دفترچه پاسخ

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

آزمون ۲۰ بهمن ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ وریاضی‌پایه	شاهین پروازی-عادل حسینی-افشین خاصه‌خان-محمدرضا راسخ-جمشید عباسی-حمید علیزاده-کامیار علّییون کیان کریمی‌خراسانی-سپهر متولی-حامد معنوی-مهدی ملارمضانی-مهرداد ملوندی-میلاد منصوری
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-اسحاق اسفندیار-علی ایمانی-جواد ترکمن-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-افشین خاصه‌خان-کیوان دارابی سوگند روشنی-محمد صحت‌کار-مهرداد ملوندی
	ریاضیات گسسته	علی ایمانی-جواد ترکمن-فرزاد جوادی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-کیوان دارابی-مصطفی دیداری-سوگند روشنی محمد صحت‌کار-مهرداد ملوندی
	فیزیک	کامران ابراهیمی-زهره آقامحمدی-علیرضا جباری-دانیال راستی-محمدجواد سورچی-معصومه شریعت‌ناصری-پوریا علاقه‌مند غلامرضا محبی-آراس محمدی-محمدکاظم منشادی-امیراحمد میرسعید-سیده ملیحه‌میرصالحی-حسام نادری-مجتبی نکوئیان محمد نهاوندی‌مقدم
	شیمی	محمدرضا پورجاوید-امیر حاتمیان-پیمان خواجوی‌مجد-امین خوشنویسان-حمید ذبحی-روزبه رضوانی-میلاد شیخ الاسلامی‌خیاوی امیرحسین طیبی-محمد عظیمیان‌زواره-پارسا عیوض‌پور-سیدمهدی غفوری-امیرمحمد کنگرانی-هادی مهدی‌زاده

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	کیوان دارابی محمد صحت‌کار	کیوان دارابی محمد صحت‌کار	حسام نادری	پارسا عیوض‌پور
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی سعید خان‌بابایی محمدرضا راسخ	مهرداد ملوندی	مهرداد ملوندی	زهره آقامحمدی	امیرحسین مسلمی محمدحسن محمدزاده مقدم
بازبینی نهایی رتبه های برتر	پارسا نوروزی‌منش سهیل تقی‌زاده	پارسا نوروزی‌منش مهبد خالتی	پارسا نوروزی‌منش مهبد خالتی	معین یوسفی‌نیا حسین بصیرترکمبور	علی رضایی احسان پنجه‌شاهی مهدی سهامی
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	حسام نادری	پارسا عیوض‌پور
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین مرتضوی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

تـوشـه ای بـرای مـوفقیت

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

تابع f باید در $x=a$ اکیداً نزولی باشد و در آن بتوان خط مماس قائم رسم کرد.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۸۸)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(جمشید عباسی)*

از تساوی $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\dfrac{۳}{۲}$ نتیجه می‌شود که $f'(۳)=\dfrac{۳}{۲}$ است

و از نکتهٔ $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(x_۰+mh)-f(x_۰+nh)}{rh}=\dfrac{m-n}{r}f'(x_۰)$ داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+۴h)-f(۳)}{۳h}=\frac{۴-۰}{۳}f'(۳)=۲$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۳- **گزینهٔ «۱»** *(سپهر متولی)*

در تابع درجه دوم، اگر $f(x_۱)=f(x_۲)$ باشد، آن‌گاه $f'(x_۱)+f'(x_۲)=۰$ است. پس در این سؤال داریم:

$$\begin{cases}f(a)=f(b)=۱\\-f'(a)=f'(b)=-۲\end{cases}$$

پس شیب خط عمود بر نمودار تابع در $x=b$ برابر $\dfrac{۱}{۲}$ است و معادلهٔ این خط $y=\dfrac{۱}{۲}x-۳$ به دست می‌آید. از آنجا که $f(b)=۱$ است، مقدار b را حساب می‌کنیم:

$$۱=\frac{۱}{۲}b-۳\Rightarrow b=۸$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۸۰)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(سپهر متولی)*

با توجه به تعریف مشتق، از تساوی $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-۱۱}{x-a}=۲$ نتیجه می‌گیریم که $f(a)=۱۱$ و $f'(a)=۲$ است. از طرفی با توجه به ویژگی نقاط روی یک خط، نتیجه می‌گیریم که $\dfrac{x_C-x_B}{x_B-x_A}=۲$ است. پس داریم:

$$\frac{۹-a}{a-۳}=۲\Rightarrow a=۵$$

پس $f(۵)=۱۱$ و $f'(۵)=۲$ است و در نتیجه معادلهٔ خط مماس $y=۲x+۱$ است.

$$\Rightarrow\begin{cases}y_A=۲(۳)+۱=۷\\y_C=۲(۹)+۱=۱۹\end{cases}\Rightarrow y_A+y_C=۲۶$$

(حسابان ۲- مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۸۳)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

$$y=\sqrt{x^۳-۳x-۲}=\sqrt{(x+۱)(x^۲-x-۲)}$$

$$=\sqrt{(x+۱)^۲(x-۲)}$$

دامنهٔ تابع $[۲,+\infty)\cup\{-۱\}$ است و بدیهی است که در همسایگی $x=-۱$ و در همسایگی چپ $x=۲$ تابع تعریف نشده است. پس دامنهٔ تابع مشتق بازهٔ $(۲,+\infty)$ است.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۸۹)

۶- **گزینهٔ «۲»** *(مهری ملارمضانی)*

ریشه‌های عبارت رادیکالی جزء نقاط مشتق‌ناپذیر تابع هستند، زیرا تابع در یکی از همسایگی‌های چپ یا راست این نقاط تعریف نمی‌شود:

$$۱-\sin\pi x=۰\Rightarrow\sin\pi x=۱\Rightarrow\pi x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x=۲k+\frac{۱}{۲}$$

در مجموعهٔ $(-۱,\sqrt{۲})-\{۰\}$ فقط $x=\dfrac{۱}{۲}$ در این مجموعه قرار می‌گیرد. همچنین در نقاطی که عبارت $x+\dfrac{۱}{۲}$ عددی صحیح می‌شود، تابع مشتق‌ناپذیر است که در مجموعهٔ مورد نظر $x=-\dfrac{۱}{۲}$ و $x=\dfrac{۱}{۲}$ چنین ویژگی‌هایی دارند، پس تابع در مجموعهٔ مورد سؤال ۲ نقطه مشتق‌ناپذیر دارد.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۸۹)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد منصوری)*

چون عامل ضربی پشت جزءصحیح، از درجه یک است، تنها حالتی که برای مشتق‌پذیری تابع در $x=-۱$ امکان‌پذیر است، این است که $x=-۱$ طول رأس سهمی $y=x^۲+kx$ باشد.

ایران توشه برای موفقیت

$$\Rightarrow -\frac{k}{2} = -1 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow f(x) = (2x+1)[x^2+2x]$$

و داریم:

$$f'_-(-3) = \lim_{x\to(-3)^-} \frac{(2x+1)[x^2+2x]+15}{x+3}$$

$$= \lim_{x\to(-3)^-} \frac{3(2x+1)+15}{x+3} = \lim_{x\to(-3)^-} \frac{6(x+3)}{x+3} = 6$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۰ و ۸۶ تا ۸۹)

۸- **گزینهٔ «۱»** (مهدی ملارمضانی)

در یک همسایگی $x=1$ می‌توانیم ضابطه‌های تابع f را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & ; \quad x \le 1 \\ -x & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

تابع در $x=1$ پیوسته است و داریم: $f'_-(1) = -2$ و $f'_+(1) = -1$.

حال حاصل حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+2|h|)-f(1+h)}{h^2-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+2|h|)-f(1)}{h^2-h} - \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h^2-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1-2h)-f(1)}{-h} - \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{-h}$$

در کسر اول، اگر $-2h$ را H در نظر بگیریم، داریم:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1-2h)-f(1)}{-h} = \lim_{H\to 0^+} \frac{f(1+H)-f(1)}{\frac{H}{2}}$$

در نهایت حاصل حد برابر است با:

$$= 2\lim_{H\to 0^+} \frac{f(1+H)-f(1)}{H} + \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= 2f'_+(1) + f'_-(1) = -4$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۹- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است، اما مشتق تابع در ریشه‌های عبارت x^2-x و همچنین ریشه‌های عبارت $\sqrt[3]{x^2-x}-1$ تعریف نمی‌شوند. این نقاط دقیقاً همان نقاطی است که تابع f در آنجا مماس قائم (موازی محور yها) دارد.

$$\begin{cases} x^2-x=0 \Rightarrow x=0,1 \\ 1-\sqrt[3]{x^2-x}=0 \Rightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

یعنی تابع f چهار مماس قائم دارد. تابع f در $\mathbb{R}-\{0,1,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم:

$$x^2-x \ge -\frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-x} \ge -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

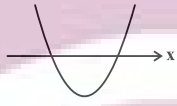
$$\Rightarrow 1-\sqrt[3]{x^2-x} \le 1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow f(x) \le \sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$$

یعنی بیشترین مقدار تابع f برابر $\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$ است و چون تابع در این نقطه پیوسته و مشتق‌پذیر است، قطعاً در آن مماس افقی (موازی محور xها) دارد. پس در کل، ۵ خط مماس موازی محورها در این تابع می‌توانیم رسم کنیم.

(حسابان ۲- مکمل مثال صفحهٔ ۸۸)

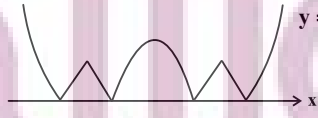
۱۰- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

نمودار یک تابع درجه دوم $y=g(x)$ را که در آن Δ مثبت است، مطابق شکل زیر در نظر بگیرید:



نمودار تابع $y=|g(x)|$ مطابق شکل زیر است که دو نقطه مشتق‌ناپذیر دارد:

حال اگر نمودار بالا را k واحد به سمت پایین انتقال دهیم و سپس قدرمطلق آن را رسم کنیم، به نمودار زیر می‌رسیم که شش نقطه مشتق‌ناپذیر دارد:



با این شرط که مقدار مثبت k از قدرمطلق عرض رأس سهمی $y=g(x)$ کمتر باشد.

حال همین استدلال را برای تابع f دنبال می‌کنیم و برای این‌که شش نقطه مشتق‌ناپذیر داشته باشد، لازم است که شروط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} m > ۰ & (۱) \\ \Delta > ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۴m > ۰ \Rightarrow m < ۴ & (۲) \\ m < |y_s| \Rightarrow m < |\frac{۱۶ - ۴m}{-۴}| & \\ \Rightarrow m < ۴ - m \Rightarrow m < ۲ & (۳) \end{cases}$$

اشتراک سه مجموعهٔ بالا بازهٔ $(۲ , ۰)$ است. بزرگ‌ترین عدد صحیح این بازه فقط $m = ۱$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

حسابان ۲- پیشروی سریع

۱۱- **گزینهٔ «۱»** (افشین خاصه‌خان)

ضابطهٔ تابع مشتق به صورت زیر است:

$$y' = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۱}} = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۱}} \xrightarrow{x=\sqrt{۳}} y' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۴ و ۹۶)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا راسخ)

از طرفین رابطهٔ داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = f'(۲)x^۲ + x \Rightarrow f'(x) = ۲f'(۲)x + ۱$$

و $x = ۲$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f'(۲) = ۴f'(۲) + ۱ \Rightarrow f'(۲) = -\frac{۱}{۳}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x) = -\frac{۱}{۳}x^۲ + x$ است. حال داریم:

$$f'(x) = -\frac{۲}{۳}x + ۱ \Rightarrow f'(۳) = -۱$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۳)

۱۳- **گزینهٔ «۴»** (شاهین پروازی)

اگر f یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، f' و f'' به ترتیب چندجمله‌ای درجهٔ $(n-۱)$ و $(n-۲)$ هستند و چون حاصل جمع f' و f'' تابعی درجه یک است، $y = f(x)$ تابعی درجه دوم است:

$$f(x) = ax^۲ + bx + c \Rightarrow f'(x) = ۲ax + b \ , \ f''(x) = ۲a$$

$$f'(۲x) = ۴ax + b$$

حال رابطهٔ داده شده را می‌سازیم:

$$f'(۲x) + f''(x) = ۴ax + b + ۲a = ۴x + ۱ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۱ \end{cases}$$

پس داریم: $f(x) = x^۲ - x + c$

$$\xrightarrow{f'(۰) = -۱} f(f'(۰)) = f(-۱) = ۲ + c = ۳ \Rightarrow c = ۱$$

c همان عرض از مبدأ تابع f است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۳ و ۹۸)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا راسخ)

$f'.g + f.g'$ همان $(f \times g)'$ است. بنابراین ابتدا ضابطهٔ تابع $f \times g$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(f \times g)(x) = ۳^{\log_۶ x^۲} \times ۲^{۲\log_۶ |x|} = ۳^{\log_۶ x^۲} \times ۲^{\log_۶ x^۲}$$

$$= ۶^{\log_۶ x^۲} = x^۲ \ ; \quad x \neq ۰$$

$$\Rightarrow (f \times g)'(x) = ۲x \ ; \quad (x \neq ۰)$$

$$\Rightarrow (f \times g)'(۲) = ۴$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۴)

۱۵- **گزینهٔ «۱»** (جمشید عباسی)

باید ضابطهٔ تابع را ساده کنیم:

$$f(x) = (\frac{\sin^۲ ۲x + \cos^۲ ۲x + ۲\sin ۲x \cos ۲x}{\sin ۲x + \cos ۲x})^۲$$

$$= (\frac{(\sin ۲x + \cos ۲x)^۲}{\sin ۲x + \cos ۲x})^۲ = (\sin ۲x + \cos ۲x)^۲$$

با استفاده از اتحاد $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{۲} \sin(\alpha + \frac{\pi}{۴})$ داریم:

$$f(x) = (\sqrt{۲} \sin(۲x + \frac{\pi}{۴}))^۲ = ۲\sin^۲(۲x + \frac{\pi}{۴})$$

و همچنین از اتحاد $۲\sin^۲ \alpha = ۱ - \cos ۲\alpha$ داریم:

$$f(x) = ۱ - \cos ۲(۲x + \frac{\pi}{۴}) = ۱ - \cos(\frac{\pi}{۲} + ۴x) = ۱ + \sin ۴x$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۴\cos ۴x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۱۶}) = ۴\cos \frac{\pi}{۴} = ۲\sqrt{۲}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

توسعه اعتبار برای موفقیت

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا راسخ)*

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

حال مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \tan\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}x(1+\tan^2\frac{\pi x}{2})$$

$$\Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = \tan\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(1+\tan^2\frac{\pi}{4}) = 1+\frac{\pi}{2}$$

پس معادلهٔ خط به صورت زیر است:

$$y-\frac{1}{2} = (1+\frac{\pi}{2})(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow (2\pi+4)x = \pi+4y$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(کامیار علّیون)*

ابتدا عبارت خواسته شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{f'g-2fg'}{2\sqrt{f}g^2} = \frac{\frac{f'g}{2\sqrt{f}} - \frac{2fg'}{2\sqrt{f}}}{g^2} = \frac{\frac{f'}{2\sqrt{f}}g - \sqrt{f}g'}{g^2} = (\frac{\sqrt{f}}{g})'$$

حال بایستی ضابطهٔ $\frac{\sqrt{f}}{g}$ را به دست آوریم:

$$(\frac{\sqrt{f}}{g})(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = \frac{|x-2|}{x-2}$$

که در یک همسایگی $x=2$ با تابع $y=1$ مساوی است. بنابراین مشتق آن صفر خواهد بود.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۹۴)

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد منصوری)*

$g(1) = -2$ است و تابع f در $x=-2$ از چپ پیوسته است، تابع g اکیداً نزولی است و در همسایگی راست $x=1$، مقادیر آن کمتر از ۲- است، پس برای $x \le -2$ ضابطهٔ تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$x < -2 : h(x) = \frac{2x}{x^2-2}$$

از طرفی داریم:

$$(fog)'_+(1) = g'(1)f'_+(g(1)) = g'(1)h'(-2) \quad (*)$$

حال حاصل را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} \Rightarrow g'(1) = -\frac{1}{4} \\ h'(x) = -\frac{2x^2+4}{(x^2-2)^2} \Rightarrow h'(-2) = -3 \end{cases} \xrightarrow{(*)} (fog)'_+(1) = \frac{3}{4}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۴ و ۹۶)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$y = f(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-2(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{4x}.f'(\sqrt{x}) + \frac{1}{4x}f''(\sqrt{x})$$

$$\xrightarrow{x=4} -\frac{1}{4(4)\sqrt{4}}f'(\sqrt{4}) + \frac{1}{4(4)}f''(2) = 0$$

با توجه به نمودار شیب خط مماس در $x=2$ یا همان $f'(2)$ برابر $\frac{2}{3}$ است. پس داریم:

$$-\frac{1}{32}(\frac{2}{3}) + \frac{1}{16}f''(2) = 0 \Rightarrow f''(2) = \frac{1}{3}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۴، ۹۶ و ۹۸)

۲۰- **گزینهٔ «۴»** *(شاهین پروازی)*

از تابع $y = g(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$g(x) = -f^{-2}(x) \Rightarrow g'(x) = 2f^{-3}(x)f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(24) = \frac{2f'(24)}{f^3(24)} \quad (*)$$

برای محاسبهٔ $f'(24)$ از ضابطهٔ $f(x^2+2x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x^2+2x) = (\sqrt{x}-1)^{-1}$$

$$\Rightarrow (2x+2)f'(x^2+2x) = -(\sqrt{x}-1)^{-2}(\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

با جای‌گذاری $x=4$ داریم:

$$10f'(24) = -(\frac{1}{4}) \Rightarrow f'(24) = -\frac{1}{40}$$

با جای‌گذاری $x=4$، $f(24)$ هم برابر یک به دست می‌آید. پس داریم:

$$\xrightarrow{(*)} g'(24) = \frac{2(-\frac{1}{40})}{1^3} = -\frac{1}{20}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۹۳ و ۹۶)

ابزار آزمون — توشه‌ای برای موفقیت

ریاضی پایه

۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی ملارمضانی)*

عبارت را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۲x-(x-۱)(x+۲)=-x^۲+x+۲$$

بیشترین مقدار عبارت بالا، عرض رأس سهمی $y=-x^۲+x+۲$ است که از رابطهٔ $y_S=-\frac{\Delta}{۴a}$ می‌توانیم مقدار آن را حساب کنیم.

$$\Rightarrow y_S=-\frac{۹}{۴(-۱)}=\frac{۹}{۴}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

براساس ریشه عبارت قدرمطلقی که $x_۰=۲$ است؛ نامعادله را در دو حالت $x<۲$ و $x\geq ۲$ حل می‌کنیم:

$$x<۲:\ \frac{۳x+(x-۲)}{x+۲}\leq ۱\Rightarrow \frac{۴x-۲}{x+۲}\leq ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۴x-۲}{x+۲}-۱=\frac{۳x-۴}{x+۲}\leq ۰\Rightarrow -۲<x\leq \frac{۴}{۳}$$

که این بازه زیرمجموعهٔ بازهٔ $x<۲$ قرار دارد.

$$x\geq ۲:\ \frac{۳x-(x-۲)}{x+۲}\leq ۱\Rightarrow \frac{۲x+۲}{x+۲}\leq ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲x+۲}{x+۲}-۱=\frac{x}{x+۲}\leq ۰\Rightarrow -۲<x\leq ۰$$

که با توجه به شرط $x\geq ۲$، این بازه قابل قبول نیست. در نهایت مجموعه جواب‌های نامعادله بازهٔ $(-۲,\frac{۴}{۳}]$ است که شامل ۳ عدد صحیح است.

