دفترچه پاسخ

آزمون ۱۲ بهمن ۱۴۰۳

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ وریاضی‌پایه	شاهین پروازی-داود حسین‌پور-افشین خاصه‌خان-سینا خیرخواه-طاهر دادستانی-محمد زنگنه-علی شهرابی-کیان کریمی‌خراسانی مهسان گودرزی-رضا ماجدی-حامد معنوی-مهرداد ملوندی-نیما مهندس-علیرضا نداف‌زاده-غلامرضا نیازی-جهانبخش نیکنام
	هندسه و ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-اسحاق اسفندیار-علی ایمانی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-مصطفی دیداری-سوگند روشنی علیرضا شریف‌خطیبی-هومن عقیلی-شبنم غلامی- احمدرضا فلاح-مجتبی مظاهری‌فرد-مهرداد ملوندی-نیلوفر مهدوی-نیما مهندس سرژ یقیازاریان‌تبریزی
	فیزیک	مهران اسماعیلی-حسین الهی-علی برزگر-علیرضا جباری-مسعود خندانی-معصومه شریعت‌ناصری-مهدی شریفی-مصطفی کیانی محمد مقدم-محمدکاظم منشادی-سیدمحمدعلی موسوی-امیراحمد میرسعید-حسام نادری-مجتبی نکوئیان
	شیمی	امیرعلی بیات-علیرضا بیانی-محمدرضا پورجاوید-سعید تیزرو-محمدرضا جمشیدی-امیر حاتمیان-امیرمسعود حسینی حمید ذبحی-یاسر راش-حسن رحمتی‌کوکنده-روزبه رضوانی-رضا سلیمانی-حسین شاهسواری-امیرحسین طیبی رسول عابدینی‌زواره-محمد عظیمیان‌زواره-محسن مجنونی-آرمین محمدی‌چیرانی-هادی مهدی زاده

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	نیما مهندس	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	مصطفی کیانی	ایمان حسین‌نژاد
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب محمد خندان	امیرحسین ابومحبوب امیرمحمدکریمی محمد خندان	امیرحسین ابومحبوب امیرمحمدکریمی محمد خندان	بهنام شاهنی زهره آقامحمدی	حسین شاهسواری محمدحسن محمدزاده مقدم محمدرضا جمشیدی
بازبینی نهایی رتبه های برتر	سیدسپهر متولیان محمدپارسا سبزه‌ای	محمدپارسا سبزه‌ای	محمدپارسا سبزه‌ای	سینا صالحی اوستا عباسی ماهان فرهمندفر	ماهان فرهمندفر
مسئول درس	سیدماهد عبدی مهرداد ملوندی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	امیرعلی بیات
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران مستندسازی	معصومه صنعت‌کار- علیرضا عباسی‌زاهد- محمدرضا مهدوی			کیان مکی ابراهیم نوری پرهام مهرآرا	سجاد رضایی محمدصدرا وطنی محسن دستجردی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

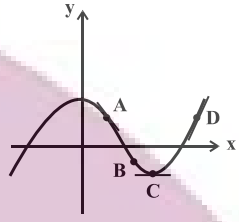
توشه‌ای برای موفقیت

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۱»** *(علی شهرابی)*

اگر نقطه‌ای بالای محور xها باشد، مقدار تابع در آن نقطه مثبت و اگر نقطه‌ای پایین محور xها باشد، مقدار تابع در آن نقطه منفی است. پس:

$$f(x_A)>0, f(x_B)<0, f(x_C)<0, f(x_D)>0$$



مقدار f' در هر نقطه، برابر با شیب خط مماس بر تابع f در آن نقطه است. با توجه به نمودار داریم:

$$f'(x_A)<0, f'(x_B)<0, f'(x_C)=0, f'(x_D)>0$$

پس:

$$f(x_A)f'(x_A)<0, f(x_B)f'(x_B)>0$$
$$f(x_C)f'(x_C)=0, f(x_D)f'(x_D)>0$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۸)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(غلامرضا نیازی)*

طبق شکل، نقطهٔ تماس، محل برخورد $y=|x|-1$ با محور xها است:

$|x|-1=0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$ ؛ طول نقطهٔ تماس $x=-1$

خط مماس بر منحنی f در نقطه به طول $x=-1$ برابر $y=-x-1$ است، در نتیجه: $m_d=-1 \Rightarrow f'(-1)=-1$

حاصل حد مورد نظر برابر می‌شود با:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+2h)+f(-1+h)-2f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=2f'(-1)+f'(-1)=3f'(-1)=3(-1)=-3$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(مهسان کودرزی)*

نقطهٔ $A(1,-2)$ روی منحنی f قرار دارد لذا $f(1)=-2$؛ از طرفی طبق فرض سؤال، شیب خط مماس، قرینه و معکوس شیب خط d یعنی برابر $-\frac{1}{6}$ است، لذا $f'(1)=-\frac{1}{6}$. داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^3(x)+8}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(f(x)+2)(f^2(x)-2f(x)+4)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-2f(x)+4}{x+1}$$

طبق تعریف مشتق $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$، پس حاصل عبارت مذکور برابر می‌شود با:

$$-\frac{1}{6}\times\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-2f(x)+4}{x+1}=-\frac{1}{6}\times\frac{4+4+4}{1+1}=-1$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمد زنگنه)*

باید از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$g'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x^2-9}{1-f(x)}-0}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(1-f(x))(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{(1-f(x))}=\frac{3+3}{1-(-1)}=3$$

توجه کنید که در قسمت پایانی راه‌حل، $\lim_{x\to 3}f(x)$ مدنظر است و نه $f(3)$.

نکته: $f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ; \ x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ; \ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۱ تا ۸۳)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(نیما مهندس)*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+3h)-f^2(x-2h)}{-10h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+3h)-f(x-2h)}{h}\right)\times\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+3h)+f(x-2h)}{-10}\right)$$
$$=5f'(x)\times\frac{2f(x)}{-10}=\frac{1}{x^3}\Rightarrow f(x)f'(x)=-\frac{1}{x^3}$$
$$\Rightarrow f(2).f'(2)=-\frac{1}{8}\Rightarrow 8f(2).f'(2)=-1$$

توجه: در بخشی از راه‌حل از رابطهٔ زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a-nh)}{h}=(m+n)f'(a)$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(شاهین پروازی)*

معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $A(1,0)$ و $B(-1,k+3)$ را می‌نویسیم:

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y=\frac{k+3}{-2}(x-1)$$

با توجه به آن‌که خط فوق بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=2$ مماس است پس $f'(2)=\frac{k+3}{-2}$ و $f(2)=\frac{k+3}{-2}$.

از طرفی عبارت $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f^۲(x)-۹}{x-۲}$ در صورتی موجود است که $f(۲)=\pm ۳$ باشد. پس:

۱) $f(۲)=۳\Rightarrow\frac{k+۳}{-۲}=۳\Rightarrow k=-۹$

۲) $f(۲)=-۳\Rightarrow\frac{k+۳}{-۲}=-۳\Rightarrow k=۳$

اگر $k=-۹\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۲}\frac{(f(x)-۳)(f(x)+۳)}{x-۲}$

$=(f'(۲))(f(۲)+۳)=۱۸$

اگر $k=۳\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۲}\frac{(f(x)+۳)(f(x)-۳)}{x-۲}$

$=(f'(۲))(f(۲)-۳)=۱۸$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا نداف‌زاده)*

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f را می‌یابیم:

$(۳,۰),(۰,۲)\Rightarrow m=\frac{۲-۰}{۰-۳}=-\frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow y-۰=-\frac{۲}{۳}(x-۳)\Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+۲$

با توجه به نمودار تابع f که بر خط مذکور در نقطه به طول $x=۲$ مماس شده، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}f(۲)=-\frac{۲}{۳}(۲)+۲=\frac{۲}{۳}\\ f'(۲)=-\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

داریم:

$\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-۳h)-\frac{۲}{۳}}{h^۲-h}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-۳h)-f(۲)}{h}\times\lim\limits_{h\to ۰}\frac{۱}{h-۱}$

$=-۳f'(۲)\times(-۱)=+۳(-\frac{۲}{۳})=-۲$

$\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-\frac{۲}{۳}}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۱}{x+۲}$

$=f'(۲)\times\frac{۱}{۴}=(-\frac{۲}{۳})\times\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۶}$

پس حاصل عبارت مورد نظر برابر است با: $-۲-\frac{۱}{۶}=-\frac{۱۳}{۶}$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۸- **گزینهٔ «۴»** *(جهانبخش نیکنام)*

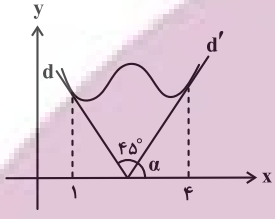
در حد داده شده حد مخرج کسر، صفر است پس حد صورت کسر هم باید صفر باشد:

$f^۲(۱)-۲f(۱)=۰$

$\Rightarrow f(۱)(f(۱)-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}f(۱)=۲\\ f(۱)=۰\end{cases}$ (طبق شکل، غ ق ق)

$\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)(f(x)-۲)}{(x-۲)(x-۱)}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)}{x-۲}\times\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-۲}{x-۱}$

$=(-۲)f'(۱)=۴\Rightarrow f'(۱)=-۲$



فرض کنیم α زاویهٔ بین خط d' و محور xها باشد.

$f'(۱)=\tan(\alpha+۴۵^\circ)\Rightarrow -۲=\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}$

$\Rightarrow\tan\alpha=۳\Rightarrow f'(۴)=۳$

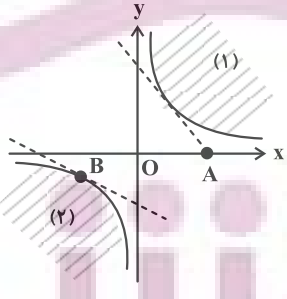
(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

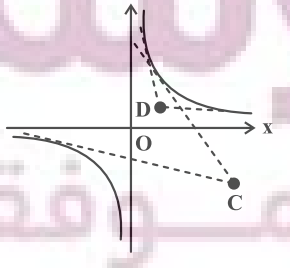
نکته: با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$، نقاط صفحهٔ مختصات را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

الف) مبدأ مختصات (نقطهٔ O) و نقاط نواحی (۱) و (۲)؛ از این دسته نقاط هیچ مماسی بر نمودار تابع f نمی‌توان رسم کرد.

ب) نقاط روی محورهای مختصات (به غیر از O) و نقاط روی نمودار تابع f؛ از این دسته نقاط (همانند نقاط A و B) فقط یک مماس بر تابع f می‌توان رسم کرد.

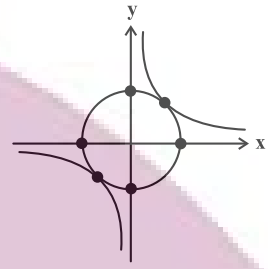


ج) بقیهٔ نقاط صفحه (غیر از (الف) و (ب))؛ از این دسته نقاط (همانند C و D) دو مماس بر نمودار تابع f می‌توان رسم کرد.



مطابق شکل زیر، دایره به معادله $x^۲+y^۲=۲$ با تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ تنها دو نقطهٔ مشترک $(۱\ ,\ ۱)$ و $(-۱\ ,\ -۱)$ دارند.

با توجه به نکتهٔ بالا، ۶ نقطهٔ مشخص شده روی نمودار دایره، نقاطی هستند که فقط یک مماس از آن‌ها می‌توان بر نمودار f رسم کرد.



(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** (نیما مهندس)

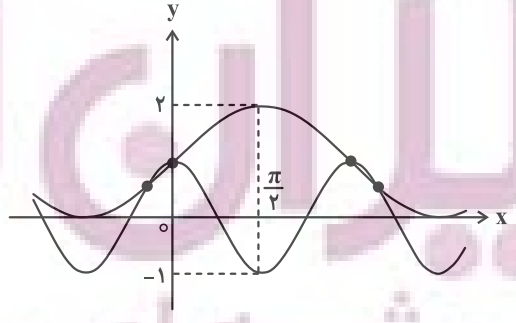
باید معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را حل کنیم:

$$\sin x+۱=\cos ۲x \Rightarrow \sin x+۱=۱-۲\sin^۲ x$$

$$\Rightarrow \sin x=-۲\sin^۲ x$$

$$\begin{cases}\sin x=۰ \xrightarrow{x\in(-\frac{\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴})} x=۰\ ,\ \pi \\ \text{یا} \\ \sin x=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\sin(-\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۲}} x=-\frac{\pi}{۶}\ ,\ \frac{۷\pi}{۶}\end{cases}$$

مطابق شکل، در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ از این بازه تابع f به $\max$ و تابع g به $\min$ مقدار خود می‌رسند. نقاط برخورد دو تابع، دوبه‌دو نسبت به خط $x=\frac{\pi}{۲}$ متقارن‌اند؛ لذا مماس‌هایی که در این نقاط بر نمودار دو تابع رسم می‌کنیم یا افقی‌اند یا شیب‌های قرینه دارند، در نتیجه پاسخ مسئله برابر صفر است.



(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۳)

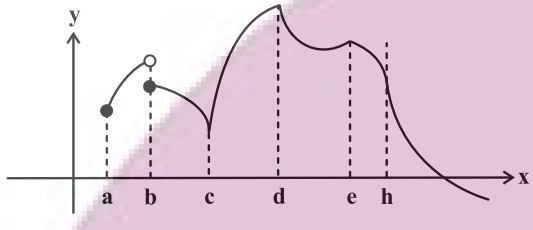
حسابان ۲- پیشروی سریع

۱۱- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا نداف‌زاده)

۱) تابع f در نقاط به طول a و b پیوسته نیست، پس مشتق‌پذیر نیست.

۲) تابع f در نقاط به طول c و h پیوسته است ولی مشتق‌های چپ و راست در آن‌ها نامتناهی است، پس در این نقاط نیز مشتق‌ناپذیر است.

۳) تابع f در نقاط به طول d و e پیوسته است ولی این نقاط گوشه‌ای هستند، لذا نقاط مشتق‌ناپذیری تابع هستند.



(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۵ تا ۸۹)

۱۲- **گزینهٔ «۲»** (افشین خاصه‌خان)

طبق تعریف، زمانی $x=a$ مماس قائم تابع f است که اولاً تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، ثانیاً f در $x=a$ مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد.

در گزینهٔ «۱» تابع در $x=۲$ فقط پیوستگی راست دارد. (تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف نشده است.)

گزینه‌های «۳» و «۴» در $x=۲$ مشتق چپ و راست نامتناهی دارند اما در $x=۲$ پیوسته نیستند.

اما در گزینهٔ «۲» تابع در $x=۲$ پیوسته است:

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt{|x-۲|}=f(۲)=۰$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{\sqrt{|x-۲|}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{\sqrt{-(x-۲)}}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۱}{-\sqrt{-(x-۲)}}=-\infty$$

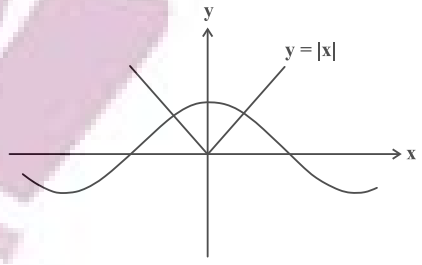
$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{|x-۲|}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x-۲}}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{\sqrt{x-۲}}=+\infty$$

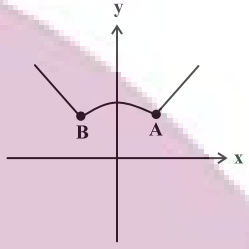
(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۸ و ۸۹)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** (کیان کریمی‌خراسانی)

نمودار دو تابع $y=|x|$ و $y=\cos x$، با هم، در شکل زیر نمایش داده شده است:



در نتیجه نمودار تابع f به صورت زیر می‌شود:



این تابع دارای دو نقطهٔ گوشه‌ای A و B است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۸ و ۸۹)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** (غلامرضا نیازی)

با توجه به ضابطهٔ تابع g داریم: $g(1)=0$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=0(1)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=0(-1)=0\end{cases}\Rightarrow g(x) \text{ در } x=1 \text{ پیوسته است}$$

$$g'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|.f(x)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)f(x)}{(x-1)}=1$$

$$g'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|.f(x)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)f(x)}{(x-1)}=-(-1)=1$$

$$g'_-(1)=g'_+(1)=1\xrightarrow{g \text{ پیوسته در } x=1} g'(1)=1$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱۵- **گزینهٔ «۱»** (طاهر دارستانی)

از $f'_+(1)-f'_-(1)=2$ نتیجه می‌گیریم که تابع f در $x=1$ پیوسته است ولی مشتق چپ و راست نابرابر دارد. به دلیل وجود $[x]$ در مخرج کسر تابع f، زمانی در $x=1$ پیوسته است که مقدار صورت کسر در این نقطه، صفر شود (چرا؟)، پس:

$$x^2+ax+b=0\xrightarrow{x=1}1+a+b=0\Rightarrow b=-(a+1)$$

مشتق چپ تابع f در $x=1$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x^2+ax-(a+1)-0}{2x-[x]}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+(a+1))}{2x(x-1)}=\frac{2+a}{2}$$

به طریق مشابه داریم $f'_+(1)=\frac{2+a}{1}$ و در نتیجه طبق فرض خواهیم داشت:

$$\frac{2+a}{1}-\frac{2+a}{2}=2\Rightarrow\frac{2+a}{2}=2\Rightarrow a=2$$

پس $b=-(2+1)=-3$ و لذا $ab=-6$.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۶ تا ۸۹)

۱۶- **گزینهٔ «۱»** (غلامرضا نیازی)

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{[2x-1].\overbrace{|\sin ax|}^{+}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}-\frac{\sin ax}{x}=-a \quad \text{(شیب نیم مماس راست)}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{[2x-1].|\sin ax|}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{[(-1)^-].\overbrace{|\sin ax|}^{-}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2(-\sin ax)}{x}=2a$$

$$\Rightarrow|f'_+(0)-f'_-(0)|=3a=6\Rightarrow a=2$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱۷- **گزینهٔ «۴»** (سینا خیرخواه)

کافی است نقاط ناپیوستگی تابع f را پیدا کنیم. برای این منظور، نقاطی از بازهٔ $(3,1)$ را که به ازای آن‌ها $\sqrt{2x}$ و x^2 صحیح می‌شوند را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^2=n\Rightarrow x=\pm\sqrt{n}\\ \Rightarrow x=\underbrace{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8}}_{\text{۷ نقطه}}\\ \sqrt{2x}=k\Rightarrow x=\frac{k}{\sqrt{2}}\\ \Rightarrow x=\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2}}_{\sqrt{2}}},\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\underbrace{\sqrt{2}}_{\sqrt{8}}}\end{cases}$$

$x=\sqrt{8}$ و $x=\sqrt{2}$ در هر دو دسته مشترک هستند، پس پیوستگی و مشتق‌پذیری آن‌ها را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^-} f(x)=[2^-]-[2^-]=1-1=0\\ \lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+} f(x)=[2^+]-[2^+]=2-2=0\\ f(\sqrt{2})=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\sqrt{8})^-} f(x)=[4^-]-[8^-]=3-7=-4\\ \lim\limits_{x\to(\sqrt{8})^+} f(x)=[4^+]-[8^+]=4-8=-4\\ f(\sqrt{8})=-4\end{cases}$$

پس تابع f در این دو نقطه پیوسته و مشتق‌پذیر است. در نتیجه تابع f فقط در ۶ نقطه از بازهٔ $(3,1)$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

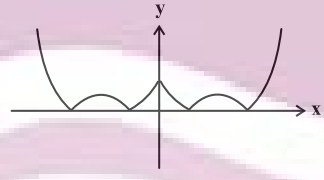
(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱۸- **گزینهٔ «۱»** (مهرداد ملوندی)

ضابطهٔ تابع f به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$f(x)=\left||x|^2+m|x|-(m+1)\right|=\left|(|x|-1)(|x|+(m+1))\right|$$

همچنین با توجه به ضابطه و صورت سؤال، نتیجه می‌شود که نمودار تابع f به صورت زیر است:



نقطه‌ای به طول $x=0$، ریشهٔ عبارت $|x|$ است، پس نقطهٔ گوشه‌ای و مشتق‌ناپذیر محسوب می‌شود. در صورتی تابع $f(x)$، چهار نقطهٔ مشتق‌ناپذیر دیگر دارد که هر دو پرانتز داخل قدرمطلق، حتماً ریشه داشته باشند و درضمن ریشه‌های آن‌ها متمایز باشند، پس:

$$|x|-1=0\Rightarrow|x|=1\Rightarrow x=\pm1$$

$$|x|+(m+1)=0\Rightarrow|x|=-(m+1)\Rightarrow\begin{cases}-(m+1)>0\\ -(m+1)\neq1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m<-1\\ m\neq-2\end{cases}$$

از مجموعهٔ مذکور، فقط مقادیر ۳-، ۴- و ۵- برای m قابل قبول است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۶ تا ۸۹)

۱۹- **گزینهٔ «۲»** (نیما مهندس)

با توجه به تجزیهٔ $x^3-4x^2+4x=x(x^2-4x+4)=x(x-2)^2$ و ناپیوسته بودن $[x]$ در تمامی مقادیر صحیح x در بازهٔ $(3,-3)$ درمی‌یابیم که تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته و مشتق‌ناپذیر (مشتق‌های چپ و راست عددهایی متفاوت هستند)، در $x=1$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر (چون نقطه انفصال است، گوشه‌ای نیست) و در $x=2$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. وضعیت تابع $f(x)$ در $x=-1$ و $x=-2$ مشابه وضعیت آن در حوالی $x=1$ است. برای ضابطهٔ دوم، دامنهٔ تابع برابر $|x|>4$ شده و ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق بیرونی را در نظر می‌گیریم:

$$\log(|x|-4)=0\Rightarrow|x|-4=10^0=1\Rightarrow|x|=5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=5\Rightarrow f(5)=-1\\ x=-5\Rightarrow f(-5)=-1\end{cases}$$

پس نقاط گوشه‌ای تابع عبارتند از $(0,0)$، $(-1,5)$ و $(-1,-5)$ که مثلثی به مساحت $\frac{10\times1}{2}=5$ با یکدیگر می‌سازند.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** (نیما مهندس)

نقطهٔ $x=2$ ریشه ساده داخل قدرمطلق و تنها کاندید نقطه گوشه‌ای برای تابع f است. پس ابتدا باید شیب نیم‌مماس چپ را در همسایگی آن محاسبه کنیم.

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{(-3x+6)\sqrt[3]{x^2+ax+b}-0}{x-2}$$

$$=-3\sqrt[3]{4+2a+b}$$

اگر صفرهای $y=x^2+ax+b$ را α و β در نظر بگیریم، معادله خطوط مماس قائم بر نمودار به صورت $x=\alpha$ و $x=\beta$ خواهد بود. پس نقاط (α,α) و $(\beta,-\beta)$ روی نیم‌مماس چپ هستند. (با جابه‌جایی α و β تغییری در کلیت سؤال ایجاد نمی‌شود.)

