Subject :

Year : Month : Date :

جبر خطی

نماد Σ برای ساده نویسی اعمال جمع است.

مثلاً اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، n عدد باشند به جای نوشتن $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ می‌نویسیم $\sum_{i=1}^{n} a_i$

خواص Σ از خواص جمع می‌آید مثلاً:

$$a+a+\dots+a = na = \sum_{i=1}^{n} a = a\sum_{i=1}^{n} 1 = a(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ مرتبه}})$$

اگر c یک عدد ثابت باشد آنگاه:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\Sigma(a_i+b_i) = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n)$$

$$= (a_1+\dots+a_n)+(b_1+b_2+\dots+b_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (b_i+a_i)$$

اگر c یک عدد ثابت باشد

$$c\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} c(a_i+b_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (ca_i+cb_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + c\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=k}^{n} b_i = b_k + b_{k+1} + \dots + b_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}+\dots+a_{ik})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}+\dots+\sum_{i=1}^{n} a_{ik}$$

$$=(a_{11}+a_{21}+\dots+a_{n1})+(a_{12}+a_{22}+\dots+a_{n2})+$$

$$+\dots+(a_{1k}+a_{2k}+\dots+a_{nk})$$

$$\sum_{i=j}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}$$

$$=\sum_{i=j}^{n}(a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{ik})$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}+\sum_{i=2}^{n} a_{i2}+\dots+\sum_{i=k}^{n} a_{ik}$$

$$=(a_{11}+a_{21}+\dots+a_{n1})+(a_{22}+a_{32}+a_{42}+\dots+a_{n2})+$$

$$+(a_{33}+a_{43}+\dots+a_{n3})+(a_{44}+a_{54}+\dots+a_{n4})+(a_{kk}+\dots+a_{nk})$$

$$=a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{41}+\dots+a_{n1}$$

$$a_{22}+a_{32}+a_{42}+\dots+a_{n2}$$

$$a_{33}+a_{43}+\dots+a_{n3}$$

$$\vdots$$

$$a_{kk}+a_{k+1\,k}+\dots+a_{nk}$$

$$=\sum_{i=1}^{i}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=\sum_{j=1}^{i}(a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}+\dots+a_{nj})$$

Subject :

Year : Month : Date :

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$$

$$(1-b^n)=(1-b)(1+b+b^2+\cdots+b^{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{1-b^n}{1-b}=1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1} b^i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i=1+2+3+\cdots+n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i=n+n-1+n-2+\cdots+1$$

جمع +

$$\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n}$$

$$=2\sum_{i=1}^{n} i=n(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1-\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1-\sum_{i=1}^{n} i=\sum_{i=1}^{n}(1-i)^2=\sum_{i=1}^{n}(1-i)(1+i)$$

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\pm b^{n-1})$$

• هر آرایش مستطیل شکل از اعداد را یک ماتریس گویند.

مانند:

۱ ۰ ۵ ۴

۲ ۱ ۳ ۲

۱ ۱ ۰ ۱

این آرایش را معمولاً به صورت زیر نمایش می دهند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۵ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۵ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

عناصر ریاضی

Subject :
Year : Month : Date :

ماتریس ها حاوی سطرها و ستون هایی از اعداد هستند.

اعضای ماتریس را درایه های ماتریس گویند و اگر درایه های ماتریس را با a یا b یا ... نمایش دهیم

در کنار آن اندیس هایی را نوشته قرار می دهیم که در آن اولی نشان دهنده سطر و دومی نشان دهنده

ستون جایگاه درایه است.

مثلاً a_{23} یعنی درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس. بعد یک ماتریس با تعداد سطرها ضرب در

تعداد ستون های آن مشخص می شود و خود ماتریس را با نماد A یا B یا C و ... نمایش می دهند.

منظور از نماد $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

یعنی A یک ماتریس با درایه های a_{ij} و از مرتبه ی $m\times n$ است.

سطر

ستون

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

یک ماتریس را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

سطر × ستون

Subject :

Year : Month : Date :

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اعمال بر روی ماتریس ها:

ترانسپوز یک ماتریس: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ترانسپوز A را با نماد A^T نمایش می دهیم.

$$A^T=[a_{ij}]_{n\times m}$$

به طور مثال داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۳ \\ ۴ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد در ماتریس:

فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $c\in R$ آنگاه:

به طور مثال: در مثال قبل:

$$۲A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۲ & ۸ \\ ۶ & ۴ & ۶ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۸ \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

• جمع دو ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ آنگاه A و B را جمع پذیر گوئیم و

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

• ماتریس های خاص: ماتریسی که تمام درایه های آن ۱ باشد را با نماد $[1]_{m\times n}$ یا $1_{m\times n}$ و واضح است

که:

$$[c_{ij}]_{m\times n}=c1_{m\times n}$$

• بردار: ماتریس با یک ستون را یک بردار گوئیم و با $x_m=[x_{i1}]_{m\times 1}=\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{i1}\\\vdots\\x_{m1}\end{bmatrix}$ نمایش می دهند.

• ماتریس مربعی: مهمترین دسته از ماتریس ها، ماتریس های مربعی می باشند و آن ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون های آن با هم برابرند. مثلاً

$$A=\begin{bmatrix}1&3&5\\0&1&2\\2&4&6\end{bmatrix}$$

یک ماتریس مربعی از مرتبه ۳ است.

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس مربعی باشد آنگاه:

درایه هایی به صورت a_{ii} را عناصر قطر اصلی ماتریس گوئیم و اگر $A=[a_{ii}]_{n\times n}$ آنگاه:

$$Trace(A) \text{ یا } tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $a_{ij}=a_{ji}$ ؛ $\forall i,j$ ، A را متقارن گوئیم.