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد منصوری)*

جواب‌های معادلهٔ مورد نظر را $\alpha'=\frac{۱}{۲\alpha-۱}$ و $\beta'=\frac{۱}{۲\beta-۱}$ در نظر می‌گیریم:

$$S'=\alpha'+\beta'=\frac{۱}{۲\alpha-۱}+\frac{۱}{۲\beta-۱}$$

$$=\frac{۲\alpha+۲\beta-۲}{۴\alpha\beta-۲\alpha-۲\beta+۱}=\frac{۲(\alpha+\beta)-۲}{۴(\alpha\beta)-۲(\alpha+\beta)+۱}$$

در معادلهٔ داده شده، $\alpha+\beta=\frac{۱۱}{۲}$ و $\alpha\beta=-\frac{۳}{۲}$ است.

$$\Rightarrow S'=\frac{۲(\frac{۱۱}{۲})-۲}{۴(-\frac{۳}{۲})-۲(\frac{۱۱}{۲})+۱}=-\frac{۹}{۱۶}$$

$$P'=\frac{۱}{۲\alpha-۱}\times\frac{۱}{۲\beta-۱}=\frac{۱}{۴(\alpha\beta)-۲(\alpha+\beta)+۱}=-\frac{۱}{۱۶}$$

پس معادلهٔ مورد نظر $x^۲+\frac{۹}{۱۶}x-\frac{۱}{۱۶}=۰$ یا $۱۶x^۲+۹x-۱=۰$ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)

۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

تابع اگر درجه دوم نباشد $(k=۰)$، تابع ثابت $y=-۱$ است که فقط از دو ربع دستگاه مختصات می‌گذرد. پس سهمی یا فقط از سه ناحیه یا از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. در هر حالت، حدود k را می‌یابیم:

الف) عبور از هر ۴ ناحیه: کافی است $\frac{c}{a}$ منفی باشد:

$$\Rightarrow -\frac{۱}{k}<۰\Rightarrow k>۰ \qquad (۱)$$

ب) عبور از فقط ۳ ناحیه: در این شرط Δ مثبت و P نامنفی است.

$$\Rightarrow \begin{cases} P=-\frac{۱}{k}\geq ۰\Rightarrow k<۰ \\ \Delta=۹k^۲+۴k>۰\Rightarrow -\frac{۴}{۹}>k \ \text{ یا } \ k>۰ \end{cases} \Rightarrow k<-\frac{۴}{۹} \qquad (۲)$$

اجتماع (۱) و (۲) مجموعهٔ $\mathbb{R}-[-\frac{۴}{۹},۰]$ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(حمید علیزاده)*

اگر دو مهندس با هم کار کنند، پروژه در n روز به اتمام می‌رسد. پس مهندس اول کار را به تنهایی در $n+۴$ و مهندس دوم در $n+۹$ روز تمام می‌کند. پس داریم:

$$\frac{۱}{n+۴}+\frac{۱}{n+۹}=\frac{۱}{n}$$

با توجه به گزینه‌ها $n=۶$ در معادلهٔ بالا صدق می‌کند. برای حل مستقل معادله نیز داریم:

$$\frac{۲n+۱۳}{n^۲+۱۳n+۳۶}=\frac{۱}{n}\Rightarrow n^۲+۱۳n+۳۶=۲n^۲+۱۳n$$

$$\Rightarrow n^۲=۳۶\Rightarrow n=۶$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد منصوری)*

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۳x^۲+\frac{۱}{x}=(x+۱)^۲=x^۲+۲x+۱$$

$$\Rightarrow ۳x^۳+۱=x^۳+۲x^۲+x\Rightarrow ۲x^۳-۲x^۲-x+۱=۰$$

ایران توشه برای موفقیت

می‌توانیم عبارت را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$۲x^۲(x-۱)-(x-۱)=(x-۱)(۲x^۲-۱)=۰$$

$$\Rightarrow x=۱\ ,\ \frac{۱}{\sqrt{۲}}\ ,\ -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

هر ۳ جواب هم قابل قبول است، پس نسبت بزرگ‌ترین جواب به کوچک‌ترین جواب برابر $-\sqrt{۲}$ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(حامد معنوی)*

$$AF=AB+BC+CD+DE+EF$$

از طرفی طول پاره‌خط BC به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(BC)^۲=x^۲+۷\Rightarrow BC=DE=\sqrt{x^۲+۷}$$

بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{AF=۱۶}۱+۲\sqrt{x^۲+۷}+x+۴=۱۶\Rightarrow ۲\sqrt{x^۲+۷}=۱۱-x$$

$$\xrightarrow{\text{توان }۲}۴x^۲+۲۸=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow ۳x^۲+۲۲x-۹۳=۰$$

$$\Rightarrow (۳x+۳۱)(x-۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۳ & \text{ق ق} \\ x=-\frac{۳۱}{۳} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

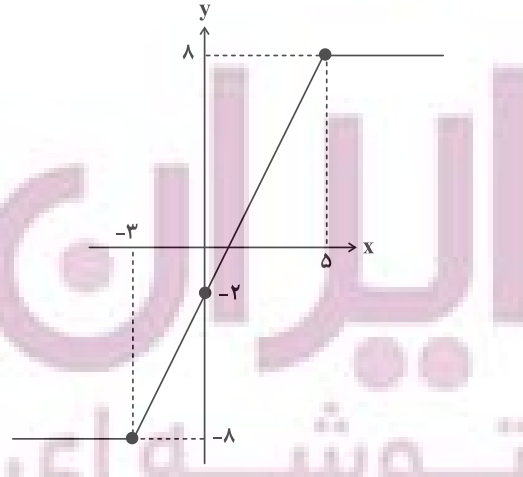
بنابراین اندازهٔ پاره‌خط BC به صورت زیر به دست می‌آید:

$$BC=\sqrt{x^۲+۷}\xrightarrow{x=۳}BC=\sqrt{۱۶}=۴$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(حامد معنوی)*

ابتدا نمودار تابع $y=|x+۳|-|x-۵|$ را رسم می‌کنیم:

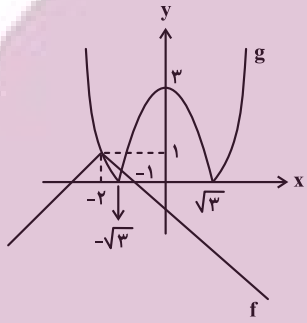


با توجه به نمودار، باید $-۸<k<۸$ باشد تا معادله فقط یک جواب داشته باشد. حال اگر $-۲<k<۰$ باشد، جواب معادلهٔ $(x=\alpha)$ مثبت است و شرط $k\alpha<۰$ برقرار می‌شود، در غیر این صورت $k\alpha\geq ۰$ خواهد شد. در نتیجه فقط یک مقدار صحیح برای k پیدا می‌شود.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

باید معادلهٔ $|x+۲|+|x^۲-۳|=۱$ را حل کنیم. برای این کار بهتر است نمودار دو تابع $f(x)=۱-|x+۲|$ و $g(x)=|x^۲-۳|$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم؛ زیرا تعداد نقاط برخورد این دو نمودار، همان تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر است:



با توجه به نمودار بالا تعداد جواب‌های معادله برابر ۲ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۴ و ۲۴)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(کیان کریمی‌خراسانی)*

ابتدا نسبت مساحت ADF به ABC را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{S_{ADF}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin\hat{A}.AD.AF}{\frac{۱}{۲}\sin\hat{A}.AB.AC}=\frac{AD}{AB}.\frac{AF}{AC}=\frac{۲}{۳}.\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹}$$

به شیوهٔ مشابه، مساحت BDE و CEF نیز $\frac{۲}{۹}$ مساحت ABC هستند.

$$S_{DEF}=S_{ABC}-S_{ADF}-S_{BDE}-S_{CEF}$$

$$\Rightarrow S_{DEF}=S_{ABC}-۳\times\frac{۲}{۹}S_{ABC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}\qquad (*)$$

حال مساحت مثلث ABC را حساب می‌کنیم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۷ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۱ \end{vmatrix}=۱۵$$

$$\xrightarrow{(*)}S_{DEF}=۵$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۳۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۳

۳۱- **گزینهٔ «۲»** (علی ایمانی)

با توجه به شکل و فرض سؤال داریم:

$$\frac{S_{ABF'B'}}{S_{ABF}}=۵\Rightarrow\frac{\frac{BB'.AF'}{۲}}{\frac{OB.AF}{۲}}=۵$$

$$\frac{۲b(a+c)}{b(a-c)}=۵\Rightarrow\frac{۲a+۲c}{a-c}=۵$$

$$۲a+۲c=۵a-۵c\Rightarrow ۷c=۳a\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۷}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۲- **گزینهٔ «۳»** (سوکند روشنی)

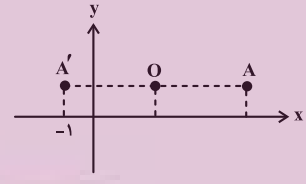
طبق فرض:

$$\begin{cases}|AA'|=۶=۲a\Rightarrow a=۳\\ ۲c=۳\Rightarrow c=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۹=b^۲+\frac{۹}{۴}\Rightarrow b^۲=\frac{۲۷}{۴}\Rightarrow b=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$O=\frac{A+A'}{۲}=(۲,۱)$$

بیضی افقی است و مختصات دو رأس ناکانونی به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\begin{cases}B(۲,۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})\\ B'(۲,۱-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})\end{cases}$$

رأس ناکانونی B در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار دارد:

$$۲+۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=۳+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۳- **گزینهٔ «۴»** (اسماق اسفندیار)

در این بیضی طبق فرض داریم:

$$BF=۲\sqrt{۳}=a\ ,\quad AF=a-c=\sqrt{۳}\Rightarrow c=\sqrt{۳}$$

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow b^۲=۹$$

NP و MQ وترهای کانونی بیضی هستند:

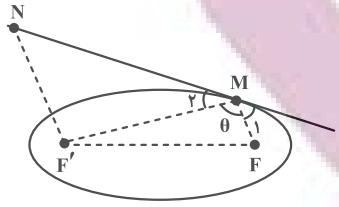
$$MQ=NP=\frac{۲b^۲}{a}=\frac{۲(۹)}{۲\sqrt{۳}}=۳\sqrt{۳}$$

$$\text{محیط } MNPQ=۲(MQ+MN)=۲(۳\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳})=۱۰\sqrt{۳}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۴- **گزینهٔ «۱»** (اسماق اسفندیار)

طبق فرض و مطابق شکل داریم:



$$MF+MF'=۲a\xrightarrow[۲a=۳\sqrt{۳}]{MF=\sqrt{۳}}MF'=۲\sqrt{۳}$$

بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث MFF' داریم:

$$FF'^۲=MF^۲+MF'^۲-۲MF\times MF'\times\cos\theta$$

$$\Rightarrow ۲۱=۳+۱۲-۲(\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳})\cos\theta$$

$$\Rightarrow\cos\theta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۱۲۰^\circ\Rightarrow\hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۳۰^\circ$$

طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم: $M\hat{N}F'=\hat{M}_۱=۳۰^\circ$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** (مهرداد ملوندی)

چون رأس و کانون روی خط $y=-۱$ قرار دارند، لذا سهمی افقی است و چون کانون ۳ واحد سمت چپ رأس قرار دارد، دهانهٔ سهمی رو به سمت چپ باز می‌شود و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$(y+۱)^۲=-۱۲(x-۵)$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۳۶- **گزینهٔ «۲»** (سوکند روشنی)

مکان هندسی مورد نظر یک سهمی است که خط $y=۱$ خط هادی و نقطه $F(۲,۵)$ کانون آن است. مختصات رأس سهمی به صورت $S(۲,۳)$ و سهمی قائم است و رو به بالا باز می‌شود.

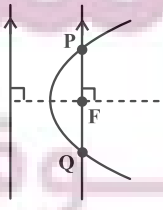
معادلهٔ سهمی: $(x-\alpha)^۲=۴a(y-\beta)\Rightarrow(x-۲)^۲=۸(y-۳)$

$$\xrightarrow{x=-۲}۱۶=۸(y-۳)\Rightarrow y=۵\Rightarrow(-۲,۵)$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۳۷- **گزینهٔ «۱»** (مهرداد ملوندی)

خطی که از کانون یک سهمی به موازات خط هادی رسم می‌کنیم، بر محور تقارن سهمی عمود است. نمودار سهمی، روی این خط، وتر PQ به اندازهٔ $۴a$ جدا می‌کند که به وتر کانونی سهمی موسوم است. طبق فرض، مختصات نقاط P و Q، به صورت $(۷,۲)$ و $(-۱,۲)$ است و در نتیجه:



$$۴a = PQ = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

همچنین چون این دو نقطه روی خط $x = ۲$ قرار دارند، پس خط هادی، قائم بوده و سهمی افقی است و نقطهٔ وسط این دو نقطه یعنی $F = (۲ , ۳)$ کانون سهمی است. پس یکی از نقاط $(۴ , ۳)$ و $(۰ , ۳)$ رأس سهمی است و لذا معادلهٔ سهمی به یکی از دو صورت زیر است:

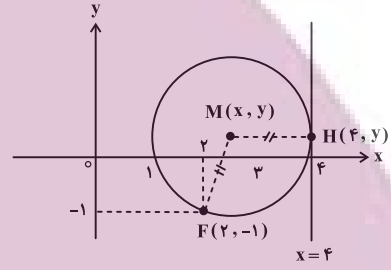
$$(y-۳)^۲ = -۸(x-۴) \quad , \quad (y-۳)^۲ = ۸x$$

توجه: $(y-۳)^۲ = ۸x \Rightarrow y^۲ - ۶y - ۸x = -۹$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۳۸- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

اگر $M(x , y)$ مرکز یکی از دایره‌های مورد نظر باشد، طبق شکل زیر، باید $MF = MH$ باشد. پس:



$$\sqrt{(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲} = |x-۴|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ - ۴x + ۴ + (y+۱)^۲ = x^۲ - ۸x + ۱۶$$

$$\Rightarrow (y+۱)^۲ = -۴x + ۱۲ \Rightarrow (y+۱)^۲ = -۴(x-۳)$$

معادلهٔ فوق، مربوط به یک سهمی به رأس $(۳ , -۱)$ است.

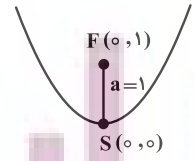
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

سهمی $x^۲ = ۴y$ یک سهمی قائم است که دهانهٔ آن رو به بالا باز می‌شود.

$$(x-۰)^۲ = ۴\times۱(y-۰) \Rightarrow S = (۰ , ۰) \quad , \quad a = ۱$$

بنابراین مختصات کانون $F(۰ , ۱)$ است. حال معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $F(۰ , ۱)$ و شعاع ۳ می‌نویسیم.



$$x^۲ + (y-۱)^۲ = ۹$$

نهایتاً دایره را با سهمی قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^۲ + (y-۱)^۲ = ۹ \\ x^۲ = ۴y \end{cases} \Rightarrow ۴y + (y-۱)^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow ۴y + y^۲ - ۲y + ۱ = ۹$$

$$\Rightarrow y^۲ + ۲y + ۱ = ۹ \Rightarrow (y+۱)^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+۱ = ۳ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow x^۲ = ۴y = ۸ \Rightarrow x = \pm ۲\sqrt{۲} \\ y+۱ = -۳ \Rightarrow y = -۴ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین دو نقطهٔ تلاقی $A(۲\sqrt{۲} , ۲)$ و $B(-۲\sqrt{۲} , ۲)$ هستند.

$$|AB| = ۲\times۲\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۴۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به معادلات محور تقارن و خط هادی، سهمی افقی است و چون نقطهٔ M در سمت راست محور yها قرار دارد، پس سهمی رو به راست باز می‌شود و معادلهٔ آن به صورت مقابل است: $(y-۲)^۲ = ۴a(x-h)$

معادلهٔ خط هادی: $x = h - a = ۰ \Rightarrow h = a$

$$(y-۲)^۲ = ۴a(x-a) \xrightarrow{M(۴ , ۶)} (۶-۲)^۲ = ۴a(۴-a)$$

$$\Rightarrow ۱۶ = ۴a(۴-a) \Rightarrow ۴ = ۴a - a^۲ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (a-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \text{رأس} : S(۲ , ۲) \\ \text{کانون} : F(۴ , ۲) \end{cases}$$

بنابراین خط $x = ۳$ عمودمنصف پاره‌خط SF است و هر نقطهٔ واقع بر آن از رأس و کانون سهمی به یک فاصله است. مختصات نقاط A و B از تلاقی این عمودمنصف با سهمی حاصل می‌شود:

$$(y-۲)^۲ = ۸(x-۲) \xrightarrow{x=۳} (y-۲)^۲ = ۸(۳-۲) = ۸$$

$$\Rightarrow y - ۲ = \pm ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases} y_A = ۲ + ۲\sqrt{۲} \\ y_B = ۲ - ۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB \text{ طول پاره‌خط } = ۴\sqrt{۲}$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات از پاره‌خط AB (خط $x = ۳$)، برابر ۳ است، پس داریم:

$$S_{OAB} = \frac{۱}{۲}\times۳\times۴\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۲}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های۵۰ تا ۵۴)

هندسه ۳- پیشروی سریع

۴۱- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

اگر معادلهٔ سهمی را به صورت $x = ay^۲ + by + c$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $S(-\frac{\Delta}{۴a} , -\frac{b}{۲a})$ رأس سهمی است، پس داریم:

$$x = \frac{y^۲}{۴} - \frac{y}{۲} + c \Rightarrow S = (-\frac{\Delta}{۴a} , -\frac{b}{۲a}) = (c - \frac{۱}{۴} , ۱)$$

از طرفی فاصلهٔ کانونی برابر است با $p = \frac{۱}{۴|a|} = \frac{۱}{۴\times\frac{۱}{۴}} = ۱$.

سهمی افقی است و دهانهٔ آن به سمت راست باز می‌شود. پس F و S دارای عرض‌های یکسان بوده اما طول F، یک واحد از طول S بیشتر است.

ایران‌زمین
تـوشـه‌ای بـرای مـوفـقـیـت

$$S=(c-\frac{۱}{۴},۱)\Rightarrow F=(c+\frac{۳}{۴},۱)$$

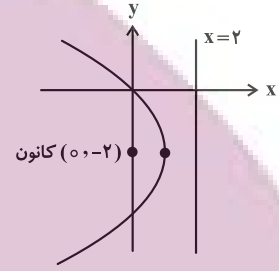
حال F روی خط $x=۲y$ واقع است، بنابراین:

$$c+\frac{۳}{۴}=۲\times ۱\Rightarrow c=۲-\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

می‌دانیم اگر پرتوها موازی محور تقارن بر سهمی بتابند، پرتو بازتاب از کانون آن عبور می‌کند، پس نقطهٔ تلاقی بازتاب این دو پرتو، کانون سهمی است.



$$y^۲+۴y+۴x=۰\Rightarrow y^۲+۴y+۴=-۴x+۴$$

$$\Rightarrow (y+۲)^۲=-۴(x-۱)$$

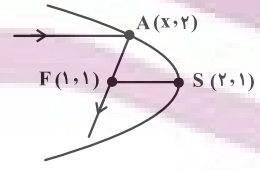
کانون: $F=(۰,-۲)$, $a=۱\Rightarrow$ رأس سهمی: $(۱,-۲)$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۴۳- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

$$y^۲-۲y+۱-۱+۴x-۷=۰\Rightarrow (y-۱)^۲+۴x-۸=۰$$

$$(y-۱)^۲=-۴x+۸=-۴(x-۲)\Rightarrow (y-۱)^۲=-۴(x-۲)$$



نمودار سهمی افقی و رو به چپ است و $S(۲,۱)$ رأس سهمی است. نقطهٔ $A(x,۲)$ روی سهمی است، پس:

$$(۲-۱)^۲=-۴(x-۲)$$

$$۱=-۴x+۸\Rightarrow x=\frac{۷}{۴}$$

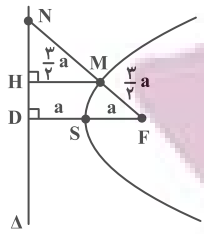
$$A(\frac{۷}{۴},۲)\ ,\ F(۱,۱)\Rightarrow \text{پرتو بازتاب}: y-۱=\frac{۴}{۳}(x-۱)$$

$$y=۰\Rightarrow -۱=\frac{۴}{۳}(x-۱)\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

از M عمودی بر خط هادی رسم می‌کنیم. طبق تعریف سهمی:



$$MH=MF=\frac{۳}{۲}a$$

حال در مثلث NDF طبق قضیهٔ تالس داریم:

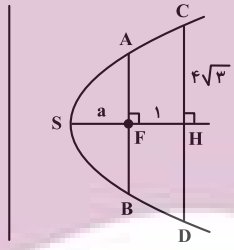
$$\frac{MH}{FD}=\frac{NM}{NF}\Rightarrow \frac{\frac{۳}{۲}a}{۲a}=\frac{NM}{NM+\frac{۳}{۲}a}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{\frac{۳}{۲}a}{\frac{۱}{۲}a}=\frac{NM}{\frac{۳}{۲}a}\Rightarrow NM=\frac{۹}{۲}a=۴/۵a$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحهٔ ۵۸)

۴۵- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

از نتیجهٔ یکی از تمرین‌های کتاب استفاده می‌کنیم. اگر قطر دهانه یک گودال به شکل سهمی برابر با d و عمق آن برابر با h باشد، آن‌گاه:



$$\text{فاصلهٔ کانونی}=a=\frac{d^۲}{۱۶h}$$

طبق شکل، رابطهٔ فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$a=\frac{|CD|^۲}{۱۶|SH|}\Rightarrow a=\frac{(۸\sqrt{۳})^۲}{۱۶(a+۱)}\Rightarrow ۱۶a(a+۱)=۶۴\times ۳$$

$$\Rightarrow a^۲+a=۱۲\Rightarrow a^۲+a-۱۲=۰\Rightarrow (a+۴)(a-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ a=-۴ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

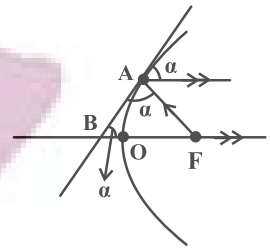
از طرفی AB وتر کانونی سهمی است و اندازهٔ آن با $۴a$ برابر است.

$$|AB|=۴a=۴\times ۳=۱۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحهٔ ۵۹)

۴۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

با توجه به شکل و در نظر گرفتن خاصیت بازتابندگی سهمی و خواص خطوط موازی و مورب خواهیم داشت:



$$\begin{cases} F\hat{B}A = \alpha \\ F\hat{A}B = \alpha \end{cases} \Rightarrow F\hat{B}A = F\hat{A}B$$

بنابراین مثلث FAB متساوی‌الساقین است و اندازهٔ پاره‌خط BF با پاره‌خط AF برابر است. برای یافتن اندازهٔ پاره‌خط AF باید مختصات کانون سهمی و نقطهٔ A را بیابیم:

$$y^2 = 8x \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow F(2, 0)$$

$$y^2 = 8x \ , \ x_A = \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow A(\frac{1}{2}, 2)$$

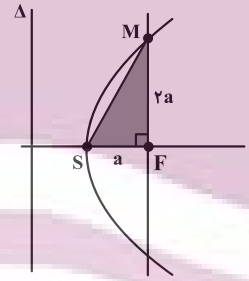
بنابراین:

$$BF = AF = \sqrt{(2 - \frac{1}{2})^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۶ و ۵۷)

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمد صحت‌کار)*

مطابق شکل، اندازهٔ پاره‌خط FM برابر با $2a$ است. بنابراین ابتدا باید از معادلهٔ سهمی، مقدار a را بیابیم:



$$4a = \left| \frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y^2} \right| = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow FM = 2a = \frac{3}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ FMS داریم:

$$SM^2 = \frac{9}{16} + \frac{9}{4} = \frac{45}{16} \Rightarrow SM = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۴۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر a فاصلهٔ کانونی و d و h به ترتیب قطر دهانه و عمق (گودی) یک دیش مخابراتی باشند، آن‌گاه رابطهٔ $a = \frac{d^2}{16h}$ برقرار است، پس برای این دو دیش مخابراتی داریم:

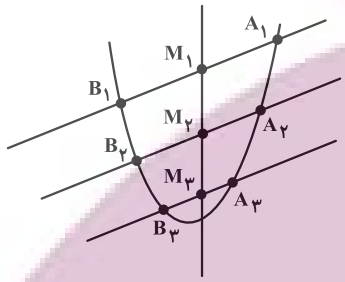
$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{16a_1h_1}{16a_2 \times h_2} \Rightarrow (\frac{d_1}{d_2})^2 = \frac{a_1}{a_2} \times \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{5} \times \frac{25}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحهٔ ۵۹)

۴۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

سهمی به معادلهٔ $(x-1)^2 = 2(y+3)$، یک سهمی قائم است که رو به بالا باز می‌شود.



