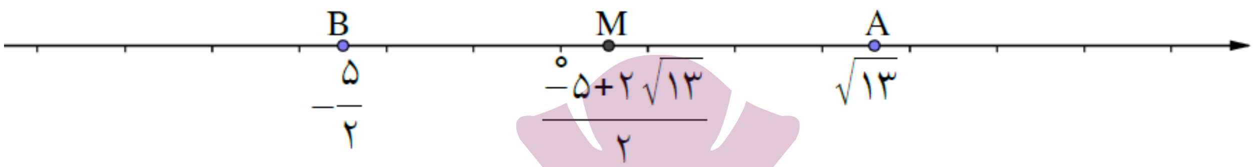
دستگاه محورهای مختصات و خط

۱. محور اعداد حقیقی

۱- نمایش اعداد حقیقی روی محور



- هر محور دارای نقطه ی شروع، واحد اندازه‌گیری و جهت است.
- بین مجموعه ی نقاط محور اعداد حقیقی و مجموعه ی اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک وجود دارد، به عبارت دیگر هر نقطه روی محور اعداد حقیقی نشان دهنده ی یک و فقط یک عدد حقیقی است و هر عدد حقیقی را نیز می‌توان با یک و فقط یک نقطه روی محور اعداد حقیقی نشان داد.

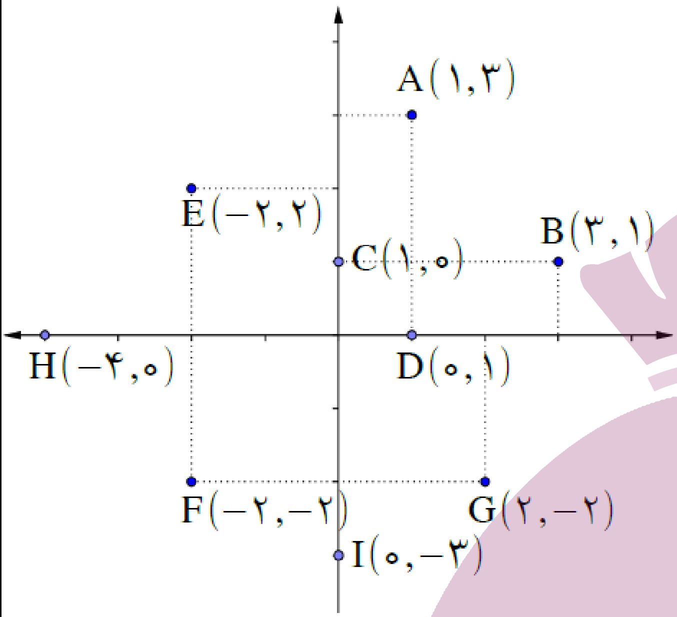
۲- دو نقطه ی A و B را روی محور اعداد حقیقی در نظر بگیرید.

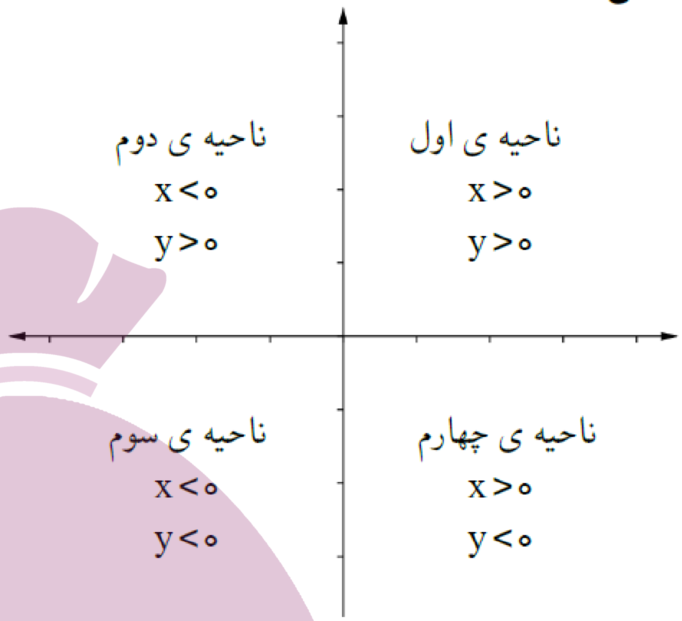
- اندازه ی جبری AB که با نماد $\overline{AB}$ نمایش داده می شود، برابر است با : $\overline{AB}=x_B-x_A$
- طول پاره خط AB که با نماد $|AB|$ نمایش داده می شود، برابر است با : $|AB|=|x_B-x_A|$
- طول نقطه ی M وسط پاره خط AB برابر است با : $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲}$

۳- تمرین. اگر $x_A=۱$ و $x_B=-۴$ ، طول نقطه ی C را طوری بیابید که $\overline{AB}-۲\overline{BC}=۳\overline{AC}$.

۲. دستگاه مختصات قائم دکارتی

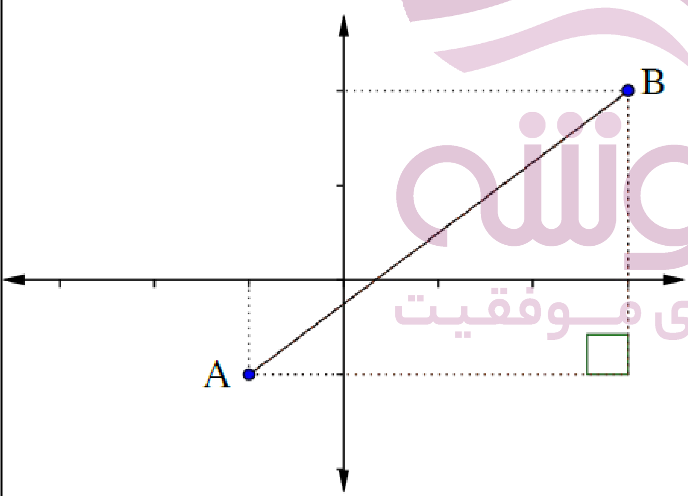
۱- مدرج کردن صفحه

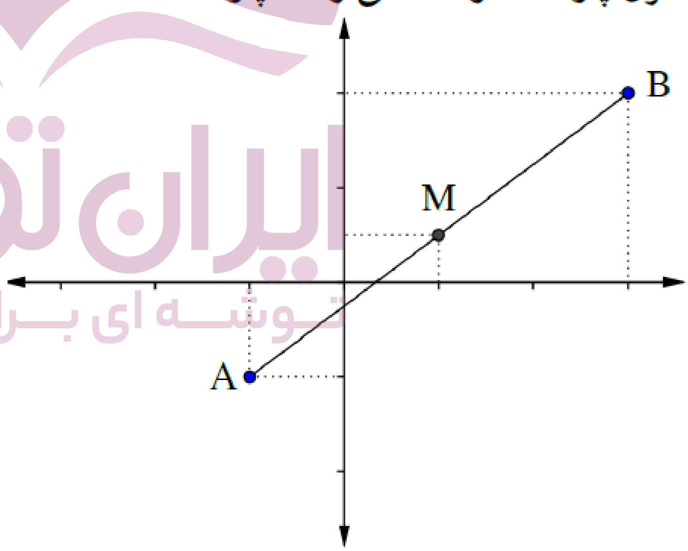




- دستگاه مختصات قائم دکارتی، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می کند.

