دفترچه پاسخ

آزمون ۳۰ آذر ۱۴۰۳

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲و ریاضی‌پایه	کاظم اجلالی-سیدرضا اسلامی-داود بوالحسنی-سینا خیرخواه-محمدرضا راسخ-محمد زنگنه-مهسان گودرزی-مهدی ملارمضانی نیما مهندس-جهانبخش نیکنام
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-اسحاق اسفندیار-علی ایمانی-فاطمه برزویی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-افشین خاصه‌خان-کیوان دارابی علیرضا شریف‌خطیبی-هومن عقیلی-مهرداد ملوندی-نیما مهندس
	ریاضیات گسسته	علی ایمانی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-افشین خاصه‌خان-کیوان دارابی-مصطفی دیداری-علیرضا شریف‌خطیبی-نیلوفر مهدوی نیما مهندس
	فیزیک	مهران اسماعیلی-حسین الهی-بهزاد آزادفر-زهره آقامحمدی-علی برزگر-علیرضا جباری-مسعود خندانی-محسن سلماسی‌وند معصومه شریعت‌ناصری-مهدی شریفی-محمد مقدم-محمدکاظم منشادی-امیراحمد میرسعید-حسام نادری-مجتبی نکوئیان
	شیمی	علیرضا بیانی-محمدرضا پورجاوید-سعید تیزرو-علی جعفری-محمدرضا جمشیدی-امیر حاتمیان-امیرمسعود حسینی پیمان خواجوی‌مجد-حمید ذبحی-یاسر راش-پویا رستگاری-محمدرضا طاهری‌نژاد-محمد عظیمیان‌زواره-محسن مجنونی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲و ریاضی‌پایه	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سیدرضا اسلامی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	حسام نادری	ایمان حسین نژاد
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب مهدی ملارمضانی محمد خندان	امیرحسین ابومحبوب امیرمحمد کریمی محمد خندان	امیرحسین ابومحبوب امیرمحمدکریمی محمد خندان	حسین بصیر بهنام شاهنی زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم احسان پنجه‌شاهی آرش ظریف
ویراستاری رتبه های برتر	سیدماهد عبدی	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	سینا صالحی ماهان فرهمندفر	امیرحسین ملازینل ماهان فرهمندفر آرمان قنواتی
بازنویسی آزمون	محمدرضا راسخ	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	------	------
مسئول درس	مهرداد ملوندی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	امیرعلی بیات
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران(مستندسازی)	احسان صادقی-سجاد سلیمی-علیرضا عباسی‌زاهد			سجاد رضایی پرهام مهرآرا سیدکیان مکی	سجاد رضایی محمدصدرا وطنی ملینا ملائی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

تیزهوشان برای موفقیت

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۱»** (محمدرضا راسخ)

با توجه به نمودار تابع داریم:

$$\begin{cases} [\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)] = [-1] = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)] = [2^-] = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\lim_{x\to+\infty} f(x)] - \lim_{x\to-\infty} [f(x)] = -1-1 = -2$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۲- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

توجه کنید که $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \tan x = -\infty$، بنابراین اگر فرض کنیم $t = \tan x$، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}} \frac{2\tan x - |\tan x|}{\tan x - 2} = \lim_{t\to-\infty} \frac{2t-|t|}{t-2} = \lim_{t\to-\infty} \frac{2t+t}{t} = 3$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۳- **گزینهٔ «۲»** (کاظم اجلالی)

ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x|x|-2}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} (fof)(x) = \lim_{x\to+\infty} f(f(x))$$

$$= \lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{t|t|-2}{1-t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{-t^2-2}{1-t}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{-t^2}{-t} = \lim_{t\to-\infty} t = -\infty$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۴- **گزینهٔ «۴»** (کاظم اجلالی)

فرض کنید $y = b$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ باشد، در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x-2) = b \ , \ \lim_{x\to+\infty} f(2x) = b$$

بنابراین طبق فرض داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3f(x-2)}{f(2x)+2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{3\lim\limits_{x\to+\infty} f(x-2)}{\lim\limits_{x\to+\infty} (f(2x)+2)} = 2 \Rightarrow \frac{3b}{b+2} = 2$$

$$\Rightarrow 3b = 2b+4 \Rightarrow b = 4$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۵- **گزینهٔ «۳»** (سیدرضا اسلامی)

با توجه به توضیحات فرض باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|-3x^3|+2x+1}{-2x^2+x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|-3x^3|}{-2x^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^3}{-2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{2}x = -\infty$$

۲)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|3x^3|+2x+1}{-2x^2+x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|3x^3|}{-2x^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^3}{-2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{2}x = -\infty$$

۳)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x+1}{|-2x|+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{|-2x|}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{2}x = +\infty$$

۴)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+2x+1}{-2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2}{-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{2}x = -\infty$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۶- **گزینهٔ «۱»** (داود بوالحسنی)

مجانب افقی تابع عبارتست از:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+ax+3}{x^2+4x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$$

برای بررسی وضعیت نمودار تابع اطراف مجانب افقی، تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

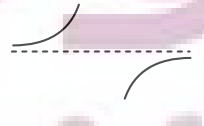
$$g(x) = \frac{2x^2+ax+3}{x^2+4x+1} - 2 = \frac{(a-8)x+1}{x^2+4x+1}$$

به ازای $a = 8$ داریم $g(x) = \frac{1}{x^2+4x+1}$ که به ازای $x \to \pm\infty$ نمودار تابع بالای مجانب افقی قرار دارد، که قابل قبول نیست.

به ازای $(a-8) < 0$ داریم:

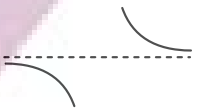
$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(a-8)x}{x^2} = 0$$

$$\begin{cases} x \to +\infty : g(x) = \frac{(a-8)x+1}{x^2+4x+1} < 0 \\ x \to -\infty : g(x) = \frac{(a-8)x+1}{x^2+4x+1} > 0 \end{cases}$$



در نتیجه $a < ۸$ و هفت مقدار طبیعی برای عدد a قابل قبول است.

تذکر: به ازای $a > ۸$ نمودار تابع اطراف مجانب افقی خود به صورت زیر می‌شود:



(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۷- **گزینهٔ «۳»** (جوانبخش نیکنام)

با توجه به ضابطه‌های توابع f و g داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(g(x)) = \lim_{x\to-\infty} f(\frac{۲x+۳}{x+۱})$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(\frac{۲(x+۱)}{x+۱}+\frac{۱}{x+۱}) = \lim_{x\to-\infty} f(۲+\frac{۱}{x+۱})$$

$$= \lim_{x\to۲^-} \frac{|x^۲-۳x+۲|}{x+[-x]} = \lim_{x\to۲^-} \frac{-(x-۱)(x-۲)}{x-۲} = -۱$$

توجه: عبارت $۲+\frac{۱}{x+۱}$ به ازای $x\to-\infty$، با مقادیر کمتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۸- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا راسخ)

وارون یک تابع خطی صعودی، صعودی و وارون یک تابع خطی نزولی، نزولی است. همچنین ترکیب دو تابع خطی که یکی صعودی و یکی نزولی است، یک تابع خطی نزولی است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$fog^{-۱}(x) = ax+b \Rightarrow (fog^{-۱})^{-۱}(x) = \frac{x}{a}-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow gof^{-۱}(x) = \frac{x}{a}-\frac{b}{a} \quad , \quad a<۰$$

حال با توجه به $a<۰$ و حد داده شده، داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|fog^{-۱}(x)|}{gof^{-۱}(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|ax|}{\frac{x}{a}} = \frac{a}{\frac{۱}{a}} = a^۲$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۴ \xrightarrow{a<۰} a = -۲$$

در نتیجه ضابطهٔ توابع $fog^{-۱}$ و $gof^{-۱}$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} fog^{-۱}(x) = -۲x+b \\ gof^{-۱}(x) = -\frac{x}{۲}+\frac{b}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow fog^{-۱}(۲)-۲gof^{-۱}(۱) = -۴+b-۲(-\frac{۱}{۲}+\frac{b}{۲})$$

$$= -۴+b+۱-b = -۳$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۹- **گزینهٔ «۲»** (سینا خیرخواه)

برای این‌که تابع f دارای مجانب افقی باشد، باید $a=۰$ باشد، که در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^۲-۴x+۱}{x^۲+۱} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^۲}{x^۲} = ۱$$

فاصلهٔ نمودار تابع از مجانب افقی برابر است با:

$$|f(x)-y_{\text{مجانب}}| = |\frac{x^۲-۴x+۱}{x^۲+۱}-۱| = |\frac{x^۲-۴x+۱-x^۲-۱}{x^۲+۱}|$$

$$= |\frac{-۴x}{x^۲+۱}| \xrightarrow[\text{تقسیم بر } x]{\text{صورت و مخرج}} |\frac{-۴}{x+\frac{۱}{x}}| = \frac{۴}{|x+\frac{۱}{x}|}$$

مخرج کسر همواره مثبت است، لذا، برای این‌که بیشترین مقدار فاصله را محاسبه کنیم باید مخرج کسر، کمترین مقدار خود را داشته باشد:

$$x+\frac{۱}{x} \geq ۲ \quad \text{یا} \quad x+\frac{۱}{x} \leq -۲ \Rightarrow |x+\frac{۱}{x}| \geq ۲$$

$$\Rightarrow \max\{\frac{۴}{|x+\frac{۱}{x}|}\} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** (جوانبخش نیکنام)

با توجه به نمودار تابع، در $x=۰$، مجانب افقی تابع با نمودار تابع برخورد دارد:

$$\begin{cases} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{۱}{b} \\ f(۰) = \frac{۹b+۲}{\frac{۵}{۳}} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{b} = \frac{۹b+۲}{\frac{۵}{۳}}$$

$$\Rightarrow ۲۷b^۲+۶b-۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{۱}{۳} & (*) \\ b=-\frac{۵}{۹} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

از طرفی نمودار تابع f بر محور xها (بخش مثبت) مماس است، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف مثبت است:

$$x^۲+ax+۹b+۲=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} a^۲-۴(۹b+۲)=۰$$

$$\xrightarrow{(*)} a^۲-۲۰=۰ \Rightarrow a^۲=۲۰ \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵} \\ a=-\sqrt{۲۰}=-۲\sqrt{۵} \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

توجه:

۱) مجانب افقی $y=\frac{۱}{b}$ بالای محور xها قرار دارد، پس $b>۰$.

۲) چون $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف مثبت دارد، پس $a<۰$.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

ریاضی پایه

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمد زنگنه)*

با توجه به نمودار، نقطهٔ A، نقطهٔ سمت چپ برخورد نمودار تابع با محور xها است:

$$۲x^۲+۵x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۲۴}}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-۵-۷}{۴}=-۳ \\ x=\frac{-۵+۷}{۴}=\frac{۱}{۲} \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۱۲- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا راسخ)*

جواب هر معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین داریم:

$$-۴+a=\sqrt{a+۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲-۸a+۱۶=a+۲$$

$$\Rightarrow a^۲-۹a+۱۴=۰ \Rightarrow (a-۲)(a-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۷ \\ a=۲ \end{cases}$$

$a=۲$ در معادله صدق نمی‌کند، بنابراین مقدار a برابر ۷ می‌باشد.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی ملارمضانی)*

معادلهٔ داده شده را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{۵x+۵+۲x}{x+۱}+\frac{x+۱}{۴x}=\frac{۱۳}{۲} \Rightarrow \frac{۵(x+۱)}{x+۱}+\frac{۲x}{x+۱}+\frac{x+۱}{۴x}=\frac{۱۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\frac{۲x}{x+۱}=t} ۵+t+\frac{۱}{۲t}=\frac{۱۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲t} ۲t^۲-۳t+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۲x}{x+۱}=۱ \Rightarrow x=۱ \\ t=\frac{۲x}{x+۱}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

معکوس جواب‌های معادلهٔ فوق برابر ۳ و ۱ می‌باشند، بنابراین:

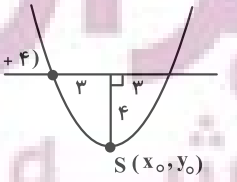
$$\begin{cases} S=۴ \\ P=۳ \end{cases} \Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹ و ۱۷ تا ۱۹)

۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(سیدرضا اسلامی)*

برای به دست آوردن a، ضابطهٔ تابع را به صورت استاندارد می‌نویسیم که در آن $S(x_۰, y_۰)$ نقطهٔ رأس سهمی است:

$$f(x)=a(x-x_۰)^۲+y_۰$$



مختصات نقطهٔ B را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y_۰+۴=a(x_۰-۳-x_۰)^۲+y_۰ \Rightarrow ۴=۹a \Rightarrow a=\frac{۴}{۹}$$

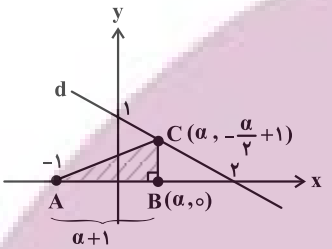
بنابراین $f(x)=\frac{۴}{۹}x^۲+۵x-۷$ و در نتیجه داریم:

$$f(۹a-۱)=f(۴-۱)=f(۳)=۴+۱۵-۷=۱۲$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱)

۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا راسخ)*

ابتدا معادلهٔ خط d را به کمک نقاط $(۲, ۰)$ و $(۱, ۰)$ می نویسیم:



$$d: y-۱=\frac{۱-۰}{۰-۲}(x-۰) \Rightarrow d: y=-\frac{۱}{۲}x+۱$$

اگر فرض کنیم مختصات رأس B به صورت $(\alpha, ۰)$ باشد، آن‌گاه چون B و C در یک راستا قرار دارند و C روی خط d واقع است، پس مختصات رأس C به صورت $(\alpha, -\frac{\alpha}{۲}+۱)$ می‌باشد و مساحت مثلث ABC از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{ABC}=\frac{(\alpha+۱)(-\frac{\alpha}{۲}+۱)}{۲}=-\frac{\alpha^۲}{۴}+\frac{\alpha}{۴}+\frac{۱}{۲}$$

چون مساحت مثلث نسبت به α یک تابع درجه دوم است، برای محاسبه،

$\alpha_S=-\frac{\frac{۱}{۴}}{۲(-\frac{۱}{۴})}=\frac{۱}{۲}$ بیشترین مقدار مساحت مثلث ABC داریم:

$$\max(S_{ABC})=-\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲}=\frac{-۱+۲+۸}{۱۶}=\frac{۹}{۱۶}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

با توجه به این که $(g-f)(x)$ یک تابع خطی است، بنابراین ضریب $x^۲$ در ضابطهٔ سهمی‌های f و g یکسان است.

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=a(x-۳)^۲-۸ \\ g(x)&=a(x+۳)(x-۱)-k \end{aligned}\right\} \xrightarrow{g(۰)-f(۰)=۱}$$

$$(-۳a-k)-(۹a-۸)=۱ \Rightarrow -۱۲a-k=-۷$$

$$\Rightarrow k=۷-۱۲a \qquad (*)$$

همچنین از نمودار $g-f$ داریم:

$$g(-\frac{۱}{۴})=f(-\frac{۱}{۴}) \Rightarrow a(\frac{۱۱}{۴})(-\frac{۵}{۴})-k=\frac{۱۶۹}{۱۶}a-۸$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{-۵۵}{۱۶}a+۱۲a-۷=\frac{۱۶۹}{۱۶}a-۸ \Rightarrow ۲a=۱$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{2}\xrightarrow{k=7-12a}k=1$$

بنابراین ضابطهٔ تابع درجهٔ دوم $g(x)$ به صورت زیر است:

$$g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x-1)-1=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}$$

صفرهای سهمی g به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$g(x)=0\Rightarrow \frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}=0\Rightarrow \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$$

$$=(-2)^3-3(-5)(-2)=-8-30=-38$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** (سیدرضا اسلامی)

فرض می‌کنیم زهرا و سارا به تنهایی کار را به ترتیب در m و n روز تمام کنند، بنابراین در هر روز زهرا $\frac{1}{m}$ کار و سارا $\frac{1}{n}$ کار را انجام می‌دهد و با توجه به فرضیات مسئله داریم:

$$\begin{cases}2(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})+\frac{6}{n}=1\\ 6(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})+\frac{3}{m}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2}{m}+\frac{8}{n}=1\\ \frac{9}{m}+\frac{6}{n}=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{m}+\frac{8}{n}=\frac{9}{m}+\frac{6}{n}\Rightarrow \frac{2}{n}=\frac{7}{m}\Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{7}{2}=3/5$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹ و ۲۲)

۱۸- **گزینهٔ «۳»** (مهسان کوهرزی)

با توجه به این‌که $P(3)$ تعریف نشده است. بنابراین $x=3$ ریشهٔ مخرج است:

$$2\times 3-b=0\Rightarrow b=6$$

حال ریشه‌های عبارت $x-2\sqrt{x}-3$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x-2\sqrt{x}-3=0\Rightarrow(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=3\Rightarrow x=9\\ \sqrt{x}=-1\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

با توجه به این‌که عبارت $P(x)$ فقط در اطراف $x=3$ تغییر علامت داده است، باید $x=9$ ریشهٔ عبارت $ax+3$ نیز باشد تا در اطراف $x=9$ تغییر علامت نداشته باشیم (چرا؟)، پس:

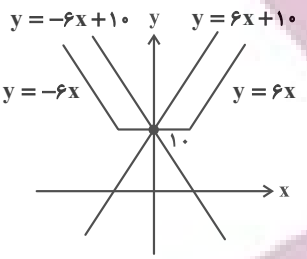
$$a(9)+3=0\Rightarrow 9a=-3\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

در نتیجه داریم: $b-3a=6-(-1)=7$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)

۱۹- **گزینهٔ «۲»** (میهانبخش نیکنام)

با توجه به نمودار تابع $y=|3x+5|+|3x-5|$ در شکل زیر داریم:



خط $y=mx+10$، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند و برای این‌که معادله دو جواب داشته باشد باید شیب خط، کوچک‌تر از ۶ و بیشتر از ۶- بوده و مخالف صفر باشد:

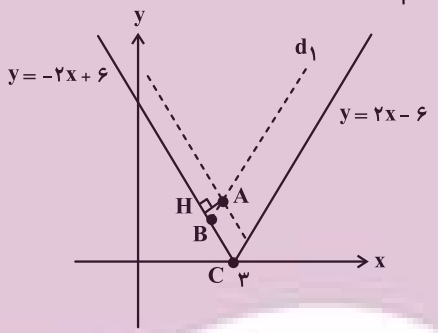
$$m\in(-6,6)-\{0\}$$

$$\Rightarrow m=-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** (داود بوالحسنی)

با توجه به شکل زیر، برای محاسبهٔ مساحت متوازی‌الاضلاع نیاز به $|AH|$ و $|BC|$ داریم:



اندازهٔ AH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,3)$ از خط $y+2x-6=0$ است:

$$|AH|=\frac{|3+4-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

خط d_1 موازی خط $y=2x-6$ است، پس:

$$d_1: y=2x+b\xrightarrow{(2,3)}3=4+b\Rightarrow b=-1$$

$$\Rightarrow d_1: y=2x-1$$

مختصات نقطهٔ B همان نقطهٔ تلاقی دو خط $y=2x-1$ و $y=-2x+6$ است.

$$-2x+6=2x-1\Rightarrow x=\frac{7}{4},\ y=\frac{5}{2}\Rightarrow B(\frac{7}{4},\frac{5}{2})$$

$$|BC|=\sqrt{(3-\frac{7}{4})^2+(0-\frac{5}{2})^2}=\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{125}{16}}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت متوازی‌الاضلاع}: S=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{5\sqrt{5}}{4}=\frac{5}{4}=1/25$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱، ۳۳ و ۳۴)

هندسه ۳

۲۱- **گزینهٔ «۲»** *(اسحاق اسفندیار)*

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+4=0 \\ y-x-1=0 \Rightarrow y=x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+(x+1)^2-2x-4(x+1)+4=0$$

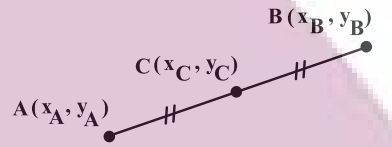
$$\Rightarrow 2x^2-4x+1=0$$

اگر $A(x_A\ ,\ y_A)$ و $B(x_B\ ,\ y_B)$ مختصات نقاط برخورد خط و دایره باشند، داریم:

$$S=x_A+x_B=-\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$$

حال طبق شکل زیر می‌توانیم بگوییم:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2}{2}=1$$



(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(اسحاق اسفندیار)*

معادلهٔ داده شده، زمانی می‌تواند معادلهٔ دایره باشد که ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر باشند:

$$1=a^2-8 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$$

همچنین می‌دانیم دایره‌ای به معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ وجود دارد اگر شرط $a^2+b^2-4c>0$ برقرار باشد.

به ازای $a=3$ معادلهٔ صورت سؤال، معادلهٔ دایره نیست، زیرا:

$$a=3 \Rightarrow x^2+y^2-2x+4y+15=0$$

$$\Rightarrow 4+16-4\times 15<0 \quad (\text{غ ق ق})$$

ولی به ازای $a=-3$ داریم: $a=-3 \Rightarrow x^2+y^2-2x+4y-15=0$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایره}: r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+60}=\frac{1}{2}\sqrt{80}=2\sqrt{5}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۲۳- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

چون شعاع هر دو دایره برابر ۲ است، لذا:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(2-a)^2+a^2-4}=2 \Rightarrow \sqrt{2a^2-4a}=4$$

$$\Rightarrow 2a^2-4a=16 \Rightarrow a^2-2a-8=0$$

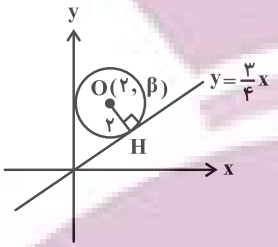
$$\Rightarrow (a-4)(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \Rightarrow O(1\ ,\ -2) \\ a=-2 \Rightarrow O'(-2\ ,\ 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow OO'=\sqrt{(-2-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

مطابق شکل زیر مرکز دایره به صورت $O(2\ ,\ \beta)$ و طول شعاع دایره برابر فاصلهٔ مرکز آن تا خط $y=\frac{3}{4}x$ می‌باشد. بنابراین:



$$y=\frac{3}{4}x \Rightarrow 3x-4y=0$$

$$OH=\frac{|6-4\beta|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$$

$$\Rightarrow |6-4\beta|=10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta=-1 \ \times \\ \beta=4 \quad \text{ق ق} \end{cases} \Rightarrow O(2\ ,\ 4)$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

معادلهٔ ضمنی دایرهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ تنها در صورتی بیانگر یک نقطه خواهد بود که شعاع دایره برابر صفر باشد:

$$r=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=0 \Rightarrow a^2+b^2-4c=0$$

بنابراین برای معادلهٔ ضمنی دایره داده شده می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow (m-1)^2+m^2-4(2m)=0 \Rightarrow 2m^2-10m+1=0$$

$$\xrightarrow{\Delta>0} S=m_1+m_2=\frac{-b}{a}=\frac{10}{2}=5$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2+(y-1)^2=4 \Rightarrow \begin{cases} O(0\ ,\ 1) \\ r=2 \end{cases}$$

$$x^2+y^2+2mx=0 \Rightarrow \begin{cases} O'(-m\ ,\ 0) \\ r'=\frac{1}{2}\sqrt{4m^2}=|m| \end{cases}$$

طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:

$$OO'=\sqrt{(-m-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{m^2+1}$$

چون دو دایره فقط یک نقطهٔ مشترک دارند، پس مماس داخل یا مماس خارج هستند. به بررسی هر دو حالت می‌پردازیم:

۱) مماس خارج $\Rightarrow OO'=r+r' \Rightarrow \sqrt{m^2+1}=|m|+2$

$$\Rightarrow m^2+1=m^2+4|m|+4 \Rightarrow 4|m|=-3 \quad \text{غ ق ق}$$

۲) مماس داخل $\Rightarrow OO'=|r-r'| \Rightarrow \sqrt{m^2+1}=||m|-2|$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} m^2+1=m^2-4|m|+4$$

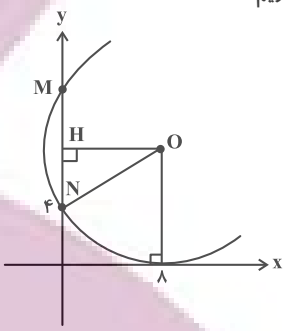
$$\Rightarrow 4|m|=3 \Rightarrow |m|=\frac{3}{4} \Rightarrow m=\pm\frac{3}{4}$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر قابل قبول برای m برابر $\frac{3}{4}\times(-\frac{3}{4})=\frac{-9}{16}$ می‌باشد.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۲۷- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا شریف‌خطیبی)

دایره بر محور طول‌ها در نقطهٔ $(۸ , ۰)$ مماس است پس مختصات مرکز آن به شکل $O(۸ , \beta)$ است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقاط $(۴ , ۰)$ و $(۸ , ۰)$ یکسان است، پس داریم:



$$\sqrt{(۸-۰)^۲+(\beta-۴)^۲}=\sqrt{(۸-۸)^۲+(\beta-۰)^۲}$$

$$\Rightarrow ۶۴+\beta^۲-۸\beta+۱۶=\beta^۲\Rightarrow ۸\beta=۸۰\Rightarrow \beta=۱۰$$

$$\begin{cases}\text{مرکز دایره}: O(۸ , ۱۰)\\ \text{شعاع دایره}: R=|\beta|=۱۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ دایره}: (x-۸)^۲+(y-۱۰)^۲=۱۰۰$$

حال عرض نقاط برخورد دایره با محور yها و طول وتر ایجاد شده را به دست می‌آوریم:

$$x=۰\Rightarrow ۶۴+(y-۱۰)^۲=۱۰۰$$

$$\Rightarrow |y-۱۰|=۶\Rightarrow \begin{cases}y=۴\\ y=۱۶\end{cases}\Rightarrow \text{طول وتر } MN=|۱۶-۴|=۱۲$$

روش دوم: عمود OH را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases}OH=۸\\ ON=R=۱۰\end{cases}$$

$$HN=\sqrt{ON^۲-OH^۲}=\sqrt{۱۰۰-۶۴}=۶$$

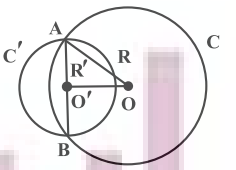
$$\Rightarrow MN=۲NH=۱۲$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۲۸- **گزینهٔ «۴»** (هومن عقیلی)

دایرهٔ C محیط دایرهٔ C' را نصف می‌کند، یعنی مطابق شکل دایرهٔ C از دو سر قطری از دایرهٔ C' عبور می‌کند و در نتیجه:

$$R^۲=OO'^۲+R'^۲ \qquad (*)$$



حال مختصات مرکز و شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$O(۱ , ۱) , O'(۲ , ۲)$$

$$\Rightarrow OO'=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

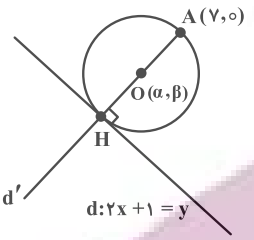
$$R^۲=\frac{۴+۴-۴m}{۴}=۲-m \quad , \quad R'^۲=\frac{۱۶+۱۶+۴}{۴}=۹$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲-m=۲+۹\Rightarrow m=-۹$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۱ تا ۴۴)

۲۹- **گزینهٔ «۱»** (کیوان دارابی)

کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از نقطهٔ A و مماس بر خط d، دایره‌ای به قطر AH است که AH عمود وارد بر خط d از رأس A می‌باشد. با توجه به شکل زیر داریم:



$$m_d=۲\xrightarrow{d\perp d'}۲\times m_{d'}=-۱\Rightarrow m_{d'}=\frac{-۱}{۲}$$

$$A(۷ , ۰)\in d'\Rightarrow y-۰=\frac{-۱}{۲}(x-۷)\Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}$$

$$d' \text{ و } d \text{ تلاقی } \Rightarrow \begin{cases}d: y=۲x+۱\\ d': y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\end{cases}\Rightarrow H(۱ , ۳)$$

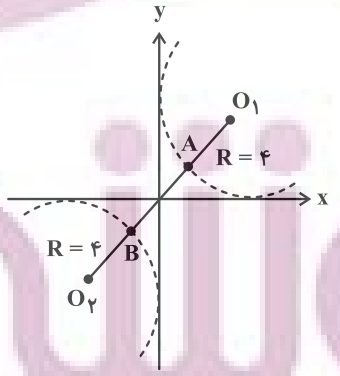
$$O(\alpha , \beta)=\frac{۱}{۲}(A+H)\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{۷+۱}{۲}=۴\\ \beta=\frac{۰+۳}{۲}=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha+۲\beta=۴+۳=۷$$

(هندسه ۳- صفحهٔ ۴۵)

۳۰- **گزینهٔ «۱»** (نیما مهندس)

برای حل، نیازی به نوشتن معادلات دایره‌ها نیست. با توجه به شکل، نقاط $O_۱(۴ , ۴)$ و $O_۲(-۴ , -۴)$ مرکزهای این دو دایره هستند و نقاط A و B، نزدیک‌ترین نقاط دو دایره از یکدیگرند:



$$AB=O_۱O_۲-۲R=\sqrt{۸^۲+۸^۲}-۲(۴)=۸\sqrt{۲}-۸=۸(\sqrt{۲}-۱)$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) $p=۵\ ,\ q=۷\ ,\ \delta=۲\ ,\ \Delta=۴$

$\Rightarrow ۲۵+۴۹\neq ۸+۶۴+۲۲$ غ ق ق

۲) $p=۵\ ,\ q=۵\ ,\ \delta=۱\ ,\ \Delta=۳$

$\Rightarrow ۲۵+۲۵=۱+۲۷+۲۲$ ق ق

۳) $p=۵\ ,\ q=۴\ ,\ \delta=۰\ ,\ \Delta=۲$

$\Rightarrow ۲۵+۱۶\neq ۰+۸+۲۲$ غ ق ق

۴) $p=۶\ ,\ q=۷\ ,\ \delta=۱\ ,\ \Delta=۳$

$\Rightarrow ۳۶+۴۹\neq ۱+۲۷+۲۲$ غ ق ق

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۳۷)

۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

دورهای به طول ۴:

$uvwzu\ ,\ uwzvu\ ,\ uzvwu\ ,\ zwxyz\ ,\ zvwyz\ ,\ zuwyz \Rightarrow m=۶$

دورهای به طول ۵:

$uvwyzu\ ,\ uvzywu\ ,\ vwxyzv\ ,\ uwxyzu \Rightarrow n=۴$

در نتیجه $m+n=۱۰$.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۳۸)

۳۳- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

با توجه به $\delta=۳$ و $\Delta=۵$، حداقل اندازهٔ گراف حالتی است که در آن تا حد امکان درجهٔ رأس‌ها ۳ باشد. همچنین به دلیل این‌که گراف نمی‌تواند دارای فرد رأس از درجهٔ فرد باشد (چرا؟)، باید یک رأس درجهٔ ۴ نیز داشته باشیم:

۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۴ , ۵ : درجهٔ رئوس گراف

بنابراین اندازهٔ گراف برابر است با:

$$q=\frac{\sum_{i=۱}^{۹}\deg(v_i)}{۲}=\frac{۳۰}{۲}=۱۵$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۷، ۳۹ و ۴۰)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

گراف مرتبهٔ ۸ که ۶ یال داشته باشد حتماً ناهمبند است (چرا؟).

$$q(K_۸)=\binom{۸}{۲}=۲۸ \Rightarrow ۲۸-۶=۲۲$$

پس حداقل ۲۲ یال به‌طور دلخواه، از گراف کامل $K_۸$ باید حذف شود تا گراف حاصل، قطعاً ناهمبند باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

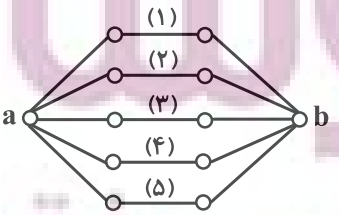
- $acb \Rightarrow$ یک مسیر به طول ۲
- $acdb\ ,\ aecb \Rightarrow$ دومسیر به طول ۳
- $acedb\ ,\ aecdb\ ,\ aedcb\ ,\ afecb \Rightarrow$ چهارمسیر به طول ۴
- $afecdb\ ,\ afedcb \Rightarrow$ دومسیر به طول ۵

پس در کل ۹ مسیر داریم.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۳۸)

۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

گراف مورد نظر سؤال به صورت زیر است:



برای تشکیل هر دور به طول ۶، باید دو تا از مسیرهای ۱ تا ۵ را انتخاب نمود.

$$\text{تعداد دورهای به طول } ۶ = \binom{۵}{۲} = ۱۰$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۶ و ۳۸)

۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

در گراف $k-$منتظم داریم:

$$kp = ۲q = ۲(۱۲) = ۲۴$$

با اضافه کردن دو یال مجاور به گراف منتظم، گراف G به دست می‌آید؛ پس $\Delta(G) = k + ۲$ و طبق فرض داریم:

$$\overbrace{pk}^{۲۴} - (k+۲) = ۱۹ \Rightarrow k = ۳ \Rightarrow ۳p = ۲۴ \Rightarrow p = ۸$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۳۸- **گزینهٔ «۴»** *(نیلوفر مهدوی)*

۳ رأس زیر گراف را از ۱۰ رأس گراف $K_{۱۰}$ به صورت $\binom{۱۰}{۳}$ حالت انتخاب می‌کنیم. از طرفی چون گراف کامل است، پس سه رأس زیرگراف به هم متصل هستند و در نتیجه ۳ یال بین آن‌ها وجود دارد که هر کدام می‌توانند در زیرگراف باشند یا نباشند، یعنی دو حالت دارند. بنابراین تعداد کل زیرگراف‌های از مرتبهٔ ۳ برابر است با:

$$\binom{۱۰}{۳} \times ۲ \times ۲ \times ۲ = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳ \times ۲} \times ۸ = ۱۲۰ \times ۸ = ۹۶۰$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهدوی)*

می‌دانیم:

$$d_G(v_i) + d_{\bar{G}}(v_i) = p - ۱ = ۱۱ \Rightarrow d_{\bar{G}}(v_i) = ۱۱ - d_G(v_i)$$

اگر درجهٔ هر رأس گراف منتظم G را x فرض کنیم، داریم:

$$\frac{x}{۱۱-x} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow ۶x = ۵۵ - ۵x \Rightarrow ۱۱x = ۵۵ \Rightarrow x = ۵$$

$$\Rightarrow d_{\bar{G}}(v_i) = ۱۱ - ۵ = ۶$$

پس گراف G، ۵- منتظم از مرتبهٔ ۱۲ و گراف $\bar{G}$، ۶- منتظم از مرتبهٔ ۱۲ است. اندازهٔ گراف $\bar{G}$ برابر است با:

$$۱۲ \times ۶ = ۲q \Rightarrow q = ۳۶$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

می‌دانیم:

$$\left.\begin{aligned} \Delta(\bar{G}) &= p - ۱ - \delta(G) \\ \delta(\bar{G}) &= p - ۱ - \Delta(G) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{طبق فرض}}$$

$$(p - ۱ - \delta(G)) - (p - ۱ - \Delta(G)) = ۵$$

$$\Rightarrow \Delta(G) - \delta(G) = ۵$$

حال داریم:

$$\left.\begin{aligned} \Delta(G) - \delta(G) &= ۵ \\ \Delta(G) + ۲\delta(G) &= ۲۳ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta(G) = ۱۱ \ , \ \ \delta(G) = ۶$$

چون $\Delta = ۱۱$، پس گراف G حداقل ۱۲ رأس دارد؛ اگر تعداد رئوس گراف G را برابر با ۱۲ در نظر بگیریم، این گراف با شرط $\Delta(G) = ۱۱$، رأس Full درجه (از درجهٔ $p-۱$) خواهد داشت که این نتیجه می‌دهد گراف $\bar{G}$ رأس تنها دارد و در نتیجه همبند نیست. پس برای همبند $\bar{G}$، حداقل مقدار ممکن برای p، ۱۳ است.