معادلهٔ نیم‌مماس چپ: $y-f(2)=m_{\text{شیب}}(x-2)$

$$\Rightarrow y=-3\sqrt[3]{4+2a+b}(x-2)\xrightarrow[\text{معادله خط صدق می‌کنند}]{\text{نقاط }(\alpha,\alpha)\text{ و }(\beta,-\beta)\text{ در}}$$

$$\begin{cases}\alpha=-3\sqrt[3]{4+2a+b}\ (\alpha-2)\\ -\beta=-3\sqrt[3]{4+2a+b}\ (\beta-2)\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم روابط بر یکدیگر}}$$

$$\left(\frac{\alpha}{-\beta}\right)=\frac{\alpha-2}{\beta-2}\Rightarrow\alpha\beta-2\alpha=-\alpha\beta+2\beta$$

$$\xrightarrow[\alpha\beta=b]{\alpha+\beta=-a}a=-b\Rightarrow a+b=0$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

ریاضی پایه

۲۱- **گزینهٔ «۳»** *(حامد معنوی)*

واضح است که $U=(-5,3)$، بنابراین:

$$\begin{cases} a-1=-2 \Rightarrow a=-1 \\ a+2=b+3 \xrightarrow{a=-1} -1+2=b+3 \Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

پس:

$$U-[a-2,b+3)=(-5,3)-[-3,1)=(-5,-3)\cup[1,3)$$

که این مجموعه شامل سه عدد صحیح $-4,1,2$ است.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۸ و ۹)

۲۲- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصّه خان)*

در شکل n ام تعداد کل مربع‌ها برابر است با $(2n+1)^2$ و تعداد مربع‌های سفید برابر است با n^2؛ بنابراین تعداد مربع‌های رنگی در شکل دهم برابر است با:

$$(2\times 10+1)^2-10^2=341$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحهٔ ۱۸)

۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(نیما مهندس)*

باید از کوچک به بزرگ، به ترتیب، سراغ مضارب فرد عدد ۱۷ برویم. ضمناً ضابطه بالایی (به ازای nهای زوج) را به صورت $\frac{1}{200}(n+10)(n-20)$ می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} a_{50}=\frac{1}{200}(50+10)(50-20)=9 \\ a_{51}=\frac{3\times 51}{17}=9 \end{array}\right\} \Rightarrow k=9 \Rightarrow \sqrt{k}=3$$

$$a_{17}=\frac{3\times 17}{17}=3\ ,\ a_{20}=0 \Rightarrow (a_{17})^{a_{20}}=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{k}+(a_{17})^{a_{20}}=3+1=4$$

توجه: اثبات این که به غیر از جملات متوالی پنجاه و پنجاه و یکم، هیچ دو جملهٔ متوالی دیگری برای مقدار صحیح یکسان نیستند را خودتان بررسی کنید.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۱۲ تا ۲۰)

۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(شاهین پروازی)*

جمله اول دنباله $a_1\geq 100$ و قدر نسبت $d\geq 1$ است. جملهٔ بیستم دنباله هم نباید از ۱۵۰ بزرگتر باشد. $a_{20}=a_1+19d\leq 150$

برای d، دو مقدار ۱ و ۲ قابل قبول است که برای هر دو مقدار، تعداد دنباله‌ها را حساب می‌کنیم.

الف) $d=1 \Rightarrow a_1+19d\leq 150 \xrightarrow{a_1\geq 100} 100\leq a_1\leq 131$

پس برای $d=1$، به تعداد $32=1+100-131$ دنباله متفاوت پیدا می‌شود.

ب) $d=2 \Rightarrow a_1+38\leq 150 \xrightarrow{a_1\geq 100} 100\leq a_1\leq 112$

برای $d=2$، به تعداد $13=1+100-112$ دنباله متفاوت پیدا می‌شود.

پس در نهایت $45=32+13$ دنباله متفاوت وجود دارد.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(رضا ماجدی)*

جملات دنباله‌های هندسی و حسابی را به ترتیب با t_n و a_n نمایش می‌دهیم.

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} t_1=a_2 \\ t_5=a_4 \\ t_9=a_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=a_1+d & (1) \\ t_1q^4=a_1+3d & (2) \\ t_1q^8=a_1+11d & (3) \end{cases}$$

$$\begin{matrix}(2)-(1)\\(3)-(2)\end{matrix}\begin{cases} t_1(q^4-1)=2d \\ t_1q^4(q^4-1)=8d \end{cases} \xrightarrow[t_1\neq 0\ ,\ q\neq 1]{\text{تقسیم بر هم}} q^4=4$$

$$\Rightarrow t_1+t_5+t_9=84$$

$$\Rightarrow t_1+t_1q^4+t_1q^8=t_1+4t_1+16t_1=84$$

$$\Rightarrow 21t_1=84 \Rightarrow t_1=4 \xrightarrow{t_1(q^4-1)=2d} d=\frac{4(4-1)}{2}=6$$

$$a_2=t_1=4$$

در دنبالهٔ حسابی، جملات سوم و هشتم برابر هستند با:

$$a_3=a_2+d=10 \quad \text{و} \quad a_8=a_2+6d=40$$

اختلاف واسطه‌های حسابی و هندسی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \text{واسطه حسابی}=\frac{10+40}{2}=25 \\ \text{واسطه هندسی}=\sqrt{10\times 40}=20 \end{cases} \Rightarrow 25-20=5$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

طبق رابطه $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ در یک دنباله حسابی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S_{2n}=\frac{2n}{2}(a_1+a_{2n})=n(2a_1+2nd-d) \\ 2S_n=2\times\frac{n}{2}(a_1+a_n)=n(2a_1+nd-d) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{2n}-2S_n=n^2d$$

پس جملات دنبالهٔ داده شده به صورت زیر خواهند بود:

$$25d\ ,\ 100d\ ,\ 400d\ ,\ \ldots$$

مشخص است که این دنباله، یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=4$ است.

حالا از رابطهٔ مجموع n جملهٔ اول در دنبالهٔ هندسی استفاده می کنیم:

مجموع ۱۲ جملهٔ اول $= \frac{t_1(q^{12}-1)}{q-1}$

مجموع ۶ جملهٔ دوم $= \frac{t_7(q^6-1)}{q-1}$

$$\Rightarrow \frac{\text{مجموع ۱۲ جملهٔ اول}}{\text{مجموع ۶ جملهٔ اول}} = \frac{t_1(q^{12}-1)}{t_1q^6(q^6-1)} = \frac{q^6+1}{q^6} = 1+(\frac{1}{q})^6$$

چون $q=4$، پس طبق فرض:

$$m = 1+(\frac{1}{4})^6 \Rightarrow (m-1)^{\frac{1}{12}} = ((\frac{1}{4})^6)^{\frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۳ تا ۵)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(شاهین پروازی)*

$$A = \sqrt[4]{4-\sqrt{15}} - \sqrt[4]{4+\sqrt{15}}$$

$$\xrightarrow[A<0]{\text{توان ۲}} A^2 = \sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}} - 2\sqrt[4]{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}$$

$$\Rightarrow A^2+2 = \sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (A^2+2)^2 = 4-\sqrt{15}+4+\sqrt{15}+2\sqrt{16-15} = 10$$

$$(A^2+2)^2 = 10 \Rightarrow A^2+2 = \sqrt{10} \Rightarrow A^2 = \sqrt{10}-2$$

$$\xrightarrow{A<0} A = -\sqrt{\sqrt{10}-2} = -\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt[4]{2}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸)

۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(نیما موندس)*

ابتدا مقدار حاصل $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{21}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{7}.\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{2}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد $\sqrt{5-\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$، پس:

$$A = (\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) \times (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \times (\sqrt{2}) = 2\sqrt{7}$$

مقدار B را نیز به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$B = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{14}}{4\sqrt{2}+\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{2}(1+\sqrt{7})}{\sqrt{2}(4+\sqrt{7})}$$

$$= \frac{3(1+\sqrt{7})}{4+\sqrt{7}} \times \frac{4-\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}} = \frac{3(-3+3\sqrt{7})}{\cancel{16-7}\ 9} = \sqrt{7}-1$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B+1} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 2$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸)

۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(سینا خیرخواه)*

بعد از تجزیه پرانتز وسطی، از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$M = \underbrace{(16x^2-4x+1)(4x+1)}_{(4x)^3+(1)^3}\underbrace{(4x-1)(16x^2+4x+1)}_{(4x)^3-(1)^3}+1$$

$$= (64x^3+1)(64x^3-1)+1$$

$$M = (64x^3)^2 - \cancel{(1)^2} + \cancel{1} = 2^{12} \times x^6 = 2^{12} \times (\sqrt[3]{\frac{-1}{4}})^6$$

$$= 2^{12} \times (\frac{-1}{4})^2 = 2^{12} \times \frac{1}{2^4} = 2^8 = 256$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(داود حسین‌پور)*

$$A = \underbrace{5(\sqrt{2}+1)^{-1}}_{B} + \underbrace{\frac{7+4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}_{C}$$

$$B = \frac{5}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{5\sqrt{2}-5}{2-1} = 5\sqrt{2}-5$$

$$C = \frac{7+4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \times \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = \frac{21-14\sqrt{2}+12\sqrt{2}-16}{9-8}$$

$$= 5-2\sqrt{2}$$

$$A = B+C = 5\sqrt{2}-5+5-2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}A = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۷)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۳

۳۱- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین ابومحبوب)

اگر نقطهٔ M خارج از بیضی نباشد، آن‌گاه داخل یا روی بیضی است و در نتیجه $MF+MF' \le 2a$.

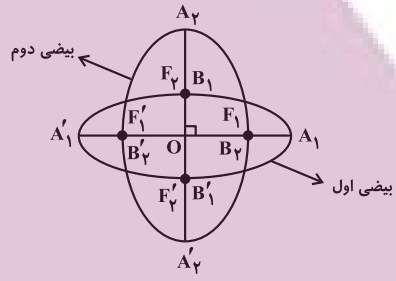
$$2a = AA' = |1-(-5)| = 6$$

بنابراین بیشترین مقدار برای $MF+MF'$، برابر $2a = 6$ است.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۲- **گزینهٔ «۴»** (مهرداد ملوندی)

مطابق شکل زیر، دو بیضی مذکور هم‌مرکز بوده و قطر بزرگ آن‌ها بر هم عمودند.



با توجه به فرض، قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی از بیضی اول به ترتیب فاصلهٔ کانونی و قطر کوچک از بیضی دوم است و داریم:

$$\begin{cases} B_1B_1' = F_2F_2' \Rightarrow 2b_1 = 2c_2 \Rightarrow b_1 = c_2 \\ F_1F_1' = B_2B_2' \Rightarrow 2c_1 = 2b_2 \Rightarrow c_1 = b_2 \end{cases}$$

از رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ نتیجه می‌شود که قطر بزرگ هر دو بیضی هم‌اندازه‌اند و لذا $a_1 = a_2$. خروج از مرکز بیضی دوم را به صورت زیر می‌یابیم:

$$e_2 = \frac{c_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1} = \sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2}} \xrightarrow{b_1^2 = a_1^2 - c_1^2} e_2 = \sqrt{1-\frac{c_1^2}{a_1^2}}$$

$$\Rightarrow e_2 = \sqrt{1-e_1^2} = \sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

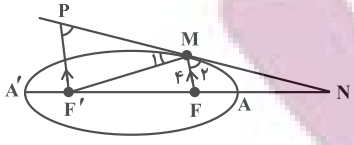
۳۳- **گزینهٔ «۳»** (امیررضا فلاح)

طبق فرض داریم:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{3}a$$: خروج از مرکز

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 16 = a^2 - \frac{5}{9}a^2$$: از طرفی

$$\Rightarrow \frac{4}{9}a^2 = 16 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{3} \times 6 = 2\sqrt{5}$$



مطابق شکل، فاصلهٔ نقطهٔ M از کانون F برابر ۴ است، لذا طبق تعریف بیضی داریم: $MF + MF' = 2a \Rightarrow 4 + MF' = 12 \Rightarrow MF' = 8$

از طرفی $FF' = 2c = 4\sqrt{5}$:

پاره‌خط $F'P$ را موازی FM رسم می‌کنیم. می‌دانیم: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و $\hat{P} = \hat{M}_2$ پس $\hat{P} = \hat{M}_1$ و از آنجا $F'P = 8$؛ طبق قضیهٔ تالس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{NF}{NF'} = \frac{FM}{F'P} \Rightarrow \frac{NF}{NF + 4\sqrt{5}} = \frac{4}{8}$$

$$\Rightarrow 2NF = NF + 4\sqrt{5} \Rightarrow NF = 4\sqrt{5}$$

فاصلهٔ N تا دورترین رأس بیضی به صورت زیر به دست می‌آید:

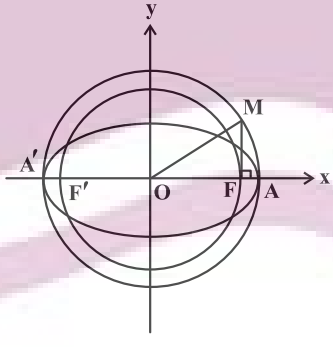
$$NA' = NF + FF' + F'A' = NF + \underbrace{2c + (a-c)}_{c+a}$$

$$= 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 6 = 6\sqrt{5} + 6$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۳۴- **گزینهٔ «۲»** (امیررضا فلاح)

با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} OM = R = a \\ OF = c \end{cases} \Rightarrow MF^2 + OF^2 = OM^2$$

$$\Rightarrow MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$

شیب خط d یعنی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ همان تانژانت زاویهٔ OM با محور Ox یعنی 30° می‌باشد:

$$\overset{\Delta}{OMF}: \tan 30^\circ = \frac{MF}{OF} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{b}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = 1$$

طبق شکل، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر همان مقدار c می‌باشد، پس:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow a = 2$$

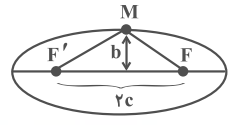
$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$: خروج از مرکز بیضی

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۵- **گزینهٔ «۲»** (اسماق اسفندیار)

نقطهٔ M روی بیضی قرار دارد، لذا بنا به تعریف بیضی $MF+MF'=2a$ است. از طرفی محیط مثلث MFF' برابر با $MF+MF'+FF'=20$ است. در نتیجه:

$$2a+2c=20 \Rightarrow a+c=10$$



مطابق شکل، بیشترین مساحت $\overset{\Delta}{MFF'}$ موقعی به دست می‌آید که M یکی از دو سر قطر کوچک (نقاط B و B') باشد، در این صورت:

$$b^2=a^2-c^2=(a-c)\underbrace{(a+c)}_{10}=(\frac{10}{2})^2 \Rightarrow a-c=\frac{5}{2}$$

از روابط $a+c=10$ و $a-c=\frac{5}{2}$، مقدار $c=\frac{15}{4}$ به دست می‌آید و در نتیجه:

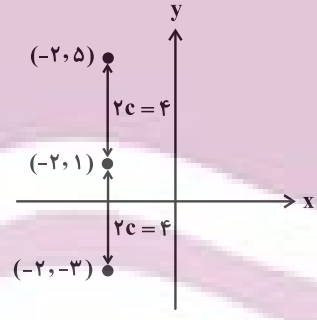
$$\max(S_{MFF'})=\frac{1}{2}b(2c)=bc=5\times\frac{15}{4}=\frac{75}{4}=18/75$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۶- **گزینهٔ «۴»** (افشین خاصه‌خان)

با توجه به فرض داریم:

$$\xrightarrow{6>2\sqrt{5}}\begin{cases}2a=6\Rightarrow a=3\\ 2b=2\sqrt{5}\Rightarrow b=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=2$$

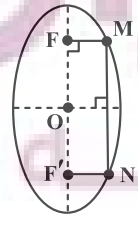


مطابق فعالیت ۴ صفحهٔ ۵۰ کتاب درسی هندسه ۳، اگر بدنه داخلی بیضی، آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی، اشعهٔ نوری بر بدنهٔ داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کانون دیگر خواهد گذشت. چون بیضی قائم است و $c=2$، لذا کانون‌های دیگر $(-3,-2)$ یا $(5,-2)$ می‌تواند باشد.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۹ و ۵۰)

۳۷- **گزینهٔ «۳»** (شبنم غلامی)

مطابق شکل فرض کنید نقاط برخورد محور yها با بیضی را M و N بنامیم. مرکز بیضی (نقطهٔ O) روی عمودمنصف پاره‌خط MN واقع است، یعنی داریم:



$$y_O=\frac{19+(-5)}{2}=7$$

از طرفی طول مرکز بیضی قائم با طول هر کدام از کانون‌ها برابر است، یعنی $x_O=x_F=-7$. در این صورت $O(-7,7)$ مرکز و $F'(-7,-5)$ کانون دیگر بیضی خواهد بود. با در نظر گرفتن $MF=7$ و $FF'=24$، در مثلث قائم‌الزاویهٔ MFF' داریم:

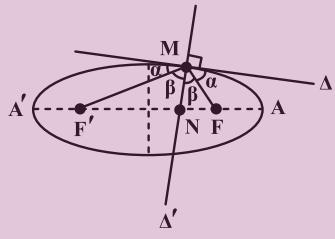
$$MF'^2=MF^2+FF'^2=7^2+24^2=25^2 \Rightarrow MF'=25$$

از طرفی مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر بیضی از دو کانون آن، برابر طول قطر بزرگ بیضی است، پس داریم: $2a=MF+MF'=7+25=32$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۸- **گزینهٔ «۱»** (سوگند روشنی)

نقطهٔ M را به کانون‌های F و F' وصل می‌کنیم. مطابق شکل، دو جفت زاویهٔ برابر خواهیم داشت.



$\overset{\Delta}{MFF'}$: قضیهٔ نیمسازها در $\frac{MF}{MF'}=\frac{NF}{NF'}$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{MF}{MF+MF'}=\frac{NF}{NF+NF'}$$

$$\Rightarrow\frac{MF}{2a}=\frac{NF}{2c}\Rightarrow\frac{NF}{MF}=\frac{c}{a} \qquad (1)$$

از طرفی طبق فرض، $A(5,2)$ و $F'(-4,2)$، در نتیجه $c+a=9$ است. همچنین طبق فرض $AF=a-c=3$، پس:

$$\begin{cases}a+c=9\\ a-c=3\end{cases}\Rightarrow 2a=12\Rightarrow a=6\xrightarrow{c+a=9}c=3 \qquad (2)$$

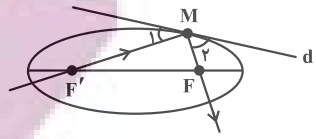
$$\xrightarrow{(1),(2)}\frac{NF}{MF}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0/5$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۳۹- **گزینهٔ «۱»** (هومن عقیلی)

طبق قضیهٔ بازتابندگی بیضی، پرتو انعکاس از کانون F خواهد گذشت و داریم: $\hat{M}_1=\hat{M}_2=\theta$. همچنین:

$$\begin{cases}MF+MF'=2a\Rightarrow 3+MF'=8\Rightarrow MF'=5\\ FF'=7\end{cases}$$



در مثلث MFF' قضیهٔ کسینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$FF'^{۲} = MF'^{۲} + MF^{۲} - ۲MF' \times MF \times \cos F'\hat{M}F$$

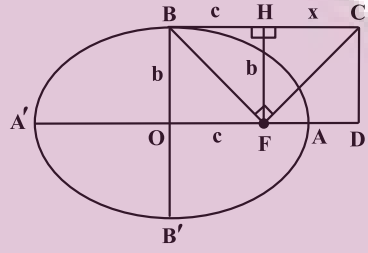
$$۴۹ = ۲۵ + ۹ - ۲ \times ۵ \times ۳ \times \cos F'\hat{M}F$$

$$\Rightarrow \cos F'\hat{M}F = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow F'\hat{M}F = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{\theta} = ۳۰^\circ$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(هومن عقیلی)*

از F عمود FH را بر BC رسم می‌کنیم. مطابق شکل داریم:



$$FH = b \quad , \quad BH = c \quad , \quad HC = x = FD$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BFC داریم:

$$b^{۲} = c.x \Rightarrow x = \frac{b^{۲}}{c}$$

از طرفی خروج از مرکز بیضی برابر $e = \frac{c}{a}$ است، پس:

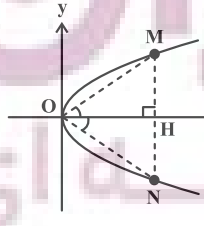
$$OD = c + x = c + \frac{b^{۲}}{c} = \frac{c^{۲} + b^{۲}}{c} = \frac{a^{۲}}{c} = \frac{a.a}{c} = \frac{a}{e}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

هندسه ۳- پیشروی سریع

۴۱- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

توجه داشته باشید که با انتقال رأس سهمی $(y-۱)^{۲} = x+۱$ به مبدأ مختصات، تغییری در خواستهٔ سؤال پدید نمی‌آید. شکل زیر، نمودار سهمی به معادلهٔ $y^{۲} = x$ می‌باشد که در آن مثلث مورد نظر رسم شده است:



در مثلث متساوی‌الاضلاع OMN، OH ارتفاع است، لذا با فرض $MN = m$ داریم:

$$OH = \frac{m\sqrt{۳}}{۲} \quad \text{و} \quad MH = \frac{m}{۲}$$

مختصات نقطهٔ M به صورت $(\frac{m}{۲} , \frac{m\sqrt{۳}}{۲})$ می‌شود که در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\frac{m}{۲})^{۲} = \frac{m\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{m^{۲}}{۴} = \frac{m\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow m = ۲\sqrt{۳}$$

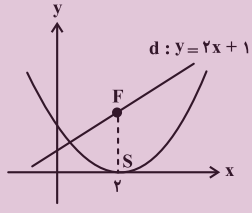
طول ضلع مثلث مورد نظر برابر $۲\sqrt{۳}$ است.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیررضا فلاح)*

مطابق شکل، رأس سهمی نقطهٔ $S(۲ , ۰)$ می‌باشد، بنابراین طول کانون سهمی نیز عدد ۲ است یعنی $F(۲ , y)$ و طبق فرض داریم:

$$F(۲, y) \xrightarrow{y=۲x+۱} y = ۵$$



مختصات کانون $F(۲, ۵)$ بوده و لذا فاصلهٔ S تا F برابر ۵ می‌باشد پس $a = ۵$.

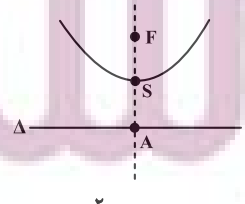
معادله این سهمی به صورت $(x-۲)^{۲} = ۴ \times ۵(y-۰)$ می‌شود. برای تعیین مختصات برخورد این منحنی با محور yها، مؤلفه x را در معادله برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(۰-۲)^{۲} = ۲۰y \Rightarrow y = \frac{۱}{۵}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۴۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیررضا فلاح)*

در سهمی قائم مذکور، اگر $S(h , k)$ مختصات رأس باشد، آن‌گاه $F(h , k+a)$ کانون و $\Delta : y = k-a$ خط هادی سهمی می‌باشد پس مختصات نقطهٔ A به صورت زیر است: $A(۲=h \ , \ -۲=k-a)$



معادلهٔ سهمی به صورت $(x-۲)^{۲} = ۴a(y-k)$ می‌باشد، لذا مختصات نقطهٔ M را در آن صدق می‌دهیم:

$$M(۴, ۰) \in \text{سهمی} \Rightarrow (۴-۲)^{۲} = ۴a(۰-k) \Rightarrow -۱ = ak$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-a=-2 \\ -1=ak \Rightarrow a=-\frac{1}{k} \end{cases}$$

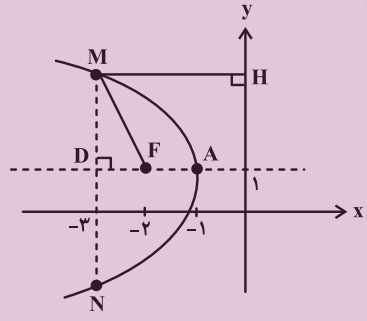
$$\Rightarrow k+\frac{1}{k}=-2 \Rightarrow k=-1 \Rightarrow a=1$$

پس مختصات کانون این سهمی $F(h=2\ ,\ k+a=0)$ می‌شود و در نتیجه کانون سهمی روی محور x ها قرار دارد.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۴۴- **گزینهٔ «۳»** (اسماق اسفندیار)

نوع سهمی، افقی بوده و دهانهٔ آن رو به سمت چپ باز می‌شود. همچنین رأس سهمی $A(-1\ ,\ 1)$ و فاصلهٔ کانونی $a=1$ می‌شود، پس مختصات کانون سهمی $F(-2\ ,\ 1)$ و محور yها، خط هادی سهمی خواهد بود. قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ F، نقطهٔ $D(-3\ ,\ 1)$ می‌باشد.