۲ـ طول پاره خط و نقطه ی وسط پاره خط





• **نتیجه.** فاصله ی نقطه ی A از مبدأ مختصات برابر است با : $|OA|=\sqrt{x_A{}^{۲}+y_A{}^{۲}}$

• مختصات نقطه ی M وسط پاره خط AB برابر است با :

$$M\left|\begin{array}{l} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲} \end{array}\right.$$

۳ـ مثال. مثلث ABC با سه راس $A(۲,-۱)$ ، $B(-۱,۳)$ و $(-۲,۲)$ را در نظر بگیرید.

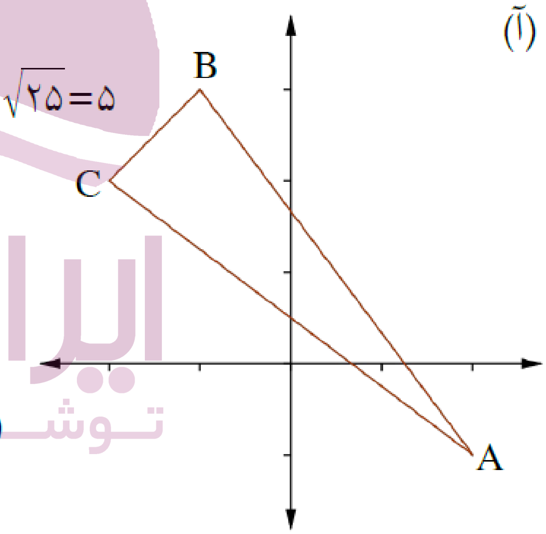
(آ) مثلث را رسم کنید.

(ب) محیط مثلث را به دست آورید.

(پ) نوع مثلث را مشخص کنید.

حل.

(آ)



(ب)

$$|AB|=\sqrt{(-۱-۲)^{۲}+(۳-(-۱))^{۲}}=\sqrt{(-۳)^{۲}+(۴)^{۲}}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$|AC|\overset{?}{=}۵$$

$$|BC|\overset{?}{=}\sqrt{۲}$$

محیط مثلث $=۵+۵+\sqrt{۲}=۱۰+\sqrt{۲}$

(پ) مثلث متساوی الساقین است.

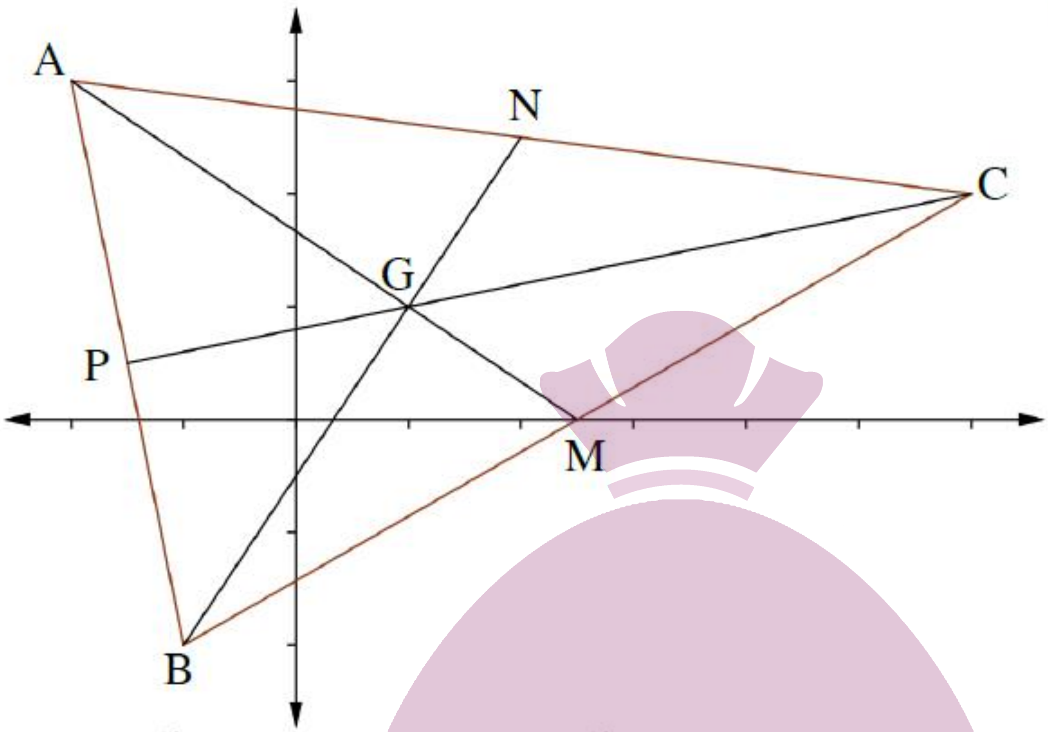
۴ـ تمرین. مربع ABCD با دو راس مقابل $A(۸,۶)$ و $B(۲,-۲)$ را در نظر بگیرید.

(آ) مختصات مرکز مربع را به دست آورید.

(ب) مساحت مربع را به دست آورید.

(پ) محیط مربع را به دست آورید.