گراف $\bar{G}$ در کمترین حالت ۱۲ یال دارد، بنابراین گراف G در بیشترین حالت ممکن $\binom{۱۳}{۲} - ۱۲ = ۶۶$ یال دارد و در این صورت مجموع درجات رئوس آن برابر $۲ \times ۶۶ = ۱۳۲$ خواهد شد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

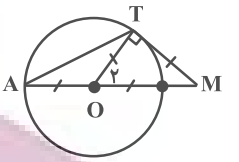
توسعه ای برای موفقیت

هندسه ۲

۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس، عمود است و چون $MT = r$؛ بنابراین مثلث OTM قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و داریم:

$$\hat{O}_2 = \hat{M} = 45^\circ$$



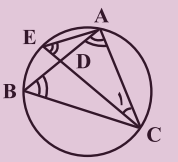
چون مثلث OAT نیز متساوی‌الساقین است، لذا:

$$\hat{O}_2 = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{45^\circ}{2} = 22/5^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

طبق شکل داریم:



$$\begin{cases} CA = CB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = \hat{E}$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{A} = \hat{E} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{CAD} \sim \overset{\Delta}{CEA}$$

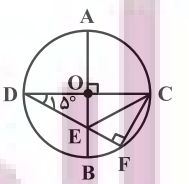
$$\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CE} \Rightarrow CD.CE = CA^2$$

$$\xrightarrow{CD=x} x(x+1) = 6 \xrightarrow{\text{حل معادله}} CD = x = 2$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۴۳- **گزینهٔ «۲»** *(اسماق اسفندیار)*

از رأس C به رئوس E و F وصل کرده‌ایم. می‌دانیم زاویهٔ محاطی مقابل به قطر همواره برابر 90° است. می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} DE = CE \Rightarrow D\hat{C}E = \hat{D} = 15^\circ \Rightarrow C\hat{E}F = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ \\ D\hat{F}C : \text{زاویهٔ محاطی رو به قطر} \Rightarrow D\hat{F}C = 90^\circ \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{CEF} : E\hat{C}F + C\hat{E}F + \hat{F} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow E\hat{C}F + 30^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow E\hat{C}F = 60^\circ$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویه 60°، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است، پس داریم:

$$\overset{\Delta}{CEF} : \frac{EF}{CE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{CE=DE} \frac{EF}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

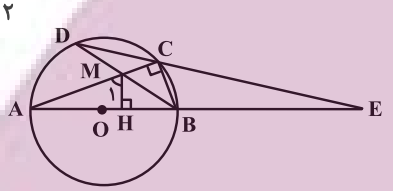
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۴۴- **گزینهٔ «۱»** *(اسماق اسفندیار)*

رأس B را به رأس C وصل می‌کنیم. زاویهٔ $\hat{C}$ محاطی و روبه قطر بوده و در نتیجه مثلث ABC قائم‌الزاویه است. از طرفی دو مثلث ABC و AHM متشابه هستند:

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{A} = \hat{A} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{AHM} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \hat{M}_1 = A\hat{B}C = 80^\circ$$

$$A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 80^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = 160^\circ$$



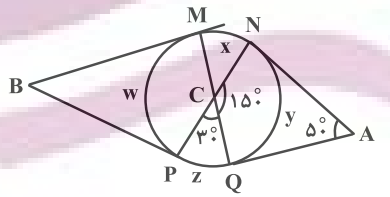
از طرفی $MH = MC$، لذا طبق شکل، M روی نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}C$ واقع بوده و BD نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}C$ است و داریم:

$$\begin{cases} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC} = 80^\circ \\ \overset{\frown}{BC} = 20^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{E} = \frac{80^\circ - 20^\circ}{2} = 30^\circ$$

توجه: زاویهٔ $\hat{M}_1$ مکمل زاویهٔ $H\hat{M}C = 100^\circ$ است، پس $\hat{M}_1 = 80^\circ$.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶)

۴۵- **گزینهٔ «۱»** *(فاطمه برزویی)*



با توجه به شکل داریم:

$$N\hat{C}Q = 150^\circ \Rightarrow P\hat{C}Q = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$P\hat{C}Q = \frac{x+z}{2} = 30^\circ \Rightarrow x+z = 60^\circ \quad (1) \quad \text{(زاویهٔ بین دو وتر)}$$

$$\hat{A} = \frac{x+w+z-y}{2} = 50^\circ \quad \text{(زاویهٔ بین امتداد دو مماس)}$$

$$\xrightarrow{(1)} 60^\circ + w - y = 100^\circ \Rightarrow w - y = 40^\circ \quad (2)$$

$$\hat{B} = \frac{x+y+z-w}{2} = \frac{x+z-(w-y)}{2} \quad \text{(زاویهٔ بین امتداد دو مماس)}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} = \frac{60^\circ - 40^\circ}{2} = 10^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶)

۴۶- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین ابومحبوب)

شعاع دو دایره مثبت است، پس:

$$\begin{cases} x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ 10-2x>0 \Rightarrow x<5 \end{cases}$$

طبق فرض، دو دایرهٔ C و C' متقاطع هستند، پس شرط متقاطع بودن دو دایره را نوشته و مقادیر شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المرکزین را در این رابطه جای‌گذاری می‌کنیم.

$$|R-R'|<d<R+R'$$

$$\Rightarrow |(10-2x)-(x+2)|<2x+1<(10-2x)+(x+2)$$

$$\Rightarrow |-3x+8|<2x+1<12-x$$

هر یک از نامساوی‌ها را به‌طور جداگانه حل کرده و اشتراک جواب‌ها را در نظر می‌گیریم.

(۱) $|3x-8|<2x+1 \Rightarrow -2x-1<3x-8<2x+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-8<2x+1 \Rightarrow x<9 \\ 3x-8>-2x-1 \Rightarrow 5x>7 \Rightarrow x>\frac{7}{5} \end{cases}$$

(۲) $2x+1<12-x \Rightarrow 3x<11 \Rightarrow x<\frac{11}{3}$

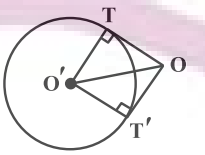
اشتراک جواب‌ها به صورت $\frac{7}{5}<x<\frac{11}{3}$ است و تنها دو عدد صحیح ۲ و ۳ در این نامساوی صدق می‌کنند.

(هندسه ۲- صفحهٔ ۲۰)

۴۷- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنید از نقطهٔ O بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ C' رسم کرد. در این صورت چهارضلعی $OTO'T'$ مربع و $OO'=R'\sqrt{2}$ است.

بنابراین داریم: $d=OO'=R'\sqrt{2}=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$



طبق رابطهٔ طول مماس مشترک خارجی داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{7}=\sqrt{6^2-(R-3\sqrt{2})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 28=36-(R-3\sqrt{2})^2 \Rightarrow (R-3\sqrt{2})^2=8$$

$$\Rightarrow |R-3\sqrt{2}|=2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} R-3\sqrt{2}=2\sqrt{2} \Rightarrow R=5\sqrt{2} \\ R-3\sqrt{2}=-2\sqrt{2} \Rightarrow R=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{اختلاف مقادیر } R = 5\sqrt{2}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۴۸- **گزینهٔ «۲»** (علی ایمانی)

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانهٔ نظیر این ضلع است، پس داریم: $BD=CD=8 \Rightarrow BC=16$

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ADC داریم:

$$AD^2=AC^2-CD^2=17^2-8^2=225 \Rightarrow AD=15$$

شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AD\times BC=\frac{1}{2}\times 15\times 16=120$$

$$P_{ABC}=\frac{17+17+16}{2}=25 \quad (\text{نصف محیط } \overset{\Delta}{ABC})$$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{120}{25}=4/8$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴۹- **گزینهٔ «۴»** (افشین خاصه‌خان)

مطابق تمرین ۴ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی، اگر یک ذوزنقه هم محاطی و هم محیطی باشد، آن‌گاه مساحت آن برابر است با حاصل‌ضرب میانگین حسابی دو قاعده در میانگین هندسی آن‌ها؛ با فرض $AB=a$ داریم:

$$S=\left(\frac{a+2a}{2}\right).\left(\sqrt{a.2a}\right)=\frac{27}{\sqrt{2}}$$

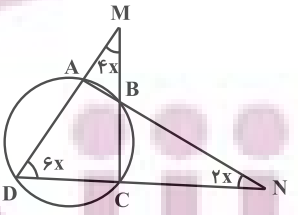
$$\Rightarrow \left(\frac{3a}{2}\right)\left(\sqrt{2}a\right)=\frac{27}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2=\frac{27}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{3\sqrt{2}}=9 \xrightarrow{a>0} a=3$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۲۹)

۵۰- **گزینهٔ «۳»** (فاطمه برزویی)

چهارضلعی $ABCD$ محاطی است بنابراین:

$$A\hat{D}C=M\hat{B}A=N\hat{B}C=6x$$



$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویهٔ خارجی : } B\hat{A}D=\hat{M}+M\hat{B}A=10x \\ \text{زاویهٔ خارجی : } B\hat{C}D=\hat{N}+N\hat{B}C=8x \end{array}\right\}$$

داریم: $\underbrace{B\hat{A}D}_{10x}+\underbrace{B\hat{C}D}_{8x}=180^\circ \Rightarrow x=\frac{180^\circ}{18}=10^\circ$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{ABC}=2\hat{D}=12x=120^\circ$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۲۷)

هندسه ۱

۵۱- **گزینهٔ «۴»** (کیوان دارابی)

از آنجا که $FN \parallel AB$، طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

$$FN \parallel AB \Rightarrow \frac{FN}{AB} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow \begin{cases} BN = x \\ CN = ۲x \end{cases}$$

از طرفی طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BCD داریم:

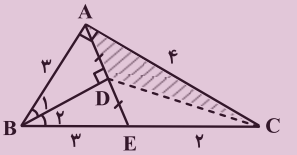
$$EN \parallel DC \Rightarrow \frac{EN}{DC} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{EN}{۲۴} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow EN = ۸ \Rightarrow EF = EN - FN = ۸ - ۲ = ۶$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۵۲- **گزینهٔ «۱»** (مهرداد ملوندی)

مطابق شکل، امتداد AD، ضلع BC را در E قطع می‌کند. در مثلث ABE، نیمساز BD، ارتفاع نیز هست، پس نوع این مثلث متساوی‌الساقین بوده و داریم: $AD = DE$ و $BE = AB = ۳$.



دو مثلث ACD و ACE در ارتفاع خارج شده از C، مشترکند و داریم:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ACE}} = \frac{AD}{AE} = \frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

به طریق مشابه: $\frac{S_{ACE}}{S_{ABC}} = \frac{EC}{BC} = \frac{۲}{۵}$ (۲)

مثلث ABC قائم‌الزاویه است و داریم:

$$AC = \sqrt{BC^۲ - AB^۲} = \sqrt{۲۵ - ۹} = ۴$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۶$$

در نتیجه از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow S_{ACD} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۵۳- **گزینهٔ «۲»** (کیوان دارابی)

می‌دانیم هر رابطه‌ای که بین اضلاع مثلث برقرار باشد، به طریق مشابه، بین معکوس ارتفاع‌ها نیز برقرار است (از جمله نامساوی مثلثی). بنابراین اگر ارتفاع‌های مثلث $n-۱$، n و $n+۱$ باشند، آن‌گاه بین مقادیر $\frac{۱}{n-۱}$، $\frac{۱}{n}$ و $\frac{۱}{n+۱}$ باید نامساوی مثلثی برقرار باشد:

$$\frac{۱}{n-۱} < \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۱} \Rightarrow \frac{۱}{n-۱} < \frac{۲n+۱}{n(n+۱)}$$

$$\xrightarrow{۱<n} n(n+۱) < (۲n+۱).(n-۱)$$

$$\Rightarrow n^۲ + n < ۲n^۲ - n - ۱ \Rightarrow n^۲ - ۲n - ۱ > ۰$$

$$\xrightarrow{n>۰} n > ۱ + \sqrt{۲} \Rightarrow n \geq ۳ \Rightarrow n - ۱ \geq ۲$$

روش دوم: اعداد طبیعی را به ترتیب چک می‌کنیم:

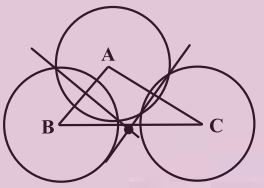
۱) $n-۱=۱ , n=۲ , n+۱=۳ \Rightarrow \frac{۱}{۱} \not< \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}$ غ ق ق

۲) $n-۱=۲ , n=۳ , n+۱=۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}$ ق ق

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحهٔ ۲۷ قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحهٔ ۳۱)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** (افشین خاصه‌خان)

می‌دانیم اگر عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC از مثلث ABC در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کنند، عمودمنصف ضلع BC نیز از M می‌گذرد و به عبارتی M محل همرسی عمودمنصف‌های مثلث خواهد بود. مطابق شکل زیر، با رسم سه دایره می‌توان دو تا از عمودمنصف‌های اضلاع مثلث و محل تقاطع آن‌ها را پیدا کرد.

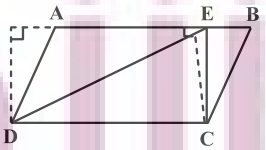


توجه: با فرض $AB \leq AC$، کافی است شعاع دایرهٔ مورد نظر از $\frac{AC}{۲}$ بزرگ‌تر باشد.

(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۵۵- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

مطابق شکل دو مثلث EBC و ADE ارتفاع‌های برابر دارند، لذا نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های آن‌ها برابر است:



$$AB = ۵EB \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{EB}{AB - EB} = \frac{۱}{۵ - ۱}$$

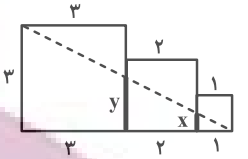
$$\Rightarrow \frac{S_{EBC}}{S_{ADE}} = \frac{EB}{AE} = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵ = ۲۵٪$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)

۵۶- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\begin{cases}\frac{x}{3}=\frac{1}{6}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\\ \frac{y}{3}=\frac{3}{6}\Rightarrow y=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow x+y=2$$

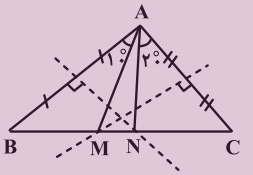


(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۵۷- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

با نوشتن جمع زوایای مثلث ABC، مقدار زاویهٔ $\hat{A}$ برابر 70° به دست می‌آید. داریم:

$$AN=BN\Rightarrow B\hat{A}N=\hat{B}=50^\circ\xrightarrow{\hat{A}=70^\circ}N\hat{A}C=20^\circ$$
$$CM=AM\Rightarrow C\hat{A}M=\hat{C}=60^\circ\Rightarrow B\hat{A}M=10^\circ$$
$$\Rightarrow M\hat{A}N=70^\circ-10^\circ-20^\circ=40^\circ$$

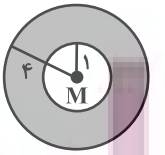


(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۵۸- **گزینهٔ «۲»** *(فاطمه برزویی)*

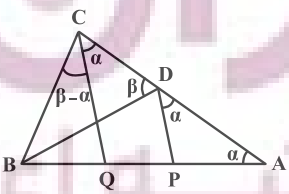
مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱ هستند تشکیل یک دایره به مرکز M و شعاع ۱ را می‌دهند. مجموعه نقاطی که از نقطهٔ M به فاصلهٔ ۴ هستند نیز تشکیل یک دایره به مرکز M و شعاع ۴ را می‌دهند. بنابراین داریم:

$$S_{\text{رنگی}}=4^2\pi-1^2\pi=15\pi$$



(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۵۹- **گزینهٔ «۳»** *(نیما مهندس)*



بررسی گزینهٔ اول: چون زوایای $P\hat{D}A$ و $Q\hat{C}A$ با یکدیگر برابرند، طبق عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $PD\parallel QC$ و در نتیجه طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث AQC داریم:

$$PD\parallel QC\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AP}{AQ}=\frac{PD}{QC}$$

چون $AP=PD$ است، می‌توان آن‌ها را در رابطهٔ بالا با یکدیگر تعویض کرد؛ پس رابطهٔ گزینهٔ «۱» درست است.

بررسی گزینهٔ دوم: چون $PD\parallel QC$ است، پس زوایای $D\hat{P}B$ و $C\hat{Q}B$ با هم مساوی هستند. از طرفی داریم:

$$\left.\begin{aligned}P\hat{D}B&=180^\circ-(\alpha+\beta)\\ Q\hat{B}C&=180^\circ-(\alpha+\beta)\end{aligned}\right\}\Rightarrow P\hat{D}B=Q\hat{B}C$$

بررسی گزینهٔ چهارم: حال برای مثلث‌های DPB و BQC داریم:

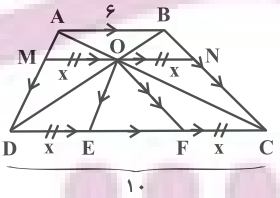
$$\left.\begin{aligned}&P\hat{D}B=Q\hat{B}C\\ &BC=BD\\ &P\hat{B}D=Q\hat{C}B=\beta-\alpha\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{زض ز}}\overset{\Delta}{DPB}\cong\overset{\Delta}{BQC}$$

$$\Rightarrow BQ=PD\xrightarrow{PD=AP}BQ=AP$$ (گزینهٔ چهارم)

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

۶۰- **گزینهٔ «۱»** *(هومن عقیلی)*

از رأس O خطی موازی قاعده‌ها رسم می‌کنیم تا ساق‌های ذوزنقه را در نقاط M و N قطع کند. به راحتی می‌توان نشان داد $OM=ON$ (چرا؟)، پس مطابق شکل فرض می‌کنیم: $OM=ON=DE=FC=x$



طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ADC}:\frac{x}{10}=\frac{AM}{AD}\\ \overset{\Delta}{ABD}:\frac{x}{6}=\frac{MD}{AD}\end{cases}\xrightarrow{+}\frac{x}{10}+\frac{x}{6}=1\Rightarrow x=\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow EF=10-2x=10-7/5=2/5$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

فیزیک ۳

۶۱- **گزینهٔ «۲»** (امیرمحمد میرسعید)

به دنبال گزاره‌هایی می‌گردیم که نادرست باشند.