Subject :
Year : Month : Date :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & ۳ & ۳ \\ ۷ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

اگر A متقارن باشد $A=A^T$.

و اگر ماتریس مربعی A چنان باشد که: $\forall i,j \; ; \; a_{ij}=-a_{ji}$

آنگاه A را پادمتقارن گویند و در نتیجه $tr(A)=0$ $\quad A=-A^T$

* اگر ماتریس A چنان باشد که به ازای $i<j$ اگر $a_{ij}=0$ آنگاه A را پایین مثلثی گویند و اگر $i>j$

اگر $a_{ij}=0$ آنگاه A را بالا مثلثی گویند.

ماتریس واحد از مرتبه n را با نماد I_n نمایش می‌دهیم و آن یک ماتریس مربع از مرتبه n است

که اعضای قطر اصلی آن ۱ است و بقیه اعضا صفر. مثلاً:

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad tr(I_n)=n$$

ضرب دو ماتریس: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times k}$.

$$A\times B = C_{m\times k} = \left[c_{ij}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{lj}\right]_{m\times k}$$

برای درک بهتر از ضرب دو ماتریس فرض کنید داریم:

Subject :

Year : Month : Date :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & & & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mk} \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$c_{11}=\sum_{L=1}^{n} a_{1L}b_{L1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+\dots+a_{1n}b_{n1}$$

$$c_{12}=\sum_{L=1}^{n} a_{1L}b_{L2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+\dots+a_{1n}b_{n2}$$

$$c_{ij}=\sum_{L=1}^{n} a_{i}\,b_{Lj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

مثال: فرض کنید

$$A_{3\times3}=\begin{bmatrix}3&0&1\\2&1&3\\4&1&1\end{bmatrix} \quad , \quad B_{3\times2}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\2&4\end{bmatrix}$$

$$A\times B=C_{3\times2}=\begin{bmatrix}5&10\\8&17\\6&13\end{bmatrix}$$

نکته: $A\times B\neq B\times A$

قضیه: $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

برهان: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times k}$, $C=[c_{ij}]_{n\times k}$

$$D=B+C=[d_{ij}]_{n\times k}=[b_{ij}+c_{ij}]_{n\times k}$$

$$A\times(B+C)=A\times D=\Big[\sum_{L=1}^{n}a_{iL}d_{Lj}\Big]_{m\times k}=\Big[\sum_{L=1}^{n}a_{iL}(b_{Lj}+c_{Lj})\Big]_{m\times k}$$

$$=\Big[\sum_{L=1}^{n}(a_{iL})+(a_{iL}c_{Lj})\Big]_{m\times k}=\Big[\sum_{L=1}^{n}a_{iL}b_{Lj}+\sum_{L=1}^{n}a_{iL}c_{Lj}\Big]_{m\times k}$$

$$\Big[\sum_{L=1}^{n}a_{iL}b_{Lj}\Big]+\Big[\sum_{L=1}^{n}a_{iL}B_{Lj}\Big]_{m\times k}=(A\times B)+(A\times C)$$

$$A_{m\times n}I_n=I_m A_{m\times n}=A$$

Subject :
Year : Month : Date :

فرض کنید A یک ماتریس مربع از مرتبه n باشد.

$A^2 = A\times A$

$\vdots$

$A^k = A\times A^{k-1}$

اگر A چنان باشد که $A^2=A$ درنتیجه $A^k=A$ یا A را خودتوان گویند. I خودتوان است.

ماتریس قطری یک ماتریس مربع است که تمامی عناصر آن بجز عناصر روی قطر اصلی صفر هستند.

اگر x یک بردار از مرتبه n باشد آنگاه $x^T x$ یک ماتریس از مرتبه ۱ می‌باشد که اصطلاحاً اغلب آن را بصورت ماتریس نمی‌نویسند:

$x_{n\times 1}\, x^T = A_{n\times n}$

اگر ماتریس A چنان باشد که $A\times B=I$، A را معکوس چپ B گویند و همچنین B معکوس راست A است.

طرز یافتن معکوس چپ یا راست ماتریس A:

یک روش نه چندان مرسوم برای بدست آوردن معکوس چپ یا معکوس راست یک ماتریس استفاده از دستگاه معادلات است.

بطور مثال معکوس چپ ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بیابید.

حل) فرض کنید B معکوس چپ ماتریس A باشد. از آنجا که مرتبه A با 3×2 باید معکوس چپ یعنی B از مرتبه 2×3 باشد. پس فرض کنیم:

$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

Subject :

Year :　　Month :　　Date :

$$B\times A = I_{2\times 2} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2b_{11} + 4b_{12} + 0b_{13} = 1 \\ 3b_{11} + 1\times b_{12} + 2b_{13} = 0 \\ 2b_{21} + 4b_{22} + 0b_{23} = 0 \\ 3b_{21} + b_{22} + 2b_{23} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b_{11} + 12b_{12} = 3 \\ -6b_{11} - 2b_{12} - 4b_{13} = 0 \\ 6b_{21} + 12b_{22} = 0 \\ -6b_{21} - 2b_{22} - 4b_{23} = -2 \end{cases}$$

$$12b_{12} = 3 \Rightarrow b_{12} = \frac{1}{4}$$

$$b_{22} = 0 \qquad b_{23} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} = 4b_{13} \Rightarrow b_{13} = -\frac{1}{8}$$

$$2b_{11} + 1 = 1 \Rightarrow b_{11} = 0 \qquad b_{21} = 0 \qquad \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