مطابق شکل از برخورد خط‌هایی موازی با نیمساز ناحیه‌های اول و سوم با این سهمی، پاره‌خط‌هایی مانند A_1B_1، A_2B_2، A_3B_3 و ... حاصل می‌شود که وسط این پاره‌خط‌ها بر روی خطی عمودی قرار دارد. اگر معادلات این دسته خطوط را به صورت $y = x + h$ نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$(x-1)^2 = 2(y+3) \xrightarrow{y=x+h} (x-1)^2 = 2(x+h+3)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 2h + 6 \Rightarrow x^2 - 4x - 2h - 5 = 0$$

اگر طول نقاط برخورد (ریشه‌های معادله) برابر x_A و x_B باشد، آن‌گاه طول نقطهٔ وسط پاره‌خط برابر است با:

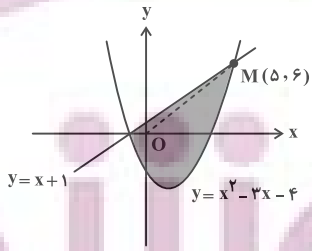
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

بنابراین معادلهٔ مکان هندسی مورد نظر به صورت $x = 2$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحهٔ ۵۹)

۵۰- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

مطابق شکل، خط $y = x + 1$ را با سهمی $y = x^2 - 3x - 4$ تلاقی می‌دهیم:



$$x^2 - 3x - 4 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 5 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$$

در بین نقاط مورد نظر، نقطهٔ $M(5, 6)$ بیشترین فاصله را از مبدأ مختصات دارد:

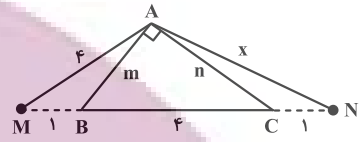
$$OM = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

هندسه ۲

۵۱- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

مطابق شکل، طول اضلاع قائمهٔ مثلث ABC را m و n می‌گیریم. در مثلث AMN، قضیهٔ استوارت را یک بار برای AB و بار دیگر برای AC می‌نویسیم:



$$\begin{cases} AM^2.BN + AN^2.BM = MN.(AB^2 + BM.BN) \\ AM^2.CN + AN^2.CM = MN.(AC^2 + CM.CN) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16\times5 + x^2\times1 = 6(m^2+5) \\ 16\times1 + x^2\times5 = 6(n^2+5) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} 96 + 6x^2 = 6(m^2+n^2+10)$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم $m^2+n^2=16$،

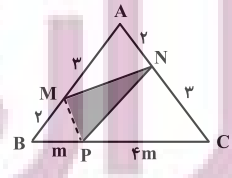
پس: $6x^2 = 6(16+10) - 96 \xrightarrow{\div 6} x^2 = (16+10) - 16 = 10$

$$\Rightarrow x = AN = \sqrt{10}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۶۹)

۵۲- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

با استفاده از رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث، نسبت مساحت هر یک از مثلث‌های گوشه‌ای را به مساحت کل می‌یابیم:



$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AM.AN.\sin\hat{A}}{\frac{1}{2}AB.AC.\sin\hat{A}} = \frac{3\times2}{5\times5} = \frac{6}{25}$$

به طریق مشابه:

$$\frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} = \frac{2m}{5\times5m} = \frac{2}{25} \quad , \quad \frac{S_{CNP}}{S_{ABC}} = \frac{3(4m)}{5\times5m} = \frac{12}{25}$$

در نتیجه:

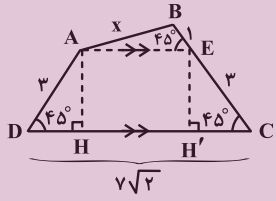
$$\frac{S_{PMN}}{S_{ABC}} = 1 - \left(\frac{6}{25} + \frac{2}{25} + \frac{12}{25}\right) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۴ و ۷۵)

۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(بیوار ترکمن)*

از رأس A، پاره‌خط AE را موازی قاعده DC رسم می‌کنیم، در این صورت $A\hat{E}B = 45^\circ$ و AECD یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

با رسم هر دو ارتفاع این ذوزنقه، چون مثلث‌های AHD و EH′C، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با وتر به طول ۳ می‌باشند، پس:



$$AH = DH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad , \quad EH' = CH' = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین:

$$AE = HH' = DC - (DH + CH')$$

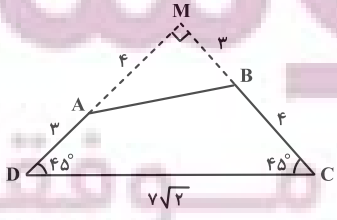
$$= 7\sqrt{2} - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}$$

اکنون در مثلث ABE، به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2AE.BE.\cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow x^2 = (4\sqrt{2})^2 + (1)^2 - 2(4\sqrt{2})(1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 25 \Rightarrow x = 5$$

راه‌حل دوم: مطابق شکل، امتداد AD و BC در نقطهٔ M متقاطع‌اند و زاویهٔ قائمه می‌سازند. مثلث MCD هم قائم‌الزاویه و هم متساوی‌الساقین بوده و طول هر ساق آن برابر ۷ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MAB داریم:



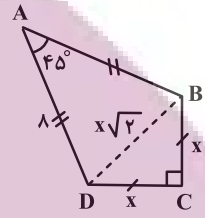
$MA = ۴ \ , \ MB = ۳$

فیثاغورس : $AB^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۲۵ \Rightarrow AB = ۵$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** *(بهزاد ترکمن)*

قطر BD را رسم می‌کنیم. واضح است که اگر $BC = DC = x$ فرض شوند، آن‌گاه طبق قضیهٔ فیثاغورس، $BD = x\sqrt{۲}$ است. اکنون قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث ABD می‌نویسیم:



$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ - ۲AB.AD.\cos ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow (x\sqrt{۲})^۲ = ۸^۲ + ۸^۲ - ۲(۸)(۸)(\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ = ۸^۲(۲ - \sqrt{۲}) \Rightarrow x^۲ = ۳۲(۲ - \sqrt{۲})$$

حال به محاسبهٔ مساحت کایت می‌پردازیم:

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\Delta}{ABD}} + S_{\overset{\Delta}{CBD}} = \frac{۱}{۲}\underbrace{AB}_{۸}.\underbrace{AD}_{۸}.\underbrace{\sin ۴۵^\circ}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} + \frac{x^۲}{۲}$$

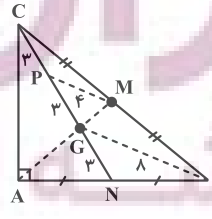
$$= ۱۶\sqrt{۲} + \frac{۳۲(۲ - \sqrt{۲})}{۲} = ۱۶\sqrt{۲} + ۱۶(۲ - \sqrt{۲}) = ۳۲$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۵۵- **گزینهٔ «۱»** *(بهزاد ترکمن)*

میانهٔ AM (میانهٔ وارد بر وتر که می‌دانیم نصف وتر است) را رسم می‌کنیم. نقطهٔ همرسی دو میانهٔ AM و CN را G در نظر می‌گیریم.

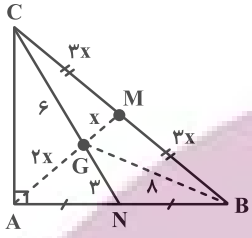
با توجه به این‌که هر میانهٔ مثلث، در نقطهٔ همرسی میانه‌ها، به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌شود، درمی‌یابیم که $CP = PG = GN = ۳$؛ در مثلث GBC، نقاط P و M وسط اضلاع هستند و طبق عکس قضیهٔ تالس داریم:



$GB \parallel PM \xrightarrow{\text{تالس}} GB = ۲PM = ۸$

اما نقطهٔ G همرسی میانه‌های مثلث ABC است و لذا $AG = ۲GM$.

پس اگر $GM = x$ فرض شود، $AG = ۲x$ و در نتیجه $AM = ۳x$ است. بنابراین با توجه به این‌که $AM = BM = CM$، لذا طبق قضیهٔ میانه‌ها در مثلث GBC داریم:



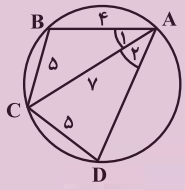
$$GB^۲ + GC^۲ = ۲GM^۲ + \frac{BC^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۸^۲ + ۶^۲ = ۲x^۲ + \frac{(۶x)^۲}{۲} \Rightarrow ۱۰۰ = ۲۰x^۲ \Rightarrow x = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow AM = ۳x = ۳\sqrt{۵}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۶۹)

۵۶- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*



$$BC = CD \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$

$$\cos \hat{A}_۱ = \frac{۷^۲ + ۴^۲ - ۵^۲}{۲\times۴\times۷} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow \cos \hat{A}_۲ = \frac{۷^۲ + AD^۲ - ۵^۲}{۲\times۷\times AD} = \frac{۵}{۷}$$

$$\Rightarrow AD^۲ = ۱۰AD + ۲۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} AD = ۶ \\ AD = ۴ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

برای محاسبهٔ مساحت چهارضلعی، مساحت دو مثلث ABC و ADC را به کمک رابطهٔ هرون محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC} : p_۱ = \frac{۴+۵+۷}{۲} = ۸ \Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{۸(۴)(۳)(۱)} = ۴\sqrt{۶} \\ \overset{\Delta}{ADC} : p_۲ = \frac{۶+۵+۷}{۲} = ۹ \Rightarrow S_{ADC} = \sqrt{۹(۴)(۳)(۲)} = ۶\sqrt{۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = ۱۰\sqrt{۶}$$

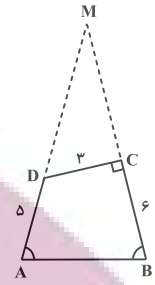
توجه: اگر $AD = ۴$ باشد آن‌گاه دو مثلث ABC و ADC با هم همنهشت بوده و چون چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، بایستی $\hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ$ باشد که غیرممکن است!

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۷، ۶۸ و ۷۳)

۵۷- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

اضلاع AD و BC را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در M قطع کنند.

مثلث MAB متساوی‌الساقین است.



$$MA = MB \Rightarrow MD + ۵ = MC + ۶ \Rightarrow MD = MC + ۱$$

در مثلث MCD طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$۳^۲ + MC^۲ = (MC+۱)^۲ \Rightarrow MC = ۴ \Rightarrow \cos\hat{M} = \frac{۴}{۵}$$

حال به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها طول AB را به دست می‌آوریم:

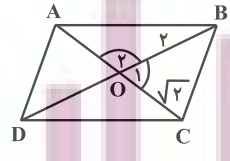
$$AB^۲ = MA^۲ + MB^۲ - ۲MA.MB.\cos M$$

$$= ۱۰^۲ + ۱۰^۲ - ۲\times ۱۰^۲ \times \frac{۴}{۵} = ۴۰ \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۱۰}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۵۸- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

در متوازی‌الاضلاع، مطابق شکل، قطرها همدیگر را نصف می‌کنند و داریم:



$$S_{ABCD} = ۴S_{OBC} = ۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۲)(\sqrt{۲})\sin\hat{O}_۱ = ۱ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۴۵^\circ$$

$$BC^۲ = ۴ + ۲ - ۲(۲)(\sqrt{۲}).\underbrace{\cos ۴۵^\circ}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۶ - ۴ = ۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۲}$$

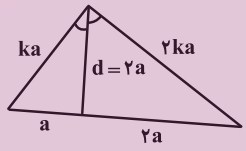
$$AB^۲ = ۴ + ۲ - ۲(۲)(\sqrt{۲}).\underbrace{\cos ۱۳۵^\circ}_{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۶ + ۴ = ۱۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۱۰}$$

محیط متوازی‌الاضلاع $= ۲(\sqrt{۲} + \sqrt{۱۰})$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۵۹- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

می‌دانیم در هر مثلث نسبت دو ضلع زاویه برابر است با نسبت دو قطعه‌ای که از برخورد نیمساز (آن زاویه) با ضلع مقابل ایجاد می‌شود. پس می‌توان مثلث زیر را رسم کرد:



$$\underbrace{d^۲}_{(۲a)^۲} = ۲k^۲a^۲ - ۲a^۲ \Rightarrow ۴a^۲ = ۲a^۲(k^۲ - ۱)$$

$$\Rightarrow k^۲ - ۱ = ۲ \Rightarrow k = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۲ka}{۲a} = k = \sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۰ و ۷۱)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

ابتدا کسینوس زاویهٔ $\hat{A} = \theta$ را با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها به دست می‌آوریم:

$$۲۱ = ۲۵ + ۱۶ - ۲(۲۰)\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\times AB\times AC\times\sin\theta = \frac{۱}{۲}\times ۷\times ۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۷/۵\sqrt{۳}$$

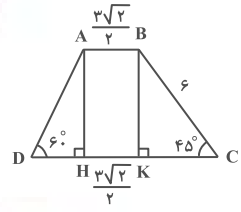
(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۶، ۶۷ و ۷۴)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

هندسه ۱

۶۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

با توجه به شکل و فرض، واضح است که $BC = ۶$ و داریم:



$$BK = KC = ۶\sin ۴۵^\circ = ۶(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = ۳\sqrt{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AHD} : AH = ۳\sqrt{۲} \ , \ \tan ۶۰^\circ = \frac{AH}{DH} \Rightarrow DH = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۶}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} : S = \frac{(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} + (\sqrt{۶} + \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} + ۳\sqrt{۲})) \times ۳\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow S = \frac{(\sqrt{۶} + ۶\sqrt{۲}) \times ۳\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۶\sqrt{۳} + ۱۸ \times ۲}{۲} = ۱۸ + ۳\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۵، ۶۶ و ۷۲)

۶۲- **گزینهٔ «۱»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

فقط گزارهٔ (ب) درست است.

بررسی گزاره‌های نادرست:

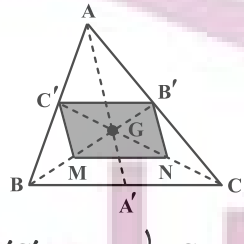
الف) زیرا دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ هر وضعیتی نسبت به هم می‌توانند داشته باشند.

ج) زیرا دو خط $d_۱$ و $d_۲$ می‌توانند موازی یا متقاطع یا متنافر با هر زاویه‌ای باشند.

(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۶۳- **گزینهٔ «۲»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

چهارضلعی رنگ شده متوازی‌الاضلاع است. پس:



$$B'C' \parallel MN \ , \ B'C' = MN = \frac{۱}{۲}BC$$

پس نقاط M و N وسط‌های BG و CG هستند. با رسم میانه‌ها در مثلث، ۶ مثلث هم‌مساحت ساخته می‌شود، پس

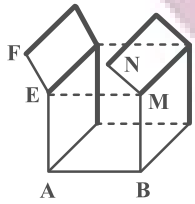
$$S_{BGC'} = \frac{۱}{۶}S_{ABC} \ , \ S_{BGC'} = ۲S_{MGC'} = ۲(\frac{۱}{۴}S_{B'C'MN})$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۶}S_{ABC} = \frac{۲}{۴}S_{B'C'MN} \Rightarrow \frac{S_{B'C'MN}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۶۴- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

مطابق شکل خطوط موازی با AB، به صورت خط‌چین و خطوط متنافر با آن، به صورت پررنگ رسم شده‌اند.

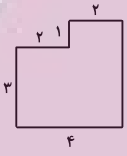


$$n = ۳ \ , \ m = ۸ \Rightarrow m - n = ۵$$

توجه: دقت کنید که دو خط MN و EF با AB متقاطع هستند.

(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

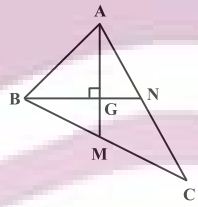
۶۵- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

نماهای چپ، بالا و راست مستطیل‌هایی با ابعاد ۳ و ۴ و در نتیجه مساحت ۱۲ هستند ولی نمای روبه‌رو به صورت  و مساحت آن $۳ \times ۴ + ۲ = ۱۴$ است.

(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۸۸ تا ۹۱)

۶۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

از برخورد ۳ میانهٔ هر مثلث، ۶ مثلث کوچک ایجاد می‌شود که مساحت آن‌ها برابر است، پس مطابق شکل داریم:



$$S_{BMG} = \frac{۱}{۶}S_{ABC} = \frac{۱}{۶} \times ۳۶ = ۶$$

از طرفی در هر مثلث میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، بنابراین داریم:

$$BG = \frac{۲}{۳}BN = \frac{۲}{۳} \times ۶ = ۴$$

$$S_{BMG} = \frac{۱}{۲}BG \times GM \Rightarrow ۶ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times GM \Rightarrow GM = ۳$$

$$\overset{\Delta}{BMG} : BM^۲ = BG^۲ + GM^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow BM = ۵ \Rightarrow BC = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۷)

۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق فرمول پیک برای مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای داریم:

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=۷\Rightarrow\frac{b}{۲}+i=۸$$

مجموع تعداد نقاط مرزی و درونی در صورتی حداکثر خواهد بود که b بیشترین و i کمترین مقدار ممکن را دارا باشند. با توجه به این‌که کمترین مقدار i برابر صفر است، داریم:

$$i=۰\Rightarrow\frac{b}{۲}=۸\Rightarrow b=۱۶\Rightarrow\max(b+i)=۱۶$$

از طرفی در صورتی مجموع نقاط مرزی و درونی حداقل خواهد بود که b کمترین و i بیشترین مقدار ممکن را دارا باشند. کمترین مقدار b برابر ۳ است، ولی چون i همواره عددی حسابی است، پس b باید زوج باشد و در نتیجه داریم:

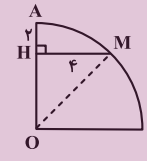
$$b=۴\Rightarrow\frac{۴}{۲}+i=۸\Rightarrow i=۶\Rightarrow\min(b+i)=۱۰$$

$$\max(b+i)-\min(b+i)=۱۶-۱۰=۶$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

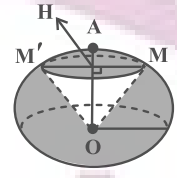
۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

ابتدا شعاع ربع دایره را به دست می‌آوریم:



$$\overset{\Delta}{OHM}:\begin{cases}OH=R-۲\\OM=R\\MH=۴\end{cases}\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}R^۲=(R-۲)^۲+۴^۲\Rightarrow R=۵$$

مطابق شکل زیر، حجم ناحیهٔ سایه‌زده شده از تفاضل حجم ناحیهٔ مخروطی سفید رنگ از حجم نیمکره به دست می‌آید:



$$\text{حجم نیمکره}: V_۱=\frac{۲}{۳}\pi R^۳=\frac{۲}{۳}\pi\times۱۲۵=\frac{۲۵۰\pi}{۳}$$

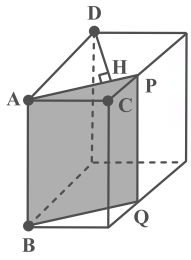
$$\text{حجم مخروط قائم سفیدرنگ}: V_۲=\frac{۱}{۳}\pi MH^۲.OH=\frac{۱}{۳}\pi(۴^۲)\times۳=۱۶\pi$$

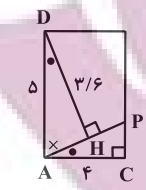
$$\Rightarrow\text{حجم ناحیهٔ سایه‌زده شده}: V=V_۱-V_۲=\frac{۲۵۰\pi}{۳}-۱۶\pi=\frac{۲۰۲\pi}{۳}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

