۱- مشتق تابع $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) ۱-　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) ۲

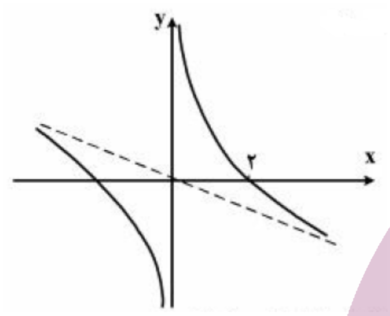
۲- معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $x^۲y - ۲x\sqrt{y} = ۸$ در نقطه‌ی (۲,۴) کدام است؟

۱) $y - ۲x = ۰$　　۲) $y + ۲x = ۸$　　۳) $۲y + x = ۱۰$　　۴) $y + ۴x = ۱۲$

۳- اگر $A(۱, -۲)$ نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = ax^۳ + bx^۲ - ۳x - ۱$ باشد، مقدار تابع در نقطه‌ی ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) فاقد ماکزیمم نسبی

۴- شکل زیر، منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{۲ + ax^۲}{b + x}$ است. $a - b$ کدام است؟



۱) ۱-　　۲) $-\frac{۱}{۲}$　　۳) صفر　　۴) $\frac{۱}{۲}$

۵- مشتق تابع $y = ۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶} - \frac{\pi}{۴})$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$　　۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$　　۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

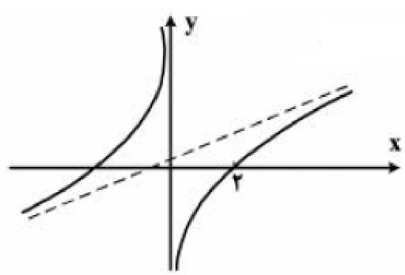
۶- معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $\sqrt[۳]{y} + x\sqrt{x} = ۹$ در نقطه‌ی (۴,۱) کدام است؟

۱) $y + ۹x = ۳۷$　　۲) $y + ۶x = ۲۵$　　۳) $۲y + ۳x = ۱۴$　　۴) $y + ۳x = ۱۳$

۷- اگر $A(۱, -۳)$ نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = ax^۳ - x^۲ - ۳x + b$ باشد، مقدار تابع در نقطه‌ی ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$　　۲) $\frac{۵}{۳}$　　۳) $\frac{۷}{۳}$　　۴) $\frac{۸}{۳}$

۸- شکل زیر، منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{ax^۲ - ۱}{x + b}$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) صفر　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۴}{۳}$　　۴) ۲

۹- مشتق تابع $f(x)=\sin(\frac{\pi}{۳}+tan^{-۱}\frac{x}{۲})$ در نقطه‌ی $x=۲\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۰- اگر θ زاویه‌ی بین دو مماس چپ و راست در نقطه‌ی گوشه نمودار تابع $y=|\ln x|$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ∞

۱۱- اگر تابع f در $x=۴$ مشتق پذیر و $\lim_{x\to۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=-\frac{۳}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(۲x)}{x}$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+\ln x$ مفروض است. معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ی تلاقی آن با نیمساز ربع اول کدام است؟

۱) $y+۲x=۳$ ۲) $۲x-y=۱$ ۳) $۲x+y=۳$ ۴) $۲y-x=۱$

۱۳- عرض از مبدأ خط قائم بر نمودار $x^۳+y^۳=۳xy+۳$ در نقطه‌ی (۱,۲) کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴- حجم کره‌ای با آهنگ ثابت ۳ سانتی متر مکعب در ثانیه افزایش دارد. در لحظه‌ای که قطر کره ۸ سانتی متر باشد، سطح کره چند سانتی متر مربع در ثانیه افزایش دارد؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۶

۱۵- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=cos^۲x-۲cosx$ ؛ $x\epsilon[۰,۲\pi]$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳})$ ۲) $(\pi,\frac{۴\pi}{۳})$ ۳) $(\frac{۲\pi}{۳},\pi)$ ۴) $(\frac{۴\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۲})$

۱۶- مشتق تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi}{۶}+sin^{-۱}\sqrt{x})$ در نقطه‌ی $x=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۱۷- اگر θ زاویه‌ی بین دو مماس چپ و راست در نقطه‌ی گوشه نمودار تابع $y=\frac{|x-۱|}{\sqrt{x^۲+۳}}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۸- اگر تابع f در $x=-2$ مشتق پذیر و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+3}{h}=\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $x^2f(x)$ در $x=-2$ کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۱۴

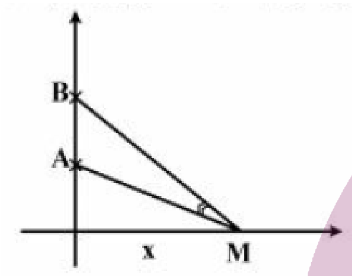
۱۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+e^{2x}$ مفروض است. معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

۱) $3y-x=-1$　　۲) $y-3x=-3$　　۳) $2y-x=-2$　　۴) $2y+x=1$

۲۰- خط قائم بر نمودار $x^2y-\ln(2x-y)=12$ در نقطه‌ی (۲,۳) محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۵-　　۲) ۴-　　۳) ۱　　۴) ۲

۲۱- دو نقطه‌ی A و B به بلندی‌های ۵ و ۸ بر روی محور قائم قرار دارند. نقطه‌ی M بر روی محور افقی، با کدام فاصله از پای قائم اختیار شود تا زاویه‌ی AMB بیشترین مقدار ممکن باشد؟



۱) $3\sqrt{2}$　　۲) ۶　　۳) $2\sqrt{10}$　　۴) ۷

۲۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=sin^2x-2sinx$ ؛ $x\epsilon[0,2\pi]$ در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2})$　　۲) $(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6})$　　۳) $(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$　　۴) $(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6})$

۲۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{48}$　　۲) $\frac{5}{24}$　　۳) $\frac{7}{24}$　　۴) $\frac{7}{16}$

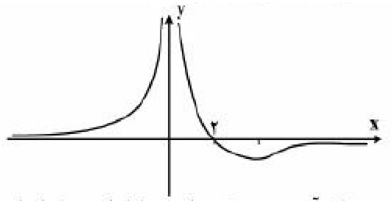
۲۴- در نقاطی از منحنی به معادله‌ی $x^2-4xy+3y^2+1=0$ ، خط مماس بر منحنی موازی محور xها است. طول نقاط تماس کدام است؟

۱) ۱ و ۲-　　۲) ۲ و ۲-　　۳) ۱و ۱-　　۴) ۲و ۱-

۲۵- اگر $A(1,-11)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2+bx$ باشد، آنگاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۲۶- شکل روبرو، نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۲}{x^۲+b}$ است. با تعیین a و b، مینیمم نسبی این تابع کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۸}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $-\frac{۳}{۸}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۷- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{۱+\cos x} & ; \ x>۰\\ \sin ۲x & ; \ x\leq ۰\end{cases}$ باشد، مقدار $f'_-(۰)-f'_+(۰)$ کدام است؟

۱) ۰/۷۵
۲) ۱
۳) ۱/۲۵
۴) ۱/۵

۲۸- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۳$ حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ کدام است؟

۱) ۲۱-
۲) ۱۸-
۳) ۱۲
۴) ۱۵

۲۹- از نقطه‌ی $A(۰,۴/۵)$ خطی بر منحنی $y=x^۲$ عمود شده است. طول پای عمود با علامت مثبت کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۲/۵

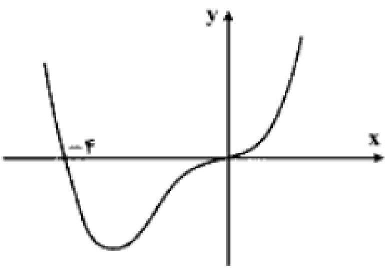
۳۰- در نقطه‌ای از منحنی به معادله‌ی $x+\sqrt{xy}+y=۱۲$ ، خط مماس بر منحنی، عمود بر نیمساز اول است. طول نقطه‌ی تماس کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۳۱- مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۱۵x$ در بازه‌ی [-۴,۳] کدام است؟

۱) ۱۸- و ۲۴
۲) ۴۵- و ۲۷
۳) ۳۶- و ۲۷
۴) ۳۶ و ۲۷-

۳۲- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+bx$ است. با تعیین مقادیر a و b، مینیمم تابع کدام است؟



۱) ۳۶-
۲) ۳۲-
۳) ۲۷-
۴) ۲۴-

۳۳- به‌ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $(m+۲)y=mx$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y=\sqrt{۱+x^۲}$ است؟

۱) $m > -۱$ ۲) $m < -۱$ ۳) $m > ۱$ ۴) $m < ۱$

۳۴- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \left(x+۲\right)e^{۱-x}$ در نقطه‌ی $x = ۱$ با خطی که این نقطه تماس را به مبدأ مختصات وصل می‌کند زاویه‌ی α می‌سازد. $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۳۵- خط به معادله‌ی $y = ۳x - ۲$ در نقطه‌ی $x = ۲$ بر منحنی پیوسته‌ی $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f^{۲}(x)-۴f(x)}{x-۲}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

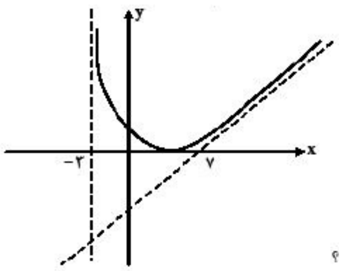
۳۶- طول نقطه عطف نمودار تابع $y = (۵-x)\sqrt[۳]{x^{۲}}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۳۷- در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{۳}$، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۳۸- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^{۲}+ax+b}{x+c}$ است. b کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۳۹- به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $y = \left(m-۲\right)x + ۳$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = tan^{-۱}\frac{۱}{x}$ است؟

۱) $۰ < m < ۱$ ۲) $۰ < m < ۲$ ۳) $۱ < m < ۲$ ۴) $۲ < m < ۳$

۴۰- به ازای کدام مقدار a خط به معادله‌ی $y = -۳x + ۲$ بر منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x^{۲}+a}{x-۲}$ مماس است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۴۱- امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{۱+\cos x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۳}$ با نیمساز ربع سوم زاویه‌ی α می‌سازد. $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳

۴۲- تابع f در $x=2$ مشتق پذیر است. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-9}{h}=\frac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=x\sqrt{f(x)}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

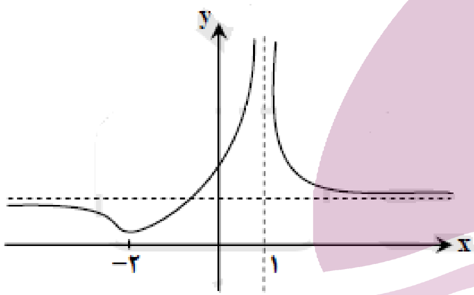
۴۳- طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴۴- اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی یک مثلث قائم الزاویه با سرعت ثابت $\frac{1}{20}$ رادیان بر ثانیه کاهش می‌یابد. اگر طول وتر آن ثابت و برابر ۱۰ واحد باشد، وقتی این زاویه‌ی حاده به $\frac{\pi}{6}$ برسد سرعت تغییر مساحت مثلث قائم الزو.یه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۷۵

۴۵- شکل زیر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2+a}{x^2+bx+c}$ است. a کدام است؟



۱) ۲-

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۴۶- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x در نقطه‌ی $x=1$ با نموّ متغیر ۰/۲۱ از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{42}$ ۲) $\frac{1}{21}$ ۳) $\frac{3}{42}$ ۴) $\frac{2}{21}$

۴۷- اگر $f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|$ و $g(x)=4x+|x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشتق ندارد

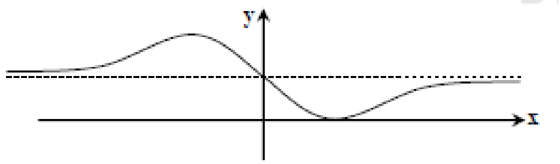
۴۸- خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{2xe^{2-x}}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۹- اگر تابع‌هایی به صورت $f(x)=x^3-(m+2)x^2+3x$ همواره صعودی باشند، آنگاه مجموعه‌ی طول نقاط عطف این توابع، در کدام قسمت است؟

۱) $[-۲,۰]$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $[۰,۱]$

۵۰- شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^۲+bx+۸}{x^۲+۴}$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) ۷ ۲) ۶- ۳) ۹ ۴) ۱۰

۵۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x-۱}{\sqrt{x}}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x در نقطه‌ی $x = ۱$ با نموّ متغیر ۰/۴۴ از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۵۲- اگر $f(x) = x^۳ - [۲x^۲]x$ باشد، مقدار $f'_+\left(\sqrt{۲}\right) - f'_-\left(\sqrt{۲}\right)$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۵۳- عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = \ln\frac{\sqrt{۴x+۱}}{x^۲-۲x+۳}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

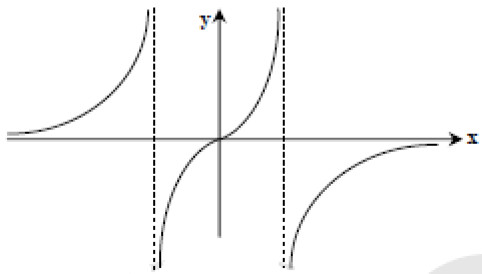
۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۵۴- اگر تابع‌هایی به صورت $f(x) = \frac{۲}{۳}x^۳ - \left(m-۱\right)x^۲ + ۸x$ ، دارای ماکزیمم و مینیمم با طول‌های منفی باشند، آن‌گاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

۱) $(-۵, -\frac{۱}{۲})$ ۲) $(-۴, -۱)$ ۳) $(-\infty, -۲)$ ۴) $(-\infty, -۴)$

۵۵- شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{ax^۲+bx+۱}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟

۱) $a < ۰ , b = ۰$ ۲) $a > ۰ , b = ۰$ ۳) $a > ۰ , b = ۱$ ۴) $a < ۰ , b = ۱$



۵۶- اگر θ زاویه‌ی بین مماس چپ و راست نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left[x+\frac{۱}{۲}\right]x + x^۲$ در نقطه‌ی $x = \frac{۱}{۲}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵۷- از رابطه‌ی $x^۲y - y^۲ - ۲\sqrt{x} + ۴ = ۰$ مقدار $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ در نقطه‌ی $(۱,۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۶}$ ۲) $\frac{۸}{۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶}$

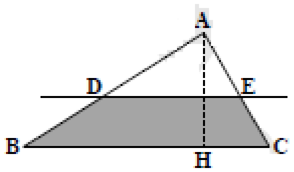
۵۸- اگر $f(x) = x^۳ - x^۲ + ۲x$ باشد، معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ی $x = ۲$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y + ۳x = ۷$ ۲) $y - ۳x = -۵$ ۳) $۳y + x = ۵$ ۴) $۳y - x = ۱$

۵۹- نمودار تابع $y = |x|\mathrm{e}^{-x}$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

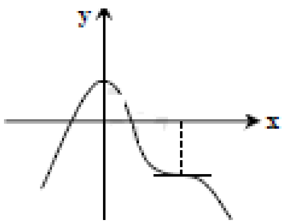
۶۰- درمثلث ABC ضلع BC=۲۰ و ارتفاع AH= ۱۲ واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت ۰/۲ از آن دور می‌شود. سرعت افزایش مساحت ذوزنقه در لحظه‌ای که فاصله‌ی دو خط موازی ۹ واحد باشد، کدام است؟



۱) ۰/۸ ۳) ۱

۲) ۰/۹ ۴) ۱/۲

۶۱- شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^۴ + ۸x^۳ + ax^۲ + b$ است. a کدام است؟



۱) ۱۸- ۳) ۱۲-

۲) ۱۵- ۴) ۹-

۶۲- اگر θ زاویه‌ی بین مماس چپ و راست نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left[۲ + \cos\frac{x}{۲}\right]\sin ۲x$ در نقطه‌ی $x = \pi$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است).

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۶۳- از رابطه‌ی $x^۲y + y^۲ + ۳ = ۰$ مقدار $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ در نقطه‌ی (۱- ,۲) کدام است؟

۱) ۱۱- ۲) ۹- ۳) ۸- ۴) ۶-

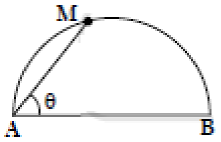
۶۴- اگر $f(x) = x + e^x$ باشد، معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ی تلاقی آن با محور xها کدام است؟

۱) $۲y - x = -۱$ ۲) $۲y - x = ۱$ ۳) $y - ۲x = ۱$ ۴) $y + ۲x = ۲$

۶۵- نمودار تابع $y = x\ln|x|$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(-۱, \frac{-۱}{e})$ ۲) $(\frac{-۱}{e}, ۰)$ ۳) $(۰, \frac{۱}{e})$ ۴) $(\frac{۱}{e}, ۱)$

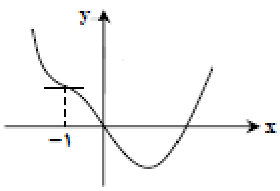
۶۶- نقطه‌ی M بر روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB=۱۰ با سرعت ثابت ۰/۲ واحد در ثانیه از نقطه‌ی A دور می‌شود. سرعت کاهش زاویه‌ی $M\hat{A}B = \theta$ در لحظه‌ی وتر MA=۶ کدام است؟



۱) ۰/۰۲۵ ۳) ۰/۰۴۵

۲) ۰/۰۴۰ ۴) ۰/۰۵۰

۶۷- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۴ - x^۳ + ax^۲ + bx$ است. b کدام است؟



۱) -۱۱ ۳) -۹

۲) -۱۰ ۴) -۸

۶۸- مشتق تابع $y = ۲\sin^۲(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴})$ به ازای $x = \frac{\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

۶۹- در تابع ضمنی $۴\sqrt{xy} + \frac{۱}{۲y} - ۲x = ۱$، تابع y بر حسب متغیر x منظور شده است. معادله‌ی خط مماس بر منحنی آن در نقطه‌ی (۴,۱) کدام است؟

۱) $y + ۲x = ۹$ ۲) $۲y - x = -۲$ ۳) $۳y + x = ۷$ ۴) $۳y - x = -۱$

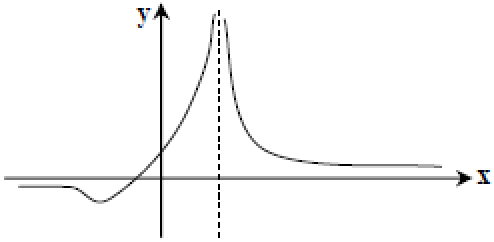
۷۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sin^۲ x - \cos ۲x\ ; & ۰ < x \leq \frac{\pi}{۴} \\ a\tan x + b\sin ۲x\ ; & \frac{\pi}{۴} < x \leq \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۴}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۷۱- در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^۴ + ۸x^۳ - ۱۸x^۲$ نزولی و تقعر نمودار آن روبه بالا است؟

۱) (۱,۳) ۲) (۱,۴) ۳) (۰,۱) ۴) (۰,۳)

۷۲- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x+a}{x^۲+bx+۴}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟



۱) $a < ۰\ ,\ b = ۴$

۲) $a < ۰\ ,\ b = -۴$

۳) $a > ۰\ ,\ b = ۴$

۴) $a > ۰\ ,\ b = -۴$

۷۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه‌ی $x = ۴$ تا $x = ۶/۲۵$، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه‌ی $x = ۴$ چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۷۴- مشتق $y = \sin^{۳}\sqrt{۲x}$ به ازای $x = \frac{\pi^{۲}}{۱۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸\pi}$ ۲) $\frac{۹}{۴\pi}$ ۳) $\frac{۲۷}{۸\pi}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴\pi}$

۷۵- خط قائم بر منحنی $y = xe^{x^{۲}-۴}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۷۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{۳}{x} - ۵ & ; \quad x \geq ۱ \\ x^{۲} + ax + b & ; x < ۱ \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x = ۱$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۷- در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۱}{۴}x^{۴} + \frac{۱}{۲}x^{۳} - ۳x^{۲}$ صعودی و تقعر نمودار آن روبه پایین است؟

۱) (۰,۲-) ۲) (۱,۲-) ۳) (۲,۱-) ۴) (۱,۰)

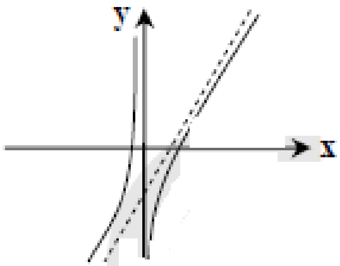
۷۸- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^{۲}+ax+۴}{x+b}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟

۱) $a < ۰\ ,\ b < ۰$

۲) $a = ۰\ ,\ b > ۰$

۳) $a > ۰\ ,\ b = ۰$

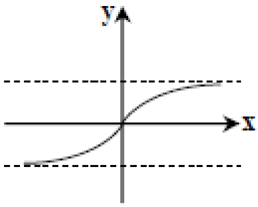
۴) $a < ۰\ ,\ b = ۰$

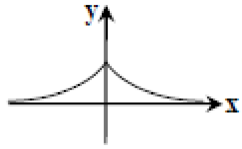


۷۹- مشتق تابع $y = \cos^{۲}(\tan^{-۱}x)$ به ازای $x = ۱$ کدام است؟

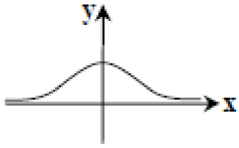
۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

۸۰- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟

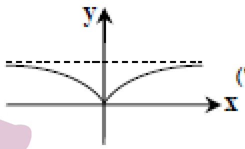




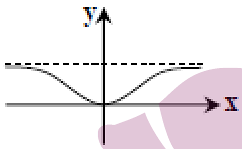
۱)



۲)



۳)



۴)

۸۱- از نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ دو خط مماس بر منحنی $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-x$ رسم شده است. زاویه‌ی بین این دو خط مماس کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $tan^{-۱}۲$

۸۲- مشتق راست تابع با ضابطه‌ی $f(x)=([x]-|x|)\sqrt[۳]{۹x}$ در نقطه‌ی $x=-۳$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۳}$ ۲) ۵- ۳) ۴- ۴) $\frac{۷}{۳}$

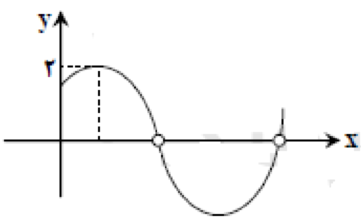
۸۳- خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، به معادله‌ی $۲y+x=۷$ است. اگر $g(x)=\frac{۱}{x}f^{-۱}(x)$ ، آن‌گاه $g'(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸۴- در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}e^{-x}$ صعودی و تقعر نمودار آن رو به بالا است؟

۱) $(۰,۳-\sqrt{۳})$ ۲) $(۳-\sqrt{۳},۳)$ ۳) $(۳,۳+\sqrt{۳})$ ۴) $(۳+\sqrt{۳},+\infty)$

۸۵- شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{a\sin ۲x+b}{\sin x+\cos x}$ در یک دوره‌ی تناوب است. a کدام است؟

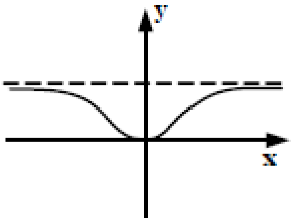


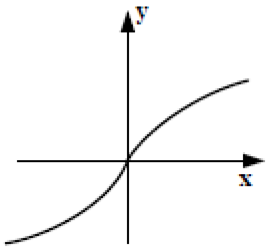
۱) ۱- ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

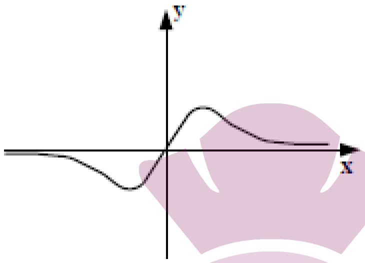
۸۶- مشتق تابع $y=\tan^{۲}(\frac{\pi}{۳}+\sin^{-۱}x)$ به ازای $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ کدام است؟

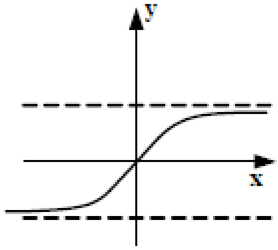
۱) $-۱۶\sqrt{۳}$ ۲) $-۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $-۸\sqrt{۳}$ ۴) $-۴\sqrt{۳}$