نقطهٔ M روی سهمی قرار دارد، پس طبق تعریف سهمی داریم:

$$MH=MF=3$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ DMF داریم:

$$DM^2=MF^2-DF^2=9-1=8 \Rightarrow DM=2\sqrt{2}$$

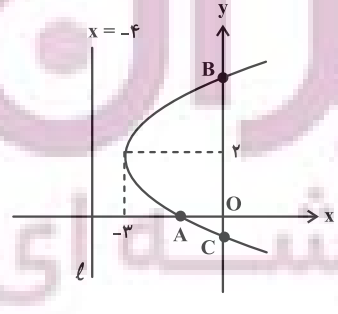
$$\Rightarrow MN=2DM=4\sqrt{2}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۴۵- **گزینهٔ «۴»** (اخشین خاصه‌خان)

با توجه به معلومات مسئله، منحنی یک سهمی افقی رو به راست است که مختصات رأس آن $(\frac{-4-2}{2}\ ,\ 2)$ و فاصله کانونی آن $a=\frac{-2-(-4)}{2}=1$ می‌باشد.

بنابراین معادله سهمی برابر خواهد بود با: $(y-2)^2=4(1)(x+3)$



با توجه به شکل، نقاط برخورد نمودار سهمی را با محورهای مختصات می‌یابیم:

$$\xrightarrow{x=0} \begin{cases} y-2=\sqrt{12} \\ y-2=-\sqrt{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_B=2+2\sqrt{3} \\ y_C=2-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow BC=4\sqrt{3}$$

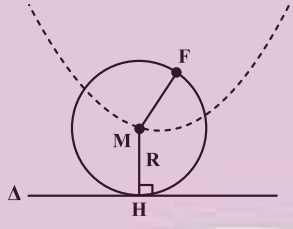
$$\xrightarrow{y=0} 4=4x+12 \Rightarrow x_A=-2$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}OA\times BC=\frac{1}{2}\times 2\times 4\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۴۶- **گزینهٔ «۲»** (سرژ یقیازاریان‌تبریزی)

فرض می‌کنیم دایرهٔ $C(M\ ,\ R)$ از نقطهٔ F (کانون سهمی) گذشته و بر خط Δ مماس است. بنابراین مرکز آن از نقطهٔ F و خط Δ به یک فاصله است $(MF=MH=R)$. بنابراین نقطهٔ M روی سهمی به کانون F و خط هادی Δ قرار دارد. برعکس، می‌توان گفت اگر نقطهٔ M روی سهمی به کانون F و هادی Δ قرار داشته باشد، آن‌گاه از نقطهٔ F و خط Δ به یک فاصله است، پس دایره به مرکز M و به شعاع این فاصله، بر خط Δ مماس است و از F می‌گذرد.



معادلهٔ سهمی: $(x-1)^2=\frac{2}{3}y$

این سهمی قائم با دهانهٔ رو به بالا می‌باشد که رأس آن $S(\alpha\ ,\beta)=(1\ ,\ 0)$

و فاصلهٔ کانونی آن برابر است با: $a=\frac{1}{4}(\frac{2}{3})=\frac{1}{6}$

خط هادی سهمی قائم: $y=\beta-a \Rightarrow y=0-\frac{1}{6} \Rightarrow y=-\frac{1}{6}$

بنابراین این دایره همواره بر خط $6y+1=0$ مماس است.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

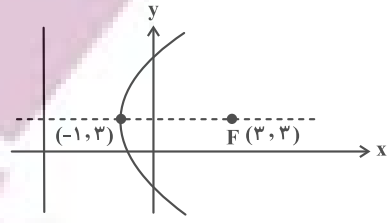
۴۷- **گزینهٔ «۱»** (علی ایمانی)

با توجه به این‌که سهمی افقی است پس $n=3$ و $FS=a=4$ و همچنین دهانهٔ آن رو به راست باز می‌شود. بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $(y-3)^2=16(x-m)$ خواهد بود.

چون سهمی از نقطهٔ $(-1\ ,\ 0)$ می‌گذرد، خواهیم داشت:

$$(-1-3)^2=-16m \Rightarrow m=-1$$

نمودار سهمی به صورت زیر خواهد بود:



خط هادی : $x=-1-4=-5$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۴۸- **گزینهٔ «۴»** (نیما مهندس)

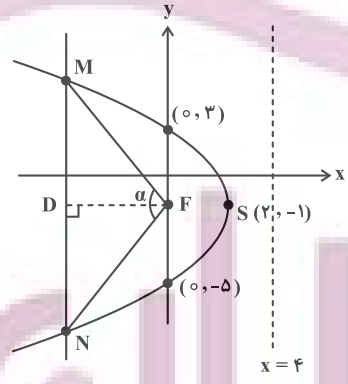
سهمی مذکور افقی است که دهانهٔ آن رو به سمت چپ باز می‌شود. رأس سهمی $S(2,-1)$ و $a=2$ است، پس $F(0,-1)$ کانون و $x=4$ معادلهٔ خط هادی است. فاصلهٔ نقاط M و N از خط هادی سهمی به معادلهٔ $x=4$ برابر ۱۲ است. این دو نقطه روی سهمی قرار دارند، پس بنابر تعریف سهمی داریم:

$$MF=NF=12$$

با توجه به شکل، برای پیدا کردن $\tan\frac{\alpha}{2}$، با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث MFN، سراغ محاسبهٔ طول DM به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌رویم:

$$F(0,-1)\Rightarrow DM=\sqrt{MF^2-FD^2}=\sqrt{12^2-8^2}=4\sqrt{5}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{DM}{DF}=\frac{4\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$



* توجه کنید که FD هم ارتفاع، هم میانه و هم نیمساز است. پس طول DM را می‌توانستیم به کمک محاسبهٔ طول MN از قرار دادن $x=-8$ در معادلهٔ سهمی نیز به دست آوریم.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۴۹- **گزینهٔ «۲»** (هومن عقیلی)

از صورت سؤال متوجه می‌شویم که نوع سهمی افقی است و چون نقطهٔ $A(9,7)$ سمت راست خط هادی قرار دارد، پس دهانهٔ آن رو به راست است. مختصات رأس سهمی به صورت $S(4+a,4)$ و معادلهٔ سهمی عبارتست از:

$$(y-4)^2=4a(x-4-a)$$

نقطهٔ $A(9,7)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، در نتیجه:

$$9=4a(5-a)\Rightarrow 4a^2-20a+9=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{10\pm\sqrt{64}}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=0/5\\a=4/5\end{cases}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۵۰- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین ابومحبوب)

مطابق شکل، وتر کانونی سهمی (پاره‌خطی که دو سر آن روی سهمی قرار دارد و در کانون سهمی بر محور آن عمود است)، دقیقاً بر وتر کانونی بیضی منطبق شده است. اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را به ترتیب با $2a$ و $2b$ و فاصلهٔ کانونی سهمی را با m نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases}2a=12\Rightarrow a=6\\2b=8\Rightarrow b=4\end{cases}$$

$$\underset{\text{وتر کانونی سهمی}}{4m}=\underset{\text{وتر کانونی بیضی}}{\frac{2b^2}{a}}\Rightarrow 4m=\frac{2\times4^2}{6}\Rightarrow m=\frac{4}{3}$$

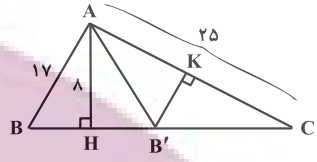
(هندسه ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۲

۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

دو مثلث ABH و $AB'H$ بنابر خاصیت تبدیل بازتاب با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. پس:



$$\begin{cases} B'H = BH = \sqrt{۱۷^۲ - ۸^۲} = ۱۵ \\ CH = \sqrt{۲۵^۲ - ۸^۲} = \sqrt{۵۶۱} \simeq ۲۳/۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'C \simeq ۲۳/۵ - ۱۵ = ۸/۵$$

می‌دانیم کوتاه‌ترین ارتفاع مثلث نظیر بلندترین ضلع مثلث است. در مثلث $AB'C$، ضلع $AC = ۲۵$ بلندترین ضلع است، پس مطابق شکل، ارتفاع $B'K$ کوتاه‌ترین ارتفاع است که اندازهٔ آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۲S_{AB'C} = AH \times B'C = B'K \times AC \Rightarrow B'K \simeq \frac{۸ \times ۸/۵}{۲۵}$$

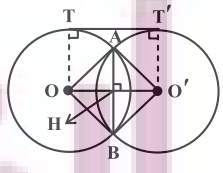
$$\Rightarrow B'K \simeq \frac{۶۸}{۲۵} = ۲/۷$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۵۲- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه خاکپاش)*

انتقال تبدیلی طولپاست، پس شعاع دایره تحت انتقال تغییر نمی‌کند و در نتیجه داریم:

$$R = R' \Rightarrow a - ۱ = ۷ - a \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow R = R' = ۳$$



چون دو دایره دارای شعاع‌های برابر هستند، پس طول خط‌المرکزین دو دایره برابر طول مماس مشترک خارجی آن‌ها یعنی $d = ۴$ است. مطابق شکل مثلث OAO' متساوی‌الساقین است و در نتیجه داریم

$$OH = O'H = \frac{d}{۲} = ۲$$

$$\overset{\Delta}{OAH} : AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ = ۳^۲ - ۲^۲ = ۵ \Rightarrow AH = \sqrt{۵}$$

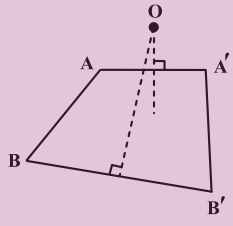
بنابراین طول وتر مشترک دو دایره برابر است با:

$$AB = ۲AH = ۲\sqrt{۵}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

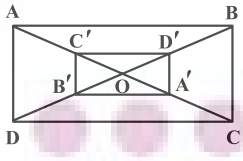
فرض کنید نقطهٔ O مرکز دوران باشد. در این صورت $OA = OA'$ و $OB = OB'$ است، یعنی A و A' از O به یک فاصله و B و B' نیز از O به یک فاصله هستند. بنابراین O روی عمودمنصف AA' و نیز روی عمودمنصف BB' قرار دارد. پس O محل تلاقی عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AA' و BB' است.



(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۵۴- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

فرض کنیم طول و عرض مستطیل بزرگ‌تر به ترتیب برابر x و y باشند. ابتدا به کمک نسبت تجانس و مساحت ناحیهٔ بین دو مستطیل، مساحت مستطیل $ABCD$ را محاسبه می‌کنیم.



$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = k^۲ \Rightarrow \frac{S'}{S} = (-\frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۱}{۹} \Rightarrow S' = \frac{۱}{۹}S$$

$$\text{مساحت ناحیهٔ بین دو مستطیل} = S - S'$$

$$\Rightarrow ۶۴ = S - \frac{۱}{۹}S \Rightarrow \frac{۸}{۹}S = ۶۴ \Rightarrow S = ۷۲$$

بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x^۲ + y^۲} = ۶\sqrt{۵} \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۱۸۰ \\ xy = ۷۲ \Rightarrow ۲xy = ۱۴۴ \end{array}\right\}$$

$\xrightarrow{+} x^۲+y^۲+۲xy=۳۲۴ \Rightarrow (x+y)^۲=۳۲۴$

$\Rightarrow x+y=۱۸ \Rightarrow$ محیط $ABCD = ۲\times ۱۸ = ۳۶$

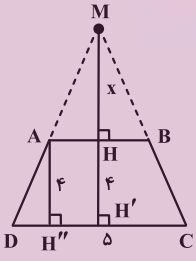
$\frac{\text{محیط } A'B'C'D'}{\text{محیط } ABCD} = |k| \Rightarrow \frac{\text{محیط } A'B'C'D'}{۳۶} = \frac{۱}{۳}$

$\Rightarrow$ محیط $A'B'C'D' = ۱۲$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

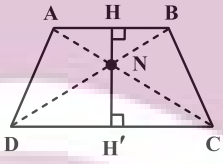
۵۵- **گزینهٔ «۳»** (مجتبی مظاهری‌فرد)

در شکل‌های زیر، نقاط M و N (مرکز تجانس مستقیم و معکوس) مشخص شده‌اند:



$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{MH}{MH'} = \frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۵}$

$\xrightarrow{MH=x} \frac{x}{x+۴} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x=۶ \Rightarrow MH=۶$



$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\Delta}{NAB} \sim \overset{\Delta}{NCD}$

$k = \frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۵}$ (نسبت تشابه)

نسبت ارتفاع‌های دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است. داریم:

$\frac{NH}{NH'} = \frac{۳}{۵}$

از طرفی $NH + NH' = ۴$ بنابراین داریم:

$NH' = \frac{۵}{۳}NH \Rightarrow NH + \frac{۵}{۳}NH = ۴ \Rightarrow \frac{۸}{۳}NH = ۴$

$\Rightarrow NH = \frac{۱۲}{۸} = ۱/۵$

$MN = MH + NH = ۶ + ۱/۵ = ۷/۵$

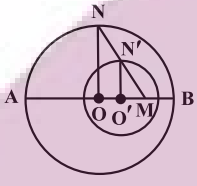
(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۵۶- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا وضعیت دو دایره را مشخص می‌کنیم. با فرض $R=۶$، $R'=۳$ و $d=۲$ داریم:

$۲ < |۶-۳| \Rightarrow d < |R-R'| \Rightarrow$ دو دایره متداخل‌اند

مطابق شکل مرکز تجانس مستقیم دو دایره روی امتداد خط‌المرکزین دو دایره است که آن را با نقطهٔ M نمایش می‌دهیم. اگر $MO'=x$ فرض شود، آن‌گاه داریم:



$\overset{\Delta}{MON} : O'N' \parallel ON \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{MO'}{MO} = \frac{O'N'}{ON}$

$\Rightarrow \frac{x}{x+۲} = \frac{۳}{۶} \Rightarrow ۶x = ۳x+۶ \Rightarrow x=۲$

حال طول قطعات MA و MB و نسبت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$MA = AO + OO' + O'M = ۶+۲+۲ = ۱۰$

$MB = AB - MA = ۱۲ - ۱۰ = ۲$

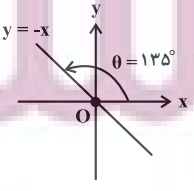
$\frac{MB}{MA} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۵۷- **گزینهٔ «۲»** (مهرداد ملوندی)

طبق تمرین ۵ صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی هندسه (۲)، تبدیل معادل با دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع برابر است با دوران به مرکز «محل تقاطع دو محور» و زاویه‌ای به اندازهٔ «دو برابر زاویهٔ بین دو محور».

مطابق فرض، ابتدا بازتاب نسبت به محور xها و سپس نسبت به خط $y=-x$ انجام می‌دهیم، پس با توجه به شکل، تبدیل S، دورانی به مرکز O (مبدأ) و زاویهٔ $۲\theta = ۲۷۰^\circ$ است.

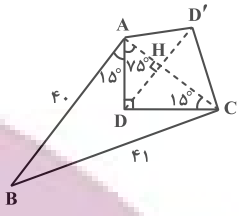


توجه: زاویهٔ $۲۷۰^\circ+$ معادل با زاویهٔ ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

(هندسه ۲- تمرین ۵ صفحهٔ ۴۳)

۵۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثث ABC، طول ضلع AC را محاسبه می‌کنیم:



$$AC^۲ = BC^۲ - AB^۲ = ۴۱^۲ - ۴۰^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲ = \underbrace{(۴۱-۴۰)}_{۱}\underbrace{(۴۱+۴۰)}_{۸۱} = ۸۱ \Rightarrow AC = ۹$$

برای افزایش مساحت زمین بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کافی است بازتاب رأس D را نسبت به پاره‌خط AC به دست آوریم. میزان افزایش مساحت برابر مساحت چهارضلعی $ADCD'$ یا به عبارت دیگر دو برابر مساحت مثلث ADC است. مطابق شکل یکی از زوایای مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC برابر ۱۵° است، پس در این مثلث طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است، یعنی داریم:

$$DH = \frac{۱}{۴}AC = \frac{۹}{۴}$$

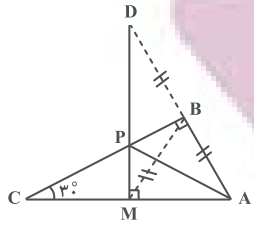
$$\text{میزان افزایش مساحت} = ۲S_{ADC} = ۲\times\frac{۱}{۲}DH\times AC$$

$$= \frac{۹}{۴}\times ۹ = \frac{۸۱}{۴} = ۲۰/۲۵$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۵۹- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

طول پاره‌خط AM که ثابت است؛ لذا باید مقدار عبارت $AP+PM$ کمترین مقدار ممکن باشد. طبق روش هرون، بازتاب A را نسبت به ضلع BC، نقطهٔ D می‌نامیم. نقطهٔ مورد نظر P، محل برخورد DM با ضلع BC بوده و $AP+PM=DM$ است. چون $\hat{C}=۳۰^\circ$، پس $AB=\frac{۱}{۲}AC$ و در نتیجه $BM=AB$. از طرفی $BD=AB$، پس نوع مثلث AMD قائم‌الزاویه است (چرا؟) و داریم:



$$AB = ۳ \xrightarrow{\hat{C}=۳۰^\circ} AC = ۶$$

$$\overset{\Delta}{AMD}: \begin{cases} AM = \frac{AC}{۲} = ۳ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} DM = ۳\sqrt{۳} \\ AD = ۶ \end{cases}$$

در نتیجه کمترین مقدار برای محیط مثلث APM برابر می‌شود با:

$$AM + \underbrace{AP+PM}_{DM} = ۳ + ۳\sqrt{۳} = ۳(۱+\sqrt{۳})$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۵۲)

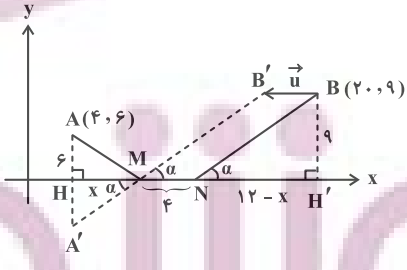
۶۰- **گزینهٔ «۴»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

برای یافتن نقاط M و N، ابتدا نقطهٔ B را با بردار $\vec{u}$ به طول $MN=۴$ و موازی محور x ها به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ B' به دست آید. سپس قرینهٔ A نسبت به محور طول‌ها را A' می‌نامیم. با فرض $HM=x$ داریم:

$$HH' = ۲۰-۴ = ۱۶$$

$$NH' = HH' - (MH+MN) = ۱۲-x$$

با توجه به روش هرون، نقطهٔ M از برخورد پاره‌خط $A'B'$ با محور x ها به دست می‌آید. طبق شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{MA'H} \sim \overset{\Delta}{NBH'} \Rightarrow \frac{x}{۱۲-x} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳x = -۲x + ۲۴ \Rightarrow x = ۴/۸$$

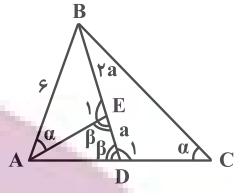
$$|MH - NH'| = |x-(۱۲-x)| = |۲x-۱۲| = |۹/۶-۱۲| = ۲/۴$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

هندسه ۱

۶۱- گزینهٔ «۳» (مهرداد ملوندی)

با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases}\hat{E}_1 = 180^\circ - \beta \\ \hat{D}_1 = 180^\circ - \beta\end{cases} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{D}_1$$

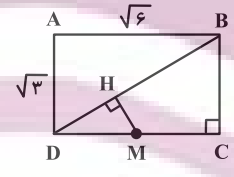
دو مثلث ABE و CBD به حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند و در نتیجه داریم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{6}{BC} = \frac{2a}{3a} \Rightarrow BC = 9$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۶۲- گزینهٔ «۳» (احمدرضا فلاح)

طول قطر مستطیل از قضیهٔ فیثاغورس برابر ۳ به دست می‌آید و مطابق شکل:



$$DC = \sqrt{6} \Rightarrow DM = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

مثلث‌های DMH و BCD با هم متشابه‌اند زیرا:

$$\begin{cases}\hat{D} = \hat{D} \ \text{مشترک} \\ \hat{H} = \hat{C} = 90^\circ\end{cases} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \overset{\Delta}{DMH} \sim \overset{\Delta}{BCD}$$

$$\Rightarrow \frac{DM}{DB} = \frac{MH}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{3} = \frac{MH}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

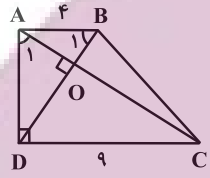
۶۳- گزینهٔ «۲» (احمدرضا فلاح)

مثلث‌های ABD و ACD با هم متشابه‌اند:

$$\left.\begin{matrix}\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{B}_1 = \hat{A}_1 \ (\text{چرا؟})\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{ACD}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB \times DC$$

$$\Rightarrow AD^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow AD = 6 \quad \text{(ارتفاع ذوزنقه)}$$



از طرفی مثلث‌های OAB و OCD نیز متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها همان نسبت دو ضلع متناظر یعنی $\frac{4}{9}$ می‌باشد. پس نسبت دو ارتفاع متناظر آن نیز $\frac{4}{9}$ است. اگر h و h' ارتفاع (وارد بر وتر) در این دو مثلث باشند، آن‌گاه:

$$\frac{h}{h'} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{h}{h+h'} = \frac{4}{13}$$

$$\xrightarrow{h+h'=AD=6} h = \frac{24}{13}$$

$$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \times h = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{24}{13} = \frac{48}{13}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸، ۳۹، ۴۵ و ۴۶)

۶۴- گزینهٔ «۴» (شبنم غلامی)

مطابق شکل می‌توانیم بنویسیم:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \overset{\Delta}{AOB} \sim \overset{\Delta}{COD} \quad \text{(تساوی دو زاویه)}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{7} n \\ p = \frac{4}{7} q \end{cases}$$

ایران‌آزمون
تلاش برای موفقیت

از طرفی طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCD داریم:

$$OC^2 + OD^2 = CD^2 \Rightarrow n^2 + q^2 = 35^2$$

با جای‌گذاری مقادیر به دست آمده، عبارت خواسته شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$mn + pq = \frac{4}{7}n \times n + \frac{4}{7}q \times q = \frac{4}{7}(n^2 + q^2)$$

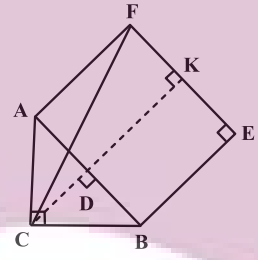
$$= \frac{4}{7} \times 35^2 = 700$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸، ۳۹ و ۴۲)

۶۵- **گزینهٔ «۴»** *(نیما مهندس)*

در مثلث ABC، ارتفاع وارد بر وتر (CD) را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا بر ضلع EF نیز در نقطهٔ K عمود شود. حالا طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه و همچنین قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB = 10$$



$$AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AD = \frac{6^2}{10} = 3/6 \Rightarrow BD = 6/4$$

$$CD = \frac{AC \times BC}{AB} = \frac{6 \times 8}{10} = 4/8$$

چهارضلعی AFKD مستطیل است. پس $FK = AD = 3/6$. از طرفی طول DK با هر یک از اضلاع مربع یا همان وتر مثلث برابر است. پس در مثلث قائم‌الزاویه CFK داریم:

$$CF^2 = FK^2 + CK^2 \Rightarrow CF^2 = AD^2 + (CD + \underbrace{DK}_{AB})^2$$

$$\Rightarrow CF^2 = 3/6^2 + (4/8 + 10)^2$$

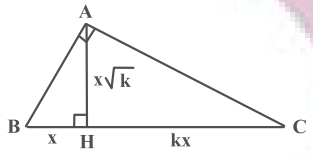
$$\Rightarrow CF^2 = (\frac{36}{10})^2 + (\frac{148}{10})^2 = \frac{18^2 + 74^2}{5^2} = \frac{5800}{25} = 58 \times 4$$

$$\Rightarrow CF = 2\sqrt{58}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۶۶- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$\begin{cases} AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \end{cases} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} = \frac{x}{kx} = \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحهٔ ۴۲)

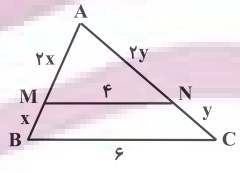
۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

دو مثلث AMN و ABC با هم متشابه‌اند و طبق فرض داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \text{نسبت تشابه} : k = \frac{3}{2}$$

با توجه به شکل زیر و فرض $BM = x$ و $CN = y$ داریم:

$$k = \frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow \begin{cases} MN = 4 \\ AM = 2x \\ AN = 2y \end{cases}$$



همچنین طبق فرض، محیط‌های ذوزنقه و مثلث کوچک‌تر با هم برابرند، پس:

$$x + 4 + y + 6 = 2x + 2y + 4 \Rightarrow x + y = 6$$

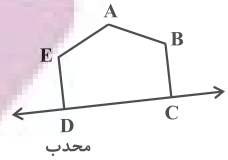
در نتیجه محیط مثلث ABC برابر می‌شود با:

$$AB + AC + BC = 3x + 3y + 6 = 3(\underbrace{x + y}_{6}) + 6 = 24$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۹، ۴۵ و ۴۶)

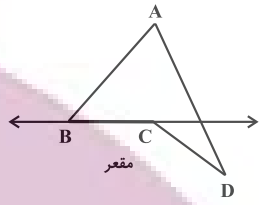
۶۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق تعریف n ضلعی را محدب گوییم، هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیهٔ نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند.