۶۹- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

در شکل زیر دو مثلث ADH و ACP با هم متشابه‌اند و داریم:





$$\frac{AD}{AP}=\frac{DH}{AC}\Rightarrow\frac{۵}{AP}=\frac{۳/۶}{۴}\Rightarrow AP=\frac{۲۰}{۳/۶}=\frac{۵}{۰/۹}=\frac{۵۰}{۹}$$

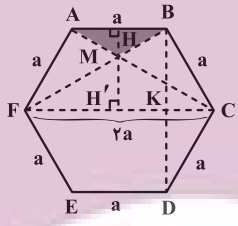
سطح مقطع $APQB$ مستطیل است و مساحت آن برابر است با:

$$S=AP\times AB=\frac{۵۰}{۹}\times۶=\frac{۱۰۰}{۳}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

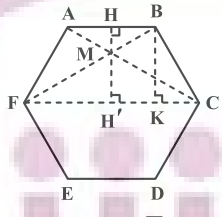
۷۰- **گزینهٔ «۲»** *(بواد ترکمن)*

اگر ضلع‌های شش‌ضلعی منتظم را a بنامیم، $FC=۲a$ (قطر بزرگ) و $BD=a\sqrt{۳}$ (قطر کوچک) می‌باشند. پس $BK=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. واضح است که دو مثلث MAB و MFC متشابه‌اند و نسبت تشابه $\frac{AB}{FC}=\frac{۱}{۲}$ است. پس نسبت ارتفاع‌ها نیز $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. یعنی:



$$MH=\frac{۱}{۲}MH'\Rightarrow MH=\frac{۱}{۳}BK=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}$$

بنابراین:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MAB}}}{S_۶}=\frac{\frac{۱}{۲}MH.AB}{S_۶}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{a\sqrt{۳}}{۶}\times a}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲}=\frac{۱}{۱۸}$$

توجه کنید که مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با:

$$S_۶=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۵)

ریاضیات گسسته

۷۱- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی دیداری)*

احاطه‌گر G نیست (رأس d احاطه نمی‌شود): $N_G(f)=\{e\ ,\ b\ ,g\}$

احاطه‌گر G است: $N_{\bar{G}}[f]=\{f\ ,\ \underbrace{a\ ,\ h\ ,\ d\ ,\ c}\}$

همسایه‌های f در گراف مکمل

احاطه‌گر G نیست چون خود g احاطه نمی‌شود: $N_{\bar{G}}(g)=\{a\ ,\ e\ ,\ b\ ,\ d\ ,\ c\}$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۷۲- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

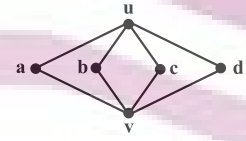
اگر گراف ۲- منتظم مرتبه ۱۲ به صورت C_{12} باشد عدد احاطه‌گری برابر ۴ و اگر به صورت $C_7 \cup C_5$ باشد عدد احاطه‌گری برابر ۵ و اگر به صورت $C_4 \cup C_4 \cup C_4$ باشد عدد احاطه‌گری ۶ به ما می‌دهد. ولی در هیچ حالتی عدد احاطه‌گری ۷ ندارد.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۵۳)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(فرزاد جوادی)*

ابتدا با توجه به اطلاعات موجود در صورت سؤال، گراف مورد نظر را رسم می‌کنیم.

در این گراف دو رأس از درجهٔ $\Delta=4$ و چهار رأس از درجهٔ ۲ وجود دارد. در نتیجه گراف مربوط به صورت زیر است:



واضح است که برای احاطهٔ رئوس این گراف، انتخاب دو رأس مانند آنچه در مجموعه‌های زیر آمده کفایت می‌کند:

حالت اول: انتخاب u به همراه یکی از رئوس وسطی:

$\{u\ ,\ a\}\ ,\ \{u\ ,\ b\}\ ,\ \{u\ ,\ c\}\ ,\ \{u\ ,\ d\}$

حالت دوم: انتخاب v به همراه یکی از رئوس وسطی:

$\{v\ ,\ a\}\ ,\ \{v\ ,\ b\}\ ,\ \{v\ ,\ c\}\ ,\ \{v\ ,\ d\}$

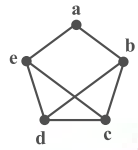
حالت سوم: انتخاب دو رأس u و v با هم: $\{u\ ,\ v\}$

بنابراین $\gamma=2$ و تعداد $\gamma-$ مجموعه‌ها برابر است با: ۹

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۷۴- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

اگر گراف G، رأسی از درجهٔ فول ۴ داشته باشد، آن‌گاه $\gamma=1$ است. پس برای این‌که $q(G)$ حداکثر مقدار ممکن باشد، باید $\Delta(G)=3$ و نمودار آن به صورت زیر باشد:



در این گراف $\gamma=2$ است؛ همچنین به $\binom{5}{2}=10$ حالت می‌توان مجموعه‌ای ۲ عضوی از بین رئوس G انتخاب کرد که در بین آن‌ها فقط مجموعهٔ $\{c\ ,\ d\}$ احاطه‌گر مینیمم نیست. پس G دارای $10-1=9$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۷۵- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

برای رسیدن به حداکثر عدد احاطه‌گری، تا حد امکان رأس‌های درجهٔ ۱ را رسم می‌کنیم، در شکل زیر عدد احاطه‌گری برابر ۳ است:

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

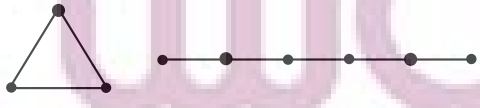
۷۶- **گزینهٔ «۴»** *(محمد صحت‌کار)*

با شرایط این گراف دو حالت امکان‌پذیر است:

الف) $\gamma(C_n)=1$ و $\gamma(P_m)=2$

در این حالت بیشترین تعداد رأس‌ها را هنگامی داریم که $n=3$ و $m=6$ باشد. بنابراین: $p=m+n=6+3=9$

شکل این گراف به صورت زیر است:

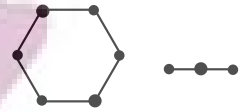


ب) $\gamma(C_n)=2$ و $\gamma(P_m)=1$

در این حالت بیشترین تعداد رأس‌ها را هنگامی داریم که $n=6$ و $m=3$ باشد. بنابراین: $p=m+n=3+6=9$

آپارات توشه‌ای برای موفقیت

شکل این گراف به صورت زیر است:



بنابراین این گراف، حداکثر ۹ رأس و ۸ یال دارد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$q(G)+q(\bar{G})=q(K_9)\Rightarrow 8+q(\bar{G})=\binom{9}{2}=36$$

$$\Rightarrow q(\bar{G})=36-8=28$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۵۱)

۷۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمد صحت‌کار)*

با توجه به این‌که $\left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil \le \gamma(G) \le p-\Delta$ خواهیم داشت:

$$\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil \le 5 \le p-3 \Rightarrow 8 \le p \le 20$$

بنابراین تعداد اعداد مختلف برای تعداد رأس‌ها برابر است با:

$$20-8+1=13$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۵۱)

۷۸- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

از مجموعهٔ $\{a, c, f, h\}$ می‌توان عضو h را حذف کرد، اما مجموعه کماکان احاطه‌گر باقی بماند. پس این مجموعه احاطه‌گر است، اما مینیمال نیست.

مجموعه‌های $\{a, b, c, d, j\}$ و $\{a, g, d\}$ احاطه‌گر مینیمال هستند و مجموعهٔ $\{f, e, i, b\}$ نیز احاطه‌گر نیست.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۵۱)

۷۹- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

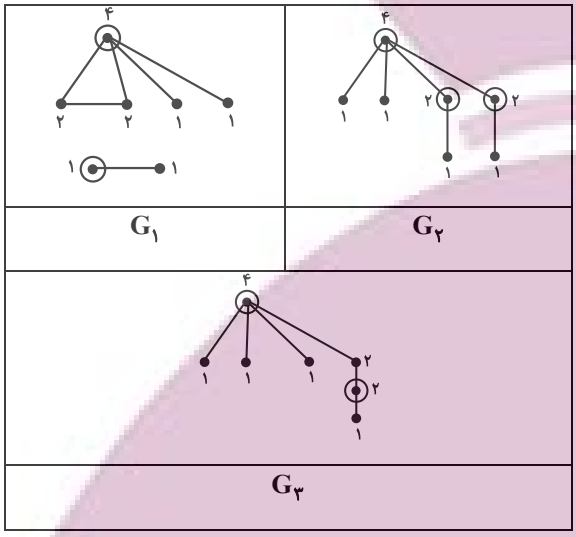
چون $\gamma(G)=p-1$، بنابراین گراف G مثلاً در مرتبهٔ ۶ به شکل زیر است:

پس این گراف از $p-2$ رأس تنها و دو رأس مجاور هم تشکیل شده است. در گراف $\bar{G}$ هر کدام از این رأس‌های تنها به رأس فول (رأس درجهٔ $p-1$) تبدیل می‌شوند و هر کدام به تنهایی یک $\gamma-$ مجموعه تشکیل می‌دهند. پس گراف $\bar{G}$ دارای $p-2$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** *(بیوار ترکمن)*

برای این گراف، ۳ شکل متمایز زیر وجود دارد:



واضح است که در گراف G_2، بیشترین عدد احاطه‌گری به دست می‌آید که برابر ۳ است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

ریاضیات گسسته- پیشروی سریع

۸۱- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

اگر دو قفسه را با میله‌ای از هم جدا کنیم برای این میله ۶ حالت وجود دارد و برای کتاب‌ها نیز $7!$ حالت. بنابراین تعداد کل حالات برابر است با: $6\times 7!$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۸۲- **گزینهٔ «۱»** *(محمد صحت‌کار)*

برای انتخاب اعضای این گروه سه نفره دو حالت امکان‌پذیر است.

الف) هیچ دانش‌آموزی از منطقهٔ شرق انتخاب نشود. در این شرایط تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با: $\binom{5}{1}\binom{5}{1}\binom{5}{1}=5\times5\times5=125$

ب) یک دانش‌آموز از منطقهٔ شرق حتماً در این گروه سه نفره باشد. در این شرایط تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$\binom{6}{1}\binom{3}{2}\binom{5}{1}\binom{5}{1} = 6\times3\times5\times5 = 450$$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $125 + 450 = 575$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۸۳- **گزینهٔ «۴»** *(فرزاد بهادری)*

ابتدا تعداد اعداد چهاررقمی زوج را می‌شماریم.

$\{1000, 1001, \ldots, 9999\}$ = اعداد چهاررقمی طبیعی

$\Rightarrow$ تعداد $= 9999 - 1000 + 1 = 9000$

نصف اعداد چهاررقمی بالا زوج و نصف دیگر فرد است. پس:

تعداد اعداد چهاررقمی زوج $= 4500$

برای شمارش تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک رقم‌شان مضرب ۳ است از روش متمم استفاده می‌کنیم.

تعداد کل سه رقمی‌ها $= \boxed{9}\boxed{10}\boxed{10} = 900$

تعداد اعداد سه رقمی فاقد ۰، ۳، ۶ و ۹ $= \boxed{6}\boxed{6}\boxed{6} = 216$

(که با ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ ساخته می‌شوند.)

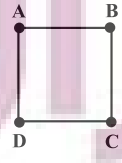
$\Rightarrow 900 - 216 = 684$

تعداد اعداد مورد نظر $= 4500 - 684 = 3816$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۶)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمد صمت‌کار)*

اگر رأس‌های این مربع را مطابق شکل زیر نام‌گذاری کنیم آن‌گاه دو حالت امکان‌پذیر است:



الف) رأس‌های A و C همرنگ باشند. در این وضعیت تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$5\times4\times1\times4 = 80$$

A B C D

ب) رأس‌های A و C همرنگ نباشند. در این وضعیت تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$5\times4\times3\times3 = 180$$

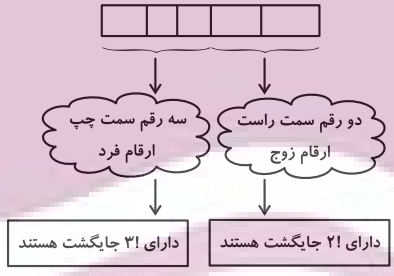
A B C D

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $80 + 180 = 260$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۶)

۸۵- **گزینهٔ «۱»** *(فرزاد بهادری)*

ابتدا دو رقم مورد نیاز برای یکان و دهگان را از بین ارقام ۲، ۴ و ۶ انتخاب می‌کنیم «به $\binom{3}{2}$ طریق»، سپس از بین چهار رقم فرد $\{1, 3, 5, 7\}$، سه رقم بعدی را انتخاب می‌کنیم «به $\binom{4}{3}$ طریق»؛ سپس این حالت‌ها را در جایگشت‌های ارقام زوج و فرد انتخاب شده ضرب می‌کنیم.



تعداد اعداد مورد نظر $= \binom{3}{2}\binom{4}{3}\times3!\times2! = 3\times4\times6\times2 = 144$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

چون سه حرف b داریم، برای برآورده شدن شرط سؤال، باید دو حرف b در یک سطر و یک حرف دیگر در سطر دیگر باشد:

$$\begin{cases} a, a, b, b \Rightarrow \dfrac{4!}{2!2!} = 6 \\ a, a, a, b \Rightarrow \dfrac{4!}{3!} = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 6\times4 = 24$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

همچنین برای این‌که کدام سطر، دو حرف b داشته باشد، ۲ حالت وجود دارد، پس جواب کلی برابر است با: $۲۴\times۲=۴۸$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** (کیوان دارابی)

برای آن‌که عددی مضرب ۵ باشد باید رقم یکانش صفر یا ۵ باشد. در این مسئله باید هر کدام از این دو حالت را جداگانه حساب کنیم. اما با توجه به ارقام داده شده بهتر است که از روش متمم استفاده کنیم. در میان کل اعداد تنها اعدادی نامطلوب هستند که رقم یکان آن‌ها ۲ باشد. بنابراین:

$$\text{تعداد کل اعداد} = \frac{۳\times۵!}{۲!\times۳!}=۳۰$$

برای یافتن اعداد نامطلوب دقت کنید که در این اعداد رقم یکان ۲ و اولین رقم سمت چپ حتماً ۵ است. بنابراین:

$$\text{تعداد اعداد شش رقمی با رقم یکان ۲} = \frac{۴!}{۳!}=۴$$

بنابراین تعداد کل اعداد مطلوب برابر است با: $۳۰-۴=۲۶$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۸۸- **گزینهٔ «۱»** (جواد ترکمن)

برای یافتن تعداد کدهای مطلوب باید ابتدا ارقام را طوری بچینیم که بین هر دو رقم فقط یک جای خالی باشد. در این شرایط مطابق شکل ۵ جای خالی خواهیم داشت: $-\,1\,-\,1\,-\,2\,-\,2\,-$

حالا برای حروف دو حالت امکان‌پذیر است.

الف) دو حرف a کنار هم باشند؛ در این شرایط تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$\binom{۵}{۲}\times۲!\times\frac{۴!}{۲!\times۲!}=۱۰\times۲\times۶=۱۲۰$$

ب) یک حرف a و یک حرف b کنار هم باشند؛ در این شرایط تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$\binom{۵}{۲}\times۲!\times۲!\times\frac{۴!}{۲!\times۲!}=۱۰\times۲\times۲\times۶=۲۴۰$$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۱۲۰+۲۴۰=۳۶۰$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۸۹- **گزینهٔ «۴»** (محمد صحت‌کار)

نکته: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز در یک ردیف هرگاه بخواهیم که r تا از آن‌ها از چپ به راست یا برعکس دارای ترتیب خاصی باشند برابر است با: $\frac{n!}{r!}$

با توجه به این‌که سه رقم زوج و چهار رقم فرد داریم و با در نظر گرفتن این نکته که اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند رقم صفر باشد، تعداد اعداد مطلوب برابر می‌شود با: $\binom{۴}{۱}\times\frac{۶!}{۳!}=۴\times۶\times۵\times۴=۴۸۰$

توجه کنید که ابتدا از ۴ رقم فرد یکی را برای اولین رقم سمت چپ انتخاب کرده و سپس ۶ رقم باقی‌مانده را طوری می‌چینیم که ارقام زوج از چپ به راست به ترتیب صعودی باشند.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

۹۰- **گزینهٔ «۳»** (مصطفی دیراری)

دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) رئیس و معاون هر دو در جلسه حضور داشته باشند؛ به $\binom{۶}{۳}$ روش، می‌توانیم ۳ کارمند انتخاب کنیم که در $\binom{۴}{۱}$ روش، دو کارمند خاص با هم حضور دارند، پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{۲}{۲}\left[\binom{۶}{۳}-\binom{۴}{۱}\right]=۲۰-۴=۱۶$$

۲) فقط یکی از افراد رئیس یا معاون حضور داشته باشند؛ به $\binom{۲}{۱}$ روش، یکی از دو نفر رئیس یا معاون را انتخاب می‌کنیم، که به $\binom{۶}{۴}$ روش ۴ کارمند برمی‌داریم اما در $\binom{۴}{۲}$ روش، دو کارمند خاص حضور با هم دارند، پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{۲}{۱}\left[\binom{۶}{۴}-\binom{۴}{۲}\right]=۲(۱۵-۶)=۱۸$$

پس در کل $۱۶+۱۸=۳۴$ روش وجود دارد.

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

ایران‌تون
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۳

۹۱- **گزینهٔ «۳»** (حسام نادری)

موارد (پ) و (ث) درست‌اند.

علت نادرستی سایر موارد:

الف) موج صوتی برخلاف موج رادیویی یک موج مکانیکی است و برای انتشار نیاز به محیط مادی دارد.

ب) موج صوتی یک موج طولی است که راستای نوسان ذرات با جهت انتشار موج موازی است.

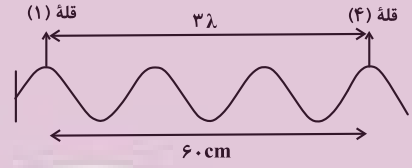
ت) در موج طولی ایجاد شده در یک فنر، در وسط فاصلهٔ بین یک جمع‌شدگی بیشینه و یک بازشدگی بیشینه مجاور هم، اندازهٔ جابه‌جایی هر جز فنر از وضعیت تعادل بیشینه است.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱، ۷۴، ۷۷ و ۷۹)

۹۲- **گزینهٔ «۱»** (پوریا علاقه‌مند)

می‌دانیم که فرکانس (بسامد) با دورهٔ تناوب رابطهٔ عکس دارند. یعنی:

$$f=\frac{1}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{f}\Rightarrow T=\frac{1}{2/5}=\frac{4}{10}s$$



از طرفی:

$$3\lambda=60cm\Rightarrow\lambda=20cm\Rightarrow\lambda=\frac{2}{10}m$$

می‌دانیم سرعت انتشار موج برابر است با:

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}}=0/5\frac{m}{s}$$

از طرفی:

$$t=\frac{x}{v}\xrightarrow{x=2m}t=\frac{2}{0/5}=4s$$

فاصله (مسافت) ۲ متری را در ۴ ثانیه طی می‌کند.