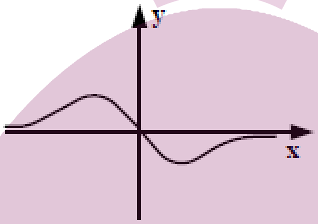
۸۷- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۸۸- از نقطه‌ی $A(۲,۹)$ دو خط مماس بر منحنی $y = -x^۲ + ۲x + ۵$ رسم شده است. تانژانت زاویه‌ی بین این دو خط مماس کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۰}$ ۳) $\frac{۸}{۱۱}$ ۴) $\frac{۷}{۶}$

۸۹- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = ۳x + |x|$ و $g(x) = \frac{۳}{۴}x + a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a تابع gof در مبدأ مختصات، مشتق پذیر است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

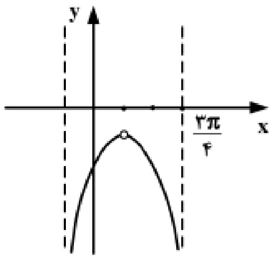
۹۰- اگر $f^{-۱}$ وارون تابع مشتق‌پذیر f باشد، $g(x) = \sqrt{۲xf^{-۱}(x)}$ و $f(۴) = ۲$ و $f'(۴) = \frac{۱}{۳}$، آن‌گاه $g'(۲)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹۱- در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x) = e^{x-۲x^۲}$ صعودی و تقعر نمودار آن رو به پایین است؟

۱) $(-\infty, \frac{۱}{۴})$ ۲) $(-\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴})$ ۳) $(-\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴})$ ۴) $(\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴})$

۹۲- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{a\sin x-\cos x}{b+\cos 2x}$ است. a کدام است؟



۱) $-\sqrt{2}$

۲) ۱

۳) $\sqrt{2}$

۴) ۲

۹۳- اندازه‌ی مشتق تابع $y=\ln e^{\sqrt{\sin x}}$ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۲) $\frac{\sqrt{6}}{8}$

۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

۹۴- کمترین مقدار تابع $y=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2$ کدام است؟

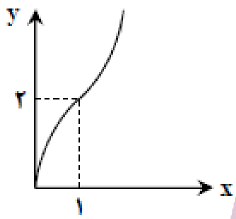
۱) -۳۶

۲) -۳۲

۳) -۲۴

۴) -۱۸

۹۵- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=ax^{\frac{3}{2}}+bx^{\frac{1}{2}}$ است. مقدار b کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۱

۳) $\frac{3}{2}$

۴) ۲

۹۶- تقعر نمودار $y=(x+3)\sqrt{x}$ در بازه‌ی (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) $+\infty$

۹۷- عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=ln\sqrt{\frac{sin\,x}{1+cos\,x}}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{4}$

۲) $-\frac{\pi}{2}$

۳) $\frac{\pi}{4}$

۴) $\frac{\pi}{2}$

۹۸- بیشترین مقدار تابع $y=x^3-3x^2-9x+5$ در بازه‌ی $[-2,2]$ کدام است؟

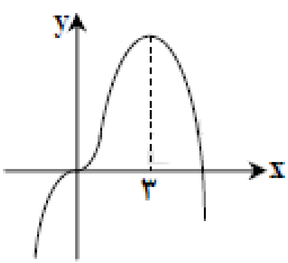
۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۷

۹۹- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=ax^4+2x^3+bx^2$ است. a کدام است؟



۱) -۱

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{4}$

۱۰۰- تقعر منحنی به معادله‌ی $y = x\sqrt{x^۲ + ۲}$ در بازه‌ی $(a, +\infty)$ رو به بالاست. کم‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) $-\infty$

۱۰۱- اگر $f(x) = (x^۲ - x - ۲)\sqrt[۳]{x^۲ - ۷x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(-۱+h) - f(-۱)}{h}$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۳- ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۱۰۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax^۳ + bx\,; x < ۱ \\ ۲\sqrt{۴x - ۳}\,; x \geq ۱ \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۰۳- اگر $f(x) = \frac{x^۳ - ۲}{۱ + x^۳}$ و $g(x) = \sqrt[۳]{x - ۱}$، حاصل $f'(g(x)).\, g'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{x}$ ۲) $\frac{۳}{x^۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳x}$ ۴) $\frac{x-۳}{x^۲}$

۱۰۴- اگر $f(x) = xe^x\,; x > ۰$ آن‌گاه خط مماس بر نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ای به طول e واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{e}$

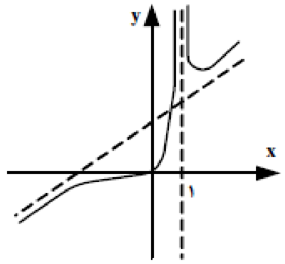
۱۰۵- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تقعر منحنی به معادله‌ی $y = x^۴ + ax^۳ + \frac{۳}{۲}x^۲$، همواره روبه بالا است؟

۱) $-۱ < a < ۱$ ۲) $-۱ < a < ۲$ ۳) $-۲ < a < ۱$ ۴) $-۲ < a < ۲$

۱۰۶- مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله‌ی $y = x|x^۲ - ۴x|$ کدام است؟

۱) $\{\frac{۴}{۳}\}$ ۲) $\{۰, \frac{۴}{۳}, ۴\}$ ۳) $\{\frac{۴}{۳}, ۴\}$ ۴) $\{۰, \frac{۴}{۳}\}$

۱۰۷- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۳+ax^۲}{x^۲+bx+c}$ است. عدد $(bc-a)$ چگونه است؟



۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) ۲

۱۰۸- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\frac{۱}{x} & ;x\geq ۱ \\ x^۲+ax+b & ;x<۱ \end{cases}$ مقدار $f'(۱)$ موجود است، $f\left(۱-\sqrt{۲}\right)$ کدام می‌باشد؟

۱) $۳-\sqrt{۲}$　　۲) $۲-\sqrt{۲}$　　۳) $۲-۲\sqrt{۲}$　　۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

۱۰۹- خط گذرا بر دو نقطه‌ی (۱,۲) و (۱,۳-) بر منحنی پیوسته‌ی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=۳$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}$ وقتی $x\to ۳$ کدام می‌باشد؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۱۱۰- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$، حاصل $f'(x).g'(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱-　　۲) ۱　　۳) x　　۴) $\frac{۱}{۲}x$

۱۱۱- اگر $x>۲$ ؛ $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ باشد، خط قائم بر نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۲　　۳) ۱۴　　۴) ۱۶

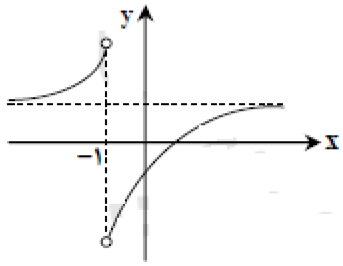
۱۱۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، طول یکی از اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطه‌ی $y=x^۳+ax^۲-۸x$، در بازه‌ی (۱,۴) قرار دارد؟

۱) $-۳<a<۱/۵$　　۲) $-۳<a<۲/۵$　　۳) $-۵<a<۱/۵$　　۴) $-۵<a<۲/۵$

۱۱۳- نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x)=(x-۱)|x^۲+x-۲|$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام می‌باشد؟

۱) ۴　　۲) ۴/۵　　۳) ۶　　۴) ۸

۱۱۴- شکل مقابل، نمودار تابع $y = tan^{-1}U$ است. $U(x)$ برابر کدام می‌باشد؟



۱) $\frac{1-x}{1+x}$

۲) $\frac{1+x}{1-x}$

۳) $\frac{x+1}{x-1}$

۴) $\frac{x-1}{x+1}$

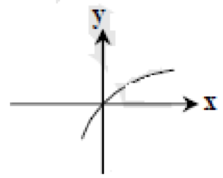
۱۱۵- مقدار مشتق $\frac{1-cos^2x}{2-sin^2x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

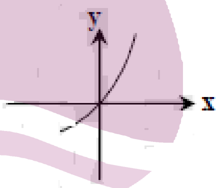
۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$

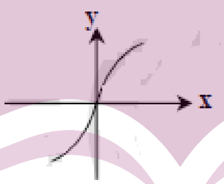
۱۱۶- منحنی نمایش $y = -x^4 + 4x^3 - 3$ در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

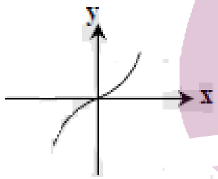
۱) $(2,3)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(0,3)$ ۴) $(2, +\infty)$

۱۱۷- نمودار تابع $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

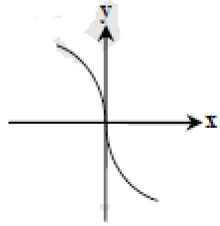
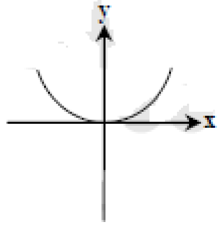
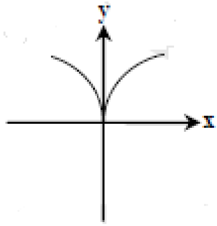
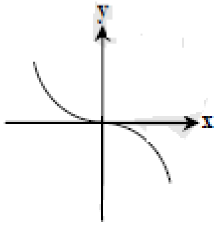
۱۱۸- مقدار مشتق عبارت $\sqrt{1 + tan^2\frac{1}{x}}$ به ازای $x = \frac{3}{\pi}$ کدام است؟

۱) $\frac{-2\pi^2\sqrt{3}}{9}$ ۲) $\frac{-2\pi^2}{9}$ ۳) $\frac{2\pi^2}{9}$ ۴) $\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$

۱۱۹- منحنی نمایش $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به بالا است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,3)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $(1, +\infty)$

۱۲۰- نمودار تابع $y = x^{\frac{8}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۲۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left[\frac{۱}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱)$

۱۲۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax+b\ ; & -۱ \leq x < ۰ \\ x^۲ + cx\ ; & ۰ \leq x < ۱ \end{cases}$ بر بازه‌ی [-۱,۱] در شرایط قضیه‌ی رول صدق می‌کند. a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲۳- اگر $g(x) = \frac{۱}{۴}\sqrt{۵x-۹}$ و $f(x) = sin^۲ \pi x$ ، مشتق تابع fog به ازای $x = ۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}\pi$ ۴) $\frac{۵}{۸}\pi$

۱۲۴- اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = ۲^x$، آن‌گاه gof از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟

۱) ماکزیمم- مینیمم ۲) ماکزیمم- فاقد مینیمم ۳) فاقد ماکزیمم- مینیمم ۴) فاقد ماکزیمم- فاقد مینیمم

۱۲۵- اگر $a > ۰$ و ثابت، و x متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{۳a+x}{\sqrt[۴]{a^۳x}}$ کدام است؟

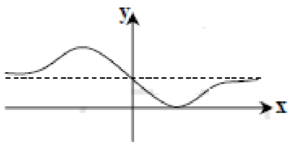
۱) $۲a$ ۲) $۳a$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۶- تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \sin x + \frac{x^۲}{\pi}$ وقتی $۰ \leq x \leq \frac{\pi}{۲}$ به کدام صورت است؟

۱) روبه پایین ۲) رو به بالا

۳) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا ۴) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین

۱۲۷- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^۲+bx+۲}{x^۲+۱}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) (۱,-۲)　　۲) (۱,۲)　　۳) (۲,-۴)　　۴) (۲,۴)

۱۲۸- اگر $f'(\cdot) = g(\cdot) = ۱$ و $f(x) = x + ۱ + (g(x))^۵$، مقدار $f''(\cdot)$ برابر کدام است؟

۱) $۴g''(\cdot)$　　۲) $۵g''(\cdot)$　　۳) $۴g''(\cdot) + ۲۰$　　۴) $۵g''(\cdot) + ۲۰$

۱۲۹- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$، آن‌گاه $(f^{-۱})'\left(\frac{۳}{۵}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲۵}{۶۴}$　　۲) $\frac{۳۲}{۲۵}$　　۳) $\frac{۲۵}{۳۲}$　　۴) $\frac{۶۴}{۱۲۵}$

۱۳۰- بیش‌ترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

۱) ۹۵۸　　۲) ۹۶۸　　۳) ۹۷۸　　۴) ۹۸۸

۱۳۱- خط مماس بر نمودار $y^۳ + ۳xy^۲ - ۳x^۳y = ۱$ در نقطه‌ی (۱,۱) از کدام نواحی صفحه‌ی مختصات می‌گذرد؟

۱) اول و سوم　　۲) اول و چهارم　　۳) اول و دوم و سوم　　۴) اول و دوم و چهارم

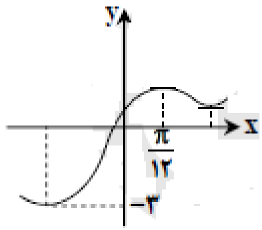
۱۳۲- اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ۱ + a\cos\pi x & ; \quad x > ۱ \\ \mathrm{b}x^۲ + x & ; \quad x \leq ۱ \end{cases}$ بر روی R مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) ۱　　۲) $-\frac{۱}{۲}$　　۳) ۱-　　۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۳- نردبانی به طول ۱۰ متر به دیواری تکیه دارد. اگر انتهای نردبان با سرعت ۰/۵ متر بر ثانیه به زمین نزدیک شود، وقتی پای نردبان در فاصله‌ی ۶ متری دیوار است با سرعت چند متر بر ثانیه از دیوار دور می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۳}{۲}$　　۳) $\frac{۳}{۴}$　　۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۳۴- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos ۴x + b\sin ۲x$ است. b کدام است؟



۱) ۲

۲) -۲

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $-\sqrt{۳}$

۱۳۵- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ آهنگ متوسط از $x_۱=۲$ تا $x_۲=۵$ برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\alpha$ است. α کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) $۱+\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۶- مقدار مشتق تابع $y=cos^۲\frac{\pi}{۳x}$ به ازای $x=۴$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۹۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۷۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۳۲}$

۱۳۷- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲} & ; \quad x>۱\\ ax+b & ; \quad x\leq ۱\end{cases}$ مقدار $f'\left(۱\right)$ موجود است. b کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

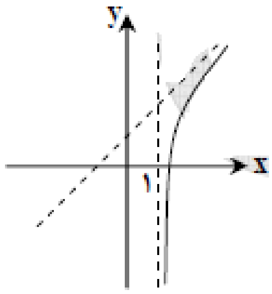
۱۳۸- عرض از مبدأ خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $y^۲=y\ln(x^۲-۳)+۲x$ در نقطه‌ی (۲،-۲) کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۳۹- طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(۲-x)^۲}{x}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) فاقد نقطه‌ی عطف

۱۴۰- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۲+a}{x+b}$ است. مقادیر a و b به کدام صورت‌اند؟



۱) $a > b = -1$

۲) $a < b = -1$

۳) $b > a = -1$

۴) $b < a = -1$

۱۴۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از $x_1=2$ تا $x_2=3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن، در $x=\sqrt[3]{12}$ بیش‌تر است؟

۱) ۱　　۲) ۱/۵　　۳) ۲　　۴) ۲/۵

۱۴۲- مقدار مشتق تابع $y=\cos^2(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4})$ به ازای $x=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$　　۲) $-\frac{1}{8}$　　۳) $\frac{1}{4}$　　۴) $\frac{1}{4}$

۱۴۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$ مقدار $f'_+(1)-f'_-(1)$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

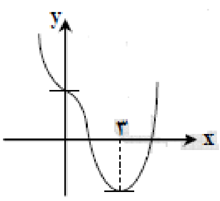
۱۴۴- خط مماس بر منحنی $\ln(x^2-y)=\sqrt{y+1}-x$ در نقطه‌ی (۲,۳) نیمساز ناحیه‌ی اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{3}{4}$　　۲) $\frac{5}{4}$　　۳) $\frac{4}{3}$　　۴) $\frac{5}{3}$

۱۴۵- طول نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

۱) ۱-　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) فاقد نقطه‌ی عطف

۱۴۶- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+2$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) ۱-　　۳) ۱

۲) صفر　　۴) ۲

۱۴۷- از نقطه‌ی $A(0,\alpha)$ دو خط مماس عمود بر هم به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}x^2+3$ رسم شده است. α کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$　　۲) ۲　　۳) $\frac{9}{4}$　　۴) $\frac{5}{2}$

۱۴۸- اگر مماس چپ و مماس راست تابع $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطه‌ی زاویه‌دار آن عمود بر هم باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟

۱) $\{-۱\}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{-۱,۱\}$ ۴) $\emptyset$

۱۴۹- خطی که دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- از منحنی به معادله‌ی $f(x) = x^۳ + ax^۲ + ۲x$ را به هم وصل کند، بر این منحنی مماس است. a کدام است؟

۱) ۱، ۱- ۲) ۲، ۱- ۳) ۲، ۱ ۴) ۱، ۲-

۱۵۰- اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $۵\sqrt{۲}$ باشند، بیش‌ترین مقدار $۳x + ۴y$ کدام است؟

۱) $۲۵\sqrt{۲}$ ۲) ۳۶ ۳) $۲۸\sqrt{۲}$ ۴) ۴۰

۱۵۱- تابع f روی $[a,b]$ تعریف شده و $a < b < c$ است. کدام بیان نادرست است؟

۱) اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.

۲) اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی بحرانی است.

۳) اگر c نقطه‌ی بحرانی باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی اکسترمم نسبی است.

۴) اگر c نقطه‌ی اکسترمم مطلق باشد، آن‌گاه c نقطه‌ی بحرانی است.

۱۵۲- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x^۳ - x|$ روی بازه‌ی [۱,۲-] کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

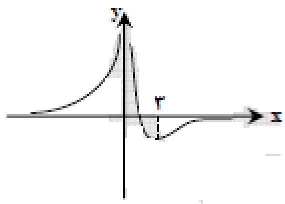
۱۵۳- مجموعه طول نقاطی که تقعر منحنی به معادله‌ی $y = \frac{-۲}{x^۲+۳}$ رو به بالا باشد، به کدام صورت است؟

۱) $|x| < ۱$ ۲) $|x| < ۲$ ۳) $|x| > \sqrt{۲}$ ۴) $|x| > \sqrt{۳}$

۱۵۴- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax+۳}{x^۲+bx}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

۱) (۲-, ۲-) ۳) (۲-,۰)

۲) (۲,۰) ۴) (۲,۲)



۱۵۵- از نقطه‌ی $A(۰,-۲)$ دو خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = x^۲ - ۱$ رسم شده است. مساحت مثلث به رأس‌های A و دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

۱) ۲   ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳   ۴) ۴

۱۵۶- تابع f در نقطه‌ی c دارای مینیمم است و مشتق راست دارد. الزاما این مشتق چگونه است؟

۱) مثبت   ۲) منفی   ۳) نامنفی   ۴) نامثبت

۱۵۷- خط گذرا بر دو نقطه به طول‌های ۱ و $-\frac{۱}{۲}$ واقع بر منحنی به معادله‌ی $y = \frac{۱}{x^۲}$ در نقطه‌ای با کدام طول بر این منحنی مماس است؟

۱) ۲-   ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱   ۴) نشدنی

۱۵۸- نقطه‌ی $M(x, y)$ بر روی منحنی $y = x^۲$ از مبدأ مختصات دور می‌شود. اگر مولفه‌ی x با سرعت ثابت ۰/۰۵ افزایش یابد، سرعت افزایش فاصله‌ی M از مبأ مختصات در لحظه‌ی $x = \frac{۱۲}{۵}$ تقریبا کدام است؟

۱) ۰/۱۸   ۲) ۰/۲۱   ۳) ۰/۲۴   ۴) ۰/۲۶

۱۵۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

۱) مینیمم نسبی   ۲) ماکزیمم نسبی

۳) مینیمم نسبی و ماکزیمم نسبی   ۴) فاقد اکسترمم نسبی

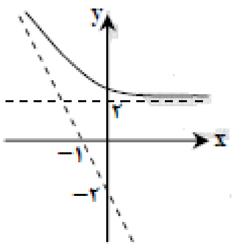
۱۶۰- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}$ بر روی دامنه‌ی خود، کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) بی‌شمار

۱۶۱- مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۲ + ۲\sqrt{۲}\cos x$ ؛ $۰ \leq x \leq ۲\pi$ رو به بالا باشد در کدام بازه است؟

۱) $(۰, \frac{۳\pi}{۴})$ ۲) $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴})$ ۳) $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴})$ ۴) $(\frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴})$

۱۶۲- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax + \sqrt{x^۲ + bx + ۵}$ است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟



۱) (۱- ,۴-)

۲) (۱,۴-)

۳) (۱,۴-)

۴) (۱,۴)

پاسخنامه

۱- گزینه ۱

روش اول (به صورت ضرب):

$$f(x) = (\cos x - \sin x) \times \frac{۱}{\cos x + \sin x}$$

$$f'(x) = \left(\left(۱ - \sin x - \cos x\right) \times \frac{۱}{\cos x + \sin x}\right) + \left(\frac{-(-\sin x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^{۲}} - (\cos x - \sin x)\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -۱$$

روش دوم (به صورت تقسیم):

$$f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$f'(x) = \frac{-(\sin x + \cos x)^۲ + (\cos x - \sin x)^۲}{(\cos x + \sin x)^۲} = -۱$$

۲- گزینه ۴

ابتدا شیب خط مماس:

برای مشتق ضمنی داریم: $f'(x,y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{۲xy - ۲\sqrt{y}}{x^۲ - ۲x\frac{۱}{۲\sqrt{y}}} = -\frac{۱۲}{۳} = -۴ \quad (۲,۴)$

$$y - ۴ = -۴\left(x - ۲\right) \rightarrow y + ۴x = ۱۲$$

۳- گزینه ۴

- نقطه عطف مشتق دوم مساوی صفر
- ماکزیمم مشتق اول مساوی صفر
- شرط آن‌که ماکزیمم باشد باید حول ماکزیمم تغییر جهت دهد.

نقطه عطف $(+۱,-۲)$ $y' = ۳ax^۲ + ۲bx - ۳ \rightarrow y'' = ۶ax + ۲b = ۰ \quad x = -\frac{b}{۳a} = +۱ \rightarrow -b = ۳a \ (۱)$

از طرفی می‌دانیم مختصات نقطه‌ی عطف در معادله‌ی فوق صدق می‌کند:

$$f\left(۱\right) = -۲ = a + b - ۳ - ۱ \rightarrow a + b = ۲ \ \left(۲\right) \xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} a = -۱ \\ b = +۳ \end{cases} \rightarrow \ y = -x^۳ + ۳x^۲ - ۳x - ۱$$

ماکزیمم نسبی را خواسته، پس مشتق اول گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y' = -۳x^۲ + ۶x - ۳ = -۳\left(x^۲ - ۲x + ۱\right) = -۳(x-۱)^۲ = ۰ \rightarrow (x-۱)^۲ = ۰ \rightarrow x = ۱$$

$x = ۱$ ریشه‌ی مضاعف مشتق اول ← تابع همواره صعودی ← فاقد ماکزیمم نسبی

به عبارت دیگر، تابع حول $x = ۱$ هیچگاه تغییر علامتی نمی‌دهد تا ماکزیمم شود (همواره مثبت است).

۴- گزینه ۲

از شکل ← $\begin{cases} x = ۰ \text{ مجانب قائم} \\ (۲,۰) \text{ در معادله صدق می‌کند} \end{cases}$

$$b = ۰ \ \left(۲,۰\right) \rightarrow f\left(۲\right) = ۰ = \frac{۲ + a(۲)^۲}{۲} \rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

$$a - b = -\frac{۱}{۲} - ۰ = -\frac{۱}{۲}$$

۵- گزینه ۳

$$y' = ۲ \times ۲ \times (-\frac{۱}{۴})\,(-\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴}))cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴}) = \sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\,cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})$$

$$y' = \frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲}) \qquad f'(\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲}) = \frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۶- گزینه ۱

$$\sqrt[۳]{y} + x\sqrt{x} - ۹ = ۰ \quad f'(x,y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{x + \frac{x}{۲\sqrt{x}}}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{y^۲}}} \to m = f'\left(۴,۱\right) = -۹$$

$$y - ۱ = -۹\left(x - ۴\right) \to y + ۹x = ۳۷$$

چون شیب خط مماس برابر ۹- می‌باشد و در گزینه‌ها فقط شیب گزینه‌ی ۱، ۹- است بنابراین نیازی به نوشتن خط مماس نیست.