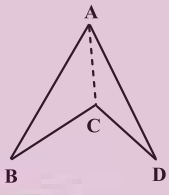
محدب

هر چندضلعی را که محدب نباشد، مقعر می‌نامند.



مقعر

با توجه به تعریف ارائه شده در n ضلعی محدب، هر زاویهٔ داخلی کمتر از 180° است و تمام نقاط پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواه درون چندضلعی را به هم وصل می‌کند، درون چندضلعی قرار دارند. ولی به عنوان مثال نقض گزینهٔ «۳»، چهارضلعی $ABCD$ در شکل زیر را در نظر بگیرید. با رسم قطر AC در این چندضلعی، دو مثلث (چندضلعی محدب) ایجاد می‌شود، ولی چندضلعی $ABCD$ محدب نیست.



(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

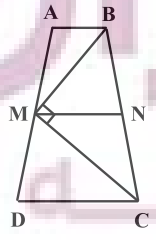
۶۹- **گزینهٔ «۱»** *(شبنم غلامی)*

چهارضلعی $ABCD$، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است، پس داریم:

$$BC = AD = 2AM = 2\times 4 = 8$$

از نقطهٔ M، پاره‌خط MN را موازی با دو قاعدهٔ ذوزنقه رسم می‌کنیم. طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم:

$$MN \parallel AB \parallel CD \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} = 1$$



بنابراین MN میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ BMC و اندازهٔ آن نصف اندازهٔ وتر است، یعنی داریم:

$$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\times 8 = 4$$

از طرفی طبق قضیهٔ میان خط در ذوزنقه می‌توان نوشت:

$$MN = \frac{AB+CD}{2} = 4 \Rightarrow AB+CD = 8$$

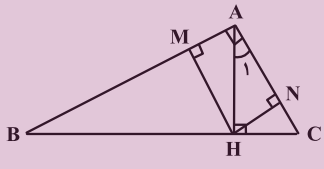
بنابراین محیط ذوزنقهٔ $ABCD$ برابر است با:

$$AD+BC+(AB+CD) = 8+8+8 = 24$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۳)

۷۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

دو زاویهٔ B و C متمم یکدیگرند، پس داریم:



$$\hat{B}+\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}+5\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow 6\hat{B} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 15^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 15^\circ$$

می‌دانیم اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، یکی از زوایای حاده 15° باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر خواهد بود، بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH} : \hat{B} = 15^\circ \Rightarrow HM = \frac{1}{4}AB$$

$$\overset{\Delta}{ACH} : \hat{A}_1 = 15^\circ \Rightarrow HN = \frac{1}{4}AC$$

چهارضلعی $AMHN$ مستطیل است، پس داریم:

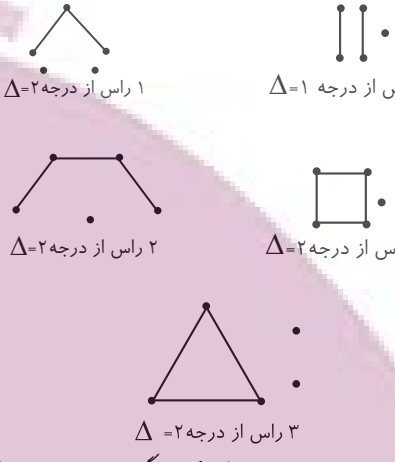
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMHN}} = \frac{\frac{1}{2}AB\times AC}{HM\times HN} = \frac{\frac{1}{2}AB\times AC}{\frac{1}{4}AB\times\frac{1}{4}AC} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}} = 8$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۴)

ریاضیات گسسته

۷۱- گزینهٔ «۴» *(امیررضا فلاح)*

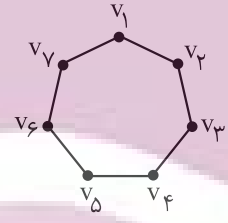
نمودار همهٔ گراف‌های سادهٔ مرتبه ۵ که عدد احاطه‌گری ۳ دارند به صورت زیر هستند:



(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۷۲- گزینهٔ «۳» *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به نمودار گراف، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم شامل رأس مشخص v_1 عبارتند از:



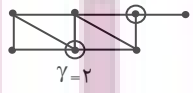
$\{v_1,v_2,v_5\},\{v_1,v_3,v_5\},\{v_1,v_3,v_6\},\{v_1,v_4,v_5\}$

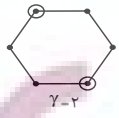
$\{v_1,v_4,v_6\},\{v_1,v_4,v_7\}$

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۴۵)

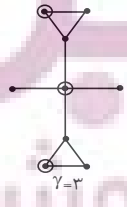
۷۳- گزینهٔ «۴» *(سوگند روشنی)*

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) 

۲) 

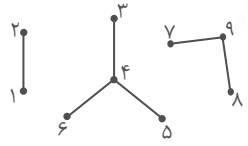
۳) عدد احاطه‌گری $\overline{C}_n\ (n\geq 4)$ همواره $\gamma=2$ است.

۴) 

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۷۴- گزینهٔ «۱» *(علی ایمانی)*

اگر رأس‌های گراف را مطابق شکل، شماره‌گذاری کنیم، تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال به صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$A=\{1,2\}\ ,\ B=\{4\}\ ,\ C=\{3,5,6\}\ ,\ D=\{9\}\ ,\ E=\{7,8\}$$

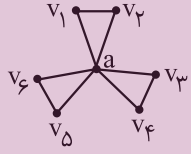
$$\underset{A}{\binom{2}{1}}\times\left[\underset{B}{\binom{1}{1}}+\underset{C}{\binom{3}{3}}\right]\times\left[\underset{D}{\binom{1}{1}}+\underset{E}{\binom{2}{2}}\right]=2\times2\times2=8$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۷۵- گزینهٔ «۳» *(مصطفی دیداری)*

مجموعه‌های احاطه‌گر را به صورت زیر حالت‌بندی می‌کنیم:

(الف) مجموعه احاطه‌گر تک عضوی که فقط $\{a\}$ است.



(ب) مجموعه احاطه‌گر دو عضوی شامل رأس a و یکی از ۶ رأس دیگر: به $\binom{6}{1}=6$ روش، این مجموعه را می‌توانیم انتخاب کنیم. (مثلاً $\{a,v_1\},\{a,v_6\}$ و...)

(پ) مجموعه احاطه‌گر ۳ عضوی: مدل اول، رأس a به همراه دو رأس از ۶ رأس دیگر که به $\binom{6}{2}=15$ روش، مجموعهٔ این مدلی وجود دارد. مدل دیگر این است که از هر کدام از مجموعه‌های $\{v_1,v_2\}$، $\{v_3,v_4\}$ و $\{v_5,v_6\}$ یک رأس انتخاب کنیم که $\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=8$ حالت دارد.

(ت) مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی: مدل اول، مجموعهٔ a به همراه ۳ رأس دلخواه دیگر، که $\binom{6}{3}=20$ حالت دارد. مدل دوم، انتخاب یکی از مجموعه‌های $\{v_1,v_2\}$، $\{v_3,v_4\}$ و $\{v_5,v_6\}$ و انتخاب یک رأس از هر کدام از دو مجموعهٔ دیگر (مثلاً $\{v_5,v_3,v_1,v_2\}$ یا $\{v_5,v_1,v_3,v_4\}$) که $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=12$ حالت دارد.

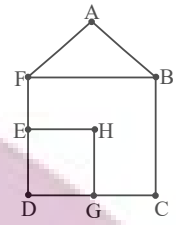
در نتیجه:

$$62=12+20+8+15+6+1=$$ تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر حداکثر ۴ رأسی

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۴۴)

۷۶- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

به ازای هر شهر یک رأس قرار داده و دو رأس را به هم وصل می‌کنیم. هرگاه دو شهر متناظر با آنها فاصله‌ای کمتر یا مساوی ۵۰ کیلومتر داشته باشند، گراف زیر به‌وجود می‌آید.



رأسی وجود ندارد که به همه رأس‌های دیگر وصل باشد پس $\gamma > 1$؛ اما مجموعه $\{G, F\}$ احاطه‌گر است، در نتیجه $\gamma = 2$، پس کافی است حداقل ۲ ایستگاه رادیویی تأسیس کنیم.

(ریاضیات گسسته- مشابه مثال صفحهٔ ۴۵)

۷۷- **گزینهٔ «۴»** *(نیلوفر مهروی)*

در گرافی که دارای مجموعه احاطه‌گر تک عضوی است، رأسی وجود دارد که به تمام رئوس دیگر متصل است.

گراف G از مرتبه p دارای p مجموعه احاطه‌گر تک عضوی است پس گراف G یک گراف کامل است.

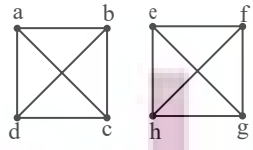
می‌دانیم در هر گراف کامل، هر زیرمجموعهٔ غیرتهی از رئوس، یک مجموعهٔ احاطه‌گر محسوب می‌شود؛ تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $2^p - 1$ است.

به ازای $p = 9$ داریم: $2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۴۴)

۷۸- **گزینهٔ «۴»** *(شبنم غلامی)*

گراف ۳- منتظم ناهمبند از مرتبهٔ ۸، به طور منحصربه‌فرد و به صورت زیر رسم می‌شود:



در واقع این گراف از دو گراف K_4 تشکیل شده است. می‌دانیم عدد احاطه‌گری گراف‌های K_n، برابر یک است و هر رأس در گراف‌های K_n به تنهایی یک مجموعهٔ احاطه‌گر محسوب می‌شود. پس مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال در چنین گراف‌هایی حتماً تک عضوی است. بنابراین مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال گراف ۳- منتظم ناهمبند از مرتبهٔ ۸، دو عضوی بوده و کافی است از هر بخش گراف، یک رأس به دلخواه انتخاب کنیم. طبق اصل ضرب، تعداد این مجموعه‌ها برابر است با: $4 \times 4 = 16$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۶ و ۴۷)

۷۹- **گزینهٔ «۱»** *(شبنم غلامی)*

عدد احاطه‌گری گراف G برابر ۳ است و مجموعه‌ای مانند $\{b, e, h\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

الف) مجموعهٔ $A_1 = \{b, d, f, h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف G نیست، چون با حذف یکی از دو رأس d و h، مجموعهٔ باقی‌مانده کماکان احاطه‌گر است.

ب) مجموعهٔ $A_2 = \{a, d, i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف G نیست، چون رأس c توسط هیچ یک از رأس‌های این مجموعه احاطه نمی‌شود. پس A_2 نمی‌تواند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال باشد.

پ) مجموعهٔ $A_3 = \{b, c, h, i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف G نیست، چون با حذف یکی از دو رأس b یا c، مجموعهٔ باقی‌مانده کماکان احاطه‌گر است.

ت) مجموعهٔ $A_4 = \{c, d, f, g\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف G است. رأس‌های c و d با هیچ رأس دیگری در این مجموعه مجاور نیستند. از طرفی با حذف رأس f، رأس i احاطه نمی‌شود و با حذف رأس g، رأس a احاطه نمی‌شود، پس این مجموعه احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم است.

بنابراین مجموعهٔ A_4، احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۸۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

الف) عدد احاطه‌گری برابر ۲ و مجموعه‌های $\{e, f\}, \{e, c\}, \{e, g\}, \{a, f\}$ و $\{d, f\}$ هر کدام یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم هستند.

ب) عدد احاطه‌گری برابر ۲ و مجموعه‌های $\{d, e\}, \{a, e\}, \{a, h\}$ و $\{d, h\}$ هر کدام یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم هستند.

پ) عدد احاطه‌گری برابر ۲ و مجموعه‌های $\{b, c\}, \{b, e\}$ و $\{c, d\}$ هر کدام یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم هستند.

پس هیچ کدام از این گراف‌ها، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا ندارند.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

ریاضیات گسسته- پیشروی سریع

۸۱- **گزینهٔ «۳»** (مهرداد ملوندی)

طبق فرض، گراف G از مرتبهٔ ۶ فقط یک $\gamma-$ مجموعه به اندازهٔ یک دارد، پس فقط یک رأس از درجهٔ $۵ = ۱ - ۶$ دارد. برای این‌که حداکثر اندازه برای G حاصل شود، باید درجات پنج رأس دیگر به صورت ۳ , ۴ , ۴ , ۴ , ۴ باشد و در نتیجه:

$$۲q_{max} = \sum \deg v_i = ۵ + ۴ \times ۴ + ۳ = ۲۴$$

$$\Rightarrow q_{max} = ۱۲$$

توجه: تعداد رئوس فرد هر گراف ساده، عددی زوج است.

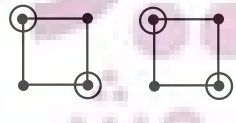
(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۷ تا ۵۳)

۸۲- **گزینهٔ «۴»** (افشین خاصه‌خان)

می‌دانیم در گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ، کران پایین برای $\gamma(G)$ برابر است با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$.

در P_n و C_n، کران پایین $\gamma(G)$ برای $n \geq ۳$ برابر است با $\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$ که به سادگی می‌توان برابری آن را با عدد احاطه‌گری بررسی نمود. مثلاً در $C_۶$ داریم $\gamma(G) = \left\lceil \frac{۶}{۳} \right\rceil = ۲$ و در $P_۷$ داریم $\gamma(G) = \left\lceil \frac{۷}{۳} \right\rceil = ۳$.

در $P_۱$ و $P_۲$ نیز این تساوی برقرار است. در K_n داریم $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{n-۱+۱} \right\rceil = ۱$. اما در گراف $k-$منتظم، چنین نیست، مثلاً در گراف ۲- منتظم از مرتبهٔ ۸ داریم:



$$\left\lceil \frac{۸}{۲+۱} \right\rceil = ۳ < \gamma(G) = ۴$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

۸۳- **گزینهٔ «۲»** (سوگند روشنی)

چون عدد احاطه‌گری گراف ۱ نیست پس $\Delta = ۶$ نمی‌تواند باشد. بیشترین درجه را ۵ در نظر می‌گیریم و چون گراف بیشترین تعداد یال را دارد. گراف را ۵- منتظم در نظر می‌گیریم. ولی گراف ۵- منتظم از مرتبهٔ ۷ وجود ندارد چون تعداد رئوس فرد باید زوج باشد. در نتیجه یک رأس را درجهٔ ۴ و شش رأس را درجهٔ ۵ در نظر می‌گیریم.

$$۲q_{max} = ۶ \times ۵ + ۴ = ۳۴ \Rightarrow q_{max} = ۱۷$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{۷} |N_G[v_i]| = ۲q + p = ۲(۱۷) + ۷ = ۴۱$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۸۴- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا شریف‌خطیبی)

گراف ۲- منتظم مورد نظر از ۱، ۲ یا نهایتاً ۳ دور C_n تشکیل شده است. (چرا؟)

حالت (۱): این گراف نمی‌تواند $C_{۱۱}$ باشد زیرا در این صورت، عدد احاطه‌گری آن برابر $\left\lceil \frac{۱۱}{۱+۲} \right\rceil = ۴$ می‌شود که غیرقابل قبول است.

حالت (۲): حالت‌هایی که از ۲ دور C_n تشکیل شده، به صورت زیر است:

$$C_۳ \cup C_۸ \Rightarrow \gamma = \left\lceil \frac{۳}{۳} \right\rceil + \left\lceil \frac{۸}{۳} \right\rceil = ۴ \quad \times$$

$$C_۴ \cup C_۷ \Rightarrow \gamma = \left\lceil \frac{۴}{۳} \right\rceil + \left\lceil \frac{۷}{۳} \right\rceil = ۵ \quad \checkmark$$

$$C_۵ \cup C_۶ \Rightarrow \gamma = \left\lceil \frac{۵}{۳} \right\rceil + \left\lceil \frac{۶}{۳} \right\rceil = ۲ + ۲ = ۴ \quad \times$$

در این حالت، دورهایی به طول ۴ و ۷ می‌تواند داشته باشد.

حالت (۳): حالت‌هایی که از ۳ دور C_n تشکیل شده، به صورت زیر است:

$$C_۳ \cup C_۳ \cup C_۵ \Rightarrow \gamma = \left\lceil \frac{۳}{۳} \right\rceil + \left\lceil \frac{۳}{۳} \right\rceil + \left\lceil \frac{۵}{۳} \right\rceil = ۴ \quad \times$$

$$C_۳ \cup C_۴ \cup C_۴ \Rightarrow \gamma = \left\lceil \frac{۳}{۳} \right\rceil + \left\lceil \frac{۴}{۳} \right\rceil + \left\lceil \frac{۴}{۳} \right\rceil = ۵ \quad \checkmark$$

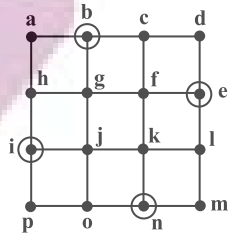
در این حالت، دورهایی به طول ۳ و ۴ می‌تواند داشته باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۵۳)

۸۵- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین ابومحبوب)

در گراف G، مرتبه برابر $n = ۱۶$ و $\Delta = ۴$ است، پس داریم:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۶}{۴+۱} \right\rceil = ۴$$



از طرفی مجموعهٔ $A=\{b, e, i, n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف G است، پس $\gamma(G)\le 4$. با توجه به دو نامساوی به دست آمده، $\gamma(G)=4$ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۸۶- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم، احاطه‌گر مینیمال است. پس مجموعه احاطه‌گر مینیمال با کمترین تعداد عضو، همان احاطه‌گر مینیمم به صورت زیر است:

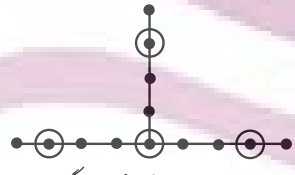
مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با بیشترین تعداد عضو به صورت زیر است:

پس مجموع مقادیر ممکن برای n برابر است با: $4+5+6=15$

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۴۷)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

فرض کنیم رأس v، از درجهٔ $\Delta=3$ باشد. از رأس v، سه شاخه (مطابق شکل) خارج می‌شود که با شرط $\gamma=4$، حداکثر تعداد رئوس G برابر $3\times 4+1=13$ خواهد شد.



(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۷ تا ۵۱)

۸۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

عدد احاطه‌گری گراف G، برابر $\gamma(G)=3$ است. گراف G، ۳- منتظم است و در نتیجه هر رأس گراف حداکثر قادر به احاطهٔ ۴ رأس می‌باشد. برای این‌که عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ شود، لازم است دو رأس در گراف وجود داشته باشد که هر کدام قادر به احاطهٔ ۵ رأس باشند (یا یکی از رأس‌ها ۶ رأس را احاطه کند و دیگری ۴ رأس) و همسایگی بسته دو رأس مورد نظر هیچ اشتراکی نداشته باشد. اما در گراف G هیچ دو رأسی وجود ندارد که اشتراک همسایگی بستهٔ آن‌ها تهی باشد، پس حتی با افزودن دو یال به این گراف نیز، عدد احاطه‌گری تغییر نمی‌کند و دست‌کم باید ۳ یال به گراف افزوده شود. به عنوان مثال با افزودن یال‌های ah، ad و ij، مجموعهٔ $\{a, i\}$ یک $\gamma-$ مجموعه خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

۸۹- **گزینهٔ «۲»** *(شبنم غلامی)*

گراف P_n به ازای هر مقدار n، دارای $(n-1)$ یال است. از طرفی برای هر گراف $k-$منتظم از مرتبهٔ n، رابطهٔ $2q=kn$ برقرار است، پس داریم:

$$k=4\Rightarrow 2q=4n\Rightarrow q=2n$$

گراف ۴- منتظم، ۷ یال بیشتر از گراف P_n دارد، بنابراین داریم:

$$2n-(n-1)=7\Rightarrow n=6$$

حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$q(K_6)-\gamma(C_6)=\frac{6\times 5}{2}-\left\lceil\frac{6}{3}\right\rceil=15-2=13$$

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۵۳)

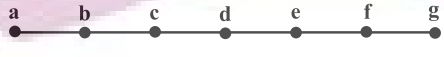
۹۰- **گزینهٔ «۴»** *(شبنم غلامی)*

طبق فرض در گراف K_n داریم:

$$\frac{n(n-1)}{2}+n=28\xrightarrow{\times 2}n^2-n+2n=56\Rightarrow n^2+n-56=0$$

$$\Rightarrow (n+8)(n-7)=0\Rightarrow\begin{cases}n=-8 & \text{غ ق ق}\\ n=7\end{cases}$$

حال گراف P_7 را رسم می‌کنیم:



عدد احاطه‌گری این گراف برابر $\left\lceil\frac{7}{3}\right\rceil=3$ است و مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم آن عبارتند از:

$$\{a, d, f\}, \{a, d, g\}, \{a, c, f\}, \{b, c, f\}$$

$$\{b, d, f\}, \{b, d, g\}, \{b, e, f\}, \{b, e, g\}$$

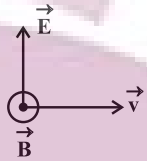
یعنی این گراف دارای هشت $\gamma-$ مجموعه است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

فیزیک ۳

۹۱- **گزینهٔ «۱»** *(مسعود خدرانی)*

در نقطهٔ A، میدان الکتریکی در جهت بالا ($\uparrow$) و $\vec{v}$ در جهت محور x ($\rightarrow$) است. با توجه به قاعدهٔ دست راست، بردار میدان مغناطیسی $\vec{B}$ مطابق شکل زیر به دست می‌آید:



(فیزیک ۳- صفحه‌های ۷۵ و ۷۶)

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدعلی موسوی)*

$$|\lambda_A - \lambda_B| = 6\times10^{-9}\,m$$

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \left|\frac{c}{f_A} - \frac{c}{f_B}\right| = 6\times10^{-9}$$

$$3\times10^{8}\left|\frac{1}{f_A} - \frac{1}{f_B}\right| = 6\times10^{-9} \Rightarrow \left|\frac{1}{f_A} - \frac{1}{f_B}\right| = 2\times10^{-17}$$

$$f_A = 4f_B \Rightarrow \frac{3}{4f_B} = 2\times10^{-17} \Rightarrow f_B = \frac{3}{8}\times10^{17}\,Hz$$

$$f_A = 4f_B = \frac{3}{2}\times10^{17}\,Hz = 1/5\times10^{17}\,Hz$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۷۴ و ۷۵)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(علی برزگر)*

چون تار (طناب) ثابت است، لذا μ ثابت بوده و تغییر نمی‌کند، پس می‌توان با استفاده از رابطهٔ $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ نوشت:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}\times\frac{\mu_1}{\mu_2}} \xrightarrow[v_1=80\frac{m}{s},\ v_2=96\frac{m}{s}]{\mu\ \text{ثابت}} \frac{96}{80} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}}$$

$$\frac{12}{10} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \Rightarrow \frac{144}{100} = \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow F_2 = \frac{144}{100}F_1$$

$\frac{\Delta F}{F_1}\times100 = 44\%$: درصد تغییرات نیروی کشش

F باید ٪۴۴ افزایش یابد.