فرض کنیم C معکوس راست A باشد بنابراین چون مرتبه‌ی A ، ۲x۳ است پس C باید ۲x۳ باشد. درنتیجه C باید:

$$C_{2\times 3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$A\times C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2c_{11} + 3c_{21} = 1 \Rightarrow c_{11} = \frac{1}{2} \qquad 4c_{12} + c_{22} = 1 \Rightarrow c_{12} = \frac{1}{4}$$

$$2c_{12} + 3c_{22} = 0 \qquad 4c_{13} + c_{23} = 0 \Rightarrow c_{13} = -\frac{1}{8}$$

$$2c_{13} + 3c_{23} = 0 \qquad 0c_{11} + 2c_{21} = 0 \Rightarrow c_{21} = 0$$

$$4c_{11} + c_{21} = 0 \qquad 0c_{12} + 2c_{22} = 0 \Rightarrow c_{22} = 0$$

$$0c_{13} + 2c_{23} = 1 \Rightarrow c_{23} = \frac{1}{2}$$

Subject :
Year : Month : Date :

مثال: معکوس چپ و راست ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بیابید.

حل) فرض کنید B معکوس چپ A باشد. در نتیجه $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$I=BA=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$b_{11}=\frac{1}{2}$ $\quad 2b_{11}=1$

$b_{12}=\frac{-1}{4}$ $\quad b_{11}+2b_{12}=0$

$b_{21}=0$ $\quad 2b_{21}=0$ $\quad \Rightarrow B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$b_{22}=\frac{1}{2}$ $\quad b_{21}+2b_{22}=1$

• فرض کنید C معکوس راست A باشد اگر $C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ می‌توان نشان داد که $C=B$

• قضیه: $(A\times B)^T=B^T\times A^T$

اثبات: فرض کنید $B=[b_{ij}]_{n\times k}$ و $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

$$\Rightarrow A^T=[a_{ij}]_{n\times m}=[a_{ji}]_{n\times m} \quad ; \quad B^T=[b_{ij}']_{k\times n}=[b_{ji}]_{k\times n}$$

$$\Rightarrow A\times B=C=[c_{ij}]_{m\times k}$$

$$=\left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{li}\right]_{m\times k}$$

$$\Rightarrow (A\times B)^T=C^T=[c_{ij}']_{k\times m}=[c_{ji}]_{k\times m}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$= [(\sum_{L=1}^{n} a_{iL} b_{Lj})']_{k\times m} = [\sum_{L=1}^{n} b_{jL} a_{Li}]_{k\times m}$

$= B^T \times A^T$

نتیجه: اگر B معکوس راست A باشد، B^T معکوس چپ A^T است.

$I = AB \Rightarrow I = I^T = (AB)^T = (B^T A^T)$

توجه کنید که اگر A متقارن باشد $A^T = A$ زیرا A متقارن است اگر $a_{ij} = a_{ji}$

$\Rightarrow [a_{ij}]_{n\times n} = [a_{ji}]_{n\times n} = [a'_{ij}]_{n\times n}$

اگر A پاد متقارن باشد می‌شود $-a$.

$(A+B)^T = [a_{ij} + b_{ij}]^T$

$= [c_{ij}]^T = [c_{ji}] = [a_{ji} + b_{ji}] = A^T + B^T$

$tr(A^T) = tr(A)$

• اعمال مقدماتی سطری:

فرض کنید $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. اعمال زیر را اعمال مقدماتی سطری گویند.

۱) جای دو سطر عوض کردن

۲) سطری را در یک عدد غیر صفر ضرب کردن

۳) مضربی از یک سطر با سطر دیگر جمع کردن

Subject :
Year : Month : Date :

فرض کنید a_i سطر iام ماتریس A باشد، اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ باشد آنگاه:

$$a_i=[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$$

و فرض کنید a_j ستون jام همین ماتریس باشد آنگاه:

$$a_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

حال اگر $B=[b_{ij}]_{n\times k}$ در این صورت $b_i=[b_{i1}\, b_{i2} \ldots b_{ij} \ldots b_{ik}]$

$$b_j=\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a'_1b_1 & a'_1b_2 & \ldots & a'_1k \\ a'_2b_1 & a'_2b_2 & \ldots & a'_2k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_mb_1 & a'_mb_2 & \ldots & a'_mb_k \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{bmatrix}[b_1\, b_2 \ldots b_k]$$

یعنی سطر iام حاصل $A\times B$ = a_iB

سطر jام حاصل $A\times B$ = Ab_j

Subject :

Year : Month : Date :

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k}\\ b_{21} & b_{21} & \cdots & b_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a'_1\\ a'_2\\ \vdots\\ a'_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a'_1b_1 & a'_1b_2 & \cdots & a'_1b_k\\ a'_2b_1 & a'_2b_2 & \cdots & a'_2b_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a'_mb_1 & a'_mb_2 & \cdots & a'_mb_k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c'_1\\ c'_2\\ \vdots\\ c'_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a'_1\\ a'_2\\ \vdots\\ a'_k\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix} a'_1B\\ a'_2B\\ \vdots\\ a'_mB\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_k\end{bmatrix}$$

قضیه: اگر یک سطر ماتریس A صفر باشد، آنگاه حداقل یک سطر ماتریس $A\times B$ صفر است و اگر یک ستون ماتریس B صفر باشد، آنگاه حداقل یک ستون ماتریس $A\times B$ صفر است.