(فیزیک ۳-نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** (آراس محمدی)

در قدم اول تندی انتشار موج در طناب را به دست می‌آوریم: (جرم طناب را m' در نظر می‌گیریم)

$$v=\sqrt{\frac{F\ell}{m'}}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{8\times2}{0/04}}\Rightarrow v=20\frac{m}{s}$$

حال دورهٔ طبیعی دستگاه وزنه- فنر را محاسبه می‌کنیم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{8}{50}}\Rightarrow T=0/8\pi\ s$$

و در نهایت طول موج را به دست می‌آوریم:

$$\lambda=Tv\Rightarrow\lambda=0/8\pi\times20\Rightarrow\lambda=16\pi\ m$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴ و ۶۵)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** (محمدجواد سورچی)

با توجه به نقش موج درمی‌یابیم $\frac{5\lambda}{4}=125cm$ است؛ بنابراین طول موج برابر با $\lambda=100cm=1m$ است. از طرفی با داشتن تندی انتشار موج، طبق رابطهٔ $\lambda=vT$ داریم:

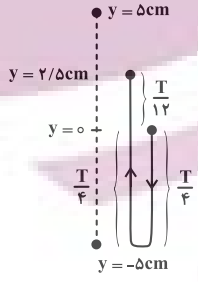
$$\lambda=vT\xrightarrow[v=100\frac{m}{s}]{\lambda=1m}1=100\times T\Rightarrow T=0/01s$$

حالا مکانی که در آن شتاب نوسانگر برابر با $\vec{a}=-10^4(\frac{m}{s^2})\vec{j}$ است را پیدا می‌کنیم:

$$a=-\omega^2y\xrightarrow[\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/01}=200\pi\frac{rad}{s}]{a=-10^4\frac{m}{s^2}}$$

$$-10^4=-(200\pi)^2\times y\Rightarrow y=2/5\times10^{-2}m=2/5cm$$

از طرفی با توجه به جهت انتشار موج (سمت راست) درمی‌یابیم، ذرهٔ M شبیه به ذرهٔ سمت چپ خود حرکت می‌کند، یعنی رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. بنابراین داریم:



$$\Delta t=\frac{T}{2}+\frac{T}{12}=\frac{7T}{12}\xrightarrow{T=0/01s}t_2-0=\frac{7}{1200}$$

$$\Rightarrow t_2=\frac{7}{1200}s\xrightarrow{1s=1000ms}t_2=\frac{35}{6}ms$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحهٔ ۷۱)

۹۵- **گزینهٔ «۲»** (دانیال راستی)

با ضربه زدن چکش به میله، صوت هم از طریق هوا و هم از طریق میله منتقل می‌شود ولی با توجه به اختلاف سرعت صوت در محیط‌های مختلف، زمان انتشار صوت در این دو محیط متفاوت است. ابتدا طول میله را به دست می‌آوریم:

$$\Delta t_1 = \frac{d}{v_{هوا}} - \frac{d}{v_{آهن}} \xrightarrow[\Delta t_1 = 47/5\,ms]{v_{هوا}=300\frac{m}{s},\ v_{آهن}=6000\frac{m}{s}}$$

$$47/5\times10^{-3} = d\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{6000}\right) \Rightarrow d = 15\,m$$

اختلاف دو صدای شنیده شده در حالت دوم برابر است با:

$$\Delta t_2 = \frac{d}{v_{هوا}} - \frac{d}{v_{مس}} \xrightarrow[d=15\,m]{v_{مس}=5000\frac{m}{s}}$$

$$\Delta t_2 = 15\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{5000}\right) = 47\times10^{-3}\,s = 47\,ms$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۹۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمد نهاوندی‌مقدم)*

یکای آهنگ تغییرات حجم در SI، $\frac{m^3}{s}$ است. اگر $\mu_0\varepsilon_0$ توان $-\frac{1}{2}$ بگیرند واحد آن‌ها $\frac{m}{s}$ و یکای f، $\frac{1}{s}$ است. با این دیدگاه داریم:

$$(\mu_0\varepsilon_0)^{-\frac{3}{2}}.f^{-2} \Rightarrow \left(\frac{m}{s}\right)^3 \times \left(\frac{1}{s}\right)^{-2} \Rightarrow \frac{m^3}{s^3}\times s^2 = \frac{m^3}{s}$$

در نتیجه $\alpha = \gamma = -\frac{3}{2}$ و $\beta = -2$ می‌شود و داریم:

$$(\alpha-\beta).\gamma \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}-(-2)\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۷۶)

۹۷- **گزینهٔ «۱»** *(محمد جواد سورچی)*

ابتدا فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوت در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی ۵ ثانیهٔ دوم ($t_1 = 5s$ تا $t_2 = 10s$) را به دست می‌آوریم:

$$r = v\Delta t \xrightarrow[\Delta t_2 = 10s]{\Delta t_1 = 5s} \begin{cases} r_1 = v\times5 = 5v \\ r_2 = v\times10 = 10v \end{cases}$$

سپس اختلاف تراز شدت صوت را در دو حالت حساب می‌کنیم:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \xrightarrow[\text{توان چشمه ثابت است.}]{\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \beta_2 - \beta_1 = 10\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 20\log\frac{r_1}{r_2} \xrightarrow[r_2=10v]{r_1=5v}$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 20\log\left(\frac{5v}{10v}\right) = 20\log\frac{1}{2} = -20\log2$$

$$\xrightarrow{\log2=0/3} \beta_2 - \beta_1 = -20\times0/3 = -6\,dB$$

بنابراین تراز شدت صوت $6\,dB$ کاهش می‌یابد.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(دانیال راستی)*

با توجه به تندی انتشار صوت و اختلاف زمانی رسیدن صوت به دو شنونده، فاصلهٔ آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta t = |t_1 - t_2| = \left|\frac{R_1}{v_{صوت}} - \frac{R_2}{v_{صوت}}\right|$$

$$\Rightarrow |R_1 - R_2| = v_{صوت}\times\Delta t \xrightarrow[v_{صوت}=300\frac{m}{s}]{\Delta t=0/1s} |R_1 - R_2| = 30\,m$$

با $\frac{5}{8}$ برابر شدن توان چشمه، شدت صوتی که هر شنونده دریافت می‌کند $\frac{5}{8}$ برابر می‌شود:

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow \frac{I'}{I} = \frac{P'}{P} = \frac{5}{8}$$

$$\beta_1' - \beta_1 = 10\log\frac{I_1'}{I_0} - 10\log\frac{I_1}{I_0} = 10\log\frac{5}{8}$$

$$= 10(\log5 - 3\log2) = 10(1-0/3) - 30(0/3) = -2$$

به طریق مشابه:

$$\beta_2' - \beta_2 = -2$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\beta_1'}{\beta_2'} = \frac{27}{20} = \frac{\beta_1 - 2}{\beta_2 - 2} \xrightarrow{\beta_2=\frac{3}{4}\beta_1}$$

$$\frac{27}{20} = \frac{4\beta_1 - 8}{3\beta_1 - 8} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 56\,dB \\ \beta_2 = 42\,dB \end{cases}$$

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi R^2} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\log\frac{I_1}{I_2} = 10\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 56 - 42$$

$$0/7 = \log\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 5 \quad , \quad |R_1 - R_2| = 30\,m$$

$$\Rightarrow R_1 = 7/5\,m$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۹۹- **گزینهٔ «۱»** *(کامران ابراهیمی)*

(الف) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

ب) بلندی متفاوت با شدت است. شدت را می‌توان با یک آشکارساز اندازه گرفت در حالی که بلندی چیزی است که شما حس می‌کنید.

پ) بیشترین حساسیت گوش انسان به بسامدهایی در گسترهٔ $۲۰۰۰\,Hz$ تا $۵۰۰۰\,Hz$ است.

ث) هنگامی که چشمهٔ صوت ساکن باشد طول موج در جلو و عقب چشمه (در دو طرف چشمه) ثابت است و با نزدیک شدن ناظر به چشمهٔ صوت در مقایسه با ناظر ساکن در مدت زمان یکسان با جبهه‌های موج بیشتری مواجه می‌شود که این منجر به افزایش بسامد صوتی می‌شود که ناظر می‌شنود.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۸۱ تا ۸۳)

۱۰۰- **گزینهٔ «۲»** *(آراس محمدی)*

قبل از حل سؤال به ۲ نکته دقت کنید:

۱) هنگامی که چشمهٔ صوت در حال حرکت است، طول موج دریافتی جلوی چشمهٔ صوت کمتر از λ_S و طول موج دریافتی در پشت چشمهٔ صوت بیشتر از λ_S است و جهت حرکت شنونده تأثیری در طول موج دریافتی توسط او ندارد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lambda_A < \lambda_S \quad , \quad \lambda_B < \lambda_S \quad , \quad \lambda_C > \lambda_S \quad , \quad \lambda_D > \lambda_S$$

۲) به‌طور کلی اگر شنونده و چشمهٔ صوت به یکدیگر نزدیک شوند، بسامد موج دریافتی توسط شنونده بیشتر از f_S است و اگر شنونده و چشمهٔ صوت از یکدیگر دور شوند، بسامد دریافتی توسط شنونده کمتر از f_S است. حال با توجه به اندازه و جهت سرعت متحرک‌ها داریم:

فاصلهٔ شنوندهٔ A و چشمهٔ صوت ثابت است $\Rightarrow f_A = f_S$

شنوندهٔ B و چشمهٔ صوت به یکدیگر نزدیک می‌شوند $\Rightarrow f_B > f_S$

چشمهٔ صوت از شنونده‌های C و D دور می‌شوند

$$\Rightarrow f_C < f_D \quad , \quad f_D < f_S$$

پس فقط مورد (ب) صحیح است.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۸۱ تا ۸۳)

فیزیک ۳- پیشروی سریع

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»** *(حسام نادری)*

موارد (ب) و (ت) نادرست‌اند و بقیه موارد طبق متن کتاب درسی درست هستند.

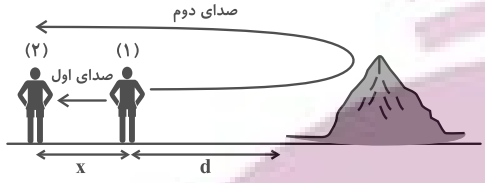
علت نادرستی مورد (ب): اگر تأخیر زمانی بین دو صوت اولیه و بازتابیده کمتر از $۰/۱$ ثانیه باشد، گوش انسان نمی‌تواند پژواک را از صوت مستقیم اولیه تمیز دهد. پس با عدد $۰/۲$ ثانیه امکان‌پذیر است.

علت نادرستی مورد (ت): تندی امواج روی سطح آب به عمق آن بستگی دارد و در قسمت‌های عمیق بیشتر است.

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۵ و ۹۸)

۱۰۲- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

اگر دانش‌آموز (۱) فریاد بزند، دانش‌آموز (۲) دو صدا می‌شنود. یکی صدایی که مستقیم از دانش‌آموز (۱) به (۲) می‌رسد و دومین صدا، صدایی است که از پژواک صدای دانش‌آموز (۱) می‌شنود. اگر زمان شنیدن صدای اول $t_۱$ و زمان شنیدن صدای دوم $t_۲$ باشد داریم:



$$t = \frac{\Delta x}{v} \Rightarrow t_۲ - t_۱ = \frac{۲d + x}{v_{صوت}} - \frac{x}{v_{صوت}} = \frac{۲d}{v_{صوت}}$$

$$\xrightarrow[v_{صوت}=۳۴۰\frac{m}{s}]{t_۲ - t_۱ = ۱s} ۱ = \frac{۲d}{۳۴۰} \Rightarrow d = ۱۷۰\,m$$

دیدیم که اختلاف زمانی دو صدا به فاصلهٔ دو دانش‌آموز از هم (x) بستگی ندارد. اگر دانش‌آموز (۱)، ۶۸ متر به صخره نزدیک شود، داریم:

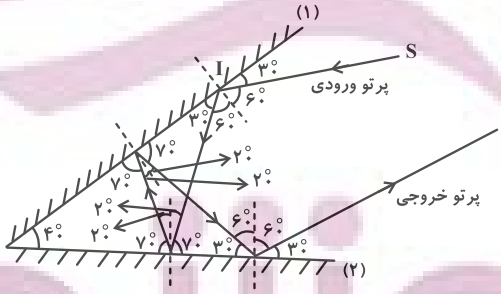
$$d' = d - ۶۸ = ۱۷۰ - ۶۸ = ۱۰۲\,m$$

$$\Rightarrow t'_۲ - t'_۱ = \frac{۲d'}{v_{صوت}} = \frac{۲\times ۱۰۲}{۳۴۰} = ۰/۶\,s$$

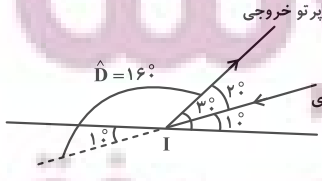
(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۲ و ۹۳)

۱۰۳- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

طبق قانون بازتاب عمومی، همواره زاویهٔ تابش و بازتاب با هم برابر است. پس مطابق با شکل زیر داریم:



و در نهایت، زاویهٔ امتداد پرتو بازتاب نهایی (پرتو خروجی) با امتداد پرتو SI (پرتو ورودی) را به صورت زیر به دست می‌آوریم:



(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۱۰۴- **گزینهٔ «۴»** *(غلامرضا محبی)*

بررسی گزینه‌ها:

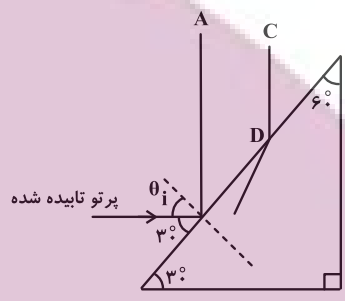
۱) نادرست؛ ادامهٔ موج CD در محیط (۲) با جبههٔ موج AB موازی نیست.

۲) نادرست؛ تندی در محیط (۲) کوچک‌تر است.

$$\lambda_2 < \lambda_1 \xrightarrow{f=\text{ثابت}} v_2 < v_1$$

۳) نادرست؛ بسامد ثابت می‌ماند.

۴) درست



$$\theta_i = 60^\circ$$

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

۱۰۵- **گزینهٔ «۲»** *(مجتبی نکوئیان)*

همان‌طور که می‌دانیم زاویهٔ تند بین جبهه‌های موج فرودی، و مرز دو بخش، برابر با زاویهٔ تابش (θ_1) و زاویهٔ تند بین جبهه‌های موج شکسته و مرز دو بخش، برابر با زاویهٔ شکست (θ_2) است، پس:

$$\theta_1 = 180^\circ - 143^\circ = 37^\circ \quad , \quad \theta_2 = 180 - \theta \qquad (I)$$

با توجه به این‌که فاصلهٔ بین جبهه‌های موج در محیط (۲)، بیشتر از فاصلهٔ بین جبهه‌های موج در محیط (۱) است، می‌توان گفت که طول موج و در نتیجه تندی انتشار موج در محیط (۲)، بیشتر از طول موج و تندی انتشار موج در محیط (۱) است، بنابراین:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{4}{3} \qquad (II)$$

از طرفی طبق قانون شکست اسنل داریم:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

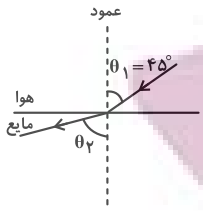
$$\xrightarrow{(I),(II)} \frac{4}{3} = \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{0/6} \Rightarrow \sin(180-\theta) = 0/8$$

$$\Rightarrow 180^\circ - \theta = 53^\circ \Rightarrow \theta = 127^\circ$$

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۸)

۱۰۶- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

زاویهٔ بین جبهه‌های موج و سطح جدایی دو محیط، همان زاویهٔ پرتو با خط عمود است. بنابراین زاویهٔ تابش 45° است.



چون صوت از هوا وارد مایع شده، پس پرتو از خط عمود دور می‌شود و زاویهٔ شکست از زاویهٔ تابش بیشتر است.

$$\theta_2 = \theta_1 + 15^\circ \Rightarrow \theta_2 = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$$

طبق قانون شکست عمومی داریم:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

از طرفی چون بسامد موج هنگام ورود از هوا به مایع تغییر نمی‌کند و با توجه به رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

فاصلهٔ بین دو جبههٔ موج متوالی در هوا $50\,cm$ داده شده، پس $\lambda_1 = 50\,cm$ است.

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\lambda_2}{50} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\lambda_2}{50}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{50\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{50\sqrt{6}}{2} = 25\sqrt{6}\,cm$$

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۹۸)

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** *(کامران ابراهیمی)*

طبق رابطهٔ $v = \frac{d}{t}$ داریم:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{d}{\frac{4}{3}t}}{\frac{d}{t}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow v_2 = \frac{3}{4}v_1$$

نتیجه می‌گیریم سرعت نور در محیط (۲)، ۲۵٪ از سرعت نور در محیط (۱) کمتر است. از طرفی طبق رابطهٔ اسنل داریم:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sin\theta_2}{\underbrace{\sin 53^\circ}_{0/8}} = \frac{3}{4}$$

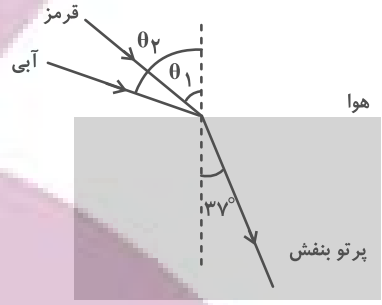
$$\Rightarrow \sin\theta_2 = 0/6 \Rightarrow \theta_2 = 37^\circ$$

زاویهٔ انحراف $D = \theta_1 - \theta_2 = 53^\circ - 37^\circ = 16^\circ$

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۷ و ۹۸)

۱۰۸- **گزینهٔ «۲»** (محمدبهواد سورچی)

ابتدا با توجه به این‌که ضریب شکست محیط شفاف برای نور آبی از قرمز بیشتر است، پرتوهای قرمز و آبی را مشخص می‌کنیم:



سپس طبق قانون شکست اسنل θ_1 و θ_2 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{n_{\text{قرمز}}}{n_{\text{هوا}}}=\frac{\sin\theta_1}{\sin 37^\circ}\Rightarrow\frac{\frac{7}{6}}{1}=\frac{\sin\theta_1}{0/6}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_1=0/7=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_1=45^\circ$$

$$\frac{n_{\text{آبی}}}{n_{\text{هوا}}}=\frac{\sin\theta_2}{\sin 37^\circ}\Rightarrow\frac{\frac{4}{3}}{1}=\frac{\sin\theta_2}{0/6}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_2=\frac{4}{3}\times 0/6=0/8\Rightarrow\theta_2=53^\circ$$

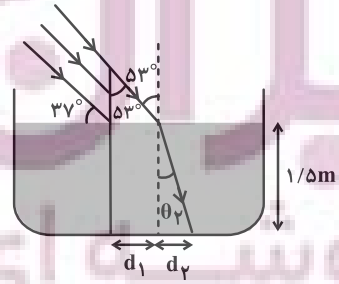
حال اختلاف زوایای θ_1 و θ_2 را حساب می‌کنیم:

$$\theta_2-\theta_1=53-45=8^\circ$$

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۸ و ۱۰۰)

۱۰۹- **گزینهٔ «۳»** (سیده‌ملیحه میرصالحی)

پرتور نور مطابق شکل با زاویهٔ تابش $90^\circ-37^\circ=53^\circ$ وارد آب شده و شکسته می‌شود. بنابراین ناحیهٔ سایه‌ای ایجاد می‌شود که برای محاسبهٔ طول آن باید مجموع d_1 و d_2 را محاسبه کنیم.



بنابراین ابتدا در مثلث بالایی داریم:

$$x=2/1-1/5=0/6\,m$$ طولی از میله که بیرون آب است

$$\tan 53^\circ=\frac{d_1}{0/6}\Rightarrow d_1=0/6\times\frac{0/8}{0/6}=0/8\,m$$

حال با استفاده از قانون شکست اسنل، زاویهٔ شکست را محاسبه کرده و به کمک روابط مثلثاتی طول d_2 را نیز می‌یابیم:

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\xrightarrow[n_2=\frac{4}{3},\ \theta_2=?]{n_{\text{هوا}}=1,\ \theta_1=53^\circ}1\times\sin 53^\circ=\frac{4}{3}\sin\theta_2$$

$$\Rightarrow\sin\theta_2=\frac{3}{4}\times 0/8=0/6\Rightarrow\theta_2=37^\circ$$

$$\tan\theta_2=\frac{d_2}{\text{عمق استخر}}\Rightarrow d_2=1/5\times\frac{0/6}{0/8}=\frac{9}{8}\,m$$

بنابراین طول سایه برابر است با:

$$\text{طول سایه}: d_1+d_2=0/8+\frac{9}{8}=1/925\,m$$

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** (محمد نهاوندی‌مقدم)

برای آن‌که پراش بارزتری را شاهد باشیم، باید شکاف a کوچک‌تر و طول موج بزرگ‌تر باشد.

بررسی موارد:

الف) درست $\quad\frac{\lambda\uparrow}{a\downarrow}\Rightarrow\frac{\lambda}{a}\uparrow$

ب) درست $\quad\frac{\lambda\uparrow}{a\downarrow}\Rightarrow\frac{v}{\downarrow f\,a\downarrow}\Rightarrow af\downarrow$

پ) درست $\quad\frac{\lambda\uparrow}{a\downarrow}\Rightarrow\frac{vT\uparrow}{a\downarrow}\Rightarrow\frac{T}{a}\uparrow$

ت) درست $\quad\frac{\lambda\uparrow}{a\downarrow}\Rightarrow\frac{vT\uparrow}{a\downarrow}\Rightarrow\frac{T\uparrow}{a\downarrow}$ یا $\frac{T.T\uparrow}{a\downarrow}\uparrow\Rightarrow\frac{T}{af}\uparrow\Rightarrow\frac{af}{T}\downarrow$

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۱۰۱ و ۱۰۲)

ابتکار توسعه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۲

۱۱۱- **گزینهٔ «۲»** (کامران ابراهیمی)

طبق روابط $V = RI$ و $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ می‌توانیم بنویسیم:

$V = \frac{R\varepsilon}{R+r} \leftarrow$ اختلاف پتانسیل دو سر باتری

$$V_۲ = \frac{۶}{۵}V_۱ \Rightarrow \frac{R_۲\varepsilon}{R_۲+r} = \frac{۶}{۵}\frac{R_۱\varepsilon}{R_۱+r}$$

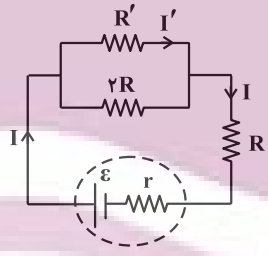
$$\Rightarrow \frac{۲R}{۲R+r} = \frac{۶}{۵}\frac{R}{R+r} \Rightarrow \frac{۱}{۲R+r} = \frac{۳}{۵(R+r)}$$

$$\Rightarrow ۶R+۳r = ۵R+۵r \Rightarrow R = ۲r \Rightarrow \frac{R}{r} = ۲$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۵)

۱۱۲- **گزینهٔ «۲»** (علیرضا جباری)

جریان اصلی مدار را I و جریانی را که از مقاومت R' می‌گذرد، I' می‌نامیم. رابطهٔ این جریان‌ها به صورت زیر است:



$$I' = \frac{۲R}{R'+۲R} \times I$$

از طرفی با توجه به متن سؤال داریم: $P_R = ۲P_{R'}$

$$P_R = ۲P_{R'} \Rightarrow RI^۲ = ۲R'I'^۲ \Rightarrow RI^۲ = ۲R'(\frac{۲R}{R'+۲R} \times I)^۲$$

$$\Rightarrow RI^۲ = ۲R' \times \frac{۴R^۲I^۲}{(R'+۲R)^۲} \Rightarrow ۱ = \frac{۸RR'}{R'^۲+۴R^۲+۴RR'}$$

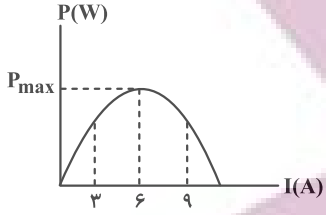
$$\Rightarrow R'^۲+۴R^۲+۴RR' = ۸RR' \Rightarrow R'^۲+۴R^۲-۴RR' = ۰$$

$$\Rightarrow (R'-۲R)^۲ = ۰ \Rightarrow R' = ۲R \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{۱}{۲}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

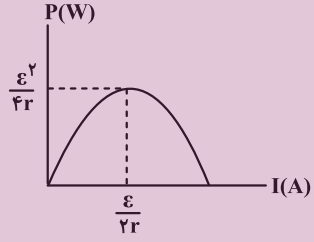
۱۱۳- **گزینهٔ «۲»** (معصومه شریعت‌ناصری)

با توجه به نمودار توان برحسب جریان و تقارن سهمی می‌توان دریافت که جریان مربوط به رأس سهمی برابر است با:



$$\frac{۳+۹}{۲} = ۶$$

بنابراین توان خروجی ماکزیمم مربوط به جریان $I = ۶A$ است. یعنی این جریان برابر با $\frac{\varepsilon}{۲r}$ بوده و توان خروجی بیشینه برابر با $\frac{\varepsilon^۲}{۴r}$ خواهد بود. (به نمودار زیر دقت کنید.)