بررسی تمام موارد:

الف) درست؛ دورهٔ تناوب عقربهٔ دقیقه شمار، برابر یک ساعت یا ۳۶۰۰ ثانیه است. پس بسامد آن $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ هرتز است.

ب) درست؛ دورهٔ تناوب عقربه ساعت شمار، ۱۲×۳۶۰۰ ثانیه و دورهٔ تناوب عقربهٔ ثانیه شمار ۶۰ ثانیه است. پس بسامد حرکت عقربهٔ ساعت شمار، $\frac{۱}{۷۲۰}$ بسامد حرکت عقربهٔ ثانیه شمار است.

پ) نادرست؛ دورهٔ تناوب عقربه دقیقه شمار، ۳۶۰۰ ثانیه و دورهٔ تناوب عقربهٔ ثانیه شمار، ۶۰ ثانیه است. بنابراین نسبت خواسته شده برابر با ۶۰ است.

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۶۲)

۶۲- **گزینهٔ «۲»** (حسین الهی)

حرکت دوره‌ای، یک الگوی تکرارشونده دارد. به همین دلیل فاصلهٔ دو قلهٔ بلند را می‌توان دورهٔ حرکت در نظر گرفت که با توجه به شکل، دورهٔ تناوب ضربان قلب شخص $T = ۰/۶\,s$ است. حال با توجه به تعریف دورهٔ تناوب داریم:

$$n = \frac{t}{T} \xrightarrow{t=۱۰min=۶۰۰s} n = \frac{۶۰۰}{۰/۶} = ۱۰۰۰ \quad \text{ضربان}$$

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۶۲)

۶۳- **گزینهٔ «۱»** (علیرضا جباری)

طبق متن کتاب درسی، عبارت‌های (الف) و (ب) درست و (پ) نادرست است.

اکنون به بررسی مورد (ت) می‌پردازیم:

$$f_A = f_B + ۰/۲۵f_B = ۱/۲۵f_B = \frac{۵}{۴}f_B \Rightarrow \frac{f_A}{f_B} = \frac{۵}{۴}$$

$$T = \frac{۱}{f} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{f_B}{f_A} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow T_A = ۰/۸\,T_B$$

$$\Rightarrow T_A = T_B - ۰/۲\,T_B \Rightarrow T_A - T_B = -۰/۲\,T_B$$

یعنی دورهٔ نوسانگر A، ۲۰ درصد کمتر است.

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۶۲)

۶۴- **گزینهٔ «۱»** (مهدی شریفی)

نوسانگر در بازهٔ زمانی ۰ تا $\frac{T}{۴}$ و $\frac{۳T}{۴}$ تا T در مکان‌های مثبت قرار دارد همچنین در بازهٔ زمانی ۰ تا $\frac{T}{۴}$ به سمت مرکز نوسان در حال حرکت است و حرکت تندشونده می‌باشد. بنابراین پاسخ مورد نظر بازهٔ زمانی ۰ تا $\frac{T}{۴}$ است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۳ و ۶۴)

۶۵- **گزینهٔ «۳»** (محمد مقرم)

از نقطهٔ A تا B، $\frac{۱}{۲}$ دوره و از نقطهٔ B تا C، $\frac{۱}{۴}$ دوره می‌شود.

بنابراین $n = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$ می‌شود و با استفاده از رابطهٔ بسامد داریم:

$$f = \frac{n}{t} \Rightarrow f = \frac{\frac{۳}{۴}}{۴-۲} \Rightarrow f = \frac{۳}{۸}\,Hz$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

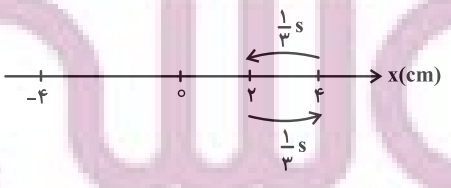
۶۶- **گزینهٔ «۴»** (مهران اسماعیلی)

ابتدا زمان لازم برای اولین بار رسیدن نوسانگر به نقطهٔ $x = ۲\,cm$ را به دست می‌آوریم:

$$x = ۰/۰۴\cos \pi t \xrightarrow{x=۲cm=۰/۰۲m} ۰/۰۲ = ۰/۰۴\cos \pi t$$

$$\Rightarrow \cos \pi t = \frac{۰/۰۲}{۰/۰۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \pi t = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow t = \frac{۱}{۳}\,s$$

با توجه به نمودار مسیر حرکت نوسانگر در امتداد محور x، ملاحظه می‌شود، نوسانگر در مدت $\frac{۱}{۳}s$ از نقطهٔ $x = ۴\,cm$ به نقطهٔ $x = ۲\,cm$ می‌رسد که بنابراین در مدت $\frac{۱}{۳}s$ از نقطهٔ $x = ۲\,cm$ به نقطهٔ $x = ۴\,cm$ نیز خواهد رسید.



پس حداقل زمان لازم برای دو عبور متوالی از نقطهٔ $x = ۲\,cm$ برابر $\frac{۲}{۳}s$ است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۶۷- **گزینهٔ «۲»** *(مهران اسماعیلی)*

نوسانگر در لحظهٔ t_1 به نقطهٔ $x_1=-1cm$ و در لحظهٔ t_2 به نقطهٔ $x_2=\sqrt{3}cm$ رسیده است. با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان حرکت هماهنگ ساده، می‌توان لحظات t_1 و t_2 را به دست آورد.

$$x_1=A\cos\frac{2\pi}{T}t_1 \xrightarrow{x_1=-1cm} -1=2\cos\frac{2\pi}{T}t_1$$

$$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t_1=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t_1=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})$$

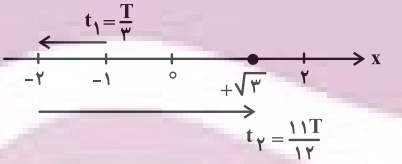
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow t_1=\frac{T}{3}$$

$$x_2=A\cos\frac{2\pi}{T}t_2 \xrightarrow{x_2=\sqrt{3}cm} \sqrt{3}=2\cos\frac{2\pi}{T}t_2$$

$$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{T}t_2=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{11\pi}{6}\Rightarrow t_2=\frac{11T}{12}$$

توجه شود که نوسانگر ابتدا به صورت کندشونده از نقطهٔ $x_1=-1cm$ عبور می‌کند. پس در حال دور شدن از مرکز نوسان است، یعنی فاز آن در ناحیهٔ دوم دایره مثلثاتی واقع است و وقتی برای اولین بار به نقطهٔ $x_2=+\sqrt{3}cm$ می‌رسد، دوباره در حال دور شدن از مرکز است که این بار فاز آن در ناحیهٔ چهارم دایره مثلثاتی واقع خواهد بود.



$$t_2-t_1=1/4s \xrightarrow[t_2=\frac{11T}{12}]{t_1=\frac{T}{3}} \frac{11T}{12}-\frac{T}{3}=1/4$$

$$\Rightarrow \frac{7T}{12}=1/4\Rightarrow T=2/4s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۶۸- **گزینهٔ «۳»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا با توجه به رابطهٔ تندی متوسط، مسافت طی شده توسط متحرک را در بازهٔ زمانی صفر تا $t=0/5s$ به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=0/5s]{s_{av}=32\frac{cm}{s}} \ell=32\times 0/5=16cm$$

با مقایسهٔ مسافت طی شده با دامنهٔ نوسان، داریم:

$$\begin{cases} x=0/02\cos\omega t \\ x=A\cos\omega t \end{cases}\Rightarrow A=0/02m=2cm$$

$$\frac{\ell}{A}=\frac{16}{2}\Rightarrow \ell=8A$$

می‌دانیم که نوسانگر در مدت یک دورهٔ T، مسافت $4A$ را طی می‌کند. چون نوسانگر در بازهٔ زمانی $\Delta t=0/5s$ مسافت $8A$ را طی کرده است،

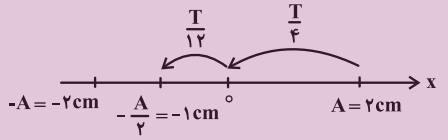
پس $\Delta t=2T$ است:

$$T=\frac{\Delta t}{2}=\frac{0/5}{2}=0/25s$$

اکنون حساب می‌کنیم که بازهٔ زمانی صفر تا $t=\frac{1}{12}s$ چند برابر دورهٔ تناوب است:

$$\frac{\Delta t'}{T}=\frac{\frac{1}{12}}{0/25}=\frac{1}{3}\Rightarrow \Delta t'=\frac{T}{3}=\frac{T}{4}+\frac{T}{12}$$

با توجه به معادلهٔ حرکت نوسانگر، در لحظهٔ $t=0$ نوسانگر در مکان A قرار دارد و در لحظهٔ $\frac{1}{12}s$ به مکان $x=-1cm$ می‌رسد، در نتیجه سرعت متوسط نوسانگر برابر است با:

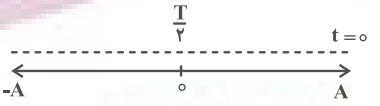


$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-1-2}{\frac{1}{12}}=\frac{-3}{\frac{1}{12}}=-36\frac{cm}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

در دو انتهای مسیر نوسانی (نقاط بازگشت)، اندازهٔ شتاب نوسانگر، بیشینه می‌شود.



$$\frac{T}{2}=\frac{1}{12}s\Rightarrow T=\frac{1}{6}s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{1}{6}}=12\pi\frac{rad}{s}$$

مسافتی که نوسانگر در مدت نصف دوره می‌پیماید، دو برابر دامنهٔ $(2A)$ است.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=\frac{1}{12}s\ ,\ \ell=2A]{s_{av}=60\frac{cm}{s}} 60=\frac{2A}{\frac{1}{12}}\Rightarrow 2A=5$$

$$\Rightarrow A=2/5cm$$

ایران‌آزمون توسعه‌ای برای موفقیت

معادلهٔ مکان- زمان نوسانگر را می‌نویسیم و مکان آن را در لحظه‌های $t_1 = 0$ و $t_2 = \frac{1}{9}s$ به دست می‌آوریم:

$$x = A\cos\omega t \xrightarrow[\omega = 12\pi \frac{rad}{s}]{A = 2/5\,cm} x = 2/5\cos(12\pi)t$$

$$t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2/5\cos 0 = 2/5\,cm$$

$$t_2 = \frac{1}{9}s \Rightarrow x_2 = 2/5\cos(12\pi \times \frac{1}{9}) = 2/5\cos\frac{4\pi}{3}$$

$$= 2/5 \times (-\frac{1}{2}) = -1/25\,cm$$

اکنون می‌توانیم اندازهٔ جابه‌جایی نوسانگر را حساب کنیم:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -1/25 - 2/5 = -3/75\,cm$$

$$\Rightarrow |\Delta x| = 3/75\,cm$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۷۰- **گزینهٔ «۴»** (مجتبی نکوئیان)

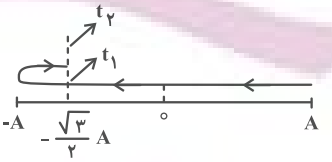
ابتدا از روی نمودار مکان- زمان، دورهٔ تناوب نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t) \xrightarrow[t=\frac{1}{2}s]{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}A} -\frac{\sqrt{2}}{2}A = A\cos(\frac{2\pi}{T}(\frac{1}{2}))$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{T} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{4}{5}s$$

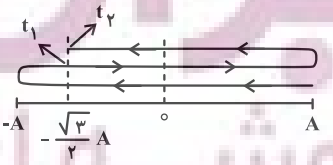
با توجه به این‌که نوسانگر در یک دورهٔ تناوب، دو بار متوالی از مکان $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌گذرد، می‌توان دو حالت زیر را در نظر گرفت:

حالت (۱):



$$-\frac{\sqrt{3}}{2}A = A\cos(\frac{2\pi}{T}t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{12}T \\ \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{7}{12}T \\ \frac{t_2}{t_1} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

حالت (۲):



$$-\frac{\sqrt{3}}{2}A = A\cos(\frac{2\pi}{T}t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{7}{12}T \\ \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{5}{12}T \\ \frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{7} \end{cases}$$

که حالت (۲) قابل قبول است، بنابراین:

$$t_2 = \frac{17}{12}T \xrightarrow{T=\frac{4}{5}s} t_2 = \frac{17}{15}s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۷۱- **گزینهٔ «۳»** (امیرامحمد میرسعید)

در گام اول چون در صورت سؤال گفته شده $(K = 3U)$ پس می‌توان نوشت:

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow E = K_1 + \frac{K_1}{3} = \frac{4K_1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$v_{max}^2 = \frac{4}{3}v_1^2 \Rightarrow v_{max}^2 = \frac{4}{3} \times 3 = 4 \Rightarrow v_{max} = 2\frac{m}{s}$$

در گام دوم با توجه به این‌که $U_2 = 8K_2$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$E = K_2 + U_2 \Rightarrow E = K_2 + 8K_2 = 9K_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 9 \times \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_{max}^2 = 9v_2^2$$

$$\Rightarrow 4 = 9v_2^2 \Rightarrow v_2 = \frac{2}{3}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۷۲- **گزینهٔ «۳»** (محسن سلماسی‌وند)

طول پاره‌خط $4\,cm$ است، پس $A = 2\,cm$. در هر ثانیه یک بار طول پاره‌خط را می‌رود، پس یک دور کامل یا یک رفت و برگشت، ۲ ثانیه طول خواهد کشید. $(T = 2s)$

$$v_{max} = A\omega = A.\frac{2\pi}{T} \Rightarrow v_{max} = 2 \times \frac{2\pi}{2} = 2\pi\frac{cm}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۷۳- **گزینهٔ «۴»** (علیرضا جباری)

اولین بار بعد از لحظهٔ $t = 0$ که انرژی جنبشی نوسانگر به صفر می‌رسد، نصف دورهٔ تناوب طی شده است.

$$\frac{T}{2} = 0/2 \Rightarrow T = 0/4s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\xrightarrow{T=0/4s}\omega=\frac{2\pi}{0/4}=5\pi\frac{rad}{s}$$

مسافت طی شده در دو نوسان کامل معادل ۸ برابر دامنه است، زیرا مسافت طی شده در هر نوسان کامل ۴ برابر دامنه است.

$$n=2\Rightarrow \ell=2(4A)=8A\xrightarrow{\ell=64cm}64=8A\Rightarrow A=8cm$$

اکنون انرژی مکانیکی نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow[A=8cm=8\times10^{-2}m\ ,\ \pi^2=10]{m=400g=0/4kg\ ,\ \omega=5\pi\frac{rad}{s}}$$

$$E=\frac{1}{2}\times0/4\times(8\times10^{-2})^2\times(5\pi)^2$$

$$\Rightarrow E=0/2\times64\times10^{-4}\times250=320\times10^{-3}J=320mJ$$

وقتی انرژی جنبشی صفر است، انرژی پتانسیل بیشینه بوده و با انرژی مکانیکی، برابر است. $U_{max}=E=320mJ$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۷۴- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به این‌که انرژی مکانیکی برابر با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل کشسانی نوسانگر است، از روی شکل می‌توان گفت که انرژی جنبشی نوسانگر برابر با $90mJ$ است. پس:

$$K=E-U=U_{max}-U=90mJ$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow90\times10^{-3}=\frac{1}{2}m(9\times10^{-2})\Rightarrow m=2kg$$

با توجه به رابطهٔ تندی بیشینه و بسامد زاویه‌ای سامانه جرم- فنر می‌توان نوشت:

$$v_{max}=A\omega\xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}v_{max}=A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\xrightarrow[k=8\frac{N}{cm}=800\frac{N}{m},\ m=2kg]{v_{max}=4\times10^{-1}\frac{m}{s}}4\times10^{-1}=A\sqrt{\frac{8\times10^2}{2}}$$

$$\Rightarrow A=2\times10^{-2}m=2cm$$

نوسانگر در هر دورهٔ تناوب، مسافتی به اندازهٔ چهار برابر دامنه نوسان را طی می‌کند. بنابراین در دو دورهٔ تناوب داریم: $L=8A=8(2)=16cm$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۷۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمد مقدم)*

ابتدا با استفاده از نمودار، دورهٔ حرکت نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$x=A\cos\omega t\Rightarrow-1=\sqrt{2}\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow t=\frac{T}{2}+\frac{T}{8}=\frac{5T}{8}=\frac{5}{12}\Rightarrow T=\frac{2}{3}s$$

حال با استفاده از رابطهٔ انرژی مکانیکی داریم:

$$\left.\begin{matrix}E=K+U\\U=\frac{80}{100}K\end{matrix}\right\}\Rightarrow E=K+0/8K\Rightarrow E=1/8K$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}mv^2\times1/8$$

$$\Rightarrow(\sqrt{2}\times10^{-2})^2\times(\frac{2\pi}{\frac{2}{3}})^2=1/8v^2$$

$$\Rightarrow v^2=\frac{2\times10^{-4}\times9\pi^2}{1/8}=10^{-2}\Rightarrow v=0/1\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۷۶- **گزینهٔ «۴»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