حال فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $x=[a_{i1}]_{n\times 1}$ در اینصورت

$$A\times x=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a'_1x_1\\ a'_2x_2\\ \vdots\\ a'_mx\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n)$$

این بیان می‌کند که درایه اول X در ستون اول ماتریس A ضرب شده و الی آخر

تعریف: ماتریس مربعی A را وارون پذیر گویند اگر ماتریس مربعی B چنان یافت شود که

$$BA = AB = I$$

وارون A را با A^{-1} نمایش می‌دهند.

قضیه: در صورت وجود وارون، وارون یکتاست.

اثبات: فرض کنیم به جز A^{-1} ماتریس B نیز وارون A باشد یعنی

$$I = AB = BA$$

حال $B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$

قضیه: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

$$(AA^{-1}) = I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$$

از آن جایی که $(A^{-1})^T \times A^T = I = (A^T)^{-1} A^T$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Subject :
Year : Month : Date :

• قضیه: $A = (A^{-1})^{-1}$.

برهان: $I = (A^{-1})(A^{-1})^{-1} = A^{-1}A$

$\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$

• ماتریس های پلکانی:

• تعریف: ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ را یک ماتریس پلکانی سطری گویند اگر

۱) سطرهای صفر جزء سطرهای انتهایی ماتریس باشند.

۲) اولین درایه از چپ غیر صفر هر سطر ۱ باشد که این درایه را درایه‌ی پیشرو سطر گویند.

۳) درایه پیشرو یک سطر سمت راست درایه پیشرو سطر ما قبل باشد.

• مثال: ماتریس های زیر پلکانی سطری هستند.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اما ماتریس زیر پلکانی سطری نیست.

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject :

Year : Month : Date :

قضیه: هر ماتریس را به وسیله اعمال مقدماتی سطری می‌توان به یک ماتریس پلکانی سطری تبدیل کرد.

مثال: ماتریس زیر را به یک ماتریس پلکانی سطری تبدیل کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -11 & -5 & -15 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \quad -15 \to -\frac{30}{2} \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 17 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{34} \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{34} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{57}{34}-\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ماتریس مقدماتی سطری:

یک ماتریس مقدماتی سطری یک ماتریس واحد است که یکی از اعمال مقدماتی سطری بر روی آن انجام گرفته است. مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ یا } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- قضیه: اگر ماتریس مقدماتی سطری را از چپ در یک ماتریس ضرب کنیم حاصل ماتریسی می‌شود که یک عمل مقدماتی سطری بر روی آن مانند عمل مقدماتی سطری که بر ماتریس واحد انجام گرفته است.

- مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } e_2 = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e_2 \times A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 2c & 4c & 3c \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

از چپ در ماتریس های مقدماتی ضرب می کنیم تا به ماتریس پلکانی تبدیل شود.

بنابراین قضیه: برای هر ماتریس A ماتریس های مقدماتی سطری r_1 و r_2 و ... و r_k چنان وجود دارند که $r_k \, r_{k-1} \dots r_1 A = B$ و B یک ماتریس پلکانی سطری است.

مثال: با استفاده از ماتریس های مقدماتی سطری ماتریس زیر را به یک ماتریس پلکانی تبدیل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{r_1}{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \times A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{r_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \times A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{r_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \times A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{r_4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \times A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

هم ارز سطری:

ماتریس A را هم ارز سطری با ماتریس B گویند اگر ماتریس های مقدماتی سطری r_k و ...... و r_2 و r_1 چنان وجود داشته باشند که $A = r_k r_{k-1} \ldots r_1 B$

قضیه: هر ماتریس مقدماتی سطری وارون پذیر است. و وارون ماتریسی که همان عمل بر روی آن بصورت معکوس انجام گرفته باشد.

مثلاً: اگر $r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $r^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark \quad r \times r^{-1} = I$

اگر $r = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $r^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark \quad r \times r^{-1} = I$

اگر $r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix}$ و $r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \checkmark \quad r \times r^{-1} = I$

اگر A هم ارز سطری B باشد می نویسیم $A \overset{R}{\sim} B$

واضح است که $A \overset{R}{\sim} A \;\&\; A \overset{R}{\sim} B \Rightarrow B \overset{R}{\sim} A$

$$\& \; A \overset{R}{\sim} B \;\&\; B \overset{R}{\sim} C \Rightarrow A \overset{R}{\sim} C$$

$$A \overset{R}{\sim} B \Rightarrow \exists\, r_1, \ldots, r_k \ni$$

$$A = r_k r_{k-1} \ldots r_1 B$$

$$\Rightarrow r_1^{-1} r_2^{-1} \ldots r_k^{-1} A = \underbrace{(r_1^{-1} \ldots r_k^{-1})(r_k \ldots r_1)}_{I} B$$

$$\Rightarrow r_1^{-1} r_2^{-1} \ldots r_k^{-1} A = B$$

$\Rightarrow B \overset{R}{\sim} A$

• ماتریس پلکانی کاهش یافته

ماتریس پلکانی سطری A را یک ماتریس پلکانی کاهش یافته گویند اگر علاوه بر اینکه عناصر زیر عنصر پیشرو هر سطر صفر باشد.

عنصر بالای هر عنصر پیشرو صفر باشد.

• نتیجه: I یک ماتریس پلکانی کاهش یافته است.

• قضیه: هر ماتریس A را می‌توان به وسیله اعمال مقدماتی سطری به یک ماتریس پلکانی کاهش یافته تبدیل کرد.

