ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود گام به گام
- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش
- دانلود فیلم و مقاله آنلیزشی
- کنکور و مشاوره

IranTooshe.Ir

@irantooshe

IranTooshe

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

ضابطه تابع $y = xf(x)$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$xf(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & ; \ x \geq 0 \\ -3x & ; \ x < 0 \end{cases}$$

دقت کنید که دو قطعه نمودار بر هم عمودند، پس شیب‌ها باید قرینه و معکوس همدیگر باشند، به همین خاطر ضابطه تابع برای $x < 0$ ، $y = -3x$ است.

حال با تقسیم هر ضابطه بر x ، ضابطه‌های تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & ; \ x < 0 \\ f(0) & ; \ x = 0 \\ \frac{1}{3} & ; \ x > 0 \end{cases}$$

شیب خطوط مماس بر نمودار این تابع در $\mathbb{R} - \{0\}$ همواره برابر صفر است، پس داریم: $f'(2) = f'(-1) = 0$. در نتیجه $f'(2) + f'(-1) = 0$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۲- **گزینهٔ «۴»** (عادل حسینی)

نیمساز ربع اول و سوم همان خط $y = x$ است. پس اگر این خط بر نمودار تابع f مماس باشد، معادلهٔ $f(x) = x$ باید جواب مضاعف داشته باشد:

$$f(x) = kx^2 + (k+2)x + 1 = x$$

$$\Rightarrow kx^2 + (k+1)x + 1 = 0 \quad (*)$$

برای اینکه معادله بالا جواب مضاعف داشته باشد، Δ ی آن باید برابر صفر شود:

$$\Delta = (k+1)^2 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow k = 1$$

با جای‌گذاری $k = 1$ ، معادلهٔ $(*)$ به صورت زیر خواهد شد:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

که جواب مضاعف این معادله (همان طول نقطه تماس) برابر -1 و در نتیجه عرض نقطه تماس هم -1 است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۴ تا ۷۶)

۳- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

شیب خط d برابر است با:

$$m_d = \frac{6-9}{1-0} = -3$$

این یعنی $f'(1) = -3$.

از طرفی انتقال‌های افقی و عمودی تأثیری روی شیب نمودار ندارند، بنابراین برای محاسبهٔ $g'(0)$، کافی است مشتق تابع $h(x) = 2f(x)$ را در $x = 1$ حساب کنیم:

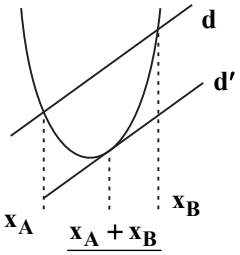
$$g'(0) = h'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{2f(x) - 2f(1)}{x-1} = 2\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$= 2f'(1) = -6$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۴- **گزینهٔ «۲»** (وحید امیرکیایی)

مطابق شکل زیر خط d سهمی را در نقاط $x = x_A$ و $x = x_B$ قطع کرده‌اند و خط d' که موازی با d است در $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ بر سهمی مماس است.



پس در این سؤال خط d' در نقطه $x = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$ بر سهمی مماس است. از طرفی دو خط موازی هستند و شیب‌های برابر دارند. خط d از نقاط $(-1, f(-1))$ و $(2, f(2))$ می‌گذرد. پس داریم:

$$m_{d'} = m_d = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{6-3}{3} = 1$$

پس شیب خط d' برابر ۱ است که در نقطهٔ $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ بر نمودار f مماس است. معادلهٔ این خط $y = x - \frac{1}{2}$ و عرض از مبدأ آن $-\frac{1}{2}$ است.

(حسابان ۲- مکمل کار در کلاس صفحهٔ ۸۰)

۵- **گزینهٔ «۲»** (مهری ملارمضانی)

از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{kx\left[\frac{x}{3}\right] + 1 - \left(4k\left[\frac{4}{3}\right] + 1\right)}{x-4}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{kx\left[\frac{x}{3}\right] - 4k}{x-4}$$

دقت کنید که $\left[\frac{4}{3}\right] = 1$. هم‌چنین در یک همسایگی $x = 4$ ، $\left[\frac{x}{3}\right] = 1$ است.

و حاصل حد بالا برابر است با:

$$\lim_{x \to 4} \frac{kx - 4k}{x-4} = k$$

که این مقدار باید برابر $\frac{k-1}{4}$ باشد.

$$\Rightarrow k = \frac{k-1}{4} \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۶- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم و ابتدا شیب خط مماس را که همان $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ است، حساب می‌کنیم.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}} - 0}{x - \frac{1}{2}}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

پس خط مماس با شیب $\frac{4}{3}$ از نقطه $\left(\frac{1}{2},0\right)$ می‌گذرد. معادله این خط $y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$ و عرض از مبدأ آن $-\frac{2}{3}$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

خط بر نمودار تابع f مماس است، پس در نقطه تماس، که نقطه مشترک خط و نمودار است، مشتق تابع با شیب خط برابر است:

$$y=2x-1 \Rightarrow f'(-1)=2, f(-1)=-3$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to-1}\frac{f^2(x)-9}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{f^2(x)-f^2(-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{(f(x)+f(-1))(f(x)-f(-1))}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to-1}(f(x)+f(-1)) \times \lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 2f(-1)\times f'(-1)$$

$$= 2(-3)\times(2) = -12$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(جوانبخش نیکنام)*

ابتدا از روی تساوی داده شده، مقدار $f'(2)$ را حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+2}{x^2-4}=\frac{1}{2}$$

حد مخرج صفر است و برای اینکه حاصل حد عدد حقیقی $\frac{1}{2}$ شود، حد صورت نیز باید صفر باشد و از آنجا که تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است، $f(2)=-2$ است.

$$\Rightarrow \lim_{x\to2}\frac{f(x)+2}{x^2-4} = \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4}\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \frac{1}{4}f'(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(2)=2$$

حال با توجه به رابطه زیر مطلوب مسئله را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{rh} = \frac{m-n}{r}f'(x_0)$$

پس داریم:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h} = \frac{3-(-1)}{2}f'(2) = 2f'(2) = 4$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۶ تا ۷۸)

۹- **گزینهٔ «۱»** *(مهری ملارمضانی)*

$f(1)=1$ است و حاصل را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x^2-1}\times\frac{\sqrt{f(x)}+1}{\sqrt{f(x)}+1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{\underbrace{(x+1)(\sqrt{f(x)}+1)}_{4}(x-1)} = \frac{1}{4}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{4}f'(1)$$

و از روی رابطه $f'(x)=\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2+1}$، مقدار $f'(1)$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(1)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{(1)^2+1}=\frac{1}{2}$$

پس حاصل حد برابر $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(مهری ملارمضانی)*

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2+2x-24}{f^2(x)-2x-1} = \lim_{x\to4}\frac{(x+6)(x-4)}{f^2(x)-(2x+1)}$$

$$= 10\lim_{x\to4}\frac{x-4}{f^2(x)-(2x+1)} = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to4}\frac{x-4}{f^2(x)-(2x+1)}=\frac{1}{2} \Rightarrow L=\lim_{x\to4}\frac{f^2(x)-(2x+1)}{x-4}=2$$

حد بالا را نیز به صورت مجموع دو حد می‌نویسیم:

$$L=\lim_{x\to4}\frac{f^2(x)-9-(2x+1-9)}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to4}\frac{f^2(x)-9}{x-4} - \lim_{x\to4}\frac{2x-8}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to4}\frac{(f(x)+3)(f(x)-3)}{x-4} - \lim_{x\to4}\frac{2(x-4)}{x-4} = 6f'(4)-2=2$$

$$\Rightarrow f'(4)=\frac{2}{3}$$

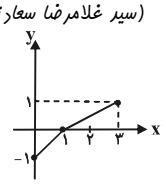
$f'(4)$ همان شیب خط مماس است که با توجه به نمودار، مقدار آن برابر $\frac{3-h}{4}$ است. پس داریم:

$$\frac{3-h}{4}=\frac{2}{3} \Rightarrow h=\frac{1}{3}$$

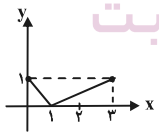
(حسابان ۲- صفحه‌های ۷۶ تا ۷۸)

حسابان ۲- موازی

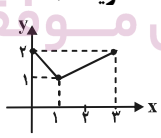
۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(سید غلامرضا سعادتجو)*



$y=f(x-1)$



$y=|f(x-1)|$



$y=|f(x-1)|+1$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمد اشتهاردی)*

گزینه‌های «۱» و «۲»: توابع داده‌شده نسبت به محور y ها متقارن است. پس اکیداً یکنوا نیستند.

گزینهٔ «۴»: اگر قسمتی از نمودار f زیر محور x ها باشد، توسط قدرمطلق به بالا قرینه می‌شود و بنابراین تابع فوق نمی‌تواند لزوماً اکیداً یکنوا باشد.

گزینهٔ «۳»: ترکیب دو تابع اکیداً یکنوا همواره اکیداً یکنوا است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۱۳- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

چون نمودار تابع $y = x + f(x)$ از نقاط $(1,0)$ و $(2,0)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{cases} y = x + f(x) \longrightarrow 1 + f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = -1 \\ y = x + f(x) \longrightarrow 2 + f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = -2 \end{cases} \quad (1)$$

فرض کنیم خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ به‌ترتیب $Q(x)$ و با توجه گزینه‌ها $R(x) = ax + b$ باشد. لذا می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{cases} f(1) = a + b = -1 \\ f(2) = 2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow R(x) = -x$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** (فریدون ساعتی)

فرض می‌کنیم $\frac{\pi x}{5} = t$، بنابراین $y = |\sin t|$ است، اگر نمودار این تابع را رسم کنیم، مشخص است که رفتار تابع $y = |\sin t|$ در فواصلی به طول π تکرار می‌شود. یعنی دورهٔ تناوب $y = |\sin t|$ برابر با π است. بنابراین: $\frac{\pi T}{5} = \pi$ یعنی $T = 5$، پس دورهٔ تناوب تابع برابر با 5 است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۵- **گزینهٔ «۲»** (محمدمصطفی ابراهیمی)

$$\sin 2x = 2\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}))^2 = (\sin x - \cos x)^2$$

$$= 1 - \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1 - \sin 2x \Rightarrow 2\sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** (سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۸)

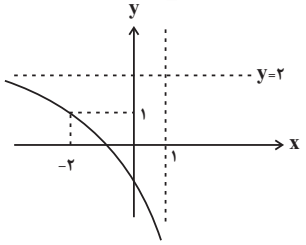
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{-1}{5}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحهٔ ۴۲)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

بخشی از نمودار تابع هموگرافیک $y = \frac{2x+1}{x-1}$ به صورت زیر است:



واضح است که تابع در $x = -2$ نزولی است، پس در $(-2)^-$، $\left[\frac{2x+1}{x-1}\right] = 1$

و در $(-2)^+$، $\left[\frac{2x+1}{x-1}\right] = 0$ است. پس داریم:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{1-1}{x+2} = 0 \\ L_2 &= \lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{0-1}{x+2} = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow L_2 - L_1 = -\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی — حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۱۸- **گزینهٔ «۴»** (قاسم کتابچی)

تابع در $x = 1$ تعریف نشده است. هم‌چنین تابع در نزدیکی این نقطه، مقداری محدود دارد. پس $x = 1$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است.

$$\begin{cases} 2x + a = 0 \xrightarrow{x=1} 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2 \\ x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -1 \end{cases}$$

چون $x = -2$ مجانب قائم است، پس ریشهٔ مخرج می‌باشد.

$$x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=-2} 4 - 2b + c = 0 \Rightarrow 2b - c = 4$$

$$\begin{cases} b + c = -1 \\ 2b - c = 4 \end{cases} \Rightarrow c = -2, b = 1$$

$$\Rightarrow a + c = -2 - 2 = -4$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی — حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۱۹- **گزینهٔ «۲»** (هادی پلاور)

اگر $n > 3$ باشد، الزاماً $m > 3$ و $m = n$ خواهد بود و داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{px^n} = 3 \xrightarrow{m=n} \frac{1}{p} = 3 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m + p - n = (m - n) + p = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

اگر $n = 3$ باشد، باید دو حالت $m = 3$ و $m < 3$ را بررسی کنیم:

$$n = 3, m = 3 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{(p+3)x^3} = 3 \Rightarrow \frac{2}{p+3} = 3$$

$$\Rightarrow p + 3 = \frac{2}{3} \Rightarrow p = -\frac{7}{3} \Rightarrow m + p - n = 3 - \frac{7}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$$

$$n = ۳, m < ۳ \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^۳}{(p+m)x^۳} = ۳ \Rightarrow \frac{۱}{p+m} = ۳$$

$$\Rightarrow p + m = \frac{1}{3} \Rightarrow m + p - n = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$$

توجه کنید که حالت $n = 3$ و $m > 3$ امکان‌پذیر نیست.

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی — حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to+\infty} x(x + a - \sqrt{x^2 + bx}) \times \frac{x + a + \sqrt{x^2 + bx}}{x + a + \sqrt{x^2 + bx}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2 + 2ax + a^2 - x^2 - bx)}{2x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{2a - b}{2}x + \frac{a^2}{2})$$

چون حاصل حد فوق برابر $\frac{1}{2}$ است، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{2a - b}{2} = 0 \\ \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = \pm 3$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی — حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ریاضی پایه

۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(سعید علم‌پور)*

صفرهای تابع را α و β در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\beta=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\alpha\beta=1$$

صفرهای تابع جواب‌های معادله $m^2x^2+3mx+2m+3=0$ هستند که در آن‌ها $\alpha\beta=\frac{2m+3}{m^2}$ است.

$$\Rightarrow m^2=2m+3\Rightarrow m^2-2m-3=(m-3)(m+1)=0$$
$$\Rightarrow m=3, m=-1$$

که به ازای $m=3$ معادله $f(x)=0$ جواب حقیقی ندارد، در نتیجه $m=-1$ قابل قبول است و به ازای آن ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=x^2-3x+1=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+1$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

کم‌ترین مقدار این تابع $-\frac{5}{4}$ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۲۲- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

کسر صورت معادله را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x^2-1)(x-2)$$
$$=(x-1)(x+1)(x-2)$$

پس معادله به صورت زیر خواهد داشت:

$$\frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x^2-ax+b}=0$$

جواب‌های این معادله از بین ریشه‌های صورت انتخاب می‌شود و اگر قرار باشد معادله فقط یک جواب داشته باشد، دو تا از ریشه‌های صورت باید ریشه‌های مخرج هم باشند، برای این کار سه حالت امکان‌پذیر است.

الف) ریشه‌های مخرج $x_1=2$ و $x_2=1$ باشند:

$$\left.\begin{matrix}x_1+x_2=3=a\\x_1x_2=2=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow ab=6$$

ب) ریشه‌های مخرج $x_1=2$ و $x_2=-1$ باشند:

$$\left.\begin{matrix}a=x_1+x_2=1\\b=x_1x_2=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow ab=-2$$

پ) ریشه‌های مخرج $x_1=1$ و $x_2=-1$ باشند:

$$\left.\begin{matrix}a=x_1+x_2=0\\b=x_1x_2=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow ab=0$$

پس بیشترین مقدار ab برابر ۶ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)

۲۳- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

جواب‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\alpha^2-\alpha-3=0\Rightarrow\alpha^2=\alpha+3$$
$$\Rightarrow\alpha^3=\alpha^2+3\alpha=(\alpha+3)+3\alpha=4\alpha+3$$

به طریق مشابه داریم:

$$\beta^2=\beta+3\Rightarrow4\beta^2-9=4(\beta+3)-9=4\beta+3$$

پس حاصل عبارت موردنظر را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$\alpha^3(4\beta^2-9)=(4\alpha+3)(4\beta+3)=16\alpha\beta+12(\alpha+\beta)+9$$

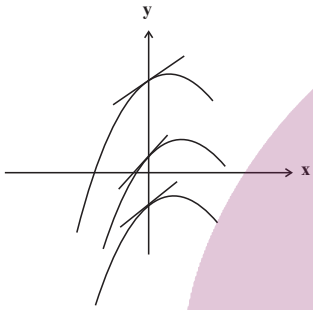
از طرفی می‌دانیم $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ به‌ترتیب مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^2-x-3=0$ و برابر ۱ و ۳- هستند. پس داریم:

$$16\alpha\beta+12(\alpha+\beta)+9=16(-3)+12(1)+9=-27$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)

۲۴- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ که ویژگی مورد نظر را داشته باشد، باید به صورت زیر باشد:



در تمام این سهمی‌ها $b\geq0, a<0$ است. پس در این سؤال داریم:

$$\left.\begin{matrix}2k-1<0\Rightarrow k<\frac{1}{2}\\k^2-1\geq0\Rightarrow k\leq-1\text{ یا }k\geq1\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}}k\leq-1$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(بهانبخش نیکنام)*

ابتدا t_B را می‌یابیم که برابر مدت زمانی است که B به تنهایی کار را تمام می‌کند. داریم:

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{t_A}+\frac{1}{t_B}=\underbrace{\frac{1}{\frac{4}{3}}}_{\substack{\text{مدت‌زمان}\\\text{کارهمزمان}}}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{t_B}=\frac{1}{4}\Rightarrow t_B=4\text{ ساعت}$$

پس B کار را به تنهایی در ۴ ساعت تمام می‌کند، این یعنی در هر ساعت $\frac{1}{4}$ کار و در هر ۱۰ دقیقه $\frac{1}{24}$ کار را انجام می‌دهد. A نیز در هر ساعت $\frac{1}{2}$ کار و در هر ۱۰ دقیقه $\frac{1}{12}$ کار را انجام می‌دهد.

حال اگر A و B، هم کار کنند، در هر ساعت $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ کار و در هر ۱۰ دقیقه $\frac{1}{8}$ کار را تمام می‌کنند، پس در ۵۰ دقیقه کار همزمان $\frac{5}{8}$ کار تمام

ایران‌توشه
توشه‌ای برای موفقیت

می‌شود، پس از خاموش شدن ماشین A، $\frac{3}{8}$ باقی‌ماندهٔ کار را ماشین B باید تمام کند که این زمان باقی‌مانده برابر است با:

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{12}{8}=1/5 \text{ ساعت}=90 \text{ دقیقه}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(وحید امیرکیایی)*

با در نظر گرفتن $\frac{4}{x+3}$ و $\sqrt{x}$ به عنوان پارامترهای جدید a و b، معادله به صورت زیر خواهد شد: $\sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

و این تنها زمانی امکان‌پذیر است که $a=b>0$ باشد.

$$\Rightarrow \frac{4}{x+3}=\sqrt{x} \Rightarrow x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-4=0$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+4)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$$

به ازای $x=1$ عبارت‌ها تعریف شده هستند، پس این جواب قابل قبول است.

دقت کنید که معادلهٔ $x+\sqrt{x}+4=0$ جواب حقیقی ندارد.

هم‌چنین از ظاهر معادله مشخص است که $x=0$ در معادله صدق می‌کند.

در نتیجه معادله ۲ جواب حقیقی دارد.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

برای اینکه نامعادله برقرار باشد، در مرحله اول باید $x>0$ باشد، زیرا $|u|<a$ فقط زمانی برقرار است که $a>0$ باشد.