۷- گزینه ۳

$$y = ax^۳ - x^۲ - ۳x + b \to y' = ۳ax^۲ - ۲x - ۳ \to y'' = ۶ax - ۲$$

$$A\left(۱,-۳\right) \to \begin{cases} ۱) - ۳ = a(۱)^۳ - (۱)^۲ - ۳\left(۱\right) + b \to a + b = ۱ \\ ۲)\ ۶a\left(۱\right) - ۲ = ۰ \to a = \frac{۱}{۳} \to b = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$y' = x^۲ - ۲x - ۳ \to y' = ۰ \to x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x = -۱ \to max \\ x = -\frac{c}{a} = ۳ \to min \end{cases}$$

$$f\left(-۱\right) = \frac{۱}{۳}(-۱)^۳ - (-۱)^۲ - ۳(-۱) + \frac{۲}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

۸- گزینه ۲

چون محور yها یا خط $x = ۰$ مجانب قائم تابع می‌باشد، پس مخرج کسر برابر صفر است.

$$x + b = ۰ \xrightarrow{x=۰,b=۰} y = \frac{ax^۲ - ۱}{x}, \left|\begin{matrix} ۲ \\ ۰ \end{matrix}\right. \to ۰ = \frac{a(۲)^۲ - ۱}{۲} \to ۴a = ۱ \to a = \frac{۱}{۴} \quad a + b = \frac{۱}{۴}$$

۹- گزینه ۲

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+tan^{-1}\frac{x}{2}\right)\rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{3}+tan^{-1}\frac{x}{2}\right)\rightarrow f'\left(2\sqrt{3}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow\frac{1}{8}\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{16}$$

۱۰- گزینه‌ی ۴

تابع در $x=1$ مشتق ناپذیر است.

$$f'_{+}\left(1\right)=\lim_{h\rightarrow0^{+}}\frac{f\left(1+h\right)-f\left(1\right)}{h}=\lim_{h\rightarrow0^{+}}\frac{\ln 1+h}{h}=\lim_{h\rightarrow0^{+}}\frac{\frac{1}{1+h}}{1}=1$$

و

$$f'_{-}\left(1\right)=\lim_{h\rightarrow0^{-}}\frac{f\left(1+h\right)-f\left(1\right)}{h}=\lim_{h\rightarrow0^{+}}\frac{-\ln 1+h}{h}=\lim_{h\rightarrow0^{+}}\frac{-\frac{1}{1+h}}{1}=-1$$

واضح است که دو نیم مماس در نقطه‌ای به طول $x=1$ از نمودار تابع بر هم عمودند.

۱۱- گزینه ۳

$$\lim_{x\rightarrow4}\frac{f(x)+7}{x-4}=-\frac{3}{2}\rightarrow f'\left(4\right)=-\frac{3}{2}\quad,\quad f\left(4\right)=-7$$

مشتق تابع $g(x)=\frac{f(2x)}{x}$ را در $x=2$ به دست می‌آوریم:

$$g'(x)=\frac{2xf'\left(2x\right)-f(2x)}{x^2}\rightarrow g'\left(2\right)=\frac{4f'\left(4\right)-f(4)}{4}=\frac{4\times\left(-\frac{3}{2}\right)-(-7)}{4}=\frac{1}{4}$$

۱۲- گزینه ۴

$$x+\ln x=x\rightarrow\ln x=0\rightarrow x=1$$

معادله‌ی خط مماس بر نمودار f^{-1} در $(۱,۱)$ عبارت است از:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(۱\right) = \frac{۱}{f'(۱)} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad y - ۱ = \frac{۱}{۲}\left(x - ۱\right) \to y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲} \to ۲y - x = ۱$$

۱۳- گزینه ۴

$$x^۳ + y^۳ - ۳xy - ۳ = ۰ \;\to y' = -\frac{۳x^۲ - ۳y}{۳y^۲ - ۳x}\Big|(۱,۲) = -\frac{۳ - ۶}{۱۲ - ۳} = \frac{۱}{۳}$$

معادله‌ی خط قائم بر نمودار در نقطه‌ی $(۱,۲)$ به صورت زیر است:

$$y - ۲ = -۳\left(x - ۱\right) \to y - ۲ = -۳x + ۳ \to y = -۳x + ۵$$

بنابراین، عرض از مبدأ خط قائم ۵+ است.

۱۴- گزینه ۳

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dr}{dr}} = \frac{۳}{۴\pi r^۲} \quad \to \quad \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dr} \times \frac{dr}{dt} = \left(۸\pi r\right) \times \frac{۳}{۴\pi r^۲} = \frac{۶}{r} \to \frac{ds}{dt}\Big|r = ۴ = \frac{۶}{۴} = ۱/۵$$

۱۵- گزینه ۲

$$f(x) = cos^۲x - ۲cosx \to f'(x) = -۲\sin x\cos x + ۲\sin x < ۰ \;\to \sin x\left(۱ - \cos x\right) < ۰$$

$$\to \sin x < ۰$$

برای این‌که تابع f نزولی باشد باید $\sin x < ۰$، یعنی کمان x در ناحیه‌ی سوم یا چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد.

$$f''(x) = ۲\cos ۲x + ۲cosx = -۲(۲cos^۲x - ۱\cos x) < ۰ \;\to ۲cos^۲x - cosx - ۱ < ۰$$

$$\to -\frac{۱}{۲} < \cos x < ۱$$

برای این‌که تقعر f رو به پایین باشد باید $-\frac{۱}{۲} < \cos x < ۱$ باشد. اشتراک جواب‌های به دست آمده از دو شرط فوق بازه‌ی $(\pi, \frac{۴\pi}{۳})$ است.

۱۶- گزینه ۲

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}\times\left(1+\tan^{2}\left(\frac{\pi}{6}+sin^{-1}\sqrt{x}\right)\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\times\left(1+\tan^{2}\left(\frac{\pi}{6}+sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+\left(\sqrt{3}\right)^{2}\right)=\frac{8}{\sqrt{3}}$$

۱۷- گزینه ۳

$$y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^{2}+3}}\ ;x\geq 1\\[2ex]-\dfrac{x-1}{\sqrt{x^{2}+3}}\ ;x<1\end{cases}\rightarrow\ y'=\frac{\sqrt{x^{2}+3}-\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}+3}}(x-1)}{x^{2}+3}$$

$$\rightarrow\begin{cases}f'_{+}\left(1\right)=\dfrac{1}{2}\\[2ex]f'_{-}\left(1\right)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\rightarrow\ \tan\theta=\left|\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right|=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

۱۸- گزینه ۴

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(-2+h\right)+3}{h}=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \begin{cases}f\left(-2\right)=-3\\[1ex]f'_{-}\left(1\right)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$(x^{2}f(x))'=2xf(x)+x^{2}f'(x)\xrightarrow{x=-2}-4f\left(-2\right)+4f'\left(-2\right)=-4\left(-3\right)+4\left(\frac{1}{2}\right)=12+2=14$$

۱۹- گزینه ۱

$$A\Big|_{?}^{۱} \in f^{-۱}, A\Big|_{۱}^{?} \in f \rightarrow x + e^{۲x} = ۱ \rightarrow x = ۰ \rightarrow A\Big|_{۰}^{۱}$$

$$f'(x) = ۱ + ۲e^{۲x} \rightarrow m_{\text{مماس}} = f'(۰) = ۱ + ۲ = ۳ \rightarrow f^{-۱} \text{ در } m'_{\text{مماس}} = \frac{۱}{۳}$$

$$\rightarrow y - ۰ = \frac{۱}{۳}(x - ۱) \rightarrow y = \frac{۱}{۳}x - \frac{۱}{۳} \rightarrow ۳y - x = -۱$$

۲۰- گزینه ۲

$$x^۲y - \ln(۲x - y) = ۱۲ \rightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲xy - \frac{۲}{۲x - y}}{x^۲ - \frac{-۱}{۲x - y}} \xrightarrow{(۲,۳)} y' = m_{\text{مماس}} = -\frac{۲ \times ۲ \times ۳ - \frac{۲}{۴ - ۳}}{۲^۲ - \frac{-۱}{۴ - ۳}}$$

$$= -\frac{۱۰}{۵} = -۲ \rightarrow m'_{\text{قائم}} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \text{معادله خط قائم}: y - ۳ = \frac{۱}{۲}(x - ۲) \rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + ۲$$

$$\xrightarrow{\text{تقاطع با محور } x\text{ها } (y=۰)} \frac{۱}{۲}x + ۲ = ۰ \rightarrow x = -۴$$

۲۱- گزینه ۳

$$OM^۲ = x^۲ = OA \times OB = ۵ \times ۸ = ۴۰ \rightarrow x = ۲\sqrt{۱۰}$$

۲۲- گزینه ۱

$$f'(x) = ۲\sin x \cos x - ۲\cos x = ۲\cos x(\sin x - ۱)$$

$$\text{صعودی} \rightarrow f'(x) > ۰ \rightarrow ۲\cos x(\sin x - ۱) > ۰ \xrightarrow{\sin x - ۱ < ۰} \cos x < ۰ \rightarrow \text{ربع ۲ یا ۳}$$

$$f''(x) = -۲\sin x(\sin x - ۱) + ۲\cos^۲ x = -۲\sin^۲ x + ۲\sin x + ۲\cos^۲ x$$

$$= -۲\sin^۲ x + ۲\sin x + ۲(۱ - \sin^۲ x) = -۴\sin^۲ x + ۲\sin x + ۲ \xrightarrow{\sin x = t} -۴t^۲ + ۲t +$$

$$\text{تقعر رو به پایین} \rightarrow f''(x) < ۰ \rightarrow -۴t^۲ + ۲t + ۲ < ۰ \rightarrow \begin{cases} t = ۱ \\ t = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \rightarrow t < -\frac{۱}{۲} \text{ یا } t > ۱$$

$$\to \begin{cases} \sin x > ۱ \to \text{غ ق ق} \\ \sin x < -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} \text{ربع ۳} \xrightarrow{-۱<\sin x<۰ \ (\text{باید به } \frac{۳\pi}{۲} \text{ نزدیکتر باشد})} x\epsilon(\frac{۷\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۲}) \end{cases}$$

۲۳- گزینه ۱

$$f'(x) = \frac{\frac{۴(x+۳)-(۴x+۵)}{(x+۳)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}} \to f'(۱) = \frac{۷}{۴۸}$$

۲۴- گزینه ۲

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x-۴y}{-۴x+۶y}, \quad y' = ۰ \to ۲x-۴y = ۰ \to y = \frac{x}{۲}$$

$$x^۲ - ۴x\left(\frac{x}{۲}\right) + ۳\left(\frac{x}{۲}\right)^۲ + ۱ = ۰ \to x^۲ = ۴ \to x = \pm ۲$$

۲۵- گزینه ۳

$$f''(۱) = ۰ \to ۶(۱) + ۲a = ۰ \to a = -۳, \quad f(۱) = -۱۱ \to a+b = -۱۲ \to b = -۹$$

$$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x \to f(-۱) = -۱ - ۳ + ۹ = ۵$$

۲۶- گزینه ۱

$$\left.\begin{matrix} (۲,۰)\epsilon f \to \frac{۲a+۴}{۴+b} = ۰ \to a = -۱ \\ \lim_{x\to ۰} f(x) = +\infty \to b = ۰ \end{matrix}\right\} f(x) = \frac{-x+۲}{x^۲} \to f'(x) = \frac{-(x^۲) - ۲x(-x+۲)}{x^۴} = \frac{x^۲ - ۴x}{x^۴}$$

$$f'(x) = ۰ \to x^۲ - ۴x = ۰ \to \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \end{cases}$$

۲۷- گزینه ۴

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x\left(۱+\cos x\right)+\sin x\,(\sin x)}{(۱+\cos x)^{۲}}=\dfrac{۲}{(۱+\cos x)^{۲}} & ;\ x>۰\\ ۲\cos ۲x & ;\ x\leq ۰\end{cases}$$

$$f'_{-}(۰)-f'_{+}(۰)=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۲۸- گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f\left(۲\right)}{x-۲}\ ,\qquad f'^{(۲)}=\left(\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)^{\frac{۳}{۲}}\right)'=\frac{۳}{۲}\times\frac{۱\left(-۳\right)-۲\left(۲\right)}{(۲x-۳)^{۲}}\times\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}\Bigg|x=۲$$

$$\frac{۳}{۲}\times\frac{-۷}{۱}\times\left(\frac{۴}{۱}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{-۲۱}{۲}\times\sqrt{۴}=-۲۱$$

۲۹- گزینه ۲

$$m_{\text{عمود}}=\frac{۱}{m_{\text{مماس}}}=-\frac{۱}{f'(\alpha)}=-\frac{۱}{۲\alpha}\xrightarrow{\text{شیب خط گذرا از دو نقطه}}\frac{\alpha^{۲}-۴/۵}{\alpha-۰}\Rightarrow -\alpha=۲\,\alpha(\alpha^{۲}-۴/۵)$$

$$۲\alpha^{۲}-۹=-۱\ \to\ ۲\alpha^{۲}=۸\ \to\ \alpha^{۲}=۴\ \to\ \alpha=۲$$

۳۰- گزینه ۳

$$m_{\text{مماس}}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۱+\dfrac{y}{۲\sqrt{xy}}}{۱+\dfrac{x}{۲\sqrt{xy}}}=-\frac{۱}{\text{شیب نیمساز ربع اول}}=-۱\to ۱+\frac{y}{۲\sqrt{xy}}=۱+\frac{y}{۲\sqrt{xy}}$$

$$\frac{y}{۲\sqrt{xy}}=\frac{x}{۲\sqrt{xy}}\Rightarrow x=y\Rightarrow x+\sqrt{x^{۲}}+x=۱۲\Rightarrow x+|x|+x=۱۲\begin{cases}x>۰\ \Rightarrow ۳x=۱۲\Rightarrow x=۴\\ x<۰\ \Rightarrow x=۱۲\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۳۱- گزینه ۲

لازم نیست $f\left(-۴\right)$ را محاسبه کنیم، چون به صورت کسری به دست می‌آید و در گزینه‌ها کسر نداریم.

$$f'(x) = x^{۲} - ۲x - ۱۵ = ۰ \Rightarrow \left(x - ۵\right)\left(x + ۳\right) = ۰ \Rightarrow x = -۳, ۵$$

$$f\left(۳\right) = ۹ - ۹ - ۴۵ = -۴۵: max \quad , \qquad f\left(-۳\right) = -۹ - ۹ + ۴۵ = ۲۷: min$$

۳۲- گزینه ۳

در صفر، مماس افقی داریم. پس باید $f'\left(۰\right) = f''\left(۰\right) = ۰$

$$f'(x) = ۴x^{۳} + ۳ax^{۲} + b\Big|_{x=۰} = ۰ \Rightarrow b = ۰, f\left(-۴\right) = ۰ \Rightarrow (-۴)^{۴} + a(-۴)^{۳} = ۰ \Rightarrow a = \frac{۴^{۴}}{۴^{۳}} = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = x^{۴} + ۴x^{۳} \Rightarrow f'(x) = ۴x^{۳} + ۱۲x^{۲} = ۰ \Rightarrow ۴x^{۲}\left(x + ۳\right) = ۰ \Rightarrow x = -۳$$

$$f\left(-۳\right) = (-۳)^{۴} + ۴(-۳)^{۳} = ۸۱ - ۱۰۸ = -۲۷$$

۳۳- گزینه ۱

شیب خطوط مماس $\Rightarrow y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^{۲} + ۱}} \Rightarrow -۱ < y' < ۱ \quad (۱)$

$$\left.\begin{array}{l} \left(m + ۲\right)y = mx \Rightarrow y = \dfrac{m}{m + ۲}x \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^{۲} + ۱}} = \dfrac{m}{m + ۲} \end{array}\right\} \xRightarrow{(۱)} \left|\frac{m}{m + ۲}\right| < ۱ \Rightarrow m > -۱$$

۳۴- گزینه ۲

شیب خط واصل بین نقاط (۰, ۰) و (۱,۳) = ۳ $\qquad f(x) = \left(x + ۲\right)e^{۱-x} \quad , \quad f\left(۱\right) = ۳$

$$f'(x) = e^{۱-x} - \left(x + ۲\right)e^{۱-x}, \qquad f'\left(۱\right) = ۱ - ۳ = -۲$$

$$\tan\alpha = \frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱m_۲} = \frac{-۲ - ۳}{۱ - ۶} = \frac{-۵}{-۵} = ۱$$

۳۵- گزینه ۳

$$f\left(۲\right) = ۴ \;,\; f'\left(۲\right) = ۳$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f^{۲}(x)-۴f(x)}{x-۲}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{x\to ۲}\frac{۲f(x)f'(x)-۴f'(x)}{۱}=۲\times ۴\times ۳-۴\times ۳=۱۲$$

۳۶- گزینه ۱

$$y=۵x^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۵}{۳}}\to y'=\frac{۱۰}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}-\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}\to y''=\frac{۱۰}{۹}x^{\frac{-۴}{۳}}-\frac{۱۰}{۹}x^{\frac{-۱}{۳}}=۰\to x^{\frac{-۱}{۳}}=x^{\frac{-۴}{۳}}$$

$$\to x^{-۱}=x^{-۴}\to \frac{-۱}{x}=\frac{۱}{x^{۴}}\to x=-۱$$

دقت کنید که عدد صفر در دامنه‌ی y' موجود نیست.

۳۷- گزینه ۳

$$\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{\pi}{۳}\to r^{۲}h=۱\to r=\frac{۱}{\sqrt{h}}\quad (\text{یال})\, l=\sqrt{h^{۲}+r^{۲}}$$

$$S_{\text{جانبی}}=\pi rl=\pi\frac{۱}{\sqrt{h}}\sqrt{h^{۲}+\frac{۱}{h}}=\pi\sqrt{h+\frac{۱}{h^{۲}}}$$

حال از عبارت فوق مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم (نسبت به h)

$$\left(\pi\sqrt{h+\frac{۱}{h^{۲}}}\right)'=\frac{\pi(۱-\frac{۲}{h^{۳}})}{۲\sqrt{h+\frac{۱}{h^{۲}}}}=۰\to ۱=\frac{۲}{h^{۳}}\to h=\sqrt[۳]{۲}$$

۳۸- گزینه ۲

$$\text{مجانب قائم}: x=-۳\to c=۳,\qquad \text{مجانب قائم}: x+b'=y\to ۷+b'=۰\to b'=-۷$$

$$\to \text{مجانب قائم}=x-۷\to a=-۴$$

از طرفی صورت کسر باید دارای ریشه‌ی مضاعف باشد: $۱۶=۴\times b\to b=۴$

۳۹- گزینه ۳

شیب خط $y=(m-۲)x+۳$ برابر با $m-۲$ می‌باشد که باید با شیب خط مماس بر تابع $y=tan^{-۱}\frac{۱}{x}$ برابر باشد. پس:

$$y = tan^{-۱}\frac{۱}{x} \to y' = \frac{\frac{-۱}{x^۲}}{۱+\frac{۱}{x^۲}} = \frac{-۱}{۱+x^۲} \to m-۲ = \frac{-۱}{۱+x^۲}$$

از آن‌جایی‌که $۱ > \frac{۱}{۱+x^۲} > ۰$ است، پس $۰ > \frac{-۱}{۱+x^۲} > -۱$ بوده و در نتیجه باید $-۱ < m-۲ < ۰$ ، یعنی $۱ < m < ۲$ باشد.

۴۰- گزینه ۲

باید معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$\frac{x^۲+a}{x-۲} = -۳x+۲ \to ۴x^۲-۸x+a+۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۰} ۶۴-۱۶a-۶۴ = ۰ \to a = ۰$$

۴۱- گزینه ۲

نکته: تانژانت زاویه‌ی بین دو خط با شیب‌های m و m' برابر است با: $\tan\alpha = \left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|$

$$f(x) = \frac{\sin x}{۱+\cos x} \to f'(x) = \frac{\cos x\left(۱+\cos x\right)+\sin^۲ x}{(۱+\cos x)^۲} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۳}} f'\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۲}{۳}$$

از آن‌جایی‌که نیمساز ربع سوم خط $y = x$ بوده و دارای شیبی برابر با $m = ۱$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} m = ۱ \\ m' = \frac{۲}{۳} \end{cases} \to \tan\alpha = \left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right| = \left|\frac{۱-\frac{۲}{۳}}{۱+۱\times\frac{۲}{۳}}\right| = \left|\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۵}{۳}}\right| = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$$

۴۲- گزینه ۳

باید $f\left(۲\right) = ۹$ باشد تا حد $\frac{۰}{۰}$ را با هوپیتال رفع ابهام کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f\left(۲+h\right)-۹}{h} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{h\to ۰}\frac{f'\left(۲+h\right)}{۱} = \frac{۳}{۲} \to f'\left(۲\right) = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \to g'(x) = ۱\times\sqrt{f(x)} + \frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}\times x$$

به ازای $x = ۲$ داریم:

$$g'\left(۲\right) = \sqrt{f(۲)} + \frac{f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}} \times ۲ = ۳ + \frac{\frac{۳}{۲}}{۳} = ۳/۵$$

۴۳- گزینه ۱

ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = (x - ۱)^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}} = \left(x^{۲} - ۲x + ۱\right)\sqrt[۳]{x^{۲}} = x^{\frac{۸}{۳}} - ۲x^{\frac{۵}{۳}} + x^{\frac{۲}{۳}}$$

بنابراین

$$y' = ۰ \rightarrow \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۱۰}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} + \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = ۰ \rightarrow \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}\left(۴x^{۲} - ۵x + ۱\right) = ۰ \rightarrow x_{۱} = ۱\,, x_{۲} = \frac{۱}{۴}$$

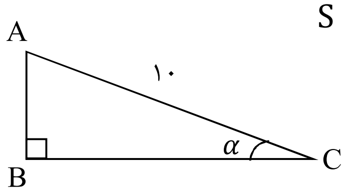
x		$\frac{۱}{۴}$		۱	
y'	+	۰	−	۰	+
y	↗	Max	↘	Min	↗

$\Rightarrow$ $x = \frac{۱}{۴}$ طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی است.

۴۴- گزینه ۲

$$\sin\alpha = \frac{AB}{۱۰} \rightarrow AB = ۱۰\sin\alpha \quad ,\cos\alpha = \frac{BC}{۱۰} \rightarrow BC = ۱۰\cos\alpha$$

$$S = \frac{۱}{۲}(BC \times AB) = \frac{۱}{۲}\left(۱۰\cos\alpha\right)\left(۱۰\sin\alpha\right) = ۲۵\sin ۲\alpha$$



$$S' = \left(۵۰\sin ۲\alpha\right)\alpha' = ۵۰ \times \frac{۱}{۲} \times \left(-\frac{۱}{۲۰}\right) = -۱/۲۵$$

پس مساحت با سرعت ۱/۲۵ کاهش می‌یابد.