انرژی جنبشی نوسانگر هنگام گذر از حالت تعادل، بیشینه و برابر انرژی مکانیکی آن است.

$$\begin{cases}E=K_{max}=6J\Rightarrow E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\\\Rightarrow6=\frac{1}{2}\times0/3\times A^2\times400\pi^2\\\omega=2\pi f=20\pi\frac{rad}{s}\end{cases}$$

$$\Rightarrow40=A^2\times400\pi^2\Rightarrow A^2=\frac{0/1}{\pi^2}$$

$$\xrightarrow{\pi^2\simeq10}A^2=\frac{1}{100}\Rightarrow A=\frac{1}{10}m$$

بنابراین معادلهٔ حرکت را می‌توانیم بنویسیم:

$$x=A\cos\omega t=0/1\cos20\pi t$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۷۷- **گزینهٔ «۳»** *(مهران اسماعیلی)*

در دو انتهای مسیر (نقاط برگشت)، انرژی جنبشی نوسانگر برابر صفر و نوسانگر در مکان بیشینهٔ خود، یعنی $x=\pm A$ است.

$$K=0/25-400x^2\xrightarrow[x=\pm A]{K=0}0=0/25-400A^2$$

$$\Rightarrow A^2=\frac{0/25}{400}\Rightarrow A=\frac{0/5}{20}=\frac{1}{40}m=2/5cm$$

اما در مرکز نوسان انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه $(K=K_{max})$ و مکان نوسانگر برابر صفر است. $(x=0)$

$$K = ۰/۲۵ - ۴۰۰x^۲ \xrightarrow[x=۰]{K=K_{max}} K_{max} = ۰/۲۵ - ۴۰۰\times ۰$$

$$\Rightarrow K_{max} = ۰/۲۵J$$

$$K_{max} = \frac{۱}{۲}mv_{max}^۲ \xrightarrow[m=۲۰g=\frac{۲۰}{۱۰۰۰}kg]{K_{max}=۰/۲۵J}$$

$$۰/۲۵ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲۰}{۱۰۰۰}v_{max}^۲ \Rightarrow v_{max}^۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow v_{max} = ۵\frac{m}{s} = ۵۰۰\frac{cm}{s}$$

$$v_{max} = A\omega \xrightarrow[v_{max}=۵۰۰\frac{cm}{s}]{A=۲/۵cm} ۵۰۰ = ۲/۵\omega$$

$$\Rightarrow \omega = ۲۰۰\frac{rad}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۷۸- **گزینهٔ «۳»** (مهران اسماعیلی)

با توجه به رابطهٔ دورهٔ آونگ ساده و رابطهٔ تعداد نوسان‌های کامل با دورهٔ نوسان‌ها داریم:

$$\begin{cases} T = ۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}} \\ n = \frac{t}{T} \Rightarrow \frac{n_۱}{n_۲} = \frac{T_۲}{T_۱} \end{cases}$$

از دو رابطهٔ بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\xrightarrow[n_۲=۴۰]{n_۱=۲۰} \frac{۲۰}{۴۰} = \sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{\ell_۲}{\ell_۱} \Rightarrow \ell_۲ = \frac{۱}{۴}\ell_۱$$

$$\text{درصد تغییر طول} = \frac{\Delta\ell}{\ell_۱}\times ۱۰۰ = \frac{\ell_۲ - \ell_۱}{\ell_۱}\times ۱۰۰$$

$$= \frac{\frac{۱}{۴}\ell_۱ - \ell_۱}{\ell_۱}\times ۱۰۰ = -\frac{۳}{۴}\times ۱۰۰ = -۷۵٪$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۷۹- **گزینهٔ «۳»** (معصومه شریعت ناصری)

ابتدا گرانش را در سطح سیاره با گرانش در سطح زمین مقایسه می‌کنیم:

$$\text{چگالی سیاره}\ \rho' = ۳۲\rho \Rightarrow \frac{M'}{V'} = ۳۲\frac{M_e}{V_e}$$

$$M' = ۴M_e \Rightarrow V_e = ۸V' \ , \ V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

$$\Rightarrow R_e = ۲R'$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{\frac{GM'}{R'^۲}}{\frac{GM_e}{R_e^۲}} = \frac{M'}{M_e}\times\frac{R_e^۲}{R'^۲} = ۴\times ۴ = ۱۶$$

با توجه به رابطهٔ $T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ که مربوط به دوره آونگ است، داریم:

$$\frac{T'}{T_e} = \frac{۲\pi\sqrt{\frac{L}{g'}}}{۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{g'}} \Rightarrow \frac{T}{۲} = \sqrt{\frac{۱}{۱۶}} \Rightarrow T' = \frac{۱}{۲}s$$

$$n = \frac{t}{T} = ۲۴\times\frac{۳۶۰۰}{۲} = ۴۳۲۰۰$$

$$n' = \frac{t}{T'} = ۲۴\times\frac{۳۶۰۰}{۰/۵} = ۱۷۲۸۰۰$$

$$n' - n = ۱۷۲۸۰۰ - ۴۳۲۰۰ = ۱۲۹۶۰۰$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** (زهره آقامحمدی)

با توجه به گسترهٔ داده شده برای بسامد زاویه‌ای نوسان‌های میلهٔ افقی داریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow[g=۱۰\frac{N}{kg}]{\omega_۱=۴\frac{rad}{s}} ۴ = \sqrt{\frac{۱۰}{L_۱}}$$

$$\Rightarrow ۱۶ = \frac{۱۰}{L_۱} \Rightarrow L_۱ = ۰/۶۲۵m = ۶۲/۵cm$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow[g=۱۰\frac{N}{kg}]{\omega_۲=۵\frac{rad}{s}} ۵ = \sqrt{\frac{۱۰}{L_۲}} \Rightarrow ۲۵ = \frac{۱۰}{L_۲}$$

$$\Rightarrow L_۲ = ۰/۴m = ۴۰cm$$

در نتیجه می‌توان گفت در آونگ‌هایی که طول آن‌ها بین $۴۰cm$ و $۶۲/۵cm$ است، تشدید رخ می‌دهد و این آونگ‌ها با دامنهٔ بیشتری نوسان می‌کنند. در آونگ‌هایی که طول آن‌ها کوچک‌تر از $۴۰cm$ یا بزرگ‌تر از $۶۲/۵cm$ باشد، دامنهٔ نوسان کوچک‌تر است یعنی فقط در آونگ **B** تشدید رخ نمی‌دهد.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

فیزیک ۲

۸۱- **گزینهٔ «۱»** (زهره آقامحمدی)

ابتدا با استفاده از اصل پایستگی بار الکتریکی، بار نهایی کرهٔ A را محاسبه می‌کنیم:

مجموع بار الکتریکی کره‌ها پس از انتقال الکترون = مجموع بار الکتریکی کره‌ها قبل از انتقال الکترون

$$\Rightarrow q_A + q_B = q'_A + q'_B \xrightarrow[q'_B=-8q]{q_A=q\ ,\ q_B=-5q}$$

$$q - 5q = q'_A - 8q \Rightarrow q'_A = 4q$$

اکنون با استفاده از قانون کولن، نسبت نیروها را محاسبه می‌کنیم:

$$F = k\frac{|q_A||q_B|}{r^2} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{|q'_A||q'_B|}{|q_A||q_B|}\left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

$$\xrightarrow[q_A=q\ ,\ q_B=-5q]{r=r'\ ,\ q'_A=4q\ ,\ q'_B=-8q}$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{4q\times 8q}{q\times 5q} = \frac{32}{5}$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۵ تا ۷)

۸۲- **گزینهٔ «۱»** (بهزاد آزادفر)

نیرویی که q و 4q به یکدیگر وارد می‌کنند، نیروی عمل و عکس‌العمل هستند و با هم برابرند.

$$F_A = F_B$$

جرم گلولهٔ A بیشتر است و انحراف آن کمتر است پس زاویهٔ کوچک‌تری دارد.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

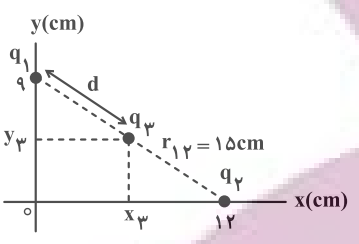
۸۳- **گزینهٔ «۳»** (امیرمحمد میرسعید)

چون دو بار q_1 و q_2 هم‌نام هستند، میدان الکتریکی برایند بین آن‌ها و روی خط واصل دو بار و نزدیک‌تر به باری که اندازهٔ کمتری دارد صفر می‌شود، پس گزارهٔ (الف) غلط می‌باشد و میدان الکتریکی برایند در نزدیکی بار q_1 صفر خواهد شد. پس اگر از B به D برویم میدان الکتریکی برایند ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد و گزارهٔ (ب) غلط می‌باشد. اگر از A تا D برویم ابتدا در جهت میدان برایند و در انتها خلاف جهت میدان برایند حرکت کرده‌ایم؛ بنابراین پتانسیل ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد و گزارهٔ (پ) درست است.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۴ تا ۲۵)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** (زهره آقامحمدی)

ابتدا در یک دستگاه مختصات xoy، مکان بارهای q_1 و q_2 را مشخص می‌کنیم و فاصلهٔ بین دو بار q_1 و q_2 را محاسبه می‌کنیم:



$$r_{12} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15\,cm$$

برای این‌که هر سه بار در حال تعادل باشند، اولاً باید هر سه بار در یک راستا روی خط راست قرار گیرند و ثانیاً چون بارهای q_1 و q_2 هم‌نامند، بار q_3 بین دو بار و روی خط واصل آن‌ها و نزدیک به باری که اندازهٔ بار الکتریکی آن کوچک‌تر است، یعنی q_1 قرار می‌گیرد. در نتیجه اگر q_3 را در حال تعادل در نظر بگیریم، داریم:

$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow k\frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2} = k\frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2}$$

$$\xrightarrow[r_{13}=d\ ,\ r_{23}=15-d]{q_1=2\mu C\ ,\ q_2=8\mu C} \frac{2}{d^2} = \frac{8}{(15-d)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \frac{1}{d} = \frac{2}{15-d} \Rightarrow d = 5\,cm$$

در نتیجه با توجه به شکل و استفاده از تشابه مثلث‌ها، x_3 و y_3 به دست می‌آیند:

$$\frac{d}{15} = \frac{9-y_3}{9} \xrightarrow{d=5cm} \frac{1}{3} = \frac{9-y_3}{9} \Rightarrow y_3 = 6\,cm$$

$$\frac{d}{15} = \frac{x_3}{12} \xrightarrow{d=5cm} \frac{1}{3} = \frac{x_3}{12} \Rightarrow x_3 = 4\,cm$$

برای محاسبهٔ اندازهٔ بار q_3، اولاً باید توجه کنید که چون هر سه بار در حال تعادل‌اند، علامت بار q_3 مخالف علامت بارهای q_1 و q_2 است، بنابراین بار q_3، منفی است. ثانیاً باید یکی از بارهای q_1 یا q_2 را در حال تعادل قرار دهیم تا اندازهٔ بار q_3 به دست آید. اگر بار q_1 در حال تعادل باشد، داریم:

$$F_{31} = F_{21} \Rightarrow k\frac{|q_3||q_1|}{r_{31}^2} = k\frac{|q_2||q_1|}{r_{21}^2}$$

$$\xrightarrow[r_{۳۱}=d=۵cm]{q_۲=۸\mu C\ ,\ r_{۲۱}=۱۵cm} \frac{|q_۳|}{۲۵}=\frac{۸}{۲۲۵}$$

$$\Rightarrow |q_۳|=\frac{۸}{۹}\mu C \Rightarrow q_۳=-\frac{۸}{۹}\mu C$$

توجه کنید که وقتی نیروی خالص وارد بر هر سه بار برابر صفر باشد، اندازهٔ بار میانی از اندازهٔ دو بار دیگر کوچک‌تر است:

$$|q_۳|<|q_۱| \quad و \quad |q_۳|<|q_۲|$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۸۵- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*

اگر بردار نیروی الکتریکی وارده از طرف $q_۱$ به $q_۳$ را با $\vec{F}_۱$ و بردار نیروی الکتریکی وارده از طرف $q_۲$ به $q_۳$ را با $\vec{F}_۲$ نشان دهیم، داریم:

$$\vec{F}_۱+\vec{F}_۲=\vec{F} \qquad (۱)$$

با استفاده از رابطهٔ مقایسه‌ای قانون کولن بین دو ذرهٔ باردار می‌توان نوشت:

$$\frac{F'_۱}{F_۱}=\frac{|q'_۱|}{|q_۱|}\times(\frac{r_۱}{r'_۱})^۲ \Rightarrow \frac{F'_۱}{F_۱}=۲\times(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{F'_۲}{F_۲}=\frac{|q'_۲|}{|q_۲|}\times(\frac{r_۲}{r'_۲})^۲ \Rightarrow \frac{F'_۲}{F_۲}=\frac{۱}{۲}\times(۲)^۲=۲$$

با توجه به عوض کردن جای دو بار $q_۱$ و $q_۲$، بردار نیروهای جدید را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{F}'_۱=-\frac{۱}{۲}\vec{F}_۱ \quad ; \quad \vec{F}'_۲=-۲\vec{F}_۲$$

پس:

$$-\frac{۱}{۲}\vec{F}_۱-۲\vec{F}_۲=-۳\vec{F} \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\ ,\ (۲)} \vec{F}_۱=-\frac{۲}{۳}\vec{F} \quad ; \quad \vec{F}_۲=\frac{۵}{۳}\vec{F}$$

با استفاده از رابطهٔ مقایسه‌ای قانون کولن داریم:

$$\frac{|F_۲|}{|F_۱|}=\frac{|q_۲|}{|q_۱|}\times(\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \Rightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{|q_۲|}{|q_۱|}\times(\frac{r}{۲r})^۲ \Rightarrow \frac{|q_۱|}{|q_۲|}=\frac{۱}{۱۰}$$

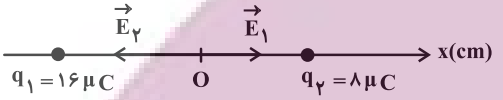
با توجه به این‌که بردار نیروهای $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ خلاف جهت هم هستند، می‌توان گفت که دو بار $q_۱$ و $q_۲$ هم‌نام هستند، پس:

$$\frac{q_۱}{q_۲}=\frac{۱}{۱۰}$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۸۶- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

میدان‌های الکتریکی $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ ناشی از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ را در نقطهٔ O نشان می‌دهیم و نسبت اندازهٔ این دو میدان را به دست می‌آوریم:



$$E=k\frac{|q|}{r^۲} \Rightarrow \frac{E_۲}{E_۱}=\frac{|q_۲|}{|q_۱|}\times(\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{E_۲}{E_۱}=\frac{۸}{۱۶}\times(\frac{۲۰}{۱۰})^۲=\frac{۱}{۲}\times۴=۲ \Rightarrow E_۲=۲E_۱$$

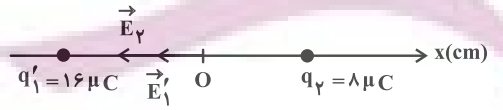
اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O برابر است با:

$$E=E_۲-E_۱=۲E_۱-E_۱=E_۱$$

اگر بار $q'=-۳۲\mu C$ را به بار $q_۱$ اضافه کنیم، خواهیم داشت.

$$q'_۱=۱۶+(-۳۲)=-۱۶\mu C$$

میدان الکتریکی $\vec{E}_۲$ نسبت به حالت اول هیچ تغییری ندارد. میدان الکتریکی $\vec{E}'_۱$ با میدان الکتریکی $\vec{E}_۱$ هم‌اندازه است اما جهت آن برعکس می‌شود.



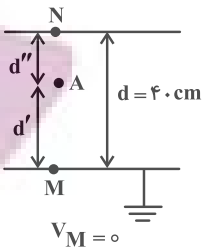
میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O را در حالت دوم حساب می‌کنیم:

$$E'=E'_۱+E_۲=E_۱+۲E_۱=۳E_۱ \Rightarrow \frac{E'}{E}=\frac{۳E_۱}{E_۱}=۳$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۲ تا ۱۷)

۸۷- **گزینهٔ «۴»** *(علی برزگر)*

با توجه به شکل می‌توان پتانسیل صفحهٔ پایینی را برابر صفر گرفت، چون به زمین وصل است.



$$V_M - V_N = +۲۰V \xrightarrow{V_M=۰} V_N = -۲۰V$$

$$E = \frac{\Delta V}{d} \xrightarrow[E \text{ ثابت}]{\text{میدان یکنواخت}} \frac{V_M - V_A}{d'} = \frac{V_M - V_N}{d}$$

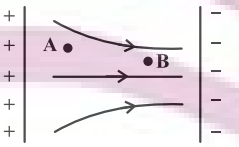
$$\Rightarrow \frac{۰-(-۱۲)}{d'} = \frac{۰-(-۲۰)}{۴۰} \Rightarrow \frac{۱۲}{d'} = \frac{۲۰}{۴۰} \Rightarrow d' = ۲۴cm$$

$$d'' = ۴۰ - ۲۴ = ۱۶cm = ۱۶۰mm$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۶)

۸۸- **گزینهٔ «۲»** *(حسین الهی)*

با حرکت در راستای خطوط میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد و با توجه به منفی بودن بار الکتریکی انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد و در نتیجه انرژی جنبشی نیز کاهش می‌یابد. همچنین با حرکت از نقطهٔ A به B با توجه به بیشتر شدن تراکم خطوط، اندازهٔ میدان الکتریکی نیز افزایش می‌یابد.