حال با توجه به عبارت $(x-1)$، در دو بازهٔ $(0,1)$ و $[1,+\infty)$ نامعادله را حل می‌کنیم:

$$0<x<1: |-x+1+\frac{x}{2}-1|<\frac{1}{2}x \Rightarrow |\frac{x}{2}|<\frac{x}{2}$$

جواب ندارد:

$$x\geq 1: |x-1+\frac{x}{2}-1|<\frac{1}{2}x \Rightarrow |\frac{3}{2}x-2|<\frac{1}{2}x$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x<\frac{3}{2}x-2<\frac{1}{2}x$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{3}{2}x-2>-\frac{1}{2}x \Rightarrow x>1\\ \frac{3}{2}x-2<\frac{1}{2}x \Rightarrow x<2\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1<x<2$$

اشتراک جواب آخر با دامنهٔ $x\geq 1$، همان بازهٔ $(1,2)$ می‌شود.

روش دوم:

$x=1$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس بازهٔ گزینهٔ «۴» نادرست است.

$x=2$ و $x=\frac{1}{2}$ نیز در معادله صدق نمی‌کنند، پس بازه‌های «۲» و «۳» نیز نادرست‌اند.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحهٔ ۲۵)

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی ملارمضانی)*

ترجمه صورت سؤال این است که در مجموعهٔ $(-\infty,c]\cup(a,b]$ نامساوی $x\leq\frac{ax+b}{x+2}$ برقرار است.

$$\Rightarrow x-\frac{ax+b}{x+2}=\frac{x^2+(2-a)x-b}{x+2}\leq 0$$

مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله $(-\infty,c]\cup(a,b]$ است، این یعنی b و c ریشه‌های صورت و a ریشه مخرج است.

پس $a=-2$ است و با جای‌گذاری آن، معادله به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{x^2+4x-b}{x+2}\leq 0$$

که $x=b$ ریشهٔ صورت است:

$$b^2+4b-b=b^2+3b=0 \Rightarrow b=0 \text{ یا } b=-3$$

که چون $b>a$ است، $b=0$ را قبول می‌کنیم. با جای‌گذاری $b=0$، عبارت صورت x^2+4x خواهد شد که ریشه دیگر آن یعنی c برابر -4 می‌شود $(c=-4)$، پس داریم:

$$\frac{2b-c}{a}=\frac{+4}{-2}=-2$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(حمید علیزاده)*

یک نقطه به مختصات $(\alpha,\alpha-1)$ را روی خط $y=x-1$ در نظر می‌گیریم و فاصله این نقطه از خط $x-2y=6$ را برابر $\sqrt{5}$ قرار می‌دهیم:

$$h=\frac{|\alpha-2(\alpha-1)-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|\alpha+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow |\alpha+4|=5 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+4=5 \Rightarrow \alpha=1\\ \alpha+4=-5 \Rightarrow \alpha=-9\end{cases}$$

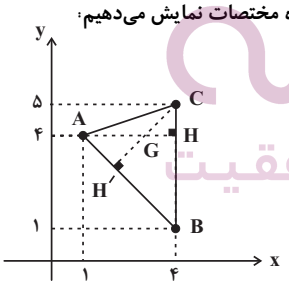
مقادیر به دست آمده برای α طول نقاط A و B هستند، پس مختصات این نقاط $A(1,0)$ و $B(-9,-10)$ است. فاصله این دو نقطه از هم برابر است با:

$$AB=\sqrt{(1-(-9))^2+(0-(-10))^2}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(جهانبخش نیکنام)*

نقاط را روی دستگاه مختصات نمایش می‌دهیم:



می‌دانیم که ارتفاع‌های هر مثلث همرسند، پس برای پیدا کردن نقطه همرسی آن‌ها کافی است نقطه تقاطع دو ارتفاع را پیدا کنیم.

در این مسئله طول نقاط B و C برابر است، پس ارتفاع وارد بر این ضلع (AH) روی خط افقی به معادلهٔ $y=4$ است.

پس کافی است معادله ارتفاع CH' را به دست آوریم. معادله خط گذرا از نقاط A و B به صورت $y=-x+5$ است، پس شیب خط شامل ارتفاع CH' برابر ۱ است و چون این خط از نقطهٔ $C(4,5)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن $y_{CH'}=x+1$ است.

حال از تقاطع دو خط $y=4$ و $y=x+1$ مختصات نقطه G به دست می‌آید:

$$\left.\begin{matrix}y=4\\ y=x+1\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=3, y=4 \Rightarrow G(3,4)$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ مکمل تمرین ۱ صفحهٔ ۳۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۳

۳۱- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

طول مرکز بیضی برابر با طول نقطهٔ B' یعنی برابر (۱-) و عرض آن برابر با عرض نقطهٔ A یعنی برابر ۱ است، بنابراین داریم:

$$a = OA = |4-(-1)| = 5$$
$$b = OB' = |1-(-2)| = 3$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$
$$\text{فاصلهٔ کانونی} = 2c = 8$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$\text{طول قطر کوچک} : 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$
$$\text{فاصلهٔ کانونی} : 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$
$$a^2 = b^2 + c^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow a = \sqrt{41} > 6$$

اگر F و F' کانون‌های بیضی باشند، آن‌گاه داریم:

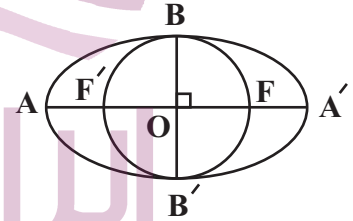
$$MF + MF' = 12 = 2\times 6 < 2\sqrt{41} \Rightarrow MF + MF' < 2a$$

بنابراین نقطهٔ M درون بیضی قرار دارد.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۳- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = 2c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 \Rightarrow b = c$$

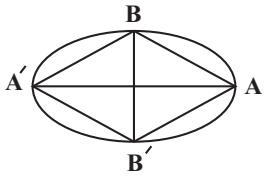


بنابراین مطابق شکل، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $OF = c$ در نقاط B و B' (دو سر قطر کوچک بیضی) بر بیضی مماس است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۴- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

فرض کنید $AA' = 3k$ و $BB' = 2k$ باشد. در این صورت داریم:

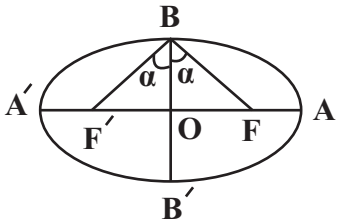


$$S_{ABA'B'} = \frac{1}{2}AA'\times BB' \Rightarrow 27 = \frac{1}{2}\times 3k \times 2k$$
$$\Rightarrow 3k^2 = 27 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AA' = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{2} \\ BB' = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{81}{4} = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{81}{4} - 9 = \frac{45}{4}$$
$$\Rightarrow c = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{فاصلهٔ کانونی} = 2c = 3\sqrt{5}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*



در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBF داریم:

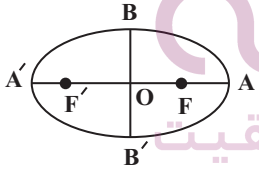
$$BF^2 = OB^2 + OF^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} BF^2 = a^2$$
$$\Rightarrow BF = a$$
$$\overset{\Delta}{OBF} : \sin\alpha = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

قطر کوچک بیضی یکی از دو محور تقارن بیضی است، پس $F\hat{B}F' = 2O\hat{B}F = 2\alpha$ است و در نتیجه داریم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۶- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*



مطابق شکل اگر کانون F را در نظر بگیریم، رأس A نزدیک‌ترین و رأس A' دورترین رأس بیضی نسبت به آن است.

$$\begin{cases} AF = OA - OF = a - c \\ A'F = OA' + OF = a + c \end{cases}$$

طبق فرض داریم:

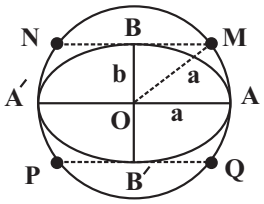
$$AF^2 + A'F^2 = 5OF \times OA$$
$$\Rightarrow (a-c)^2 + (a+c)^2 = 5ca$$
$$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 + a^2 + 2ac + c^2 = 5ac$$
$$\Rightarrow 2c^2 - 5ac + 2a^2 = 0$$
$$\xrightarrow{\div a^2} 2\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 5\left(\frac{c}{a}\right) + 2 = 0$$
$$\Delta = (-5)^2 - 4\times 2\times 2 = 9$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\frac{c}{a}=\frac{5\pm3}{4}\Rightarrow\begin{cases}\frac{c}{a}=2\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۷- **گزینهٔ «۳»** (مهرداد ملوندی)



مطابق شکل، مماس‌های رسم شده از نقاط B و B' ، موازی قطر بزرگ بیضی هستند. یکی از نقاط برخورد مماس‌ها با دایرهٔ C، مثلاً نقطهٔ M را در نظر بگیرید. M روی دایرهٔ C واقع است، پس $OM=\frac{AA'}{2}=a$. از طرفی $OB=b$ ، در نتیجه طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OBM داریم:

$$BM^2=OM^2-OB^2=a^2-b^2=c^2\Rightarrow BM=c$$

با توجه به تقارن موجود در شکل، چهارضلعی $MNPQ$ مستطیل بوده و طول اضلاع آن به صورت $MN=2BM=2c$ و $MQ=2OB=2b$ است و در نتیجه مساحت آن برابر $(2b)\times(2c)=4bc$ خواهد بود. داریم:

$$\left.\begin{aligned}2a=18\Rightarrow a=9\\ 2b=14\Rightarrow b=7\end{aligned}\right\}\Rightarrow c^2=a^2-b^2=81-49=32$$

$$\Rightarrow c=4\sqrt{2}$$

$$S_{MNPQ}=4bc=4\times7\times4\sqrt{2}=112\sqrt{2}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۸- **گزینهٔ «۲»** (افشین خاصه‌خان)

می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر بیضی از دو کانون آن، برابر طول قطر بزرگ بیضی است، بنابراین داریم:

$$\Delta MNF':\ MN+MF'+NF'$$

$$=(MF+NF)+MF'+NF'$$

$$=(MF+MF')+(NF+NF')=2a+2a=4a$$

$$\Rightarrow 4a=24\Rightarrow a=6$$

طول قطر کوچک $:2b=6\Rightarrow b=3$

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 36=9+c^2\Rightarrow c^2=27\Rightarrow c=3\sqrt{3}$$

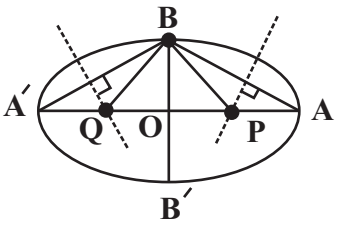
در مثلث MNF' ، قاعدهٔ MN وتر کانونی بیضی به طول $\frac{2b^2}{a}$ و ارتفاع وارد بر این قاعده، FF' فاصلهٔ کانونی بیضی به طول $2c$ است، پس داریم:

$$S_{MNF'}=\frac{1}{2}MN\times FF'=\frac{1}{2}\times\frac{2b^2}{a}\times2c$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\times3^2}{6}\times2\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۹- **گزینهٔ «۲»** (مهرداد ملوندی)



طبق فرض در این بیضی $a=5$ و $b=4$ است. می‌دانیم عمودمنصف پاره‌خط BA ، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از نقاط B و A به یک فاصله‌اند. با توجه به شکل و از آنجا که $OB<OA$ ، عمودمنصف پاره‌خط BA، قطر AA' را در نقطهٔ P ، نزدیک‌تر به نقطهٔ A (نسبت به A')، قطع می‌کند. با فرض $OP=x$ داریم، $PA=PB=5-x$ و در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBP خواهیم داشت:

$$PB^2=OB^2+OP^2\Rightarrow(5-x)^2=4^2+x^2$$

$$\Rightarrow25-10x+x^2=16+x^2\Rightarrow10x=9\Rightarrow x=0/9$$

مطابق شکل طول پاره‌خط PQ ، دو برابر طول پاره‌خط OP است، یعنی:

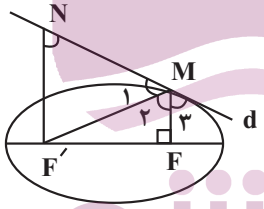
$$PQ=2OP=2\times0/9=1/8$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۴۰- **گزینهٔ «۳»** (سوگند روشنی)

$$FF'=|5-(-1)|=6$$

$$MF=|10-2|=8$$



مطابق شکل M را به F' وصل می‌کنیم.

طبق خاصیت بازتابندگی بیضی، زوایایی که خطوط MF و MF' با خط d (خط مماس بر بیضی در نقطهٔ M) می‌سازند، برابر یکدیگر است، پس $\widehat{M_1}=\widehat{M_3}$. از طرفی داریم:

$$MF\parallel NF',\ \text{مورب}\ d\Rightarrow\widehat{M_3}=\widehat{N}\xrightarrow{\widehat{M_1}=\widehat{M_3}}\widehat{M_1}=\widehat{N}$$

$$\xrightarrow{\Delta MNF'}NF'=MF'$$

$$\Delta MFF':\ MF'^2=MF^2+FF'^2=8^2+6^2=100$$

$$\Rightarrow MF'=10\Rightarrow NF'=10$$

$$S_{NMFF'}=\frac{1}{2}FF'(MF+NF')=\frac{1}{2}\times6(8+10)=54$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

ایران توزنه
توسعه آموزش برای موفقیت

هندسه ۳ – موازی

۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&-2\\-1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\5&-2\\-b&a+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a+10+2b&b-4-2a-2\\-a+15-4b&-b-6+4a+4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a+2b+10&b-2a-6\\-a-4b+15&4a-b-2\end{bmatrix}$$

چون ماتریس AB، ماتریسی قطری است، پس درایه‌های خارج قطر اصلی آن برابر صفر هستند. داریم:

$$\begin{cases}b-2a-6=0\\-a-4b+15=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a+b=6\\a+4b=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=4\end{cases}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-1&4\\5&-2\\-4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\-1&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&10&18\\7&4&-18\\-4&-8&8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } BA=12$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۱۲ تا ۱۹)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

اتحادهای جبری تنها زمانی برای ماتریس‌های A و B برقرار هستند که این دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، بنابراین داریم:

$$BA=AB\Rightarrow\begin{bmatrix}a&c\\d&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\d&b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2a+c&3c\\2d+b&3b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a&2c\\a+3d&c+3b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+c=2a\Rightarrow c=0\\3b=c+3b\Rightarrow c=0\\3c=2c\Rightarrow c=0\\2d+b=a+3d\Rightarrow a+d=b\end{cases}$$

تذکر: حالت $c=d=0$ ممکن است رخ دهد اما لزوماً برقرار نیست.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۲۱)

۴۳- **گزینهٔ «۱»** *(رضا عباسی‌اصل)*

$$A^{-1}=\frac{1}{1\times3-0\times(-1)}\begin{bmatrix}3&0\\1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&0\\1&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}6&3\\2&3\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1\\0&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}6&3\\2&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3a&3\\a&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3\\2&3\end{bmatrix}\Rightarrow a=2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمد هجری)*

فرض کنید $X=x-2y$ و $Y=2x+y$ باشد. اگر $A=\begin{bmatrix}5&3\\-4&4\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه داریم:

$$A^{-1}=\frac{1}{5\times4-3(-4)}\begin{bmatrix}4&-3\\4&5\end{bmatrix}=\frac{1}{32}\begin{bmatrix}4&-3\\4&5\end{bmatrix}$$

A^{-1} را از سمت چپ در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\frac{1}{32}\begin{bmatrix}4&-3\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\4\end{bmatrix}=\frac{1}{32}\begin{bmatrix}32\\64\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X=x-2y=1\\Y=2x+y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow x+y=1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

۴۵- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

درایه های سطر اول ماتریس در ۱، درایه‌های سطر دوم ماتریس در ۲ و درایه‌های سطر سوم ماتریس در ۳ ضرب می‌شوند و به‌طور مشابه درایه‌های ستون‌های اول، دوم و سوم ماتریس به ترتیب در ۱، ۲ و ۳ ضرب می‌شوند، بنابراین داریم: $|B|=(1\times2\times3)\times(1\times2\times3)|A|=3!\times3!|A|$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحهٔ ۳۱)

۴۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیر وفائی)*

$$A=\begin{bmatrix}3|A|&2\\5&|A|\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=3|A|^2-10$$

$$\Rightarrow3|A|^2-|A|-10=0\Rightarrow(3|A|+5)(|A|-2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|A|=-\frac{5}{3}\\|A|=2\end{cases}$$

$$|A|=-\frac{5}{3}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 5 & -\frac{5}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=-\frac{3}{5}\begin{bmatrix}-\frac{5}{3} & -2\\ -5 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \frac{6}{5}\\ 3 & 3\end{bmatrix}$$

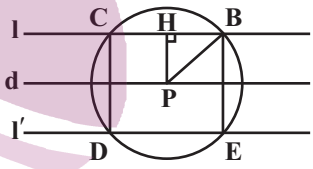
$$|A|=2\Rightarrow A=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 5 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -\frac{5}{2} & 3\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ ، ۲۳ و ۳۰)

۴۷- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

مجموعه نقاطی که از نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ باشند، یک دایره به مرکز P و شعاع ۱ و نقاطی که از خط d به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ باشند، دو خط موازی l و l' به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ از آن می‌باشند. نقاط برخورد دو خط و دایره جواب مسئله است.

این نقاط یک مستطیل تشکیل می‌دهند و داریم:



$$\overset{\Delta}{PHB}: BH^2=PB^2-PH^2=1^2-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}\Rightarrow BH=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{3}$$

$$CD=2PH=2\times\frac{1}{2}=1$$

$$S_{BCDE}=BC\times CD=\sqrt{3}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۴۸- **گزینهٔ «۱»** *(بهزاد حاتمی)*

می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس بر دایره عمود است. بنابراین مرکز دایره روی خطی که در مبدأ مختصات بر خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) عمود می‌شود، قرار دارد. از طرفی نیمساز ربع دوم و چهارم (خط $y=-x$) در مبدأ مختصات بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است، بنابراین مرکز دایره روی خط $y=-x$ قرار دارد. داریم:

$$x^2+y^2-kx+2y=0\Rightarrow \text{مرکز}: O(\frac{k}{2},-1)$$

$$y=-x\Rightarrow -1=-\frac{k}{2}\Rightarrow k=2$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+2^2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴۹- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

$$C_1: x^2+y^2-4x-a=0\Rightarrow \begin{cases} q"o¶: O_1(2,0)\\ |l÷{: R_1=\sqrt{4+a}\end{cases}$$

$$C_2: (x+1)^2+y^2=9\Rightarrow \begin{cases} q"o¶: O_2(-1,0)\\ |l÷{: R_2=3\end{cases}$$

$$d=O_1O_2=\sqrt{(-1-2)^2+(0-0)^2}=3$$

شرط مماس داخل بودن دو دایره: $d=|R_1-R_2|\Rightarrow|\sqrt{4+a}-3|=3$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{4+a}-3=3\Rightarrow\sqrt{4+a}=6\Rightarrow 4+a=36\Rightarrow a=32\\ \sqrt{4+a}-3=-3\Rightarrow\sqrt{4+a}=0\Rightarrow R_1=0\ ¡\ ¡ù\end{cases}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحهٔ ۴۴)

۵۰- **گزینهٔ «۴»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

چون دو دایره در نقاط C و D یکدیگر را قطع می‌کنند، پس پاره‌خط CD وتر مشترک دو دایره است. داریم:

$$\left.\begin{matrix}x^2+y^2-12x=0\\ x^2+y^2+16y-36=0\end{matrix}\right\}\xrightarrow{®ôÍ}-12x-16y+36=0$$

بنابراین معادلهٔ وتر مشترک دو دایره را می‌توان به‌صورت $3x+4y-9=0$ نوشت. حال کافی است فاصلهٔ نقطهٔ A را از این خط به‌دست آوریم. اگر این فاصله را با d نمایش دهیم، داریم:

$$d=\frac{|3(1)+4(-1)-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضیات گسسته

۵۱- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

هدف یافتن یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است. به عبارتی هر رأس گراف یا در این مجموعه است و یا حداقل با یکی از رئوس گراف مجاور است.