۴۵- گزینه ۳

اولا: نمودار تابع در $x = ۱$ انفصال مضاعف دارد، پس:

$$x^{۲} + bx + c = (x - ۱)^{۲} = x^{۲} - ۲x + ۱ \;\; \rightarrow b = -۲\,, c = ۱$$

ثانیا: در $x = -۲$ اکسترمم وجود دارد. پس: $f'(-۲) = ۰$

$$f(x) = \frac{x^{۲} + a}{(x - ۱)^{۲}} \rightarrow f'(x) = \frac{۲x(x - ۱)^{۲} - ۲\left(x - ۱\right)\left(x^{۲} + a\right)}{(x - ۱)^{۴}} = ۰$$

$$\xrightarrow{x=-۲} \left(-۴\right)\left(۹\right) - ۲\left(-۳\right)\left(۴ + a\right) = ۰ \;\rightarrow ۶\left(۴ + a\right) = ۳۶ \;\rightarrow a = ۲$$

۴۶- گزینه ۱

نکته: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از نقطه‌ی $x = a$ تا نقطه‌ی $x = b$ برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

نکته: آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ برابر است با $f'(a)$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع را در بازه‌ی [۱/۲۱ ,۱] به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ متوسط}: \frac{f\left(۱/۲۱\right) - f\left(۱\right)}{۱/۲۱ - ۱} = \frac{\sqrt{۱/۲۱} - \sqrt{۱}}{۰/۲۱} = \frac{۱/۱ - ۱}{۰/۲۱} = \frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۲۱}{۱۰۰}} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

حال آهنگ لحظه‌ای را در $x = ۱$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \rightarrow f'\left(۱\right) = \frac{۱}{۲} \;\rightarrow\; \frac{۱}{۲} - \frac{۱۰}{۲۱} = \frac{۱}{۴۲}$$

۴۷- گزینه ۲

$$f(x) = \frac{۴}{۵}x - \frac{۱}{۵}|x|\,, g(x) = ۴x + |x|$$

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{۴}{۵}\big(۴x + |x|\big) - \frac{۱}{۵}\big|۴x + |x|\big|$$

$$= \begin{cases} \frac{۴}{۵}\big(۴x + x\big) - \frac{۱}{۵}\big|۴x + x\big| = \frac{۴}{۵}\big(۵x\big) - \frac{۱}{۵}\big(۵x\big) = ۴x - x = ۳x\ , & x \geq ۰ \\ \frac{۴}{۵}\big(۴x - x\big) - \frac{۱}{۵}\big|۴x - x\big| = \frac{۴}{۵}\big(۳x\big) + \frac{۱}{۵}\big(۳x\big) = ۳x\ , & x \geq ۰ \end{cases}$$

$$\to (fog)(x) = ۳x \ \to \big((fog)(x)\big)' = ۳$$

۴۸- گزینه ۳

نکته: معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $(a, f(a))$ روی f عبارت است از: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$y = \sqrt{۲xe^{۲-x}} \to y\big(۲\big) = \sqrt{۲ \times ۲e^{۲-۲}} = ۲ \ \to \big(۲،۲\big)$$ نقطه‌ی تماس

$$y' = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}e^{۲-x} - \sqrt{۲xe^{۲-x}} \ \to$$ شیب خط مماس: $$y'\big(۲\big) = \frac{۲}{۲\sqrt{۲ \times ۲}}e^{۲-۲} - \sqrt{۲ \times ۲e^{۲-۲}} = \frac{۱}{۲} - ۲ = \frac{۳}{۲}$$

معادله‌ی خط مماس: $$y - ۲ = -\frac{۳}{۲}\big(x - ۲\big) \to y - ۲ = -\frac{۳}{۲}x + ۳ \to y = -\frac{۳}{۲}x + ۵$$

بنابراین خط مماس محور y ها را با عرض $y = ۵$ قطع می‌کند.

۴۹- گزینه ۳

نکته: اگر تابع $y = ax^۲ + bx + c$ بخواهد همواره نامنفی باشد باید: (۱) $\Delta \leq ۰$ و (۲) $a > ۰$

نکته: اگر در تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ داشته باشیم: $f'(x) \geq ۰$ تابع صعودی و اگر $f'(x) \leq ۰$ تابع نزولی است.

نکته: در تابع درجه سوم $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ ، طول نقطه‌ی عطف برابر است با: $x_{\mathrm{I}} = \frac{-b}{۳a}$

طبق فرض $f(x)$ همواره صعودی است پس باید مشتق آن همواره مثبت باشد. داریم:

$$y = x^۳ - \big(m + ۲\big)x^۲ + ۳x \ \to y' = ۳x^۲ - ۲\big(m + ۲\big)x + ۳ \ ,$$ تابع صعودی $\to y' \geq ۰$

$$\Delta \leq ۰ \ \to ۴\big(m + ۲\big)^۲ - ۳۶ \leq ۰ \ \to ۴\big(m + ۲\big)^۲ \leq ۳۶ \ \to \big(m + ۲\big)^۲ \leq ۹ \to -۳ \leq m + ۲ \leq ۳$$

طول نقطه‌ی عطف $x_{\mathrm{I}} = \frac{m+۲}{۳}$ است. با تقسیم طرفین نامعادله‌ی $-۳ \leq m + ۲ \leq ۳$ بر ۳ داریم: $-۱ \leq \frac{m+۲}{۳} \leq ۱ \to -۱ \leq$ $x_{\mathrm{I}} \leq ۱$. پس مجموعه‌ای که طول نقاط عطف این توابع در آن قرار می‌گیرد برابر [-۱،۱] است.

۵۰- گزینه ۲

ابتدا محل تلاقی نمودار با محور y ها را به دست می‌آوریم: $x = ۰ \rightarrow y = \frac{۰+۰+۸}{۰+۴} = ۲$

مجانب افقی (خط نقطه‌چین) از نقطه‌ی تقاطع نمودار با محور yها، یعنی همان (۰,۲) می‌گذرد. بنابراین معادله‌ی آن به صورت $y = ۲$ می‌باشد. پس $\lim_{x\to\infty} f(x) = ۲$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲ + bx + ۸}{x^۲ + ۴} \xRightarrow{\text{قاعده‌ی پر توان}} \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲}{x^۲} = a = ۲$$

از طرفی نمودار تابع در قسمت مثبت محور x، بر محور طول‌ها مماس است. پس تقاطع $f(x)$ با خط $y = ۰$ باید ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشد.

$$f(x) = ۰ \rightarrow \frac{۲x^۲ + bx + ۸}{x^۲ + ۴} = ۰ \rightarrow ۲x^۲ + bx + ۸ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ی مضاعف مثبت}} \Delta = ۰$$

$$b^۲ - ۶۴ = ۰ \rightarrow b^۲ = ۶۴ \rightarrow \mathrm{b} = \pm ۸$$

می‌دانیم ریشه‌ی مضاعف تابع $y = ax^۲ + bx + ۸$ برابر است با $-\frac{b}{۲a}$. چون باید ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد، پس:

$$-\frac{b}{۲a} > ۰ \xrightarrow{a=۲} -\frac{b}{۴} > ۰ \rightarrow \begin{cases} \mathrm{b} = ۸ \rightarrow \frac{-۸}{۴} = -۲ < ۰ & \times \\ \mathrm{b} = -۸ \rightarrow \frac{۸}{۴} = ۲ > ۰ & \surd \end{cases}$$

بنابراین: $a + b = ۲ + (-۸) = -۶$

۵۱- گزینه ۴

نکته: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ نسبت به متغیر x زمانی که متغیر از $x = a$ تا $x = b$ تغییر می‌کند برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

نکته: آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ برابر است با $f'(a)$

در این پرسش مطابق نکات بالا داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر:} \frac{f(۱/۴۴) - f(۱)}{۱/۴۴ - ۱} = \frac{\frac{۰/۴۴}{۱/۲} - ۰}{۰/۴۴} = \frac{۵}{۶}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}: f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x-۱)}{x} \to f'\left(۱\right) = ۱$$

اختلاف این دو مقدار برابر است با: $۱ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$

۵۲- گزینه ۲

اگر x از سمت راست به $\sqrt{۲}$ نزدیک شود، $x^۲$ نیز از راست به ۲ نزدیک می‌شود. بنابراین $۴ = \left[۴^+\right] = \left[۲x^۲\right]$. پس در این همسایگی تابع به صورت: $f(x) = x^۳ - ۴x$ است. پس:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۴ \to f'_+\left(\sqrt{۲}\right) = ۳\left(\sqrt{۲}\right)^۲ - ۴ = ۲$$

به همین ترتیب اگر فرض کنیم x از سمت چپ به $\sqrt{۲}$ نزدیک می‌شود، $x^۲$ نیز از چپ به ۲ نزدیک می‌شود و بنابراین $\left[۲x^۲\right] = \left[۴^-\right] = ۳$. پس: $f(x) = x^۳ - ۳x$ و داریم:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ \to f'_-\left(\sqrt{۲}\right) = ۳\left(\sqrt{۲}\right)^۲ - ۳ = ۳$$

بنابراین:

$$f'_+\left(\sqrt{۲}\right) - f'_-\left(\sqrt{۲}\right) = ۲ - ۳ = -۱$$

۵۳- گزینه ۲

ابتدا مختصات نقطه‌ی تماس را به دست می‌آوریم:

$$x = ۲ \to y = \ln\frac{\sqrt{۹}}{۳} = \ln ۱ = ۰ \to (۲,۰)$$

برای به دست آوردن شیب خط مماس، کافیست مشتق تابع را در نقطه‌ی $x = ۲$ به دست آوریم:

$$y = \ln\frac{\sqrt{۴x+۱}}{x^۲ - ۲x + ۳} = \ln\sqrt{۴x+۱} - \ln\left(x^۲ - ۲x + ۳\right) = \frac{۱}{۲}\ln\left(۴x+۱\right) - \ln\left(x^۲ - ۲x + ۳\right)$$

$$\to y' = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۴x+۱} - \frac{۲x-۲}{x^۲ - ۲x + ۳} \to y'\left(۲\right) = -\frac{۴}{۹}$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس به صورت زیر است:

$$y-۰=-\frac{۴}{۹}\left(x-۲\right)\ \rightarrow y=-\frac{۴}{۹}x+\frac{۸}{۹}$$

پس عرض از مبدأ این خط برابر $\frac{۸}{۹}$ است.

۵۴- گزینه ۳

اگر $f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-\left(m-۱\right)x^{۲}+۸x$ باشد، ریشه‌های $f'(x)=۲x^{۲}-۲\left(m-۱\right)x+۸$ طول نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع را نشان می‌دهد. چون طبق فرض طول این نقاط منفی است، پس این معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است ($\Delta>۰$) که جمع آن‌ها منفی ($S<۰$) و ضرب آن‌ها مثبت ($P>۰$) است.

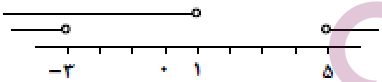
بنابراین:

$$\Delta>۰\rightarrow ۴\left(m-۱\right)^{۲}-۴\left(۲\right)\left(۸\right)>۰\ \rightarrow \left(m-۱\right)^{۲}>۱۶\rightarrow \begin{cases} m-۱>۴\rightarrow m>۵ \\ \text{یا} \\ m-۱<-۴\rightarrow m<-۳ \end{cases}$$

از طرفی:

$$S<۰\rightarrow -\frac{b}{a}<۰\rightarrow \frac{۲\left(m-۱\right)}{۲}<۰\rightarrow\ m-۱<۰\rightarrow m<۱$$

مطابق محور مقابل، اشتراک این دو مجموعه، $m<-۳$ است.



ریشه‌ی مشتق دوم، نشانگر نقطه‌ی عطف است:

$$y''=۴x-۲\left(m-۱\right)=۰\ \rightarrow x=\frac{m-۱}{۲}\xrightarrow{m<-۳} x_I=\frac{m-۱}{۲}<-۲$$

۵۵- گزینه ۱

با توجه به شکل تابع دارای دو مجانب قائم با طول‌های قرینه است. بنابراین ضرب ریشه‌های عبارت واقع در مخرج، منفی و جمع آن‌ها برابر صفر است. بنابراین:

$$ax^{۲}+bx+۱=۰\ ,S=۰\rightarrow -\frac{b}{a}=۰\rightarrow b=۰\ ,P<۰\ \rightarrow \frac{۱}{a}<۰\rightarrow a<۰$$

۵۶- گزینه ۲

نکته: اگر شیب نیم مماس‌های چپ و راست یک تابع در یک نقطه برابر $m_۱$ و $m_۲$ باشد، آنگاه تانژانت زاویه‌ی بین این دو نیم مماس برابر است با: $\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}\right|$

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & -\frac{۱}{۲} \le x < \frac{۱}{۲} \\ x + x^۲ & \frac{۱}{۲} \le x < \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{cases} f'_-\left(\frac{۱}{۲}\right) = (x^۲)'\Big|_{x=\frac{۱}{۲}} = (۲x)\Big|_{x=\frac{۱}{۲}} = ۱ \\ f'_+\left(\frac{۱}{۲}\right) = (x + x^۲)'\Big|_{x=\frac{۱}{۲}} = (۱ + ۲x)\Big|_{x=\frac{۱}{۲}} = ۲ \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \left|\frac{۲ - ۱}{۱ + ۲}\right| = \frac{۱}{۳}$$

۵۷- گزینه ۴

$$x^۲ y - y^۲ - ۲\sqrt{x} + ۴ = ۰ \xrightarrow{\text{از دو طرف مشتق می‌گیریم}} ۲xy + x^۲ y' - ۲yy' - \frac{۱}{\sqrt{x}} = ۰ (*)$$

با جایگذاری $x = ۱$ و $y = ۲$ داریم:

$$۴ + y' - ۴y' - ۱ = ۰ \rightarrow ۳y' = ۳ \rightarrow y'(۱,۲) = ۱$$

حال از طرفین رابطه‌ی (*) مشتق می‌گیریم:

$$۲y + ۲xy' + ۲xy' + x^۲ y'' - ۲y'^۲ - ۲yy'' + \frac{۱}{۲\sqrt{x^۳}} = ۰$$

با جایگذاری $x = ۱$ و $y = ۲$ و $y' = ۱$ داریم:

$$۴ + ۲ + ۲ + y'' - ۲ - ۴y'' + \frac{۱}{۲} = ۰ \rightarrow ۳y'' = \frac{۱۳}{۲} \rightarrow y''(۱,۲) = \frac{۱۳}{۶}$$

۵۸- گزینه ۱

$$\alpha = f^{-۱}(۲) \rightarrow f(\alpha) = ۲ \rightarrow \alpha^۳ - \alpha^۲ + ۲\alpha = ۲ \rightarrow \alpha^۳ - \alpha^۲ + ۲\alpha - ۲ = ۰$$

$$\rightarrow \alpha^{۲}\left(\alpha-۱\right)+۲\left(\alpha-۱\right)=۰\rightarrow\left(\alpha-۱\right)\left(\alpha^{۲}+۲\right)=۰\rightarrow\alpha=۱$$

بنابراین نقطه‌ی مورد نظر $(۲,۱)\in f^{-۱}$ است.

$$\left(f^{-۱}\right)'\left(۲\right)=\frac{۱}{f'(۱)}=\frac{۱}{۳\left(۲\right)-۲\left(۱\right)+۲}=\frac{۱}{۳}\rightarrow m=\frac{۱}{۳}\text{:شیب مماس}\rightarrow m'=-۳\text{:شیب قائم}$$

بنابراین معادله‌ی خط قائم بر منحنی $f^{-۱}$ در نقطه‌ی $x=۲$ واقع بر آن عبارت است از:

$$y-۱=-۳\left(x-۲\right)\rightarrow y+۳x=۷$$

۵۹- گزینه ۳

$$y=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x} & ,\quad x\geq ۰\\ -x\mathrm{e}^{-x} & ,\quad x<۰\end{cases}\rightarrow y'=\begin{cases}\left(۱-x\right)\mathrm{e}^{-x} & ,\quad x>۰\\ -\left(۱-x\right)\mathrm{e}^{-x} & ,\quad x<۰\end{cases}\rightarrow y''=\begin{cases}\left(x-۲\right)\mathrm{e}^{-x} & ,\quad x>۰\\ -(x-۲)\mathrm{e}^{-x} & ,\quad x<۰\end{cases}$$

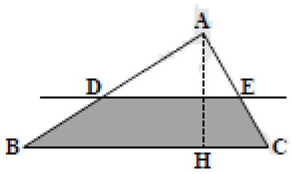
باید بازه‌ای را بیابیم که در آن $y'<۰$ و $y''<۰$ باشد:

$$y'<۰=\begin{cases}\left(۱-x\right)\mathrm{e}^{-x}<۰\ ,\quad x>۰\xrightarrow{\mathrm{e}^{-x}>۰}۱-x<۰,x>۰\rightarrow x>۱\\ -\left(۱-x\right)\mathrm{e}^{-x}<۰,\quad x<۰\xrightarrow{\mathrm{e}^{-x}>۰}۱-x>۰,x<۰\rightarrow x<۰\end{cases}\quad(*)$$

$$y''=\begin{cases}\left(x-۲\right)\mathrm{e}^{-x}<۰,\quad x>۰\xrightarrow{\mathrm{e}^{-x}>۰}x-۲<۰,x>۰\rightarrow ۰<x<۲\\ -\left(x-۲\right)\mathrm{e}^{-x}<۰,\quad x<۰\xrightarrow{\mathrm{e}^{-x}>۰}x-۲>۰,x<۰\rightarrow\varnothing\end{cases}\quad(**)$$

از اشتراک (*) و (**) داریم: $x\in(۱,۲)$

۶۰- گزینه ۳



$$DE||BC\xrightarrow{\text{تالس}}ADE\sim ABC\xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}}\frac{h}{AH}=\frac{DE}{BC}\xrightarrow[BC=۲۰]{AH=۱۲}DE=\frac{۵h}{۳}$$

بنابراین:

$$S_{ADE}=\frac{۱}{۲}h\times DE=\frac{۵h^{۲}}{۶},S_{\text{ذوزنقه}}=S_{ABC}-S_{ADE}=\left(\frac{۱}{۲}\times۲۰\times۱۲\right)-\frac{۵h^{۲}}{۶}\rightarrow S'_{t}=\frac{-۵hh'_{t}}{۳}\xrightarrow{h=۱۲-۹}h'_{t}=-۰/۲$$

۶۱- گزینه ۱

مشتق تابع در نقاط $x = ۰$ و $x = \alpha$ صفر می‌شود ولی یکنوایی تابع فقط در $x = ۰$ تغییر می‌کندو بنابراین مشتق f دارای ریشه‌ی ساده $x = ۰$ و ریشه‌ی مضاعف $x = \alpha$ است.

$$f'(x) = -۴x^۳ + ۲۴x^۲ + ۲ax = -۲x(۲x^۲ + ۱۲x - a)$$

$(۲x^۲ + ۱۲x - a)$ باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\Delta = (۱۲)^۲ - ۴\left(۲\right)(-a) = ۰ \rightarrow a = -\frac{۱۴۴}{۸} = -۱۸$$

۶۲- گزینه ۳

نکته: اگر شیب مماس‌های چپ و راست نمودار تابع f در یک نقطه برابر $m_۱$ و $m_۲$ باشد، آنگاه تانژانت زاویه‌ی بین این دو نیم مماس برابر است با: $\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}\right|$

ابتدا به کمک بازه بندی جزء صحیح را حذف می‌کنیم:

$$f(x) = \left[۲ + \cos\frac{x}{۲}\right]\sin ۲x = \begin{cases} ۲\sin ۲x \ ; ۰ \leq x < \pi \\ \sin ۲x \ ; \ \pi \leq x < ۲\pi \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۴\cos ۲x \ ; ۰ < x < \pi \\ ۲\cos ۲x \ ; \ \pi < x < ۲\pi \end{cases}$$

$$m_۱ = f'_+(\pi) = ۲\cos ۲\pi = ۲ \,, m_۲ = f'_-(\pi) = ۴\cos ۲\pi = ۴$$

بنابراین: $\tan\theta = \left|\frac{۴-۲}{۱+۸}\right| = \frac{۲}{۹}$

۶۳- گزینه ۱

$$x^۲y + y^۲ + ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{از طرفین عبارت مشتق می‌گیریم}} ۲xy + x^۲y' + ۲yy' = ۰ \ (*)$$

با جایگذاری $x = ۲$ و $y = -۱$ داریم:

$$-۴ + ۴y' - ۲y' = ۰ \rightarrow y'\left(۲, -۱\right) = ۲$$

مجددا از طرفین (*) مشتق می‌گیریم:

$$۲x + ۲xy' + ۲xy' + x^۲y'' + ۲y'^۲ + ۲yy'' = ۰$$

با جایگذاری $x = ۲$ و $y = -۱$ و $y' = ۲$ در عبارت اخیر داریم:

$$-۲ + ۸ + ۸ + ۴y'' + ۸ - ۲y'' = ۰ \ \rightarrow ۲y'' = -۲۲ \rightarrow y'' = -۱۱$$

۶۴- گزینه ۴

نکته: اگر f تابعی مشتق‌پذیر و دارای معکوس باشد و $(\alpha,\beta)\in f$ داریم: $\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$

نقطه‌ی مورد نشر به صورت $(\alpha,\beta)\in f^{-1}$ است.

$$(\alpha,0)\in f^{-1}\to(0,\alpha)\in f\to\alpha=f(0)=0+e^{0}=1$$

$$f'(x)=1+e^{x}\to f'(0)=2$$

$$\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}\to \text{شیب خط مماس}: m=\frac{1}{2}\to \text{شیب خط قائم}: m'=-2$$

بنابراین معادله‌ی خط قائم بر نمودار f^{-1} در نقطه‌ی $(1,0)$ عبارت است از:

$$y-0=-2(x-1)\to y+2x=2$$

۶۵- گزینه ۲

نکته: $(ln\ u)'=\frac{u'}{u}$

$$y=\text{x}\ln|x|=\begin{cases}x\ln x & ; \quad x>0\\ \ln(-x)+1 ; & x<0\end{cases}\to y'=\begin{cases}\ln x+1 & ; \quad x>0\\ \ln(-x)+1 ; & x<0\end{cases}\to y''=\begin{cases}\frac{1}{x} ; & x>0\\ \frac{1}{x} ; & x<0\end{cases}$$

اگر بخواهیم تابع نزولی و تقعر آن رو به پایین باشد باید بازه‌ای را بیابیم که در آن $y''<0$ و $y'<0$:

$$y''<0:\begin{cases}x>0 \quad ; \quad \frac{1}{x}<0\to x<0 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط اولیه}} \emptyset\\ x<0 ; \frac{1}{x}<0 \to x<0 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط اولیه}} x<0 \quad (1)\end{cases}$$

بنابراین کافی است به ازای $x<0$ نامعادله‌ی $y'<0$ را حل کنیم:

$$\ln(-x)+1<0\to\ln(-x)<-1\to -x<e^{-1}\to x>-\frac{1}{e}\quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) داریم: $-\frac{1}{e}<x<0$

۶۶- گزینه ۱

با فرض $\text{AM}=\text{I}$ داریم: $\cos\theta=\frac{AM}{AB}=\frac{I}{10}$

با مشتق‌گیری از طرفین عبارت بالا داریم: $-\theta'_t.\sin\theta=\frac{I'_t}{10}\quad (*)$

در لحظه‌ای که $I=۶$ است، داریم: $\cos\theta=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}\to\sin\theta=\frac{۴}{۵}$

با جایگذاری در (*) داریم: $-\theta'_t\times\frac{۴}{۵}=\frac{۰/۲}{۱۰}\to\theta'_t=\frac{-۵\times۰/۲}{۴\times۱۰}=-\frac{۱}{۴۰}=-۰/۰۲۵$

دقت کنید که علامت منفی به معنای کاهش اندازه‌ی زاویه‌ی θ است.