• مثال: $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ را به یک ماتریس پلکانی کاهش یافته تبدیل کنید.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{15}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

یک دستگاه n معادله و k مجهول

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}_{n\times k} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}_{k\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$ax - b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad b = \left(x - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4a}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \equiv \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + \frac{1}{7}x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 0$$

فرض کنید $A \sim I$ در اینصورت ماتریس های مقدماتی سطری $r_1, \dots, r_k$ متناظر وجود دارند

که $r_k \dots r_1 A = I$

فرض کنید $B = r_k \dots r_1$ در اینصورت $BA = I$

در نتیجه B معکوس چپ A است اگر A مربع باشد $AB = I$ از این رو A وارون پذیر است یعنی ثابت

کردیم $A^{-1} = r_k \dots r_1$ & A وارون پذیر است اگر $A \sim I$.

فرض کنید A وارون پذیر باشد پس ماتریس B چنان وجود دارد که $BA = I$

از طرفی $B \sim C$ که C ماتریس پلکانی کاهش یافته است

یعنی $B = r_k \dots r_1 C$

C یک ماتریس مربع است اگر یک سطر C صفر باشد.

آنگاه $r_k \dots r_1 C A \neq I$ و این خلاف فرض است از این رو $B \sim I$

از این رو

قضیه: A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $A \sim I$.

مثال: نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ وارون پذیر است و وارون آن را بدست آورید

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\underset{r_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{r_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{r_3}{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{r_4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• دستگاه معادلات :

دستگاه معادلاتی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از مفهوم ضرب ماتریس‌ها این دستگاه معادله به صورت

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = Ax = b$$

اگر A را به صورت یک ماتریس پلکانی سطری یافته چون C تبدیل کنیم؛ آنگاه معادله به یکی از صورت‌های زیر در می‌آید.

$$1.) \quad \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1k} \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2k} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & c_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\text{۲)}\quad \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1k} \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2k} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & c_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\text{۳)}\quad \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1k-1} & c_{1k} \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2k-1} & c_{2k} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & c_{3k-1} & c_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

در می‌آید.

در حالت ۱ دستگاه دارای دسته جواب یکتاست.

در حالت ۲ دستگاه دارای جواب نیست

و در حالت ۳ دستگاه دارای بی نهایت دسته جواب است.

روش گاوس

فرض کنید صورت ماتریسی یک دستگاه معادله به صورت $Ax=b$ باشد اگر قرار دهیم $G=[A|b]$
آنگاه G را ماتریس افزوده دستگاه نامیم. اگر با استفاده از اعمال مقدماتی سطری ماتریس افزوده
G تبدیل به یک ماتریس پلکانی به صورت $H=[C|d]$ شود آنگاه دستگاه معادله به صورت $Cx=d$ در می‌آید
و طبق قسمت قبل جوابهای دستگاه را در صورت وجود می‌توان به سادگی به دست آورد.

Subject :

Year : Month : Date :

مثال: با استفاده از روش گاوس دستگاه معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=4 \\ x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

$$G=\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

معادله به صورت

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_2-x_3=-\frac{1}{2} \\ x_3=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{3}{2} \\ x_2=-1 \\ x_3=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

حال ردیف دوم را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$G=\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

در این صورت دستگاه معادله به صورت

$-2+t-t$

$x_1+x_2-x_3=0$

$x_2-x_3=-2$

فرض کنید $x_3=t$ در این صورت $x_2=-2+t$ و $x_1=2$

Subject :
Year : Month : Date :

- روش گاوس جردن:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

- دستگاه معادلات همگن:

دستگاه معادله به صورت $Ax=0$ را یک دستگاه معادله همگن گویند.

$$Ax=b$$

$$A^{-1}Ax=A^{-1}b \Rightarrow x=A^{-1}b$$

توجه کنید $x=0$ جواب بدیهی این دستگاه است.

اگر $A=[a_{ij}]_{n\times k}$ ، $n<k$ آنگاه $x=0$ تنها جواب معادله نیست.

همچنین فرض کنید B ماتریس پلکانی سطری هم ارز با A باشد؛ در این صورت آخرین

Subject :

Year : Month : Date :

دارای یک سطر B عنصر پیشرو نیست و از این رو $x=0$ تنها جواب معادله نیست.

• قضیه: فرض کنید در معادله $Ax=0$، A یک ماتریس مربع باشد آنگاه $x=0$ تنها جواب معادله است اگر و تنها اگر $A \sim I$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

• برهان: فرض کنید $A \sim I$ یعنی

$$\exists r_k r_{k-1}, \ldots, r_1 \ni A = r_k r_{k-1} \ldots r_1 I$$

$$= r_k r_{k-1} \ldots r_1$$

$$\Rightarrow Ax = 0 = (r_k \ldots r_1) x = (r_k \ldots r_1) = 0$$

$$(r_1^{-1}, \ldots, r_k^{-1})(r_k \ldots r_1) x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

• بالعکس: فرض $x=0$ تنها جواب معادله $Ax=0$ و فرض کنید B پلکانی کاهش یافته هم ارز A باشد؛ چون اعمال مقدماتی بر طرف راست معادله تاثیری ندارد بنابراین فرض کنید

ص ۲۸

Subject :

Year : Month : Date :

$Ax=0 \equiv Bx=0$

$B \neq I$ بنابراین حداقل یک سطر B صفر است. با حذف این سطر ماتریس B_1 بدست

می آید.
$\Rightarrow Ax=0 \equiv B_1x=0$

طبق قضیه قبل $x=0$ تنها جواب معادله نیست و این خلاف فرض است.

• قضیه: ماتریس A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $A \sim I$ باشد.