در نتیجه: $\frac{\varepsilon}{۲r} = ۶ \Rightarrow \frac{\varepsilon}{۲\times۲} = ۶ \Rightarrow \varepsilon = ۲۴V$

$$\Rightarrow P_{max} = \frac{\varepsilon^۲}{۴r} = \frac{۲۴\times۲۴}{۴\times۲} = ۷۲W$$

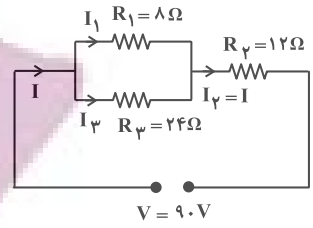
در ادامه باید مقدار P' را به دست آوریم. در رابطهٔ $P = \varepsilon I - rI^۲$ که مربوط به توان خروجی مولد است، مقدار $I = ۳A$ را جای‌گذاری می‌کنیم و مقدار P' را به دست می‌آوریم:

$$P' = ۲۴\times۳ - ۲\times۹ = ۵۴W \Rightarrow \frac{P_{max}}{P'} = \frac{۷۲}{۵۴} = \frac{۴}{۳}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحهٔ ۶۹)

۱۱۴- **گزینهٔ «۴»** (محمدجواد سورچی)

ابتدا با توجه به این‌که مقاومت معادل مجموعه ۱۸Ω است، نحوهٔ اتصال مقاومت‌ها و شکل مدار را به دست می‌آوریم. برای این‌که مقاومت معادل ۱۸Ω بشود، باید $R_۱$ و $R_۳$ با هم موازی باشند و مجموعهٔ $R_{۱,۳}$ با $R_۲$ متوالی باشد.



سپس جریان گذرنده از هر مقاومت را به دست آوریم:

$$I_2 = I = \frac{V}{R_{eq}} \Rightarrow I_2 = \frac{90}{18} = 5A$$

R_1 و R_3 موازی $: V_1 = V_3 \Rightarrow R_1 I_1 = R_3 I_3$

$$\Rightarrow 8 \times I_1 = 24 \times I_3 \Rightarrow I_1 = 3I_3$$

$$I_1 + I_3 = I \Rightarrow 3I_3 + I_3 = 5 \Rightarrow 4I_3 = 5 \Rightarrow I_3 = \frac{5}{4}A$$

$$\Rightarrow I_1 = 3I_3 = \frac{15}{4}A$$

در نهایت توان مصرفی R_1 و R_2 را به دست آورده و اختلاف آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$P = RI^2 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 8 \times (\frac{15}{4})^2 = 112/5W \\ P_2 = 12 \times (5)^2 = 300W \end{cases}$$

$$P_2 - P_1 = 300 - 112/5 = 187/5W$$

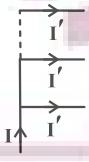
(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۱۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

ابتدا مدار را بررسی می‌کنیم. قبل از سوختن یکی از لامپ‌ها، انگار n مقاومت موازی مشابه R داریم که معادل آن‌ها می‌شود $\frac{R}{n}$. حال جریان در هر شاخه را به دست می‌آوریم:

$$\text{قانون اهم} \quad I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R_{\text{کل}}} \overset{\text{مدار ۱}}{=\!=\!=} \frac{\varepsilon}{\frac{R}{n}} = n\frac{\varepsilon}{R}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم جریان در شاخه‌ها}} \text{قانون گره} \Rightarrow I = nI'$$



$$\Rightarrow n\frac{\varepsilon}{R} = nI' \Rightarrow I' = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$\text{بعد از سوختن یکی از لامپ‌ها} \Rightarrow I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{\frac{R}{n-1}} = (n-1)\frac{\varepsilon}{R}$$

$$\text{جریان شاخه‌ها} I'' = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow I' = I''$$

پس در هر دو حالت مدار ۱ جریان عبوری از شاخه‌ها یکسان است و روشنایی لامپ‌ها تغییری نمی‌کند.

حال مدار ۲ را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{همهٔ لامپ‌ها سالم} \rightarrow I_{\text{کل}} = \dfrac{\varepsilon}{\frac{R}{n}+r}, \\ I' = \dfrac{I}{n} = \dfrac{\varepsilon}{R+nr} \\ \text{یکی از لامپ‌ها بسوزد} \rightarrow I_{\text{کل}} = \dfrac{\varepsilon}{\frac{R}{(n-1)}+r}, \\ I'' = \dfrac{I}{n-1} = \dfrac{\varepsilon}{R+(n-1)r} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{I''}_{\text{مخرج کسر کوچک‌تر}} > I' \Rightarrow \text{لامپ‌ها پرنورتر می‌شوند}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۴)

۱۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرامحمد میرسعید)*

با توجه به مقدار ε_1 و ε_2، جهت جریان در مدار ساعتگرد است و برای باتری ε_1 می‌توان نوشت:

$$V_1 = \varepsilon_1 + Ir_1 \Rightarrow 20 = 12 + I \times 2 \Rightarrow 2I = 8 \Rightarrow I = 4A$$

باتری ε_2، باتری تولید کننده است و می‌توان نوشت:

$$V_2 = \varepsilon_2 - Ir_2 = 35 - 4 \times 3 = 23V$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

۱۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی نکوئیان)*

اگر هر دو کلید k_1 و k_2 باز باشند یا هر دو کلید k_1 و k_2 بسته باشند، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۴ اهمی برابر با نیروی محرکهٔ مولد (ε) خواهد بود، پس در هر دو حالت طبق قانون اهم $(I = \frac{V}{R})$ جریان گذرنده از مقاومت ۴ اهمی برابر با $\frac{\varepsilon}{4}$ است، بنابراین:

$$\frac{I_2}{I_1} = 1$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۴)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(محمد نهاوندی‌مقدم)*

اتصال $R_۱$ و $R_۲$ با هم موازی است و طبق رابطهٔ $P=\frac{V^۲}{R}$ برای آن که توان یکسانی داشته باشند باید مقاومت‌های مشابه داشته باشند. پس $R_۱=۱۲\Omega$ می‌شود. مقاومت $R_{۱,۲}$ با $R_۴$ متوالی است با استفاده از رابطهٔ $P=RI^۲$ باید توان مقاومت $R_{۱,۲}$، دو برابر توان مقاومت $R_۴$ باشد.

$$R_{۱,۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶\Omega$$

$$P_{۱,۲}=۲P_۴ \Rightarrow ۶I^۲=۲R_۴I^۲ \Rightarrow R_۴=۳\Omega$$

و در نهایت مقاومت $R_{۱,۲,۴}$ با مقاومت $R_۳$ به صورت موازی بسته شده و باید توان آن سه برابر توان مقاومت $R_۳$ باشد.

$$\left.\begin{matrix}R_{۱,۲,۴}=۶+۳=۹\Omega\\P_{۱,۲,۴}=۳P_۲\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{V^۲}{۹}=۳\frac{V^۲}{R_۳} \Rightarrow R_۳=۲۷\Omega$$

در نتیجه مقاومت معادل مدار برابر است با: $R_{eq}=\frac{۲۷\times ۹}{۲۷+۹}=۶/۷۵\Omega$

و با استفاده از افت پتانسیل داریم:

$$V'=Ir \Rightarrow ۳=I\times\frac{۳}{۲} \Rightarrow I=۲A$$

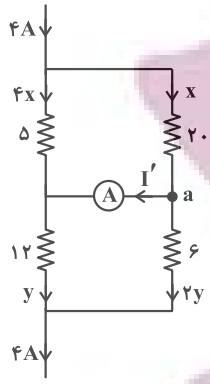
و در نهایت نیروی محرکه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon=I(R_{eq}+r) \Rightarrow \varepsilon=۲(۶/۷۵+۱/۵)=۱۶/۵V$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۴)

۱۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

کافی است در شاخه‌های موازی جریان را به نسبت عکس مقاومت‌ها تقسیم کنیم و از قاعدهٔ گره استفاده کنیم:



$$x+۴x=۴ \Rightarrow x=\frac{۴}{۵}A$$

$$۲y+y=۴ \Rightarrow y=\frac{۴}{۳}A$$

$$a \text{ در گرهٔ } \Rightarrow x=I'+۲y \Rightarrow I'=\frac{۴}{۵}-\frac{۸}{۳}=\frac{۱۲-۴۰}{۱۵}$$

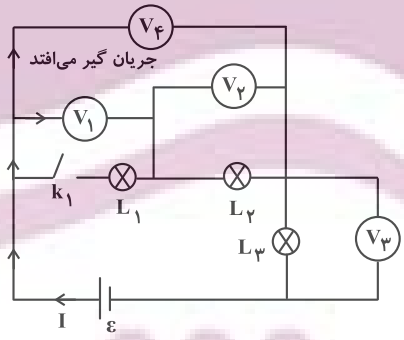
$$\Rightarrow I'=-\frac{۲۸}{۱۵}A$$

I' منفی درآمد به این معنا که جهت اصلی آن برعکس است.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

۱۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

با قطع کلید $k_۱$، لامپ $L_۱$ از مدار حذف شده و اگر مسیر جریان را دنبال کنیم، می‌بینیم که ولت‌سنج‌هایی در مسیر اصلی جریان قرار می‌گیرند و در نتیجه جریان اصلی مدار صفر می‌شود.



$$\Rightarrow I=۰$$

$V_۲$ به دو سر $L_۲$ وصل است: $V_۲=R_۲\cancel{I}^{۰}=۰$

$V_۳$ به دو سر $L_۳$ وصل است: $V_۳=R_۳\cancel{I}^{۰}=۰$

$V_۱$ و $V_۴$ ولتاژ دو سر باتری را نشان می‌دهند. پس دو ولت‌سنج عدد صفر را نشان می‌دهند.

$$V_۱=V_۴=\varepsilon-r\cancel{I}^{۰}=\varepsilon$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

توشه ای برای موفقیت

فیزیک ۱

۱۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(آراس محمدی)*

برای راحتی در حل سوال، داده‌ها را به صورت عددگذاری پیاده می‌کنیم:

$$K_A = ۴K_B \Rightarrow \begin{cases} K_A = ۴J \\ K_B = ۱J \end{cases} , \ m_A = m_B \Rightarrow \begin{cases} m_A = ۱kg \\ m_B = ۱kg \end{cases}$$

مقدار تندی‌ها را نیز پیدا می‌کنیم:

$$K_A = ۴K_B \Rightarrow m_A \times (v_A)^۲ = ۴m_B \times (v_B)^۲$$

$$\xrightarrow[\text{جذر می‌گیریم}]{m_A = m_B} v_A = ۲v_B \Rightarrow \begin{cases} v_A = ۲\frac{m}{s} \\ v_B = ۱\frac{m}{s} \end{cases}$$

حال باید تغییرات طوری اعمال گردند که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\frac{K_B}{K_A} = (\frac{m'_B}{m'_A}) \times (\frac{v'_B}{v'_A})^۲ \xrightarrow{\frac{k_B}{k_A}=۱} ۱ = \frac{m'_B}{m'_A} \times (\frac{v'_B}{v'_A})^۲ \quad (*)$$

بررسی موارد:

الف)
$$۱۰ (\frac{m'_B}{m'_A}) \times (\frac{v'_B}{v'_A})^۲ \xrightarrow[v'_B = ۲\sqrt{۲}\frac{m}{s} \ , \ v'_A = ۲\frac{m}{s}]{m'_B = ۲kg \ , \ m'_A = ۱kg}$$

$$۱۰ (\frac{۲}{۱}) \times (\frac{۲\sqrt{۲}}{۲})^۲ \Rightarrow ۱ \neq ۴$$

برقرار نیست.

ب)
$$۱۰ (\frac{m'_B}{m'_A}) \times (\frac{v'_B}{v'_A})^۲ \xrightarrow[v'_B = ۱\frac{m}{s} \ , \ v'_A = ۲\frac{m}{s}]{m'_B = ۰/۵kg \ , \ m'_A = ۲kg}$$

$$۱۰ (\frac{۰/۵}{۲}) \times (\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow ۱ \neq \frac{۱}{۱۶}$$

برقرار نیست.

ج)
$$۱۰ (\frac{m'_B}{m'_A}) \times (\frac{v'_B}{v'_A})^۲ \xrightarrow[v'_A = \frac{۲}{۳}\frac{m}{s} \ , \ v'_B = \frac{۱}{۲}\frac{m}{s}]{m'_A = \frac{۱}{۳}kg \ , \ m'_B = \frac{۱}{۲}kg}$$

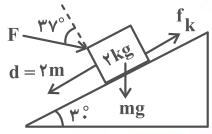
$$۱۰ (\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۳}}) \times (\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲}{۳}})^۲ \Rightarrow ۱ \neq \frac{۲۷}{۳۲}$$

برقرار نیست.

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

۱۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(حسام نادری)*

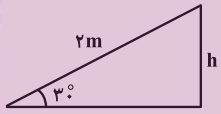
ابتدا کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم را در جابه‌جایی ۲ متری به سمت پایین روی سطح شیبدار، حساب می‌کنیم. توجه کنید که نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت جسم به آن وارد می‌شود:



$$W_F = Fd\cos(\underbrace{۹۰+۳۷}_{\text{زاویهٔ بین ابتدای دو بردار } \vec{F} \text{ و } \vec{d}}) = -Fd\sin ۳۷ = -۱۰ \times ۲ \times ۰/۶ = -۱۲J$$

کار نیروی اصطکاک $W_{f_k} = f_k d\cos ۱۸۰^\circ = -f_k d = -۲ \times ۲ = -۴J$

برای محاسبهٔ کار نیروی وزن، لازم است جابه‌جایی عمودی جسم را در نظر بگیریم:



$$W_{mg} = +mgh = mgd\sin ۳۰^\circ = ۲ \times ۱۰ \times ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۲۰J$$

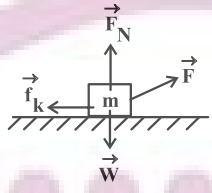
$$\Rightarrow W_{کل} = W_F + W_{mg} + W_{f_k} = -۱۲ + ۲۰ - ۴ = ۴J$$

$$\Rightarrow \frac{W_{mg}}{W_{کل}} = \frac{۲۰}{۴} = ۵$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۱۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



از آنجا که جابه‌جایی جسم افقی است، نیروهای وزن $(\vec{W})$ و عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ کاری انجام نمی‌دهند. حتی مؤلفهٔ قائم نیروی $\vec{F}$ نیز کاری انجام نمی‌دهد. از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم: (جابه‌جایی به طرف راست است.)

$$K_۲ - K_۱ = W_t \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ = W_F + W_{f_k}$$

$$\xrightarrow[m=۸kg]{v_۱=۰} \frac{۱}{۲} \times ۸ \times v_۲^۲ = F_x \times d\cos ۰ + f_k \times d \times \cos ۱۸۰^\circ$$

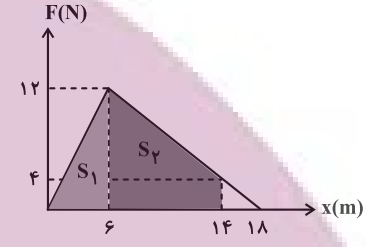
$$\xrightarrow[f_k=۲۰N]{F_x=۶۰N\ ,\ d=۱۰m} ۴v_۲^۲ = ۶۰\times۱۰-۲۰\times۱۰$$

$$\Rightarrow ۴v_۲^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow v_۲^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow v_۲ = ۱۰\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۱۲۴- **گزینهٔ «۴»** (مجتبی نکوئیان)

با توجه به این‌که در نمودار نیرو- مکان، مساحت سطح محصور بین نمودار و محور مکان برابر با کار انجام شده توسط آن نیرو است، داریم:



$$S_۱ = \frac{۶(۱۲)}{۲} = ۳۶ \quad , \quad S_۲ = \frac{۱۶}{۲}(۸) = ۶۴$$

$$W_F = S_۱ + S_۲ = ۱۰۰J$$

از طرفی با توجه به وجود نیروی اصطکاک (f_k) و با استفاده از رابطهٔ کار، داریم:

$$W_{f_k} = f_k d\cos\theta \xrightarrow[\substack{\cos۱۸۰^\circ=-۱\\ f_k=۲/۵N\\ d=۱۴m}]{\theta=۱۸۰^\circ} W_{f_k} = (۲/۵)(۱۴)(-۱) = -۳۵J$$

و در نهایت با استفاده از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_t = \Delta K = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow[m=۲kg\ ,\ v_۱=۵\frac{m}{s}]{W_t=W_F+W_{f_k}=۶۵J}$$

$$۶۵ = \frac{۱}{۲}(۲)(v_۲^۲ - ۲۵) \Rightarrow v_۲^۲ = ۹۰ \xrightarrow{\text{جذر}} v_۲ = ۳\sqrt{۱۰}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۱۲۵- **گزینهٔ «۳»** (حسام نادری)

از رابطهٔ $P = \frac{W}{\Delta t}$ و قضیهٔ کار و انرژی جنبشی $(W_t = \Delta K)$ استفاده می‌کنیم:

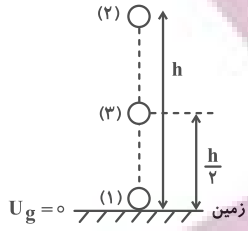
$$\frac{\text{حالت دوم}}{\text{حالت اول}}\ \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{W_۲}{W_۱}\times\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲} = \frac{\Delta K_۲}{\Delta K_۱}\times\frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}$$

$$\frac{P_۲}{۴۰} = \frac{\frac{۱}{۲}m(\frac{۳}{۲}v)^۲ - \frac{۱}{۲}mv^۲}{\frac{۱}{۲}mv^۲ - ۰}\times\frac{t}{\frac{t}{۲}} = \frac{۱۰}{۴} \Rightarrow P_۲ = ۱۰۰W$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۱۲۶- **گزینهٔ «۴»** (زهره آقامحمدی)

ابتدا قانون پایستگی انرژی را در دو نقطهٔ (۱) و (۲) (لحظهٔ پرتاب و بالاترین ارتفاع) می‌نویسیم تا کار نیروی مقاومت هوا را محاسبه کنیم:



$$W_f = E_۲ - E_۱ \Rightarrow W_f = (U_۲ + K_۲) - (U_۱ + K_۱)$$

در بالاترین ارتفاع $K_۲ = ۰$ است. همچنین با انتخاب زمین به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی $U_۱ = ۰$ خواهد شد:

$$W_f = mgh_۲ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \xrightarrow[v_۱=۱۰\frac{m}{s}\ ,\ h_۲=۴/۵m]{m=۲kg\ ,\ g=۱۰\frac{m}{s^۲}}$$

$$W_f = ۲\times۱۰\times۴/۵ - \frac{۱}{۲}\times۲\times۱۰۰ \Rightarrow W_f = -۱۰J$$