با توجه به نمودار گراف، حداقل یکی از دو رأس d و h حتماً باید در مجموعهٔ موردنظر باشد، بنابراین تنها مجموعهٔ گزینهٔ «۳» امکان‌پذیر است.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

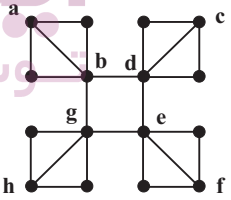
۵۲- **گزینهٔ «۳»** *(بیتا سعیدی)*

اگر در گرافی $r=1$ باشد یعنی گراف حداقل یک رأس از درجه $p-1$ دارد. در نتیجه در این گراف همه رئوس از درجه $p-1$ می‌باشند و گراف کامل مرتبه ۵ می‌باشد و درجه همه رئوس ۴ است و تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر آن $2^5-1=31$ است.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴)

۵۳- **گزینهٔ «۲»** *(محسن بهرام‌پور)*

کافی است از هریک از جفت رأس‌های $\{a,b\}$ و $\{c,d\}$ و $\{e,f\}$ و $\{g,h\}$ یکی را انتخاب کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:



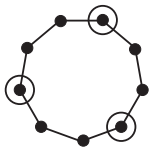
$$\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=16$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

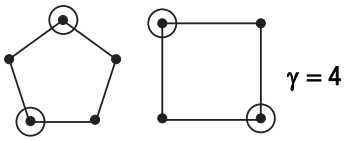
۵۴- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

گراف‌های ۲- منتظم مرتبه ۹ به صورت‌های زیر می‌باشند که عدد احاطه‌گری هرکدام از آن‌ها نیز مشخص شده است:

1) $\gamma=3$

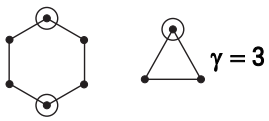


2) $\gamma=4$



3) $\gamma=3$

4) $\gamma=3$



که همانطور که می‌بینیم در حالت (۲) عدد احاطه‌گری زوج است.

برای بررسی تعداد $\gamma-$ مجموعه‌های متمایز در گراف C_5 باید دو رأس انتخابی مجاور نباشند. یعنی:

$$\binom{5}{2}-5=5$$

و در C_4 هر دو رأس انتخابی، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌باشند. یعنی: $\binom{4}{2}=6$، در نتیجه در حالت (۲) به تعداد $5\times 6=30$ ، $\gamma-$ مجموعهٔ متمایز وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴)

۵۵- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

مجموعه احاطه‌گر مینیمال، به مجموعه‌ای احاطه‌گر گفته می‌شود که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد.

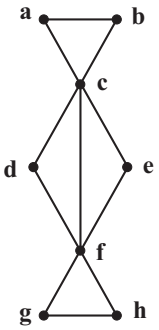
موارد «الف» و «ب» احاطه‌گر مینیمال هستند ولی مورد «پ» با حذف رأس d، مجموعه $\{k,h,e,a\}$ همچنان احاطه‌گر است.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحهٔ ۴۶)

۵۶- **گزینهٔ «۲»** *(مرتضی فهیم‌علوی)*

برای تشکیل مجموعه احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم ۴ عضوی، رئوس d و e را انتخاب می‌کنیم و یک رأس از مجموعه رئوس $\{a,b\}$ و یک رأس از مجموعه رئوس $\{g,h\}$ نیز انتخاب می‌شوند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



در نتیجه خواهیم داشت:

$$\binom{2}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1}=4$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

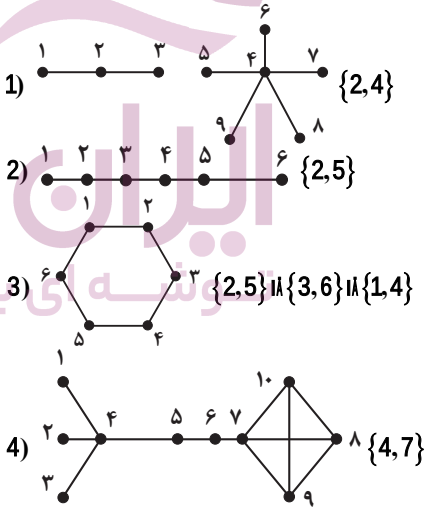
۵۷- **گزینهٔ «۴»** *(فرزانه خاکپاش)*

$N_G(a)$ مجموعهٔ همسایگی باز رأس a و فاقد خود رأس a است. اگر یال ab در گراف G وجود داشته باشد، آنگاه $a \notin N_G(a)$ ولی $a \in N_G(b)$، پس $N_G(a) \neq N_G(b)$. با توجه به اینکه برای هر دو رأس دلخواه a و b در گراف G، رابطهٔ $N_G(a)=N_G(b)$ برقرار است، پس این گراف هیچ یالی ندارد و مجموعهٔ همسایگی باز تمام رأس‌های آن تهی است. بنابراین در گراف G، هر رأس تنها قادر به احاطهٔ همان رأس است و در نتیجه $\gamma(G)=6$ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۶ و ۴۴)

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(مرتضی فهیم‌علوی)*

مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم در گراف‌های داده شده به صورت زیر می‌باشد.



بنابراین در گزینه‌های «۱» و «۲» و «۴» مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم یکتای ۲ عضوی داریم.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴)

۵۹- **گزینهٔ «۴»** *(بیتا سعیدی)*

عدد احاطه‌گری گراف P_{13} برابر $\left\lceil \frac{13}{3} \right\rceil = 5$ و عدد احاطه‌گری گراف $\overline{C}_{13}$ برابر ۲ است.

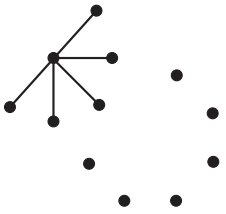
$$\begin{cases} m=5 \\ n=2 \end{cases}$$

$$m-n=5-2=3$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

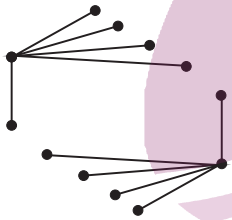
در گراف مرتبهٔ ۱۲ هنگامی که $\Delta=5$ است. بنابراین رأسی با ۵ رأس دیگر مجاور است. بیشترین مقدار عدد احاطه‌گری زمانی است که رئوس دیگر به صورت منفرد باقی بمانند.



$$\gamma_{(G)}=7$$

و کمترین مقدار $\gamma(G)$ زمانی است که رئوس دیگر را به گونه‌ای متصل کنیم که $\gamma=2$ شود:

$$\gamma \geq \left\lceil \frac{12}{5+1} \right\rceil$$
$$\Rightarrow \gamma \geq 2$$



در نتیجه مجموع حداکثر و حداقل مقدار $\gamma(G)$ برابر $9=7+2$ است.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

ریاضیات گسسته – موازی

۶۱- **گزینهٔ «۳»** *(حمیدرضا امیری)*

اگر $a=2$ و $b=3$ باشد، آنگاه $ab=6$ زوج است ولی $a+b=5$ فرد می‌باشد. سایر موارد قضایای کلی هستند و همواره برقرارند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۲ و ۳)

۶۲- **گزینهٔ «۴»** *(فرهاد وفایی)*

اگر حاصل کسر $\frac{x^2+x-3}{x+1}$ عددی صحیح شود، آنگاه $x+1 \mid x^2+x-3$

و در نتیجه داریم: $\begin{matrix} x+1 \mid x^2+x-3 \\ x+1 \mid x(x+1) \end{matrix} \xrightarrow{\text{تفریق}} x+1 \mid -3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=1 & \Rightarrow x=0 \\ x+1=-1 & \Rightarrow x=-2 \\ x+1=3 & \Rightarrow x=2 \\ x+1=-3 & \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

از بین مقادیر به دست آمده، فقط $x=2$ مقداری طبیعی است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۶۳- **گزینهٔ «۳»** *(علی سعیدی‌زاد)*

$$a = 21q + \frac{7}{3}q$$

$$0 \le r < b \Rightarrow 0 \le \frac{7}{3}q < 21 \Rightarrow 0 \le q < 9$$

چون باقی‌مانده عددی صحیح و نامنفی است، پس $\max(q) = 6$ می‌باشد و داریم:

$$\max(a) = 21\times 6 + \frac{7}{3}\times 6 = 126 + 14 = 140$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۶۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$\begin{cases} 3a \overset{11}{\equiv} 7 \xrightarrow{\times 5} 15a \overset{11}{\equiv} 35 \\ 5a \overset{11}{\equiv} 2b \xrightarrow{\times 3} 15a \overset{11}{\equiv} 6b \end{cases} \Rightarrow 6b \overset{11}{\equiv} 35 \Rightarrow 6b \overset{11}{\equiv} 24 \xrightarrow[(6,11)=1]{\div 6} b \overset{11}{\equiv} 4$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۶۵- **گزینهٔ «۱»** *(مرتضی فهیم‌علوی)*

$$1391 \overset{11}{\equiv} 1 - 9 + 3 - 1 \overset{11}{\equiv} -6 \overset{11}{\equiv} 5$$

پس کافی است هم‌نهشتی 5^{2012} را در پیمانهٔ ۱۱ محاسبه کنیم. داریم:

$$\left.\begin{matrix} 5^2 \overset{11}{\equiv} 25 \overset{11}{\equiv} 3 \\ 5^3 \overset{11}{\equiv} 125 \overset{11}{\equiv} 4 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\times} 5^5 \overset{11}{\equiv} 12 \overset{11}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 5^{10} \overset{11}{\equiv} 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 201} 5^{2010} \overset{11}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 5^2} 5^{2012} \overset{11}{\equiv} 25 \overset{11}{\equiv} 3$$

بنابراین $a+3$ باید مضرب ۱۱ باشد و در نتیجه کوچک‌ترین عدد طبیعی a برابر است با $8 = 3 - 11$.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۶۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

فرض کنید تعداد اسکناس‌های 200 و 500 تومانی به‌ترتیب برابر x و y باشد. در این‌صورت داریم:

$$200x + 500y = 13000 \Rightarrow 2x + 5y = 130$$

$$\Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 130 \Rightarrow y \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow y = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2x + 5(2k) = 130 \Rightarrow 2x = -10k + 130 \Rightarrow x = -5k + 65$$

$$\left.\begin{matrix} x > 0 \Rightarrow -5k + 65 > 0 \Rightarrow k < 13 \\ y > 0 \Rightarrow 2k > 0 \Rightarrow k > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 \le k \le 12$$

بنابراین درصورتی که بخواهیم از هر دو مدل اسکناس استفاده کنیم، به ۱۲ طریق می‌توان این‌کار را انجام داد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ مشابه تمرین ۱۳ صفحهٔ ۲۹)

۶۷- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

عددی مضرب ۴۴ است، که مضرب ۴ و ۱۱ باشد.

$$\overline{42a5b} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{5b} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$\overline{42a5b} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b - 5 + a - 2 + 4 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a + b \overset{11}{\equiv} 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a + b = 14 \end{cases}$$

$$b = 2 \xrightarrow{a+b=3} a = 1 \Rightarrow a \times b = 2$$

$$b = 6 \xrightarrow{a+b=14} a = 8 \Rightarrow a \times b = 48$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار $a \times b$، برابر ۴۸ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

این گراف شامل دورهایی به طول ۵، ۶، ۷ و ۹ است، ولی دوری به طول ۸ ندارد. به‌عنوان مثال داریم:

دور به طول ۵ : $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$

دور به طول ۶ : $v_1v_5v_6v_7v_8v_9v_1$

دور به طول ۷ : $v_1v_2v_3v_8v_7v_6v_5v_1$

دور به طول ۹ : $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9v_1$

(ریاضیات گسسته — گراف و مدل‌سازی؛ مشابه تمرین ۱۲ صفحهٔ ۴۲)

۶۹- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

اگر a یکی از رئوس گراف G باشد، آن‌گاه $N_G[a]$ مجموعهٔ همسایگی بستهٔ رأس a و شامل رأس a و تمام رأس‌های مجاور با a در گراف G است. اگر $N_G[x] = N_G[y]$ باشد، آن‌گاه حتماً یال xy در گراف G وجود دارد و چون این فرض برای هر دو رأس دلخواه از گراف G برقرار است، پس گراف G، یک گراف کامل است. در این گراف داریم:

$$p + q = 21 \Rightarrow p + \frac{p(p-1)}{2} = 21 \Rightarrow \frac{p^2 + p}{2} = 21$$

$$\Rightarrow p(p+1) = 42 \xrightarrow{p>0} p = 6$$

در گراف K_6، درجه همهٔ رأس‌ها برابر ۵ است، پس $\Delta(G) = 5$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۷۰- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهدوی)*

با توجه به اینکه $480 = 2^5 \times 3 \times 5$ است، پس تنها حالت ممکن برای درجات رئوس گراف G به‌صورت ۲، ۲، ۲، ۳، ۴ و ۵ است (گرافی با درجات رئوس ۱، ۲، ۳، ۴، ۴ و ۵ وجود ندارد چون تعداد رئوس فرد گراف همواره عددی زوج است). بنابراین داریم:

$$2q = 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 = 18 \Rightarrow q = 9$$

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 9 + q(\overline{G}) = \frac{6 \times 5}{2}$$

$$\Rightarrow q(\overline{G}) = 6$$

(ریاضیات گسسته - گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۰)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

هندسه ۲

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(منانه اتفاقی)*

$\overset{\Delta}{ABC}: AC = BC \Rightarrow A\hat{B}C = \hat{A} = 20^\circ$

(زاویهٔ ظلی) $A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 40^\circ$

$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{\overset{\frown}{BD} - 40^\circ}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = 80^\circ$

$\overset{\frown}{DBC} = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{BC} = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{DC} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

(زاویهٔ محاطی) $D\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۷۲- **گزینهٔ «۱»** *(مصوبه بهاری)*

مطابق شکل فرض کنید $DM = 7CM$ باشد. در این صورت طبق روابط طولی برای دو وتر متقاطع درون دایره داریم:

$AM \times BM = CM \times DM \Rightarrow 2CM \times BM = CM \times 7CM$

$\Rightarrow BM = \frac{7}{2}CM = \frac{7}{2} \times \frac{1}{2}AM = \frac{7}{4}AM$

$AB = 11 \Rightarrow AM + BM = 11 \Rightarrow AM + \frac{7}{4}AM = 11$

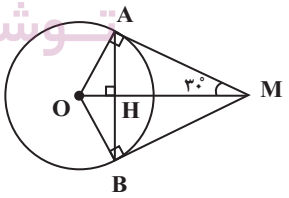
$\Rightarrow \frac{11}{4}AM = 11 \Rightarrow AM = 4 \Rightarrow BM = \frac{7}{4} \times 4 = 7$

$BM - AM = 7 - 4 = 3$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحهٔ ۱۸)

۷۳- **گزینهٔ «۱»** *(فرزانه خاکپاش)*

پاره خط OM نیمساز زاویهٔ بین دو مماس است، پس $O\hat{M}A = 30^\circ$.



می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ 30°، طول ضلع روبه‌رو به این زاویه، نصف طول وتر است، پس داریم:

$\overset{\Delta}{OMA}: OA = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

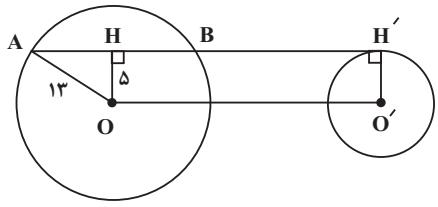
طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM داریم:

$OA^2 = OH \times OM \Rightarrow 3^2 = OH \times 6 \Rightarrow OH = \frac{9}{6} = 1/5$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۷۴- **گزینهٔ «۴»** *(منانه اتفاقی)*

مطابق شکل چهارضلعی $OHH'O'$ مستطیل است، پس $OH = R' = 5$ و در نتیجه در مثلث OAH داریم:



$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow AH = 12$

$\Rightarrow AB = 2 \times 12 = 24 \Rightarrow OO' = AB = 24$

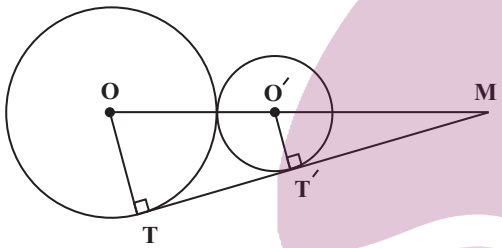
طول مماس مشترک خارجی $= \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$

$= \sqrt{24^2 - (13-5)^2} = \sqrt{576 - 64}$

$= \sqrt{512} = \sqrt{256 \times 2} = 16\sqrt{2}$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۷۵- **گزینهٔ «۲»** *(مصوبه بهاری)*



طول مماس مشترک خارجی این دو دایره برابر است با:

$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{9 \times 4} = 12$

مطابق شکل دو پاره‌خط OT و $O'T'$ موازی یکدیگرند، پس طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث MOT داریم:

$O'T' \parallel OT \Rightarrow \frac{MT'}{MT} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{MT - 12}{MT} = \frac{4}{9}$

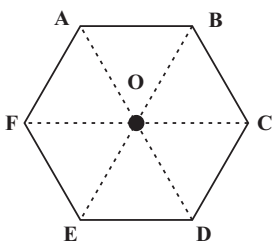
$\Rightarrow 9MT - 108 = 4MT \Rightarrow 5MT = 108$

$\Rightarrow MT = \frac{108}{5} = 21/6$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۷۶- **گزینهٔ «۱»** *(شایان عباچی)*

شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مطابق شکل از شش مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است.

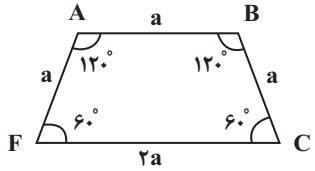


ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فرض کنید این شش ضلعی را در راستای قطر CF به دو چهارضلعی تقسیم کنیم و چهارضلعی $ABCF$ را در نظر بگیریم. در این چهارضلعی داریم:

$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{F}=180^\circ \Rightarrow$ محاطی است

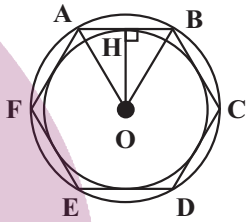
$AB+CD\neq AF+BC \Rightarrow$ محیطی نیست



(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۷۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل مرکز دو دایرهٔ محیطی و محاطی این شش ضلعی منتظم برهم منطبق است. از نقطهٔ O به دو رأس A و B از این شش ضلعی وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع OAB حاصل شود.