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۷۳)

۹۴- **گزینهٔ «۲»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ حرکت ذرهٔ M به سمت بالا و در حال دور شدن از نقطهٔ تعادلش است. بنابراین M دارای حرکت کندشونده است.

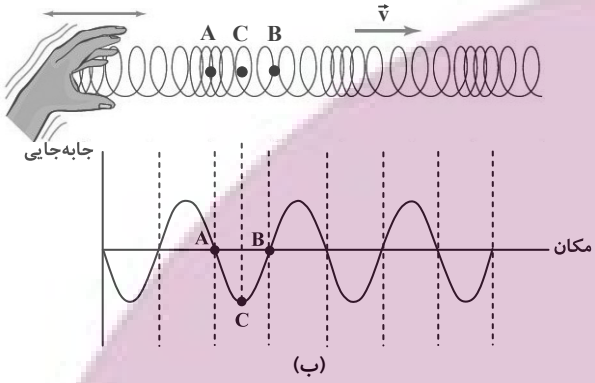
ب) درست؛ می‌دانیم بزرگی شتاب از رابطهٔ $|a| = \omega^2|x|$ به دست می‌آید و هر چه نوسانگر در فاصلهٔ دورتری از وضع تعادل قرار داشته باشد، آهنگ تغییر سرعت آن بیشتر است.

پ) نادرست؛ نقطهٔ P در حال گذر از وضعیت تعادل و حرکت آن رو به پایین است. در این لحظه P دارای بیشینهٔ تندی (v_{max}) است.

ت) درست؛ حرکت نقطهٔ Q به سمت بالا بوده و دارای سرعت مثبت و شتاب منفی است. چون شبیه نوسانگر است که در حال حرکت به سمت نقطهٔ بازگشت مثبت بوده و از حالت تعادل دور می‌شود پس این گزاره درست است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۷۲ و ۷۳)

۹۵- **گزینهٔ «۲»** *(حسین الهی)*



با توجه به نمودار جابه‌جایی- مکان رسم شده برای این موج طولی به بررسی عبارات گفته شده می‌پردازیم:

الف) درست؛ زیرا این نقطه در مرکز تعادل است.

ب) نادرست؛ زیرا این نقطه در مرکز تعادل و دارای کمترین شتاب (صفر) است.

ج) درست؛ زیرا با توجه به شکل نقطهٔ C دارای این ویژگی است.

د) نادرست؛ زیرا هر دو در مرکز تعادل و دارای تندی بیشینه هستند.

هـ) درست؛ زیرا هر دو در مرکز تعادل و دارای بیشترین تندی و در نتیجه بیشترین انرژی جنبشی هستند.

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۷۷)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

تندی امواج اولیهٔ P بیشتر از تندی امواج ثانویهٔ S است. به همین دلیل امواج P زودتر به محل لرزه‌نگار می‌رسند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_P - v_S = 3/6\frac{km}{s} \xrightarrow{v_P=7/8\frac{km}{s}} 7/8 - v_S = 3/6$$

$$\Rightarrow v_S = 4/2\frac{km}{s}$$

اگر فاصلهٔ محل زمین‌لرزه تا محل لرزه‌نگار را با Δx و اختلاف زمانی بین رسیدن این دو موج به محل لرزه‌نگار را با Δt نشان دهیم، داریم:

$$\Delta x = \frac{v_S v_P}{v_P - v_S}\Delta t \xrightarrow[v_S=4/2\frac{km}{s},\ v_P=7/8\frac{km}{s}]{\Delta x=1638\,km}$$

$$1638 = \frac{4/2\times7/8}{3/6}\Delta t \Rightarrow 1638 = 9/1\Delta t \Rightarrow \Delta t = 180\,s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

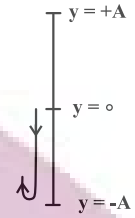
۹۷- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

ابتدا با توجه به شکل، طول موج و سپس دورهٔ تناوب موج را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3}{4}\lambda = 15\,cm \Rightarrow \lambda = 20\,cm = 2\times10^{-1}\,m$$

$$\lambda = vT \Rightarrow 2\times10^{-1} = 4T \Rightarrow T = 0/05\,s$$

لحظهٔ t_1 معادل با $\frac{3T}{2}$ $(\frac{t_1}{T}=\frac{0/075}{0/05}=\frac{3}{2})$ و لحظهٔ t_2 معادل با $\frac{9}{5}T$ $(\frac{t_2}{T}=\frac{0/09}{0/05}=\frac{9}{5})$ است. با توجه به جهت انتشار موج، ذرهٔ M در لحظهٔ $t=0$ در حال حرکت به طرف بالا است، پس مسیر حرکت ذره را در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 می‌توان به صورت شکل زیر مشخص کرد:



بنابراین نوع حرکت ذرهٔ M در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، ابتدا به صورت کندشونده و سپس تندشونده است.

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۷۳)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(محمد مقدم)*

با استفاده از قاعدهٔ دست راست، در زمان اولیه اگر انگشت شست در جهت محور y و انگشتان را در جهت محور x قرار دهیم، کف دست جهت میدان مغناطیسی را در خلاف جهت محور z نشان می‌دهد و چون میدان الکتریکی و مغناطیسی با هم هم‌فازند، $B_1=\frac{\sqrt{3}}{2}B_{max}$ در حال کاهش است که اگر $\frac{T}{4}$ زمان بگذرد، $B_2=\frac{B_{max}}{2}$ و در جهت z و در حال افزایش خواهد بود.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۷۴ و ۷۵)

۹۹- **گزینهٔ «۳»** *(مهران اسماعیلی)*

برای محاسبهٔ سرعت متوسط نقطه‌ای معین لازم است ابتدا بسامد موج را به دست آوریم که برای این منظور، ابتدا باید سرعت انتشار موج را محاسبه کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}\xrightarrow{\mu=\frac{m}{L}}v=\sqrt{\frac{FL}{m}}\xrightarrow{m=\rho V=\rho AL}$$

$$v=\sqrt{\frac{FL}{\rho AL}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\xrightarrow[\rho=4\frac{g}{cm^3}=4000\frac{kg}{m^3}]{F=80N\ ,\ A=0/5mm^2=0/5\times10^{-6}m^2}$$

$$v=\sqrt{\frac{80}{4000\times0/5\times10^{-6}}}\Rightarrow v=200\frac{m}{s}$$

با توجه به شکل و این‌که هر برآمدگی یا فرورفتگی معادل $\frac{\lambda}{2}$ است، می‌توان طول موج را به دست آورد:

$$3\frac{\lambda}{2}=3\Rightarrow\lambda=2m$$

حال می‌توان بسامد موج را محاسبه کرد:

$$f=\frac{v}{\lambda}\xrightarrow[\lambda=2m]{v=200\frac{m}{s}}f=\frac{200}{2}=100Hz$$

$$\omega=2\pi f\xrightarrow{f=100Hz}\omega=200\pi\frac{rad}{s}$$

$$y=A\cos\omega t\xrightarrow[t_1=\frac{1}{600}s\ ,\ t_2=\frac{1}{200}s]{A=4cm\ ,\ \omega=200\pi\frac{rad}{s}}$$

$$\begin{cases}y_1=4\cos200\pi\times\frac{1}{600}=2cm\\ y_2=4\cos200\pi\times\frac{1}{200}=-4cm\end{cases}$$

$$v_{av}=\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}\xrightarrow[t_1=\frac{1}{600}\ ,\ t_2=\frac{1}{200}s]{y_1=2cm\ ,\ y_2=-4cm}$$

$$v_{av}=\frac{-4-2}{\frac{1}{200}-\frac{1}{600}}=-1800\frac{cm}{s}\Rightarrow|v_{av}|=18\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

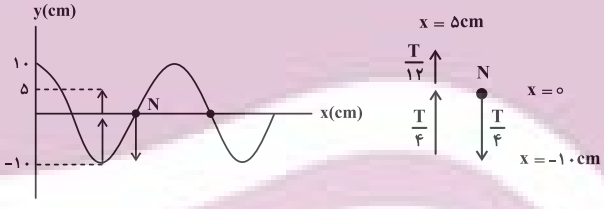
با توجه به نقش موج، $\frac{5\lambda}{4}=50cm$. پس $\lambda=40cm$ است و با استفاده از رابطهٔ $a=-\omega^2x$ مکانی که در آن شتاب نوسانگر $a=-12/5\frac{m}{s^2}$ است را پیدا می‌کنیم:

$$v=\lambda f\Rightarrow f=\frac{v}{\lambda}=\frac{1}{0/4}=2/5Hz$$

$$\begin{cases}a=-\omega^2x\\ \omega=2\pi f=5\pi(\frac{rad}{s})\end{cases}\Rightarrow-12/5=-x\times25\times\pi^2$$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{100}m=5cm=\frac{A}{2}\quad\text{(طبق نمودار)}$$

از جهت انتشار موج متوجه می‌شویم که نقطهٔ N رو به پایین حرکت می‌کند:



$$\Delta t=\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{12}=\frac{7T}{12}\xrightarrow{T=0/4s}$$

$$\Delta t=\frac{7\times0/4}{12}=\frac{7}{30}s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۷۲ و ۷۳)

فیزیک ۳- پیشروی سریع

۱۰۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشاری)*

عبارات (پ) و (ت) صحیح‌اند.

بررسی عبارات نادرست:

الف) ارتفاع و بلندی صوت به ترتیب به درک انسان از بسامد و شدت صوت گفته می‌شود.

ب) اگر یک دیاپازون با بسامد مشخص را با ضربه‌هایی متفاوت به ارتعاش واداریم، صداهایی با بلندی متفاوت حس می‌کنیم.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** (حسام نادری)

با استفاده از رابطهٔ $t = \frac{\ell}{v}$، اختلاف زمانی رسیدن دو صدا را می‌نویسیم:

(ℓ : طول میله)

$$\Delta t = \frac{\ell}{v_{هوا}} - \frac{\ell}{v_{میله}} = \ell(\frac{1}{v_{هوا}} - \frac{1}{v_{میله}}) = \ell \times \frac{v_{میله} - v_{هوا}}{v_{هوا} \times v_{میله}}$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{v_{هوا} \times v_{میله}}{v_{میله} - v_{هوا}} \times \Delta t \xrightarrow[\Delta t = ۰/۰۸s]{v_{هوا} = ۳۴۰\frac{m}{s},\ v_{میله} = ۵v_{هوا} = ۵\times ۳۴۰\frac{m}{s}}$$

$$\ell = \frac{۵\times ۳۴۰\times ۳۴۰}{۴\times ۳۴۰} \times ۰/۰۸ = ۳۴\,m$$

(فیزیک ۳- مشابه تمرین ۳-۶ صفحهٔ ۸۰)

۱۰۳- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی کیانی)

با استفاده از رابطهٔ تغییر تراز شدت صوت، به صورت زیر نسبت $\frac{I_۲}{I_۱}$ را می‌یابیم:

$$\Delta\beta = \beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱} \xrightarrow[\beta_۲ = ۷۰dB]{\beta_۱ = ۳۰dB}$$

$$۷۰ - ۳۰ = ۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱} \Rightarrow ۴۰ = ۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\Rightarrow \log\frac{I_۲}{I_۱} = ۴ = \log ۱۰^۴ \Rightarrow \frac{I_۲}{I_۱} = ۱۰^۴$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱۰۴- **گزینهٔ «۴»** (علیرضا جباری)

ابتدا شدت صوتی را که به گوش شنونده می‌رسد، به دست می‌آوریم. از آنجا که جبهه‌های موج به صورت کروی فرض می‌شوند، داریم:

$$I = \frac{E}{At} \xrightarrow{A = ۴\pi r^۲} I = \frac{E}{۴\pi r^۲ t}$$

$$\xrightarrow[\pi = ۳,\ r = \frac{۵\sqrt{۳}}{۳}m,\ t = ۶۰s]{E = ۶mJ = ۶\times ۱۰^{-۳}J} I = \frac{۶\times ۱۰^{-۳}}{۴\times ۳\times \frac{۲۵\times ۳}{۹} \times ۶۰}$$

$$\Rightarrow I = \frac{۶\times ۱۰^{-۳}}{۶\times ۱۰^۳} = ۱۰^{-۶}\,\frac{W}{m^۲}$$

اکنون تراز شدت صوت را محاسبه می‌کنیم:

$$\beta = ۱۰\log\frac{I}{I_۰} = ۱۰\log\frac{۱۰^{-۶}}{۱۰^{-۱۲}} = ۱۰\log ۱۰^۶ = ۶۰dB$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱)

۱۰۵- **گزینهٔ «۲»** (مهدی شریفی)

ابتدا نسبت فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوت در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی ۴s دوم ($t_۱ = ۴s$ تا $t_۲ = ۸s$) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{r_۲}{r_۱} = \frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

سپس اختلاف تراز شدت صوت را در دو حالت محاسبه می‌کنیم:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱} \xrightarrow{\frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^۲}$$

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰\log(\frac{r_۱}{r_۲})^۲ = ۱۰\log(\frac{۱}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \beta_۲ - \beta_۱ = ۲۰\log\frac{۱}{۲} = ۲۰\times[\log ۱ - \log ۲]$$

$$= ۲۰\times[۰ - ۰/۳] = -۶dB$$

که علامت منفی به معنای کاهش تراز شدت صوت است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱۰۶- **گزینهٔ «۴»** (محمد مقرم)

چون آستانهٔ شنوایی این شخص ۳۰dB است، صوت ۴۲dB را با شنوایی ۱۲dB ($۴۲ - ۳۰ = ۱۲dB$) می‌شنود و داریم:

$$\beta = ۱۰\log\frac{I}{I_۰} \Rightarrow ۱۲ = ۱۰\log\frac{I}{I_۰} \Rightarrow \log\frac{I}{I_۰} = ۱/۲$$

$$\Rightarrow \frac{I}{I_۰} = ۱۰^{۱/۲} = (۱۰^{۰/۳})^۴ = ۲^۴ = ۱۶$$

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۸۸)

۱۰۷- **گزینهٔ «۲»** (سیرمحمدعلی موسوی)

$$\beta = \log\frac{I}{I_۰} \Rightarrow ۸ = \log\frac{I}{۱۰^{-۱۲}} \Rightarrow ۱۰^۸ = \frac{I}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\Rightarrow I = ۱۰^{-۴}\,\frac{W}{m^۲}$$

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow ۱۰^{-۴} = \frac{P}{۴\pi\times ۲۰^۲} \Rightarrow P = ۴۸۰۰\times ۱۰^{-۴}W = ۴۸۰mW$$

بنابراین از ۶۰۰mW توان منبع به اندازهٔ ۱۲۰mW جذب محیط شده است. بنابراین داریم:

$$\frac{۱۲۰}{۶۰۰}\times ۱۰۰ = ٪۲۰ \text{ درصد اتلاف توان}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۱۰۸- **گزینهٔ «۴»** (مهران اسماعیلی)

همان‌طور که می‌دانیم وقتی یک منبع صوت با تندی ثابت از یک شنونده دور شود، بسامد دریافتی توسط شونده، کمتر از بسامد واقعی منبع صوت است. اما مقداری ثابت است و درضمن دور شدن منبع از شنونده همچنان ثابت می‌ماند. اما شدت صوت با مجذور فاصلهٔ شنونده از منبع صوت رابطهٔ معکوس دارد. پس با دور شدن منبع صوت از شنونده به تدریج فاصله زیاد شده در نتیجه شدت صوت دریافتی توسط شنونده به تدریج کاهش می‌یابد.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۸۱ تا ۸۳)

۱۰۹- **گزینهٔ «۲»** (مسعود فندانی)

چون $f_A > f$ است، پس A در حال نزدیک شدن به چشمهٔ صوت و چون $f > f_B$ است، شخص B در حال دور شدن از چشمهٔ صوت است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۸۱ تا ۸۳)

۱۱۰- **گزینهٔ «۳»** (حسین الهی)

با توجه به شکل متوجه خواهیم شد که $v_{صوت} > v_{چشمه}$ می‌باشد. پس مسافتی که چشمه در ۶ ثانیه طی خواهد کرد باید از $\Delta x = v_{صوت}\Delta t \Rightarrow ۶\times ۳۲۰ = ۱۹۲۰$ بیشتر باشد، که تنها گزینهٔ «۳» می‌تواند صحیح باشد.

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۸۲)

فیزیک ۲

۱۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهران اسماعیلی)*

$$U_2 = U_1 - 0/36U_1 = 0/64U_1$$

$$U = \frac{q^2}{2C} \xrightarrow{U_2=0/64U_1} \frac{q_2^2}{2C} = 0/64\frac{q_1^2}{2C} \Rightarrow q_2 = 0/8q_1$$

$$\text{درصد تغییرات بار الکتریکی} = \frac{\Delta q}{q_1}\times 100 = \frac{q_2 - q_1}{q_1}\times 100$$

$$= \frac{0/8q_1 - q_1}{q_1}\times 100 = -20\%$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۹)

۱۱۲- **گزینهٔ «۴»** *(علی برزگر)*

ابتدا بار دو کره بعد از تعادل الکترواستاتیکی را به‌دست می‌آوریم:

$$q_1' = q_2' = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{-40 + 72}{2} = \frac{+32}{2} = +16nC$$

از طرفی می‌دانیم جریان الکتریکی در سیم به دلیل شارش بار الکتریکی به‌وجود می‌آید.

لذا بار شارش شده را از اختلاف بار یکی از کره‌ها قبل و بعد از تعادل الکتریکی به‌دست می‌آوریم:

$$q_{\text{شارش شده}} = q_1 - q_1' = 72 - 16 = 56nC$$

از تعریف جریان الکتریکی متوسط داریم:

$$I = \frac{q_{\text{شارش شده}}}{\Delta t} = \frac{56\times 10^{-9}}{8\times 10^{-6}} = 7\times 10^{-3}A = 7mA$$

جهت جریان الکتریکی خلاف جهت حرکت الکترون‌ها است یعنی از کرهٔ مثبت **(B)** به طرف کرهٔ منفی **(A)**.

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۴ و ۴۷)

۱۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(مهران اسماعیلی)*

با توجه به اینکه آمپر ساعت **(Ah)** و میلی‌آمپر ساعت **(mAh)** واحد بار الکتریکی هستند، داریم:

$$\Delta q = I\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta q_1}{\Delta q_2} = \frac{I_1}{I_2}\times\frac{t_1}{t_2} \xrightarrow[\Delta q_2=200mAh=2Ah, t_2=40t_1]{\Delta q_1=50Ah, I_1=0/5A}$$

$$\frac{50}{2} = \frac{0/5}{I_2}\times\frac{t_1}{40t_1} \Rightarrow 50 = \frac{1}{40I_2} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2000}A$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2000}\times 10^6 \mu A = 500\mu A$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۶ و ۴۷)

۱۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(مسعود خندانی)*

چون نور لامپ با وجود تغییر نور محیط که موجب تغییر مقاومت LDR می‌شود، تغییری نداشته است، پس حتماً لامپ خاموش بوده است که با توجه به جهت جریان که از قطب مثبت مولد خارج می‌شود، حتماً به جای **M** دیودی در خلاف جهت جریان مدار قرار دارد.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۶۱)

۱۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(علی برزگر)*

با استفاده از رابطهٔ ظرفیت خازن براساس مشخصات ساختمانی خازن داریم:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{d_1}{d_2}$$

از طرفی می‌دانیم اگر ابعاد جسمی $\frac{1}{3}$ برابر شود، مساحت مقطع صفحات آن $\frac{1}{9}$ برابر می‌شود، لذا داریم:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{9}\times\frac{\frac{9}{1}}{\frac{1}{3}}\times\frac{1}{1} = \frac{1}{27}$$

در حالت دوم، ظرفیت خازن فقط با تغییر دی الکتریک بین صفحات تغییر کرده است:

$$\frac{C_3}{C_2} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2} = \frac{6}{1}$$

در حالت دوم که خازن از باتری جدا شده است، بار ذخیره شده ثابت است و با استفاده از رابطهٔ $Q = CV$ داریم:

$$Q_2 = Q_3 \Rightarrow C_2V_2 = C_3V_3 \Rightarrow \frac{C_3}{C_2} = \frac{V_2}{V_3} = 6$$

$$\Rightarrow V_2 = 6V_3$$

و چون در قسمت اول سؤال خازن به باتری وصل بود، اختلاف پتانسیل صفحات آن ثابت بود:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow V_1 = V_2 = 6V_3 \Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{6}$$

حال با استفاده از رابطهٔ $V = Ed$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} V_3 = E_3d_3 \\ V_1 = E_1d_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \frac{E_3}{E_1}\times\frac{d_3}{d_1} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{E_3}{E_1}\times\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{E_3}{E_1} = \frac{1}{2}$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۱۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

ابتدا رابطهٔ مقاومت الکتریکی سیم **(R)** برحسب مقاومت ویژه **(ρ)** و جرم **(m)** و چگالی **(ρ′)** و مساحت مقطع **(A)** را می‌نویسیم:

$$R = \rho\frac{L}{A} \xrightarrow{V=AL} R = \rho\frac{V}{A^2} \xrightarrow{V=\frac{m}{\rho'}} R = \frac{\rho m}{\rho' A^2}$$

اکنون می‌توانیم نسبت مقاومت الکتریکی سیم B به سیم A را به‌دست آوریم:

$$\frac{R_B}{R_A}=\frac{\rho_B}{\rho_A}\times\frac{m_B}{m_A}\times\frac{\rho'_A}{\rho'_B}\times(\frac{A_A}{A_B})^۲ \xrightarrow[\rho'_B=۲\rho'_A,\,A=\pi\frac{d^۲}{۴}]{m_B=۳m_A,\,\rho_B=\frac{۱}{۲}\rho_A}$$

$$\frac{R_B}{R_A}=\frac{\frac{۱}{۲}\rho_A}{\rho_A}\times\frac{۳m_A}{m_A}\times\frac{\rho'_A}{۲\rho'_A}\times(\frac{d_A}{d_B})^۴ \xrightarrow{d_B=۳d_A}$$

$$\frac{R_B}{R_A}=\frac{۱}{۲}\times۳\times\frac{۱}{۲}\times(\frac{d_A}{۳d_A})^۴=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۸۱}=\frac{۱}{۱۰۸}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۱۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(مسعود فندانی)*

با توجه به اینکه بارالکتریکی تا قبل از تخلیهٔ هوا تغییر مسیر نداده است، پس:

$$Eq=mg$$

چون خازن به باتری متصل است، پس اختلاف پتانسیل دو سر آن ثابت و برابر اختلاف پتانسیل باتری است. طبق رابطهٔ $E=\frac{V}{d}$، با ثابت ماندن V و d، میدان الکتریکی بین صفحات خازن ثابت می‌ماند. پس ذره در همان مسیر (بدون انحراف) به حرکت خود ادامه می‌دهد.