چون نیروی مقاومت هوا ثابت است، از نقطهٔ (۱) تا (۳) کار نیروی مقاومت هوا برابر است با:

$$W'_f = \frac{۱}{۲}W_f = -۵J$$

اکنون قانون پایستگی انرژی را در دو نقطهٔ (۱) و (۳) (لحظهٔ پرتاب و نیمهٔ راه) می‌نویسیم:

$$W'_f = E_۳ - E_۱ = (U_۳ + K_۳) - K_۱ = mgh_۳ + \frac{۱}{۲}mv_۳^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$\xrightarrow[h_۳=\frac{۱}{۲}h_۲=\frac{۴/۵}{۲}m\ ,\ v_۱=۱۰\frac{m}{s}]{m=۲kg\ ,\ g=۱۰\frac{m}{s^۲}\ ,\ W'_f=-۵J}$$

$$-۵ = ۲\times۱۰\times\frac{۴/۵}{۲} + \frac{۱}{۲}\times۲\times v_۳^۲ - \frac{۱}{۲}\times۲\times۱۰۰$$

$$\Rightarrow -۵ = ۴۵ + v_۳^۲ - ۱۰۰ \Rightarrow v_۳^۲ = ۵۰ \Rightarrow v_۳ = ۵\sqrt{۲}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۱۲۷- **گزینهٔ «۴»** (محمدکاظم منشاری)

چون اصطکاک نداریم، سرعت‌ها به اندازهٔ m بستگی ندارد. سطح زمین را به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر می‌گیریم.

$$E_A = E_B = E_C$$

$$E_A = U_A + K_A = mgh + \frac{۱}{۲}mv_A^۲ = ۸۰m + ۶۴m = ۱۴۴m$$

$$E_B = 144m = \cancel{mgh'}^{44m} + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow v_B^2 = 200 \Rightarrow v_B = 10\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

$$E_C = 144m = \cancel{mgh}^{63m} + \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$\Rightarrow v_C^2 = 162 \Rightarrow v_C = 9\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

$$\Delta v = 10\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = \sqrt{2}\,\frac{m}{s} \xrightarrow[\text{تبدیل به } \frac{km}{h}]{\times\frac{36}{10}} \Delta v = 3/6\sqrt{2}\,\frac{km}{h}$$

$$= \frac{18}{5}\sqrt{2}\,\frac{km}{h}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۱۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(دانیال راستی)*

سطح زمین را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم و انرژی مکانیکی توپ در لحظهٔ رها شدن را با E_1 نشان می‌دهیم:

$$E_1 = K_1 + U_1 \xrightarrow{K_1=0} E_1 = U_1 = mgh$$

$$\xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2},\ h=9m]{m=400g} E_1 = 36J$$

وقتی توپ در آستانهٔ برخورد با زمین قرار دارد انرژی مکانیکی E_2 دارد:

$$E_2 = K_2 + U_2 \xrightarrow[\text{فرض}]{U_2=0} E_2 = K_2$$

تغییر انرژی مکانیکی در این مدت برابر با کار نیروی مقاومت هوا است:

$$W_{\text{مقاومت هوا}} = -hf_D = E_2 - E_1$$

$$\xrightarrow[f_D=0/5N]{E_1=36J,\ h=9m} 0/5\times 9 = E_2 - 36$$

$$\Rightarrow K_2 = E_2 = 31/5J$$

انرژی مکانیکی در لحظهٔ بعد از برخورد با زمین برابر E_3 است. با توجه به این‌که بر اثر برخورد انرژی جنبشی ۲۰ درصد کم می‌شود، داریم:

$$E_3 = K_3 = (\frac{100-20}{100})K_2 = (0/8)(31/5) = 25/2J$$

انرژی مکانیکی در زمانی که توپ پس از برخورد به زمین به ارتفاع h' می‌رسد برابر است با:

$$E_4 = K_4 + U_4 \xrightarrow{K_4=0} E_4 = U_4 = mgh'$$

تغییر انرژی مکانیکی در مسیر برگشت برابر با کار مقاومت هوا در این مسیر است:

$$\Delta E' = E_4 - E_3 = W'_{\text{هوا}} = -h'f_D \xrightarrow[f_D=0/5N]{E_3=25/2,\ E_4=mgh'}$$

$$(0/4)(10)h' - 25/2 = -h'(0/5) \Rightarrow h' = 5/6\,m$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(دانیال راستی)*

بازده برابر با نسبت انرژی خروجی به انرژی ورودی است. انرژی ورودی همان انرژی مصرفی است که برابر است با:

$$E_{\text{ورودی}} = P_{\text{مصرفی}} \times \Delta t \xrightarrow[P_{\text{مصرفی}}=600W]{\Delta t=\frac{4}{3}s} E_{\text{ورودی}} = 800J$$

انرژی خروجی برابر با کار انجام شده توسط بالابر بر روی جسم است:

$$\Delta K = W_t = W_{mg} + W_{\text{بالابر}}$$

$$E_{\text{خروجی}} = W_{\text{بالابر}} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) - mgh\cos 180^\circ$$

$$\xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2},\ h=4m]{m=12kg,\ v_0=0\ \ v_1=2\frac{m}{s}}$$

$$W_{\text{بالابر}} = (\frac{1}{2})(12)(2^2-0) - (12)(10)(-1)(4) = 24 + 480 = 504J$$

$$\text{درصد بازده} = \frac{E_{\text{خروجی}}}{E_{\text{ورودی}}}\times 100 = \frac{504}{800}\times 100 = 63\%$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۱۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(محمدجواد سورچی)*

ابتدا با داشتن بازده سامانهٔ A، W_1 و Q را حساب می‌کنیم:

$$\text{بازده درصدی سامانهٔ } A = \frac{W_1}{\text{انرژی ورودی}}\times 100$$

$$\Rightarrow 80 = \frac{W_1}{50}\times 100 \Rightarrow W_1 = 40\,kJ$$

$$\text{انرژی ورودی} = W_1 + Q \Rightarrow 50 = 40 + Q \Rightarrow Q = 10\,kJ$$

سپس Q' را حساب می‌کنیم:

$$Q - Q' = 5 \Rightarrow 10 - Q' = 5 \Rightarrow Q' = 5\,kJ$$

در نهایت بازده ماشین B را به دست می‌آوریم:

$$\text{بازده برحسب درصد} = \frac{W_2}{W_1}\times 100 = \frac{W_1 - Q'}{W_1}\times 100$$

$$\Rightarrow \text{بازده برحسب درصد} = \frac{40-5}{40}\times 100 = 87/5\%$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۳

۱۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی)*

تنها مورد آخر به نادرستی بیان شده است.

بررسی موارد:

مورد اول: مادهٔ B، آب (H_2O) می‌باشد و بین ذرات آن نیروی بین‌مولکولی از نوع پیوند هیدروژنی یافت می‌شود.

مورد دوم: مادهٔ A طبق نمودار کتاب درسی مس است ولی به‌طور کلی جامدات یونی و فلزی را می‌توان به آن نسبت داد. در نتیجه ممکن است در ساختار خود دارای دریای الکترونی باشد.

مورد سوم: دمای اتاق $25^\circ C$ می‌باشد. در نتیجه حالات فیزیکی بیان شده درست است.

مورد چهارم: مادهٔ C در کتاب درسی O_2 بیان شده است. اما به‌طور کلی نیروی جاذبهٔ بین مولکولی ضعیف را می‌توان به مواد مولکولی نسبت داد. اگر مادهٔ C را عنصر در نظر بگیریم عناصر نافلزی را می‌توان برای آن درنظر گرفت. مادهٔ A نیز همان‌طور که در تحلیل مورد دوم بیان شد، اگر عنصر باشد می‌توان به فلزات نسبت داد؛ در نتیجه فلزات و نافلزات ممکن است با یکدیگر واکنش دهند.

مورد پنجم: گسترهٔ دمایی مایع بودن NaCl از $801^\circ C$ تا $1413^\circ C$ می‌باشد یعنی حدود $612^\circ C$ که این مقدار نسبت به گسترهٔ دمایی مایع بودن مس، کمتر است.

(شیمی ۳- شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۱۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(حمید زبحی)*

بررسی موارد:

مورد اول: نادرست؛ در هر دو مولکول کربونیل سولفید و متان، اتم مرکزی کربن است؛ اما مولکول‌های کربونیل سولفید، به دلیل متفاوت بودن اتم‌های متصل به اتم مرکزی و توزیع غیریکنواخت الکترون‌ها در اطراف اتم مرکزی قطبی است.

مورد دوم: نادرست؛ مولکول‌های دواتمی جورهسته مانند H_2 ناقطبی هستند اما مولکول‌های دواتمی ناجور هسته مانند HF قطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.

مورد سوم: درست؛ هر چه نقطهٔ جوش یک ماده بیشتر باشد، هنگام سرد کردن در دماهای بالاتر (آسان‌تر) به مایع تبدیل می‌شود.

مورد چهارم: نادرست؛ با این‌که هر دو مولکول آمونیاک و کلروفرم قطبی‌اند اما بار جزئی اتم مرکزی در کلروفرم برخلاف آمونیاک، جزئی مثبت است.

(شیمی ۳- شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷)

۱۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

آنتالپی فروپاشی شبکهٔ LiF از NaCl بزرگ‌تر است $(a > b)$ چرا که شعاع یون‌های Li^+ و F^- از شعاع یون‌های Na^+ و Cl^- کوچک‌تر است و با توجه به یکسان بودن مقدار بارهای مثبت و منفی یون‌ها، چگالی بار در Li^+ و F^- بزرگ‌تر بوده و آنتالپی فروپاشی شبکه در ترکیب یونی حاصل از آن‌ها بیشتر است. با توجه به بیشتر بودن شعاع یون Br^- در مقایسه با Cl^- و کمتر بودن چگالی بار آن، آنتالپی فروپاشی شبکه NaCl از NaBr بیشتر خواهد بود $(b > c)$.

(شیمی ۳- شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۳)

۱۳۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیرمحمد کنگرانی)*

عبارت داده شده نادرست است. زیرا پس از اکسیژن، سیلیسیم فراوان‌ترین عنصر شناخته شده در پوستهٔ جامد زمین است.

بررسی موارد:

مورد اول: درست؛ C و Si با تشکیل پیوند کووالانسی به آرایش هشت‌تایی می‌رسند.

مورد دوم: نادرست؛ سیلیس جامد کووالانسی است و نمی‌توان برای آن از اصطلاح نیروی بین مولکولی استفاده کرد.

مورد سوم: نادرست؛ C و Si هر دو در گروه ۱۴ هستند که تاکنون یون تک اتمی پایدار از آن‌ها شناخته نشده است.

مورد چهارم: نادرست؛ آنتالپی پیوند $Si-Si$ از آنتالپی پیوندهای $C-C$ و $Si-O$ کمتر است.

(شیمی ۳- شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۱۳۵- **گزینهٔ «۱»** *(هادی مهدی‌زاده)*

فقط عبارت سوم نادرست است.

بررسی عبارت سوم: گرافن یک گونهٔ شیمیایی دو بعدی است و رسانای جریان برق می‌باشد.

(شیمی ۳- شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۲ و ۷۳)

۱۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی موارد:

آ) درست

ب) نادرست؛ بین مولکول‌های آب در یخ پیوند هیدروژنی وجود دارد. مولکول‌های H_2O در ساختار یخ در یک آرایش منظم و سه بعدی با تشکیل حلقه‌های شش‌گوشه، شبکه‌ای همانند کندوی زنبورعسل با استحکام ویژه پدید می‌اورند.

پ) درست

ت) نادرست؛ برای ۵ ماده صادق است. شامل HCl، C_6H_6، I_2، N_2 و SO_2).

ث) درست؛ برای نمونه آنتالپی تبخیر و نقطهٔ جوش یک ترکیب مولکولی به حالت مایع به نیروهای بین مولکولی آن وابسته است.

(شیمی ۳- شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۱۳۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

عبارت‌های اول و سوم نادرست هستند.

در ساختار سیلیس هر اتم Si به چهار اتم O متصل است (و هر اتم O به دو اتم Si وصل شده است.)

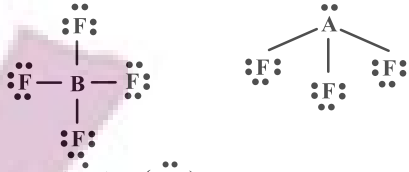
در بلور گرافیت اتم‌های کربن به صورت شش‌ضلعی منتظم قرار گرفته‌اند و هر اتم کربن در هر لایه از آن به سه اتم کربن دیگر اتصال دارد.

(شیمی ۳- شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۱۳۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

عبارت‌های (ب) و (ت) درست هستند.

با توجه به تعداد کل جفت الکترون‌های ناپیوندی دو ترکیب AF_3 و BF_4 و همچنین هر اتم F که دارای ۳ جفت الکترون ناپیوندی می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت ساختار لوویس AF_3 و BF_4 به صورت زیر است.



با توجه به ساختارهای الکترون نقطه‌ای: $(\cdot\ddot{A}\cdot)$ و $(\cdot\ddot{B}\cdot)$ A عنصر نیتروژن و B عنصر کربن می‌باشد (با توجه به روی سؤال که گفته شده عدد اتمی عناصر کمتر از ۱۰ است.)

بررسی عبارت‌ها:

الف) با توجه به ساختار لوویس AF_3 و BF_4 می‌توان گفت AF_3 مولکول قطبی و BF_4 مولکول ناقطبی است.

ب) اتم B با گوگرد ترکیب BS_2 راتشکیل می‌دهد $(\ddot{S}=B=\ddot{S})$ که براساس ساختار لوویس آن تعداد الکترون‌های پیوندی آن (۸) دو برابر تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی (۴) آن است.

پ) مولکول BO_2 همان مولکول CO_2 $(\ddot{O}=C=\ddot{O})$ می‌باشد که ناقطبی است در حالی که مولکول SCO $(\ddot{S}=C=\ddot{O})$ قطبی است.

ت) عنصر A در گروه ۱۵ (دارای ۵ الکترون ظرفیت) و عنصر B در گروه ۱۴، ۴ الکترون ظرفیت دارد.

(شیمی ۳- شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۱۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

در ۱۰۰ گرم از این خاک رس ۱۵ گرم آب و ۴۰ گرم سیلیس وجود داشته که با تبخیر x گرم آب، درصد جرمی SiO_2 به ۴۴ می‌رسد:

$$۴۴=\frac{۴۰}{۱۰۰-x}\times ۱۰۰ \Rightarrow x \simeq ۹$$

$$H_2O \text{ درصد جرمی} = \frac{۱۵-۹}{۱۰۰-۹}\times ۱۰۰ \simeq ۶/۶٪$$

$$H_2O \text{ تغییر درصد جرمی} = ۱۵-۶/۶ = ۸/۴$$

ترکیب یونی Fe_2O_3 علت سرخ‌فام بودن خاک رس می‌باشد.

$$\frac{\text{تعداد آنیون}}{\text{تعداد کاتیون}} = \frac{\text{عدد کوئوردیناسیون کاتیون}}{\text{عدد کوئوردیناسیون آنیون}} = \frac{۳}{۲}$$

(شیمی ۳- شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحهٔ ۶۷)

۱۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

$$KBr(s)+۶۹۰kJ \rightarrow K^+(g)+Br^-(g)$$

$$Q_1 = ?\,kJ = ۳۵/۷\,g\,KBr \times \frac{۱mol\,KBr}{۱۱۹g\,KBr}\times\frac{۶۹۰kJ}{۱mol\,KBr}$$

$$Q_1 = ۲۰۷kJ$$

$$\underset{?\,g}{NaCl(s)}+۷۹۰kJ \rightarrow Na^+(g)+Cl^-(g)\ ؟$$

$$Q_2 = Q_1$$

$$?\,gNaCl = ۲۰۷kJ \times \frac{۱mol\,NaCl}{۷۹۰kJ}\times\frac{۵۸/۵}{۱mol\,NaCl}$$

$$?\,g\,NaCl = ۱۵/۳۲g$$

(شیمی ۳- شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

شیمی ۳- پیشروی سریع

۱۴۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

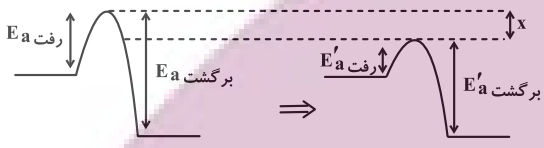
واکنش موازنه شده:

$$۲AD_4 + ۳M_2 \rightarrow ۴D_2M + ۲AM$$

واکنش‌دهنده $۱۰۲/۴g$: گرمای تولیدی $?\,kJ$

$$\times\frac{|\Delta H|}{\text{واکنش‌دهنده } ۱۲۸g}\times\frac{۷۵}{۱۰۰} = ۹۰kJ$$

$$\Rightarrow |\Delta H| = ۱۵۰kJ \xrightarrow{\text{چون واکنش گرماده است.}} \Delta H = -۱۵۰kJ$$

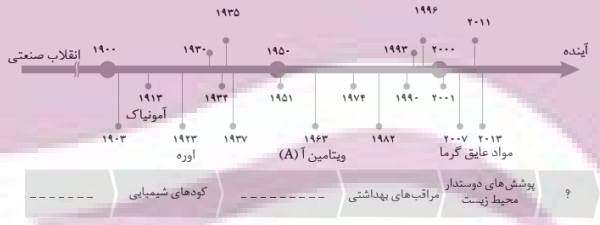


	قبل از کاتالیزگر	بعد از کاتالیزگر
قبل از کاتالیزگر	$E_{a\,\text{رفت}} - E_{a\,\text{برگشت}} = -۱۵۰kJ$ $E_{a\,\text{رفت}} + E_{a\,\text{برگشت}} = ۳۵۰kJ$	$E_{a\,\text{رفت}} = ۱۰۰kJ$ $E_{a\,\text{برگشت}} = ۲۵۰kJ$
بعد از کاتالیزگر	$E'_{a\,\text{رفت}} - E'_{a\,\text{برگشت}} = -۱۵۰kJ$ $E'_{a\,\text{رفت}} + E'_{a\,\text{برگشت}} = ۲۷۰kJ$	$E'_{a\,\text{رفت}} = ۶۰kJ$ $E'_{a\,\text{برگشت}} = ۲۱۰kJ$

$$E_a \text{ برگشت تغییر درصد} = \frac{|۲۱۰-۲۵۰|}{۲۵۰}\times ۱۰۰ = ٪۱۶ \text{ کاهش}$$

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

۱۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(حمید زیبی)*



(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

۱۴۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمحمد کنگرانی)*

بررسی موارد:

مورد اول: نادرست

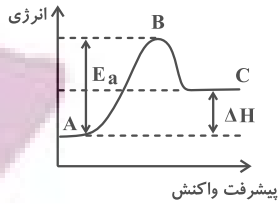
$$C_8H_{12} + ۱۱O_2 \rightarrow ۸CO_2 + ۶H_2O$$

$$?\,L\,O_2 = ۰/۵mol\ C_8H_{12}\times\frac{۱۱mol\,O_2}{۱mol\,C_8H_{12}}\times\frac{۲۲/۴L\,O_2}{۱mol\,O_2}$$

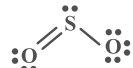
$$= ۱۲۳/۲L\,O_2$$

مورد دوم: درست؛ گازهای O_2 و H_2 در دمای اتاق بدون حضور کاتالیزگر واکنش نمی‌دهند اما در حضور توری پلاتینی به عنوان کاتالیزگر، این گازها به صورت انفجاری واکنش می‌دهند.

مورد سوم: درست؛ طبق نمودار سطح انرژی B به C نزدیک‌تر است.



مورد چهارم: درست؛ SO_2 گازی است که از خودروها خارج می‌شود و هر مولکول آن ۳ پیوند اشتراکی (۶ الکترون پیوندی) دارد.



(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

۱۴۴- **گزینهٔ «۳»** (هادی مهدی‌زاده)

موارد (ب) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی موارد نادرست:

ب) کاتالیزگرها تأثیری بر آنتالپی واکنش‌های شیمیایی ندارند.

ت) واکنش گاز هیدروژن با گاز اکسیژن در حضور توری پلاتینی سریع‌تر است.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۳ تا ۹۹)

۱۴۵- **گزینهٔ «۱»** (پیمان خواجوی‌مهر)

غلظت اوزون در ساعت ۱۰ صبح $0/12ppm$ است. پس داریم:

$$0/12=\frac{x}{10\times10^6 g}\times10^6 \Rightarrow x=1/2g\ O_3$$

$$1/2g\ O_3\times\frac{1mol\ O_3}{48g\ O_3}\times\frac{20L\ O_3}{1mol\ O_3}=0/5L\ O_3$$

حال می‌توان جرم پتاسیم نیترات مصرفی را محاسبه کرد.

$$0/5L\ O_2\times\frac{1mol\ O_2}{20L\ O_2}\times\frac{2mol\ KNO_3}{1mol\ O_2}\times\frac{101g\ KNO_3}{1mol\ KNO_3}$$

$$=5/05g\ KNO_3$$

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحهٔ ۹۴)

۱۴۶- **گزینهٔ «۳»** (میلاد شیخ‌الاسلامی‌فیاوی)

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ مواد علاوه بر طیف مرئی با سایر امواج الکترومغناطیسی مانند فروسرخ، فرابنفش و ... هم برهمکنش دارند.

۲) نادرست؛ با توجه به نمودار صفحهٔ ۹۴ شیمی ۳، حتی در ساعات شب هم مقداری گاز اوزون در هوا وجود دارد.

۳) درست؛ برای مثال گاز NO یک اسید نافلزی غیراسیدی است و به دلیل انحلال مولکولی، هنگام انحلال در آب یون هیدرونیوم تولید نمی‌کند.