در این صورت داریم:

شعاع دایرهٔ محیطی $= OA = AB = 6$

شعاع دایرهٔ محاطی $= OH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 6 = 3\sqrt{3}$

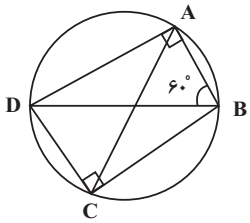
مساحت ناحیهٔ بین دو دایره $= \pi\times OA^2 - \pi\times OH^2$

$= \pi(OA^2 - OH^2) = \pi(36-27) = 9\pi$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۸ و ۲۹)

۷۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمد حمیدی)*

زاویه‌های روبه‌رو در چهارضلعی $ABCD$ مکمل یکدیگرند، پس این چهارضلعی محاطی و BD قطر دایره است.



اگر دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ را رسم کنیم، آن‌گاه داریم:

$A\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = 60^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = 120^\circ$ (زاویهٔ محاطی)

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ (زاویهٔ محاطی)

(هندسه ۲- دایره؛ صفحهٔ ۲۷)

۷۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر r_a ، r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی و h_a ، h_b و h_c طول ارتفاع‌های یک مثلث باشند که شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن r است، آن‌گاه روابط زیر همواره برقرار است:

$$\begin{cases}\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}\\ \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}\end{cases}$$

بنابراین با فرض مجهول بودن h_c داریم:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

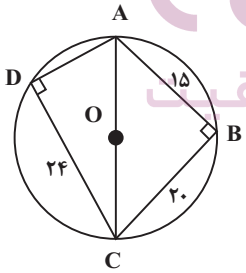
$$\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{12}+\frac{1}{5}+\frac{1}{h_c}$$

$$\Rightarrow \frac{10+3+2}{30}=\frac{5+12}{60}+\frac{1}{h_c}\Rightarrow \frac{1}{h_c}=\frac{1}{2}-\frac{17}{60}=\frac{13}{60}\Rightarrow h_c=\frac{60}{13}$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به اینکه عمودمنصف‌های اضلاع چهارضلعی $ABCD$ همرس هستند، پس این چهارضلعی محاطی است و چون مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی (نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها) روی قطر AC قرار دارد، پس AC قطر دایرهٔ محیطی نیز هست و در نتیجه زوایای B و D قائمه هستند.



بنابراین داریم:

$\overset{\Delta}{ABC}: AC^2 = AB^2 + BC^2 = 225+400 = 625 \Rightarrow AC = 25$

$\overset{\Delta}{ADC}: AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow 625 = AD^2 + 576$

$\Rightarrow AD^2 = 49 \Rightarrow AD = 7$

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{15\times 20}{2} + \frac{7\times 24}{2}$

$= 150 + 84 = 234$

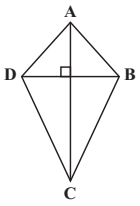
(هندسه ۲- دایره؛ صفحهٔ ۲۷)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هندسه۱ (اختیاری)

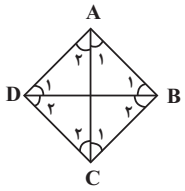
۸۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

الف) نادرست است، چون اگر در یک چهارضلعی قطرها بر هم عمود باشند، آن چهارضلعی لزوماً لوزی نیست، مانند چهارضلعی $ABCD$ در شکل زیر:



ب) نادرست است، چون اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و لزوماً لوزی نخواهد بود.

پ) درست است. فرض کنید در چهارضلعی $ABCD$ مطابق شکل زیر، قطرها نیمساز زوایا باشند. در این صورت داریم:



$$\left.\begin{matrix}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ AC=AC\\ \hat{C}_1=\hat{C}_2\end{matrix}\right\}\xrightarrow{(زض ز)}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{ADC}\Rightarrow\begin{cases}AB=AD\\ BC=CD\end{cases}$$

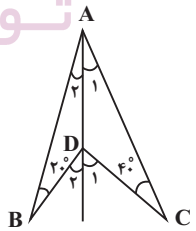
$$\left.\begin{matrix}\hat{B}_1=\hat{B}_2\\ BD=BD\\ \hat{D}_1=\hat{D}_2\end{matrix}\right\}\xrightarrow{(زض ز)}\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{CBD}\Rightarrow\begin{cases}AB=BC\\ AD=CD\end{cases}$$

بنابراین $AB=BC=CD=AD$، یعنی چهارضلعی $ABCD$ لوزی است.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحهٔ ۲۵)

۸۲- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

مطابق شکل از A به D وصل کرده و امتداد می‌دهیم.



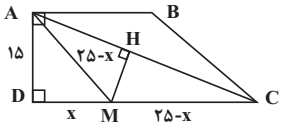
$\overset{\Delta}{ADB}$: زاویهٔ خارجی است $\hat{D}_2 \Rightarrow \hat{D}_2=\hat{A}_2+\hat{B}$ (1)

$\overset{\Delta}{ADC}$: زاویهٔ خارجی است $\hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{A}_1+\hat{C}$ (2)

$$(1),(2)\Rightarrow \hat{D}_1+\hat{D}_2=(\hat{A}_1+\hat{A}_2)+\hat{B}+\hat{C}$$
$$\Rightarrow 5\alpha=\alpha+40^\circ+20^\circ$$
$$\Rightarrow 4\alpha=60^\circ\Rightarrow\alpha=15^\circ$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحهٔ ۲۱)

۸۳- **گزینهٔ «۲»** *(بهزاد حاتمی)*

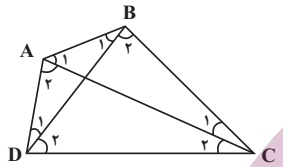


نقطهٔ M روی عمودمنصف قطر AC قرار دارد، بنابراین فاصلهٔ آن از نقاط A و C برابر است. اگر $MD=x$ فرض شود، آنگاه $MA=MC=25-x$ است و در نتیجه داریم:

$$\overset{\Delta}{ADM}: AM^2=AD^2+MD^2$$
$$\Rightarrow (25-x)^2=15^2+x^2$$
$$\Rightarrow 625-50x+x^2=225+x^2\Rightarrow 50x=400\Rightarrow x=8$$

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*



مطابق شکل داریم:

$$\left.\begin{matrix}\overset{\Delta}{ABC}: BC>AB\Rightarrow \hat{A}_1>\hat{C}_1\\ \overset{\Delta}{ADC}: DC>AD\Rightarrow \hat{A}_2>\hat{C}_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{A}>\hat{C}\quad (1)$$

$$\left.\begin{matrix}\overset{\Delta}{ABD}: AD>AB\Rightarrow \hat{B}_1>\hat{D}_1\\ \overset{\Delta}{BCD}: DC>BC\Rightarrow \hat{B}_2>\hat{D}_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{B}>\hat{D}\quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}>\hat{C}+\hat{D}\Rightarrow 2(\hat{A}+\hat{B})>\underbrace{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}_{360^\circ}$$
$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}>180^\circ$$

بنابراین نامساوی گزینهٔ «۲» همواره درست است.

نامساوی گزینهٔ «۱» بسته به شرایط می‌تواند درست یا نادرست باشد و چهارضلعی $ABCD$ به طول اضلاع $AB=3$ ، $BC=6$ ، $CD=7$ و $AD=5$ مثال نقضی برای گزینه‌های «۳» و «۴» است.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۸۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$\frac{\frac{S_{ADE}}{S_{ABD}}}{\frac{S_{ADE}}{S_{ACE}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\Rightarrow\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}EH\times AC}{\frac{1}{2}DK\times AB}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{EH}{DK}\times 2=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{EH}{DK}=\frac{3}{4}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مثلثی به طول اضلاع 6، 12 و $6\sqrt{3}$، مثلث قائم‌الزاویه است، چون اضلاع آن در قضیهٔ فیثاغورس صدق می‌کند.

$$6^2+(6\sqrt{3})^2=36+108=144=12^2$$

بنابراین مساحت این مثلث برابر است با: $S_1=\frac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$

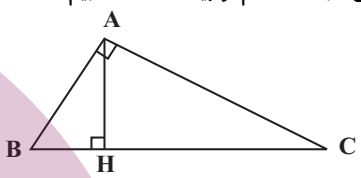
مساحت مثلث دوم در صورتی بیشترین مقدار ممکن را دارد که ضلع به طول $2\sqrt{3}$ متناظر با کوچک‌ترین ضلع مثلث اول باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{6}\right)^2\Rightarrow\frac{S_2}{18\sqrt{3}}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_2=6\sqrt{3}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۸۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمد فندان)*

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



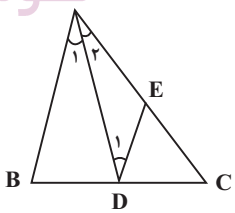
$$AH^2=BH\times CH\Rightarrow(2BH)^2=BH\times CH$$
$$\Rightarrow 4BH^2=BH\times CH\Rightarrow CH=4BH$$
$$\Rightarrow BC=5BH$$
$$AB^2=BH\times BC\Rightarrow AB^2=\frac{1}{5}BC\times BC\Rightarrow BC^2=5AB^2$$
$$\Rightarrow BC=\sqrt{5}AB$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۸۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به شکل داریم:

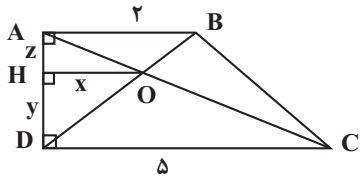
$$AB\parallel DE,\ AD\ \text{مورب}\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{D}_1\xrightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2}$$
$$\hat{A}_2=\hat{D}_1\Rightarrow\overset{\Delta}{A}DE\ \text{متساوی‌الساقین است}\Rightarrow AE=DE\quad(1)$$



$$\overset{\Delta}{CAB}:DE\parallel AB\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{AC}$$
$$\xrightarrow{(1)}\frac{AE}{AB}=\frac{CE}{AC}\Rightarrow\frac{CE}{AE}=\frac{AC}{AB}$$
$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{CE}{AC}=\frac{AC}{AC+AB}\Rightarrow\frac{CE}{25}=\frac{25}{45}$$
$$\Rightarrow CE=\frac{25\times 25}{45}=\frac{125}{9}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۸۹- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*



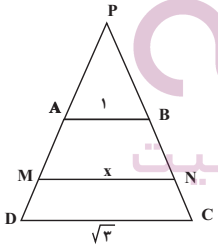
مطابق شکل اگر فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی قطرها از ساق قائم را با x و اندازهٔ قطعات ایجاد شده روی این ساق را با y و z نمایش دهیم، داریم:

$$\overset{\Delta}{DAB}:HO\parallel AB\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{HO}{AB}=\frac{DH}{DA}$$
$$\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{y+z}$$
$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{x}{2-x}=\frac{y}{z}\quad(1)$$
$$\overset{\Delta}{ADC}:HO\parallel DC\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{HO}{DC}=\frac{AH}{AD}$$
$$\Rightarrow\frac{x}{5}=\frac{z}{y+z}$$
$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{x}{5-x}=\frac{z}{y}\Rightarrow\frac{5-x}{x}=\frac{y}{z}\quad(2)$$
$$(1),(2)\Rightarrow\frac{x}{2-x}=\frac{5-x}{x}\Rightarrow x^2=10-7x+x^2$$
$$\Rightarrow 7x=10\Rightarrow x=\frac{10}{7}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۹۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیر مالمیر)*

ساق‌های ذوزنقه را از سمت نقاط A و B ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند.



اگر $S_{ABNM}=S_{MNCD}=S$ و $S_{PAB}=S'$ باشد، آنگاه طبق قضیهٔ اساسی تشابه، مثلث PAB، PMN و PCD دو به دو متشابه هستند و در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCD}}=\left(\frac{AB}{CD}\right)^2\Rightarrow\frac{S'}{S'+2S}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow S'+2S=3S'\Rightarrow S=S'\quad(1)$$
$$\frac{S_{PAB}}{S_{PMN}}=\left(\frac{AB}{MN}\right)^2\Rightarrow\frac{S'}{S'+S}=\left(\frac{1}{x}\right)^2$$
$$\xrightarrow{(1)}\frac{1}{2}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2=2\xrightarrow{x>0}x=\sqrt{2}$$

(هندسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ و ۴۵)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۳

۹۱- **گزینهٔ «۲»** *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

با توجه به اینکه فاصلهٔ هر دو قلهٔ متوالی برابر با λ است، پس می‌توان نوشت:

$$2\lambda = 80 \Rightarrow \lambda = 40cm = 0/4m$$

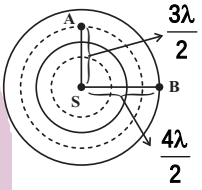
تیغهٔ نوسان‌ساز در هر ۶۰ ثانیه ۱۵ نوسان انجام می‌دهد، پس:

$$f = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}Hz$$

پس تندی انتشار برابر است با: $v = \lambda f = 0/4 \times \frac{1}{4} = 0/1\frac{m}{s}$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۹۲- **گزینهٔ «۱»** *(علی نظری)*



$$AB = \sqrt{As^2 + Bs^2}$$

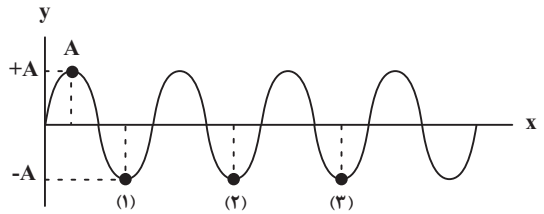
$$= \sqrt{\left(\frac{3\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{4\lambda}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow AB \propto \lambda \Rightarrow$$ n برابر می‌شود

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

مطابق شکل زیر، وقتی ذرهٔ A در دامنهٔ مثبت $(x = +A)$ قرار دارد، تمام ذره‌هایی که فاصلهٔ آن‌ها از ذرهٔ A مضرب فردی از $\frac{\lambda}{2}$ باشد، در مکان $(x = -A)$ قرار دارد.



با توجه به این که سه ذره بین نقطه‌های A و B در مکان $x = -A$ واقع‌اند، باید فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{5\lambda}{2} < d < \frac{7\lambda}{2}$ باشد. بنابراین با محاسبهٔ λ داریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow[f=200Hz]{v=20m/s} \lambda = \frac{20}{200} = 0/1m \Rightarrow \lambda = 10cm$$

$$\frac{5\times10}{2} < d < \frac{7\times10}{2} \Rightarrow 25cm < d < 35cm$$

می‌بینیم، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B باید بین 25cm تا 35cm باشد، که گزینهٔ «۳» درست است.

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۹۴- **گزینهٔ «۱»** *(میثم رشتیان)*

با توجه به شکل، می‌توان نوشت: $\frac{2\lambda_A}{2} = \frac{3\lambda_B}{4} \Rightarrow \lambda_A = \frac{3}{4}\lambda_B$

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{\text{ثابت } v} \lambda \propto \frac{1}{f} \Rightarrow f_A = \frac{4}{3}f_B$$

بیشینه انرژی جنبشی ذرات محیط، همان انرژی مکانیکی است که بر اساس رابطهٔ $E = 2\pi^2 m f^2 A^2$ به‌دست می‌آید و می‌توان نوشت:

$$\frac{E_B}{E_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \left(\frac{f_B}{f_A}\right)^2 \times \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_B}{E_A} = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times (2)^2 = 2 \times \frac{9}{16} \times 4 = \frac{9}{2}$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۳)

۹۵- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ابتدا با توجه شکل، طول‌موج و سپس دورهٔ تناوب موج را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\frac{\lambda}{2} = 10cm \Rightarrow \lambda = 20cm$$

$$\lambda = vT \Rightarrow 20 = 10 \times T \Rightarrow T = 2s$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

آنگاه داریم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{rad}{s}$$

چون $1s$ معادل با $\frac{T}{2}$ است، با توجه به جهت انتشار موج، نتیجه می‌شود که در این مدت ذرهٔ M از موضع تعادل به مکان $y = +2cm$ رفته و سپس از مکان $y = +2cm$ به موضع تعادل $(y = 0)$ می‌رسد.

از طرفی می‌دانیم تندی نوسان ذرات در موضع تعادل بیشینه است. داریم:

$$v_{max} = A\omega \xrightarrow[\omega=\pi \frac{rad}{s}]{A=0/02m} v_{max} = 0/02\pi \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۲ و ۷۳)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(میثم رشتیان)*

با اتصال یک طناب مشابه به طناب قبلی، طول طناب ۲ برابر گشته و جرم آن نیز ۲ برابر خواهد شد. پس چون نیروی کشش نیز مشابه حالت قبل است پس بر اساس رابطهٔ $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$، تندی انتشار تپ موج عرضی در طناب ثابت می‌ماند.

از طرفی طبق رابطهٔ $\Delta x = v\Delta t$، با ثابت ماندن v و دو برابر شدن Δx (به دلیل دو برابر شدن طول طناب) زمان لازم برای طی کردن کل طول طناب نیز دو برابر خواهد شد.

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۴)

۹۷- **گزینهٔ «۲»** *(بابک اسلامی)*

ابتدا تندی انتشار موج در این سیم را محاسبه می‌کنیم:

$$v = \lambda f \xrightarrow[f=625Hz]{\lambda=40cm=0/4m} v = 0/4 \times 625 = 250 \frac{m}{s}$$

حال با استفاده از رابطهٔ تندی امواج عرضی در یک سیم کشیده شده، می‌توان نوشت:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{AL}=\frac{\mu}{A}} v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

$$\Rightarrow 250 = \sqrt{\frac{225}{\rho \times 0/4 \times 10^{-6}}} \Rightarrow \rho = 9000 \frac{kg}{m^3} = 9 \frac{g}{cm^3}$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴)

۹۸- **گزینهٔ «۴»** *(پوریا علاقه‌مند)*

به این دلیل غلط است چون کف دست باید میدان مغناطیسی و چهار انگشت میدان الکتریکی را نشان دهد.

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۹۹- **گزینهٔ «۴»** *(بهنام رستمی)*

با توجه به طیف امواج الکترومغناطیسی و امواج رادیویی، در بین امواج رادیویی FM، AM و ELF، بیشترین بسامد مربوط به موج FM و بیشترین طول‌موج مربوط به موج ELF است.

$$f_{(FM)} > f_{(AM)} > f_{(ELF)}$$ بسامد

$$\lambda_{(FM)} < \lambda_{(AM)} < \lambda_{(ELF)}$$ طول‌موج

بنابراین باند AM نسبت به باند FM، بسامد کمتر و نسبت به باند ELF طول موج کمتری دارد.