۵- مرکز ثقل مثلث

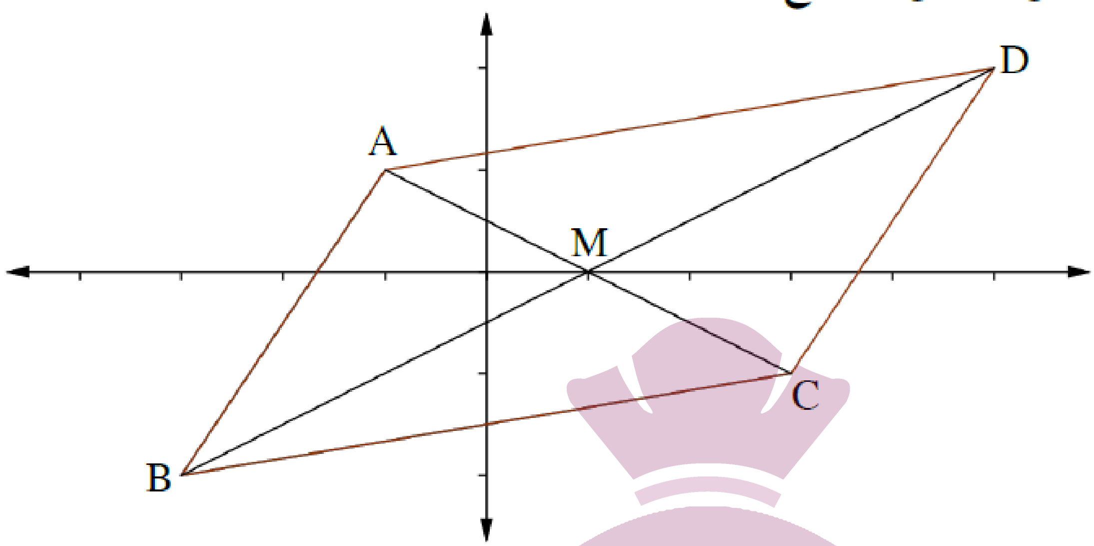


• به نقطه ی همرسی میانه های مثلث ABC، مرکز ثقل آن گفته می‌شود و مختصات آن برابر است با :

$$G\left|\begin{array}{l} x_M=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{۳} \\[2mm] y_M=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{۳} \end{array}\right.$$

۶-تمرین. مختصات مرکز ثقل مثلث ABC با سه راس $A(۲,-۱)$ ، $B(-۱,۳)$ و $(-۲,۲)$ را به دست آورید.

۷- رابطه ی بین راس های متوازی الاضلاع



- بین راس های متوازی الاضلاع ABCD، رابطه ی زیر برقرار است :

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

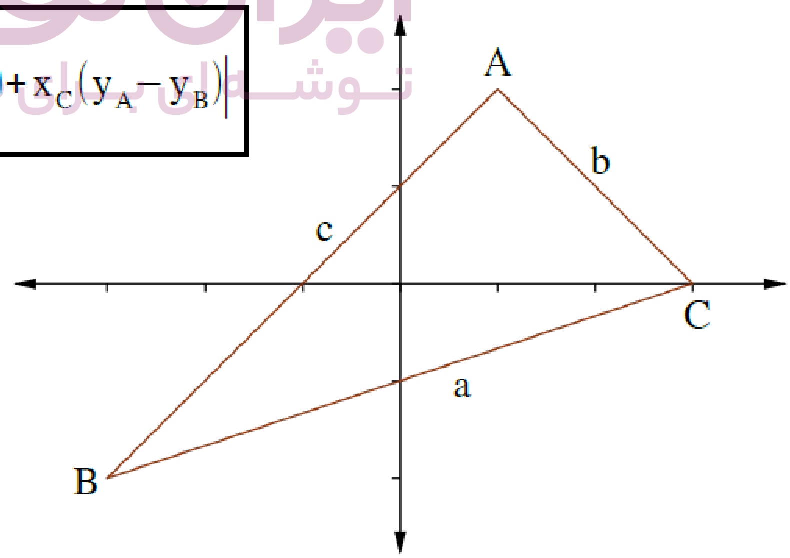
۸- تمرین. نقاط $(۱,-۱)$ ، $(۳,۲)$ و $(۲,۴)$ سه راس یک متوازی الاضلاع هستند.
مختصات راس چهارم آن را به دست آورید. چند حالت وجود دارد؟ چرا؟

۹- دو فرمول جالب برای مساحت مثلث

- $S = \frac{۱}{۲}\left| x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B) \right|$

- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

- که در آن $p = \frac{a+b+c}{۲}$



۱۰- تمرین. مساحت مثلث ABC با سه راس $A(۲,-۱)$ ، $B(-۱,۳)$ و $(-۲,۲)$ را به دست آورید.

۱۱- تمرین. مساحت مثلث ABC با سه ضلع به اندازه های ۳، ۵ و ۶ چقدر است؟

---

۳. آشنایی با خط

۱- معادله ی خط

- معادله ی خط به یکی از فرم‌های زیر نوشته می شود.

(۱) فرم استاندارد

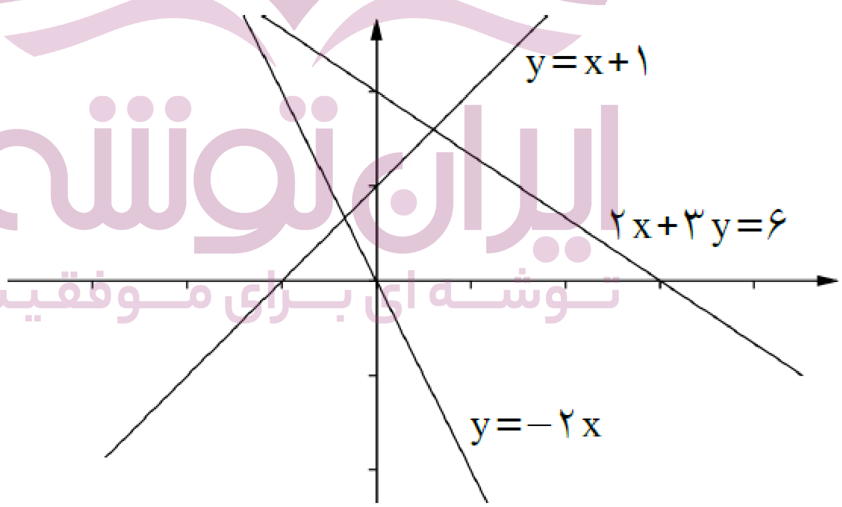
$$\boxed{y=ax+b}$$

(۲) فرم کلی

$$\boxed{ax+by+c=۰} \quad \text{یا} \quad \boxed{ax+by=c}$$

۲- تمرین. معادله ی خط $۶x+۱۵y=۲۱$ را به فرم استاندارد بنویسید.

۳- نمودار خط



- برای رسم نمودار خط کافی است دو نقطه ی آن را به دست آورده، به هم وصل کرده و از دو طرف امتداد دهیم.
- به طول نقطه ی تلاقی خط با محور x ها، طول از مبدأ گفته می شود.
- به عرض نقطه ی تلاقی خط با محور y ها، عرض از مبدأ گفته می شود.

۴- تمرین. نمودار خط‌های زیر را رسم کنید.