۶۷- گزینه ۱

با توجه به شکل، تابع در $x=-۱$ دارای مماس افقی و نقطه‌ی عطف است؛ بنابراین $f'(-۱)=f''(-۱)=۰$

$$f(x)=x^۴-x^۳+ax^۲+bx\to f'(x)=۴x^۳-۳x^۲+۲ax+b\to f''(x)=۱۲x^۲-۶x+۲a$$

$$\begin{cases}f''(-۱)=۰\to ۱۲+۶+۲a=۰\to a=-۹\\ f'(-۱)=۰\to -۴-۳-۲a+b=۰\xrightarrow{a=-۹} b=-۱۱\end{cases}$$

۶۸- گزینه ۳

$$y=\sin^۲u\to y'=u'\sin ۲u$$

$$y=۲\sin^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\to y'=۲\times(-\frac{۱}{۴})\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲})\to y'(\frac{\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}$$

۶۹- گزینه ۴

$$\mathrm{F}(x,y)=۴\sqrt{xy}+\frac{۱}{۲y}-۲x-۱=۰\to y'_x=-\frac{\mathrm{F}'_x(x,y)}{\mathrm{F}'_y(x,y)}=\frac{۴\sqrt{y}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-۲}{۴\sqrt{x}\times\frac{۱}{۲\sqrt{y}}-\frac{۱}{y^۲}}$$

$$m_{\text{مماس}}:y'(۴,۱)=\frac{۴(۱)\left(\frac{۱}{۴}\right)-۲}{۴(۱)\left(\frac{۱}{۲}\right)-۱}=-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

با معلوم بودن شیب خط مماس و مختصات نقطه‌ی تماس، معادله‌ی مماس به صورت زیر است:

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی خط مماس}} y-۱=\frac{۱}{۳}(x-۴)\to ۳y-x=۱$$

۷۰- گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\sin^۲ x-\cos ۲x\ ;\ ۰<x\leq \frac{\pi}{۴}\\ a\tan x+b\sin ۲x\ ;\ \frac{\pi}{۴}<x\leq\frac{\pi}{۲}\end{cases}\to f'(x)=\begin{cases}\sin ۲x+۲\sin ۲x=۳\sin ۲x\ ;\ ۰<x\leq\frac{\pi}{۴}\\ a(۱+\tan^۲ x)+۲b\cos ۲x\ ;\ \frac{\pi}{۴}<x\leq\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

برای آنکه تابع f در $x=\frac{\pi}{۴}$ مشتق‌پذیر باشد، باید:

(۱) تابع f در $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد. داریم:

$$\begin{cases}\text{حد چپ و مقدار تابع در } x=\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{۲}\\ \text{حد راست تابع در } x=\frac{\pi}{۴}=a+b\end{cases}\xrightarrow{\text{مقدار=حد چپ=حد راست}} a+b=\frac{۱}{۲}$$

(۲) مشتق راست و چپ تابع f در $x=\frac{\pi}{۴}$ برابر باشند. داریم:

$$\begin{cases}f'_-\left(\frac{\pi}{۴}\right)=۳\\ f'_+\left(\frac{\pi}{۴}\right)=۲a\end{cases}\xrightarrow{f'_+=f'_-}۲a=۳\to a=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}(۱)} b=-۱$$

۷۱- گزینه ۱

برای آنکه تابع $f(x)=-x^۴+۸x^۳-۱۸x^۲$، نزولی و تقعر نمودار آن رو به بالا باشد، باید علامت مشتق اول و دوم این تابع به ترتیب منفی و مثبت باشد، پس داریم:

$$f'(x)=-۴x^۳+۲۴x^۲-۳۶x\to f''(x)=-۱۲x^۲+۴۸x-۳۶$$

$$\text{تابع نزولی است}\to f'(x)<۰\to -۴x^۳+۲۴x^۲-۳۶x<۰\to -۴x\left(x^۲-۶x+۹\right)<۰\to$$

$$-۴x\left(x-۳\right)^۲<۰\to -۴x<۰\to x>۰$$

$$\text{تقعر تابع رو به بالا است}\to f''(x)>۰\to -۱۲x^۲+۴۸x-۳۶>۰\to -۱۲\left(x^۲-۴x+۳\right)>۰\to$$

$$x^۲-۴x+۳<۰\to ۱<x<۳$$

۷۲- گزینه ۴

از نمودار رسم شده در صورت تست پی می‌بریم که تابع دارای مجانب قائمی با طول مثبت است. از طرفی در اطراف مجانب قائمش، شکل نمودار به صورت مقابل است. پس قطعاً مخرج کسر دارای ریشه‌ی مضاعف مثبتی است. پس داریم:

$$\xrightarrow{\text{شرط وجود ریشه‌ی مضاعف مخرج}} \Delta_{\text{ی مخرج}} = ۰ \to b^۲ - ۱۶ = ۰ \to b^۲ = ۱۶ \to \begin{cases} b = ۴ & \text{غ‌ق‌ق} \\ b = -۴ \end{cases}$$

چون به ازای $b = ۴$ مخرج دارای ریشه‌ی مضاعف منفی $x = -۲$ خواهد بود، پس غیر قابل قبول است. اگر بیشتر به نمودار تابع دقت کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که عرض از مبدأ تابع مثبت بوده و طول از مبدأ آن منفی است. پس داریم:

$$f(x) = \frac{x+a}{x^۲+bx+۴} \to \begin{cases} \xrightarrow{x=۰} y_{\text{عرض از مبدأ}} = \frac{a}{۴} > ۰ \to a > ۰ \\ \xrightarrow{y=۰} x_{\text{عرض از مبدأ}} = -a < ۰ \to a > ۰ \end{cases}$$

۷۳- گزینه ۱

$$x_۲ = ۶/۲۵ \text{ تا } x_۱ = ۴ \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع از } = \frac{f(۶/۲۵) - f(۴)}{۶/۲۵ - ۴} = \frac{\sqrt{\frac{۶۲۵}{۱۰۰}} - \sqrt{۴}}{\frac{۲۲۵}{۱۰۰}} = \frac{\frac{۲۵}{۱۰} - ۲}{\frac{۲۲۵}{۱۰۰}} = \frac{\frac{۵}{۱۰}}{\frac{۲۲۵}{۱۰۰}} = \frac{۲}{۹}$$

$$x = ۴ \text{ آهنگ لحظه‌ای تابع در نقطه‌ای به طول } = f'(۴) = \frac{۱}{۲\sqrt{۴}} = \frac{۱}{۴}$$

$$\to \text{آهنگ متوسط} - \text{آهنگ لحظه‌ای} = \frac{۱}{۴} - \frac{۲}{۹} = \frac{۹-۸}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶}$$

۷۴- گزینه ۳

$$y = \sin^۳\sqrt{۲x} = \left(\sin\sqrt{۲x}\right)^۳ \xrightarrow{\sin\sqrt{۲x}=u} y' = ۳u^۲.u' = ۳\left(\sin\sqrt{۲x}\right)^۲.\left(\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}.\cos\sqrt{۲x}\right)$$

$$\to y'\left(\frac{\pi^۲}{۱۸}\right) = ۳\left(\sin\frac{\pi}{۳}\right)^۲\left(\frac{۱}{\frac{\pi}{۳}}\cos\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۹}{\pi}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۹}{\pi}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۲۷}{۸\pi}$$

۷۵- گزینه ۴

$$y = xe^{x^{۲}-۴} \rightarrow y' = e^{x^{۲}-۴} + ۲xe^{x^{۲}-۴} \times x = e^{x^{۲}-۴}(۱ + ۲x^{۲})$$

$$\left.\begin{matrix} x_{\text{پای قائم}} = ۲ \rightarrow y_{\text{پای قائم}} = ۲ \xrightarrow{\text{پای قائم}} A\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۲ \end{matrix}\right. \\ m_{\text{قائم}} = -\dfrac{۱}{y'(۲)} = -\dfrac{۱}{۹} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط قائم}} y - ۲ = -\frac{۱}{۹}(x - ۲)$$

حال با معلوم بودن معادله‌ی خط قائم، محل برخورد این خط با محور xها را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\xrightarrow{y=۰} ۰ - ۲ = -\frac{۱}{۹}\left(x - ۲\right) \rightarrow -۲ = -\frac{۱}{۹}x + \frac{۲}{۹} \rightarrow \frac{۱}{۹}x = \frac{۲۰}{۹} \rightarrow x = ۲۰$$

۷۶- گزینه ۲

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۳}{x} - ۵ \quad ; \quad x \geq ۱ \\ x^{۲} + ax + b \,;\, x < ۱ \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-۳}{x^{۲}} \quad ; \quad x \geq ۱ \\ ۲x + a \;;\; x < ۱ \end{cases}$$

برای آنکه تابع f در نقطه‌ای به طول $x = ۱$ مشتق‌پذیر باشد، باید:

۱) تابع f در $x = ۱$ پیوسته باشد. داریم:

$$\begin{cases} x = ۱ \text{ حد راست و مقدار تابع در } = -۲ \\ x = ۱ \text{ حد چپ تابع در } = ۱ + a + b \end{cases} \xrightarrow{\text{مقدار=حد چپ=حد راست}} ۱ + a + b = -۲ \rightarrow a + b = -۳ \quad (۱)$$

(۲) مشتق راست تابع f با مشتق چپ تابع در نقطه‌ای به طول $x = ۱$ برابر باشند. داریم:

$$\begin{cases} \text{مشتق راست: } f'_{+}\left(۱\right) = -۳ \\ \text{مشتق چپ: } f'_{-}\left(۱\right) = ۲ + a \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق چپ=مشتق راست}} ۲ + a = -۳ \rightarrow a = -۵ \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}(۱)} b = ۲$$

۷۷- گزینه ۱

برای آنکه تابع $f(x) = \frac{۱}{۴}x^{۴} + \frac{۱}{۲}x^{۳} - ۳x^{۲}$، صعودی و تقعر نمودار آن رو به پایین باشد، باید علامت مشتق اول و دوم این تابع به ترتیب مثبت و منفی باشد، پس داریم:

$$f'(x) = x^۳ + \frac{۳}{۲}x^۲ - ۶x \ \rightarrow f''(x) = ۳x^۲ + ۳x - ۶$$

$$\text{تابع صعودی است} \ \rightarrow f'(x) > ۰ \ \rightarrow x^۳ + \frac{۳}{۲}x^۲ - ۶x > ۰ \rightarrow x\left(x^۲ + \frac{۳}{۲}x - ۶\right) > ۰$$

$$\text{ریشه‌ها}: x = \frac{-\frac{۳}{۲} \pm \sqrt{\frac{۱۰۵}{۴}}}{۲} \rightarrow \begin{cases} x = -۳/۰۰۰ \\ x = ۱/۰۰۰ \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-۳/۰۰۰$		۰		۱/۰۰۰		$+\infty$
f'		−	۰	+	۰	−	۰	+	
f		↘		↗		↘		↗	

$$\rightarrow -۳/۰۰۰ < x < ۰ \ \text{یا} \ x > ۱/۰۰۰ \quad (۱)$$

$$\text{تقعر تابع روبه پایین است} \ \rightarrow f''(x) = ۳x^۲ + ۳x - ۶ < ۰ \rightarrow ۳(x^۲ + x - ۲) < ۰ \rightarrow -۲ < x < ۱ \ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} -۲ < x < ۰$$

۷۸- گزینه ۴

از نمودار رسم شده در صورت تست پی می‌بریم که خط $x = ۰$ مجانب قائم تابع است. پس باید $x = ۰$ ریشه‌ی مخرج کسر باشد. داریم:

$$x + b = ۰ \xrightarrow{x=۰} ۰ + b = ۰ \rightarrow b = ۰ \rightarrow y = \frac{x^۲ + ax - ۲}{x}$$

از طرفی نمودار این تابع شامل مجانب مایلی با شیب مثبت (برابر ۱) و عرض از مبدأ منفی می‌باشد. برای تعیین معادله‌ی مجانب مایل، صورت کسر را بر مخرجش تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$\frac{x^۲ + ax - ۲}{x} = x + a - \frac{۲}{x}$$

$x + a$: خارج قسمت و $-\frac{۲}{x}$: باقیمانده

$$y_{\text{عرض از مبدأ}} < ۰ \rightarrow a < ۰$$

۷۹- گزینه ۱

$$y = \cos^{۲}\left(\tan^{-۱}x\right) \rightarrow y' = \left(\tan^{-۱}x\right)' \times ۲\cos\left(\tan^{-۱}x\right) \times \left(-\sin\left(\tan^{-۱}x\right)\right) ,$$

$$\left(\tan^{-۱}x\right)' = \frac{۱}{۱ + x^{۲}}$$

$$y'\Big|_{x=۱} = \frac{۱}{۱+۱} \times ۲\cos\left(\tan^{-۱}۱\right) \times \left(-\sin\left(\tan^{-۱}۱\right)\right) \xrightarrow{\tan^{-۱}۱ = \frac{\pi}{۴}} y'\Big|_{x=۱} = -\frac{۱}{۲}$$

۸۰- گزینه ۱ و ۲

با توجه به نمودار f نتیجه می‌گیریم که مقدار تابع f' در $x = ۰$ عددی مثبت بوده و با افزایش x مقادیر آن به سمت صفر (به صورت مجانبی) کاهش می‌یابد. همچنین از آنجا که f تابعی فرد است، نتیجه می‌شود f' تابعی زوج خواهد بود. پس هر دو نمودار گزینه‌های (۱) و (۲) برای f' قابل قبول است. توجه کنید که تفاوت دو نمودار (۱) و (۲) در این موضوع است که تابع f در $x = ۰$ مشتق دوم دارد یا خیر که از روی نمودار تابع f این موضوع را نمی‌توان دریافت!

۸۱- گزینه ۳

معادله‌ی تمام خطوط گذرا از نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ با شیب m به صورت کلی مقابل است:

$$y = m\left(x - ۲\right) - ۱$$

برای یافتن شیب خطوط مماس رسم شده بر منحنی $y = \frac{۱}{۲}x^{۲} - x$ از نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ کافی است خطوط گذرا از نقطه‌ی A را با منحنی فوق تلاقی دهیم و به دنبال ریشه‌های مضاعف آن باشیم:

$$\frac{۱}{۲}x^{۲} - x = m\left(x - ۲\right) - ۱ \rightarrow \frac{۱}{۲}x^{۲} - \left(m + ۱\right)x + \left(۲m + ۱\right) = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ی مضاعف}} \Delta = \left(m+۱\right)^{۲} - ۲\left(۲m + ۱\right) = ۰ \rightarrow \Delta = m^{۲} - ۲m - ۱ = ۰ \rightarrow m_{۱}, m_{۲} = \frac{۲ \pm \sqrt{۸}}{۲} = ۱ \pm \sqrt{۲}$$

اگر زاویه‌ی بین این دو مماس را θ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_{۱} - m_{۲}}{۱ + m_{۱}m_{۲}}\right| = \frac{۲\sqrt{۲}}{۱ - ۱} = \text{تعریف نشده} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$

۸۲- گزینه ۲

کافی است معادل تابع را به ازای $x \rightarrow (-۳)^{+}$ پیدا کرده و از آن مشتق بگیریم:

$$x \to (-۳)^{+} : f(x) = (-۳ + x)\sqrt[۳]{۹x} \to f'(x) = \sqrt[۳]{۹x} + (x - ۳) \times \frac{۹}{۳\sqrt[۳]{(۹x)^{۲}}} \to$$

$$f'\left((-۳)^{+}\right) = -۳ + (-۶) \times \frac{۹}{۳ \times ۹} = -۵$$

۸۳- گزینه ۱

اولا مختصات نقطه‌ی تماس در معادله‌ی خط مماس صدق می‌کند، ثانیا شیب خط مماس برابر مشتق تابع در نقطه‌ی تماس است. پس:

$$۲y + x = ۷: \begin{cases} x = ۳ \to y = ۲ \to f(۳) = ۲ \text{ یا } f^{-۱}(۲) = ۳ \\ y = -\frac{x}{۲} + \frac{۷}{۳} \to f'(-۳) = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی $g(x) = \frac{۱}{x} f^{-۱}(x)$ داریم:

$$g'(x) = -\frac{۱}{x^{۲}} f^{-۱}(x) + \frac{۱}{x}\left(f^{-۱}(x)\right)' = -\frac{۱}{x^{۲}} f^{-۱}(x) + \frac{۱}{x} \times \frac{۱}{f'\left(f^{-۱}(x)\right)}$$

$$\to g'(x) = -\frac{۱}{۴} f^{-۱}(۲) + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{f'\left(f^{-۱}(۲)\right)} = -\frac{۳}{۴} - ۱ = -\frac{۷}{۴}$$

۸۴- گزینه ۱

چون تابع $f(x) = x^{۳}e^{-x}$ صعودی و تقعرش روبه بالا است، پس باید توأما $f'(x) > ۰$ و $f''(x) > ۰$ باشد:

$$f'(x) = ۳x^{۲}e^{-x} - x^{۳}e^{-x} = (۳ - x)x^{۲}e^{-x} \xrightarrow{f'(x)>۰} x < ۳ \ \ (I)$$

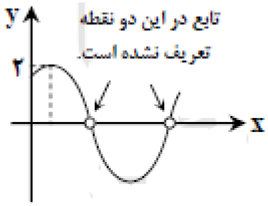
$$f''(x) = -x^{۲}e^{-x} + (۳ - x)۲xe^{-x} - (۳ - x)x^{۲}e^{-x} = (x^{۲} - ۶x + ۶)xe^{-x}$$

ریشه‌های $x^{۲} - ۶x + ۶ = ۰$ برابر $۳ \pm \sqrt{۳}$ و جدول تعیین علامت $f''(x)$ به صورت مقابل است. پس در بازه‌های $۰ < x < ۳ - \sqrt{۳}$ و $x > ۳ + \sqrt{۳}$ داریم: $f''(x) > ۰$ که با اشتراک با بازه‌ی (I) بازه‌ی $(۰, ۳ - \sqrt{۳})$ به دست می‌آید که مورد نظر سوال است.

x		۰		$۳-\sqrt{۳}$		$۳+\sqrt{۳}$	
$f''(x)$	−	۰	+	۰	−	۰	+

۸۵- گزینه ۳

با توجه به دو نقطه‌ای که تابع در آن‌ها تعریف نشده است، نتیجه می‌گیریم که این دو نقطه هم ریشه‌ی مخرج و هم ریشه‌ی صورت هستند:



مخرج: $\sin x + \cos x = ۰ \to \tan x = -۱ \xrightarrow{\text{اولین مقدار مثبت } x} x = \frac{۳\pi}{۴}$

صورت: $a\sin \; x = \frac{۳\pi}{۴} = ۰ \to a \sin\frac{۳\pi}{۲} + b = ۰ \to a = b$

پس ضابطه‌ی تابع f به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f(x) = \frac{a\sin ۲x + b}{\sin x + \cos x} \xrightarrow[۱=\sin^۲ x+\cos^۲ x]{\sin ۲x = ۲\sin x\cos x} \frac{a(\sin x+\cos x)^۲}{\sin x + \cos x} = a(\sin x + \cos x) = a\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

چون $\max\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)\right) = ۱$ لذا با توجه به اینکه $\max(f(x)) = ۱$ است، نتیجه می‌شود که:

$$a\sqrt{۲} = ۲ \to a = \sqrt{۲}$$

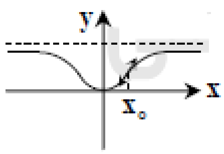
۸۶- گزینه ۱

$$y = \tan^۲(\frac{\pi}{۳} + \sin^{-۱}x) \to y' = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} \times \left(۲\tan\frac{\pi}{۳} + \sin^{-۱}x\right) \times \left(۱ + \tan^۲\left(\frac{\pi}{۳} + \sin^{-۱}x\right)\right)$$

به ازای $x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ داریم $\sin^{-۱}x = \frac{\pi}{۳}$، پس:

$$y'\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{۳}{۴}}} \times \left(۲\tan\frac{۲\pi}{۳}\right) \times \left(۱ + \tan^۲\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)\right) = ۲ \times \left(۲(-\sqrt{۳})\right) \times \left(۱ + (-\sqrt{۳})^۲\right) = -۱۶\sqrt{۳}$$

۸۷- گزینه ۲



با توجه به نمودار f تقعر تابع در نقطه‌ی $x_۰$ عوض شده و چون مماس در آن وجود دارد، پس نقطه‌ی عطف است. لذا مقدار f' که در $x = ۰$ برابر صفر است، مقدارش با افزایش x تا نقطه‌ی $x = x_۰$

افزایش می‌یابد و از آنجا به بعد مقدار f' کاهش می‌یابد تا به صورت حدی به مقدار صفر برسد. همچنین چون تابع f زوج است، لذا f' فرد بوده و در نتیجه تنها نمودار (۲) قابل قبول است.

۸۸- گزینه ۳

معادله‌ی کلی خطوط گذرا از نقطه‌ی $A(۲,۹)$ با شیب m برابر است با: $y = m\left(x - ۲\right) + ۹$

برای یافتن شیب خطوط مماس رسم شده بر منحنی $y = -x^۲ + ۲x + ۵$ از نقطه‌ی $A(۲,۹)$ کافی است خطوط گذرا از نقطه‌ی A را با منحنی فوق تلاقی دهیم و به دنبال ریشه‌های مضاعف آن باشیم:

$$-x^۲ + ۲x + ۵ = m\left(x - ۲\right) + ۹ \rightarrow x^۲ + \left(m - ۲\right)x + (۴ - ۲m) = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ی مضاعف}} \Delta = \left(m - ۲\right)^۲ - ۴\left(۴ - ۲m\right) = ۰ \rightarrow \Delta = m^۲ + ۴m - ۱۲ = ۰ \rightarrow \left(m + ۶\right)\left(m - ۲\right) = ۰$$

$$\rightarrow m_۱ = -۶ \,, m_۲ = ۲$$

اگر زاویه‌ی بین این دو مماس را θ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}\right| = \left|\frac{-۶ - ۲}{۱ + \left(-۶\right)\left(۲\right)}\right| = \frac{۸}{۱۱}$$

۸۹- گزینه ۱

$$f(x) = ۳x + |x| \rightarrow \begin{cases} ۴x & x \geq ۰ \\ ۲x & x < ۰ \end{cases} ,\ g(x) = \frac{۳}{۴}x + a|x| = \begin{cases} \left(\frac{۳}{۴} + a\right)x & x \geq ۰ \\ \left(\frac{۳}{۴} - a\right)x & x < ۰ \end{cases}$$

از آنجا که ضابطه‌های توابع f و g در $x = ۰$ عوض می‌شود و مشتق‌پذیری تابع gof را در مبدأ مختصات خواسته است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(gof)'_{(۰)} \rightarrow \begin{cases} (gof)'_{(۰^+)} = f'_{(۰^+)} \times g'\left(f\left(۰^+\right)\right) = (۴) \times \left(\frac{۳}{۴} + a\right) \\ (gof)'_{(۰^-)} = f'_{(۰^-)} \times g'\left(f\left(۰^-\right)\right) = (۲) \times \left(\frac{۳}{۴} - a\right) \end{cases}$$

باید:

$$(gof)'_{(\cdot^-)} = (gof)'_{(\cdot^+)} \to ۳ + ۴a = \frac{۳}{۲} - ۲a \to ۶a = -\frac{۳}{۲} \to a = -\frac{۱}{۴}$$

۹۰- گزینه ۳

$$g(x) = \sqrt{۲x}f^{-۱}(x) \to g'(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}f^{-۱}(x) + \sqrt{۲x}\left(f^{-۱}(x)\right)' \to g'\left(۲\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}f^{-۱}\left(۲\right) + ۲\left(f^{-۱}\left(۲\right)\right)' \quad (*)$$

$$\begin{cases} f\left(۴\right) = ۲ \to f^{-۱}\left(۲\right) = ۴ \\ f'\left(۴\right) = \frac{۱}{۳} \end{cases} \to \left(f^{-۱}\left(۲\right)\right)' = \frac{۱}{f'\left(۴\right)} = ۳$$

$$\xrightarrow{(*)} g'\left(۲\right) = \frac{۱}{۲} \times ۴ + ۲ \times ۳ = ۸$$

۹۱- گزینه ۲

با توجه به فرض، تابع $f(x) = e^{x-۲x^۲}$ صعودی و تقعرش روبه پایین است. پس: $f''(x) < ۰$ و $f'(x) > ۰$

$$\to f'(x) = \left(۱ - ۴x\right)e^{x-۲x^۲} \xrightarrow{f'(x)>۰} \left(۱ - ۴x\right)e^{x-۲x^۲} > ۰ \xrightarrow{e^{x-۲x^۲}>۰} ۱ - ۴x > ۰ \to x < \frac{۱}{۴} \quad \left(۱\right)$$

$$f''(x) = -۴e^{x-۲x^۲} + \left(۱ - ۴x\right)^۲ e^{x-۲x^۲} = \left(\left(۱ - ۴x\right)^۲ - ۴\right)e^{x-۲x^۲}$$

$$\xrightarrow{f''(x)<۰} \left(۱ - ۴x\right)\left(۳ - ۴x\right)e^{x-۲x^۲} < ۰ \xrightarrow{e^{x-۲x^۲}<۰} \left(۴x + ۱\right)\left(۴x - ۳\right) < ۰ \to -\frac{۱}{۴} < x < \frac{۳}{۴} \quad (۲)$$

مجموعه‌ی جواب نهایی: $\left(۲\right)$ و $\left(۱\right)$ اشتراک $= (-\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴})$

۹۲- گزینه ۲

چون $x = \frac{۳\pi}{۴}$ مجانب قائم تابع f است، پس ریشه‌ی مخرج آن است. یعنی:

$$b+\cos\qquad x=\frac{۳\pi}{۴}=۰\ \rightarrow b+\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰\ \xrightarrow{\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰}\ b=۰$$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=\frac{a\sin x-\cos x}{\cos ۲x}$ می‌شود.