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

۱۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

با توجه به رابطهٔ مقایسه‌ای مقاومت داریم:

$$\frac{R_{\text{توخالی}}}{R_{\text{توپر}}}=\frac{\rho_{\text{توخالی}}}{\rho_{\text{توپر}}}\times\frac{L_{\text{توخالی}}}{L_{\text{توپر}}}\times\frac{A_{\text{توپر}}}{A_{\text{توخالی}}}=\frac{۹}{۴}$$

با توجه به هم جنس بودن سیم‌ها $\leftarrow$ $\rho_{\text{توخالی}}=\rho_{\text{توپر}}$

با توجه به هم جرم بودن سیم‌ها $\leftarrow$

$$m_{\text{توپر}}=m_{\text{توخالی}} \Rightarrow \rho V_{\text{توپر}}=\rho V_{\text{توخالی}}$$

$$\Rightarrow A_{\text{توپر}}L_{\text{توپر}}=A_{\text{توخالی}}L_{\text{توخالی}}$$

$$\Rightarrow \frac{A_{\text{توپر}}}{A_{\text{توخالی}}}=\frac{L_{\text{توخالی}}}{L_{\text{توپر}}} \Rightarrow \frac{R_{\text{توخالی}}}{R_{\text{توپر}}}=(\frac{A_{\text{توپر}}}{A_{\text{توخالی}}})^۲=\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{A_{\text{توپر}}}{A_{\text{توخالی}}}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{\pi R^۲}{\pi(R^۲-r^۲)}=\frac{۳}{۲}$$

$$۳R^۲-۳r^۲=۲R^۲ \Rightarrow R^۲=۳r^۲ \Rightarrow \frac{R}{r}=\sqrt{۳}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۱۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به شکل، ملاحظه می‌شود که به ازای اختلاف پتانسیل یکسان، انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در خازن (۱) از خازن (۲) بیشتر است، پس طبق رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}CV^۲$، می‌توان گفت که ظرفیت خازن $C_۱$ از ظرفیت خازن $C_۲$ بیشتر است. $(C_۱>C_۲)$ بنابراین داریم:

$$\frac{U_۲}{U_۱}=\frac{C_۲}{C_۱}\times(\frac{V_۲}{V_۱})^۲ \xrightarrow[V_۱=V,\,V_۲=V+۳۰,\,\frac{C_۱}{C_۲}=۴]{U_۱=U_۲=۲۴۰\mu J}$$

$$۱=\frac{۱}{۴}\times(\frac{V+۳۰}{V})^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} ۲=\frac{V+۳۰}{V} \rightarrow V=۳۰V$$

برای خازن $C_۲$ می‌توان نوشت:

$$U_۲=\frac{۱}{۲}C_۲V_۲^۲ \xrightarrow[V_۲=V+۳۰=۶۰V]{U_۲=۲۴۰\mu J} ۲۴۰=\frac{۱}{۲}C_۲(۶۰)(۶۰)$$

$$\Rightarrow C_۲=\frac{۲}{۱۵}\mu F$$

$$Q_۲=C_۲V'_۲ \xrightarrow[V'_۲=۲۵V]{C_۲=\frac{۲}{۱۵}\mu F} Q_۲=(\frac{۲}{۱۵})(۲۵)=\frac{۱۰}{۳}\mu C$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴)

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمدکاظم منشادی)*

با توجه به رابطهٔ انرژی خازن داریم:

$$U=\frac{Q^۲}{۲C}$$

$$\Delta U=U_۲-U_۱=\frac{Q_۲^۲}{۲C}-\frac{Q_۱^۲}{۲C}=\frac{Q_۲^۲-Q_۱^۲}{۲C}=\frac{(Q+۴)^۲-Q^۲}{۲C}$$

$$\xrightarrow[C=۲\times۱۰^{-۳}mF]{\Delta U=۱۰^۴mJ} ۱۰^۴=\frac{۸Q+۱۶}{۲\times۱۰^{-۳}} \Rightarrow Q=۲۳mC$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحهٔ ۳۹)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۱

۱۲۱- **گزینهٔ «۲»** *(حسام نادری)*

موارد (الف) و (پ) صحیح‌اند.

بررسی موارد نادرست:

ب) پدیدهٔ پخش در گازها سریع‌تر از مایعات رخ می‌دهد.

ت) علت بالا رفتن آب در لوله‌های مویین شیشه‌ای تمیز این است که نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و شیشه بیشتر از نیروی هم‌چسبی مولکول‌های آب است.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۳۲)

۱۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(حسین الهی)*

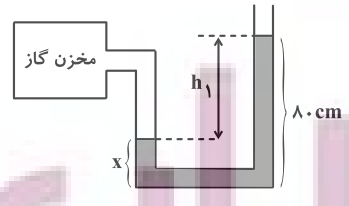
$$\frac{F_A}{F_B}=\frac{P_A\times A_A}{P_B\times A_B}\xrightarrow[P_A=P_B]{\text{ارتفاع برابر یعنی}}\frac{F_A}{F_B}=\frac{A_A}{A_B}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۵)

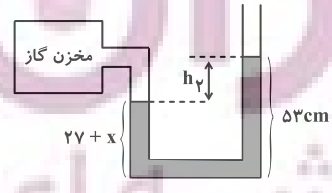
۱۲۳- **گزینهٔ «۴»** *(مهران اسماعیلی)*

$۸۰-۵۳=۲۷\,cm$ = کاهش ارتفاع مایع در سمت راست

وقتی فشار گاز درون مخزن کاهش می‌یابد، ارتفاع مایع در سمت راست لولهٔ U شکل، $۲۷cm$ کاهش و در سمت چپ $۲۷\,cm$ افزایش می‌یابد. یعنی اختلاف ارتفاع در دو حالت $۵۴\,cm$ می‌شود. با توجه به شکل‌های زیر می‌توان این موضوع را دقیق‌تر توضیح داد.



$$h_۱=۸۰-x$$



$$h_۲=۵۳-(۲۷+x)=۲۶-x$$

$$\Delta h=h_۱-h_۲=۸۰-x-(۲۶-x)=۵۴\,cm$$

حال می‌توان کاهش فشار در مخزن گاز را محاسبه کرد.

$$\Delta P=\rho g\Delta h\xrightarrow[\Delta h=۰/۵۴\,m\ ,\ g=۱۰\frac{N}{kg}]{\rho=۲\frac{g}{cm^۳}=۲۰۰۰\frac{kg}{m^۳}}$$

$$\Delta P=۲۰۰۰\times۱۰\times۰/۵۴=۱۰۸۰۰\,Pa$$

برای تبدیل واحد فشار از پاسکال به سانتی‌متر جیوه کافی است ارتفاع ستون جیوه را به ازای فشار $۱۰۸۰۰\,Pa$ محاسبه کنیم:

$$P=\rho gh\xrightarrow[\rho=۱۳۵۰۰\frac{kg}{m^۳}\ ,\ g=۱۰\frac{N}{kg}]{P=۱۰۸۰۰\,Pa}$$

$$۱۰۸۰۰=۱۳۵۰۰\times۱۰\times h\Rightarrow h=۰/۰۸\,mHg=۸\,cmHg$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۱۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیرامحمد میرسعید)*

در گام اول باید محاسبه کنیم که وقتی سطح آزاد مایع ۸۰ سانتی‌متر بالا می‌رود، پیستون و سطح پایین چند سانتی‌متر بالا آمده است. پس می‌توان نوشت:

$$\Delta V_{\text{سطح بالا}}=\Delta V_{\text{سطح پایین}}\Rightarrow A\times۸۰=۴A\times h'$$

$$\Rightarrow h'=۲۰\,cm$$

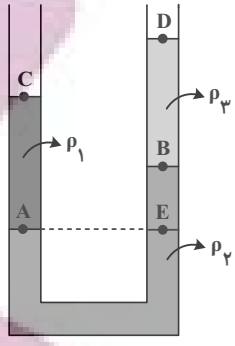
چون سطح بالایی $۸۰\,cm$ بالا رفته و سطح پایینی نیز $۲۰\,cm$ بالا رفته پس ارتفاع مایع در مجموع $۶۰\,cm$ افزایش پیدا کرده است و در گام بعدی، فشار $۶۰\,cm$ از مایع را به سانتی‌مترجیوه تبدیل می‌کنیم:

$$\rho_{\text{جیوه}}h_{\text{جیوه}}=\rho_{\text{مایع}}\times h_{\text{مایع}}\Rightarrow h_{\text{جیوه}}=\frac{۳/۴\times۶۰}{۱۳/۶}=۱۵\,cmHg$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۴۰)

۱۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(سراسری ریاضی- تیر ۱۴۰۲)*

فشار در نقاط هم‌تراز داخل یک مایع ساکن برابر است. پس در نقاط A و E فشار یکسان است:



$$P_A = P_E \qquad (1)$$

از طرفی فشار در نقطهٔ E که عمق بیشتری نسبت به نقطهٔ B دارد، بیشتر است. پس داریم:

$$P_E > P_B \xrightarrow{(1)} P_A > P_B \qquad (2)$$

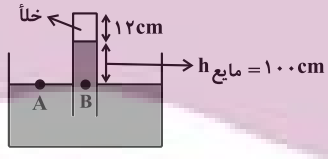
در نقاط C و D فشار برابر فشار هواست. $P_C = P_D = P_\circ$ (۳)

شرط‌های (۱)، (۲) و (۳) در گزینهٔ (۱) برقرار است.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۵)

۱۲۶- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی نکوئیان)*

فشار در نقاط همتراز درون یک مایع ساکن با هم برابر است. بنابراین:



$$P_A = P_B \Rightarrow P_\circ = P_{\text{مایع}} = ۷۵\,\text{cmHg}$$

پس ارتفاع ستون مایع را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}} \Rightarrow (۱۳/۶)(۷۵) = (۱۰/۲) h_{\text{مایع}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{مایع}} = ۱۰۰\,\text{cm}$$

با پایین آوردن لوله در راستای قائم، مایع بخش خلأ لوله را پر کرده و به انتهای بستهٔ لوله نیرو وارد می‌کند. بنابراین داریم:

$$F_{\text{انتهای لوله}} = P_{\text{انتهای لوله}} \times A_{\text{انتهای لوله}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{انتهای لوله}} = \frac{۴/۰۸}{۵\times۱۰^{-۴}} = ۸۱۶۰\,\text{Pa}$$

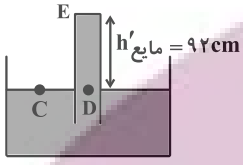
طبق رابطهٔ $P = \rho g h$، فشار وارد بر انتهای لوله را برحسب سانتی‌متر جیوه به دست می‌آوریم:

$$P = \rho g h \xrightarrow[\rho = ۱۳۶۰۰ \frac{kg}{cm^۳},\ g = ۱۰ \frac{N}{kg}]{P = ۸۱۶۰\,Pa} ۸۱۶۰ = (۱۳۶۰۰)(۱۰)h$$

$$\Rightarrow h = ۰/۰۶\,m = ۶\,cm$$

بنابراین فشار وارد بر انتهای لوله در این حالت، برابر با $۶\,\text{cmHg}$ می‌شود.

فشار در نقاط همتراز C و D با هم برابر است. پس:



$$P_C = P_D \Rightarrow P_\circ = P'_{\text{مایع}} + P_E$$

$$\Rightarrow ۷۵ = P'_{\text{مایع}} + ۶ \Rightarrow P'_{\text{مایع}} = ۶۹\,\text{cmHg}$$

ارتفاع ستون مایع را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\rho_{\text{جیوه}} h'_{\text{جیوه}} = \rho_{\text{مایع}} h'_{\text{مایع}} \Rightarrow (۱۳/۶)(۶۹) = (۱۰/۲) h'_{\text{مایع}}$$

$$\Rightarrow h'_{\text{مایع}} = ۹۲\,\text{cm}$$

بنابراین میزان جابه‌جایی لوله در راستای قائم (x) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = (۱۰۰ + ۱۲) - ۹۲ = ۲۰\,\text{cm}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

۱۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمد مقدم)*

چون ظرف به شکل استوانه است، با استفاده از رابطهٔ فشار، سطح مقطع ظرف را به دست می‌آوریم.

$$P = \frac{mg}{A} \Rightarrow ۶۰۰۰ = \frac{۰/۳\times۱۰}{A} \Rightarrow A = \frac{۱}{۲۰۰۰}\,m^۲ = ۵\,cm^۲$$

حال با استفاده از جرم آب، چگالی و سطح مقطع ظرف ارتفاع آب را به دست می‌آوریم.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Ah} \Rightarrow ۱ = \frac{۱۰۰}{۵h} \Rightarrow h = ۲۰\,\text{cm}$$ ارتفاع آب

$$h_{\text{مایع}} = ۷۰ - ۲۰ = ۵۰\,\text{cm}$$ حال ارتفاع مایع برابر می‌شود با:

و برای تعیین چگالی مایع داریم:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Ah} \Rightarrow \rho = \frac{۳۰۰}{۵\times۵۰} = \frac{۶}{۵}\frac{g}{cm^۳} = ۱۲۰۰\frac{kg}{m^۳}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۳ تا ۳۵)

۱۲۸- **گزینهٔ «۴»** (محمدکاظم منشاری)

$$A_1v_1 = A_2v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2} \qquad (1)$$

$$r_2 = 2/5r_1 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = (\frac{r_2}{r_1})^2 = 6/25 = \frac{25}{4}$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} \Rightarrow v_2 = \frac{16}{100}v_1$$

$$\frac{\Delta v}{v_1}\times 100 = \frac{v_2 - v_1}{v_1}\times 100 = \frac{-\frac{84}{100}v_1}{v_1}\times 100 = -84\%$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** (محمدکاظم منشاری)

برای یافتن ارتفاعی از جیوه که معادل ارتفاع h_x از مایع x فشار وارد می‌کند، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده نمود:

$$\rho_x h_x = 13/6h \Rightarrow h = \frac{h_x\rho_x}{13/6}$$

$$A: \rho_A h_A = 13/6h \Rightarrow h = \frac{\rho_A h_A}{13/6} = \frac{5/1}{13/6}h_A = \frac{3}{8}h_A$$

$$B: \rho_B h_B = 13/6h' \Rightarrow h' = \frac{\rho_B h_B}{13/6} = \frac{6/8}{13/6}h_B = \frac{1}{2}h_B$$

$$C: \rho_C h_C = 13/6h'' \Rightarrow h'' = \frac{\rho_C h_C}{13/6} = \frac{11/9}{13/6}h_C = \frac{7}{8}h_C$$

$$P_{کل} = P_0 + P_A + P_B + P_C \Rightarrow 100 = 75 + h + h' + h''$$

$$\Rightarrow h + h' + h'' = \frac{3}{8}h_A + \frac{1}{2}h_B + \frac{7}{8}h_C = 25\,cm$$

$$h_A + h_B + h_C = 55\,cm$$

$$h_C = \frac{1}{7}h_A \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{7}h_A + h_B = 55\,cm & (1) \\ \frac{h_A}{2} + \frac{h_B}{2} = 25\,cm \Rightarrow h_A + h_B = 50\,cm & (2) \end{cases}$$

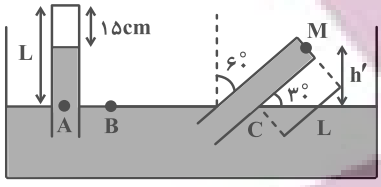
با حل معادلات بالا داریم:

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{1}{7}h_A = 5\,cm \Rightarrow h_A = 35\,cm \Rightarrow h_B = 15\,cm$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۱۳۰- **گزینهٔ «۱»** (علی برزگر)

ابتدا فشار گاز را برحسب پاسکال به دست می‌آوریم:



$$P_{g\,(پیمانه‌ای)} = P_{گاز} - P_0 \Rightarrow P_{گاز} = P_g + P_0$$

$$= -87/75 + 101/25 = 13/5\,kPa$$

سپس فشار گاز را به سانتی‌متر جیوه تبدیل می‌کنیم:

$$P_{گاز} = P_{جیوه} = \rho gh \xrightarrow[\rho = 13500\frac{kg}{m^3}]{P = 13500\,Pa}$$

$$13500 = 13500\times 10\times h \Rightarrow h = \frac{1}{10}m = 10\,cm$$

از طرفی اگر فشار هوا را برحسب سانتی‌متر جیوه به دست آوریم، می‌توان ارتفاع مایع را به دست آورد:

$$P_0 = \rho gh_{جیوه} \Rightarrow 101250 = 13500\times 10\times h$$

$$\Rightarrow h = 0/75\,m = 75\,cm$$

فشار در نقاط هم تراز از یک مایع برابر است:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 = P_{گاز} + P_{جیوه}$$

$$\Rightarrow 75 = 10 + P_{جیوه} \Rightarrow P_{جیوه} = h_{جیوه} = 65\,cm$$

$$\Rightarrow L_{لوله} = h_{جیوه} + 15 = 65 + 15 = 80\,cm$$

پس از انحراف لوله، باید ارتفاع انتهای لوله از سطح مایع را به دست آورد:

$$h' = L\sin 30^\circ = 80\times\frac{1}{2} = 40\,cm$$

$$\xrightarrow{P_B = P_C = P_0} P_C = P_M + \rho gh' = P_0$$

$$\Rightarrow P_M + 40 = 75 \Rightarrow P_M = 35\,cmHg \quad \text{برحسب cmHg}$$

$$\Rightarrow P_M = \rho gh'_{جیوه} = 13500\times 10\times\frac{35}{100} = 47250\,Pa$$

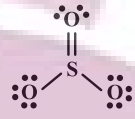
$$\Rightarrow F_{انتهای\,لوله} = P\times A = 47250\times 3\times 10^{-4} = 14/175\,N$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

شیمی ۳

۱۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیرعلی بیات)*

در ردیف ۲، رنگ اتم مرکزی اشتباه ذکر شده، خاصیت نافلزی اکسیژن از نیتروژن بیشتر است و به همین دلیل نیتروژن به رنگ آبی درمی‌آید. در ردیف ۴ ساختار لوویس SO_3 به صورت زیر است:



$$\frac{p.e}{n.e}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷)

۱۳۲- **گزینهٔ «۱»** *(حمید ذبحی)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ سرخ بودن خاک رس به دلیل وجود آهن (III) اکسید در آن است.

ب) نادرست؛ درصد جرمی آب کاهش می‌یابد.

پ) نادرست؛ وجود SiO_2 در سازه‌های سنگی باعث استحکام آن‌ها شده است که اکسید شبه‌فلزی است.

ت) درست

$$\frac{x}{۱۰۰}=\frac{\text{آب }۲۲۵g}{\text{نمونه }۱۱۲۵g}\xrightarrow{\text{جذب رطوبت}}\frac{\text{آب }۱۰۰g}{\text{نمونه }۱۰۰۰g}=\frac{۱۰}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow x=۲۰$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۹ و ۷۰)

۱۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

لایه‌لایه بودن ساختار گرافیت عامل نرم بودن این ماده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) درست؛ در ساختار الماس هر اتم کربن با ۴ پیوند کووالانسی یگانه به ۴ کربن دیگر متصل است و در گرافیت با ۴ پیوند کووالانسی به ۳ کربن دیگر متصل است.

۲) درست؛ مطابق مطالب صفحهٔ ۷۲

۳) درست؛ به دلیل پایدار بودن گرافیت نسبت به الماس درست است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)

۱۳۴- **گزینهٔ «۲»** *(روزبه رضوانی)*

الماس، گرافیت و گرافن، دارای پیوندهای اشتراکی میان میلیون‌ها اتم کربن هستند و جامد کووالانسی هستند و یخ به دلیل دارا بودن همزمان پیوندهای اشتراکی و نیروی بین مولکولی که از ویژگی‌های یک ترکیب مولکولی است، و داشتن واحدهای مجزاء مولکولی و گرافیت جامد مولکولی محسوب می‌شود. در میان الماس، گرافیت و گرافن، چینش اتم‌ها در گرافیت و گرافن دو بعدی است، پیوندهای موجود در الماس و گرافن فقط از نوع اشتراکی (کووالانسی) و در گرافیت به دلیل ساختار لایه‌لایه و منسجم آن، هم پیوند اشتراکی (در لایه‌ها) و هم نیروی واندروالسی (بین لایه‌ها) وجود دارد. همهٔ این مواد ساختار مشبک شش ضلعی دارند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۱ تا ۷۴)

۱۳۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

برای ساخت منشور و عدسی‌ها از کوآرتز (SiO_2 خالص) استفاده می‌شود.

بررسی برخی گزینه‌های درست:

۱) سیلیسیم پس از اکسیژن فراوان‌ترین عنصر در پوستهٔ جامد زمین است.

۳) کوارتز و ماسه به ترتیب نمونه‌های خالص و ناخالص سیلیس (SiO_2) هستند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۱۳۶- **گزینهٔ «۲»** *(سعید تیزرو)*

تنها موارد اول و پنجم نادرست است.

بررسی مورد اول: گرافیت برخلاف گرافن شفاف و انعطاف‌پذیر نیست.

بررسی مورد پنجم: در گرافیت برخلاف گرافن، علاوه بر پیوند اشتراکی میان اتم‌های C، بین لایه‌های مسطح سازندهٔ آن، نیروهای واندروالسی نیز برقرار است. (گرافن تک لایه است.)

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۱۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

الماس از گرافیت ناپایدارتر است و سطح انرژی آن بالاتر است. بنابراین از سوختن الماس در مقایسه با گرافیت گرمای بیشتری آزاد می‌شود.

چگالی الماس از گرافیت که ساختار لایه‌لایه دارد بیشتر است و آنتالپی پیوند $Si-O$ از $Si-C$ بیشتر است. چراکه طول پیوند آن کمتر است. سختی SiC از گرافیت بیشتر است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۱۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

موارد اول و چهارم نادرست هستند.

اغلب ترکیبات آلی جزء مواد مولکولی هستند.

در ساختار یخ هر اتم O با دو اتم H در مولکول خود پیوند اشتراکی دارد اما با دو اتم H از دو مولکول مجاور خود پیوند هیدروژنی تشکیل می‌دهد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۱۳۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا چمشیری)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) از آینه‌ها برای متمرکز کردن پرتوهای خورشیدی بر روی گیرنده برج و گرم کردن شاره یونی استفاده می‌شود.

۲) HF به دلیل داشتن پیوند هیدروژنی و قطبی بودن، نقطهٔ جوش بیشتری نسبت به N_2 دارد.

۳) هر چه تفاوت نقطهٔ ذوب و جوش یک مادهٔ خالص بیشتر باشد، آن ماده در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع باقی می‌ماند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۱۴۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرعلی بیات)*

بررسی موارد:

الف) درست؛ در مولکول CO_2، اتم‌های اکسیژن تراکم بار الکتریکی منفی بیشتری دارند.

ب) نادرست؛ مولکول O_3 با این‌که از یک نوع اتم تشکیل شده است ولی قطبی به حساب می‌آید و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

پ) درست؛ در $CHCl_3$، بیشترین رنگ قرمز مربوط به کلر است.

ت) درست؛ SO_2 مولکولی مسطح است که اتم‌های اکسیژن تراکم بار الکتریکی بیشتری دارند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۵ و ۷۶)

شیمی ۳- پیشروی سریع

۱۴۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیرعلی بیات)*

چگالی بار وابسته به میزان بار و شعاع یون است.