(آ) $y=-2x+3$

(ب) $y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$

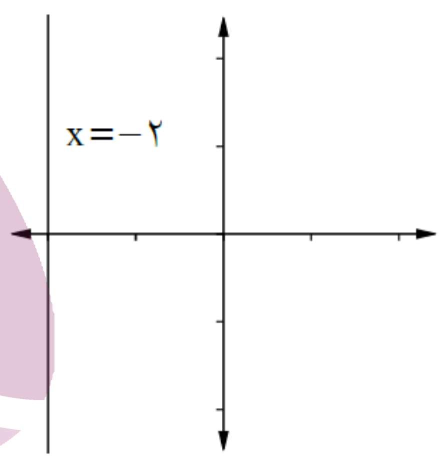
(پ) $2x-3y=6$

(ت) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

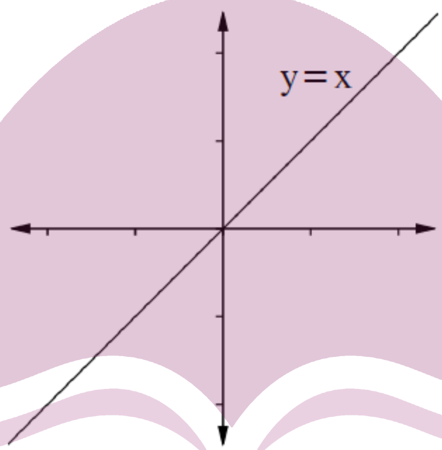
(ث) $3x-4=8$

(ج) $11=2y+3$

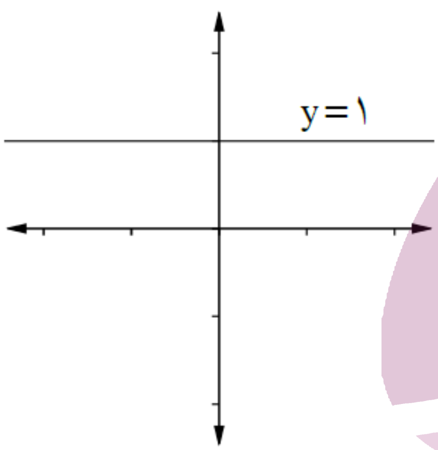
۵- حالت‌های خاص خط



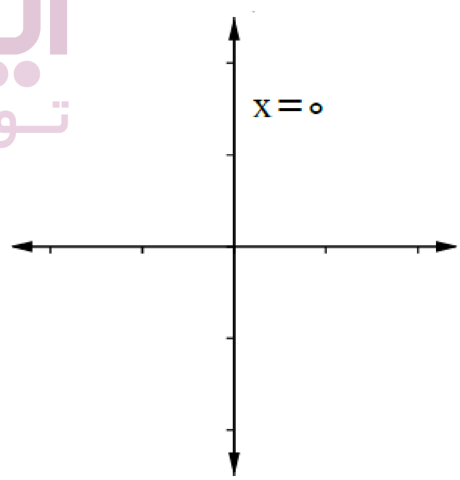
خطوط عمودی



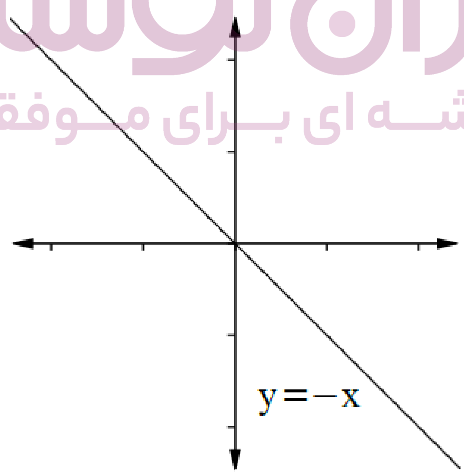
نیمساز ناحیه ی اول و سوم



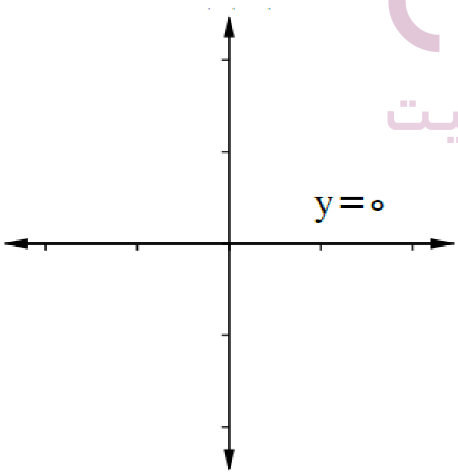
خطوط افقی



محور عرض ها



نیمساز ناحیه ی سوم و چهارم



محور طول ها

۶- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که نقطه ی $A(۳k-۶,k+۲)$ ،

(آ) روی محور طول ها باشد.

(ب) روی محور عرض ها باشد.

(پ) روی نیمساز ناحیه ی اول و سوم باشد.

(ت) روی نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم باشد.

(ث) روی خط به معادله ی $۷x-۵y=۱۲$ باشد.

۷- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که خط به معادله ی $kx+(۱-k)y=۲$ از نقطه ی $(-۲,۱)$ بگذرد.

۸- تمرین. نمودار معادله های زیر را رسم کنید.

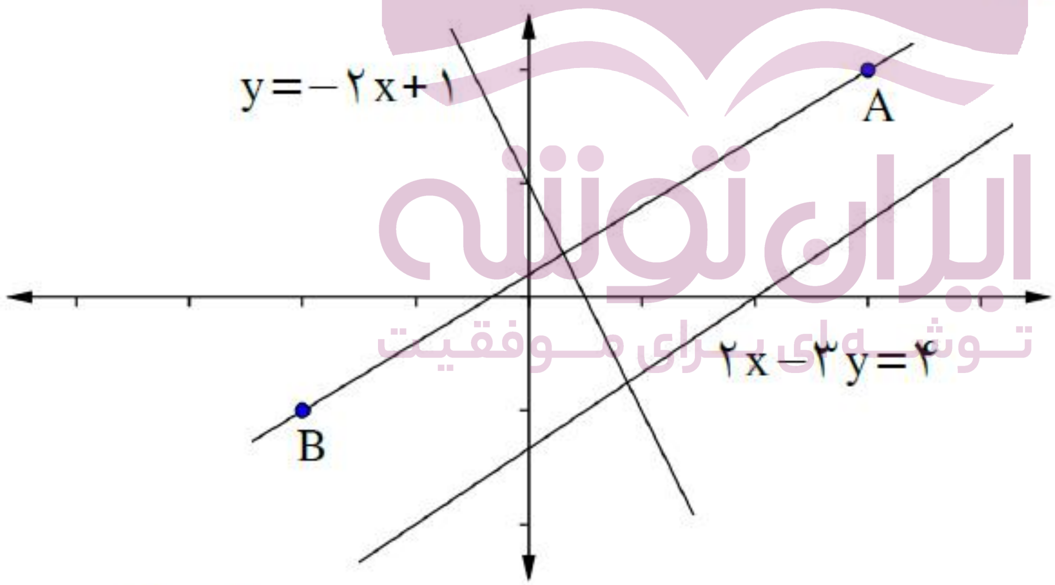
(آ) $۳xy-y^۲=۲y$ (ب) $۲xy+x^۲=x$

(پ) $(x-۲y)^۲=۹$ (ت) $|x+y|=۲$

---

۴. شیب خط

۱- آشنایی با شیب خط



• شیب خط گذرنده از دو نقطه ی A و B برابر است با :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