فرض کنید A وارون پذیر است در این صورت در معادله

$$Ax=0 \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}0 \Rightarrow x=0$$

تنها جواب معادله است. طبق قضیه قبل $A \sim I$

بالعکس فرض کنید $A \sim I$ یعنی $A = r_k, \ldots, r_1 I$

$$\Rightarrow r_1^{-1} r_2^{-1}, \ldots, r_k^{-1} A = (r_1^{-1}, \ldots, r_k^{-1})(r_k, \ldots, r_1)$$

فرض کنید $B = r_1^{-1}, \ldots, r_k^{-1}$ در اینصورت B معکوس چپ A است.

از طرفی $A\underbrace{(r_1^{-1}, \ldots, r_k^{-1})}_{B} = (r_k, \ldots, r_1)(r_1^{-1}, \ldots, r_k^{-1}) = I$

و B وارون راست A است. پس A وارون پذیر است.

• قضیه: فرض کنید $A \sim B$ باشد آنگاه A وارون پذیر است اگر و تنها اگر B وارون پذیر باشد.

فرض کنید A وارون پذیر است پس $A \sim I$ و چون $B \sim A$ پس $B \sim I$ و از این رو

B وارون پذیر است.

Subject :
Year : Month : Date :

فرض کنید B وارون پذیر باشد پس $B \sim I$ ، $A \sim B$ پس $A \sim I$ و از این رو A وارون پذیر است.

قضیه: فرض کنید C یک ماتریس مربعی باشد که حداقل یک سطر آن صفر است. در این صورت C منفرد است.

برهان: فرض کنید B وارون C باشد؛ در این صورت $CB = I$ اما حداقل یک سطر CB صفر است و این یعنی $CB \neq I$ و این تناقض است.

قضیه: ماتریس مربعی A منفرد است اگر و تنها اگر هم‌ارز ماتریسی باشد که حداقل یک سطر آن صفر باشد.

ابتدا فرض کنید A منفرد است. باید نشان دهیم A هم‌ارز ماتریسی است که حداقل یک سطر آن صفر است. A را به صورت سطری کاهش یافته درمی‌آوریم و آن را C می‌نامیم. چون A منفرد است $C \neq I$ و چون A مربع است پس حداقل یک سطر آن صفر است.

بالعکس فرض کنید $A \sim C$ و حداقل یک سطر آن صفر است. اگر A منفرد نباشد پس $A \sim I$ و چون $A \sim C$ پس $C \sim I$ و این درست نیست.

قضیه: فرض کنید B وارون راست ماتریس مربع A باشد. در این صورت A وارون پذیر است و B وارون چپ A است.

فرض کنید A وارون پذیر نباشد. طبق قضیه قبل A هم‌ارز ماتریسی چون C است که حداقل یک سطر آن صفر است.

Subject :
Year : Month : Date :

$$C = r_1 \circ \dots \circ r_k A$$

و این تناقض است پس A وارون پذیر است $\Rightarrow CB = r_1 \circ \dots \circ r_k AB = r_1 \circ \dots \circ r_k$

از طرفی $(BA)^T = A^T B^T = I$

$$\Rightarrow BA = I$$

قضیه: A وارون پذیر است اگر معادله $Ax = b$ دارای یک جواب منحصر به فرد باشد.

برهان: فرض کنید A منفرد باشد و $Ax = b$ دارای یک جواب یکتا چون C باشد در این صورت $AC = b$

از طرفی چون A منفرد است معادله $Ax = 0$ دارای یک جواب غیر صفر چون d است در این صورت $Ad = 0$. $\Rightarrow AC + Ad = b \Rightarrow A(C+d) = b$ & $C + d \neq C$

و این تناقض است.

بالعکس فرض کنید A وارون پذیر و A^{-1} وارون A باشد، در این صورت:

$$Ax = b$$

$\Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b = C$ جواب یکتا است.

یک راه ساده یافتن وارون A در صورت وجود: اگر $[A|I] \sim [A|B]$ آنگاه B وارون A است.

Subject :
Year : Month : Date :

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&4\\1&5\end{bmatrix}$ را در صورت وجود بیابید.

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2&4&1&0\\1&5&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&5&0&1\\2&4&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&5&0&1\\0&-6&1&-2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&5&0&1\\0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{5}{6}&-\frac{2}{3}\\0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}2&5&4\\1&3&2\\2&4&5\end{bmatrix}$ وارون آن را در صورت وجود بیابید.

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&5&4&1&0&0\\1&3&2&0&1&0\\2&4&5&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&0&1&0\\2&5&4&1&0&0\\2&1&5&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&0&1&0\\0&-1&0&1&-2&0\\0&-5&1&0&-2&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&0&1&0\\0&1&0&-1&2&0\\0&-5&1&0&-2&1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&0&1&0\\0&1&0&-1&2&0\\0&0&1&-5&8&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&3&-5&0\\0&1&0&-1&2&0\\0&0&1&-5&8&1\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}13&-21&-2\\-1&2&0\\-5&8&1\end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

فضای برداری :

مجموعه V را فضای برداری و اعضای آن را بردار گویند.