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۱۰۰- **گزینهٔ «۲»** *(بابک اسلامی)*

امواج اولیه از نوع امواج طولی هستند و تندی آن‌ها نسبت به امواج ثانویه که از نوع امواج عرضی هستند، بیشتر است. فاصلهٔ محل وقوع زمین‌لرزه تا لرزه‌نگار برابر است با:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_S} - \frac{\Delta x}{v_P} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_S v_P}{v_P - v_S} \Delta t$$

(فیزیک ۳ - نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۳ – موازی

۱۰۱- **گزینهٔ «۳»** (محمد اسدی)

$$v=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{13-(-5)}{5-2}=6\frac{m}{s}$$

$$x=vt+x_0 \xrightarrow[t=4s]{v=6\frac{m}{s}} x-x_0=6\times4=24m$$

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

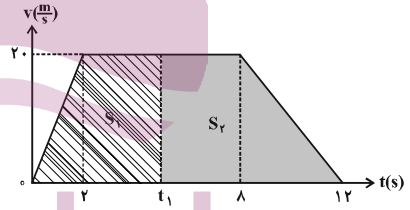
۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** (غلامرضا محبی)

اگر t_1 مدت زمان لازم برای پیمودن نیمهٔ اول مسیر و t_2 مدت زمان لازم برای پیمودن نیمهٔ دیگر مسیر باشد، داریم:

$$\Delta x_1=\Delta x_2 \Rightarrow S_1=S_2 \Rightarrow \frac{(t_1+t_1-2)\times20}{2}=\frac{(12-t_1+8-t_1)\times20}{2}$$

$$\Rightarrow t_1=5/5s$$

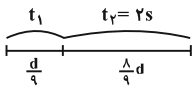
$$t_2=12-5/5=6/5s \Rightarrow t_2-t_1=6/5-5/5=1s$$



(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۰۳- **گزینهٔ «۲»** (حسین ناصحی)

باید توجه داشت جابه‌جایی قسمت آخر را نباید با قسمت اول مقایسه کرد زیرا سرعت اولیه مرحله آخر با مرحله اول که $v_0=0$ است، برابر نیست، ولی سرعت اولیه برای مرحلهٔ اول و کل مسیر با هم برابر است.



$$\text{قسمت اول}: \Delta x_1=\frac{1}{2}at_1^2+v_0t_1 \Rightarrow \frac{d}{9}=\frac{1}{2}at_1^2 \quad (1)$$

$$\text{کل مسیر}: \Delta x_{\text{کل}}=\frac{1}{2}a(t_1+t_2)^2+v_0(t_1+t_2)$$

$$\Rightarrow d=\frac{1}{2}a(t_1+t_2)^2 \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{1}{9}=\frac{t_1^2}{(t_1+t_2)^2} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{t_1}{t_1+t_2} \Rightarrow t_1+t_2=3t_1$$

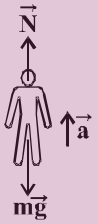
$$\Rightarrow t_2=2t_1 \xrightarrow{t_2=2s} t_1=1s$$

$$\Delta x_{\text{کل}}=\frac{1}{2}(4)(1+2)^2=18m$$

(فیزیک ۳ – حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۰۴- **گزینهٔ «۳»** (معصومه علیزاده)

هر حرکتی که از حال سکون شروع شود، بردار شتاب با بردار سرعت جسم هم‌جهت است، لذا جهت شتاب وارد بر شخص در جهت سرعت آن و به سمت بالا خواهد بود و می‌توان نوشت:



$$N-mg=ma \Rightarrow N=m(g+a)$$

$$=50(10+2)=600N$$

(فیزیک ۳ – دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۹)

۱۰۵- **گزینهٔ «۴»** (احسان کرمی)

با استفاده از رابطه نیروی فنر داریم:

$$F=k(\ell-\ell_0) \Rightarrow \Delta F=k(\ell_2-\ell_1)$$

$$\Rightarrow (m_2-m_1)g=k(\ell_2-\ell_1)$$

$$\Rightarrow (5/7-5/5)\times10=k(204-200)\times10^{-2}$$

$$\Rightarrow 2=4\times10^{-2}k \Rightarrow k=50\frac{N}{m}$$

برای طول اولیهٔ فنر داریم:

$$F=k(\ell-\ell_\circ) \Rightarrow 5/5\times10=50(2-\ell_\circ) \Rightarrow \ell_\circ=0/9m$$

(فیزیک ۳ – دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۴۴)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۰۶- **گزینهٔ «۳»** *(سراسری ریاضی- ۸۷)*

با استفاده از رابطه‌های اندازهٔ تکانه و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} p = mv \Rightarrow v = \dfrac{p}{m} \\ K = \dfrac{1}{2}mv^2 \Rightarrow K = \dfrac{p^2}{2m} \end{cases}$$

$$\frac{K_A}{K_B} = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^2 \times \frac{m_B}{m_A} \xrightarrow[m_A=2m_B]{p_A=p_B} \frac{K_A}{K_B} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(فیزیک ۳ – دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱۰۷- **گزینهٔ «۱»** *(خرشید رسولی)*

نیروی مرکزگرای لازم برای آن‌که سکه روی صفحهٔ گردان ساکن بماند و با آن دوران کند، نیروی اصطکاک ایستایی بین سکه و صفحه است. چون شتاب مرکزگرای دوران ماکزیمم است، بنابراین سکه در آستانهٔ لغزش روی صفحهٔ گردان قرار دارد.

$$F = f_{s\max} \Rightarrow ma = \mu_s mg \Rightarrow a = \mu_s g \Rightarrow 3 = \mu_s \times 10$$

$$\Rightarrow \mu_s = 0/3$$

(فیزیک ۳ – دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۱۰۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیر محمودی‌انزابی)*

در حرکت هماهنگ سادهٔ یک نوسانگر، رابطهٔ بین شتاب و بُعد نوسانگر به‌صورت $a = -\omega^2 x$ می‌باشد که نمودار آن خط راستی با شیب منفی است که از مبدأ مختصات می‌گذرد و اندازهٔ شیب آن برابر با ω^2 است. با توجه به شکل سؤال داریم:

$$a = -\omega^2 x \xrightarrow[x=-1/5(cm)]{a=13/5\pi^2(\frac{m}{s^2})} 13/5\pi^2 = -\omega^2(-1/5\times10^{-2})$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 900\pi^2 \Rightarrow \omega = 30\pi(\frac{rad}{s})$$

با توجه به رابطهٔ بسامد زاویه‌ای با بسامد نوسان داریم:

$$\omega = 2\pi f \xrightarrow{\omega=30\pi\frac{rad}{s}} 30\pi = 2\pi f \Rightarrow f = 15Hz$$

(فیزیک ۳ – نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۱۰۹- **گزینهٔ «۳»** *(بهادر کامران)*

در مرکز نوسان، سرعت نوسانگر بیشینه و در نتیجه انرژی جنبشی آن نیز بیشینه و برابر با انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده است، پس:

$$K_{max} = E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Rightarrow \frac{(K_{max})_2}{(K_{max})_1} = \frac{k_2}{k_1} \times (\frac{A_2}{A_1})^2 \xrightarrow[A_2=A_1]{k_2=k_1} \frac{(K_{max})_2}{(K_{max})_1} = 1$$

برای سرعت نوسانگرها در مرکز نوسان، داریم:

$$v_{max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{(v_{max})_2}{(v_{max})_1} = \frac{A_2}{A_1} \times \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \times \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(v_{max})_2}{(v_{max})_1} = 1\times1\times\sqrt{\frac{m_1}{4m_1}} \Rightarrow \frac{(v_{max})_2}{(v_{max})_1} = \frac{1}{2}$$

(فیزیک ۳ – نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(بهادر کامران)*

اگر در مدت t، آونگ ساده‌ای n نوسان کم‌دامنه انجام دهد، دورهٔ نوسان‌های آن برابر است با:

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow{t_1=t_2} \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1)$$

از طرفی با استفاده از رابطهٔ دورهٔ نوسان‌های کم‌دامنهٔ یک آونگ ساده داریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \quad (2)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \xrightarrow[n_2=5]{n_1=4} \frac{4}{5} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = \frac{16}{25}$$

درصد تغییرات طول آونگ: $\frac{\Delta l}{l_1}\times100 = (\frac{l_2}{l_1}-1)\times100$

$$= (\frac{16}{25}-1)\times100 = -36\,\%$$

(فیزیک ۳ – نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فیزیک ۲

۱۱۱- **گزینهٔ «۲»** (حسین مخرومی)

چون در سری الکتریسیتهٔ مالشی، ابریشم پایین‌تر از شیشه قرار دارد، بار الکتریکی پارچهٔ ابریشمی منفی است.

$$q = ne \Rightarrow -8\times10^{-9} = n\times(-1/6\times10^{-19})$$

$$\Rightarrow n = \frac{8\times10^{-9}}{1/6\times10^{-19}} = 5\times10^{10}$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۳ تا ۵)

۱۱۲- **گزینهٔ «۲»** (مسعود قره‌خانی)

ابتدا در حالت اول نیروی وارد بر بار $2q$ که در نقطهٔ B قرار دارد را محاسبه می‌کنیم:

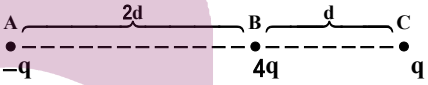
$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$$F_{AB} = k\frac{|q|\times|2q|}{4d^2} = \frac{2k|q|^2}{4d^2}$$

$$F_{CB} = k\frac{|q|\times|2q|}{d^2} = \frac{2k|q|^2}{d^2}$$

$$\vec{F}_{CB} \xleftarrow{B} \vec{F}_{AB} \Rightarrow F_1 = \frac{2k|q|^2}{d^2} - \frac{k|q|^2}{2d^2} = \frac{3k|q|^2}{2d^2}$$

در حالت دوم از بار نقطه‌ای موجود در نقطهٔ B الکترون می‌گیریم (به اندازهٔ $2q$) و آن‌را به بار موجود در نقطهٔ A می‌دهیم. حال داریم:



$$F'_{AB} = k\frac{|q|\times4|q|}{4d^2} = \frac{4k|q|^2}{4d^2} = \frac{k|q|^2}{d^2}$$

$$F'_{CB} = k\frac{|q|\times4|q|}{d^2} = \frac{4k|q|^2}{d^2}$$

$\vec{F}'_{CB}$ $\vec{F}'_{AB}$ B

$$F_2 = \frac{4k|q|^2}{d^2} + \frac{k|q|^2}{d^2} = \frac{5k|q|^2}{d^2}$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{5k|q|^2}{d^2}}{\frac{3k|q|^2}{2d^2}} = \frac{10}{3}$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۵ تا ۱۰)

۱۱۳- **گزینهٔ «۳»** (شارمان ویسی)

با توجه به رابطهٔ بزرگی میدان الکتریکی در اطراف یک بار نقطه‌ای $\left(E = \frac{k|q|}{r^2}\right)$، اگر میدان را در فاصلهٔ ۴ متری E بنامیم، داریم:

$$E = \frac{k|q|}{4^2} = \frac{k|q|}{16} \Rightarrow k|q| = 16E$$

$$E_1 = \frac{k|q|}{3^2} = \frac{k|q|}{9} \Rightarrow E_1 = \frac{16}{9}E$$

$$E_1 - E_2 = 1/75 \Rightarrow \frac{16}{9}E - E = \frac{7}{4} \Rightarrow E = \frac{9}{4}\frac{N}{C}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$E' = \frac{k|q|}{2^2} = \frac{k|q|}{4} = 4E = 4\times\frac{9}{4} = 9\frac{N}{C}$$

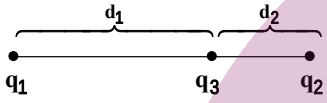
(فیزیک ۲ - الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۱۱۴- **گزینهٔ «۱»** (امیرمسعود ماهی‌مرادی)

با استفاده از نمودار داریم:

$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{|q_1|}{|q_2|} = 9$$

چون دو بار هم‌نام هستند، بار سوم باید بین دو بار و نزدیک به بار با اندازهٔ کوچکتر قرار گیرد تا برایند نیروهای وارد بر آن صفر شود.



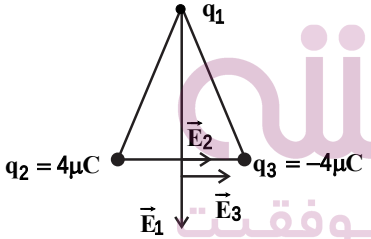
برایند نیروهای وارد بر q_3 صفر است $\Rightarrow \frac{|q_1|}{d_1^2} = \frac{|q_2|}{d_2^2} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = 3$

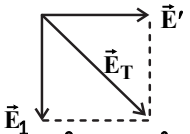
$$\xrightarrow{d_1+d_2=12cm} d_1 = 9cm, d_2 = 3cm$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیته ساکن: صفحه‌های ۵ تا ۱۴)

۱۱۵- **گزینهٔ «۱»** (محمدعلی راست‌پیمان)

بزرگی میدان بار ۴ میکروکولنی و (۴-) میکروکولنی در نقطهٔ H برابر است:





$$E_2 = E_3 = \frac{k|q|}{d^2} = \frac{9\times10^9\times4\times10^{-6}}{(30\times10^{-2})^2} = 4\times10^5\left(\frac{N}{C}\right)$$

$$E' = E_2 + E_3 = 4\times10^5 + 4\times10^5 = 8\times10^5\left(\frac{N}{C}\right)$$

$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E'^2}$$

$$\Rightarrow 10^6 = \sqrt{(8\times10^5)^2 + E_1^2}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\Rightarrow 10^{12}=64\times10^{10}+E_1^2\Rightarrow E_1^2=36\times10^{10}$$

$$\Rightarrow E_1=6\times10^5\left(\frac{N}{C}\right)$$

$$E_1=\frac{k|q_1|}{d^2}\Rightarrow 6\times10^5=\frac{9\times10^9|q_1|}{(30\sqrt{3}\times10^{-2})^2}$$

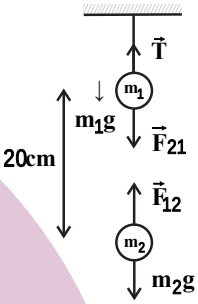
$$6\times10^5=\frac{10^9|q_1|}{3\times10^{-2}}\Rightarrow|q_1|=\frac{18\times10^3}{10^9}=18\times10^{-6}(C)$$

$$\Rightarrow|q_1|=18\mu C$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

۱۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(عبداله فقه‌زاده)*

دو بار ناهم‌نام هستند و نیروی بین آن‌ها جاذبه است:



$$F_{12}=F_{21}=\frac{k|q_1||q_2|}{r^2}=\frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}\times2\times10^{-6}}{(2\times10^{-1})^2}$$

$$\Rightarrow F=\frac{9\times10^{-3}}{10^{-2}}=0/9N$$

برای تعادل بار بالایی داریم

$$T=F_{21}+m_1g$$

$$\Rightarrow 1=0/9+m_1\times10\Rightarrow m_1=\frac{1}{100}kg=10g$$

برای تعادل بار پایینی داریم:

$$F_{12}=m_2g$$

$$\Rightarrow 0/9=m_2\times10\Rightarrow m_2=\frac{9}{100}kg=90g$$

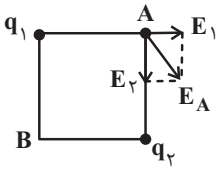
بنابراین:

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{90}{10}=9$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیته ساکن؛ صفحه‌های ۵ تا ۱۰)

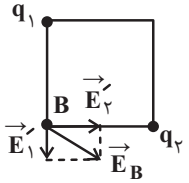
۱۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

با توجه به میدان برایند در نقطهٔ A، میدان‌های حاصل از بارهای q_1 و q_2 مطابق شکل خواهند شد. چون میدان $\vec{E}_1$ از بار q_1 خارج می‌شود، پس q_1 مثبت است. از طرفی $\vec{E}_2$ به بار q_2 داخل می‌شود، پس q_2 منفی است.



از طرفی چون فاصلهٔ بارهای q_1 و q_2 از نقطهٔ A یکسان است و $E_2>E_1$ است، پس $|q_2|>|q_1|$

با توجه به توضیحات بالا، میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_2 در نقطهٔ B و همچنین میدان الکتریکی برایند مطابق شکل زیر خواهد شد.



(فیزیک ۲ - الکتریسیته ساکن؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۹)

۱۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی سلطانی)*

$$K_B=\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}\times2\times10^{-6}\times(\sqrt{2})^2=2\times10^{-6}J$$

$$v_C=3v_B\Rightarrow K_C=9K_B=18\times10^{-6}J$$

$$W_t=\Delta K\Rightarrow W_{f_K}+W_E=\Delta K$$

$$\Rightarrow -4\times10^{-6}+W_E=18\times10^{-6}-2\times10^{-6}$$

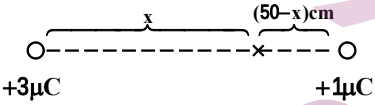
$$\Rightarrow W_E=20\times10^{-6}J$$

$$\Rightarrow \Delta V=\frac{\Delta U}{q}=\frac{-W_E}{q}=\frac{-20\times10^{-6}}{-4\times10^{-6}}=5V=5000mV$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۱۱۹- **گزینهٔ «۲»** *(مجتبی خلیل‌ارجمندی)*

باید نقطه‌ای را بیابیم که پتانسیل قبل از آن در حال کاهش و بعد از آن در حال افزایش است یعنی نقطه روی خط واصل دو بار که میدان در آن صفر است.



$$|E|=|E'|\xrightarrow{E=\frac{k|q|}{r^2}}\Rightarrow\frac{k|3|}{x^2}=\frac{k|1|}{(50-x)^2}$$

$$\Rightarrow x^2=3(50-x)^2\Rightarrow x=\sqrt{3}(50-x)$$

$$\Rightarrow x=\frac{50\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=25(3-\sqrt{3})(cm)$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۲۷)

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

الف) درست

ب) درست

پ) نادرست، پتانسیل الکتریکی تمام نقاط درون جسم رسانای باردار منزوی با هم برابر است، اما الزاماً صفر نیست.

ت) نادرست، در شرایط تعادل الکتروستاتیکی، همهٔ نقاط یک جسم رسانای باردار پتانسیل یکسانی دارند و به شکل جسم بستگی ندارد.

بنابراین، ۲ عبارت درست است.

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۰)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۱

۱۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

طبق متن کتاب درسی، تمام موارد بیان شده درست است. بنابراین گزینهٔ «۴» صحیح می‌باشد.

(فیزیک ۱ - فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

۱۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(سیدعلی میرنوری)*

کمیت‌های برداری، کمیت‌هایی هستند که علاوه بر اندازه و یکا، داری جهت نیز می‌باشند.کمیت‌های شتاب، وزن و سرعت متوسط ازکمیت‌های برداری و کمیت‌های حجم، دما، کار و انرژی جنبشی از کمیت‌های نرده‌ای هستند.

(فیزیک ۱ - فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحهٔ ۶)

۱۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

با توجه به تبدیل واحد زنجیره‌ای داریم:

$$4\times10^{10}\mu J\times\frac{10^{-6}\,J}{1\mu J}=4\times10^{4}\,J$$

از طرفی می‌دانیم که $J=kg\frac{m^2}{s^2}$ است، پس داریم:

$$4\times10^{4}\,kg\frac{m^2}{s^2}\times\frac{1mm^2}{10^{-6}m^2}\times\frac{10^{-12}s^2}{1\mu s^2}=4\times10^{-2}\,kg\frac{mm^2}{\mu s^2}$$

اکنون یکای گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$4\times10^{-2}kg\times\frac{10^{3}g}{1kg}\times\frac{1\mu g}{10^{-6}g}=4\times10^{7}\mu g$$

$$4\times10^{-2}kg\times\frac{10^{3}g}{1kg}\times\frac{1mg}{10^{-3}g}=4\times10^{4}mg$$

$$4\times10^{-2}kg\times\frac{10^{3}g}{1kg}=40g$$

$$4\times10^{-2}kg=0/04kg$$

(فیزیک ۱ - فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی واثقی)*

$$\Delta F=\frac{9}{5}\Delta\theta\Rightarrow\Delta F=\frac{9}{5}(1°C)=\frac{9}{5}°F\Rightarrow1°C=\frac{9}{5}°F$$

$$\alpha=1/8\times10^{-5}\frac{1}{°C}\times\frac{1°C}{\frac{9}{5}°F}=10^{-5}\frac{1}{°F}$$

(فیزیک ۱ - فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(غلامرضا محبی)*

خطای مشاهده، ناشی از اختلاف منظر، در خواندن و گزارش نتیجهٔ اندازه‌گیری تأثیر مهمی دارد. در این شکل شخصی که از منظر (۲) (یعنی آزمایشگر شماره (۲)) نتیجهٔ اندازه‌گیری را می‌خواند، دقت بالاتری را دارد.