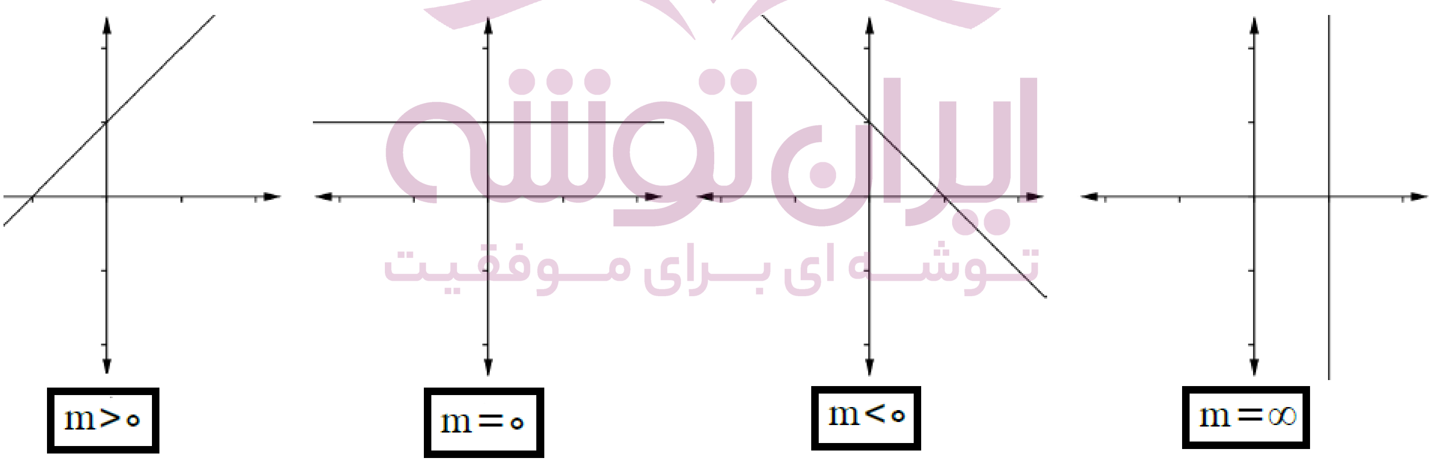
- اگر معادله ی خط به فرم استاندارد $y=ax+b$ باشد، آن گاه شیب آن برابر است با : $\boxed{m=a}$

- اگر معادله ی خط به فرم کلی $ax+by=c$ باشد، آن گاه شیب آن برابر است با : $\boxed{m=-\frac{a}{b}}$

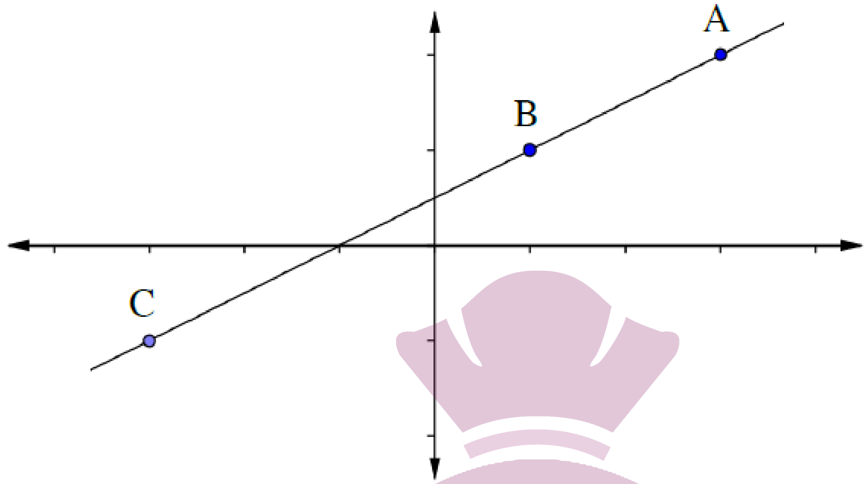
۲- تمرین. مقدار k را طوری بیابید که شیب خط گذرنده از دو نقطه ی $A(۲,۱-k)$ و $B(k+۱,۳)$ برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد.

۳- تمرین. مقادیر k را طوری بیابید که شیب خط به معادله ی $(k^{۲}-۳)x+(۱-k)x=۵$ برابر ۱ باشد.

۴- حالت‌های مختلف شیب خط

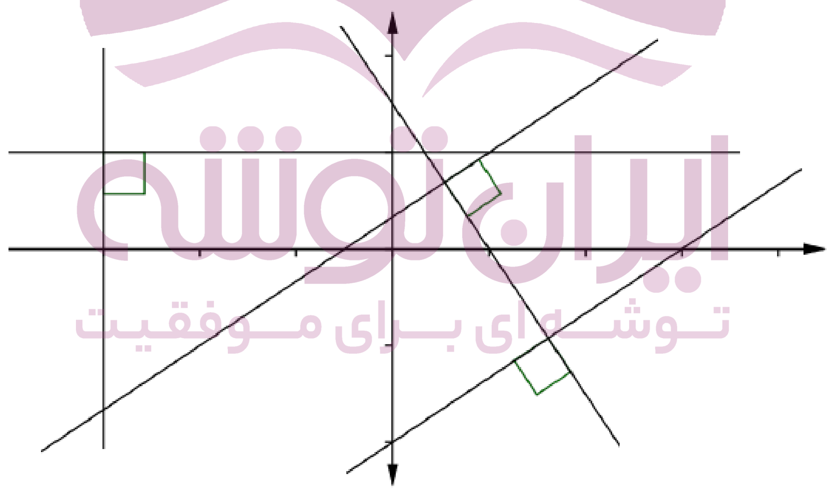


۵ـ سه نقطه ی A ، B و C بر روی یک خط راست قرار دارند هرگاه $m_{AB}=m_{BC}$.