با توجه به ریشه‌های معادله‌ی $\cos ۲x=۰$ نتیجه می‌گیریم که مخرج تابع f به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ نیز صفر می‌شود که در نمودار، تابع f به ازای این نقطه، تعریف نشده است (نقطه‌ی توخالی)، پس صورت تابع f نیز باید به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ صفر شود، یعنی:

$$(a\sin x-\cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{۴}}=۰\rightarrow\frac{a\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰\ \rightarrow a=۱$$

توجه کنید که ضابطه‌ی تابع f به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\cos ۲x}\rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{-۱}{\sin x-\cos x} & x\neq\dfrac{(۲k-۱)\pi}{۴}\\[2ex] \text{تعریف نشده} & x=\dfrac{(۲k-۱)\pi}{۴}\end{cases}$$

۹۳- گزینه ۴

$$y=\ln e^{\sqrt{\sin x}}=\sqrt{\sin x}\times\ln ۱\xrightarrow{sinx=u}y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}=\frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}}\rightarrow y'\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{۶}}{۲\sqrt{\sin\frac{\pi}{۶}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۲}{\sqrt{۲}}}=\frac{\sqrt{۶}}{۴}$$

۹۴- گزینه ۲

باید مینیمم مطلق تابع $y=\frac{۱}{۴}x^۴-x^۳-۲x^۲$ را روی دامنه‌اش یعنی $D_f=\mathrm{R}$ به دست آوریم. برای این منظور باید ابتدا عرض نقاط بحرانی تابع را مشخص کنیم. داریم:

$$y' = x^{۳} - ۳x^{۲} - ۴x = x\left(x^{۲} - ۳x - ۴\right) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \rightarrow y\left(۰\right) = ۰ \\ x = -۱ \rightarrow y\left(-۱\right) = \frac{۱}{۴} + ۱ - ۲ = -\frac{۳}{۴} \\ x = ۴ \rightarrow y\left(۴\right) = ۶۴ - ۶۴ - ۳۲ = -۳۲ \end{cases}$$

سپس مقدار تابع را در بی نهایت به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{۱}{۴}x^{۴} - x^{۳} - ۲x^{۲}\right) \xRightarrow{\text{پر توان}} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{۴}x^{۴} = +\infty$$

حال بین مقادیر به دست آمده، کمترین مقدار را به عنوان مینیمم مطلق تابع معرفی می‌کنیم. داریم:

$$y_{\text{مطلق}\, min} = \min\{۰, -\frac{۳}{۴}, -۳۲, +\infty\} = -۳۲$$

۹۵- گزینه ۳

از روی نمودار تابع f به دو موضوع زیر پی می‌بریم:

۱) نقطه‌ی (۱,۲) متعلق به تابع f است. پس داریم:

$$f'(x) = ax^{\frac{۳}{۲}} + bx^{\frac{۱}{۲}} \rightarrow f\left(۱\right) = ۲ \rightarrow a + b = ۲ \quad (۱)$$

۲) نقطه‌ای به طول $x = ۱$، طول نقطه‌ی عطف تابع f است. پس $f''\left(۱\right) = ۰$ می‌باشد، داریم:

$$f'(x) = \frac{۳}{۲}ax^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۲}bx^{-\frac{۱}{۲}} \rightarrow f''(x) = \frac{۳}{۴}ax^{-\frac{۱}{۲}} - \frac{۱}{۴}bx^{-\frac{۳}{۲}} \rightarrow f''\left(۱\right) = ۰ \rightarrow \frac{۳}{۴}a - \frac{b}{۴} = ۰$$

$$\xrightarrow{\times ۴} ۳a - b = ۰ \quad (۲)$$

با حل دستگاه ایجاد شده از معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\xrightarrow{(۱)\text{و}(۲)} \begin{cases} a + b = ۲ \\ ۳a - b = ۰ \end{cases} \rightarrow ۴a = ۲ \rightarrow a = \frac{۱}{۲}, b = \frac{۳}{۲}$$

۹۶- گزینه ۱

تقعر تابع f در بازه‌ای روبه پایین است که در آن علامت مشتق دوم تابع منفی باشد. داریم: $D_f[۰, +\infty]$

$$y=\left(x+۳\right)\sqrt{x}=x^{\frac{۳}{۲}}+۳x^{\frac{۱}{۲}}\rightarrow y'=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۳}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}\rightarrow y''=\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۴}\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}-\frac{۱}{\sqrt{x^۳}}\right)$$

$$\rightarrow y''=\frac{۳}{۴}\left(\frac{x-۱}{x\sqrt{x}}\right)<۰\xrightarrow{x\geq ۰}x-۱<۰\rightarrow x<۱$$

با توجه به دامنه‌ی تابع f ($x>۰$)، علامت مشتق دوم تابع در فاصله‌ی $۰<x<۱$ منفی است، پس تقعر تابع f در بازه‌ی $(۰,۱)$ روبه پایین است. با توجه به این توضیح، بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۱ می‌باشد.

$$\max(b-a)=۱-۰=۱$$

۹۷- گزینه ۱

ابتدا معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $f(x)=ln\sqrt{\frac{sin\,x}{۱+cos\,x}}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{۲}$ واقع بر آن را نوشته و سپس برای تعیین عرض از مبدأ خط مماس، $x=۰$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=ln\sqrt{\frac{sin\frac{\pi}{۲}}{۱+cos\frac{\pi}{۲}}}=\ln ۱=۰\ \rightarrow A(\frac{\pi}{۲},۰)$$

$$f(x)=ln\sqrt{\frac{sin\,x}{۱+cos\,x}}=\ln\left(\frac{sin\,x}{۱+cos\,x}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}(\ln\sin x-\ln(۱+\cos x))$$

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{cos\,x}{sin\,x}-\frac{-sin\,x}{۱+cos\,x}\right)\rightarrow \mathrm{m}_{\text{مماس}}=f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۰+\frac{۱}{۱+۰}\right)=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی خط مماس}}y-۰=\frac{۱}{۲}\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)\xrightarrow{x=۰}\text{عرض از مبدأ}:y=-\frac{\pi}{۴}$$

۹۸- گزینه ۲

ابتدا عرض نقاط بحرانی را در بازه‌ی (۲،۲-) مشخص می‌کنیم. داریم:

$$y=x^۳-۳x^۲-۹x+۵\ \rightarrow y'=۳x^۲-۶x-۹=۰$$

$$\rightarrow\begin{cases}x=-۱\rightarrow y\left(-۱\right)=-۱-۳+۹+۵=۱۰\\ x=۳\notin\left(-۲,۲\right)\end{cases}$$

حال عرض تابع را در نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه به دست می‌آوریم. داریم:

$$y\left(-۲\right) = -۸ - ۱۲ + ۱۸ + ۵ = ۳$$

$$y\left(۲\right) = ۸ - ۱۲ - ۱۸ + ۵ = -۱۷$$

در آخر بین مقادیر به دست آمده، بیشترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق تابع در این بازه معرفی می‌کنیم:

$$y_{\text{مطلق}\, max} = \max\{۱۰, ۳, -۱۷\} = ۱۰$$

۹۹- گزینه ۲

از روی نمودار رسم شده پی می‌بریم که:

۱) طول ماکزیمم نسبی تابع f برابر با $x = ۳$ است. چون تابع همه جا مشتق‌پذیر است، پس به ازای $x = ۳$ مشتق اول تابع صفر می‌شود. داریم:

$$y = ax^۴ + ۲x^۳ + bx^۲ \to y' = ۴ax^۳ + ۶x^۲ + ۲bx \to y'\left(-۳\right) = ۰ \to ۱۰۸a + ۵۴ + ۶b$$
$$= ۰ \xrightarrow{\div ۶} ۱۸a + b = -۹$$

۲) طول نقطه‌ی عطف افقی تابع $x = ۰$ است. پس $x = ۰$ ریشه‌ی مضاعف مشتق اول و ریشه‌ی ساده‌ی مشتق دوم تابع است. پس داریم:

$$y'' = ۱۲ax^۲ + ۱۲x + ۲b \to y''\left(۰\right) = ۰ \to ۲b = ۰ \to b = ۰ \xrightarrow[b=۰]{\text{جایگذاری در معادله}(۱)} ۱۸a = -۹ \to a = -\frac{۱}{۲}$$

۱۰۰- گزینه ۱

در بازه‌ای تقعر تابع رو به بالا است که در آن بازه علامت مشتق دوم تابع مثبت باشد. پس داریم:

$$y = x\sqrt{x^۲ + ۲} \to y' = ۱ \times \sqrt{x^۲ + ۲} + \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۲}} \times x \to$$

$$y'' = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۲}} + \frac{۲x\sqrt{x^۲ + ۲} + \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۲}} \times x^۲}{x^۲ + ۲} = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۲}} + \frac{۲x\left(x^۲ + ۲\right) - x^۲}{\left(x^۲ + ۲\right)\sqrt{x^۲ + ۲}}$$

$$\frac{x\left(x^{۲}+۲\right)-۲x\left(x^{۲}+۲\right)-x^{۲}}{\left(x^{۲}+۲\right)\sqrt{x^{۲}+۲}}=\frac{۲x+۲x\left(x^{۲}+۲\right)}{\left(x^{۲}+۲\right)\sqrt{x^{۲}+۲}}$$

$$y''>۰\rightarrow\frac{۲x\left(۱+\left(x^{۲}+۲\right)\right)}{\left(x^{۲}+۲\right)\sqrt{x^{۲}+۲}}>۰\xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{\left(۱+\left(x^{۲}+۲\right)\right)\text{ و }\left(۱+\left(x^{۲}+۲\right)\right)}۲x>۰\rightarrow x>۰$$

پس تابع در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ تقعرش رو به بالا است. بنابراین کمترین مقدار a برابر صفر می‌باشد.

۱۰۱- گزینه ۱

عبارت داده شده، مشتق تابع f را در نقطه‌ی $x=-۱$ است. با توجه به اینکه $f(x)=(x-۲)(x+۱)\sqrt[۳]{x^{۲}-۷x}$ داریم:

$$\lim_{h\to۰}\frac{f\left(-۱+h\right)-f(-۱)}{h}\rightarrow f'\left(-۱\right)=\lim_{x\to-۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{\left(x-۲\right)\left(x+۱\right)\sqrt[۳]{x^{۲}-۷x}-۰}{x+۱}$$

$$\lim_{x\to-۱}(x-۲)\sqrt[۳]{x^{۲}-۷x}$$

۱۰۲- گزینه ۲

اولاً باید f روی دامنه‌ی خود پیوسته باشد. تابع f روی هر یک از ضابطه‌های خود پیوسته است. پس فقط پیوستگی تابع f را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x\to۱^-}f(x)=\lim_{x\to۱^+}f(x)=f\left(۱\right)\rightarrow a+b=۲\quad(۱)$$

ثانیاً: تابع f' را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases}ax^{۳}+bx\,;x<۱\\ ۲\sqrt{۴x-۳}\,;x\geq۱\end{cases}\rightarrow\ f'(x)=\begin{cases}۳ax^{۲}+b\,;x<۱\\ \dfrac{۴}{\sqrt{۴x-۳}}\,;x\geq۱\end{cases}$$

هر یک از ضابطه‌های f' روی دامنه‌ی متناظرشان پیوسته هستند (بررسی کنید). پس فقط مشتق‌پذیری تابع f را در نقطه‌ی شکستگی دامنه‌ی تابع، یعنی در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی می‌کنیم. لذا باید داشته باشیم:

$$f'_-\left(۱\right)=f'_+\left(۱\right)\rightarrow۳a+b=۴\quad(۲)$$

$$(۱)\,,(۲):\begin{cases} a+b=۲ \\ ۳a+b=۴ \end{cases} \rightarrow a=b=۱$$

۱۰۳- گزینه ۲

می‌دانیم: $[f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$

$$f(g(x)) = \frac{g^{۳}(x)-۲}{۱+g^{۳}(x)} = \frac{\left(\sqrt[۳]{x-۱}\right)^{۳}-۲}{۱+\left(\sqrt[۳]{x-۱}\right)^{۳}} = \frac{x-۳}{x} = ۱-\frac{۳}{x} \rightarrow [f(g(x))]' = \left(۱-\frac{۳}{x}\right)' = \frac{۳}{x^{۲}}$$

۱۰۴- گزینه ۳

$$f(x) = xe^{x} \xrightarrow{x=۱} f(۱) = e \rightarrow (۱,e) \in f \rightarrow (e,۱) \in f^{-۱}$$

$$\begin{cases} \left(f^{-۱}(e)\right)' = \dfrac{۱}{f'(۱)} \overset{(*)}{\Rightarrow} \dfrac{۱}{۲e} \\ f'(x) = e^{x}+xe^{x} = (x+۱)e^{x} \rightarrow f'(۱) = ۲e \quad (*) \end{cases}$$

معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ی $(e,۱)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y-۱ = \frac{۱}{۲e}(x-e) \xrightarrow{\text{تقاطع با محور } y \text{ها}} y-۱ = \frac{۱}{۲e}(۰-e) \rightarrow y = \frac{۱}{۲}$$

۱۰۵- گزینه ۴

$$y = x^{۴}+ax^{۳}+\frac{۳}{۲}x^{۲} \rightarrow y'' = ۱۲x^{۲}+۶ax+۳ = ۳\left(۴x^{۲}+۲ax+۱\right) \quad (*)$$

تقعر منحنی این تابع همواره رو به بالاست، اگر و فقط اگر به ازای تمام اعداد حقیقی x داشته باشیم $y'' > ۰$، پس با توجه به (*) داریم:

$$\forall x \in R;\ ۴x^{۲}+۲ax+۱ > ۰ \rightarrow \begin{cases} x^{۲} \text{ ضریب } = ۴ > ۰ \\ \Delta = ۴a^{۲}-۱۶ < ۰ \rightarrow a^{۲} < ۴ \rightarrow -۲ < a < ۲ \end{cases}$$

توجه کنید که در واقع، منظور طراح کامل‌ترین جواب بوده است وگرنه در بقیه‌ی گزینه‌ها هم تقعر منحنی روبه بالاست.

۱۰۶- گزینه ۴

با تعیین علامت $x^{۲} - ۴x$، تابع مورد نظر را ضابطه بندی کرده و از روی آن تابع‌های مشتق اول و دوم را به دست می‌آوریم:

$$y = x\left|x^{۲} - ۴x\right| = \begin{cases} x^{۳} - ۴x^{۲} \;;\; x < ۰ \;,\; x > ۴ \\ x^{۳} - ۴x^{۲} \;;\; ۰ \leq x \leq ۴ \end{cases}$$

$$\rightarrow y' = \begin{cases} ۳x^{۲} - ۸x \;;\; x < ۰ \;,\; x > ۴ \\ -۳x^{۲} + ۸x \;;\; ۰ < x < ۴ \end{cases} \rightarrow y'' = \begin{cases} ۶x - ۸ \;;\; x < ۰ \;,\; x > ۴ \\ -۶x + ۸ \;;\; ۰ < x < ۴ \end{cases}$$

جدول تعیین علامت y'' به صورت زیر است:

$$(y'' = ۰ \rightarrow -۶x + ۸ = ۰ \rightarrow x = \frac{۴}{۳})$$

x		۰		$\frac{۴}{۳}$		۴	
	−		+	۰	−		+

همان‌طور که مشاهده می‌کنید تابع y'' در سه نقطه‌ی $x = ۰$ ، $x = \frac{۴}{۳}$ و $x = ۴$ تغییر علامت می‌دهد و هر کدام از آن‌ها در صورتی نقطه‌ی عطف y هستند که حتماً دارای مماس واحد باشند، داریم:

$$\begin{cases} y'_{-}(۰) = y'_{+}(۰) = ۰ \rightarrow y'(۰) = ۰ \quad \text{(مماس واحد)} \\ ۰ < \frac{۴}{۳} < ۴ \rightarrow y'\left(\frac{۴}{۳}\right) = \frac{۱۶}{۳} \quad \text{(مماس واحد)} \quad \rightarrow \text{مجموعه نقاط عطف} = \{۰, \frac{۴}{۳}\} \\ y'_{-}(-۴) = -۱۶ \;,\; y'_{-}(+۴) = +۱۶ \quad \text{(مماس واحد ندارد)} \end{cases}$$

۱۰۷- گزینه ۱

(۱) مطابق نمودار، تابع f فقط در $x = ۰$ محور x را قطع کرده، لذا داریم:

$$f(x) = \frac{x^{۲}(x + a)}{x^{۲} + bx + c} \rightarrow \text{ریشه‌ها}: x = ۰, -a \rightarrow a = ۰$$

(۲) خط $x = ۱$ تنها مجانب قائم تابع f است. پس باید:

$$x^{۲} + bx + c = (x - ۱)^{۲} = x^{۲} - ۲x + ۱ \rightarrow b = -۲ \,, c = ۱$$

در نتیجه $bc - a = -۲$

۱۰۸- گزینه ۳

چون $f'(۱)$ موجود است، پس اولاً تابع f در $x = ۱$ پیوسته است، یعنی:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = f\left(۱\right) = ۱ + a + b = ۱ - ۱ \to a + b = -۱ \quad (۱)$$

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع f در $x = ۱$ با هم برابر است، یعنی:

$$f'(x) = \begin{cases} ۱ + \dfrac{۱}{x^۲} & ; x > ۱ \\ ۲x + a & ; x < ۱ \end{cases} \to f'_-\left(۱\right) = f'_+\left(۱\right) = ۲ + a = ۱ + ۱ \to a = ۰ \quad (۲)$$

$$\left(۱\right), \left(۲\right): b = -۱ \to f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{۱}{x} & ; x \geq ۱ \\ x^۲ - ۱ & ; x < ۱ \end{cases} \xrightarrow{۱-\sqrt{۲}<۱} f\left(۱ - \sqrt{۲}\right) = \left(۱ - \sqrt{۲}\right)^۲ - ۱ = ۲ - ۲\sqrt{۲}$$

۱۰۹- گزینه ۲

معادله‌ی خط گذرا از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۱,۳)$ را به دست می‌آوریم:

$$\left(y - ۲\right) = \frac{۳ - ۲}{-۱ - ۱}\left(x - ۱\right) \to y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲}$$

مطابق فرض، این خط بر نمودار تابع پیوسته‌ی f در نقطه‌ی $x = ۳$ مماس است. پس:

اولا $\quad f\left(۳\right) = -\frac{۱}{۲}\left(۳\right) + \frac{۵}{۲} = ۱ \quad (*)$ $\qquad$ ثانیا $\quad f'\left(۳\right) = m = -\frac{۱}{۲} \quad (**)$

حد عبات مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$L = \lim_{x\to ۳} \frac{f^۲(x) + ۴f(x) - ۵}{۳ - x} = \frac{f^۲\left(۳\right) + ۴f\left(۳\right) - ۵}{۳ - ۳} = \frac{\left(۱\right)^۲ + ۴\left(۱\right) - ۵}{۰} = \frac{۰}{۰} : \text{ابهام}$$

برای رفع ابهام به وجود آمده به یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

راه حل اول:

$$L = \lim_{x\to ۳} \frac{(f(x) - ۵)(f(x) - ۱)}{۳ - x} = \lim_{x\to ۳}\left(f(x) + ۵\right) \lim_{x\to ۳} \frac{-\left(f(x) - f\left(۳\right)\right)}{۳ - x}$$

$$= \left(f\left(۳\right) + ۵\right)\left(-f'\left(۳\right)\right) = ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۳$$

راه حل دوم:

هوپیتال: $\lim_{x\to ۳}\frac{۲f(x)f'(x)+۴f'(x)}{-۱}=\frac{۲f\left(۳\right)f'\left(۳\right)+۴f'\left(۳\right)}{-۱}\xrightarrow{(*),(**)}\frac{۲\left(۱\right)\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)}{-۱}=۳$

۱۱۰- گزینه ۲

می‌دانیم: $[g(f(x))]'=f'(x).g'(f(x))$

$$g\big(f(x)\big)=\frac{f(x)}{\sqrt{۱+f^{۲}(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}{\sqrt{۱+\frac{x^{۲}}{۱-x^{۲}}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}{\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}=x\to[g(f(x))]'=۱$$

۱۱۱- گزینه ۴

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}\xrightarrow{f(x)=۱}۱=\frac{۲x-۱}{x+۲}\to x+۲=۲x-۱\to x=۳\to f\left(۳\right)=۱\to\left(۳,۱\right)\in f$$

$$\to(۱,۳)\in f^{-۱}$$

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}\to f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}۲&-۱\\۱&۲\end{vmatrix}}{\left(x+۲\right)^{۲}}=\frac{۵}{\left(x+۲\right)^{۲}}\to f'\left(۳\right)=\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵}$$

$$\to\left(f^{-۱}\right)'\left(۱\right)=\frac{۱}{f'\left(۳\right)}=\frac{۱}{\frac{۱}{۵}}=۵$$

شیب خط قائم بر نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن عبارت است از:

$$m=-\frac{۱}{\left(f^{-۱}\right)'\left(۱\right)}=-\frac{۱}{۵}$$

معادله‌ی خط قائم مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y-۳=-\frac{۱}{۵}\left(x-۱\right)\xrightarrow{\text{نقاطع با محور } x \text{ ها}}۰-۳=-\frac{۱}{۵}\left(x-۱\right)\to x=۱۶$$

۱۱۲- گزینه ۴

تابع f یک چند جمله‌ای درجه ۳ می‌باشد که روی تمام نقاط دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است. پس تابع f در نقاط اکسترمم نسبی خود، دارای مشتق صفر خواهد بود.

اگر $f'(۱).f'(۴) < ۰$ باشد، طبق قضیه‌ی بولزانو نقطه‌ی c عضو بازه‌ی $(۱,۴)$ موجود است به طوری که $f'(c) = ۰$.

داریم:

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax - ۸ \rightarrow \begin{cases} f'(۱) = ۲a - ۵ \\ f'(۴) = ۸a + ۴۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(۱).f'(۴)<۰} (۲a - ۵)(۸a + ۴۰) < ۰ \rightarrow -۵ < a < ۲/۵$$

۱۱۳- گزینه ۳

با تعیین علامت $x^۲ + x - ۲$ تابع f را ضابطه بندی کرده و تابع مشتق اول را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x - ۱)\left|x^۲ + x - ۲\right| = \begin{cases} x^۳ - ۳x + ۲ & x < -۲\,, x > ۱ \\ -(x^۳ - ۳x + ۲) & -۲ \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۳ & x < -۲\,, x > ۱ \\ -(۳x^۲ - ۳) & -۲ < x < ۱ \end{cases}$$

همان‌طور که می‌دانید، نقاط بحرانی تابع f نقاطی هستند که مشتق در آن‌ها صفر است یا وجود ندارد.

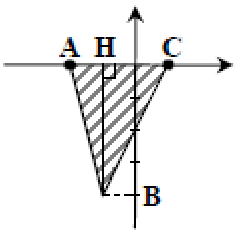
$x = \pm ۱$ ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲ - ۳ = ۰$ هستند که با توجه به ضابطه‌های f' نتیجه می‌شود که $x = \pm ۱$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. زیرا:

$$f'(-۱) = f'(۱) = ۰$$

همچنین تابع f در $x = -۲$ (از نقاط شکستگی دامنه) مشتق ندارد، یعنی این نقطه هم بحرانی است، زیرا داریم:

$$f'_-(-۲) = ۹\,, f'_+(-۲) = -۹ \rightarrow f'_-(-۲) \neq f'_+(-۲)$$

$$
\text{نقاط بحرانی تابع } f: \begin{cases} x=-۲ : f(-۲)=۰ \rightarrow A \Big| \begin{matrix} -۲ \\ ۰ \end{matrix} \\ x=-۱ : f(-۱)=-۴ \rightarrow B \Big| \begin{matrix} -۱ \\ -۴ \end{matrix} \\ x=۱ : f(۱)=۰ \rightarrow C \Big| \begin{matrix} ۱ \\ ۰ \end{matrix} \end{cases}
$$



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BH=\frac{۱}{۲}(۳\times ۴)=۶$$

۱۱۴- گزینه ۴

مطابق شکل، $x=-۱$ عضو دامنه‌ی تابع y نمی‌باشد. پس با توجه به گزینه‌ها که همگی تابع هموگرافیک هستند، تنها در گزینه‌های (۱) و (۴)، $x=-۱$ جزء دامنه‌ی $U(x)$ نیست. همچنین با توجه به نمودار، $y'>۰$ است که بین دو گزینه‌ی (۱) و (۴) فقط گزینه‌ی (۴) قابل قبول است:

$$y=\tan^{-۱}(U(x)) \rightarrow y'=\frac{U'(x)}{۱+U^{۲}(x)} \xrightarrow{y'>۰} U'(x)>۰$$

$$
\begin{cases} \text{گزینه‌ی ۱}: U(x)=\frac{-x+۱}{x+۱} \rightarrow U'(x)=\frac{-۲}{(x+۱)^{۲}}<۰ \quad (\times) \\ \text{گزینه‌ی ۴}: U(x)=\frac{x-۱}{x+۱} \rightarrow U'(x)=\frac{۲}{(x+۱)^{۲}}>۰ \quad (\surd) \end{cases}
$$

توجه: با توجه به نمودار تابع، از آنجا که عرض از مبدأ تابع، عددی منفی است، به راحتی می‌توان گزینه‌ی ۱ را رد کرد.