(فیزیک ۱ - فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۲ و ۱۳)

۱۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(شارمان ویسی)*

دو کمیت فیزیکی را زمانی می‌توان با یکدیگر جمع کرد که از یک جنس باشند. در این حالت حاصل جمع دو کمیت نیز از همان جنس خواهد شد. داریم:

$$[A]=W=\frac{J}{s}=\frac{N.m}{s}=\frac{kg\frac{m}{s^2}m}{s}=\frac{kg.m^2}{s^3}\qquad(*)$$

$$[A]=\frac{[B][C]^2}{[D]^3}\qquad(**)$$

$$\xrightarrow{(*)(**)}[B]=kg\,,\,[C]=m\,,\,[D]=s$$

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۷ تا ۱۱)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(پژمان بردبار)*

ابتدا حجم ظرف را بر حسب سانتی‌متر مکعب به‌دست می‌آوریم:

$$V = 2/540L = 2/540L \times \frac{10^3 cm^3}{1L} = 2540cm^3$$

سپس ارتفاع ظرف را بر حسب سانتی‌متر محاسبه می‌کنیم:

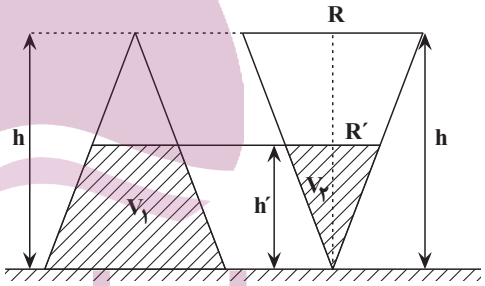
$$V = Ah \Rightarrow 2540 = 200 \times h \Rightarrow h = 12/7cm$$

حال ارتفاع ظرف را بر حسب اینچ محاسبه می‌کنیم:

$$12/7cm = 12/7cm \times \frac{1inch}{2/54cm} = 5inch$$

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۱۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین برادران)*



ابتدا حجم V_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{R'}{R} = \frac{h'}{h} \Rightarrow \xrightarrow{h'=\frac{h}{2}} R' = \frac{R}{2}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R'^2 h' \xrightarrow{R'=\frac{R}{2},\, h'=\frac{h}{2}} V_2 = \frac{1}{3}\pi(\frac{R}{2})^2 \times \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{1}{24}\pi R^2 h$$

چون هر دو مخروط تا نصف ارتفاع آن‌ها پر می‌شوند، بنابراین:

$$V_1 + V_2 = V \xrightarrow{V=\frac{1}{3}\pi R^2 h} V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{24}\pi R^2 h$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{7}{24}\pi R^2 h$$

$$x\frac{dm^3}{min} = x\frac{10^{-3}}{60}\frac{m^3}{s} = \frac{100}{6}x\frac{cm^3}{s}$$

$$t_2 = t_1 \Rightarrow \frac{V_2}{\frac{100}{6}x} = \frac{V_1}{35} \xrightarrow[V_2]{V_1=\frac{7}{24}\pi R^2 h} \frac{\frac{1}{24}\pi R^2 h}{\frac{100x}{6}}$$

$$= \frac{\frac{7}{24}\pi R^2 h}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{100x} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 0/3\frac{dm^3}{min}$$

(فیزیک ۱، فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا به روش زنجیره‌ای ۱۰ سیر را به مثقال تبدیل می‌کنیم، سپس جرم را برحسب گرم به‌دست می‌آوریم:

$$10\text{سیر} \times \frac{640\text{مثقال}}{40\text{سیر}} = 160\text{مثقال}$$

$$\text{جرم جسم} = 160 - 60 = 100\text{مثقال}$$

$$100\text{مثقال} \times \frac{4/6g}{1\text{مثقال}} = 460g$$

(فیزیک ۱، فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۱۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا گونه)*

این ترازو تا سه رقم اعشار را محاسبه کرده است. پس دقت اندازه‌گیری آن $0/001kg$ است. به عبارت دیگر داریم:

$$\text{دقت} = 0/001kg = 10^{-3} \times 10^3 g = 1g$$

(فیزیک ۱، فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

فیزیک ۲

۱۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(حسین مفروضی)*

تعداد الکترون‌ها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$n=\frac{\text{جرم یک قطره}}{\text{جرم یک مولکول آب}}=\frac{۴\times۱۰^{-۳}\,kg}{۳/۲\times۱۰^{-۲۶}\,kg}=\frac{۴}{۳/۲}\times۱۰^{۲۳}$$

$$|q|=ne=\frac{۴}{۳/۲}\times۱۰^{۲۳}\times(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})=۲\times۱۰^{۴}\,C$$

$$\Rightarrow q=-۲\times۱۰^{۴}\,C$$

(فیزیک ۲ - الکتریسیته ساکن: صفحه‌های ۳ تا ۵)

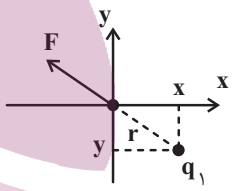
۱۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(احسان محمدی)*

ابتدا به کمک اندازهٔ نیرو، فاصلهٔ دو بار را محاسبه می‌کنیم:

$$|F|=\sqrt{(۷/۲)^{۲}+(۵/۴)^{۲}}=۹N$$

$$F=۹۰\frac{|q_۱||q_۲|}{r^{۲}}\Rightarrow ۹=\frac{۹۰\times۲\times۵}{r^{۲}}\Rightarrow r^{۲}=۱۰۰\Rightarrow r=۱۰cm$$

از سویی با توجه به اینکه نیرو در راستای خط واصل دو بار است، پس محل بار $q_۱$ در ربع چهارم می‌باشد و داریم:



$$|x|=۰/۸r\Rightarrow|x|=۸cm\Rightarrow x=+۸$$

$$|y|=۰/۶r\Rightarrow|y|=۶cm\Rightarrow y=-۶$$

بنابراین: $x+y=۲$

(فیزیک ۲ – الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۵ تا ۱۰)

۱۳۳- **گزینهٔ «۳»** *(محسن قندچلر)*

محدودیتی که وجود دارد این است که بار q باید مضرب صحیحی از e باشد.

$$E=\frac{k|q|}{r^{۲}}\xrightarrow{|q|=ne}E=\frac{kne}{r^{۲}}$$

$$\Rightarrow n=\frac{Er^{۲}}{ke}=\frac{E\times(۳۶\times۱۰^{-۴})}{۹\times۱۰^{۹}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}\Rightarrow n=\frac{۱}{۴}\times۱۰^{۷}E$$

در بین گزینه‌ها، فقط به ازای $E=۴\times۱۰^{-۷}\frac{N}{C}$ ، مقدار n عدد صحیح می‌شود.

(فیزیک ۲ – الکتریسیته ساکن: صفحه‌های ۳ تا ۵ و ۱۰ تا ۱۴)

۱۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

برای اینکه بار سوم در مبدأ مختصات در حال تعادل قرار گیرد، باید برایند میدان‌های حاصل از $q_۱$ و $q_۲$ در مبدأ برابر صفر باشد:

$$E_۱=E_۲\Rightarrow\frac{|q_۱|}{x_۱^{۲}}=\frac{|q_۲|}{x_۲^{۲}}\Rightarrow\frac{۵}{۴}=\frac{۲۰}{x_۲^{۲}}\Rightarrow x_۲=۴cm$$

حال فرض می‌کنیم با قرار دادن بار $q_۳$ در مبدأ، بار $q_۱$ به حال تعادل درآید. پس داریم:

$$E'_۲=E'_۳\Rightarrow\frac{|q_۲|}{(۴+۲)^{۲}}=\frac{|q_۳|}{۲^{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{۲۰}{۳۶}=\frac{|q_۳|}{۴}\Rightarrow|q_۳|=\frac{۲۰}{۹}\mu C$$

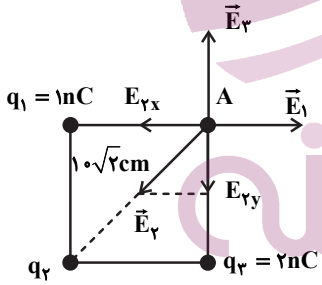
چون وقتی دو بار غیر هم‌علامت باشند، نقطه‌ای که میدان برایند صفر است خارج از فاصلهٔ دو بار است، پس بار $q_۳$ منفی است.

$$q_۳=-\frac{۲۰}{۹}\mu C$$

(فیزیک ۲ – الکتریسیته ساکن: صفحه‌های ۵ تا ۱۷)

۱۳۵- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار $q_۱$ و $q_۳$ را در رأس A محاسبه می‌کنیم.



$$E=k\frac{|q|}{r^{۲}}\Rightarrow E_۱=۹\times۱۰^{۹}\times\frac{۱\times۱۰^{-۹}}{۱۰^{-۲}}=۹۰۰\frac{N}{C}$$

$$E_۳=۹\times۱۰^{۹}\times\frac{۲\times۱۰^{-۹}}{۱۰^{-۲}}=۱۸۰۰\frac{N}{C}$$

با توجه به اینکه میدان الکتریکی از بار مثبت خارج می‌شود، پس جهت میدان‌های الکتریکی $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۳$ به‌ترتیب در جهت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ خواهد شد. پس با توجه به جهت میدان خالص خواهیم داشت:

$$\vec{E}_t=\vec{E}_۱+\vec{E}_۲+\vec{E}_۳$$

$$\Rightarrow ۹۰۰[(۱-\sqrt{۲})\vec{i}+(۲-\sqrt{۲})\vec{j}]=۹۰۰\vec{i}+\vec{E}_۲+۱۸۰۰\vec{j}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = 900\sqrt{2}(-\vec{i}-\vec{j})\frac{N}{C}$$

$$\Rightarrow E_2 = 900\sqrt{2}(\sqrt{1^2+1^2})$$

$$\Rightarrow E_2 = 1800\frac{N}{C}$$

در نتیجه داریم:

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow 1800 = 9\times10^9 \times \frac{|q_2|\times10^{-9}}{2\times10^{-2}}$$

$$\Rightarrow |q_2| = 4nC \Rightarrow q_2 = -4nC$$

(فیزیک ۲ – الکتریسیته ساکن؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۱۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(سیدعلی میرنوری)*

به کره دو نیرو، یکی وزن و دیگری نیروی الکتریکی ناشی از میدان الکتریکی وارد می‌شود. یعنی:

$$F_E = E|q| = 0/1\times10^6 \times10\times10^{-6} = 1N$$

$$F_g = mg = 100\times10^{-3}\times10 = 1N$$

از طرفی نیروی برایند وارد بر کره به صورت زیر است:

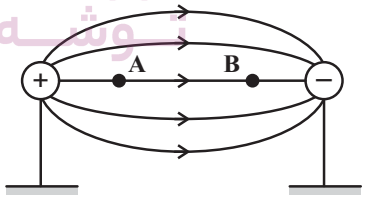
$$F_t = \sqrt{F_E^2+F_g^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}N$$

$$a = \frac{F_t}{m} = \frac{\sqrt{2}}{0/1} \Rightarrow a = 10\sqrt{2}\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۲ – الکتریسیته ساکن؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۱۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(پوریا علاقمند)*

با حرکت از A به سمت نقطهٔ B، فاصلهٔ خطوط میدان الکتریکی ابتدا زیاد شده و سپس فاصلهٔ خطوط کم می‌شود. یعنی اندازه میدان ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. از طرفی چون در جهت میدان حرکت می‌کنیم، پتانسیل الکتریکی همواره کاهش می‌یابد.



(فیزیک ۲ – الکتریسیته ساکن؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۷)

۱۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(احسان محمدی)*

اندازهٔ اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$\Delta V = \left|\frac{\Delta U}{q}\right| = \left|\frac{12\times10^{-6}}{2\times10^{-6}}\right| = 6V$$

و چون میدان الکتریکی اطراف کرهٔ باردار با بار منفی، به سوی کره است، پس پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A از B بیشتر است.

(فیزیک ۲ – الکتریسیته ساکن؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۷)

۱۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

هرگاه ذره‌ای باردار، درون میدان الکتریکی یکنواختی معلق بماند، نیروی وزن ذره به سمت پایین است، بنابراین نیروی الکتریکی وارد بر ذره به سمت بالاست. داریم:

$$F_E = W \Rightarrow |q|E = mg \Rightarrow E = \frac{mg}{|q|} = \frac{80\times10^{-3}\times10}{8\times10^{-4}}$$

$$\Rightarrow E = 10^3\frac{N}{C}$$

چون بار ذره مثبت است و نیروی الکتریکی به سمت بالاست، در نتیجه جهت میدان الکتریکی طبق رابطهٔ $\vec{F}_E = q\vec{E}$ به سمت بالاست و صفحهٔ پایینی مثبت است و صفحه بالایی منفی می‌باشد یعنی پایانهٔ A به قطب منفی متصل است.

برای محاسبه اختلاف پتانسیل باتری داریم:

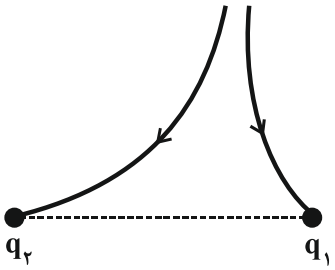
$$|\Delta V| = Ed = 1000\times\frac{2}{100} = 20V$$

(فیزیک ۲ – الکتریسیته ساکن؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۷)

۱۴۰- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کیانی)*

با توجه به شکل زیر، چون خط‌های میدان الکتریکی هر یک از بارها به‌طرف بار الکتریکی است، لذا هر دو بار منفی‌اند. از طرف دیگر، چون خطوط میدان الکتریکی بار q_2، خطوط میدان بار q_1 را رانده است، بنابراین $|q_2|>|q_1|$ است، در نتیجه $|\frac{q_1}{q_2}|<1$ می‌باشد.

دقت کنید، خط‌های میدان الکتریکی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن، صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

ایران زوشه
توشه ای برای موفقیت

شیمی ۳

۱۴۱- **گزینهٔ «۴»** (حمید زیبی)

جرم خاک رُس اولیه را ۱۰۰ گرم در نظر می‌گیریم، پس:

$$m_{SiO_2} = 56g \ , \ m_{H_2O} = 14g$$

حال فرض می‌کنیم مقدار x گرم آب وارد خاک رس شده است:

$$m_{\text{خاک‌رُس}} = (100+x)g, m_{SiO_2} = 56g \ , \ m_{\text{آب}} = (14+x)g$$

$$28 = \frac{56}{100+x} \times 100 \Rightarrow x = 100$$

$$\text{درصد جرمی آب} = \frac{14+100}{100+100} \times 100 = \%57$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۱۴۲- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا پورجاوید)

الماس برخلاف گرافیت ساختاری لایه لایه ندارد و در هنگام تشکیل آن از گرافیت، به خاطر تشکیل پیوندهای جدید $C-C$، اتم‌های کربن به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

الماس برخلاف گرافیت دارای فاصلهٔ بین لایه‌ای نیست. بنابراین چگالی بیشتری داشته و در حجم یکسان جرم بیشتری نیز دارد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)

۱۴۳- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین طیبی)

موارد اول و دوم درست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: فراوان‌ترین اکسید در پوستهٔ جامد زمین سیلیس (SiO_2) است که کوارتز از جمله نمونه های خالص آن است.

مورد دوم: مقایسهٔ الماس و گرافیت هم از نظر سختی و هم از نظر چگالی به صورت: گرافیت < الماس است.

مورد سوم: نادرست، در هر حلقهٔ سیلیس اتم‌های Si در رئوس اضلاع قرار دارند نه وسط اضلاع!

مورد چهارم: نادرست، فقط C_2H_5OH و HCN ترکیب مولکولی می‌باشند؛ Al_2O_3 و Fe_2O_3 ترکیب یونی و SiO_2 ترکیب کووالانسی می‌باشند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۳)

۱۴۴- **گزینهٔ «۲»** (علی طرفی)

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست، یخ و سیلیس ظاهری مشابه به هم دارند ولی سختی یخ کمتر است.

ب) نادرست، ذره‌های سازنده در یخ به صورت مولکول‌های جداگانه است، اما ساختار سیلیس به صورت جامد کووالانسی می‌باشد و ذره‌های سازندهٔ آن اتم‌ها هستند.

پ) نادرست، گرافن دو بعدی ولی یخ سه بعدی است.

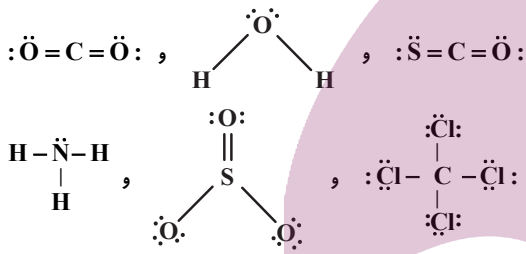
ت) درست، در ساختار یخ، هر اتم اکسیژن با دو اتم هیدروژن از طریق پیوند اشتراکی و با دو اتم هیدروژن دیگر با پیوند هیدروژنی متصل است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۲)

۱۴۵- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین طیبی)

مولکول‌هایی که خطی هستند: کربن‌دی‌اکسید و کربونیل سولفید

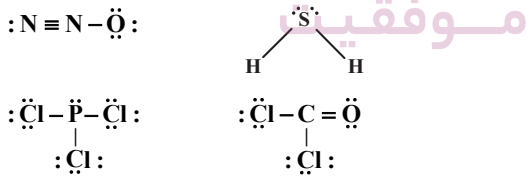
مولکول‌هایی که اتم مرکزی آن‌ها در نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی آبی رنگ است، کربونیل سولفید، کربن‌دی‌اکسید، گوگرد تری‌اکسید، کربن تتراکلرید»



(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۱۴۶- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا پورجاوید)

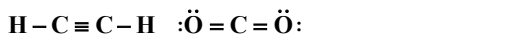
ساختار لوویس گونه‌های داده شده به صورت زیر است که در بین آن‌ها H_2S تنها مولکولی است که اتم مرکزی آن دارای بار جزئی منفی است:



(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۱۴۷- **گزینهٔ «۳»** (حمید زیبی)

شکل هندسی اتین و کربن دی‌اکسید خطی است.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

در هر دو مولکول SO_2 و SO_3، تراکم الکترون اطراف اتم S کمتر است.

مولکول SO_3 ناقطبی ولی SCO قطبی است.

کلروفرم قطبی است ولی کربن تتراکلرید ناقطبی است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۱۴۸- **گزینهٔ «۳»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

مولکول‌های کربونیل سولفید (SCO)، اوزون (O_3) و گوگرددی‌اکسید (SO_2) قطبی هستند و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۴ و ۷۵)

۱۴۹- **گزینهٔ «۱»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

تنها عبارت سوم صحیح است.

* مولکول C_2H_2 چهار اتمی است و ساختار خطی دارد.

* در مولکول CO_2، تراکم بار اطراف اتم اکسیژن بیشتر است.

* نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول‌های آمونیاک و SO_3 متفاوت است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۱۵۰- **گزینهٔ «۲»** *(علی‌رضا کیانی‌دوست)*

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت دوم نادرست است. زیرا همچنان اتم مرکزی کربن خصلت نافلزی کمتری دارد و در نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی رنگ آبی را دارد.