۶ـ تمرین. نشان دهید سه نقطه ی $A(۱,-۱)$ ، $B(۲,۲)$ و $C(۴,۸)$ بر روی یک خط راست قرار دارند.

۷ـ خط‌های موازی و خط‌های عمود بر هم



- دو خط L و 'L با هم موازی هستند هرگاه شیب آنها با هم برابر باشد، یعنی $\boxed{m=m'}$.
- دو خط L و 'L عمود بر هم هستند هرگاه شیب آنها برعکس و قرینه ی هم باشد، یعنی $\boxed{m'=-\frac{۱}{m}}$

۸- **تمرین**. مقدار k را طوری بیابید که دو خط $y=-\frac{۲}{۳}x+۴$ و $(k-۱)x+(k+۱)y=۲$ موازی هم باشند.

۹- **تمرین**. مقدار k را طوری بیابید که خط $-kx+(۳k-۲)y=۸$ بر نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم عمود باشد.

۱۰- **تمرین**. نشان دهید سه نقطه ی $A(۳,۱)$ ، $B(-۳,-۳)$ و $C(-۵,۰)$ راس های یک مثلث قائم الزاویه هستند.

۱۱- وضعیت دو خط نسبت به هم

- دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ ،

(۱) با هم موازی هستند هرگاه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$

(۲) منطبق بر هم هستند هرگاه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

(۳) با هم متقاطع هستند هرگاه $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

(۴) عمود بر هم هستند هرگاه $\frac{a}{a'}=-\frac{b'}{b}$

۱۲- **تمرین**. در هر یک از قسمت‌های زیر، دو خط داده شده نسبت به هم چه وضعیتی را دارند؟

(آ) $\begin{cases} ۴x+۶y=۳ \\ ۶x+۹y=۵ \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} ۶x+۹y=۱۱ \\ ۳x-۲y=۷ \end{cases}$

۱۳- **تمرین.** مقادیر a و b را طوری بیابید که دو خط $۲x+۳y=۵$ و $(a+b)x+۲by=۱۰$ منطبق بر هم شوند.

۱۴- **تمرین.** به ازای کدام مقدار k، سه خط $y=۲x-۳$ ، $۳x+۲y=۱$ و $(۳k-۲)x+(۲k+۳)y=۵$ از یک نقطه می گذرند؟

۱۵- **تمرین.** به ازای همه ی مقادیر حقیقی k، خطهای $(۱۱k-۶)x+(۵-۹k)y+۵k-۳=۰$ از یک نقطه ی ثابت می گذرند. مختصات آن نقطه را بیابید.

---

۵. روش محاسبه ی معادله ی خط

۱- معادله ی خط با شیب m و گذرنده از نقطه ی A برابر است با :

$$\boxed{y-y_A=m(x-x_A)}$$

۲- چند مثال

مثال اول

معادله ی خط با شیب ۲ و گذرنده از نقطه ی $A(۳,۱)$ را بیابید.

حل.

$$y-۱=۲(x-۳)\Rightarrow y-۱=۲x-۶\Rightarrow y=۲x-۶+۱\Rightarrow y=۲x-۵$$

مثال دوم

معادله ی خط گذرنده از دو نقطه ی $A(۵,۱)$ و $B(۲,-۱)$ را بیابید.

حل.

$$m\overset{?}{=}\frac{۱-(-۱)}{۵-۲}=\frac{۲}{۳}$$

$$y-۱=\frac{۲}{۳}(x-۵)\Rightarrow ۳(y-۱)=۲(x-۵)\Rightarrow ۳y-۳=۲x-۱۰\Rightarrow ۲x-۳y=۷$$

مثال سوم

معادله ی خطی را بیابید که از نقطه ی $A(۳,-۲)$ گذشته و با خط $۲x+y=۳$ موازی باشد.

حل.

$$m \overset{?}{=} -\frac{۲}{۱} = -۲$$

$$y-(-۲)=-۲(x-۳) \Rightarrow y+۲=-۲x+۶ \Rightarrow y=-۲x+۴$$

این مثال را به روش زیر نیز می‌توان حل کرد.

$$۲x+y \overset{?}{=} ۲(۳)+(-۲)=۴ \Rightarrow ۲x+y=۴ \Rightarrow y=-۲x+۴$$

مثال چهارم

معادله ی خطی را بیابید که محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع کرده و بر خط $y=-\frac{۳}{۴}x+۱۷$ عمود باشد.

حل.

$$A(۰,۵) \qquad m \overset{?}{=} \frac{۴}{۳}$$

$$y-۵=\frac{۴}{۳}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x+۵$$

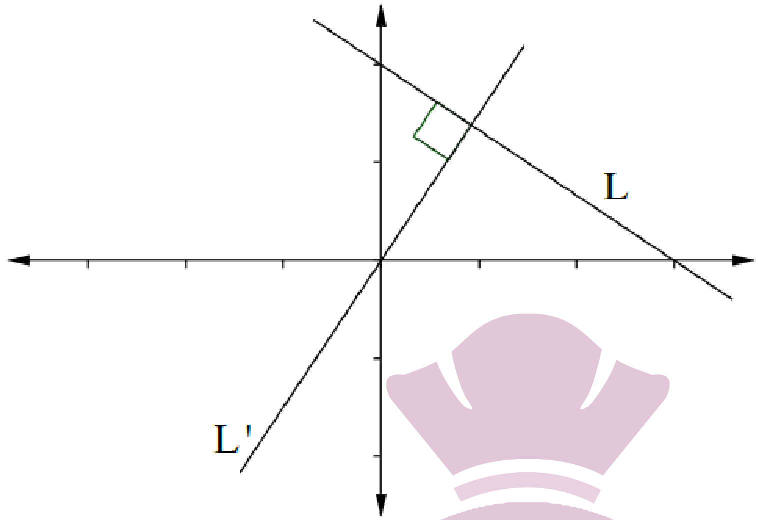
۳- تمرین. معادله ی خطی را بیابید که از نقطه ی $A(۵,۸)$ گذشته و با نیمساز ناحیه ی اول و سوم موازی باشد.

۴- تمرین. معادله ی خطی را بیابید که بر خط $۲x-۳y=۵$ عمود باشد و خط $y=x+۴$ را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع کند.

۵- تمرین. معادله ی خطی را بیابید که از نقطه ی $A(۱۰,۲۰)$ گذشته و بر خط $y=۵$ عمود باشد.