۱۱۵- گزینه ۴

$$y=\frac{۱-\cos^{۲}x}{۲-\sin^{۲}x}=\frac{\sin^{۲}x}{-\sin^{۲}x+۲}$$

شکل کلی تابع فوق به صورت $y=\frac{au+b}{cu+d}$ است که در آن $u=\sin^{۲}x$ است. پس داریم:

$$y=\frac{au+b}{cu+d}\rightarrow y'=(ad-bc)\times\frac{u'}{(cu+d)^{۲}}\rightarrow y'=\frac{۲-۰}{(-sin^{۲}x+۲)^{۲}}\times\left(۲\sin x\cos x\right)$$

$$=\frac{۲\sin ۲x}{(-sin^{۲}x+۲)^{۲}}\rightarrow y'\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۲}}{(-sin^{۲}\frac{\pi}{۴}+۲)^{۲}}=\frac{۲(۱)}{(\frac{۳}{۲})^{۲}}=\frac{۲}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۸}{۹}$$

۱۱۶- گزینه ۱

برای آنکه تابع $y=-x^{۴}+۴x^{۳}-۳$ صعودی و تقعرش رو به پایین باشد باید علامت مشتق اول و دوم آن به ترتیب مثبت و منفی باشد. پس داریم:

$$\begin{cases} y'=-۴x^{۳}+۱۲x^{۲}>۰\rightarrow -۴x^{۲}\left(x-۳\right)>۰\rightarrow x\in\left(-\infty,۰\right)\cup\left(۰,۳\right) & (۱)\\ y''=-۱۲x^{۲}+۲۴x<۰\xrightarrow{\div ۱۲}x^{۲}-۲x>۰\rightarrow x\in\left(-\infty,۰\right)\cup\left(۲,\infty\right) & (۲)\end{cases}$$

۱۱۷- گزینه ۴

$$y=\frac{x^{۳}}{x^{۲}+۱}\rightarrow y'=\frac{۳x^{۲}\left(x^{۲}+۱\right)-۲x.x^{۳}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{۳x^{۴}+۳x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$$

چون $x=۰$ ریشه‌ی مضاعف مشتق اول است، در نتیجه طول نقطه‌ی عطف افقی تابع می‌باشد (f در $x=۰$ دارای مماس افقی است). از طرفی چون در حوالی این نقطه علامت مشتق اول مثبت است، در نتیجه تابع در اطراف $x=۰$ صعودی می‌باشد. با توجه به این توضیحات، نمودار تابع در حوالی مبدأ مختصات به شکل گزینه‌ی ۴ است.

۱۱۸- گزینه ۱

$$y=\sqrt{۱+tan^{۲}\frac{۱}{x}}\xrightarrow{۱+tan^{۲}\frac{۱}{x}=u}y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}=\frac{\left(۱+tan^{۲}\frac{۱}{x}\right)'}{۲\sqrt{۱+tan^{۲}\frac{۱}{x}}}=\frac{\left(۲\tan\frac{۱}{x}\right)\left(-\frac{۱}{x^{۲}}\right)\left(۱+tan^{۲}\frac{۱}{x}\right)}{۲\sqrt{۱+tan^{۲}\frac{۱}{x}}}$$

$$y\left(\frac{۳}{\pi}\right)=\frac{\left(۲\tan\frac{\pi}{۳}\right)\left(-\frac{\pi^{۲}}{۹}\right)\left(۱+۳\right)}{۲\sqrt{۱+۳}}=\frac{-\frac{۸\sqrt{۳}\pi^{۲}}{۹}}{۴}=-\frac{۲\sqrt{۳}\pi^{۲}}{۹}$$

۱۱۹- گزینه ۳

تابع پیوسته‌ی f در بازه‌ای نزولی است که مشتق آن، یعنی f' کوچکتر از صفر باشد و در بازه‌ای تقعرش رو به بالا است که مشتق دوم آن، یعنی f'' بزرگ‌تر از صفر باشد. داریم:

$$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x \to y'=x^2-2x-3 \to y''=2x-2$$

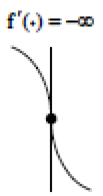
$$\begin{cases} \text{تابع نزولی است} \to y'<0 \to x^2-2x-3<0 \to -1<x<3 \qquad (1) \\ \text{تابع تقعرش رو به بالا است} \to y''>0 \to 2x-2>0 \to x>1 \qquad (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)} 1<x<3$$

۱۲۰- گزینه ۱

روش اول: برای بررسی نمودار تابع $y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات داریم:

$$y'=\frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}}-\frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{4}{5}\left(2\sqrt[5]{x^3}-\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}\right)=\frac{4}{5}\frac{2\sqrt[5]{x^5}-3}{\sqrt[5]{x^2}}=\frac{4}{5}\frac{2x-3}{\sqrt[5]{x^2}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم $x=0$ ریشه‌ی مضاعف مخرج y' است. پس علامت مشتق در دو طرف این نقطه تغییر نکرده و تابع در اطراف این نقطه یا صعودی است و یا نزولی. برای پی بردن به این موضوع، داریم:



$$y'(0)=\frac{4}{5}\left(\frac{-3}{0^+}\right)=-\infty \Rightarrow$$ تابع در حوالی $x=0$ نزولی است

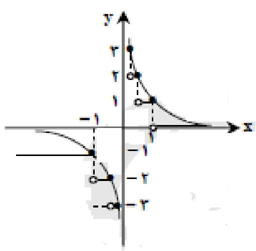
از طرفی چون شیب خط مماس $-\infty$ است، در نتیجه نمودار در حوالی $x=0$ به شکل روبه‌رو است.

روش دوم: در توابع رادیکالی با فرجه فرد، ریشه‌های ساده یا مکرر فرد زیر رادیکال، طول نقاط عطف قائم منحنی محسوب می‌شوند. نمودار تابع در اطراف نقاط عطف قائم به یکی از دو شکل روبه‌رو می‌باشد.

داریم: $$y=x^{\frac{8}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}=(x-4)\sqrt[5]{x^3}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم $x=0$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی سوم عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد است. پس بدون هیچ‌گونه بررسی و توجه به نکته‌ی بالا، $x=0$ عطف قائم می‌باشد.

۱۲۱- گزینه ۴



راه حل اول: تابع $[f]$ در بازه‌ای مشتق‌پذیر است که در آن بازه پیوسته باشد. می‌توان با رسم شکل تابع در مورد پیوستگی بحث کرد.

با توجه به شکل تابع در فاصله‌های $x < ۱$ و $-۱ \leq x$ پیوسته است.

راه حل دوم: این تابع در بازه‌ای پیوسته است که خروجی براکت تنها یک مقدار داشته باشد. حال با توجه به ضابطه‌ی $y = \left[\frac{۱}{x}\right]$ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی ۱: چون $x = ۰$ در این بازه ریشه‌ی مخرج کسر عبارت داخل براکت است پس تابع در این فاصله ناپیوسته است.

گزینه‌ی ۲:

$-۱ < x < ۰ \rightarrow \frac{۱}{x} < -۱ \rightarrow$ $\left[\frac{۱}{x}\right]$ بی‌شمار خروجی دارد، پس تابع در این فاصله ناپیوسته است.

گزینه‌ی ۳: تابع در این فاصله ناپیوسته است. $x \geq -۱ \rightarrow ۰ < \frac{۱}{x} \leq ۱ \rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = ۰$ یا ۱

گزینه‌ی ۴: تابع در این فاصله پیوسته است. $x < -۱ \rightarrow ۰ > \frac{۱}{x} > ۱ \rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = -۱$

۱۲۲- گزینه ۱

تابع f در بازه‌ی [۱,۱-] شرایط قضیه‌ی رول را دارد، هرگاه:

(۱) در بازه‌ی [۱,۱-] پیوسته باشد:

چون هر یک از ضابطه‌های f چند جمله‌ای و در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند، پس تنها باید شرایط پیوستگی در $x = ۰$ (نقطه‌ی مرزی) را بنویسیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \left(x^۲ + cx\right) = ۰ = f(۰) \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} (ax + b) = b \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} b = ۰$$

۲) در بازه‌ی (۱,۱-) مشتق‌پذیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & -۱ \leq x < ۱ \\ x^۲ + cx & ۰ \leq x < ۱ \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} a & -۱ < x < ۰ \\ ۲x + x & ۰ \leq x < ۱ \end{cases}$$

برای مشتق‌پذیر بودن f در بازه‌ی (۱,۱-) باید مشتق‌های

$$\rightarrow \begin{cases} f'_-\left(۰\right) = a \\ f'_+\left(۰\right) = ۲\left(۰\right) + c \end{cases} \rightarrow a = c$$

(۳) $f\left(-۱\right) = f\left(۱\right)$ باشد.

$$\begin{cases} f\left(-۱\right) = a + b \\ f\left(۱\right) = ۱ + c \end{cases} \rightarrow -a + b = ۱ + c \xrightarrow[a=c]{b=۰} -a + ۰ = ۱ + a \rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۱۲۳- گزینه ۴

با کمک فرمول مشتق تابع مرکب، مشتق fog را در $x = ۲$ می‌نویسیم:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x)) \rightarrow (fog)'\left(۲\right) = g'\left(۲\right)f'\left(g\left(۲\right)\right)$$

چون $\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}\sqrt{۵(۲) - ۹} = g\left(۲\right)$ بنابراین: $\quad (*) \quad (fog)'\left(۲\right) = g'\left(۲\right)f'\left(\frac{۱}{۴}\right)$

با مشتق‌گیری از توابع f و g خواهیم داشت:

$$f(x) = sin^{۲}\pi x \rightarrow f'(x) = ۲\pi \sin \pi x \cos \pi x \rightarrow f'\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۲\pi \sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴} = ۲\pi \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \pi$$

$$g(x) = \frac{۱}{۴}\sqrt{۵x - ۹} \rightarrow g'(x) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۵}{۲\sqrt{۵x - ۹}} \rightarrow g'\left(۲\right) = \frac{۵}{۸}$$

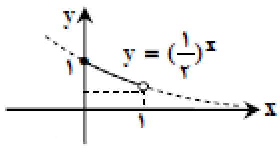
بنابراین از (*) و مقادیر به دست آمده، حاصل مشتق را می‌یابیم: $\quad (fog)'\left(۲\right) = \frac{۵}{۸} \times \pi = \frac{۵\pi}{۸}$

۱۲۴- گزینه ۲

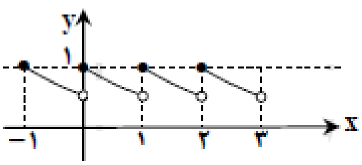
ابتدا تابع $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم: $\quad \begin{cases} f(x) = [x] - x \\ g(x) = ۲^{x} \end{cases} \rightarrow g(f(x)) = ۲^{[x]-x}$

از آنجا که تابع $y = [x] - x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب یک است تابع $y = [x] - x$ و در نتیجه gof هم تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب یک است. بنابراین برای رسم نمودار gof کافی است نمودار را در یک دوره‌ی تناوب رسم کنیم و سپس آن را به بازه‌های دیگر تعمیم دهیم.

$$۰ \leq x < ۱ \rightarrow [x] = ۰ \rightarrow gof(x) = ۲^{-x} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x} \rightarrow$$



بنابراین نمودار تابع در R به صورت زیر است:



با توجه به نمودار، تابع در نقاط صحیح دارای ماکزیمم نسبی است ولی مینیمم نسبی ندارد.

۱۲۵- گزینه ۴

راه حل اول:

از تابع $y=\frac{۳a+x}{\sqrt[۴]{a^۳x}}$ مشتق می‌گیریم و نقطه‌ی مینیمم را می‌یابیم:

$$y=\frac{۳a+x}{\sqrt[۴]{a^۳x}}=\frac{۱}{\sqrt[۴]{a^۳}}\left(\frac{۳a+x}{\sqrt[۴]{x}}\right)\rightarrow y'=\frac{۱}{\sqrt[۴]{a^۳}}\times\frac{\sqrt[۴]{x}-\frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^۳}}(۳a+x)}{\sqrt[۴]{x^۲}}$$

اگر در صورت، مخرج مشترک بگیریم:

$$y'=\frac{۱}{\sqrt[۴]{a^۳}}\times\frac{۴x-(۳a+x)}{۴\sqrt[۴]{x^۵}}=۰\rightarrow\frac{۳(x-a)}{۴\sqrt[۴]{x^۵}}=۰\rightarrow x=a$$

چون a مثبت است پس در همسایگی $x=a$ مخرج مثبت است و جدول تعیین علامت مشتق در همسایگی a به صورت زیر است:

		a	
y'	-		+
	↘		↗

$x=a$ طول نقطه‌ی مینیمم تابع است $\rightarrow$

با قرار دادن $x=a$ در تابع، مقدار مینیمم را می‌یابیم:

$$y(a)=\frac{۳a+a}{\sqrt[۴]{a^۳\times a}}=\frac{۴a}{a}=۴$$

راه حل دوم: چون a و x مثبت هستند:

$$y=\frac{۳a+x}{\sqrt[۴]{a^۳x}}=\frac{۳a}{\sqrt[۴]{a^۳x}}+\frac{x}{\sqrt[۴]{a^۳x}}=۳\sqrt[۴]{\frac{a^۴}{a^۳x}}+\sqrt[۴]{\frac{x^۴}{a^۳x}}=۳\sqrt[۴]{\frac{a}{x}}+\sqrt[۴]{(\frac{x}{a})^۳}$$

با فرض $\sqrt[۴]{\frac{x}{a}}=t\geq ۰$ داریم: (عبارت با فرجه‌ی زوج منفی نمی‌شود.)

$$y=\frac{۳}{t}+t^۳$$

مینیمم این عبارت، همان مینیمم عبارت داده شده است. بنابراین:

$$y'=\frac{-۳}{t^۲}+۳t^۲=۰\xrightarrow{\times t^۲}t^۴=۱\xrightarrow{t\geq۰}t=۱\rightarrow y\left(۱\right)=۳+۱=۴$$:مینیمم

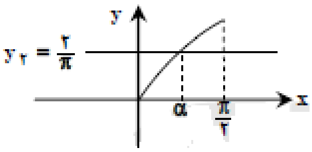
۱۲۶- گزینه ۴

برای بررسی جهت تقعر تابع، باید مشتق دوم را به دست بیاوریم:

$$y=\sin x+\frac{x^{۲}}{\pi}\rightarrow y'=\cos x+\frac{۲x}{\pi}\rightarrow y''=-\sin x+\frac{۲}{\pi}\rightarrow \sin x=\frac{۲}{\pi}$$

با رسم نمودارهای $y_{۱}=\sin x$ و $y_{۲}=\frac{۲}{\pi}$ در یک دستگاه مختصات در بازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ داریم:

نمودارها یک نقطه‌ی تقاطع دارند.



پس در یک نقطه جهت تقعر تابع عوض می‌شود. بنابراین:

$$\begin{cases}[۰,\alpha):\frac{۲}{\pi}>\sin x\rightarrow \frac{۲}{\pi}-\sin x>۰\rightarrow y''>۰\rightarrow \text{تقعر رو به بالا}\\ \left(\alpha,\frac{\pi}{۲}\right):\frac{۲}{\pi}<\sin x\rightarrow \frac{۲}{\pi}-\sin x<۰\rightarrow y''<۰\rightarrow \text{تقعر رو به پایین}\end{cases}$$

بنابراین تقعر تابع y در بازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است.

۱۲۷- گزینه ۳

نمودار تابع f مجانب افقی خود را در نقطه‌ای به طول $x=۰$ قطع کرده، بنابراین چون $f(۰)=۲$ است پس خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است. بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=۲\rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^{۲}+bx+۲}{x^{۲}+۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^{۲}}{x^{۲}}=a=۲$$

همچنین با توجه به شکل، نمودار تابع f در سمت راست محور yها بر محور xها مماس است. بنابراین معادله‌ی تلاقی تابع f با خط $y=۰$ (محور xها) ریشه‌ی مکرر می‌دهد:

$$f(x)=\frac{۲x^{۲}+bx+۲}{x^{۲}+۱}=۰\rightarrow ۲x^{۲}+bx+۲=۰$$

برای این‌که معادله‌ی فوق ریشه‌ی مکرر (در اینجا مضاعف) بدهد، باید $\Delta=۰$ باشد. بنابراین:

$$\Delta=۰\rightarrow b^{۲}-۴(۲)۲=۰\rightarrow b^{۲}=۱۶\rightarrow b=\pm۴$$

چون منحنی در سمت راست محور yها بر محور xها مماس شده، باید ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد. بنابراین $b=-۴$ قابل قبول است زیرا به ازای آن:

$$۲x^{۲}+bx+۲=۰\rightarrow ۲x^{۲}-۴x+۲=۰\rightarrow ۲(x-۱)^{۲}=۰\rightarrow x=۱>۰$$

۱۲۸- گزینه ۲

با توجه به فرض داریم:

$$f(x)=x+۱+(g(x))^۵ \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} f'(x)=۱+۵g'(x).(g(x))^۴ \quad (*)$$

$$\xrightarrow{x=۰} f'(۰)=۱+۵g'(۰).\left(g(۰)\right)^۴ \xrightarrow{f'(۰)=g(۰)=۱} ۱=۱+۵g'(۰) \rightarrow g'(۰)=۰$$

$$(*) \xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x)=۵g''(x).\left(g(x)\right)^۴+۵g'(x).(۴g'(x).\left(g(x)\right)^۳)$$

$$\xrightarrow{x=۰} f''(۰)=۵g''(۰)\left(g(۰)\right)^۴+۲۰\left(g'(۰)\right)^۲\left(g(۰)\right)^۳ \rightarrow f''(۰)$$

$$=۵g''(۰)(۱)^۴+۲۰(۰)^۲(۱)^۳=۵g''(۰)$$

۱۲۹- گزینه ۱

$$f^{-۱}\left(\frac{۳}{۵}\right)=m \rightarrow f(m)=\frac{۳}{۵} \rightarrow \frac{m}{\sqrt{۱+m^۲}}=\frac{۳}{۵} \xrightarrow{m>۰} \frac{m^۲}{۱+m^۲}=\frac{۹}{۲۵}$$

$$m^۲=\frac{۹}{۱۶} \xrightarrow{m>۰} m=\frac{۳}{۴} \rightarrow$$ نقطه‌ی $\left(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۳}\right)$ روی تابع $f^{-۱}$ قرار دارد

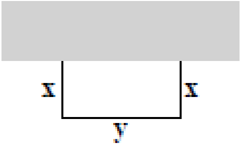
از طرفی مشتق تابع f برابر است با:

$$f'(x)=\frac{۱\left(\sqrt{۱+x^۲}\right)-x\left(\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)}{۱+x^۲}=\frac{\frac{۱+x^۲-x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}}}{۱+x^۲}=\frac{۱}{(۱+x^۲)\sqrt{۱+x^۲}}$$

مشتق مورد نظر برابر است با:

$$\begin{cases} \left(f^{-۱}\right)'\left(\frac{۳}{۵}\right)=\frac{۱}{f'\left(\frac{۳}{۴}\right)} \\ f'\left(\frac{۳}{۴}\right)=\frac{۱}{(۱+\frac{۹}{۱۶})\sqrt{۱+\frac{۹}{۱۶}}}=\frac{۱}{\frac{۲۵}{۱۶}\times\frac{۵}{۴}}=\frac{۶۴}{۱۲۵} \end{cases} \rightarrow \left(f^{-۱}\right)'\left(\frac{۳}{۵}\right)=\frac{۱۲۵}{۶۴}$$

۱۳۰- گزینه ۲



راه حل اول: با توجه به شکل و فرض مسئله، $۲x + y = ۸۸$ است. پس $y = ۸۸ - ۲x$.

تابع مساحت مستطیل برابر است با:

$$S(x,y) = x.y \rightarrow S(x) = x\left(۸۸ - ۲x\right) = ۸۸x - ۲x^{۲}$$

برای به دست آوردن بیشترین مقدار تابع S ، از آن مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = ۸۸ - ۴x = \cdot \rightarrow x = ۲۲ \rightarrow \max(S) = S\left(۲۲\right) = ۲۲\left(۸۸ - ۴۴\right) = ۲۲ \times ۴۴ = ۹۶۸$$

راه حل دوم:

نکته: اگر مجموع دو متغیر مثبت مقداری ثابت باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که دو متغیر با هم برابر باشند.

$$S(x) = x\left(۸۸ - ۲x\right) = ۲(x)(۴۴ - x)$$

مجموع دو متغیر x و $۴۴ - x$ برابر مقدار ثابت ۴۴ است. پس حاصل‌ضرب آن‌ها بیش‌ترین مقدار است که $x = ۴۴ - x$، یعنی $x = ۲۲$ و در آن صورت:

$$\max(S) = S\left(۲۲\right) = ۲ \times ۲۲(۴۴ - ۲۲) = ۹۶۸$$

۱۳۱- گزینه ۱

با توجه به تابع ضمنی $F(x,y) = y^{۳} + ۳xy^{۲} - ۳x^{۳}y = ۱$ ، مقدار y' در نقطه‌ی $(۱,۱)$ برابر است با:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{۳y^{۲} - ۹x^{۲}y}{۳y^{۲} + ۶xy - ۳x^{۳}} \xrightarrow{(۱,۱)} -\frac{۳ - ۹}{۳ + ۶ - ۳} = ۱$$

در نتیجه خط مماس در نقطه‌ی $(۱,۱)$ با شیب ۱، خط $y = x$ است که از نواحی اول و سوم می‌گذرد.