چگالی بار آنیون O^{2-} از Na^+ به دلیل اندازهٔ بار بیشتر، بزرگ‌تر است. برای برخی عناصر گروه ۱۴ مثل C و Si که یون تک‌اتمی ندارند چگالی بار تعریف نمی‌شود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۳)

۱۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(رضا سلیمانی)*

عبارت‌های (آ)، (ب) و (پ) درست هستند. بررسی عبارت‌ها:

عبارت آ) A، B و C به ترتیب عنصرهای وانادیم ($_{23}V$)، مس ($_{29}Cu$) و منیزیم ($_{12}Mg$) هستند. عنصر وانادیم در ترکیب‌های خود می‌تواند دارای اعداد اکسایش (۲+)، (۳+)، (۴+) و (۵+) باشد، مس در ترکیب‌های یونی خود می‌تواند عدد اکسایش (۱+) یا (۲+) و عنصر منیزیم در ترکیب‌های خود تنها می‌تواند عدد اکسایش (۲+) داشته باشد؛ پس مقایسهٔ تنوع عدد اکسایش به درستی انجام نشده است.

عبارت ب) در جدول دوره‌ای، در یک گروه از بالا به پایین، خصلت فلزی افزایش و در یک دوره از چپ به راست، خصلت فلزی کاهش می‌یابد. خصلت نافلزی نقطهٔ مقابل خصلت فلزی است، پس در میان عنصرهای مطرح شده، بیشترین خصلت فلزی مربوط به عنصر F و بیشترین خصلت نافلزی مربوط به عنصر D است.

عبارت پ) C، D و E به ترتیب عنصرهای $_{12}Mg$، $_7N$ و $_{15}P$ هستند و مقایسهٔ صحیح شعاع یونی آن‌ها به‌صورت « $P^{3-} > N^{3-} > Mg^{2+}$ » است.

توجه: شعاع یونی در یک گروه از بالا به پایین افزایش می‌یابد، بنابراین شعاع یون پایدار E (E^{3-}) بیشتر از شعاع یون پایدار D (D^{3-}) است. از طرفی D^{3-} ($_7N^{3-}$) و C^{2+} ($_{12}Mg^{2+}$) هم‌الکترون هستند؛ می‌دانیم میان یون‌های هم‌الکترون، یونی که بار منفی دارد شعاع بزرگ‌تری دارد، بنابراین شعاع D^{3-} بزرگ‌تر از C^{2+} است.

ت) نیروهای جاذبهٔ بین یون‌ها با بار الکتریکی یون‌ها رابطهٔ مستقیم و با شعاع یون‌ها رابطهٔ معکوس دارد. از آن‌جا که مجموع اندازهٔ بارهای الکتریکی آنیون و کاتیون (F^+ و D^{3-}) کم‌تر از این مقدار در ترکیب یونی بین C^{2+} و D^{3-} است، بنابراین قدرت نیروی جاذبهٔ آن کم‌تر است.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱)

۱۴۳- **گزینهٔ «۱»** *(حسن رحمتی کوکنده)*

از مدل دریای الکترونی می‌توان برای توجیه برخی رفتارهای فیزیکی فلزها استفاده کرد. واکنش‌پذیری از جمله رفتارهای شیمیایی فلزها است.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

۱۴۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

موارد «الف»، «ب» و «پ» نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست - گسترهٔ دمایی مایع بودن:

$$\underset{\text{ترکیب یونی}}{NaCl} > \underset{\text{ترکیب مولکولی قطبی}}{HF} > \underset{\text{ترکیب مولکولی ناقطبی}}{N_2}$$

ب) نادرست - نسبت اندازهٔ بار به شعاع، با چگالی بار هم‌ارز می‌باشد:

هرچه اندازهٔ بار بزرگ‌تر و شعاع یونی کوچک‌تر آن‌گاه چگالی بار بیشتر است.

چگالی بار: $Ca^{2+} > Li^+ > Cl^-$

پ) نادرست: $MgO > CaO > CaCl_2$

مقایسهٔ |بار آنیون|: $O^{2-} > Cl^-$

مقایسهٔ نقطهٔ ذوب: $\Rightarrow Ca^{2+}O^{2-} > Ca^{2+}Cl^-$

مقایسهٔ شعاع یونی: $Mg^{2+} < Ca^{2+}$

مقایسهٔ نقطهٔ ذوب: $\Rightarrow Mg^{2+}O^{2-} > Ca^{2+}O^{2-}$

ت) درست: مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی شبکه:

$$\underset{\substack{\text{بار:}Al^{3+}>Mg^{2+}\\ \text{بار:}O^{2-}>F^-}}{Al_2O_3} > MgF_2 > \underset{\text{شعاع:}K^+>Mg^{2+}}{K_2O}$$

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۱۴۵- **گزینهٔ «۲»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

بررسی موارد:

الف) درست

ب) نادرست؛ براساس مدل دریای الکترونی، ساختار فلزها آرایش منظمی از کاتیون‌ها در سه بعد است که سست‌ترین الکترون‌های موجود در اتم دریایی را ساخته‌اند و در آن آزادانه جابه‌جا می‌شوند و این عامل باعث خاصیت چکش‌خواری فلزات می‌شود.

پ) نادرست؛ نقطهٔ ذوب تیتانیم بیشتر از فولاد است.

ت) درست؛ فلزات سازندهٔ آلیاژ هوشمند، فلزات تیتانیم و نیکل هستند که هر دو در دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)

۱۴۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرعلی بیات)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ الکترون‌های زیرلایهٔ $3d$ و $4s$ فلزات واسطه دورهٔ چهارم در دریای الکترونی آن نقش دارند.

۲) نادرست؛ فلزات ویژگی‌های مشترکی دارند ولی در خواصی مثل سختی، نقطهٔ ذوب و تنوع عدد اکسایش با هم تفاوت دارند.

۳) نادرست؛ رنگ‌های محلول وانادیوم به ترتیب افزایش بار: بنفش، سبز، آبی و زرد.

۴) درست؛ مدل دریای الکترونی فقط برای توجیه برخی خواص فیزیکی فلزات است، برخی ترکیبات یونی هم دارای فلز هستند ولی دریای الکترونی ندارند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

۱۴۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرمسعود حسینی)*

نیتینول آلیاژی از دو فلز Ni و Ti است که در ساخت استنت برای رگ‌ها به کار می‌رود.

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ از فلز تیتانیم به دلیل چگالی کم‌تر و نقطهٔ ذوب بالاتر از فولاد در ساخت موتور جت استفاده می‌شود.

۲) درست؛ Ti و Ni هر دو در دورهٔ چهارم جدول تناوبی جای داشته و جزو نخستین سری از عناصر واسطه (عناصر دستهٔ d) هستند. اغلب فلزهای دستهٔ d نسبت به فلزات دستهٔ s و p سختی و نقطهٔ ذوب بیشتری دارند.

۳) درست؛ در پوشش بیرونی موزه گوگنهایم از Ti استفاده می‌شود که ۴ الکترون در لایهٔ ظرفیت اتم خود دارد: $_{22}Ti : [_{18}Ar]\ \underbrace{3d^2 4s^2}_{\text{۴ الکترون ظرفیت}}$

۴) درست؛ نیتینول به آلیاژ هوشمند معروف است و در ساخت قاب عینک، استنت برای رگ‌ها و سازهٔ فلزی در ارتودنسی به کار می‌رود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸۷ و ۸۸)

۱۴۸- **گزینهٔ «۴»** *(روزبه رضوانی)*

بررسی موارد:

الف) $_{22}Ti$ ، گروه ۴ و دوره ۴

ب) به جز $_{23}V$، بقیهٔ عناصر واسطه این دوره دو حرفی هستند.

پ) در میان فلزات واسطهٔ دورهٔ ۴ اُم فقط Sc با از دست دادن الکترون به آرایش گاز نجیب می‌رسد.

ت) $_{22}Ti : 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^2\ 4s^2$

مجموع عدد کوانتومی فرعی الکترون‌ها $= (8\times0)+(12\times1)+(2\times2) = 16$

$$\begin{cases} l=0 \Rightarrow s \\ l=1 \Rightarrow p \\ l=2 \Rightarrow d \end{cases}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸۷ و ۸۸)

۱۴۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیرعلی بیات)*

فقط گزینهٔ اول درست است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) در الگوی دریای الکترونی، الکترون‌های ظرفیت دخالت دارند. مثلاً در عناصر واسطه دورهٔ چهارم الکترون‌های زیرلایهٔ $4s$ و $3d$ دخالت دارند.

۳) مطابق شکل همان تعداد الکترونی که وارد دریای الکترونی می‌شود، به همان تعداد هم الکترون از سوی دیگر دریای الکترونی خارج می‌شود. پس تعداد الکترون‌های آن ثابت است.

۴) گرافیت دریای الکترونی ندارد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸۳ و ۸۴)

۱۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(محسن مجنونی)*

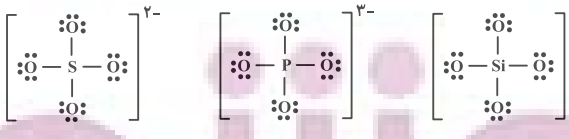
مورد (الف) نادرست است.

بررسی موارد:

الف) جیوه عنصری از جدول تناوبی است که در دما و فشار اتاق به حالت مایع می‌باشد اما ترکیب مولکولی نیست.

ب) دی متیل اتر و پروپان جرم مولی نزدیک به هم دارند اما دی متیل اتر ترکیبی قطبی و پروپان ترکیبی ناقطبی است. پس دی متیل اتر نسبت به پروپان آسان تر مایع می‌شود.

پ)



سیلیکات | فسفات | سولفات

با توجه به مشابه بودن ساختار لوویس این سه یون، نسبت جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در آن‌ها با هم برابر است.

ت) طول پیوند $Si-C$ نسبت به طول پیوند $Si-Si$ کمتر است، بنابراین انرژی پیوند آن بیشتر و در نتیجه سختی آن هم بیشتر خواهد بود.

ث) جامدهای کووالانسی در حالت مایع نارسانا و در حالت جامد سخت هستند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۸۹ و ۹۰)

شیمی ۲

۱۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(حسین شاهسواری)*

بررسی برخی موارد نادرست:

الف) شمار ترکیبات کربن به تنهایی از ترکیبات دیگر عناصر بیشتر است پس شمار ترکیبات نافلزی بیشتر از ترکیبات فلزی است.

پ) در مدل فضاپرکن برخلاف گلوله و میله، تعداد پیوند میان اتم‌ها معلوم نیست.

ت) بررسی حالات:

(۱ پیوند سه‌گانه – ۱ پیوند یگانه)- (۲ پیوند دوگانه) – (۱ پیوند دوگانه- ۲ پیوند یگانه) – (۴ پیوند یگانه)

(شیمی ۲- صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)

۱۵۲- **گزینهٔ «۴»** *(آرمین محمدی‌پیرانی)*

بررسی موارد نادرست:

۱) اولین عضو آلکن‌ها (اتن) در کشاورزی و اولین عضو آلکین‌ها (اتین) در جوشکاری کاربرد دارد.

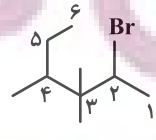
۲) در محیط اسیدی به علت حضور H_2SO_4 (نه قلیایی)

۳) در گذشته (امروزه کاربرد گسترده ندارد.)

(شیمی ۲- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

۱۵۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیرعلی بیات)*

نام شکل داده شده ۴- کلرو ۳- فلوئورو ۵- متیل هپتان می‌باشد و باید حواسمان باشد که در نام‌گذاری آلکان‌ها از «۲- اتیل» نمی‌توان استفاده کرد. همچنین نام صحیح ترکیب دوم هم ۲- برمو ۳، ۳، ۴- تری متیل هگزان می‌باشد.



(شیمی ۲- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱۵۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی موارد نادرست:

پ) گاز SO_2 (گوگرد دی اکسید) خارج شده از نیروگاه‌ها را با عبور از روی کلسیم اکسید (CaO) به دام می‌اندازند.

ت) این آلکن می‌تواند دارای ۶ اتم کربن باشد و فرمول مولکولی آن C_6H_4 می‌تواند باشد و حداقل شامل ۴ اتم هیدروژن است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۴۰، ۴۶ و ۴۷)

۱۵۵- **گزینهٔ «۲»** *(حسین شاهسواری)*

مول گاز تولیدی: $\frac{\text{حجم گاز}}{\text{حجم مولی در STP}} = \frac{۲۲۴}{۲۲/۴} = ۱۰\,mol$

مول اکسیژن مصرفی: $\frac{\text{جرم } O_2}{\text{جرم مولی } O_2} = \frac{۴۱۶}{۳۲} = ۱۳\,mol$

تذکر: در شرایط STP، حالت فیزیکی آب مایع است.

$$\underset{x\,mol}{C_2H_4(g)} + \underset{3x\,mol}{3O_2(g)} \rightarrow \underset{2x\,mol}{2CO_2(g)} + \underset{2x\,mol}{2H_2O(l)}$$

$$\underset{2y\,mol}{2C_2H_2(g)} + \underset{5y\,mol}{5O_2(g)} \rightarrow \underset{4y\,mol}{4CO_2(g)} + \underset{2y\,mol}{2H_2O(l)}$$

$$\begin{cases} 2x+4y=10 \\ 3x+5y=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

نکته: درصد حجمی گازها با درصد مولی آن‌ها برابر است:

$$\text{درصد مولی } C_2H_4 = \frac{\text{mol } C_2H_4}{\text{mol کل}} \times 100 \Rightarrow \frac{1}{5} \times 100 = \%20$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۳۶، ۳۷، ۴۰ و ۴۲)

ابزار توشه‌ای برای موفقیت

۱۵۶- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا جمشیدی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) بستر اقیانوس‌ها، منبع غنی از منابع فلزی گوناگون است که انسان‌ها به تازگی آن را کشف کرده‌اند.

۲) غلظت برخی گونه‌های فلزی موجود در بستر اقیانوس‌ها نسبت به ذخایر زمینی بیشتر است.

۴) با توجه به متن کتاب درسی، در بستر اقیانوس‌ها، ستون‌های سولفیدی وجود دارند.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱۵۷- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

در استخراج ۱۰۰۰ کیلوگرم آهن تقریباً ۲۰۰۰ کیلوگرم سنگ معدن آهن و ۱۰۰۰ کیلوگرم از منابع معدنی دیگر استفاده می‌شود. بنابراین در استخراج a تن آهن تقریباً $2a$ تن سنگ معدن آهن و a تن از منابع معدنی دیگر استفاده می‌شود.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱۵۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

کمتر از ده درصد نفت خام مصرفی در دنیا برای تولید الیاف، پارچه، شوینده‌ها، مواد آرایشی و ... به کار می‌رود.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱۵۹- **گزینهٔ «۲»** *(هادی مهدی‌زاده)*

موارد (پ) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی موارد:

الف) بوتان در سوخت فندک کاربرد دارد و در دمای $22^\circ C$ به حالت گاز است.

ب) آلکانی که ۱۶ پیوند $C-H$ دارد، C_7H_{16} است و آلکانی که دارای ۳۸ الکترون پیوندی (۱۹ پیوند) است، C_6H_{14} می‌باشد که حالت فیزیکی آن‌ها با حالت فیزیکی برم (مایع) در دمای اتاق یکسان است.

پ) در بازهٔ دمایی ۳۲۳ کلوین ($50^\circ C$) تا ۴۷۵ کلوین ($202^\circ C$) حدود ۶ آلکان مایع وجود دارد.

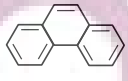
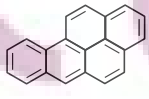
ت) با افزایش تعداد اتم‌های کربن، نقطه جوش آلکان‌ها برخلاف فرارّیت آن‌ها افزایش می‌یابد.

ث) از آلکان‌های مایع برای حفاظت از فلزات استفاده می‌شود، اولین آلکانی که پیوند $C-C$ دارد، اتان است که در دمای اتاق به حالت گاز است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۳۳ تا ۴۰)

۱۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

مقایسه‌های دوم و سوم درست هستند.

شمار پیوندهای $C-H$	شمار پیوندهای $C=C$	شمار پیوندهای $C-C$	فرمول مولکولی / نسبت $\frac{C}{H}$	ویژگی / مولکول
۸	۵	۶	$C_{10}H_8$ $\frac{C}{H}=\frac{10}{8}=1/25$	
۱۰	۸	۱۱	$C_{16}H_{10}$ $\frac{C}{H}=\frac{16}{10}=1/6$	
۱۰	۷	۹	$C_{14}H_{10}$ $\frac{C}{H}=\frac{14}{10}=1/4$	
۱۲	۱۰	۱۴	$C_{20}H_{12}$ $\frac{C}{H}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$	

(شیمی ۲- صفحهٔ ۴۳)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۱

۱۶۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

الف) دورهٔ دوم و سوم جدول دوره‌ای هر یک دارای ۸ عنصر هستند که در بین آن‌ها آرایش الکترون نقطه‌ای Li، Be، B و C از دورهٔ دوم Na، Mg، Al و Si از دورهٔ سوم فاقد الکترون جفت شده است.

ب) آرایش الکترونی $^{59}_{28}A^{2+}$ به صورت $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^8$ بوده و این یون دارای $59-28=31$ نوترون می‌باشد. در حالی که آرایش الکترونی $^{56}_{26}B$ به صورت $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^6\ 4s^2$ است. یون $^{55}_{25}C^{3+}$ نیز دارای $55-25=30$ نوترون است.

پ) در یک اتم زیرلایه‌های 6s، 5p و 4d دارای $n+l=6$ هستند که به ترتیب می‌توانند ۲، ۶ و ۱۰ الکترون در خود جای دهند. بنابراین حداکثر ۱۸ الکترون چنین شرایطی دارند.

ت) عنصر $_{52}X$ با گرفتن ۲ الکترون به یون X^{2-} تبدیل شده و آرایش گاز نجیب $_{54}Xe$ را پیدا می‌کند، $_{38}Y$ نیز با از دست دادن ۲ الکترون به یون Y^{2+} با آرایش الکترونی گاز نجیب $_{36}Kr$ تبدیل خواهد شد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۵)

۱۶۲- **گزینهٔ «۴»** *(حسین شاهسواری)*

فلز X با از دست دادن سه الکترون به کاتیون X^{3+} تبدیل می‌شود.

نافلز Y با گرفتن دو الکترون به آنیون Y^{2-} تبدیل می‌شود.

در نتیجه ترکیب یونی حاصل X_2Y_3 خواهد بود.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۱۶۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیرعلی بیات)*

با توجه به شکل داده شده عناصر ۱ تا ۴ به ترتیب $_2He$ ، $_9F$ ، $_{12}Mg$ و $_{28}Ni$ هستند و عنصر گفته شده همان $_{20}Ca$ است که با $_{28}Ni$ (شکل ۴) هم‌دوره و با $_{12}Mg$ (شکل ۳) هم‌گروه است.

$_{20}Ca: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2$

(شیمی ۱- صفحهٔ ۴۳)

۱۶۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

حداکثر ظرفیت پذیرش الکترون در هر زیرلایه و لایه به ترتیب از $4l+2$ و $2n^2$ به دست می‌آید. عدد کوانتومی فرعی برای چهارمین نوع زیرلایه برابر ۳ می‌باشد. بنابراین:

$l=3: 4l+2=14$

$n=5: 2n^2=50$

$\frac{14}{50}=0/28$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۲۷ تا ۳۰)

۱۶۵- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا بیانی)*

بررسی موارد:

الف) هر عنصر نسبت به عنصر قبلی خود یک پروتون و یک الکترون بیشتر دارد. چون عدد اتمی یک واحد افزایش می‌یابد.

ب) دورهٔ سوم شامل ۸ عنصر و دورهٔ چهارم شامل ۱۸ عنصر می‌باشد که جمعاً ۲۶ می‌شود ولی اولین عنصری که از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند $_{24}Cr$ می‌باشد.

پ) زیرلایهٔ 3d در عناصر دورهٔ چهارم پیدا می‌شود.

ت) حداکثر گنجایش زیرلایهٔ پنجم $(l=4)$ (زیرلایهٔ اول $l=0$ است پس زیرلایهٔ پنجم $l=4$ می‌باشد) که از رابطهٔ $4l+2$ پیروی می‌کند برابر $4\times4+2=18$ می‌باشد و حداکثر گنجایش لایهٔ سوم که از رابطهٔ $2n^2$ به دست می‌آید برابر $2\times3^2=18$ است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۱۶۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

عبارت‌های (الف) و (ت) درست هستند.

این اتم دارای ۸ زیرلایه است پس آرایش زیرلایه‌ها به صورت $1s^2 2s^2\ 2p^6 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10} 4s^2\ 4p^x$

بررسی موارد:

الف) درست؛ شماره دوره این عنصر ۴ می‌باشد.

ب) نادرست؛ آخرین لایهٔ الکترونی این عنصر لایهٔ چهارم است که می‌تواند حداکثر ۸ الکترون داشته باشد. $ns^2\ ,\ np^6$

لایهٔ ظرفیت $4s^2\ 4p^6$ $n=4$

پ) نادرست؛ این عنصر جزو عناصر دستهٔ p می‌باشد و می‌تواند در گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ جدول باشد.

ت) درست؛ چون جزو عناصر دستهٔ p دورهٔ چهارم جدول تناوبی است لذا زیرلایهٔ 3d به صورت کامل $(3d^{10})$ پر شده است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۱۶۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

در ابتدا باید توجه داشت که در دورهٔ چهارم جدول، دو عنصر با ۸ الکترون ظرفیتی وجود دارند که عبارتند از:

$$_{26}Fe: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^6\ 4s^2$$

$$_{36}Kr: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^6$$

آرایش الکترونی هر دو عنصر از قاعدهٔ آفبا پیروی می‌کند.

هر دو عنصر فاقد زیرلایهٔ الکترونی نیمه پر هستند.

Fe در دورترین لایهٔ خود از هستهٔ اتم (لایهٔ چهارم) ۲ الکترون دارد، اما Kr دارای ۸ الکترون با چنین شرایطی می‌باشد.

آخرین زیرلایه اشغال شده Fe $(4s)$ دارای ۲ الکترون است. اما در Kr آخرین زیرلایهٔ اشغال شده $(4p)$ ۶ الکترونی است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۱۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(هادی مهدی‌زاده)*

ابتدا عدد اتمی M را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} A = 65 \Rightarrow n + p = 65 \\ n - e = 6 \Rightarrow n - (p-1) = 6 \Rightarrow n - p = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow p = 30$$

روش میانبر:

$$\text{عدد اتمی} = \frac{\text{بار با علامت} + (\text{اختلاف } e\text{ , }n) - \text{عدد جرمی}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{عدد اتمی} = \frac{65-6+1}{2} = 30$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) $_{30}M$ عنصری از دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای می‌باشد که در گروه ۱۲ جدول دوره‌ای جای دارد.

۲) $_{30}M: [_{18}Ar]\ 3d^{10}\ 4s^2$

$_{29}Cu: [_{18}Ar]\ 3d^{10}\ 4s^1$

با توجه به آرایش الکترونی دو گونه، تعداد الکترون‌های با $l=1$ در آن‌ها برابر است.

۳) شمار الکترون‌های با $l=1$ در اتم عنصر M $(2p\ ,\ 3p)$، ۱/۲ برابر شمار الکترون‌های دارای $l=2$ $(3d)$ است.

$$_{30}M = 1s^2\ 2s^2\ \underline{2p^6}\ 3s^2\ \underline{3p^6}\ \underline{\underline{3d^{10}}}\ 4s^2 \Rightarrow \frac{12}{10} = 1/2$$

۴) شمار الکترون‌های آخرین زیرلایه اشغال شده آن $(4s^2)$ با شمار الکترون‌های آخرین زیرلایه اشغال شده اتم $_{24}Cr$ $(4s^1)$ نابرابر است.

$$_{24}Cr: [_{18}Ar]\ 3d^5\ 4s^1$$

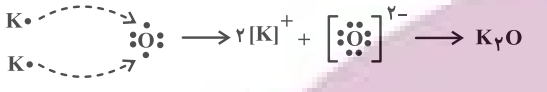
(شیمی ۱- صفحه‌های ۵ و ۲۹ تا ۳۴)

۱۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(یاسر راش)*

عنصر X، عنصری فلزی از گروه ۱ جدول دوره‌ای و عنصر Y، عنصری نافلزی از گروه ۱۶ جدول دوره‌ای است.