۶- تمرین. مقادیر a و b را طوری بیابید که خط $(۲a-b)x+(a+۲b-۴)y-a-۳b-۱=۰$ موازی محور y ها باشد و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.

۷- تمرین. با توجه به شکل زیر، معادله ی دو خط L و L' را بیابید.



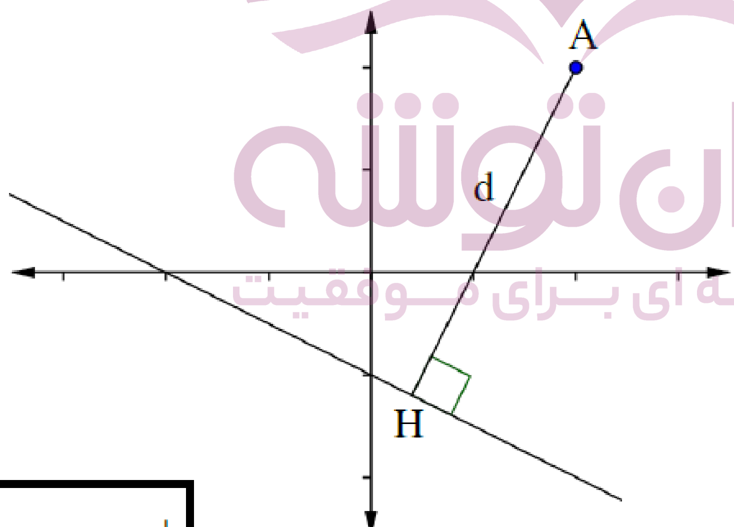
۸- تمرین. نشان دهید معادله ی خط با طول از مبدأ a و عرض از مبدأ b برابر است با :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

---

۶. فاصله ی نقطه از خط

۱- آشنایی با فاصله ی نقطه از خط



- فاصله ی نقطه ی A از خط $ax+by+c=0$ برابر است با :

$$\boxed{d=\frac{|a x_A+b y_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

- **نتیجه**. فاصله ی مبدأ مختصات از خط $ax+by+c=0$ برابر است با :

$$\boxed{d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

۲- مثال. فاصله ی نقطه ی $A(2,1)$ را از خط $6x-8y=19$ به دست آورید.

حل.

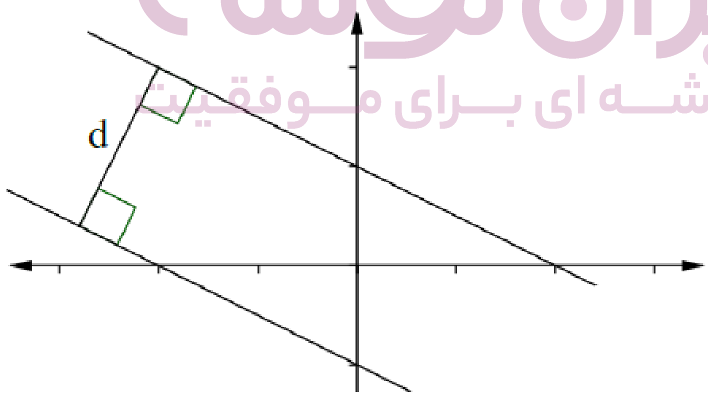
$$6x-8y=19 \Rightarrow 6x-8y-19=0$$

$$d=\frac{|6(2)-8(1)-19|}{\sqrt{(6)^2+(-8)^2}}=\frac{|-15|}{\sqrt{100}}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

۳- تمرین. نقطه ی $A(4,7)$ یک راس مربعی است که یک ضلع آن بر روی خط $3x+4y=20$ قرار دارد. محیط و مساحت آن را به دست آورید.

۴- تمرین. دو نقطه ی $A(1,-3)$ و $B(5,5)$ را در نظر بگیرید. فاصله ی مبدأ مختصات از عمود منصف پاره خط AB چقدر است؟

۱- آشنایی با فاصله ی بین دو خط موازی



- فاصله ی بین دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با :

$$\boxed{d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

۲- مثال. فاصله ی بین دو خط موازی $4x-2y=1$ و $6x-3y+1=0$ را به دست آورید.

حل.

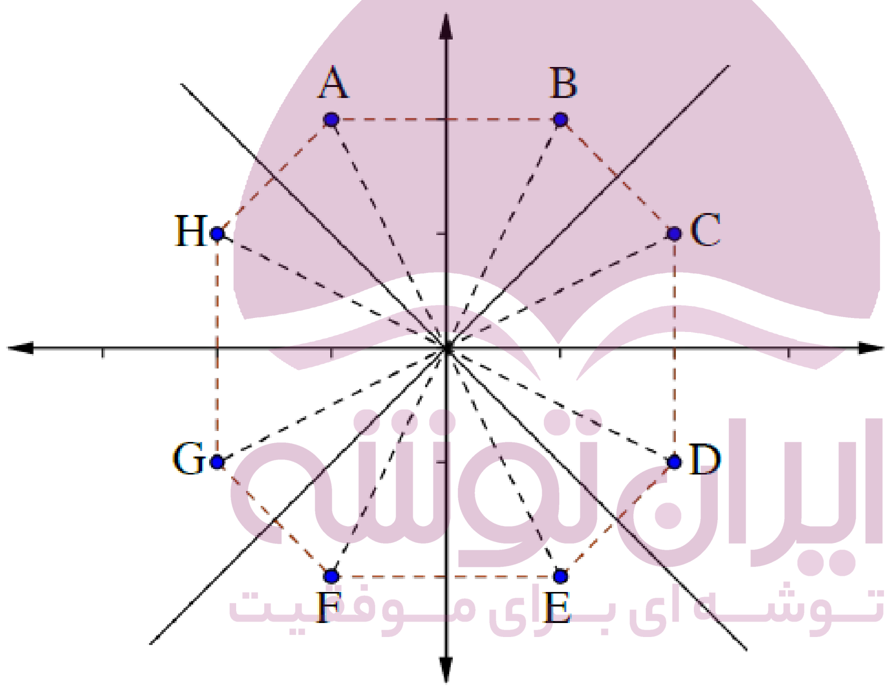
$$6x-3y+1=0 \overset{?}{\Rightarrow} 2x-y+\frac{1}{3}=0 \qquad 4x-2y=1 \overset{?}{\Rightarrow} 2x-y-\frac{1}{2}=0$$

$$d=\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{5}{6}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$$

۳- تمرین. مقادیر k را طوری بیابید که فاصله ی بین دو خط موازی $3x+4y=2$ و $6x+8y=k$ برابر ۱ شود.