عبارت سوم نادرست است. سیلیس خالص خواص نوری ویژه‌ای دارد.

عبارت پنجم نادرست است. SiO_2 یک جامد کووالانسی است و نیروی بین مولکولی برای آن تعریف نمی‌شود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۵)

شیمی ۳- موازی

۱۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

پاک‌کننده‌های صابونی با آلاینده‌ها واکنش نمی‌دهند. (نادرستی عبارت اول)

نوع جاذبهٔ ذرات چربی با بخش ناقطبی پاک‌کننده از نوع وان‌درووالسی است. (نادرستی عبارت دوم)

مخلوط شکل B کلوئید و ناهمگن بوده که توانایی پخش نور را دارد. (درستی عبارت سوم)

با افزایش غلظت Ca^{2+} و Mg^{2+} قدرت پاک‌کنندگی صابون کاهش می‌یابد. (درستی عبارت چهارم)

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۱۵۲- **گزینهٔ «۲»** *(حمید زیفی)*

غلظت یون‌های محلول (I) برابر ۰/۰۴ مولار است.

$$NaCl(aq) \rightarrow Na^+(aq) + Cl^-(aq)$$

$$0/02\,mol.L^{-1} \quad 0/02\,mol.L^{-1}$$

غلظت یون‌های محلول (II) برابر ۰/۰۳۲ مولار خواهد بود.

$$HCl(aq) \rightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

$$0/016\,mol.L^{-1} \quad 0/016\,mol.L^{-1}$$

در محلول (III):

$$\%\alpha = \frac{[H^+]}{M_{\text{اسید}}} \times 100 \Rightarrow 2 = \frac{[H^+]}{0/6} \times 100$$

$$\Rightarrow [H^+] = [A^-] = 0/012$$

غلظت کل یون‌ها ۰/۰۲۴ مولار خواهد بود.

در محلول (IV)، رسانایی الکتریکی صفر است چون اتانول غیرالکترولیت می‌باشد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۱۵۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$M-x \quad x \quad x$$

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{[HA]} \Rightarrow 25\times10^{-3} = \frac{[H^+]^2}{0/4}$$

$$\Rightarrow [H^+]^2 = 10^{-2} \Rightarrow [H^+] = 10^{-1}\,mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M-x = 0/4 \\ x = 0/1 \end{cases} \Rightarrow M = 0/5 \Rightarrow \alpha_{HA} = \frac{x}{M} = \frac{0/1}{0/5} = 0/2$$

$$\alpha_{HB} = 2\times\alpha_{HA} = 2\times0/2 = 0/4$$

$$HB \rightleftharpoons H^+ + B^- \Rightarrow [H^+] = M.\alpha \Rightarrow x = 0/6\times0/4 = 0/24$$

$$M-x \quad x \quad x$$

مجموع غلظت ذرات یونیده نشده و ذرات حاصل از یونش $= M-x+x+x$

$$= M+x = 0/6+0/24 = 0/84\,\frac{mol}{L}$$

$$n = M\times V \Rightarrow n = 0/84\,\frac{mol}{L}\times5L$$

$$= 4/2mol\times\frac{N_A\ \text{ذره}}{1mol} = 4/2\times N_A$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۴)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

محاسبه $[H^+]$ در محلول (I):

$$M=\frac{n}{V}=\frac{۲۰\times۱۰^{-۳}}{۱}=۲۰\times۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱}$$

$$[H^+]=M.\alpha.n=۲۰\times۱۰^{-۳}\times۱\times۱=۲۰\times۱۰^{-۳}\,\frac{mol}{L}$$

محاسبه $[H^+]$ در محلول (II):

$$n=\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}=\frac{۳/۲}{۲۰}=۱۶\times۱۰^{-۲}\,mol\,HF$$

$$M=\frac{n}{V}=\frac{۱۶\times۱۰^{-۲}}{۲}=۸\times۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}HF$$

$$\Rightarrow [H^+]=M.\alpha=۸\times۱۰^{-۲}\times۰/۱=۸\times۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱}$$

اختلاف $[H^+]$ در این دو محلول $۱۲\times۱۰^{-۳}\,\frac{mol}{L}$ است، در نتیجه $b=۱۲$ خواهد بود.

محاسبه $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در محلول استیک اسید:

$$M=\frac{۱۰\times a\times d}{\text{جرم مولی}}=\frac{۱۰\times۱۲\times۱}{۶۰}=۲mol.L^{-۱}$$

$$[H^+]=M.\alpha=۲\times\frac{۵}{۱۰۰}=۰/۱mol.L^{-۱}$$

$$\Rightarrow [H^+]\times[OH^-]=۱۰^{-۱۴}$$

$$\Rightarrow [OH^-]=\frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۱}}=۱۰^{-۱۳}\,mol.L^{-۱}$$

$$\frac{[OH^-]}{[H^+]}=\frac{۱۰^{-۱۳}}{۱۰^{-۱}}=۱۰^{-۱۲}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۸)

۱۵۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

$$\%\alpha=۰/۴\rightarrow ۰/۴=\alpha\times۱۰۰\Rightarrow\alpha=۴\times۱۰^{-۳}$$

$$[H^+]=۱۰^{-pH}=۱۰^{-۲/۷}=۱۰^{-۳}\times\underbrace{۱۰^{۰/۳}}_{۲}=۲\times۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱}$$

$$[H^+]=M.\alpha.\underbrace{n}_{\text{ظرفیت اسید}}\rightarrow ۲\times۱۰^{-۳}=M\times۴\times۱۰^{-۳}\times۱$$

$$\Rightarrow M=۰/۵\,\frac{mol}{L}$$

$$HA\rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$K_a=\frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha}\rightarrow K_a=\frac{۰/۵\times(۴\times۱۰^{-۳})^۲}{۱-\underbrace{۴\times۱۰^{-۳}}_{\text{صرف نظر می‌کنیم}}}$$

$$\simeq ۸\times۱۰^{-۶}\,\frac{mol}{L}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۱۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیر حاتمیان)*

اگر حجم ۱۰ برابر شده است، لذا غلظت $\frac{۱}{۱۰}$ برابر می‌شود. $M=\frac{n}{V}$

$$n_۱=n_۲\Rightarrow M_۱V_۱=M_۲V_۲\Rightarrow\frac{M_۲}{M_۱}=\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow M_۲=۰/۱M_۱$$

$$M_۱=۱\,\frac{mol}{L}\,,\ M_۲=\frac{۱}{۱۰}\,\frac{mol}{L}$$

$(\alpha_۱)$ درجهٔ تفکیک قبل از اضافه کردن آب $=\frac{[H^+]}{[HA]}=\frac{۱۰^{-۳/۵}}{۱}=۱۰^{-۳/۵}$

$(\alpha_۲)$ درجهٔ تفکیک بعد از اضافه کردن آب $=\frac{[H^+]}{[HA]}=\frac{۱۰^{-۴}}{۰/۱}=۱۰^{-۳}$

$\left(\frac{\alpha_۲}{\alpha_۱}\right)$ نسبت درجهٔ تفکیک‌ها $=\frac{۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۳/۵}}=۱۰^{۰/۵}=۳$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۸)

۱۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمّد عظیمیان‌زواره)*

در جدول پتانسیل کاهشی استاندارد، فلز نقره (Ag)، بالاتر از مس (Cu) قرار داشته و Ag با محلول مس (II) سولفات واکنش نمی‌دهد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۲، ۴۳ و ۴۵ تا ۴۷)

۱۵۸- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا جشانی‌پور)*

باتری‌های قابل شارژ را می‌توان بارها شارژ کرد و نه همهٔ باتری‌ها را.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۹ و ۵۰)

۱۵۹- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود بحفری)*

بجز عبارت پنجم، سایر عبارت‌ها نادرست هستند. در سلول‌های گالوانی، سلولی که در نقش کاتد است، پس از مدتی به علت رسوب اتم‌های فلزی خنثی، دچار افزایش اندازه شده و به اصطلاح چاق می‌شود. با توجه به فرض سؤال، می‌توان موقعیت روبه‌رو را برای فلزهای A، D و G در جدول پتانسیل کاهشی استاندارد عنصری در نظر گرفت.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: با توجه به جدول، نگهداری محلول حاوی یون‌های فلز D در ظرفی از جنس A، موجب واکنش آن با ظرف می‌شود.

$E^\circ(V)$
D
A
G

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

عبارت دوم: در سلول‌های گالوانی، آنیون‌ها به سمت آند و کاتیون‌ها به سمت کاتد حرکت می‌کنند. بنابراین در سلول گالوانی $A-G$ با توجه به جدول، G نقش آند را داشته و آنیون‌ها به سمت تیغهٔ G حرکت خواهند کرد.

عبارت سوم: با توجه به جدول، مقایسهٔ قدرت اکسندگی یون‌های این فلزها به‌صورت $G^{2+} < A^{3+} < D^{+}$ می‌باشد.

عبارت چهارم: رابطهٔ گفته شده بیان می‌دارد که پتانسیل استاندارد کاهشی A قطعاً مثبت است (با توجه به اینکه از یک عدد داخل قدر مطلق، بزرگتر است.) با توجه به بیشتر بودن پتانسیل کاهشی استاندارد D از A، می‌توان گفت که پتانسیل کاهشی D نیز مثبت می‌باشد.

می‌دانیم فلزهایی که E° آن‌ها مثبت است، با مواد اسیدی واکنش نمی‌دهند.

عبارت پنجم: در حالت اول برخلاف حالت دوم فلز A با یون‌های G^{2+} واکنش نمی‌دهد و در نتیجه تغییر دمای محلول هم ملاحظه نخواهد شد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱۶۰- **گزینهٔ «۳»** *(آرمان اکبری)*

واکنش‌های موازنه‌شدهٔ اکسایش – کاهش به‌صورت مقابل است:

$$2Al + 3Zn^{2+} \rightarrow 2Al^{3+} + 3Zn$$
$$Mn + 2Ag^{+} \rightarrow 2Ag + Mn^{2+}$$

در واکنش اول به ازای مصرف هر مول Al، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود، بنابراین و با توجه به ضریب Al که برابر ۲ است، در واکنش اول به ازای هر بار انجام واکنش، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود. در واکنش دوم نیز به ازای مصرف هر مول Mn، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود و با توجه به ضریب Mn که برابر ۱ است، در واکنش دوم به ازای هر بار انجام واکنش، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود.

فرض می‌کنیم در هر دو واکنش x مول الکترون مبادله شده است. در نتیجه میزان افزایش جرم کاتد، که با توجه به E° ها، تیغه روی است را در واکنش اول محاسبه می‌کنیم:

$$x\,mole^{-} \times \frac{3\,mol\,Zn}{6\,mole^{-}} \times \frac{65\,gZn}{1\,mol\,Zn} = \frac{x \times 3 \times 65}{6}$$

$$= 32/5x\,g \Rightarrow \text{میزان افزایش جرم تیغه } Zn$$

حالا در واکنش دوم کاهش جرم آند (تیغه Mn) را محاسبه می‌کنیم:

$$x\,mole^{-} \times \frac{1\,mol\,Mn}{2\,mole^{-}} \times \frac{55\,gMn}{1\,mol\,Mn} = \frac{x \times 55}{2}$$

$$= 27/5x\,g \Rightarrow \text{میزان کاهش جرم تیغه } Mn$$

$$\Rightarrow \text{نسبت خواسته شده} = \frac{32/5x}{27/5x} = \frac{13}{11} \simeq 1/18$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

شیمی ۲

۱۶۱- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

گسترش صنعت خودرو مدیون دسترسی به فولاد بوده است. اما صنعت الکترونیک پیشرفت خود را مدیون نیمه‌رساناها (نه رساناها) می‌باشد.

فولاد زنگ نزن از سنگ معدن استخراج نمی‌شود. بلکه آهن استخراج شده از سنگ معدن پس از فراوری به فولاد زنگ نزن تبدیل می‌شود.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱۶۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

در جدول دوره‌ای عنصرها، معمولاً عنصرهایی با آرایش الکترونی مشابه با یکدیگر هم گروه بوده و در یک ستون جای می‌گیرند.

Ge یک شبه‌فلز بوده و Sn و Pb هردو فلز هستند. به این ترتیب شباهت Sn و Pb به یکدیگر بیشتر از شباهت Ge و Sn است.

خواص فیزیکی شبه فلزها مشابه فلزها بوده و از نظر شیمیایی به نافلزها بیشتر شباهت دارند.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۶ تا ۹)

۱۶۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی)*

عبارت‌های «الف» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) فلوئور در دمای بالاتر از $-200^{\circ}C$ به سرعت با هیدروژن واکنش می‌دهد.

پ) نافلزهای a و b به‌ترتیب فسفر و گوگرد هستند. مطابق قانون دوره‌ای چون فسفر نسبت به گوگرد سمت چپ‌تر قرار گرفته است در نتیجه خصلت نافلزی کمتری دارد و تمایل کمتری برای گرفتن الکترون دارد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۱۶۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین مسلمی)*

عبارت‌های اول، چهارم و پنجم درست هستند.

جدول زیر، عنصر معادل هر نماد فرضی را نشان می‌دهد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گروه / تناوب	۱	۱۴	۱۵	۱۷
۲		T = C	G = N	E = F
۳	X = Na		M = P	R = Cl
۴	Z = K	D = Ge		

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: کربن نافلزی با رسانایی الکتریکی است از طرفی سدیم یک فلز و رسانا است. بنابراین هر دو دارای رسانایی الکتریکی هستند.

عبارت دوم: در عناصر اصلی (عنصرهای دستهٔ s و p) عناصر گروه اول در دستهٔ s و عنصرهای گروه ۱۵ (در دستهٔ p) در آرایش الکترونی خود دارای زیرلایه‌های نیم پر ns^1 یا np^3 هستند.

عبارت سوم: در ترکیب فسفر با سدیم، ترکیب یونی سدیم فسفید (Na_3P) تولید می‌شود. به ازای تولید یک مول جامد یونی داریم:

$N_A \times$ شمار مول نافلز $\times$ |بار آنیون| $\times$ زیروند آنیون = شمار الکترون‌های مبادله شده

$$\Rightarrow ?e^- = 1 \times |-3| \times 1 \times 6/02 \times 10^{23} = 1/806 \times 10^{24}$$

عبارت چهارم: عدد اتمی عنصرهای $(E)F$ و $(D)Ge$ به ترتیب برابر ۹ و ۳۲ در نتیجه $32 - (9-1) = 22$ عنصر بین آن‌ها در جدول تناوبی یافت می‌شود.

با توجه به شکل زیر، پرتوی ناشی از واکنش پتاسیم (Z) و کلر (R) به رنگ بنفش است:

عبارت پنجم: عنصرهای نیتروژن (G) فلوئور (E) و کلر (R) در دما و فشار اتاق به شکل مولکول‌های دو اتمی یافت می‌شوند. عنصرهای فسفر (M) و کربن (T) هر دو دارای بیش از یک آلوتروپ در طبیعت هستند.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

۱۶۵- **گزینهٔ «۲»** (علی‌رضا کیانی‌دوست)

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت دوم نادرست است. کلرید آهن با بار الکتریکی بزرگ‌تر (Fe^{3+}) رسوب قرمز مایل به قهوه‌ای تشکیل می‌دهد.

عبارت سوم نادرست است. زیرا رنگ محلول از آبی به سبز می‌گراید.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۶ تا ۲۱)

۱۶۶- **گزینهٔ «۴»** (محمدرضا پورجاوید)

نتایج حاصل از واکنش‌های داده شده عبارتند از:

واکنش	مقایسهٔ واکنش‌پذیری فلزها
آ	Ni > Pt
ب	Cd > Pb
پ	Pb > Pt
ت	Cd > Ni

به این ترتیب می‌توان در مجموع گفت:

واکنش‌پذیری: $Cd > Ni > Pt, Cd > Pb > Pt$

توجه داشته باشید که با توجه به این واکنش‌ها نمی‌توان مقایسه‌ای بین Ni و Pb انجام داد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۱۶۷- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین طیبی)

واکنش ترمیت:

$$Fe_2O_3 + 2Al \rightarrow 2Fe + Al_2O_3$$

ابتدا جرم Fe_2O_3 موجود در نمونهٔ خالص را محاسبه می‌کنیم:

$$?g\,Fe_2O_3 = 1km\ \text{راه‌آهن} \times \frac{10^3 m}{1km} \times \frac{44/8 g\,Fe}{50 m\ \text{راه‌آهن}} \times \frac{1 mol\,Fe}{56 g\,Fe}$$

$$\times \frac{1 mol\,Fe_2O_3}{2 mol\,Fe} \times \frac{160 g\,Fe_2O_3}{1 mol\,Fe_2O_3} = 1280 g\,Fe_2O_3$$

حال جرم آهن موجود در این نمونه Fe_2O_3 را محاسبه می‌کنیم:

$$?g\,Fe = 1280 g\,Fe_2O_3 \times \frac{1 mol\,Fe_2O_3}{160 g\,Fe_2O_3} \times \frac{2 mol\,Fe}{1 mol\,Fe_2O_3}$$

$$\times \frac{56 g\,Fe}{1 mol\,Fe} = 896 g\,Fe$$

در نهایت درصد جرمی آهن در این نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی آهن} = \frac{\text{جرم آهن}}{\text{جرم نمونه}} \times 100 = \frac{896}{1600} \times 100 = \%56$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶۸- **گزینهٔ «۴»** (حمید زیبی)

$$Na_2SO_3(aq)+2HCl(aq)\rightarrow 2NaCl(aq)+SO_2(g)+H_2O(l)$$

$$?g\,Na_2SO_3=0/5mol\,SO_2\times\frac{1mol\,Na_2SO_3}{1mol\,SO_2}$$

$$\times\frac{126g\,Na_2SO_3}{1mol\,Na_2SO_3}\times\frac{100g\,\text{کل}}{63g\,\text{خالص}}=100g\,Na_2SO_3$$

$$?g\,HCl=0/5mol\,SO_2\times\frac{2mol\,HCl}{1mol\,SO_2}$$

$$\times\frac{36/5g\,HCl}{1mol\,HCl}=36/5g\,HCl$$

$$\text{درصدجرمی}=\frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}}\times100\Rightarrow50=\frac{36/5}{\text{جرم محلول}}\times100$$

$$\Rightarrow\text{جرم محلول}=73g$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

۱۶۹- **گزینهٔ «۳»** (حمید زیبی)

$$I)\,CaC_2+2H_2O\rightarrow Ca(OH)_2+C_2H_2$$

$$II)\,CaO+H_2O\rightarrow Ca(OH)_2$$

$$\text{بازده}=\frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}}\times100\Rightarrow80=\frac{2/08}{m}\times100\Rightarrow m=2/6g$$

$$?g\,CaC_2=2/6g\,C_2H_2\times\frac{1mol\,C_2H_2}{26g\,C_2H_2}\times\frac{1mol\,CaC_2}{1mol\,C_2H_2}$$

$$\times\frac{64g\,CaC_2}{1mol\,CaC_2}=6/4g\,CaC_2$$

$$?g\,H_2O\ (\text{در واکنش اول صرف می‌شود.})=6/4g\,CaC_2$$

$$\times\frac{1mol\,CaC_2}{64g\,CaC_2}\times\frac{2mol\,H_2O}{1mol\,CaC_2}\times\frac{18g\,H_2O}{1mol\,H_2O}=3/6g\,H_2O$$

$$?g\,H_2O\ (\text{در واکنش دوم صرف می‌شود.})=5/4-3/6=1/8g\,H_2O$$

$$?g\,CaO=1/8g\,H_2O\times\frac{1mol\,H_2O}{18g\,H_2O}\times\frac{1mol\,CaO}{1mol\,H_2O}$$

$$\times\frac{56g\,CaO}{1mol\,CaO}=5/6g\,CaO$$

$$\text{درصد جرمی}\ CaC_2=\frac{6/4}{6/4+5/6}\times100\simeq\%53/33$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

۱۷۰- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین طیبی)

پاسخ درست همه پرسش‌ها:

الف) در عنصرهای $_{24}Cr$ تا $_{36}Kr$ (۱۳ عنصر)، زیرلایهٔ d حداقل ٪۵۰ ظرفیت خود را اشغال کرده است.