هرگاه در عمل $\oplus$ و $\odot$ چنان وجود داشته باشد که :

1.) $\forall x, y \in V \; ; (x \oplus y) \in V$

2.) $\forall x, y \in V \; ; (x \oplus y) = (y \oplus x)$

3.) $\forall x, y, z \in V \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

4.) $\exists \theta \in V \; ; \forall x \in V \quad x \oplus \theta = x$

5.) $\forall x \in V \quad \exists y \in V \quad x \oplus y = y \oplus x = \theta$

و همچنین

1.) $\forall x \in V \; \& \; \forall c \in R \quad ; c \odot x \in V$

2.) $\forall c, d \in R \; \& \; \forall x \in V \quad (cd) \odot x = c \odot (d \odot x)$

3.) $\forall c \in R \; , \; \forall x, y \in V \quad c \odot (x \oplus y) = (c \odot x) \oplus (c \odot y)$

4.) $\forall c, d \in R \; \& \; \forall x \in V \quad (c + d) \odot x = (c \odot x) \oplus (d \odot x)$

5.) $\forall x \in V \quad 1 \odot x = x$

برای مثال فرض کنید $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| x, y, z \in R \right\}$

V با اعمال + و ضرب اسکالر یک فضای برداری است.

$$V=\left\{\overbrace{\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}}^{x} \middle| a_1, a_2, a_3 \in R\right\}$$

$$1.)\ \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}\in V \checkmark$$

$$c\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ca_1\\ca_2\\ca_3\end{bmatrix}\in V \checkmark$$

$$\bullet\ V=\left\{\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} \middle| a_1, a_2 \in R\right\}$$

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\2\end{bmatrix}\ \times$$ فضای برداری نیست

عمل $\oplus$ برداری و $\odot$ را ضرب اسکالر گویند.

• قضیه: عضو خنثی عمل $\oplus$ یکتاست.

اثبات: فرض کنید θ ، θ' عضو خنثی عمل $\oplus$ فضای برداری V باشند در اینصورت

$$\theta' = \theta' + \theta = \theta$$

• قضیه: برای هر $x \in V$ تنها یک قرینه وجود دارد.

• برهان: فرض کنید y و z هر دو قرینه x باشند در نتیجه باید $\theta = x + z = x + y$

مرجا

$$y = y \oplus \theta = y \oplus (x \oplus z) = (y \oplus x) \oplus z = \theta \oplus z = z$$

قضیه: اگر $x \oplus y = x \oplus z$ آنگاه $y = z$

$$y = y \oplus \theta = y \oplus (x \oplus (-x))$$

$$= (y \oplus x) \oplus (-x) = (z \oplus x) + (-x)$$

$$= z \oplus (x + (-x))$$

$$= z \oplus \theta = z$$

قضیه: $0 \odot x = \theta$

زیرا $(0 \odot x) = (0 \odot x) \oplus \theta$

$$= (0 \odot x) \oplus (0 \odot x)$$

$$\Rightarrow \theta = (0 \odot x)$$

قضیه: $-x = (-1) \odot x$

$$\theta = x \ominus (-x) = x \oplus ((-1) \odot x) = (1 \odot x) \oplus ((-1) \odot x)$$

$$= x \odot (1 + (-1)) = x \odot 0 = \theta$$

• تعریف: مجموعه W زیرمجموعه فضای برداری V را زیرفضای فضای برداری V گویند.
اگر W با همان $\oplus$ و $\odot$ تعریف شده بر V یک فضای برداری باشد.

Subject :
Year : Month : Date :

مثلاً اگر $W=\left\{\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\1\end{bmatrix} \middle| a_1,a_2\in R\right\}$ اولاً $W\in R$ ولی W یک زیرفضای برداری V نیست.

اما اگر $U=\left\{\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\0\end{bmatrix} \middle| a_1,a_2\in R\right\}$ آنگاه U یک زیرفضای برداری V است.

• قضیه: $W\subseteq V$ یک زیرفضای برداری V است اگر نسبت به $\oplus$ و $\odot$ تعریف شده بر V بسته باشد.

Subject :
Year : Month : Date :

خطی بردارهای X را گستره‌ی X گویند و با نماد $sp(X)$ نمایش می‌دهند.

$$sp(X)=\{y \mid y=c_1x_1+\dots+c_kx_k,\ c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}\}$$

واضح است که $sp(X)\subseteq V$

قضیه: $W=sp(X)$ یک زیرفضای برداری از V است.

برهان: فرض کنید y_1 و y_2 متعلق به $sp(X)$ است.

$$y_1=c_1x_1+\dots+c_kx_k$$
$$+$$
$$y_2=d_1x_1+\dots+d_kx_k$$

$$y_1+y_2=\underbrace{(c_1+d_1)}_{c_1'}x_1+\dots+\underbrace{(c_k+d_k)}_{c_k'}x_k$$

$$\Rightarrow y_1+y_2=c_1'x_1+\dots+c_k'x_k\in sp(X)$$

$$cy_1=cc_1x_1+cc_2x_2+\dots+cc_kx_k$$

$$\Rightarrow cy_1=c_1'x_1+\dots+c_k'x_k\in sp(X)$$

* تعریف: بردارهای x_1 و x_2 و ... و x_k از فضای برداری V را مستقل خطی گویند اگر هیچ‌کدام از آنها ترکیب خطی از بقیه بردارها نباشد.

مثال: نشان دهید $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$ مستقل خطی هستند.

Subject :
Year : Month : Date :

Subject :
Year : Month : Date :

جواب: اگر مستقل خطی نباشند باید $\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ ولی چنین c وجود ندارد پس مستقل خطی هستند.

در مثال قبل توجه کنید که $c_1\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = 0$

$c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$

$3c_1 + c_2 = 0$

$5c_1 = 0$

چون می‌دانیم $\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ مستقل خطی هستند معادله فوق زمانی برقرار است که $c_1 = c_2 = 0$

تعریف: بردارهای x_k و ... و x_2 و x_1 از فضای برداری V را مستقل خطی گویند اگر

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$$

اگر x_k و ... و x_2 و x_1 مستقل خطی نباشند، آنها را وابسته خطی گویند.