---

۸. تقارن



۱- تقارن نسبت به نقطه

(۱) قرینه ی نقطه ی A نسبت به مبدأ مختصات برابر است با نقطه ی $(-x_A,-y_A)$.

(۲) قرینه ی نقطه ی A نسبت به نقطه ی M برابر است با نقطه ی $(2x_M-x_A,2y_M-y_A)$

۲- تقارن نسبت به خط

(۱) قرینه ی نقطه ی A نسبت به محور طول ها برابر است با نقطه ی $(x_A,-y_A)$.

(۲) قرینه ی نقطه ی A نسبت به محور عرض ها برابر است با نقطه ی $(-x_A,y_A)$.

(۳) قرینه ی نقطه ی A نسبت به نیمساز ناحیه ی اول و سوم برابر است با نقطه ی (y_A,x_A) .

(۴) قرینه ی نقطه ی A نسبت به نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم برابر است با نقطه ی $(-y_A,-x_A)$.

(۵) قرینه ی نقطه ی A نسبت به خط $x=a$ برابر است با نقطه ی $(2a-x_A,y_A)$.

(۶) قرینه ی نقطه ی A نسبت به خط $y=b$ برابر است با نقطه ی $(x_A,2b-y_A)$.

(۷) قرینه ی نقطه ی A نسبت به خط $y=mx+b$ برابر است با نقطه ی

$$\left(\frac{(1-m^2)x_A+2m(y_A-b)}{m^2+1},\frac{2mx_A+(m^2-1)y_A+2b}{m^2+1}\right).$$

۳- تمرین

- نقطه ی $A(-2,3)$ را در نظر بگیرید.

(آ) قرینه ی نقطه ی A را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

(ب) قرینه ی نقطه ی A را نسبت به نقطه ی $M(2,1)$ به دست آورید.

(پ) قرینه ی نقطه ی A را نسبت به محور طول ها به دست آورید.

(ت) قرینه ی نقطه ی A را نسبت به محور عرض ها به دست آورید.

(ث) قرینه ی نقطه ی A را نسبت به نیمساز ناحیه ی اول و سوم به دست آورید.

(ج) قرینه ی نقطه ی A را نسبت به نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم به دست آورید.

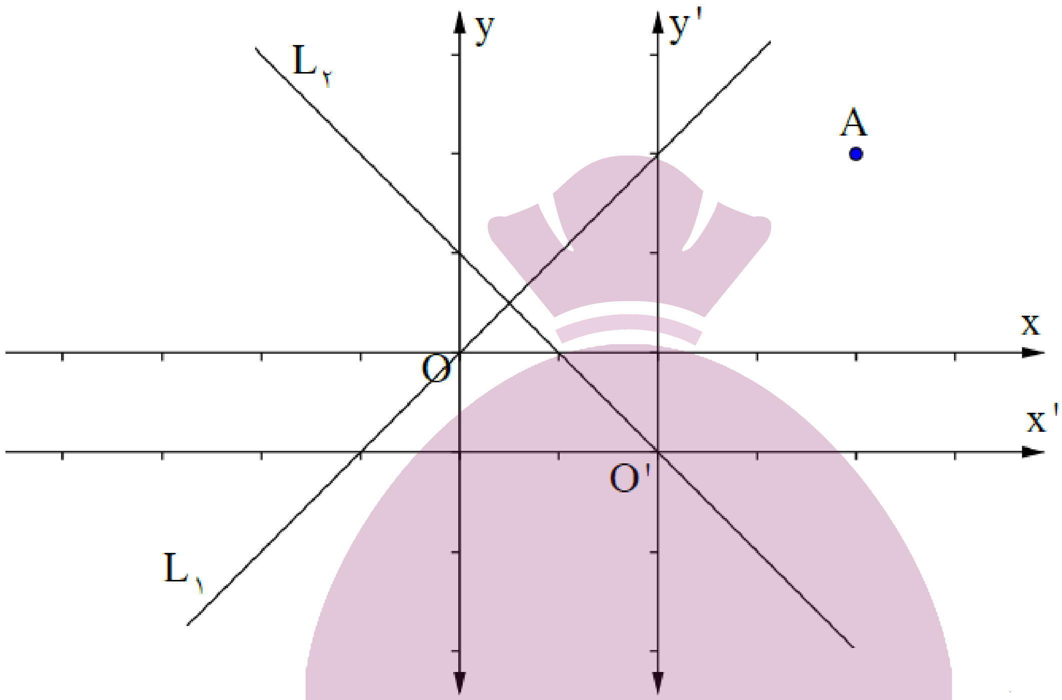
(چ) قرینه ی نقطه ی A را نسبت به خط $x=2$ به دست آورید.

(ح) قرینه ی نقطه ی A را نسبت به خط $y=2$ به دست آورید.

(خ) قرینه ی نقطه ی A را نسبت به خط $y=3x+2$ به دست آورید.

۹. انتقال محورهای مختصات

۱- آشنایی با انتقال محورهای مختصات



• نقطه ی $A(x,y)$ را در دستگاه مختصات xoy در نظر بگیرید. محورهای مختصات را به موازات خود به گونه‌ای انتقال می‌دهیم که مبدأ مختصات به نقطه ی $O'(\alpha,\beta)$ منتقل شود. اگر $A(x',y')$ مختصات این نقطه در دستگاه مختصات جدید $x'o'y'$ باشد، آن‌گاه :

$$\begin{cases} x'=x-\alpha \\ y'=y-\beta \end{cases}$$

۲- مثال. خط $۱۱x-۷y=۱۰$ را در نظر بگیرید. محورهای مختصات را به موازات خود به گونه‌ای انتقال می‌دهیم که مبدأ مختصات به نقطه ی $O'(۱,۲)$ منتقل شود. معادله ی خط را در دستگاه مختصات جدید به دست آورید.

حل

$$x'=x-۱ \Rightarrow x=x'+۱$$
$$y'=y-۲ \Rightarrow y=y'+۲$$
$$۱۱x-۷y=۱۰ \Rightarrow ۱۱(x'+۱)-۷(y'+۲)=۱۰ \Rightarrow ۱۱x'+۱۱-۷y'-۱۴=۱۰ \Rightarrow ۱۱x'-۷y'=۱۳$$

۳- تمرین. خط $۴x+۶y=۷$ را در نظر بگیرید. محورهای مختصات را به موازات خود به گونه‌ای انتقال می‌دهیم که مبدأ مختصات به نقطه ی $O'(۳,-۲)$ منتقل شود. معادله ی خط را در دستگاه مختصات جدید به دست آورید.