دقت کنید، چون الکترون به صورت آزادانه در جهت میدان حرکت کرده است، حتماً سرعت اولیه دارد.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۷)

۸۹- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

چون تندی ذره $(q < ۰)$ کاهش یافته، در نتیجه ذره در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شده است، بنابراین انرژی جنبشی در جابه‌جایی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B کاهش یافته و انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

$$\Delta K = \frac{۱}{۲} m(v_B^۲ - v_A^۲)$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۰/۰۶ \times ۱۰^{-۳} (۳^۲ - ۴^۲) = ۳ \times ۱۰^{-۵} (-۷)$$

$$\Rightarrow \Delta K = -۲۱ \times ۱۰^{-۵} J \Rightarrow \Delta U = -\Delta K = ۲۱ \times ۱۰^{-۵} J$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} \xrightarrow[\Delta U = ۲۱ \times ۱۰^{-۵} J]{V_A = -۱۵۰V \ , \ q = -۳ \times ۱۰^{-۶} C}$$

$$V_B - (-۱۵۰) = \frac{۲۱ \times ۱۰^{-۵}}{-۳ \times ۱۰^{-۶}} \Rightarrow V_B + ۱۵۰ = -۷۰$$

$$\Rightarrow V_B = -۲۲۰V$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۹۰- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

فقط مورد (پ) درست است.

بررسی موارد:

الف) نادرست است، در یک جسم رسانا که در تعادل است، تمام نقاط پتانسیل الکتریکی یکسانی دارند و اصطلاحاً یک جسم رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است. $(V_A = V_B)$

ب) نادرست است، دو نقطهٔ A و B درون جسم رسانا هستند و می‌دانیم میدان الکتریکی خالص درون یک جسم رسانا، در حالت تعادل، صفر است.

$$(E_A = E_B = ۰)$$

پ) درست است، در واقع تراکم خطوط میدان الکتریکی در قسمت تیز رسانا بیشتر است، پس نشان می‌دهد که تراکم بار هم بیشتر است.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۲۷ تا ۳۲)

فیزیک ۱

۹۱- **گزینهٔ «۲»** (حسام نادری)

فقط مورد (ب) درست است.

علت نادرستی سایر موارد:

الف) فشار همانند تندی یک کمیت فرعی نرده‌ای است.

پ) لزوماً دقت اندازه‌گیری در ابزارهای رقمی بیشتر از ابزارهای مدرج نیست و ممکن است وسیلهٔ مدرجی دقیق‌تر از یک وسیلهٔ اندازه‌گیری دیجیتال باشد.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۷، ۹ و ۱۴)

۹۲- **گزینهٔ «۲»** (بهزاد آزادفر)

حجم آب خارج شده از شیر در ۵ دقیقه: $۵\times۳۰=۱۵۰L$

پس آهنگ خروج آن از شیر برابر است با:

$$\text{آهنگ خروج}=\frac{۱۵۰L}{۵min}=۳۰\frac{L}{min}$$

حال به کمک تبدیل زنجیره‌ای داریم:

$$۳۰\frac{L}{min}=۳۰\frac{L}{min}\times\frac{۱۰^۳cm^۳}{۱L}\times\frac{۱۰^{-۶}m^۳}{۱cm^۳}\times\frac{۱min}{۶۰s}\times\frac{۱s}{۱۰^۶\mu s}$$

$$=۰/۵\times\frac{۱۰^{-۳}}{۱۰^۶}=۵\times۱۰^{-۱۰}\frac{m^۳}{\mu s}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۹۳- **گزینهٔ «۴»** (مجتبی نکوئیان)

تبدیل یکای هر کدام از گزینه‌ها را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

۱) $۳/۹\times۱۰^{-۷}cm^۲=۳/۹\times۱۰^{-۷}cm^۲$

$$\times(\frac{۱۰^{-۲}m}{۱cm}\times\frac{۱\mu m}{۱۰^{-۶}m})^۲=۳۹\mu m^۲$$

۲) $۱/۲\times۱۰^۷\frac{ns}{mm^۳}=۱/۲\times۱۰^۷\frac{ns}{mm^۳}$

$$\times\frac{۱۰^{-۹}s}{۱ns}\times\frac{۱Ts}{۱۰^{۱۲}s}\times(\frac{۱mm}{۱۰^{-۳}m}\times\frac{۱۰^۳m}{۱km})^۳=۱/۲\times۱۰^۴\frac{Ts}{km^۳}$$

۳) $۲/۳\times۱۰^{-۷}\frac{ms}{Mm^۳}=۲/۳\times۱۰^{-۷}\frac{ms}{Mm^۳}\times\frac{۱۰^{-۳}s}{۱ms}$

$$\times\frac{۱ps}{۱۰^{-۱۲}s}\times(\frac{۱Mm}{۱۰^۶m}\times\frac{۱۰^۹m}{۱Gm})^۳=۲/۳\times۱۰^{۱۱}\frac{ps}{Gm^۳}$$

۴) $۱۰^{-۷}\frac{\mu m}{ng.ps^۲}=۱۰^{-۷}\frac{\mu m^۲}{ng.ps^۲}\times(\frac{۱۰^{-۶}m}{۱\mu m}\times\frac{۱cm}{۱۰^{-۲}m})^۲$

$$\times\frac{۱ng}{۱۰^{-۹}g}\times\frac{۱۰^۱g}{۱dag}\times(\frac{۱ps}{۱۰^{-۱۲}s}\times\frac{۱۰^۹s}{۱Gs})^۲=۱۰^{۳۷}\frac{cm^۲}{dag.Gs^۲}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۹۴- **گزینهٔ «۱»** (امیرامحمد میرسعید)

برای برقراری تساوی یکای طرفین باید یکسان باشد، داریم:

$$[A]=[\frac{B}{C^۲}]\Rightarrow\frac{kg}{m^۳}=\frac{[B]}{[C^۲]}\Rightarrow\frac{kg}{m^۳}=\frac{\frac{kg}{m}}{[C^۲]}\Rightarrow[C]=m$$

$$[A]=[\frac{C}{D^۲}]\Rightarrow\frac{kg}{m^۳}=\frac{[C]}{[D^۲]}\Rightarrow[D^۲]=\frac{m^۴}{kg}$$

$$[BD^۲]=\frac{kg}{m}\times\frac{m^۴}{kg}=m^۳$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۹۵- **گزینهٔ «۲»** (معصومه شریعت‌ناصری)

ابتدا $\frac{\mu J}{ns}$ را به $\frac{J}{s}$ تبدیل می‌کنیم و با استفاده از روش تبدیل واحد زنجیره‌ای داریم:

$$۴/۵\times۱۰^۵\frac{\mu J}{ns}=۴/۵\times۱۰^۵\frac{\mu J}{ns}\times\frac{۱۰^{-۶}J}{۱\mu J}\times\frac{۱ns}{۱۰^{-۹}s}=۴/۵\times۱۰^۸\frac{J}{s}$$

$$J=\frac{kg.m^۲}{s^۲}\Rightarrow۴/۵\times۱۰^۸\frac{kgm^۲}{s^۳}$$

اکنون $\frac{m^۲}{s^۳}$ را به $\frac{mm^۲}{\mu s^۳}$ تبدیل می‌کنیم:

$$۴/۵\times۱۰^۸\frac{kg.m^۲}{s^۳}=۴/۵\times۱۰^۸\frac{kgm^۲}{s^۳}\times\frac{۱۰^{-۱۸}s^۳}{۱\mu s^۳}\times\frac{۱mm^۲}{۱۰^{-۶}m^۲}$$

$$=۴/۵\times۱۰^{-۴}kg\frac{mm^۲}{\mu s^۳}$$

اگر عدد به دست آمده را برحسب g بنویسیم:

$$۴/۵\times۱۰^{-۴}kg\frac{mm^۲}{\mu s^۳}=۴/۵\times۱۰^{-۱}g\frac{mm^۲}{\mu s^۳}$$

عبارت مناسب برای جای خالی به صورت $۴/۵\times۱۰^{-۱}g$ است که با گزینهٔ «۲» مطابقت دارد.

$$\text{گزینهٔ «۲»}\Rightarrow۴/۵\times۱۰^۸ng\times\frac{۱۰^{-۹}g}{۱ng}=۴/۵\times۱۰^{-۱}g$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** (معصومه شریعت ناصری)

ابتدا با استفاده از رابطهٔ چگالی، جرم یخ را به دست می‌آوریم:

$$m = \rho V = ۰/۹ \times ۲۰۰ = ۱۸۰g$$

آهنگ ذوب یخ را با استفاده از روش تبدیل زنجیره‌ای به گرم‌بردقیقه تبدیل می‌کنیم:

$$\text{آهنگ ذوب یخ}: ۲۰۰\frac{mg}{s} = ۲۰۰\frac{mg}{s} \times \frac{۱۰^{-۳}g}{۱mg} \times \frac{۶۰s}{۱min} = ۱۲\frac{g}{min}$$

یعنی در هر دقیقه ۱۲ گرم یخ ذوب می‌شود. کل زمان ذوب یخ برابر است با:

$$\begin{array}{c|c} ۱min & ۱۲g \\ \hline t & ۱۸۰g \end{array} \Rightarrow t = \frac{۱۸۰}{۱۲} = ۱۵min$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۸)

۹۷- **گزینهٔ «۱»** (علیرضا جباری)

ابتدا حجم ظاهری کره را حساب می‌کنیم. این حجم، شامل حجم حفره و حجم فلز است.

$$\text{حجم ظاهری کره } V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳} \times ۳ \times ۵^۳ = ۴ \times ۱۲۵ = ۵۰۰cm^۳$$

سپس حجم فلز را به دست آورده و از حجم ظاهری کره کم می‌کنیم تا حجم حفره به دست آید:

$$\text{فلز } V_۱ = \frac{m_۱}{\rho_۱} \xrightarrow[\rho_۱ = ۱۰\frac{g}{cm^۳}]{m_۱ = ۳kg = ۳۰۰۰g} V_۱ = \frac{۳۰۰۰}{۱۰} = ۳۰۰cm^۳$$

$$\text{ظاهری } V = V_۱ + V_۲ \xrightarrow[V_{\text{فلز}} = ۳۰۰cm^۳]{V_{\text{ظاهری}} = ۵۰۰cm^۳} ۵۰۰ = ۳۰۰ + V_۲$$

$$\Rightarrow V_۲ = ۵۰۰ - ۳۰۰ = ۲۰۰cm^۳ \text{ حجم حفره}$$

اکنون جرم حفره را که با مایعی به چگالی $۲/۵\frac{g}{cm^۳}$ پر شده است، حساب می‌کنیم:

$$m_۲ = \rho_{\text{مایع}} V_۲ = ۲/۵ \times ۲۰۰ = ۵۰۰g = ۰/۵kg$$

جرم کره در این حالت برابر است با مجموع جرم فلز و مایع درون حفره:

$$m_{\text{کل}} = m_۱ + m_۲ = ۳ + ۰/۵ = ۳/۵kg$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** (محمدکاظم منشادی)

چگالی فلزات در حالت مایع را با ρ_A و ρ_B و در حالت جامد با ρ'_A و ρ'_B نشان می‌دهیم:

$$\rho_B = ۲\rho_A \Rightarrow \frac{m}{V_B} = \frac{۲m}{V_A} \Rightarrow V_A = ۲V_B$$

تغییر چگالی بر اثر تغییر حجم است، زیرا جرم ثابت است.

$$\rho'_A = ۱/۲\rho_A \Rightarrow V'_A = \frac{۱۰}{۱۲}V_A = \frac{۵}{۶}V_A$$

$$\rho'_B = ۱/۱\rho_B \Rightarrow V'_B = \frac{۱۰}{۱۱}V_B$$

$$\frac{V'_A}{V'_B} = \frac{\frac{۵}{۶}V_A}{\frac{۱۰}{۱۱}V_B} \xrightarrow{V_A = ۲V_B} \frac{\frac{۱۰}{۶}}{\frac{۱۰}{۱۱}} = \frac{۱۱}{۶}$$

$$\text{آلیاژ جامد } \rho = \frac{m_A + m_B}{V'_A + V'_B} = \frac{۲m}{\frac{۱۱}{۶}V'_B + V'_B} = \frac{۲m}{\frac{۱۷}{۶}V'_B}$$

$$= \frac{۱۲}{۱۷}\frac{m}{V'_B} = \frac{۱۲}{۱۷}\rho'_B$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۹۹- **گزینهٔ «۱»** (مسعود فندانی)

شیب خط نمودار $m - V$ همان چگالی جسم است. بنابراین:

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{m_B + ۳۰۰}{m_B}$$

$$۳m_B = ۲m_B + ۶۰۰ \Rightarrow m_B = ۶۰۰g$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۱۰۰- **گزینهٔ «۲»** (مجتبی نکوئیان)

با توجه به این‌که $\frac{۴}{۵}$ از حجم مایع درون ظرف را خالی کرده‌ایم، حجم مایع و در نتیجه جرم مایع، $\frac{۱}{۵}$ حالت اولیه می‌شود، بنابراین:

$$m_{\text{ظرف}} + m'_{\text{مایع}} = \frac{۱}{۲}(m_{\text{ظرف}} + m_{\text{مایع}})$$

$$\xrightarrow{m'_{\text{مایع}} = \frac{۱}{۵}m_{\text{مایع}}} m_{\text{ظرف}} + \frac{۱}{۵}m_{\text{مایع}} = \frac{۱}{۲}m_{\text{ظرف}} + \frac{۱}{۲}m_{\text{مایع}}$$

$$\Rightarrow m_{\text{ظرف}} = \frac{۳}{۵}m_{\text{مایع}}$$

$$m_{\text{مایع}} = \rho_{\text{مایع}} V_{\text{مایع}} = \rho_{\text{مایع}}(\pi)(r^۲h)$$

$$\xrightarrow[r=۲cm\ ,\ h=۱۰cm]{\rho_{\text{مایع}} = ۵\frac{g}{cm^۳}} m_{\text{مایع}} = (۵)(۳)(۲^۲)(۱۰) = ۶۰۰g$$

$$\Rightarrow m_{\text{ظرف}} = \frac{۳}{۵}(۶۰۰) = ۳۶۰g$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

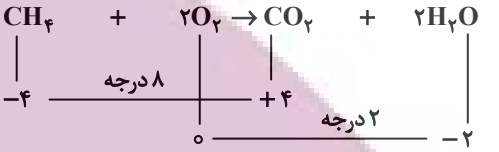
شیمی ۳

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»** *(سعید تیزرو)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) از دیدگاه زیست محیطی گاز هیدروژن نسبت به گاز متان دارای مزیت است، زیرا متان برخلاف هیدروژن، افزون بر آب (فراورده دوستدار محیط زیست)، گاز گلخانه‌ای CO_2 را نیز تولید می‌کند.

۲) معادلهٔ واکنش کلی سلول سوختی متان- اکسیژن:



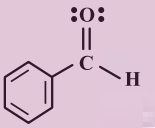
۳) مطابق واکنش ارائه شده، CH_4 اکسایش یافته و کاهنده محسوب می‌شود.

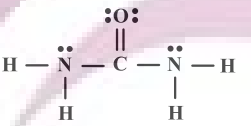
۴) سلول‌های سوختی متان- اکسیژن برخلاف باتری‌ها نمی‌توانند مواد اولیه را ذخیره کنند و باید به‌طور پیوسته گاز CH_4 به آن تزریق شود.

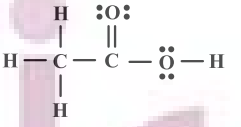
(شیمی ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

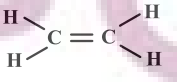
۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا بیانی)*

با توجه به ساختارها داریم:

۱)  $۴-۳=۱$

۲)  $۴-۰=۴$

۳)  $۴-۱=۳$

۴)  $۴-۶=-۲$

(شیمی ۳- صفحهٔ ۵۲)

۱۰۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

با توجه به معادلهٔ کلی برقکافت آب:

$$۲H_۲O(l) \rightarrow ۲H_۲(g) + O_۲(g)$$

گاز هیدروژن در اطراف قطب منفی (کاتد) و گاز اکسیژن در اطراف قطب مثبت (آند) تولید می‌شود. حجم گاز تولید شده در اطراف کاتد ۲ برابر حجم گاز تولید شده در اطراف آند می‌باشد.

بررسی گزینهٔ «۴»:

۴) به ازای تولید ۴ مول الکترون مقدار ۲ مول آب مصرف می‌شود.

$$?g\ H_۲O = ۰/۸ mol\ e^- \times \frac{۲ mol\ H_۲O}{۴ mol\ e^-} \times \frac{۱۸ g\ H_۲O}{۱ mol\ H_۲O}$$

$$= ۷/۲ g\ H_۲O \text{ مصرف شده}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۱۰۴- **گزینهٔ «۱»** *(علی جعفری)*

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) Na^+ به حالت مایع (l) است نه محلول (aq)! چون برای برقکافت فلزات فعال باید از حالت مذاب آن‌ها استفاده کرد.

۳) دو نوع عنصر در آن تولید می‌شود. (سدیم (Na) و کلر (Cl_2))

۴) یون‌های سدیم در کاتد کاهش می‌یابند و شعاع آن‌ها بزرگ‌تر می‌شود.

مقایسهٔ شعاع : $Na > Na^+$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

۱۰۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال، (مبنی بر امکان حفاظت کاتدی با باریم و عدم امکان انجام این فرایند با نیکل)، موقعیت قرارگیری این فلزها در سری الکتروشیمیایی به صورت زیر است:

$$Ni^{۲+} + ۲e^- \rightarrow Ni$$

$$Fe^{۲+} + ۲e^- \rightarrow Fe$$

$$Ba^{۲+} + ۲e^- \rightarrow Ba$$

به این ترتیب امکان انجام خودبه‌خودی واکنش $Ni + Ba^{۲+}$ وجود ندارد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

از آنجا که Ni در سری الکتروشیمیایی بالاتر است، قدرت اکسندگی Ni^{2+} بیشتر از Ba^{2+} خواهد بود. اگر یک جسم آهنی به یک قطعه از جنس نیکل متصل شود می‌تواند با حفاظت کاتدی مانع از واکنش این قطعه (نیکل) شود، اما با توجه به اطلاعات داده شده، نمی‌توان در مورد امکان انجام واکنش نیکل با اسید نظر قطعی داد. توجه داشته باشید که Fe امکان انجام چنین واکنشی را دارد. به این ترتیب Ba نیز می‌تواند در واکنش با اسید شرکت کند. اما از آنجا که موقعیت Ni نسبت به H_2 در سری الکتروشیمیایی مشخص نیست، نمی‌توان با قطعیت گفت که امکان انجام واکنش گفته شده وجود دارد یا خیر.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

۱۰۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمسعود حسینی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ در سلول سوختی هیدروژن- اکسیژن، تنها بخارآب مولکول‌های قطبی داشته که از مجاور قطب مثبت (کاتد) خارج می‌شود.

