا خال را کا ک د.

الف : تفاضل ب شتر ک تر داد را .... گ د.

ب : در ن دار جعبه ای ۵۰ درصد داد ا قبل از و ۵۰ درصد داد ا بعد از .... قرار دارند.

پ : در ن دار ک ج عه‌ی داد ا آ اری ... درصد داد ا قبل از چارک اوّل و ..... درصد داد ا قبل از چارک دوّم و ... درصد داد ا قبل از چارک سوّ قرار رند.

ت : مع ار ا پراک د ک ان در آن ا نقش دارد ..... و.... هست د.

ث : ا ر داد ا آ اری k برابر شوند ضر ب تغ رات .... (عدد k ثبت است.)

ج : واحد انداز ری وار انس ، .... واحد انداز ر داد ا است.

ح : هر قدر انحراف ع ار ک تر باشد زان ...... داد ا ک تر است.