۱۳۲- گزینه ۴

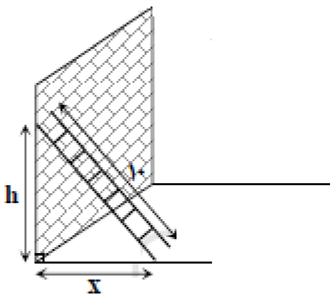
کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری را در نقطه‌ی $x = ۱$ بررسی کنیم:

۱)پیوستگی: $\lim\limits_{x\rightarrow ۱^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\rightarrow ۱^{-}} f(x) = f\left(۱\right) \rightarrow ۱ + a\cos \pi x = b + ۱ \rightarrow ۱ - a = b + ۱ \rightarrow a = -b$

۲)مشتق پذیری: $f'_{+}\left(۱\right) = f'_{-}\left(۱\right) \rightarrow -a\sin \pi x\Big|_{x=۱} = ۲bx + ۱\Big|_{x=۱}$

$$-a\sin \pi x = ۲b + ۱ \rightarrow ۲b + ۱ = \cdot \rightarrow b = -\frac{۱}{۲} \rightarrow a = -\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

۱۳۳- گزینه ۲



طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث هاشور خورده داریم: $h^{۲} + x^{۲} = ۱۰۰ \quad (*)$

چون انتهای نردبان با سرعت $۰/۵(\frac{m}{s})$ به زمین نزدیک می‌شود، پس: $h'_t = ۰/۵(\frac{m}{s})$

وقتی $x = ۶(m)$ باشد، آن‌گاه $h = ۸(m)$ است. حال از رابطه‌ی (*) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$۲h.h'_t + ۲x.x'_t = ۰ \rightarrow ۲\left(۸\right)(-۰/۵) + ۲(۶)(x'_t) = ۰$$

$$\rightarrow x'_t = \frac{۶}{۴} = \frac{۲}{۳}\frac{m}{s}$$

۱۳۴- گزینه ۱

از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = -۴a\sin ۴x + ۲b\cos ۲x \qquad (*)$$

با توجه به نمودار، مقدار مشتق در $x = \frac{\pi}{۱۲}$ برابر صفر است:

$$f'\left(\frac{\pi}{۱۲}\right) = -۴a\sin\frac{\pi}{۳} + ۲b\cos\frac{\pi}{۶} = ۰ \rightarrow -۴a\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + ۲b\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۰ \rightarrow \sqrt{۳}\left(-۲a + b\right) = ۰$$

$$\rightarrow b = ۲a \xrightarrow{(*)} f'(x) = -۴a\sin ۴x + ۴a\cos ۲x$$

حال برای یافتن طول نقاط اکسترمم نسبی، مشتق تابع f را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = ۰ \rightarrow \sin ۴x = \cos ۲x \rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x = \cos ۲x$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos ۲x = ۰ \rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ \text{یا} \\ \sin ۲x = \frac{۱}{۲} \rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۶}, ۲x = k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲}, x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$

با توجه به نمودار، تابع در اولین اکسترمم نسبی با طول منفی برابر ۳- است. طول این اکسترمم با توجه به مجموعه جواب‌های به دست آمده $x = \frac{-\pi}{۴}$ است. پس:

$$f\left(\frac{-\pi}{۴}\right) = -۳ \to a\cos(-\pi) + b\sin\left(\frac{-\pi}{۲}\right) = -۳ \to -a - b = -۳ \xrightarrow{b=۲a} -۳a = -۳ \to a = ۱$$

$$\to b = ۲\left(۱\right) = ۲$$

۱۳۵- گزینه ۳

$$x_۲ = ۵ \text{ تا } x_۱ = ۲ \text{ از } f \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع } = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f\left(۵\right) - f(۲)}{۵ - ۲} = \frac{\frac{۵}{۵-۱} - \frac{۲}{۲-۱}}{۵-۲} = \frac{\frac{۵}{۴} - ۲}{۳} = \frac{-۱}{۴}$$

به علاوه داریم:

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{x} - ۱} \to f'(x) = \frac{x - ۱ - x}{(x-۱)^۲} = \frac{-۱}{(x-۱)^۲}$$

$$x = \alpha \text{ در } f \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع}: f'(\alpha) = \frac{-۱}{(\alpha - ۱)^۲}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\text{آهنگ متوسط} = \text{آهنگ لحظه‌ای} \to \frac{-۱}{۴} = \frac{-۱}{(\alpha-۱)^۲} \to (\alpha - ۱)^۲ = ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} \alpha - ۱ = \pm ۲ \to \begin{cases} \alpha = ۲ + ۱ = ۳ \\ \alpha = -۲ + ۱ = -۱ \end{cases}$$

۱۳۶- گزینه ۱

$$y = cos^۲\frac{\pi}{۳x} = \left(\cos\frac{\pi}{۳x}\right)^۲ \xrightarrow{\cos\frac{\pi}{۳x}=u} y' = ۲\cos\frac{\pi}{۳x}\left(\frac{-\pi}{۳x^۲}\left(-\sin\frac{\pi}{۳x}\right)\right)$$

$$\xrightarrow{۲\cos\alpha\sin\alpha=\sin۲\alpha} y' = \frac{\pi}{۳x^۲}\sin\frac{۲\pi}{۳x} \to y'\left(۴\right) = \frac{\pi}{۳\times ۱۶}\sin\frac{۲\pi}{۱۲} \to y'\left(۴\right) = \frac{\pi}{۴۸}\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۴۸}\times\frac{۱}{۲} = \frac{\pi}{۹۶}$$

۱۳۷- گزینه ۴

چون $f'\left(۱\right)$ موجود است، لذا f در $x = ۱$ پیوسته است و مشتق چپ و راست f در $x = ۱$ با هم برابرند، پس داریم:

$$\begin{cases} \text{مقدار}: f(۱) = a+b \\ \text{حد چپ}: \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-}(ax+b) = a+b \\ \text{حد راست}: \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+}\sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲} = \sqrt[۳]{۸^۲} = \sqrt[۳]{\left(۲^۲\right)^۳} = ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{در } x=۱ \text{ پیوسته}} a+b=۴ \quad (*)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲} & ; \quad x>۱ \\ ax+b & ; \quad x\le ۱ \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} \dfrac{۴}{۳\sqrt[۳]{۲x+۶}} & ; \quad x>۱ \\ a & ; \quad x<۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \to \frac{۴}{۳\sqrt[۳]{۲x+۶}} = a \to a = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{(*)} b = \frac{۱۰}{۳}$$

۱۳۸- گزینه ۱

مختصات نقطه‌ی (۲,-۲) در معادله‌ی $y^۲ = y\ln(x^۲-۳)+۲x$ صدق می‌کند. بنابراین شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی (۲,-۲) برابر با مشتق ضمنی معادله در این نقطه می‌باشد. پس داریم:

$$y^۲ = y\ln(x^۲-۳)+۲x \to ۲yy' = y'\ln(x^۲-۳) + y\frac{۲x}{x^۲-۳} + ۲$$

حال با جایگذاری $x=۲$ ، $y=-۲$ و $y'=m$ در رابطه‌ی فوق شیب خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$۲(-۲)m = m\ln(۴-۳) + (-۲)\times\frac{۴}{۴-۳} + ۲ \to -۴m = ۰-۸+۲ \to -۴m = -۶ \to m_{\text{مماس}} = \frac{۳}{۲}$$

شیب خط قائم، عکس و قرینه‌ی شیب خط مماس است، پس داریم:

$$m'_{\text{قائم}} = \frac{-۱}{\frac{۳}{۲}} = \frac{-۲}{۳} \Rightarrow \text{معادله‌ی خط قائم}: y+۲ = \frac{-۲}{۳}(x-۲) \to y = \frac{-۲}{۳}x - \frac{۲}{۳} \xrightarrow{x=۰} \text{عرض از مبدأ} = \frac{-۲}{۳}$$

۱۳۹- گزینه ۴

$x=\alpha$ طول نقطه‌ی عطف تابع f است. اگر f در $x=\alpha$ دارای خط مماس باشد و f'' در این نقطه تغییر علامت دهد، داریم:

$$f(x) = \frac{(۲-x)^۲}{x} \to f'(x) = \frac{-۲(۲-x)x-(۲-x)^۲}{x^۲} = \frac{x^۲-۴}{x^۲} = ۱-\frac{۴}{x^۲}$$

$$\rightarrow f''(x) = -۴\left(\frac{-۲}{x^{۳}}\right) = \frac{۸}{x^{۳}}$$

		۰	
y''	−		+
y	∩		∪

f'' تنها در $x = ۰$ تغییر علامت می‌دهد، اما f در $x = ۰$ تعریف نشده و دارای خط مماس نیست. پس $x =$ ۰ طول نقطه‌ی عطف منحنی نیست. در نتیجه، تابع f فاقد نقطه‌ی عطف است.

۱۴۰- گزینه ۲

روش اول: با توجه به نمودار خط $x = ۱$ مجانب قائم نمودار است. بنابراین $x = ۱$ ریشه‌ی مخرج می‌باشد:

$$x + b = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۱ + b = ۰ \rightarrow b = -۱ \rightarrow f(x) = \frac{\mathrm{x}^{۲} + a}{\mathrm{x} - ۱}$$

از طرفی منحنی محور xها را در نقطه‌ای بزرگ‌تر از یک قطع می‌کند.. پس داریم:

$$y = ۰ \rightarrow \mathrm{x}^{۲} + a = ۰ \xrightarrow{x>۱} x = \sqrt{-a} > ۱ \rightarrow -a > ۱ \rightarrow a < -۱$$

بنابراین $a < b = -۱$ می‌باشد.

روش دوم: با توجه به نمودار داریم:

$$\text{مجانب قائم}: x = ۱ \rightarrow ۱ + b = ۰ \rightarrow b = -۱$$

به علاوه داریم:

$$\lim_{x\to ۱^{+}} f(x) = -\infty \rightarrow \lim_{x\to ۱^{+}} \frac{\mathrm{x}^{۲} + a}{\mathrm{x} - ۱} = \frac{۱ + a}{۰^{+}} = -\infty \rightarrow ۱ + a < ۰ \rightarrow a < -۱$$

۱۴۱- گزینه ۱

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۴ - ۹}{۳ - ۲} = -۵\,, f'(x) = \frac{-۷۲}{x^{۳}} \rightarrow f'\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right) = \frac{-۷۲}{۱۲} = -۶ \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right) = -۵ - (-۶) = ۱$$

۱۴۲- گزینه ۲

$$y' = ۲ \times \frac{۱}{۴}\cos\left(\frac{\pi}{۳} + \frac{x}{۴}\right)\sin\left(\frac{\pi}{۳} + \frac{x}{۴}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{۳} \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{۲\pi}{۳} + \frac{x}{۲}\right) = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} = -\frac{۱}{۸}$$

۱۴۳-

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} + x - ۱ & x \geq ۱ \\ x\sqrt{x} - x + ۱ & x < ۱ \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۲}\sqrt{x} + ۱ & x > ۱ \\ \frac{۳}{۲}\sqrt{x} - ۱ & x < ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+\left(۱\right) = \frac{۵}{۲} \\ f'_-\left(۱\right) = \frac{۱}{۲} \end{cases} \rightarrow f'_+\left(۱\right) + ۳f'_-\left(۱\right) = \frac{۵}{۲} + \frac{۳}{۲} = ۴$$

۱۴۴- گزینه ۴

$$\ln(x^۲ - y) = \sqrt{y + ۱} - x \rightarrow \frac{۲x - y'}{x^۲ - y} = \frac{y'}{۲\sqrt{y + ۱}} - ۱ \xrightarrow{(۲,۳)} ۴ - y' = \frac{y'}{۴} - ۱ \rightarrow ۱۶ - ۴y' = y' - ۴$$

$$۵y' = ۲۰ \rightarrow y' = ۴$$

خط مماس: $y - ۳ = ۴\left(x - ۲\right) \xrightarrow{y=x} x - ۳ = ۴x - ۸ \rightarrow ۳x = ۵ \rightarrow x = \frac{۵}{۳}$

۱۴۵- گزینه ۲

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x + ۱} & x \geq ۰ \\ \frac{x}{۱ - x} & x < ۰ \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۱}{(x + ۱)^۲} & x > ۰ \\ \frac{x}{(۱ - x)^۲} & x < ۰ \end{cases} \rightarrow f''(x) = \begin{cases} \frac{-۲}{(x + ۱)^۲} & x > ۰ \\ \frac{۲}{(۱ - x)^۲} & x < ۰ \end{cases}$$

چون $f'_+\left(۰\right) = -۲$ و $f'_-\left(۰\right) = ۲$ در $x = ۰$ تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه $x = ۰$ طول نقطه‌ی عطف f خواهد بود. ضمنا خط مماس نیز در صفر وجود دارد چون $f'\left(۰\right) = ۱$

۱۴۶- گزینه ۱

با توجه به شکل، مشتق تابع در دو نقطه به طول‌های $x = ۳$ و $x = ۰$ برابر صفر و ضمناً $x = ۰$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

$$f'(x) = x^{۳} + ۳ax^{۲} + ۲bx \to f'\left(۳\right) = ۲۷ + ۲۷a + ۶b = ۰$$

$$f''(x) = ۳x^{۲} + ۶ax + ۲b \to f''\left(۰\right) = ۲b = ۰ \to b = ۰ \to ۲۷ + ۲۷a + ۰ = ۰ \to a = -۱ \to a + b = -۱$$

۱۴۷- گزینه ۴

ابتدا معادله‌ی خط مماس را از نقطه‌ی $A(۰,\alpha)$ با شیب فرضی m می‌نویسیم:

$$y - \alpha = m(x - ۰)$$

و می‌دانیم معادله‌ی تلاقی خط مماس با منحنی ریشه‌ی مضاعف دارد. پس:

$$\frac{۱}{۲}x^{۲} + ۳ = mx + \alpha \to \frac{۱}{۲}x^{۲} - mx - \alpha + ۳ = ۰ \to x^{۲} - ۲mx - ۲\alpha + ۶ = ۰$$

$$\Delta' = ۰ \to m^{۲} + ۲\alpha - ۶ = ۰ \xrightarrow[\ ]{\text{دو خط عمودند پس}\ m_{۱}.m_{۲} = \frac{c}{a} = -۱} \frac{۲\alpha - ۶}{۱} = -۱ \to \alpha = \frac{۵}{۲}$$

۱۴۸- گزینه ۳

$$f'_{+}\left(۰\right) = \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{x(x + a) - ۰}{x} = a$$

$$f'_{-}\left(۰\right) = \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{-x(x + a) - ۰}{x} = -a$$

$$mm' = -۱ \to -a^{۲} = -۱ \to a^{۲} = ۱ \to a = \pm ۱$$

۱۴۹- گزینه ۱

اگر خطی بر منحنی مماس باشد، معادله‌ی تلاقی آن با منحنی ریشه‌ی مضاعف دارد. پس ابتدا معادله‌ی خط مذکور را می‌نویسیم:

$$m_{AB} = \frac{f\left(+۱\right) - f\left(-۱\right)}{۱ - (-۱)} = \frac{a + ۳ - a + ۳}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳ \to y - \left(a + ۳\right) = ۳\left(x - ۱\right) \to y = ۳x + a$$

حال معادله‌ی این خط را با منحنی تلاقی می‌دهیم:

$$x^{۳} + ax^{۲} + ۲x = ۳x + a \to x^{۳} + ax^{۲} - x - a = ۰ \to x^{۲}(x + a) - (x + a) = ۰$$

$$(x+a)\left(x^{۲}-۱\right)=\cdot\begin{cases}x=۱\\x=-۱\\x=-a\end{cases}\rightarrow a=-۱ \text{ یا } a=۱$$

۱۵۰- گزینه ۱

با فرض $y=\sqrt{۵۰}\sin\theta$ و $x=\sqrt{۵۰}\cos\theta$ داریم:

$$P=۳x+۴y=۳\left(۵\sqrt{۲}\cos\theta\right)+۴(۵\sqrt{۲}\sin\theta)$$

$$\max P=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=\sqrt{۹\times ۵۰+۱۶\times ۵۰}=\sqrt{۱۲۵۰}=\sqrt{۶۲۵\times ۲}=۲۵\sqrt{۲}$$

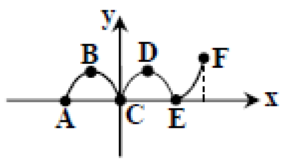
۱۵۱- گزینه ۳

۱۵۲- گزینه ۴

$$\begin{cases}x^{۳}-x=\cdot\rightarrow x\left(x-۱\right)\left(x+۱\right)=\cdot\rightarrow x=\cdot,\pm ۱\\ y'=۳x^{۲}-۱=\cdot\rightarrow x=\dfrac{\pm\sqrt{۳}}{۳}\\ x=۲\end{cases}$$

راه حل دیگر: می‌توانیم نمودار را رسم کنیم:

$$y=x\left(x-۱\right)\left(x+۱\right)=\cdot\begin{cases}x=\cdot\\x=۱\\x=-۱\end{cases}$$



نقاط A تا F بحرانی‌اند.

۱۵۳- گزینه ۱

$$y'=\frac{-۴x}{(x^{۲}+۳)^{۲}}\rightarrow y''=\frac{۴(x^{۲}+۳)^{۲}-۲\left(۲x\right)\left(x^{۲}+۳\right)(۴x)}{(x^{۲}+۳)^{۴}}=\frac{-۱۲x^{۲}+۱۲}{(x^{۲}+۳)^{۳}}$$

$$y''>\cdot\rightarrow -۱۲x^{۲}+۱۲>\cdot\rightarrow x^{۲}<۱\rightarrow -۱<x<۱\rightarrow |x|<۱$$

۱۵۴- گزینه ۳

اولاً $x = ۰$ تنها مجانب قائم است. پس: $b = ۰$

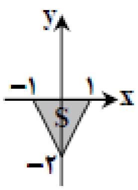
$$f'(x) = \frac{ax^{۲} - ۲x(ax + ۳)}{(x^{۲})^{۲}}$$

ثانیاً: $f'\left(۳\right) = ۰$ پس:

$$x = ۳ \rightarrow ۹a - ۲\left(۳\right)\left(۳a + ۳\right) = ۰ \ \rightarrow -۹a - ۱۸ = ۰ \rightarrow a = -۲ \rightarrow (a, b) = (-۲, ۰)$$

۱۵۵- گزینه ۱

چون نقطه‌ی تماس خط و منحنی روی منحنی قرار دارد، لذا می‌توان مختصات آن را به صورت $T(\alpha, \alpha^{۲} - ۱)$ در نظر گرفت. از طرفی چون $f'(x) = ۲x$، شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی T برابر است با $m = ۲\alpha$. پس معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی T به صورت زیر است:



$$y - y_T = m(x - x_T) \rightarrow y - \left(\alpha^{۲} - ۱\right) = ۲\alpha(x - \alpha)$$

از طرف دیگر، این خط باید از نقطه‌ی (۲-,۰) هم بگذرد. پس:

$$-۲ - \left(\alpha^{۲} - ۱\right) = ۲\alpha\left(۰ - \alpha\right) \rightarrow -۲ - \alpha^{۴} + ۱ = -۲\alpha^{۲} \rightarrow \alpha^{۲} = ۱$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = ۱ \ \ \rightarrow \ \ T\left(۱, ۰\right) \\ \alpha = -۱ \ \rightarrow T\left(-۱, ۰\right) \end{cases}$$

بنابراین مساحت مثلثی که سه رأس آن (۱,۰)، (۱,۰-) و (۲-,۰) باشند، برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}\left(۲\right)\left(۲\right) = ۲$$

۱۵۶- گزینه ۳

چون تابع f در نقطه‌ی c مشتق راست دارد، پس از راست پیوسته است. هم‌چنین چون f در نقطه‌ی c مینیمم دارد، $\lim_{x \to c^+} f(x) \geq f(c)$. بنابراین داریم:

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq ۰ \rightarrow$$ علامت مشتق راست همواره نامنفی است.

۱۵۷- گزینه ۳

چون نقاط به طول‌های ۱ و $-\frac{۱}{۲}$ بر منحنی $y=\frac{۱}{x^۲}$ واقع هستند، لذا با قرار دادن $x=۱$ و $x=-\frac{۱}{۲}$ در ضابطه‌ی تابع، مختصات این نقاط به صورت $A(۱,۱)$ و $B(-\frac{۱}{۲},۴)$ به دست می‌آیند. شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی A و B برابر است با:

$$m=\frac{۴-۱}{-\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{۳}{-\frac{۳}{۲}}=-۲$$

فرض کنید طول نقطه‌ی تماس $x=\alpha$ باشد. در نقطه‌ی تماس شیب خط مماس باید با شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی A و B برابر باشد. لذا داریم:

$$y=\frac{۱}{x^۲}\rightarrow y'(\alpha)=-\frac{۲}{\alpha^۳}=-۲\rightarrow \alpha^۳=۱\rightarrow \alpha=۱$$

بنابراین طول نقطه‌ی مماس $x=۱$ می‌باشد.

۱۵۸- گزینه ۳

اگر $y=f(x)$ باشد و x و y هر دو به متغیر t وابسته باشند، برای بررسی رابطه‌ی بین آهنگ‌های تغییر x و y از طرفین نسبت به t مشتق می‌گیریم؛ یعنی $y'_t=f'(x)x'_t$. هم‌چنین می‌دانیم فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x,y)$ از مبدأ برابر است با $D=\sqrt{x^۲+y^۲}$.
با توجه به این‌که $y=x^۲$ داریم:

$$D^۲=x^۲+y^۲\rightarrow D=\sqrt{x^۲+\left(x^۲\right)^۲}\rightarrow D=\sqrt{x^۲+x^۴}\xrightarrow{\text{از طرفین نسبت به } t \text{ مشتق می‌گیریم}}D'_t=\frac{۲x+۴x^۳}{\sqrt{x^۲+x^۴}}.x'_t$$

$$=\frac{۲x(۱+۲x^۲)}{۲|x|\sqrt{۱+x^۲}}.x'_t\xrightarrow{x'_t=۰/۰۵\ ,\ x=\frac{۱۲}{۵}}D'_t=\frac{۱+۲(\frac{۱۲}{۵})^۲}{\sqrt{۱+(\frac{۱۲}{۵})^۲}}\times\frac{۵}{۱۰۰}=\frac{۱+\frac{۲۸۸}{۲۵}}{\sqrt{\frac{۱۶۹}{۲۵}}}\times\frac{۵}{۱۰۰}=\frac{۳۱۳}{۱۳۰۰}\sim ۰/۲۴$$

بنابراین سرعت دور شدن M از مبدأ مختصات تقریبا ۰/۲۴ است.

۱۵۹- گزینه ۱

$$f(x) = x^{۴} - ۶x^{۲} + ۸x \to f'(x) = ۴x^{۳} - ۱۲x + ۸ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۴\left(x^{۳} - ۳x + ۲\right) = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \left(x - ۱\right)\left(x^{۲} + x - ۲\right) = ۰ \Rightarrow \left(x - ۱\right)^{۲}\left(x + ۲\right) = ۰$$

$x = ۱$ ریشه‌ی مضاعف تابع مشتق $(f'(x))$ بوده و لذا $x = ۱$ تابع نقطه‌ی عطف دارد و $x = -۲$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق بوده و از آزمون اول مشتق داریم:

x		−۲	
f'	−	۰	+
f	↘		↗

$\Rightarrow$ $x = -۲$ طول نقطه‌ی مینیمم نسبی است.

بنابراین این تابع تنها یک مینیمم نسبی دارد.

۱۶۰- گزینه ۱

روش اول: با توجه به این‌که $f(x) = \frac{\sqrt{۱+x^{۲}}}{x}$، لذا $f(x)$ در تمام نقاط دامنه مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x) = -\frac{۱}{x^{۲}}\left(\sqrt{۱ + x^{۲}}\right) + \frac{x}{x\sqrt{۱ + x^{۲}}} \to f'(x) = -\frac{\sqrt{۱ + x^{۲}}}{x^{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^{۲}}} = \frac{-(۱ + x^{۲}) + x^{۲}}{x^{۲}\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$

$$= -\frac{۱}{x^{۲}\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$

چون مشتق همواره مقداری منفی می‌باشد، بنابراین به ازای تمام $x \in D_f$، $f(x)$ هیچ نقطه‌ی بحرانی ندارد.

روش دوم: $f(x)$ تابعی فرد است $(D_f = R - \{۰\}, f(-x) = -f(x))$. لذا برای یافتن نقاط بحرانی، کافی است نقاط بحرانی را برای $x > ۰$ یا $x < ۰$ بیابیم. به خاطر فرد بودن تابع هر نقطه به صورت $A(\alpha, f(\alpha))$ که نقطه‌ی بحرانی باشد، نقطه‌ی $A'(-\alpha, f(-\alpha))$ نیز نقطه‌ی بحرانی می‌شود. به ازای $x > ۰$ داریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{۱ + x^{۲}}}{x} = \sqrt{\frac{۱ + x^{۲}}{x^{۲}}} = \sqrt{\frac{۱}{x^{۲}} + ۱} \to f'(x) = \frac{-\frac{۲}{x^{۳}}}{۲\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}} + ۱}} = \frac{-۱}{x^{۳}\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}} + ۱}}$$

به ازای هیچ $x > ۰$، $f'(x)$ برابر با صفر نمی‌شود. هم‌چنین نقطه‌ای با شرط $x > ۰$ وجود ندارد که $f'(x)$ در آن وجود نداشته باشد. بنابراین تابع برای $x > ۰$ و در نتیجه به خاطر فرد بودن تابع، برای $x < ۰$ نیز هیچ نقطه‌ی بحرانی ندارد. لذا این تابع در کل دامنه‌ی تعریف خود هیچ نقطه‌ی بحرانی ندارد.

۱۶۱- گزینه ۳

$$f(x)=x^{۲}+۲\sqrt{۲}\cos x \to f'(x)=۲x-۲\sqrt{۲}\sin x \to f''(x)=۲-۲\sqrt{۲}\cos x$$

$$f''(x)=۰ \to \cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\cos\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]} x=\frac{\pi}{۴}\ ,x=\frac{۷\pi}{۴}$$

x	۰		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		۲π
f''		−	۰	+	۰	−	
f		∩		∪		∩	

$\Rightarrow$ $x\in(\frac{\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴})$

۱۶۲- گزینه ۲

وقتی $x\to\infty$ منحنی دارای مجانب افقی $y=۲$ می‌باشد و برای $x\to-\infty$ منحنی دارای مجانب مایلی به صورت خط گذرنده از نقاط $A(-۱,۰)$ و $B(۰,-۲)$ می‌باشد. برای یافتن مجانب‌های تابع f داریم:

$$\xrightarrow[\sqrt{x^{۲}+bx+۵}\sim\left|x+\frac{b}{۲}\right|]{\text{معادله‌ی مجانب‌های تابع } f} y=ax+\left|x+\frac{b}{۲}\right|\begin{cases} x\to+\infty: y=\left(a+۱\right)x+\frac{b}{۲} & (*)\\ x\to-\infty: y=\left(a-۱\right)x-\frac{b}{۲}\end{cases}$$

چون وقتی $x\to\infty$ ، خط مجانب، افقی می‌شود. از مقایسه‌ی (*) و خط مجانب افقی $y=۲$ در می‌یابیم باید $a=-۱$ و $b=۴$ باشد. بنابراین دوتایی مرتب (a,b) به صورت (-۱,۴) می‌شود.

تذکر: دقت کنید در حل این تست نیازی به محاسبه‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B نبود و بدون دانستن معادله‌ی این خط نیز a و b به دست آمدند.