۲) نادرست؛ نیم‌واکنش کاتدی انجام شده در آهن سفید و حلبی خراشیده شده یکسان و به صورت $O_2(g)+2H_2O(l)+4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ است ولی واکنش در آهن سفید در سطح آهن و در حلبی در سطح قلع انجام می‌شود.

۳) نادرست؛ نخستین واکنش در تهیهٔ فلز منیزیم از آب دریا با افزودن باز (OH^-) همراه است که رنگ کاغذ pH را آبی می‌کند.

۴) درست؛ واکنش ترمیت به بصورت زیر است:

$$2Al(s)+Fe_2O_3(s) \rightarrow Al_2O_3(s)+2Fe(l)$$

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد = ۶

واکنش کلی سلول هال نیز به صورت زیر است:

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد = ۱۲

$$2Al_2O_3(s)+3C(s) \rightarrow 4Al(l)+3CO_2(g)$$

$$\frac{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش ترمیت}}{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در فرایند هال}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۵۰ تا ۶۱)

۱۰۷- **گزینهٔ «۴»** *(پویا رستگاری)*

موارد (ب) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی موارد:

آ) در فرایند هال، آند و کاتد هر دو از جنس گرافیت هستند. در این سلول الکترولیتی، دیواره‌ها و کف ظرف نقش کاتد (قطب منفی) و تیغه‌های گرافیتی بالای سلول، نقش آند (قطب مثبت) را دارند.

ب) همان‌طور که گفته شد، دیواره و کف سلول نقش کاتد را دارد و قطب منفی سلول نیز می‌باشد.

پ) گاز اکسیژن یک اکسنده قوی است و در دمای بالا با الکترود آند (گرافیت) واکنش داده و گاز CO_2 تولید می‌کند.

ت) همان‌طور که گفته شد، الکترود آند با گاز اکسیژن واکنش داده و گاز CO_2 را تولید می‌کند و به مرور از جرم آن کاسته می‌شود، بنابراین الکترود آندی در واکنش شرکت می‌کند اما الکترود کاتدی با این‌که در واکنش نیست، الکترون مورد نیاز نیم‌واکنش کاتدی را فراهم می‌کند.

ث) فرایند هال به علت مصرف مقدار زیادی انرژی الکتریکی هزینهٔ بالایی دارد، از این‌رو با بازیافت فلز آلومینیم می‌توان ضمن افزایش عمر یکی از مهم‌ترین منابع تجدیدناپذیر طبیعت، برخی هزینه‌های تولید این فلز را نیز کاهش داد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۱ و ۶۲)

۱۰۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا طاهری‌نژاد)*

ابتدا واکنش ترمیت را می‌نویسیم:

$$2Al+Fe_2O_3 \rightarrow 2Fe+Al_2O_3$$

مول Al مورد نیاز را به دست می‌آوریم:

$$\text{mol Al} = 8\text{kg} \times \frac{1000\text{g}}{1\text{kg}} \times \underbrace{0/8}_{\text{خلوص}} \times \frac{1\text{mol } Fe_2O_3}{160\text{g } Fe_2O_3}$$

$$\times \frac{2\text{mol Al}}{1\text{mol } Fe_2O_3} = 80\text{mol Al}$$

حال واکنش هال را می‌نویسیم:

$$2Al_2O_3+3C \rightarrow 4Al+3CO_2$$

$$\text{تعداد تیغه‌ها} = 80\text{mol Al} \times \frac{3\text{mol C}}{4\text{mol Al}} \times \frac{12\text{g C}}{1\text{mol C}} \times \frac{100}{80}$$

$$\times \frac{\text{۱ تیغه}}{100\text{g}} = 9 \text{ تیغه}$$

لذا حداقل ۹ تیغه نیاز است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۱ و ۶۲)

۱۰۹- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

نیم‌واکنش‌های کاهشی در سلول‌های آبکاری به صورت زیر است:

$$Ag^{+}(aq)+e^{-}\rightarrow Ag(s)$$

$$Fe^{2+}(aq)+2e^{-}\rightarrow Fe(s)$$

$$Cr^{3+}(aq)+3e^{-}\rightarrow Cr(s)$$

$$Au^{3+}(aq)+3e^{-}\rightarrow Au(s)$$

تحلیل و بررسی گزارهٔ اول: شمار الکترون‌های مبادله شده در نیم‌واکنش‌ها را یکسان می‌کنیم:

$$6Ag^{+}(aq)+6e^{-}\rightarrow 6Ag(s)$$

$$3Fe^{2+}(aq)+6e^{-}\rightarrow 3Fe(s)$$

$$2Cr^{3+}(aq)+6e^{-}\rightarrow 2Cr(s)$$

$$2Au^{3+}(aq)+6e^{-}\rightarrow 2Au(s)$$

ترتیب تغییر جرم گوی مسی در هر فرایند به ازای مبادلهٔ شمار الکترون‌های برابر را می‌توان به صورت زیر نشان داد: (M نماد جرم مولی است.)

$$6M_{Ag} > 2M_{Au} > 3M_{Fe} > 2M_{Cr}$$: تغییر جرم گوی مسی

نتیجه‌گیری: هرگاه نسبت « $\frac{\text{جرم مولی فلز}}{\text{شمار الکترون مبادله شده در نیم‌واکنش کاهش}}$ » بیشتر باشد، به ازای مبادلهٔ شمار الکترون‌های برابر، جرم جسمی که آبکاری می‌شود، به میزان بیشتری افزایش پیدا می‌کند.

تحلیل و بررسی گزارهٔ دوم: اگر مبنا را بر میزان افزایش جرم گوی مسی به میزان یک گرم در نظر بگیریم:

$$\frac{1}{108}Ag^{+}(aq)+\frac{1}{108}e^{-}\rightarrow\frac{1}{108}Ag(s)$$

$$\frac{1}{56}Fe^{2+}(aq)+\frac{2}{56}e^{-}\rightarrow\frac{1}{56}Fe(s)\Rightarrow\frac{2}{56}=\frac{1}{28}$$

$$\frac{1}{52}Cr^{3+}(aq)+\frac{3}{52}e^{-}\rightarrow\frac{1}{52}Cr(s)\Rightarrow\frac{3}{52}\simeq\frac{1}{17}$$

$$\frac{1}{197}Au^{3+}(aq)+\frac{3}{197}e^{-}\rightarrow\frac{1}{197}Au(s)\Rightarrow\frac{3}{197}\simeq\frac{1}{66}$$

همهٔ نیم‌واکنش‌ها، به ازای افزایش یک گرم (جرم‌های برابر) از فلز بر روی گوی‌های مسی به دست آمدند. حالا می‌توان شمار الکترون‌های مبادله شده را مقایسه کرد: (صورت کسرهای بالا را با کمی تقریب یکسان می‌کنیم تا مقایسه راحت‌تر شود.)

$$\underbrace{\frac{1}{17}}_{Cr}>\underbrace{\frac{1}{28}}_{Fe}>\underbrace{\frac{1}{66}}_{Au}>\underbrace{\frac{1}{108}}_{Ag}$$: شمار الکترون‌های مبادله شده

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۰ تا ۶۲)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

تنها مورد نادرست، عبارت دوم خواهد بود.

با توجه به اطلاعات داده شده در جدول، ترتیب قرار گرفتن این فلزها در سری الکتروشیمیایی به صورت زیر است.

Pd^{2+}/Pd
Cu^{2+}/Cu
Fe^{2+}/Fe
Ca^{2+}/Ca

به این ترتیب برای عبارت‌های داده شده می‌توان گفت:

در برقکافت محلول‌های حاوی Pd^{2+} و Cu^{2+}، با توجه به بیشتر بودن قدرت اکسندگی Pd^{2+} این یون برندهٔ رقابت کاتدی بوده و در نتیجه ابتدا فلز Pd رسوب می‌کند. از آنجا که هر دو فلز Ca و Fe در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از مس قرار دارند، امکان نگهداری محلول‌های آن‌ها (حاوی Ca^{2+} و Fe^{2+}) در ظرف مسی وجود دارد. با توجه به این‌که فاصلهٔ فلزهای Fe و Cu از یکدیگر در سری الکتروشیمیایی کمتر از فاصلهٔ موجود میان فلزهای Ca و Cu است، ولتاژ سلول گالوانی $Fe-Cu$ نیز کمتر از ولتاژ سلول گالوانی $Ca-Cu$ می‌باشد. در سلول گالوانی $Fe-Pd$، الکترود آهن به عنوان آند عمل می‌کند و الکترود پالادیم نیز کاتد خواهد بود. بنابراین جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند (Fe) به طرف کاتد (Pd) می‌باشد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

تیشه‌ای برای موفقیت

شیمی ۲

۱۱۱- **گزینهٔ «۴»** *(پویا رستگاری)*

میوه‌هایی که می‌خورید با استفاده از کودهای پتاسیم، نیتروژن و فسفردار رشد کرده‌اند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گسترش فناوری به میزان دسترسی به مواد مناسب وابسته است، به‌طوری که کشف و درک خواص یک ماده جدید پرچم‌دار توسعهٔ فناوری است.

۲) چه مواد ساختگی و چه مواد طبیعی همگی از کرهٔ زمین به دست می‌آیند.

۳) میزان تولید یا مصرف نسبی منابع مختلف از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۳۰ به ترتیب شامل، مواد معدنی، سوخت‌های فسیلی و فلزها می‌شود.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱ تا ۶)

۱۱۲- **گزینهٔ «۴»** *(محسن مجنونی)*

$Na, Mg, Al, Si, P, S, Cl, Ar$: عناصر دورهٔ سوم

C, Si, Ge, Sn, Pb : عناصر گروه چهاردهم

عناصر C، Si، Ge، P و S در اثر ضربه خرد می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) عناصر گازی Cl_2 و Ar و عناصر با نماد تک حرفی C، P و S هستند، پس نسبت تعداد آن‌ها برابر $\frac{2}{3}$ است.

۲) عناصر Na، Mg، Sn، Pb و Al توانایی تشکیل کاتیون تک اتمی و عناصر P، S و Cl توانایی تشکیل آنیون تک اتمی دارند.

۳) عنصر چهارم گروه چهاردهم همان فلز Sn (قلع) می‌باشد که در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون از دست می‌دهد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۶ تا ۱۴)

۱۱۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

در بین عنصرهای داده شده، X بیشترین خاصیت نافلزی را دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مقایسهٔ خاصیت فلزی عناصر B، D و G به صورت $B > D > G$ است.

۲) عنصر B همان پتاسیم بوده که متعلق به دورهٔ ۴ و گروه ۱ جدول تناوبی است.

۴) کمترین شعاع در بین عناصر داده شده، متعلق به عنصر X می‌باشد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۱۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(پیمان خوابوی‌مجد)*

شعاع اتمی در یک گروه از بالا به پایین افزایش و در یک دوره از چپ به راست کاهش می‌یابد، پس گزینهٔ «۳» درست است.

مقایسهٔ صحیح در گزینهٔ «۱»: $_{11}Na < _{19}K < _{37}Rb$

مقایسهٔ صحیح در گزینهٔ «۲»: $_{17}Cl < _{11}Na < _{19}K$

مقایسهٔ صحیح در گزینهٔ «۴»: $_{17}Cl < _{16}S < _{14}Si$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۱۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(حمید زیبی)*

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست؛ فلز واسطهٔ مورد استفاده در تلویزیون‌های رنگی $_{21}Sc$ می‌باشد که کاتیون آن Sc^{3+} به آرایش الکترونی گاز نجیب دورهٔ قبل از خود می‌رسد.

ب) نادرست؛ به دلیل درصد خلوص پایین در سنگ معدن طلا و تولید پسماند زیاد با توسعهٔ پایدار هماهنگ نمی‌باشد.

پ) درست؛ فقط برخی فلزات واسطه مثل طلا به شکل آزاد یافت می‌شوند.

ت) درست؛ لایهٔ سوم گنجایش ۱۸ الکترون دارد و عنصری که دارای لایهٔ سوم نیمه پر می‌باشد Sc است که کاتیون با بار $+3$ تشکیل می‌دهد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۸)

تیزهوشان | تیزهوشی برای موفقیت

۱۱۶- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا جمشیری)

بررسی موارد نادرست:

مورد سوم: اغلب فلزات واسطه برخلاف اغلب فلزات اصلی، با تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب نمی‌رسند.

مورد چهارم: نخستین فلز واسطه، $_{21}Sc$ است که با توجه به آرایش الکترونی آن مجموع $n+l$ الکترون‌های ظرفیت آن برابر ۱۳ است.

$$_{21}Sc: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^1\ 4s^2$$

مورد پنجم: به دلیل بازتاب زیاد پرتوهای خورشیدی توسط فلز طلا، از آن در ساخت کلاه فضانوردان استفاده می‌شود.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۸)

۱۱۷- **گزینهٔ «۴»** (سعید تیزرو)

تنها مورد اول نادرست است.

بررسی موارد:

مورد اول: فراوردهٔ X، محلول زردرنگ $FeCl_3$ می‌باشد.

مورد دوم: درست

مورد سوم: در شرکت‌های فولادی جهان برای استخراج آهن از کربن استفاده می‌شود.

مورد چهارم: از آنجا که واکنش‌پذیری Fe از Cu بیشتر است، واکنش به‌طور طبیعی انجام نمی‌شود.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱۱۸- **گزینهٔ «۲»** (محمد عظیمیان‌زواره)

بررسی موارد:

آ) نادرست؛ فسفر در طبیعت به شکل آزاد یافت نمی‌شود.

ب) درست؛ آهن در سطح جهان بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد.

پ) درست

ت) درست؛ هر چه فلز فعال‌تر باشد، میل بیشتری به ایجاد ترکیب دارد و ترکیب‌هایش پایدارتر از خودش است.

ث) نادرست؛ واکنش‌پذیری فلز قلیایی با عدد اتمی ۱۹ ($_{19}K$) از سایر این فلزات بیشتر است و بنابراین تمایل آن برای تبدیل شدن به کاتیون بیشتر است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱۱۹- **گزینهٔ «۲»** (یاسر راش)

موارد اول و سوم درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

مورد دوم: آهن اغلب در طبیعت به شکل اکسید و گاهی به صورت سولفید و ... یافت می‌شود.

مورد چهارم: الزاماً نمی‌توان چنین نتیجه‌ای گرفت. مثلاً ببینید:

$_{26}Fe$ و $_{11}Na$ ← واکنش‌پذیری : $Na > Fe$

← انحلال‌پذیری هیدروکسید فلز : $NaOH > Fe(OH)_2\ ,\ Fe(OH)_3$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱۲۰- **گزینهٔ «۴»** (امیرمسعود حسینی)

$$\text{جرم ناخالص } CaO = 50 - x \Rightarrow \text{جرم لولهٔ آزمایش} = x$$

$$\text{جرم } Ca(OH)_2 \text{ تولید شده} = 35/21 - x$$

$$\text{درصد خلوص } CaO = \frac{\text{جرم خالص } CaO}{\text{جرم ناخالص } CaO} \times 100$$

$$\Rightarrow 50 = \frac{\text{جرم خالص } CaO}{50 - x} \times 100$$

$$\Rightarrow \text{جرم خالص } CaO = 25 - 0/5x$$

$$(25 - 0/5x)\,g\ CaO \times \frac{1\,mol\ CaO}{56\,g\ CaO} \times \frac{1\,mol\ Ca(OH)_2}{1\,mol\ CaO}$$

$$\times \frac{74\,g\ Ca(OH)_2}{1\,mol\ Ca(OH)_2} \simeq 33 - 0/66x\,g\ Ca(OH)_2$$

$$33 - 0/66x = 35/21 - x \Rightarrow 0/34x = 2/21$$

$$\Rightarrow x = \frac{2/21}{0/34} = 6/5\,g \text{ جرم تقریبی لولهٔ آزمایش}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۴)

تیزان نو
توسعه‌ای برای موفقیت

شیمی ۱

۱۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(علی جعفری)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ زیرا بعد از مهبانگ ذرات زیراتمی مانند e، p و n زودتر به وجود آمدند.

۲) نادرست؛ زیرا عنصرها به صورت ناهمگون در جهان هستی پراکنده شده‌اند.

۳) نادرست؛ زیرا نوع و میزان فراوانی عنصرها در دو سیارهٔ زمین و مشتری متفاوت هستند، البته عنصرهای مشترک بین دو سیاره نیز وجود دارد. (مانند گوگرد و اکسیژن)

۴) درست؛ طبق متن کتاب درسی در صفحهٔ ۴، درست است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱ تا ۴)

۱۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

$$\left.\begin{matrix} {}^{A_1}_{Z_1}X^{+} \Rightarrow e_1 = Z_1 - 1 \\ {}^{A_2}_{Z_2}Y^{-} \Rightarrow e_2 = Z_2 + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow e_1 - e_2 = (Z_1 - 1) - (Z_2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow Z_1 - Z_2 - 2 = 0 \Rightarrow Z_1 - Z_2 = 2$$

$$A_1 - A_2 = (Z_1 + n_1) - (Z_2 + n_2) = \underbrace{(Z_1 - Z_2)}_{2} + (n_1 - n_2) = 4$$

$$n_1 - n_2 = 2$$

پس اختلاف شمار nها و pهای آن‌ها با هم برابر و مساوی ۲ است.