۴) نادرست؛ در برخی ساعات مانند ۹ تا ۱۰ صبح، میزان NO هواکره کاهش اما همزمان با آن NO_2 افزایش می‌یابد.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

۱۴۷- **گزینهٔ «۳»** (روزبه رضوانی)

بررسی گزینه‌ها:

۱) نمودار مربوط به واکنش گرماگیر است و علامت آنتالپی آن مخالف آنتالپی واکنش گرمادهٔ اکسایش گلوکز است.

۲) این واکنش گرماگیر بوده و مطابق با نمودار سؤال است.

۴) کاتالیزگر بر تغییرات آنتالپی واکنش بی‌تأثیر است.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۰)

۱۴۸- **گزینهٔ «۳»** (هادی مهدی‌زاده)

هرگاه یک نمونه ماده در برابر پرتوهای الکترومغناطیس قرار گیرد، گسترهٔ معینی از آن را جذب و باقی را بازتاب یا عبور می‌دهد.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۳ تا ۹۶)

۱۴۹- **گزینهٔ «۳»** (محمد عظیمیان‌زواره)

بررسی موارد:

آ) نادرست؛ این سه واکنش گرماده می‌باشند. در هر سه واکنش عنصر آزاد تولید یا مصرف شده است که نشان‌دهندهٔ تغییر عدد اکسایش می‌باشد. بنابراین هر سه واکنش از نوع اکسایش- کاهش می‌باشد.

$$2CO(g)+O_2(g)\rightarrow 2CO_2(g)$$

$$C_xH_y+(x+\frac{y}{4})O_2\rightarrow xCO_2+\frac{y}{2}H_2O$$

$$2NO(g)\rightarrow N_2(g)+O_2(g)$$

ب) نادرست؛ با افزایش دما انرژی فعال‌سازی بهتر تأمین شده و سرعت واکنش افزایش می‌یابد. افزایش دما انرژی فعال‌سازی را تغییر نمی‌دهد.

پ) درست

ت) نادرست؛ زیرا در واکنش مربوط به حذف آلاینده‌های NO و NO_2 آمونیاک مصرف می‌شود. کاتالیزگر باید در پایان واکنش دست‌نخورده باقی بماند.

$$NO(g)+NO_2(g)+2NH_3(g)\rightarrow 2N_2(g)+3H_2O(g)$$

ث) درست، با افزایش سطح تماس کارایی مبدل‌ها افزایش می‌یابد.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

۱۵۰- **گزینهٔ «۴»** (امیر حاتمیان)

$$\underset{\downarrow}{NO_2}+\underset{\downarrow}{NO}+\underset{\downarrow}{2NH_3}\rightarrow 2N_2+3H_2O$$

$$\begin{matrix}x+2(-2)=0\\x=4\end{matrix}\quad\begin{matrix}x+(-2)=0\\x=2\end{matrix}\quad\begin{matrix}x+3(1)=0\\x=-3\end{matrix}$$

از معادلهٔ موازنه شده واکنش داریم:

$$?\ mol\ NO=3g\times\frac{1mol\ NO}{30g\ NO}=0/1mol\ NO$$: در هر کیلومتر

$$?\ mol\ NO_2=4/6g\ NO_2\times\frac{1mol\ NO_2}{46g\ NO_2}$$: در هر کیلومتر

$$=0/1mol\ NO_2$$

پس در هر کیلومتر با توجه به این‌که ضریب NH_3، دوهست داریم:

$$2\times0/1mol\ NH_3$$: در هر کیلومتر

در مخزن آمونیاک داریم:

$$?\ mol\ NH_3=34000g\ NH_3\times\frac{1mol\ NH_3}{17g\ NH_3}$$

$$=2\times10^3\ mol\ NH_3$$

$$?km=2\times10^3\ mol\ NH_3\times\frac{1km}{0/2mol\ NH_3}=10^4\ km$$

مجموع عددهای اکسایش نیتروژن در گونه‌های واکنش‌دهنده:

$$4+2+(-3)=3$$

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحهٔ ۱۰۱)

شیمی ۲

۱۵۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمد کلکرانی)*

بررسی موارد:

الف) درست؛ ظرفیت گرمایی یک ماده به مقدار و دمای آن بستگی دارد که در این عبارت مقدار به علت تفاوت زیاد تعیین‌کننده است.

ب) نادرست؛ ظرفیت گرمایی یک ماده به مقدار آن بستگی دارد و چون مقدار روغن زیتون و آب را نداریم نمی‌توانیم تعیین کنیم کدام ظرفیت گرمایی بیشتری دارد.

پ) درست

ت) نادرست؛ فلزی که در کلاه فضانوردان استفاده می‌شود $\leftarrow Au$ (طلا)

هفتمین عنصر دستهٔ $p \leftarrow Al$ (آلومینیم)

مقایسهٔ ظرفیت گرمایی ویژه: $Al > Au$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۱۵۲- **گزینهٔ «۱»** *(امین خوشنویسان)*

فقط عبارت «ت» نادرست است.

تعداد کربن‌ها (n) برابر ۱۰ عدد است. برای محاسبهٔ تعداد هیدروژن‌ها، تعداد پیوندهای دوگانه و حلقه را با هم جمع کرده و در عدد ۲ ضرب کرده و از رابطهٔ $2n+2$ کم می‌کنیم.

$$H : (2n+2)-[(4+1)\times 2] \xrightarrow{n=10} H = 12$$

پس فرمول ترکیب داده شده $C_{10}H_{12}O$ می‌باشد و فرمول مولکولی ۲-هپتانون $C_7H_{14}O$ است مجموع شمار اتم‌ها در این دو مولکول به ترتیب ۲۳ و ۲۲ می‌باشد.

$$\text{مجموع شمار جفت پیوندی} = \frac{10(4)+(12\times 1)+(1\times 2)}{2} = 27$$

نکته: برای محاسبهٔ پیوند اشتراکی از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی} = \frac{(4\times C)+(H)+(2\times O)}{2}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۱۵۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

ابتدا واکنش سوختن متان، اتان و بوتان را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$

$$C_2H_6 + \frac{7}{2}O_2 \rightarrow 2CO_2 + 3H_2O$$

$$C_4H_{10} + \frac{13}{2}O_2 \rightarrow 4CO_2 + 5H_2O$$

می‌دانیم در آلکان‌های متوالی در شرایط یکسان با افزایش هر اتم کربن، ΔH سوختن مولی آن‌ها به مقدار ثابتی افزایش می‌یابد. در نتیجه اگر تفاوتی آنتالپی سوختن متان و اتان برابر با $a\,kJ$ باشد تفاوت آنتالپی سوختن اتان و بوتان برابر با $2a\,kJ$ خواهد بود. می‌دانیم که در صورت مصرف ۱ مول از هر کدام از گازهای متان و اتان، در مجموع ۵/۵ مول O_2 به مصرف می‌رسد.

O_2 مولکول $9/9\times10^{23}$: تفاوت گرمای تولیدی $?\,kJ$

$$\times\frac{1\,mol\,O_2}{6\times10^{23}\,\text{مولکول}\,O_2}\times\frac{a\,kJ\ \text{تفاوت آنتالپی سوختن}}{5/5\,mol\,O_2} = 204\,kJ$$

$$\Rightarrow a = 680\,kJ \Rightarrow \text{تفاوت آنتالپی سوختن متان و اتان} = 680\,kJ$$

در نتیجه تفاوت آنتالپی سوختن بوتان و اتان برابر با

$2\times680\,kJ = 1360\,kJ$ خواهد بود. می‌دانیم در اثر مصرف ۱ مول از هر کدام از گازهای اتان و بوتان، تفاوت مول آب تولیدی برابر با ۲ مول خواهد بود.

$8/1\,g\ H_2O$: تفاوت گرمای تولیدی $?\,kJ$

$$\times\frac{1\,mol\,H_2O}{18\,g\,H_2O}\times\frac{1360\,kJ\ \text{تفاوت آنتالپی سوختن}}{2\,mol\,H_2O} = 306\,kJ$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

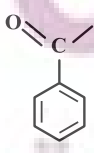
۱۵۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیرمحمد کلکرانی)*

بررسی موارد:

مورد اول: درست؛ در این ساختار ۸ اکسیژن وجود دارد. پس:

۲ الکترون = هر جفت ناپیوندی $\rightarrow$ ۲ جفت ناپیوندی $\rightarrow$ هر اکسیژن

مورد دوم: نادرست؛ در این ساختار ۶ پیوند دوگانهٔ $C=C$ و ۳ پیوند دوگانهٔ $C=O$ وجود دارد. در ساختار بنزآلدهید ۴ پیوند دوگانه وجود دارد:



: بنزآلدهید

مورد سوم: نادرست؛ در این ساختار گروه اتری وجود ندارد.

مورد چهارم: درست؛ در این ساختار ۱۶ هیدروژن و ۸ گروه $C-H$ وجود دارد.

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۱۵۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی موارد:

آ) درست

ب) درست

پ) نادرست؛ علامت مثبت و منفی نشان‌دهندهٔ گرماگیر و گرماده بودن آن فرایند است.

ت) درست؛ زیرا واکنش فتوسنتز برخلاف اکسایش گلوکز، یک واکنش گرماگیر است و در فرایندهای گرماگیر سطح انرژی فراورده‌ها از سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها بالاتر است.

ث) درست

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۶۳ و ۶۴)

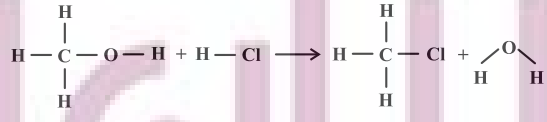
۱۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(پیمان خوابوی‌مهر)*

تنها مقایسهٔ (آ) صحیح است.

- آنتالپی پیوند $H-F$ از آنتالپی پیوند $O=O$ بزرگ‌تر است.
- آنتالپی پیوند $N\equiv N$ از آنتالپی پیوند $C\equiv C$ بیشتر است.
- آنتالپی پیوند $H-H$ از آنتالپی پیوند $N-H$ بیشتر است.

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۱۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(روزبه رضوانی)*



$$\Delta H=[3(C-H)+(C-O)+(O-H)]+(H-Cl)$$
$$-[3(C-H)+(C-Cl)+2(O-H)]$$
$$\Delta H=(C-Cl)=+385\ kJ.mol^{-1}$$

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۱۵۸- **گزینهٔ «۲»** *(پارسا عیوض‌پور)*

$$2\times(PCl_3(l)+\frac{1}{2}O_2(g)\rightarrow POCl_3(l))$$
$$2\times(\frac{1}{4}P_4(s)+\frac{3}{2}Cl_2(g)\rightarrow PCl_5(l))$$
$$-2\times(SOCl_2(l)+H_2O(l)\rightarrow SO_2(g)+2HCl(g))$$
$$-1\times(4HCl(g)+O_2(g)\rightarrow 2Cl_2(g)+2H_2O(l))$$

$$\frac{1}{2}P_4(s)+2SO_2(g)+5Cl_2(g)\rightarrow 2SOCl_2(l)+2POCl_3(l)$$
$$\Rightarrow \Delta H=2\times(-325/4kJ)+2\times(-306kJ)$$
$$-2\times(10/43kJ)-(-202/6kJ)$$
$$\simeq -1081kJ$$

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)

۱۵۹- **گزینهٔ «۳»** *(پارسا عیوض‌پور)*

جنس و جرم ظرف اولیهٔ مایعات مهم نیست. از آنجایی که تبادل گرما میان مایعات و ظرف آلومینیمی ۲۵۰ گرمی صورت می‌گیرد، پس داریم:

$$100\times4/18(x-20)+100\times1/97(x-40)$$
$$+100\times3/1\times(x-60)+250\times0/9(x-10)=0$$
$$\Rightarrow 4/18(x-20)+1/97(x-40)+3/1(x-60)$$
$$+2/5\times0/9(x-10)=0\Rightarrow x\simeq 32/25$$

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۱۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(پارسا عیوض‌پور)*

$$A\ \text{مادهٔ}: C_8H_{12}\Rightarrow \text{جرم مولی}=8\times12+12\times1=108g.mol^{-1}$$

تغییرات آنتالپی در هر مول از واکنش

$$=(\Delta H_{C=C}+\Delta H_{O-O})-(2\times\Delta H_{C-O}+\Delta H_{C-C})$$
$$=(614+146)-(2\times358+348)=-304kJ.mol^{-1}$$
$$\Rightarrow 100g\ A\times\frac{1mol\ A}{108g\ A}\times\frac{\text{گرما}\ 304kJ}{1mol\ A}\simeq 281/5kJ$$

(شیمی ۲- در پی غزای سالم؛ صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

ایران آزمون — توشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۱

۱۶۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) برای این منظور از نیتروژن استفاده می‌شود. نیتروژن گاز نجیب محسوب نمی‌شود.

۲) حدود ۷۵ درصد جرم هواکره در این لایه قرار دارد.

۴) نخستین ماده‌ای که به صورت جامد از آن جدا می‌شود بخارآب است که در دمای $0^\circ C$ به صورت یخ از آن جدا می‌شود.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۰)

۱۶۲- **گزینهٔ «۲»** *(پیمان خوابوی‌مهر)*

موارد (ت) و (ث) صحیح هستند.

بررسی سایر موارد:

آ) در هواکره اکسیژن اغلب به صورت مولکول‌های دواتمی وجود دارد.

ب) اکسیژن در ساختار همهٔ مولکول‌های زیستی وجود دارد.

پ) نمودار تغییرات فشار گاز اکسیژن برحسب ارتفاع به صورت نزولی و نمودار تغییرات دما در استراتوسفر به صورت صعودی است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۱۶۳- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد شیخ‌الاسلامی‌خیاوی)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ فراوردهٔ سوختن ناقص سوخت‌های فسیلی فقط کربن مونوکسید و بخارآب نیست و طبق متن کتاب درسی فراورده‌های دیگر نیز تولید می‌شوند.

ب) نادرست؛ در اثر سوختن گوگرد گاز SO_2 تولید می‌شود که قطبی است.

پ) درست؛ نور حاصل از سوختن گوگرد آبی و نور حاصل از سوختن سدیم زرد است. طول موج نور آبی کوتاه‌تر از زرد است.

ت) درست؛ میل ترکیبی کربن مونوکسید با هموگلوبین خون بیش از ۲۰۰ برابر اکسیژن است در نتیجه میل ترکیبی اکسیژن با هموگلوبین خون کمتر از پنج هزارم برابر $(\frac{1}{200})$ است.

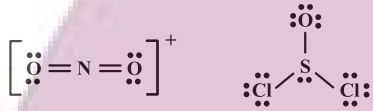
ث) درست؛ فراورده‌های حاصل از سوختن زغال سنگ، بخارآب، کربن دی‌اکسید و گوگرد دی‌اکسید هستند. گوگرد دی‌اکسید در شرایط مناسب می‌تواند ابتدا به گوگرد تری‌اکسید تبدیل و سپس به سولفوریک اسید تبدیل شود. توجه کنید در صورت سؤال از لفظ می‌تواند استفاده شده و این عبارت بدین معنی است که منظور طراح این نیست که فراوردهٔ حاصل باید بدون هرگونه تغییری سولفوریک اسید تولید کند، بلکه منظور این است که فراورده یا فراورده‌های این واکنش می‌توانند خود تبدیل به مواد دیگری شده و سپس سولفوریک اسید را پدید بیاورند.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۱۶۴- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد شیخ‌السلامی‌خیاوی)*

بررسی موارد:

الف) ساختار لوویس گونه‌های داده شده به صورت زیر است. در $SOCl_2$ ۳ جفت الکترون پیوندی و در NO_2^+ هشت الکترون ناپیوندی وجود دارد.



ب) $SiCl_4$ از ترکیبات مولکولی است پس در نام‌گذاری آن از پیشوندهای یونانی استفاده می‌شود. نام این ترکیب سیلیسیم تتراکلرید است که پیشوند تترا نشان‌دهندهٔ تعداد اتم کلر است.

پ) کاتیونی از مس که ۳ لایهٔ پر دارد به صورت $[Ar]\,3d^{10}$ است. در نتیجه کاتیون مدنظر Cu^+ است در نتیجه فرمول اکسید حاصل Cu_2O بوده و نسبت کاتیون به آنیون ۲ است.

ت) از آنجایی که می‌دانیم کربن یون تک‌اتمی تشکیل نمی‌دهد پس زیروند ۲ موجود در کربن، مربوط به بار کلسیم نیست بلکه زیروند خود یون دواتمی ۲ C_2^{2-} و فرمول یون دو اتمی است در نتیجه فرمول سدیم کربید Na_2C_2 است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۱۶۵- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

نقطهٔ چگالش CO_2 دمای $-78^\circ C$ است. اگر دمای هوا ۱۵۰ کلوین (که معادل با $150^\circ C$ است) پایین بیاید، به $-228^\circ C$ می‌رسد که در این دما به غیر از هلیم (با نقطهٔ جوش $-268^\circ C$) بقیهٔ اجزای هواکره به مایع تبدیل شده‌اند. در صورتی که دمای هوا به $192\,K$ ($-192^\circ C$) پایین‌تر از $-78^\circ C$ برسد، معادل با $-270^\circ C$ خواهد بود که در آن تمام گازهای هواکره مایع خواهند شد.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱۶۶- **گزینهٔ «۳»** (حمید زبحی)

بررسی موارد:

مورد اول: نادرست؛ با توجه به شکل کتاب درسی، بخش قابل توجهی از نور خورشید به سطح زمین می‌رسد.

مورد دوم: درست؛ طول موج‌های پرتوهای بازتابیده شده از زمین بزرگ‌تر از طول موج پرتوهای جذب شده توسط زمین است.

مورد سوم: نادرست؛ هواکره برای زمین همانند لایهٔ پلاستیکی برای گلخانه است و سبب گرم شدن کرهٔ زمین می‌شود.

مورد چهارم: درست؛ از هر ۵ پرتویی که از سطح زمین بازتابیده می‌شود، ۲ پرتو، توسط مولکول‌های CO_2 به دام می‌افتد. $\frac{2}{5}\times 100 = \%40$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

۱۶۷- **گزینهٔ «۳»** (سید مهدی غفوری)

آ، ب و ث درست است.

SO_2 : ۶جفت ناپیوندی / ۳جفت پیوندی $\Rightarrow \frac{6}{3}=2$

SiF_4 : ۱۲جفت ناپیوندی / ۴جفت پیوندی $\Rightarrow \frac{12}{4}=3$

CO_3^{2-} : ۸جفت ناپیوندی / ۴جفت پیوندی $\Rightarrow \frac{8}{4}=2$

CS_2 : ۴جفت ناپیوندی / ۴جفت پیوندی $\Rightarrow \frac{4}{4}=1$

N_2O : ۴جفت ناپیوندی / ۴ جفت پیوندی $\Rightarrow \frac{4}{4}=1$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحهٔ ۵۴)

۱۶۸- **گزینهٔ «۲»** (محمد عظیمیان‌زواره)

ردپای کربن دی‌اکسید تولید شده در تولید برق از منبع:

باد < گرمای زمین < انرژی خورشید < گاز طبیعی < نفت خام < زغال سنگ

(b) (c) (a) (e) (d) (f)

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحهٔ ۶۶)

۱۶۹- **گزینهٔ «۴»** (امیر حاتمیان)

بررسی گزینه‌ها:

(۱)

$$K_2Cr_2O_7 + 14HCl \rightarrow 2KCl + 2CrCl_3 + 3Cl_2 + 7H_2O$$

اختلاف مجموع واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها:

$$|(7+3+2+2)-(14+1)| = 1$$

(۲)

$$6I_2O_5 + 20BrF_3 \rightarrow 12IF_5 + 15O_2 + 10Br_2$$

اختلاف مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها:

$$|(12+15+10)-(20+6)| = 11$$

(۳)

$$4C_5H_{11}NH_2 + 37O_2 \rightarrow 20CO_2 + 26H_2O + 4NO_2$$

اختلاف مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها:

$$|(20+26+4)-(37+4)| = 9$$

(۴)

$$6S_2Cl_2 + 4NH_4Cl \rightarrow S_4N_4 + 8S + 16HCl$$

اختلاف مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها:

$$|(1+8+16)-(6+4)| = 15$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱۷۰- **گزینهٔ «۲»** (امیر حاتمیان)

ابتدا مقدار گاز کربن دی‌اکسید برحسب لیتر که در شرایط استاندارد در هر سال وارد هواکره می‌شود را حساب می‌کنیم:

$$?L\ CO_2 = 22000km \times \frac{250g\ CO_2}{1km} \times \frac{1mol\ CO_2}{44g\ CO_2}$$

$$\times \frac{22/4L\ CO_2}{1mol\ CO_2} = 28\times10^5 L\ CO_2 = 2/8\times10^6 L\ CO_2$$

حال برای به دست آوردن تعداد درخت‌هایی با قطر $7cm$ که از ورود CO_2 به هواکره جلوگیری می‌کنند، داریم:

$$\text{حداقل تعداد درخت با قطر } 7cm = \frac{\text{مقدار کل } CO_2 \text{ تولیدی توسط هر خودرو}}{\text{مقدار } CO_2 \text{ جذب‌شده توسط هر درخت با قطر } 7cm}$$

$$= \frac{22000km \times \frac{250g\ CO_2}{1km}}{4/4\times10^3 g\ CO_2} = 1250 \text{ درخت}$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحهٔ ۶۶)