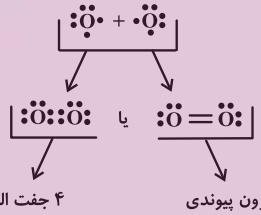
بررسی گزینه‌ها:

۱) به عنوان مثال اگر عنصرهای X و Y را به ترتیب پتاسیم $(_{19}K)$ و اکسیژن $(_8O)$ در نظر بگیریم، گزارهٔ مطرح شده الزاماً درست نیست.



۲) عنصر D که توانایی تشکیل یون D^{3+} را دارد، می‌تواند $_{21}Sc$ از گروه ۳ یا $_{13}Al$ از گروه ۱۳ جدول دوره‌ای باشد.

۳) از بین عنصرهای نافلزی که توانایی تشکیل آنیون (۲-) دارند (یعنی عنصرهای نافلزی $_8O$، $_{16}S$ و $_{34}Se$)، ساختار O_2 به شکل زیر است:



۴) ترکیب یونی X_2Y، یک ترکیب یونی دوتایی است نه سه تایی.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۳۴ تا ۴۱)

۱۷۰- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تیزرو)*

تمامی موارد همانند عبارت مطرح شده در صورت سؤال درست هستند.

بررسی موارد:

مورد اول: تمامی ۷ عنصر دو اتمی جدول جزو نافلزات هستند.

مورد دوم:

$$1\text{atom B} \times \frac{1\text{mol B}}{6/02\times10^{23}\text{ atom B}} \times \frac{x\text{ g B}}{1\text{mol B}}$$

$$= 1/794\times10^{-23}\text{ g B}$$

$$\Rightarrow x = 1/794\times6/02 = 10/8\ \text{g.mol}^{-1}$$

مورد سوم:

$$_{50}^{124}Sn^{2+}: \begin{cases} p = 50 \\ e^- = 50-2 = 48 \\ n = 124-50 = 74 \end{cases} \Rightarrow 50 + \frac{48}{2} = 74$$

مورد چهارم: ایزوتوپ‌های یک عنصر در یک خانه از جدول جای داشته و به همین دلیل آرایش الکترونی یکسانی دارند. ولی خواص فیزیکی وابسته به جرم آن‌ها (نظیر چگالی) متفاوت است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفترچهٔ پاسخ فرهنگیان

(تعلیم و تربیت اسلامی و هوش و استعداد)

۱۲ بهمن ماه ۱۴۰۳

ریاضی و فیزیک، علوم تجربی و فنی و حرفه‌ای/کاردانش

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

آدرس دفتر مرکزی: خیابان انقلاب- بین صبا و فلسطین- پلاک ۹۲۳ - تلفن چهار رقمی: ۶۴۶۳-۰۲۱

تعلیم و تربیت اسلامی

۲۵۱- گزینهٔ «۳» (میثم هاشمی)

در گزینهٔ «۳»، هر دو مورد نادرست است؛ زیرا آدمی با عزم خودش آن‌چه که انتخاب کرده عملی می‌سازد نه با عزم دیگران، و هم‌چنین در محاسبه و ارزیابی، عوامل موفقیت یا عدم موفقیت شناخته می‌شود.

تشریح گزینه‌های دیگر:

گزینهٔ «۱»: مورد دوم، درست است.

گزینهٔ «۲»: هردو مورد درست است.

گزینهٔ «۴»: هردو مورد درست است.

(دین و زندگی۱، آهنگ سفر، صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

۲۵۲- گزینهٔ «۴» (مرتضی محسنی‌کبیر)

برای حرکت در مسیر هدف، وجود اسوه و الگوهایی که راه را با موفقیت طی کرده و به مقصد رسیده‌اند، بسیار ضروری است؛ زیرا وجود این الگوها، اولاً به ما ثابت می‌کند که این راه موفقیت‌آمیز است، ثانیاً می‌توان از تجربهٔ آنان استفاده نمود و مانند آنان عمل کرد و از همه مهم‌تر این که می‌توان از آنان کمک گرفت و با دنباله‌روی (پیروی) از آنان سریع‌تر به هدف رسید.

(دین و زندگی۱، آهنگ سفر، صفحهٔ ۱۰۳)

۲۵۳- گزینهٔ «۲» (میثم هاشمی)

تشریح گزینه‌های دیگر:

گزینه‌های«۱ و ۴»: بعد از محاسبه، اگر معلوم شود که در انجام عهد خود موفق بوده‌ایم، خوب است خدا را سپاس گوییم و شکرگزار او باشیم؛ زیرا می‌دانیم که او بهترین پشتیبان ما در انجام پیمان‌هاست.

حضرت علی (ع) می‌فرماید: «زیرک‌ترین افراد کسی است که از خود و عملش بعد مرگ حساب بکشد.»

(دین و زندگی۱، آهنگ سفر، صفحه‌های ۱۰۱ و ۱۰۲)

۲۵۴- گزینهٔ «۴» (مرتضی محسنی‌کبیر)

اسوه بودن آن بزرگان مربوط به اموری که به‌طور طبیعی و با تحولات صنعتی تغییر می کنند، نیست؛ مانند وسایل حمل و نقل، امکانات شهری و ... بلکه اسوه‌بودن در اموری است که همواره برای بشر خوب و باارزش بوده‌اند. با گذشت زمان حتی درک بیشتری از آن‌ها نیز به دست آمده است مانند تقسیم اوقات پیامبر (ص) به سه قسمت.

(دین و زندگی۱، آهنگ سفر، صفحهٔ ۱۰۴)

۲۵۵- گزینهٔ «۲» (یاسین ساعدی)

استواری بر هدف، شکیبایی و تحمل سختی‌ها برای رسیدن به آن هدف از آثار عزم قوی است.

(دین و زندگی۱، آهنگ سفر، صفحهٔ ۹۹)

۲۵۶- گزینهٔ «۴» (مرتضی محسنی‌کبیر)

امام علی (ع) می‌فرماید: «من حاسب نفسه وقف علی عیوبه و احاط بذنوبه و استقال الذنوب و اصلح العیوب: هر کس محاسبهٔ نفس کند، بر عیب‌هایش آگاه می‌شود و بر گناهانش احاطه پیدا می‌کند و گناهان را جبران می‌کند و عیب‌ها را اصلاح می‌کند.» و در بیان دیگری می‌فرماید: «من حاسَبَ نَفسَهُ، سَعِد: هر کس محاسبهٔ نفس کند، خوش‌بخت می‌شود» جملات بعد از «من حاسَبَ نفسَه» آثار محاسبهٔ نفس به شمارمی‌رود.

(دین و زندگی۱، آهنگ سفر، صفحهٔ ۱۰۲)

۲۵۷- گزینهٔ «۳» (یاسین ساعدی)

خداوند در آیهٔ ۱۰ سورهٔ فتح می‌فرماید: « ....و هر که به عهدی که با خدا بسته وفادار بماند، به‌زودی پاداش عظیمی به او خواهد داد.»

(دین و زندگی۱، آهنگ سفر، صفحهٔ ۱۰۰)

۲۵۸- گزینهٔ «۱» (مرتضی محسنی‌کبیر)

تمایلات دانی، مانند تمایل به ثروت، شهرت، غذاهای لذیذ، زیورآلات و رفاه مادی که مربوط به بُعد حیوانی و دنیایی انسان است و وقتی به این تمایلات دست یابیم، از آن‌ها لذّت می‌بریم و خوشحال می‌شویم و انسان‌ها به‌طور طبیعی به این امور میل دارند و علاقه نشان می‌دهند؛ زیرا این‌ها لازمهٔ زندگی در دنیا هستند و بدون آن‌ها یا نمی‌توان زندگی کرد یا زندگی سخت و مشکل می‌شود.

(دین و زندگی۲، عزت نفس، صفحهٔ ۱۴۲)

۲۵۹- گزینهٔ «۳» (میثم هاشمی)

تشریح گزینه‌های دیگر:

عزت از صفاتی است که قرآن کریم بیش از ۹۵ بار خداوند را بدان توصیف کرده است. (رد گزینه‌های ۲ و ۴)

احادیث ذکرشده در صورت سؤال به‌ترتیب مربوط به دو مرحلهٔ تقویت عزت نفس، یعنی «توجه به عظمت خداوند و تلاش برای بندگی او» و «شناخت ارزش خود و نفروختن خویش به بهای اندک» است. (رد گزینه‌های ۱ و ۴)

(دین و زندگی۲، عزت نفس، صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۴۰)

۲۶۰- گزینهٔ «۴» (مرتضی محسنی‌کبیر)

عزت نفس، فقط پیمان با خدا را به دنبال دارد.

تسلیم و بندگی خداوند، عزت نفس را به دنبال دارد.

(دین و زندگی۲، عزت نفس، صفحهٔ ۱۴۳)

۲۶۱- گزینهٔ «۲» (میثم هاشمی)

یکی از مهم‌ترین قدم‌ها در مسیر کمال، تقویت عزت نفس است. (رد گزینه‌های ۱ و ۳)

عزت از صفاتی است که قرآن کریم بیش از ۹۵ بار خداوند را بدان توصیف کرده است. معصومین بزرگوار (ع) این صفت را از ارکان فضایل اخلاقی دانسته‌اند که اگر در وجود ما شکل بگیرد، مانع بسیاری از زشتی‌ها خواهد شد. (رد گزینه‌های ۳ و ۴)

اگر کالای گران‌قیمتی مانند طلا داشته باشیم، اما ارزش واقعی آن را ندانیم، به آسانی فریب می‌خوریم و آن را به بهای اندک می‌فروشیم اما اگر ارزش واقعی آن را بدانیم، آن را عزیز می‌شماریم و به قیمت واقعی می‌فروشیم.

(دین و زندگی۲، عزت نفس، صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۴۰)

۲۶۲- گزینهٔ «۱» (یاسین ساعدی)

شناخت ارزش خود و نفروختن خویش به بهای اندک: اگر کالای گران قیمتی مانند طلا داشته باشیم اما ارزش و قیمت آن را ندانیم، به آسانی فریب می‌خوریم و آن را به بهای اندک می‌فروشیم اما اگر ارزش آن را بدانیم، آن را عزیز می‌شماریم و به قیمت واقعی می‌فروشیم و بهایی برابر با ارزش آن به دست می‌آوریم.

از همین رو خداوند خطاب به انسان فرموده: «ای فرزند آدم، این مخلوقات را برای تو آفریدم و تو را برای خودم» و حضرت علی (ع) می‌فرماید: «أنّه لَیسَ لِأنفسکم ثمنٌ إلّا الجنّة ...: همانا بهایی برای جان شما جز بهشت نیست پس خود را به کمتر از آن نفروشید.»

(دین و زندگی۲، عزت نفس، صفحهٔ ۱۴۰)

۲۶۳- گزینهٔ «۴» (مرتضی محسنی‌کبیر)

عقل و وجدان یا همان نفس لوّامه از انسان می‌خواهد در حد نیاز به تمایلات فروتر پاسخ دهد و فرصتی فراهم کند که تمایلات معنوی و الهی در او پرورش پیدا کند و آن زیبایی‌ها وجودش را فرابگیرد. به تعبیر پیامبر اکرم (ص) جوان به آسمان نزدیک‌تر است؛ یعنی گرایش به خوبی‌ها در او قوی‌تر است.

(دین و زندگی۲، عزت نفس، صفحه‌های ۱۴۲ و ۱۴۳)

۲۶۴- گزینهٔ «۱» (مرتضی محسنی‌کبیر)

رسول خدا (ص) فرمودند: «راهنمایی‌کننده به راه خیر، مانند انجام‌دهندهٔ آن است.»

علم حقیقی، نگاه انسان را توحیدی می‌کند. در حدیث می‌خوانیم: «ثمرة العلم معرفة الله: ثمرهٔ علم، شناخت خداوند است.»

(مهارت معلمی، ارزش و امتیاز کار معلمی، صفحه‌های ۱۸، ۱۹ و ۲۴)

۲۶۵- گزینهٔ «۴» (مرتضی محسنی‌کبیر)

قرآن کریم، دربارهٔ بعضی انسان‌ها می‌فرماید: «اولئک کالأنعام بل هم اضلّ: آن‌ها مثل حیوانات هستند، بلکه پست‌تر.» سپس دلیل انحراف آن‌ها را این‌گونه بیان می‌کند: «اولئک هم الغافلون».

غفلت انواعی دارد: عده‌ای، از توانمندی‌های خود غافل‌اند و نمی‌دانند که چه موجودی هستند.

رسول خدا (ص) فرمودند: «بالاترین صدقات آن است که انسان چیزی را یاد بگیرد و به دیگران بیاموزد.»

(مهارت معلمی، ارزش و امتیاز کار معلمی، صفحه‌های ۱۸، ۲۱)

۲۶۶- گزینهٔ «۴» (یاسین ساعدی)

سیزده آیه در قرآن به سؤال‌های مردم از پیامبر اکرم (ص) اختصاص یافته که با کلمهٔ «یسئلونک» همراه است. این نشان می‌دهد که پیامبر (ص) معلم مردم بوده است.

تعلیم و تربیت، مبارک‌ترین کاری است که خداوند آن را بر دوش انبیا و اوصیا (ع) گذاشته است.

(مهارت معلمی، ارزش و امتیاز کار معلمی، صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۲۶۷- گزینهٔ «۴» (مرتضی محسنی‌کبیر)

قائل نبودن به محدودیت جغرافیایی: «اطلبوا العلم و لو بالصّین: دانش را بجویید، اگرچه در چین باشد.»

«فبعث الله غرابا یبحث فی الأرض لیریه کیف یواری سوأة أخیه: پس خداوند زاغی را فرستاد که زمین را می‌کاوید، تا به او نشان دهد که چگونه کشتهٔ برادرش را بپوشاند [و دفن کند].

(مهارت معلمی، ارزش و امتیاز کار معلمی، صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۲۶۸- گزینهٔ «۲» (مرتضی محسنی‌کبیر)

امام حسین (ع) به معلم فرزندش صد دینار هدیه داد و در پاسخ به اعتراض مردم فرمود: «این یقع هذا من عطائه یعنی تعلیمه: این مبلغ، در قبال تعلیمات او چه ارزشی دارد؟»

«من عمل صالحاً من ذکر او انثی و هو مؤمن فلنحیینّه حیاة طیّبة: هر کس کار شایسته‌ای کند، چه مرد یا زن، درحالی‌که مؤمن باشد، به زندگی پاک و پسندیده زنده‌اش می‌داریم.»

(مهارت معلمی، ارزش و امتیاز کار معلمی، صفحه‌های ۱۹ و ۲۸)

۲۶۹- گزینهٔ «۱» (یاسین ساعدی)

در قرآن برای توصیف انبیا (ع) عبارات متعددی به کار رفته ولی آنچه بیش از همه استفاده شده، تعبیر «یُعَلِّمُهُمُ الْکِتَابَ وَ الْحِکْمَةَ وَ یُزَکِّیهِمْ» است که نشان می‌دهد کار پیامبران، تعلیم کتاب و حکمت و تزکیه بوده است.

(ارزش و امتیاز کار معلمی، صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

۲۷۰- گزینهٔ «۲» (مرتضی محسنی‌کبیر)

نشانهٔ فقیه آن است که مردم را از شر دشمنانشان آزاد سازد: «و انقذهم من اعدائهم».

ناگفته پیداست که «ربوبیت» زمانی کامل است که بر اساس علم، حکمت، مصلحت و رحمت باشد که خداوند همه را دارد.

(ارزش و امتیاز کار معلمی، صفحه‌های ۱۹ و ۲۴)

استعدادتحلیلی

۲۷۱- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

مشحون: پُر، لبریز، مالامال

(هوش کلامی)

۲۷۲- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

شهروندانی که خشمگین بودند و برخی از ایشان به فکر پول دیجیتال افتادند.

(هوش کلامی)

۲۷۳- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

بند دوم متن، پاسخ به این سؤال است که اگر وجهی فارغ از دولت‌ها باشد، چگونه می‌توان آن را کنترل کرد؟

(هوش کلامی)

۲۷۴- گزینهٔ «۴» *(حمید اصفهانی)*

دربارهٔ کاهش یا افزایش ارزش پول دیجیتال یا نحوهٔ ارتباط بانکداران خصوصی و دولتی، مطلبی در متن نیست ولی انگیزهٔ ساخت ارز دیجیتال در متن هست: جداسازی پول از دولت‌ها.

(هوش کلامی)

۲۷۵- گزینهٔ «۳» *(کتاب استعدادتحلیلی هوش کلامی)*

«پسته» و «بادام» هر دو از انواع خشکبار و همهٔ خشکبارها خوراکی‌اند. بنابراین رابطهٔ بین این کلمه‌ها به‌ترتیب یادشده در گزینهٔ «۳»، به آنچه در صورت سؤال نمودار شده است همانند است. در سایر گزینه‌ها دقت کنید «شلیل» و «هلو» و «نار» از انواعِ هم نیستند، قرمز و سبز و زرد هر سه رنگ‌اند.

(هوش کلامی)

۲۷۶- گزینهٔ «۳» *(کتاب استعدادتحلیلی هوش کلامی، بر اساس کنکور دکتری سال ۹۲)*

گزینهٔ پاسخ، اساس استدلال صورت سؤال را زیر سؤال می‌برد: اگر قرار است خزه‌های دریایی نه ازبین‌برندهٔ دی‌اکسیدکربن که صرفاً نگهدارندهٔ آن باشند و در نهایت آن را به محیط بفرستند و باعث آلودگی شوند، چه فایده‌ای برای بهبود محیط زیست دارند؟

(هوش کلامی)

۲۷۷- گزینهٔ «۲» *(کتاب استعدادتحلیلی هوش کلامی، بر اساس کنکور دکتری سال ۹۲)*

طبق گزینهٔ پاسخ، مقایسهٔ دو کشور و دو محصول با یکدیگر درست نیست، چرا که محصول ذرّت در کشور «ب» به اندازهٔ کشور «الف» به‌صرفه نیست. این بهترین گزینه است.

(هوش کلامی)

۲۷۸- گزینهٔ «۲» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

منعی برای کنار هم بودن «ب» و «ن» نیست، ولی چهار حرف «ز ذ ض ظ» نمی‌توانند کنار هم قرار بگیرند، چرا که خانه‌های عددهای ۳، ۶، ۹ و ۱۲ به حرف‌های «ت»، «ف»، «ق» و «ن» اختصاص دارد.

(هوش منطقی و ریاضی)

۲۷۹- گزینهٔ «۲» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

حرف‌های «ت» و «ف» قطعاً کنار هم نیستند. حروف «ج ذ ب» نیز بی‌فاصله کنار هم نمی‌آیند، چرا که هیچ کدام «ت»، «ق»، «ف» و «ن» نیستند.

(هوش منطقی و ریاضی)

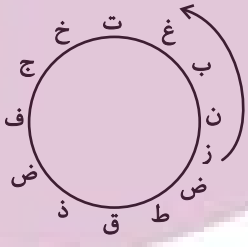
۲۸۰- گزینهٔ «۲» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

در ساعت یادشده، دو عقربه روی یکدیگرند و یک حرف را نشان می‌دهند.

(هوش منطقی و ریاضی)

۲۸۱- گزینهٔ «۳» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

حرف «ش» اصلاً در حروف نیست. بین «ن» و «ق» نیز حداقل باید دو حرف باشد ولی «زنبغ» ممکن است، مثلاً:



(هوش منطقی و ریاضی)

۲۸۲- گزینهٔ «۲» *(حمید گنجی)*

امیر در هر ساعت $\frac{۱}{۱۲}$ کار را انجام می‌دهد. او در هشت ساعت، $۸\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$ از کار را انجام داده است پس $\frac{۱}{۳}$ کار باقی بوده است. سه نفر با هم، در یک ساعت $\frac{۱}{۳}$ باقی‌مانده را انجام داده‌اند، یعنی:

$$\frac{۱}{۱۲}+x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$ کار زهرا و مینا + کار امیر

پس زهرا و مینا در هر ساعت $\frac{۱}{۴}$ از کار را انجام می‌دهند. پس در چهار ساعت به انجام کل کار می‌رسند.

(هوش منطقی و ریاضی)

توشه‌ای برای موفقیت

۲۸۳- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

تعداد پرتاب‌های دوامتیازی دادهٔ مفیدی نیست، از پرتاب‌های یک‌امتیازی هم اطلاعی نداریم! تعداد پرتاب‌های یک شخص خاص هم درصدِ پرتاب‌های درست تیم را معلوم نمی‌کند.

(هوش منطقی و ریاضی)

۲۸۴- گزینهٔ «۱» *(حمید کنعانی)*

اعداد بر اساس باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد چهار تقسیم‌بندی شده است:

$۳۱۳,۶۰۵,۷۲۱ \rightarrow ۱$

$۱۶۰,۵۰۸,۴۰۴ \rightarrow ۰$

$۹۰۳,۲۱۵,۱۱۱ \rightarrow ۳$

$۷۲۶,۸۱۴ \rightarrow ۲$

در نتیجه عدد خواسته شده باید در تقسیم بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۲ داشته باشد.

(هوش منطقی و ریاضی)

۲۸۵- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

در الگوی صورت سؤال:

$۹-۲=۷,۲\times۹=۱۸,۹-۵=۴,۹\times۵=۴۵ \rightarrow ۷۱۸۴۴۵$

$۶-۳=۳,۳\times۶=۱۸,۶-۴=۲,۶\times۴=۲۴ \rightarrow ۳۱۸۲۲۴$

$۷-۵=۲,۵\times۷=۳۵,۷-۱=۶,۷\times۱=۷ \rightarrow ۲۳۵۶۷$

$۸-۴=۴,۴\times۸=۳۲,۸-۰=۸,۸\times۰=۰ \rightarrow ۴۳۲۸۰$

$۳-۱=۲,۳\times۱=۳,۳-۲=۱,۳\times۲=۶ \rightarrow ۲۳۱۶$

(هوش منطقی و ریاضی)

۲۸۶- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

هر دو قطعهٔ روبه‌روی هم در شکل صورت سؤال، به این شکل قرینهٔ یکدیگرند که دایره‌های رنگی به مربع‌های سفید تبدیل می‌شوند و دایره‌های سفید به مربع‌های رنگی

(هوش غیرکلامی)

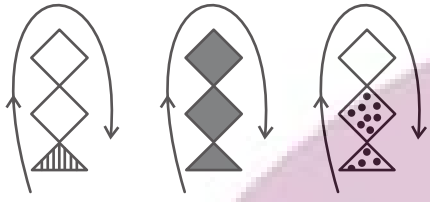
۲۸۷- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

در انتقال از بالا به پایین در الگوی صورت سؤال، جهت شکل وسط ۱۸۰° و جایگاه همهٔ شکل‌ها قرینه می‌شود و رنگ داشتن یا نداشتن آن‌ها هم جابه‌جا می‌شود.

(هوش غیرکلامی)

۲۸۸- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

شکل از سه طرح در قالب تشکیل شده است که با الگویی ثابت از چپ به راست در حرکتند:



(هوش غیرکلامی)

۲۸۹- گزینهٔ «۴» *(حمید کنعانی)*

در ساعت شنی اصولاً شن‌ها رو به پایین حرکت می‌کنند. در ساعت‌های شنی صورت سؤال که این قاعده در آن‌ها رعایت شده است کُد «الف» داریم و آن ساعت‌های شنی که خلاف قاعده‌اند کُد «ب» خورده‌اند. کدهای «ج» و «د» نیز به رنگ بالای ساعت مربوط است.

(هوش غیرکلامی)

۲۹۰- گزینهٔ «۳» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» به‌ترتیب نماها از جلو، راست و بالای حجم است.

(هوش غیرکلامی)

توشه‌ای برای موفقیت