(شیمی ۱- صفحهٔ ۵)

۱۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا جمشیری)*

بررسی موارد نادرست:

مورد دوم: از رادیوایزوتوپ تکنسیم (ایزوتوپ ناپایدار) در تصویربرداری پزشکی استفاده می‌شود.

مورد سوم: یون یدید با یون حاوی تکنسیم اندازهٔ مشابه دارد.

مورد چهارم: یکی از ایزوتوپ‌های اورانیم $({}^{235}_{92}U)$، اغلب به عنوان سوخت استفاده می‌شود.

مورد پنجم: درصدفراوانی ایزوتوپی از اورانیم که به عنوان سوخت استفاده نمی‌شود، در طبیعت حدود ۹۹/۳٪ است، چرا که درصد فراوانی ایزوتوپ $^{235}_{92}U$ کمتر از ۰/۷٪ است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۷ و ۸)

۱۲۴- **گزینهٔ «۱»** *(یاسر راش)*

قسمت اول: دو فلز هم‌گروه رفتار شیمیایی مشابهی دارند، بنابراین اکسید فلز M نیز می‌تواند به صورت MO باشد.

قسمت دوم: اختلاف عدد اتمی بین دو عنصر هم‌گروه در دو دورهٔ متوالی حداکثر می‌تواند برابر ۳۲ باشد، بنابراین:

(شمار عنصرهای بین دو عنصر A و B در جدول دوره‌ای) =

(اختلاف عدد اتمی A و B) $= 32 - 1 - 1 = 31$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۹ تا ۱۳)

۱۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا طاهری‌نژاد)*

ابتدا جرم اتمی هر ایزوتوپ را معین می‌کنیم. اگر فراوانی $^{59}_{28}A$ را x فرض کنیم درصد فراوانی ایزوتوپ‌های دیگر به صورت زیر است:

$^{58}_{28}A$	$^{59}_{28}A$	$^{60}_{28}A$
۲۰٪	x٪	$80 - x$٪

حال به محاسبهٔ جرم اتمی میانگین می‌پردازیم:

$$\frac{(58 \times 20) + 59x + 60(80 - x)}{100} = 59/17 \Rightarrow x = 43\%$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(پیمان خوابوی‌مهر)*

فرمول مولکولی این ماده را A و جرم مولی آن را x در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\frac{۱/۸۰۶\times۱۰^{۲۱}\ \text{مولکول A}}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\ \text{مولکول A}}\times\frac{۱\text{mol A}}{}$$

$$\times\frac{x\ g\ A}{۱\text{mol A}}=۵۳۴\times۱۰^{-۳}g\Rightarrow x=۱۷۸g.mol^{-۱}$$

پس جرم مولی این ماده ۱۷۸ گرم بر مول است که در بین گزینه‌ها فقط جرم مولی $H_۲S_۲O_۷$ برابر این عدد است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۱۲۷- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تیزرو)*

رنگ‌های موجود در رنگین‌کمان، طیفی پیوسته (نه گسسته) از بی‌نهایت طول موج را تشکیل می‌دهند.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۱۲۸- **گزینهٔ «۳»** *(امیرمسعود حسینی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست؛ ایزوتوپ $^{۲۴}_{۱۲}Mg$ بیشترین درصد فراوانی را در بین سه ایزوتوپ طبیعی منیزیم دارد که در آن عدد جرمی (۲۴) دو برابر عدد اتمی (۱۲) است.

$^{۲۴}_{۱۲}Mg>^{۲۶}_{۱۲}Mg>^{۲۵}_{۱۲}Mg$: ترتیب درصد فراوانی ایزوتوپ‌های طبیعی منیزیم

۲) درست؛ تکنسیم از جمله رادیوایزوتوپ‌های تولید شده در ایران است که جرم اتمی میانگین آن در جدول تناوبی گزارش نشده است.

۳) نادرست؛ شیمی‌دان‌ها به فرایندی که در آن یک مادهٔ شیمیایی با جذب انرژی، از خود پرتوهای الکترومغناطیسی گسیل می‌دارد، نشر می‌گویند.

۴) درست؛ پرتوهای فروسرخ با چشم انسان قابل مشاهده نیستند اما با استفاده از یک آشکارساز مانند دوربین موبایل می‌توان آن‌ها را مشاهده کرد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۱)

۱۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

شمار خطوط طیف نشری خطی لیتیم، هیدروژن و سدیم در محدودهٔ مرئی به ترتیب برابر ۴، ۴ و ۷ می‌باشد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

آهن و سدیم دارای رنگ شعله‌های طلایی و زرد رنگ هستند. رنگ غالب شعلهٔ این دو عنصر در گسترهٔ طول موج پرتوهای طیف زرد رنگ قرار دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) بین عدد اتمی عنصرها با طول موج رنگ شعلهٔ فلزها هیچ ارتباطی وجود ندارد.

۲) به عنوان مثال رنگ شعلهٔ فلز لیتیم و پتاسیم به ترتیب سرخ و بنفش است که انرژی آن‌ها با هم تفاوت قابل توجهی دارد.

۳) با طول موج نوارها می‌توان دربارهٔ تشخیص عناصر اظهارنظر قطعی کرد نه رنگ شعلهٔ آن.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

توسعه‌ای برای موفقیت

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی

دفترچه پاسخ

آزمون هوش و استعداد

(دورهٔ دوم)

۳۰ آذر

تعداد کل سؤالات آزمون: ۲۰
زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه

گروه فنی تولید

مسئول آزمون	حمید لنجان‌زاده اصفهانی
ویراستار	فاطمه راسخ، حمیدرضا رحیم خانلو
مدیر گروه مستندسازی	محیا اصغری
مسئول درس مستندسازی	علیرضا همایون‌خواه
طراحان	حمید اصفهانی، فاطمه راسخ، هادی زمانیان، حمید گنجی، فرزاد شیرمحمدلی، مهبد باقری، مرجان جهان‌بانی، آرمان احمدی
حروف‌چینی و صفحه‌آرایی	معصومه روحانیان
ناظر چاپ	حمید عباسی

پیام نور
توشه‌ای برای موفقیت

استعدادتحلیلی

۲۵۱- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

واژه‌ی «توفیق» مدّنظر است.

(هوش کلامی)

۲۵۲- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

سانحه: واقعه، پیشامد

(هوش کلامی)

۲۵۳- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

واژه‌ی «نیرنگ» در متن به پادشاهانی دارای فرّه‌ی ایزدی نسبت داده شده است، یعنی بار معنایی منفی ندارد، عامل دوری از خدا یا خیانت در قدرت نیست، ویژه‌ی افرادی است که قدرت سیاسی دارند.

(هوش کلامی)

۲۵۴- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

متن پس از بیان تقابل اندیشه‌های فلسفی سهروردی با غزّالی، به ورود غزّالی به اندیشه‌های سیاسی اشاره می‌کند و از آن نتیجه می‌گیرد که باید به کشف و بررسی اندیشه‌های سیاسی سهروردی پرداخت.

در متن، به میزان سازگاری غزّالی با نوشته‌های عین‌القضات همدانی یا تأثیرپذیری او از ابوالبرکات بغدادی اشاره نشده است، بلکه در قیاس با سهروردی، در مباحث مطرح‌شده، سهروردی بیشتر از غزّالی با این دو تن سازگاری داشته است. همچنین متن از خلق‌السّاعه‌نبودن نظریه‌ها نیز صحبت می‌کند.

(هوش کلامی)

۲۵۵- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

این که سلیمان در انتهای عمر به بت‌پرستی روی آورده است، انسان کامل بودن نماینده‌ی خدا را در میان مردم، نقض می‌کند. در انگاره‌های متن، به این شخصیت‌ها و رفتارهای پیامبران با عبارت «نبوّت اسرائیلی» اشاره شده است.

(هوش کلامی)

۲۵۶- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

انگاره‌ی شماره‌ی سه، نیرنگ پادشاهی چون فریدون را مطرح کرده است. در گزینه‌ی «۳» نیز نیرنگ او و تبدیلش به اژدها آشکار است.

(هوش کلامی)

۲۵۷- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

عبارت «اَلْحُجَّةُ قَبل الخَلق و مَعَ الخَلق و بَعد الخَلق» یعنی حجّت الهی قبل از خلق است و با خلق است و بعد از خلق است. یعنی عالم وجود از حجّت خداوندی تهی نمی‌ماند.

(هوش کلامی)

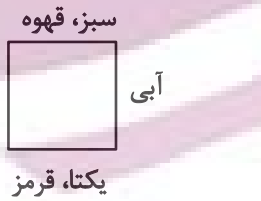
۲۵۸- گزینهٔ «۴» *(حمید کنبی)*

یکتا قرمز پوشیده است و آنان که زرد و سبز پوشیده‌اند روبه‌روی همند، پس آن که روبه‌روی یکتا نشسته است آبی پوشیده است. همچنین می‌دانیم پرنیان و پرستو روبه‌روی هم نیستند، پس این دو نمی‌توانند در جایگاه‌های «سبز و زرد» بنشینند، یکی از آن‌ها حتماً در جایگاه روبه‌روی یکتاست و آبی پوشیده است. پس «ترمه» قطعاً آبی نپوشیده است.

(منطقی و ریاضی)

۲۵۹- گزینهٔ «۴» *(حمید کنبی)*

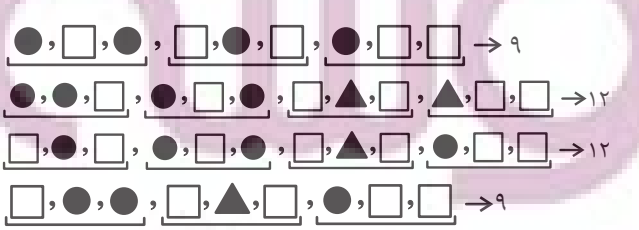
می‌دانیم یکتا قرمز پوشیده است و چون آبی و زرد روبه‌روی یکدیگرند، یکتا قطعاً روبه‌روی شخصی است که سبز پوشیده است. همچنین می‌دانیم آنان که قهوه و چای انتخاب کرده‌اند کنار همند. پس اگر آن‌که سبز پوشیده است قهوه سفارش داده باشد، یکتا قطعاً چای سفارش نداده است.



(هوش منطقی و ریاضی)

۲۶۰- گزینهٔ «۳» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

بدترین حالت‌ها را درنظر می‌گیریم و چند حالت را می‌آزماییم:



(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۱- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

ابتدا نسبت‌ها را یکی می‌کنیم:

$$\frac{\text{الف}}{\text{ب}}=\frac{۳}{۵}=\frac{۱۲}{۲۰}\ ,\ \frac{\text{ج}}{\text{د}}=\frac{۴}{۵}=\frac{۱۲}{۱۵}$$

حال تناسب می‌بندیم:

حجم	نسبت	ماده
؟	۱۲	الف
	۲۰	ب
	۱۲	ج
	۱۵	د
۶۰۰	۵۹	مجموع

$$?=\frac{۶۰۰}{۵۹}\times۱۲\simeq۱۲۲$$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۲- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

جدول بالا را به‌طور خلاصه می‌توان به شکل زیر نمایش داد که در آن x میزان مادهٔ «د» است که به محلول اضافه شده است.

حجم اولیه	نسبت اولیه	ماده
؟	۱۵	د
	۴۴	دیگر مواد
۶۰۰	۵۹	مجموع

$$\Rightarrow ?=\frac{۶۰۰}{۵۹}\times۱۵\simeq۱۵۲,\ \frac{\text{حجم جدید مادهٔ «د»}}{\text{حجم کل}}=\frac{۱۵۲+x}{۶۰۰+x}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\times(x+۱۵۲)=x+۶۰۰\Rightarrow x=۶۰۰-۳۰۴=۲۹۶$$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۳- گزینهٔ «۴» *(حمید کنبی)*

سنّ کنونی پدربزرگ را x، سنّ نوهٔ بزرگ‌تر را y و سنّ نوهٔ کوچک‌تر را z می‌گیریم، از طرفی داریم:

$$\begin{cases}(x-۳)=۲۳(y-۳)\Rightarrow x=۲۳y-۶۶\\(x+۳)=۱۵(z+۳)\Rightarrow x=۱۵z+۴۲\end{cases}\Rightarrow ۲۳y-۶۶=۱۵z+۴۲$$

$$\Rightarrow ۲۳y=۱۵z+۱۰۸$$

و از طرف دیگر می‌دانیم $y=۳z$ است. پس:

$$۲۳\times۳z=۱۵z+۱۰۸\Rightarrow ۵۴z=۱۰۸\Rightarrow z=۲$$

$$\Rightarrow y=۳\times۲=۶, y-z=۴$$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۴- گزینهٔ «۳» *(کتاب استعدادتحلیلی هوش کلامی)*

با ۴۸ ساعت کار، $\frac{۱}{۴}$ کار انجام شده است:

$$۸\times۶=۴۸$$

پس برای $\frac{۳}{۴}$ باقی‌ماندهٔ کار، ۱۴۴ نفر ساعت کار لازم است:

$$۳\times۴۸=۱۴۴$$

پس اگر دوازده کارگر هر کدام دوازده ساعت کار کنند، کار به اتمام می‌رسد:

$$۱۴۴\div۱۲=۱۲$$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۵- گزینهٔ «۳» *(آرمان احمدی)*

در هر سطر از چپ، اعداد ستون اول و ستون دوم در هم ضرب می‌شوند و حاصل‌ضرب با عدد ستون دوم جمع می‌شود و حاصل نهایی در دو ستون سوم و چهارم قرار می‌گیرد.

$$(۷\times۹)+۹=۶۳+۹=۷۲$$
$$(۴\times۸)+۸=۳۲+۸=۴۰$$
$$(۵\times۷)+۷=۳۵+۷=۴۲$$
$$(۷\times۶)+۶=۴۲+۶=۴۸$$

(هوش منطقی ریاضی)

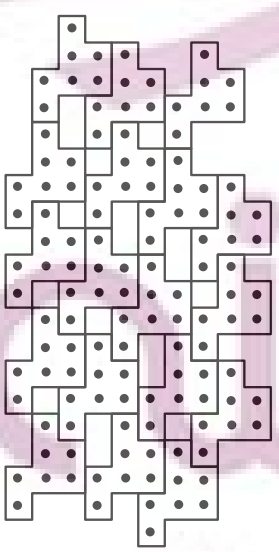
۲۶۶- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

شکل صورت سؤال با ۹۰ درجه چرخش پادساعتگرد به شکل گزینهٔ «۳» تبدیل می‌شود.

(هوش غیرکلامی)

۲۶۷- گزینهٔ «۳» *(هادی زمانیان)*

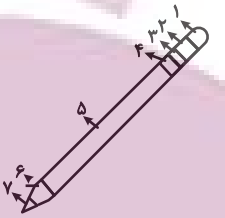
الگوی مدّنظر:



(هوش غیرکلامی)

۲۶۸- گزینهٔ «۴» *(مهبد باقری)*

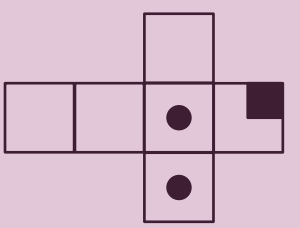
دو طرح رنگی در دو جهتِ مختلف در قسمت‌های مختلفِ شکل شبیه به مداد الگوی صورت سؤال در حرکت است. طرحی که در شکلِ نخست در جایگاه شمارهٔ «۲» است، در شکل‌های بعدی در جایگاه‌های ۳، ۴ و ۵ قرار گرفته است پس در پاسخ در جایگاه ۶ خواهد بود و طرحی که در شکل نخست در جایگاه ۶ است، در شکل‌های بعدی در جایگاه‌های ۵، ۴ و ۳ است پس در پاسخ در جایگاه ۲ خواهد بود.



(هوش غیرکلامی)

۲۶۹- گزینهٔ «۴» *(مرجان جوانبانی)*

از سه وجهِ زیر، مکعبی به نمای صورت سؤال ساخته می‌شود و اهمیتی ندارد که وجه‌های دیگر چه باشند.



(هوش غیرکلامی)

۲۷۰- گزینهٔ «۴» *(هادی زمانیان)*

در شکل سیزده مستطیل سفید هست. دقت کنید مربع نیز نوعی مستطیل است. حال دیگر مستطیل‌ها را می‌شماریم:

$(۲,۳),(۳,۴),(۲,۳,۴) \Rightarrow ۴\times۳=۱۲$

در هر دو ردیف مجاور، ۳ مستطیل دیگر هست و سه ردیف مجاور داریم، مثال: $(۲,۳,۵,۶),(۳,۴,۶,۷),(۲,۳,۴,۵,۶,۷)$

$۳\times۳=۹$

در هر سه ردیف مجاور هم ۳ مستطیل دیگر داریم و در مجموع دوتا از این دسته‌ها داریم.

$۳\times۲=۶$

در هر چهار ردیف هم ۳ مستطیل دیگر داریم.

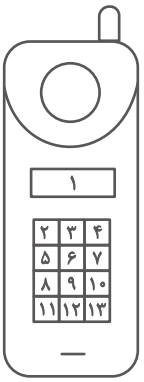
همچنین ستون‌ها را نیز باید بشماریم. اما ستون‌های مجاور را نیازی نیست حساب کنیم، چرا که آن‌ها را از پیش شمرده‌ایم. در هر ستونِ تکی، ۶ مستطیل هست و چهار ستونِ تکی داریم. مثال:

$(۲,۵),(۵,۸),(۸,۱۱),(۲,۵,۸),(۵,۸,۱۱),(۲,۵,۸,۱۱)$

$۳\times۶=۱۸$

و مجموع تعداد کل مستطیل‌ها:

$۱۳+۱۲+۹+۶+۳+۱۸=۶۱$



(هوش غیرکلامی)