ب) فرایند تخمیر بی‌هوازی گلوکز:

$$C_6H_{12}O_6\rightarrow 2C_2H_5OH+2CO_2$$

$$?L\,CO_2=1mol\,C_2H_5OH\times\frac{2mol\,CO_2}{2mol\,C_2H_5OH}$$

$$\times\frac{22/4L\,CO_2}{1mol\,CO_2}=22/4\,LCO_2$$

پ) استفاده از روش گیاه پالایی برای فلزات نیکل و روی مقرون به صرفه نیست.

ت) فلزها به دلیل سرعت بسیار پایینی که در بازگشت به طبیعت دارند، جزو منابع تجدیدناپذیر محسوب می‌شوند.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶ و ۲۳ تا ۲۸)

شیمی ۱

۱۷۱- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین مسلمی)

سبک‌ترین ایزوتوپ ساختگی هیدروژن $_1^4H$ و پایدارترین آن‌ها $_1^5H$ است که نسبت شمار نوترون‌ها برابر $\frac{3}{4}$ یا ۰/۷۵ است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۵ و ۶)

۱۷۲- **گزینهٔ «۴»** (احمدرضا جعفری نژاد)

همه عبارت‌ها درست هستند به جز مورد چهارم:

عبارت اول: درست، خواص فیزیکی وابسته به جرم در ایزوتوپ‌های عناصر نابرابرند.

عبارت دوم: درست، فراوان‌ترین (پایدارترین) ایزوتوپ منیزیم، $_{12}^{24}Mg$ که نسبت مجموعه p و e به n در آن ۲ است. این نسبت در $_3^7Li$ برابر ۱/۵ است.

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

عبارت سوم: درست، از کاربردهای رادیوایزوتوپ‌ها می‌توان در پزشکی و کشاورزی اشاره کرد.

عبارت چهارم: نادرست، نیم‌عمر $_{1}^{4}H$ از نیم‌عمر $_{1}^{7}H$ بیشتر است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۵ تا ۸)

۱۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

نخستین عنصری که در واکنشگاه هسته‌ای ساخته شد، عنصر تکنسیم $\left(_{43}^{99}Tc\right)$ است. در هستهٔ این عنصر، ۴۳ پروتون و $99-43=56$ نوترون یافت می‌شود.

$56-43=13$ = اختلاف نوترون و پروتون

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) از ۱۱۸ عنصر جدول تناوبی ۲۶ عنصر ساختگی هستند.

$\frac{26}{118}\times 100\simeq \%22$ = درصد عناصر ساختگی

۳) با افزایش مقدار یون حاوی تکنسیم (Tc) امکان تصویربرداری از این غده فراهم می‌شود.

۴) فراوانی ایزوتوپ $_{92}^{235}U$ در مخلوط طبیعی از اورانیم کمتر از ۰/۷ درصد است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۷ و ۸)

۱۷۴- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

عبارت‌های اول، دوم و سوم نادرست هستند.

عدد اتمی عنصر توصیف شده در عبارت اول به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} n+p=81 \\ n-p=11 \end{cases} \Rightarrow 2n=92 \Rightarrow n=46 \Rightarrow p=35$$

هیدروژن دارای ۵ ایزوتوپ ناپایدار $\left(_{1}^{7}H,_{1}^{6}H,_{1}^{5}H,_{1}^{4}H,_{1}^{3}H\right)$ و ۴ ایزوتوپ ساختگی $\left(_{1}^{7}H,_{1}^{6}H,_{1}^{5}H,_{1}^{4}H\right)$ است که نسبت تعداد آن‌ها به یکدیگر ۱/۲۵ می‌باشد.

لیتیم دارای دو ایزوتوپ طبیعی $_{3}^{6}Li$ و $_{3}^{7}Li$ است که درصد فراوانی آن‌ها به ترتیب ۶ و ۹۴ است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۵ تا ۹)

۱۷۵- **گزینهٔ «۴»** *(پیمان خواجوی‌مجد)*

جرم اتمی میانگین A برابر است با:

$$\overline{A}=\frac{(39\times 25)+(41\times 75)}{100}=40/5$$

با توجه به جرم مولی A_2B_3 داریم:

$$A_2B_3=2(40/5)+3B=177\Rightarrow \overline{B}=32$$

حال داریم: $(y=20-x)$

$$32=\frac{(30x)+(32\times 80)\times(33\times(20-x))}{100}\Rightarrow x=\frac{20}{3}$$

$$y=20-\frac{20}{3}=\frac{40}{3}$$

پس نسبت $\frac{x}{y}$ برابر $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

(شیمی ۱- صفحهٔ ۱۵)

۱۷۶- **گزینهٔ «۴»** *(حمید زبحی)*

مول H_2O را x و مول NO_2 را y در نظر می‌گیریم، پس مول اکسیژن موجود در H_2O برابر x و مول اکسیژن موجود در NO_2 برابر $2y$ خواهد بود.

$$\begin{cases} 18x+46y=56/1 \\ 16x+32y=43/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x+23y=28/05 \xrightarrow{\times 8} 72x+184y=224/4 \\ 8x+16y=21/6 \xrightarrow{\times(-9)} -72x-144y=-194/4 \end{cases}$$

$$40y=30\Rightarrow y=\frac{3}{4}$$

$$x=\frac{6}{5}$$

$$?\,atomN=\frac{3}{4}molNO_2\times\frac{1molN}{1molNO_2}\times\frac{6/02\times10^{23}atomN}{1molN}$$

$$=4/515\times10^{23}atomN$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۱۷۷- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

$$2/4gSO_3\times\frac{1molSO_3}{80gSO_3}\times\frac{4mol\,اتم}{1molSO_3}\times\frac{N_A}{1mol\,اتم}=0/12N_A$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

اکنون تعداد مول به ازای ۱۹/۲ گرم از عنصر X_2 را بدست می‌آوریم.

$$۰/۱۲N_A \text{ مولکول } X_2 \times \frac{1mol}{N_A \text{ مولکول } X_2} = ۰/۱۲mol\, X_2$$

سپس جرم مولی X_2 را بر حسب g/mol محاسبه می‌کنیم:

$$X_2 = \frac{۱۹/۲g}{۰/۱۲mol} = ۱۶۰\frac{g}{mol}$$

$$X = ۸۰\frac{g}{mol}$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۱۷۸- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا پورجاوید)

اگر جرم نمونه‌های گلوکز و اتانول را برابر A گرم در نظر بگیریم، تعداد اتم C گلوکز و H اتانول برابرند با (N_A بیانگر عدد آووگادرو است):

$$Ag\,C_6H_{12}O_6 \times \frac{1mol\,C_6H_{12}O_6}{۱۸۰g\,C_6H_{12}O_6} \times \frac{N_A \text{ مولکول } C_6H_{12}O_6}{1mol\,C_6H_{12}O_6}$$

$$\times \frac{۶atom\,C}{۱\text{مولکول} C_6H_{12}O_6} = \frac{AN_A}{۳۰}atom\,C$$

$$Ag\,C_2H_5OH \times \frac{1mol\,C_2H_5OH}{۴۶g\,C_2H_5OH} \times \frac{۶mol\,H}{1mol\,C_2H_5OH}$$

$$\times \frac{N_A atom\,H}{1mol\,H} = \frac{۳A \times N_A}{۲۳}atom\,H$$

به این ترتیب نسبت مورد نظر عبارت است از:

$$\frac{\frac{A \times N_A}{۳۰}}{\frac{۳A \times N_A}{۲۳}} = \frac{۲۳}{۹۰}$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۱۷۹- **گزینهٔ «۲»** (علی‌رضا گیانی‌دوست)

عبارت اول (آ) درست است. تعداد نوارهای رنگی هلیم (D) بیشتر از هیدروژن (A) است.

عبارت دوم (ب) درست است.

عبارت سوم (پ) نادرست است. عنصری که برای آن در جدول جرم میانگینی ذکر نشده است تکنسیم است که عنصر هم گروه آن منگنز با عدد اتمی ۲۵ است نه عنصر آهن.

عبارت چهارم (ت) نادرست است. $۱۹ = ۵ - ۲۴$ و عدد اتمی ۱۹ برابر عدد اتمی اولین عنصر دورهٔ چهارم $(_{19}K)$ است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۶ تا ۲۳)

۱۸۰- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا پورجاوید)

طیف نشری خطی لیتیم در گسترهٔ مرئی دارای ۴ خط با طول موج رنگی است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

شیمی ۲ (اختیاری)

۱۸۱- **گزینهٔ «۳»** (سیدامیرحسین مرتضوی)

$_{14}X$ همان سیلیسیم است که یک شبه‌فلز به حساب می‌آید. طبق متن کتاب درسی، خواص فیزیکی شبه‌فلزها بیشتر شبیه به فلزها بوده و رفتار شیمیایی آن‌ها مشابه نافلزها می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: سیلیسیم (شبه‌فلز) نسبت به عنصر کربن (نافلز)، رسانایی الکتریکی کمتری دارد.

گزینهٔ «۲»: ابتدا آرایش الکترونی فشرده $_{14}X$ را رسم می‌کنیم.

$$[_{10}Ne]۳s^2\,۳p^2$$

لایهٔ ظرفیت آن دارای ۲ الکترون با $l = ۰$ و ۲ الکترون با $l = ۱$ است.

$$\frac{۲}{۲} = ۱$$

گزینهٔ «۴»: در گروه ۱۴، هر چه از بالا به سمت پایین می‌رویم، خاصیت فلزی افزایش می‌یابد.

(شیمی ۲ - صفحه‌های ۶ تا ۹)

۱۸۲- **گزینهٔ «۴»** (سیدامیرحسین مرتضوی)

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: A می‌تواند متعلق به منیزیم باشد.

گزینهٔ «۲»: در بین A، B و C، عنصر C بزرگ‌ترین شعاع اتمی را دارد اما منیزیم از لحاظ شعاع اتمی در گروه دوم، دومین رتبه را دارد پس C نمی‌تواند باشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

گزینهٔ «۳»: در بین فلزات هر چه شعاع اتمی بیشتر باشد، خاصیت فلزی بیشتر است و در نتیجه تمایل به از دست دادن الکترون در عنصر C بیشتر از A و A بیشتر از B است.

گزینهٔ «۴»: برای عنصر C کمترین عدد اتمی ممکن، مربوط به کلسیم ($_{20}Ca$) می‌شود و اختلاف عدد اتمی Ca با عنصر پایینی خود ($_{38}Sr$)، برابر ۱۸ می‌باشد.

(شیمی ۲ - صفحه‌های ۷ تا ۱۴)

۱۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(عباس هنرجو)*

عبارت‌های (آ) و (ب) درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

پ) طلا با گازهای موجود در هوا کره واکنش نمی‌دهد.

ت) رسوب حاصل از واکنش آهن (II) کلرید با محلول سدیم هیدروکسید، آهن (II) هیدروکسید می‌باشد که سبز رنگ است.

ث) آخرین عنصر واسطهٔ هر دوره که عناصر واسطه دارند، در گروه ۱۲ جدول دوره‌ای جای دارد.

(شیمی ۲ - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ و ۱۹)

۱۸۴- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

عبارت‌های (آ) و (پ) درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) خصلت فلزی $_{35}Br$ از بقیهٔ این عناصر کمتر است.

ت) با افزایش شمار الکترون‌های ظرفیتی در عنصرهای دورهٔ سوم جدول دوره‌ای، شعاع اتمی کاهش و خصلت نافلزی آن‌ها افزایش می‌یابد.

ث) هر چه خصلت فلزی بیشتر باشد، تمایل اتم عنصر فلزی برای تبدیل شدن به کاتیون بیشتر است.

خصلت فلزی: $_{11}Na > _{31}Ga > _{13}Al > _{32}Ge > _{35}Br$

(شیمی ۲ - صفحه‌های ۳، ۴، ۷ تا ۱۳ و ۲۰)

۱۸۵- **گزینهٔ «۳»** *(عباس هنرجو)*

عبارت‌های (آ)، (ب) و (ت) درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت (آ): اتم A عنصر کلر است. $Cl : [_{10}Ne]3s^2 3p^5$

$$\left.\begin{array}{l} \text{مجموع } n \text{ همهٔ الکترون‌های ظرفیتی} = 7\times 3 = 21 \\ \text{مجموع } l \text{ همهٔ الکترون‌های ظرفیتی} = 2(0)+5(1) = 5 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 21+5 = 26$$

عبارت (ب): B عنصر سیلیسیم است که در گروه ۱۴ جدول قرار دارد و یک شبه‌فلز است. عناصر سمت چپ آن فلز هستند.

$$_{14}B : [_{10}Ne]3s^2 3p^2$$

عبارت (پ): عنصر C عنصر $_{13}Al$ می‌باشد. که در گروه ۱۳ و دورهٔ سوم قرار دارد و با نیتروژن هم‌گروه نیست. $_{13}Al : [_{10}Ne]3s^2 3p^1$

عبارت (ت): در دورهٔ سوم جدول دوره‌ای عنصرها، از چپ به راست شعاع اتمی کاهش می‌یابد.

(شیمی ۲ - صفحه‌های ۶ تا ۹ و ۱۲ تا ۱۴)

۱۸۶- **گزینهٔ «۳»** *(یاسر علیشائی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: فلز فعال سدیم می‌تواند به جای M (فلز واسطه) در ترکیب قرار گیرد.

گزینهٔ «۲»: به‌طور کلی ترتیب واکنش‌پذیری فلزات جدول به‌صورت زیر است:

فلزهای واسطه < Al < گروه (۲) < گروه (۱): واکنش‌پذیری

گزینهٔ «۳»: نافلز X نمی‌تواند فلز فعال Na را از ترکیب پایدار آن خارج کند.

گزینهٔ «۴»: واکنش فلزات با نافلزات گروه ۱۷ می‌تواند نمک (ترکیب یونی) تشکیل دهد.

(شیمی ۲ - صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۱۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(هدی بهاری‌پور)*

بررسی عبارت‌ها:

عبارت (آ) نادرست: زیرا فعالیت شیمیایی نقره کمتر از آهن است.

عبارت (ب) درست:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$?\,g\,Fe = 115\,g\,Na \times \frac{40}{100} \times \frac{1\,mol\,Na}{23\,g\,Na} \times \frac{1\,mol\,Fe}{2\,mol\,Na} \times \frac{56\,g\,Fe}{1\,mol\,Fe} = 56\,g\,Fe$$

عبارت (پ) نادرست؛ گلوکز $C_6H_{12}O_6$ اتانول C_2H_5OH

$$\left.\begin{array}{l} \text{درصد جرمی کربن در گلوکز} = \frac{6(12)}{180} \times 100 = \%40 \\ \text{درصد جرمی کربن در اتانول} = \frac{2(12)}{46} \times 100 \simeq \%52 \end{array}\right\} \frac{40}{52} < 1$$

عبارت (ت) درست؛

$$?\,g\,CO_2 = 180\,g\,C_6H_{12}O_6 \times \frac{1\,mol\,C_6H_{12}O_6}{180\,g\,C_6H_{12}O_6} \times \frac{2\,mol\,CO_2}{1\,mol\,C_6H_{12}O_6} \times \frac{44\,g\,CO_2}{1\,mol\,CO_2} \times \frac{50}{100} = 44\,g\,CO_2$$

(شیمی ۲ - صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

۱۸۸- **گزینهٔ «۲»** (رسول عابدینی‌زواره)

$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2$$

$$?\,mol\,\text{فراورده} = 300\,g\,C_6H_{12}O_6 \times \frac{90}{100} \times \frac{1\,mol\,C_6H_{12}O_6}{180\,g\,C_6H_{12}O_6} \times \frac{4\,mol\,\text{فراورده}}{1\,mol\,C_6H_{12}O_6} = 6\,mol\,\text{فراورده}$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow 72 = \frac{x}{6} \times 100$$

$$\Rightarrow x = 4/32\,mol\,\text{فراورده}$$

$$?\,L\,CO_2 = 300\,g\,C_6H_{12}O_6 \times \frac{90}{100} \times \frac{1\,mol\,C_6H_{12}O_6}{180\,g\,C_6H_{12}O_6} \times \frac{2\,mol\,CO_2}{1\,mol\,C_6H_{12}O_6} \times \frac{44\,g\,CO_2}{1\,mol\,CO_2} \times \frac{1\,mL\,CO_2}{1/1\times10^{-3}\,g\,CO_2} \times \frac{1\,L\,CO_2}{1000\,mL\,CO_2} = 120\,L\,CO_2$$

مقدار نظری

$$\text{مقدار عملی} = \frac{\text{مقدار نظری} \times \text{بازده درصدی}}{100} = \frac{120 \times 72}{100} = 86/4\,L\,CO_2$$

(شیمی ۲ - صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

۱۸۹- **گزینهٔ «۲»** (محمد عظیمیان‌زواره)

از سوختن هر مول زغال‌سنگ، یک مول SO_2 تولید می‌شود؛

$$1C_{135}H_{96}O_9NS \sim 1SO_2$$

$$SO_2\,(g) + CaO\,(s) \rightarrow CaSO_3\,(s)$$

$$?\,mol\,SO_2 = 3/36\,kg\,CaO \times \frac{1000\,g\,CaO}{1\,kg\,CaO} \times \frac{1\,mol\,CaO}{56\,g\,CaO} \times \frac{1\,mol\,SO_2}{1\,mol\,CaO} = 60\,mol\,SO_2$$

$$?\,mol\,SO_2 = 80\,mol\,\text{زغال‌سنگ} \times \frac{1\,mol\,SO_2}{1\,mol\,\text{زغال‌سنگ}} = 80\,mol\,SO_2$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{60}{80} \times 100 = \%75$$

(شیمی ۲ - صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

۱۹۰- **گزینهٔ «۳»** (عباس هنرجو)

عبارت‌های (آ)، (پ) و (ت) نادرست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها؛

عبارت (آ)؛ واکنش‌پذیری فلز روی از کلسیم کم‌تر است. بنابراین شرایط نگهداری فلز روی آسان‌تر است.

عبارت (ب)؛ واکنش‌پذیری آهن از مس بیشتر است و رنگ محلول با انجام واکنش تغییر می‌کند.

عبارت (پ)؛ در زنگ آهن، یون‌های Fe^{3+} وجود دارد نه Fe^{2+}.

عبارت (ت)؛ درست است.

عبارت (ث)؛ هر دو منبع، تجدیدناپذیر محسوب می‌شوند.

(شیمی ۲ - صفحه‌های ۱۹ تا ۲۸)

ایران توشه
ترشه‌ای برای موفقیت