مثال: نشان دهید که مجموعه $X = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\}$ از بردارهای R^3 وابسته خطی هستند.

$$c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = 0$$

$c_1 + 0 + 0 + c_4 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_4$

$0 + c_2 + 0 + 2c_4 = 0 \Rightarrow 2c_4 = -c_2 \Rightarrow c_4 = -\frac{c_2}{2}$

Subject :

Year. Month.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a_{ik}^{*} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ij}\, |A_{ik}| = 0$$

$$\Longrightarrow A'A^{*} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|\, I_n$$

$$\Longrightarrow A'\left(\frac{A^{*}}{|A|}\right) = I_n$$

و این یعنی $\quad (A')^{-1} = \left(\frac{A^{*}}{|A|}\right)$

$$\Longrightarrow \left((A')^{-1}\right)' = \frac{1}{|A|}(A^{*})'$$

$$\Longrightarrow \left((A')'\right)^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^{*})' \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^{*})'$$

مثال: $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$|A_{11}| = (-1)^{2}\,1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_{21}| = (-1)^{3}(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(1-1) = 0$

$|A_{12}| = (-1)^{3}\,2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2(2) = -4 \qquad |A_{22}| = (-1)^{4}(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$|A_{13}| = (-1)^{4}(0) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_{23}| = (-1)^{5}(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

Subject :
Year : Month : Date :

Subject :
Year. Month.

$$|A_{31}| = (-1)^{4}(0)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_{32}| = (-1)^{5}(1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) = -1$$

$$|A_{33}| = (-1)^{6}(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-4) = -2$$

$$0+0+C_3+3C_4=0 \Rightarrow 3C_4=-C_3 \Rightarrow C_4=-\frac{C_3}{3}$$

$$\Rightarrow C_1=\frac{C_2}{2}=\frac{C_3}{3}$$

$$C_3=3 \text{ و } C_2=2 \text{ و } C_1=1 \text{ و } C_4=-1$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

توجه داشته باشید که در مثال قبل اگر $X'=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ آنگاه X' یک مجموعه از بردارهای مستقل خطی است و باید توجه کرد که گرچه $X'\subset X$ اما $sp(X')=sp(X)=\mathbb{R}^3$

تعریف: مجموعه X از بردارهای فضای برداری V را مولد زیرفضای برداری W از V گوییم هرگاه X مستقل خطی باشد و $sp(X)=W$

تعریف: مجموعه $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ از بردارهای فضای برداری V را مولد زیرفضای برداری W گوییم اگر $W=sp(X)$

مجموعه $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ را یک پایه برای زیرفضای برداری W گوییم اگر X مستقل خطی و مولد W باشد.

قضیه: فرض کنید $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ و $X'=\{x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\}$ آنگاه $sp(X)=sp(X')$ اگر و تنها اگر x_n یک ترکیب خطی از بردارهای X' باشد. چون $X'\subset X$ پس $sp(X')\subseteq sp(X)$

Subject :

Year : Month : Date :

حال فرض کنید $y \in sp(X)$ در اینصورت $c_1, \dots, c_n$ چنان موجودند که

$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ و چون (طبق فرض) x_n یک ترکیب خطی از بردارهای X'

است پس $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ چنان موجودند به طوری که:

$$x_n = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_{n-1}x_{n-1}$$

$$\Rightarrow y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_{n-1}x_{n-1} + c_n(d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_{n-1}x_{n-1})$$

$$= (c_1 + c_nd_1)x_1 + \dots + (c_nd_{n-1} + c_{n-1})x_{n-1}$$

$$\Rightarrow y \in sp(X') \Rightarrow sp(X) \subseteq sp(X')$$

حال فرض می‌کنیم $sp(X) = sp(X')$ در نتیجه: چون x_n یک بردار از $sp(X')$ است پس

اعداد $c_1, \dots, c_{n-1}$ چنان موجودند که $x_n = c_1x_1 + \dots + c_{n-1}x_{n-1}$

از این رو x_n یک ترکیب خطی از بردارهای X' است.

• قضیه: فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارهای V باشند، هر زیرمجموعه از X هم مستقل خطی است.

• برهان: فرض کنیم $X' = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ و $r < n$ و فرض کنید X' وابسته خطی باشد

بنابراین اعداد $c_1, \dots, c_r$ که همگی صفر نیستند چنان موجودند که

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_rx_r = 0 \Rightarrow c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_rx_r + 0x_{r+1} + \dots + 0x_n =$$

Subject :
Year : Month : Date :

و بعضی از c ها صفر نیستند از این رو X مستقل خطی نیست و این تناقض است. (برای مستقل خطی بودن باید همه c ها صفر باشند)

• قضیه اساسی جبر خطی: فرض کنید $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد: الف) هر مجموعه مستقل خطی چون $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ نیز یک پایه برای V است.

ب) هر مجموعه از بردارهای V شامل بیشتر از n بردار مستقل خطی نیست. (مستقل خطی نباشد وابسته خطی است پس پایه نیستند)

ج) هر مجموعه از بردارهای V شامل کمتر از n بردار، مولد V نیست.

الف) X یک پایه برای V باشد و $y_1 \in V$

$$\Rightarrow \exists\, c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n} \in \mathbb{R}$$

$$\exists\, y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n$$

چون $y_1 \neq 0$ بنابراین حداقل یکی از $c_{1i} \neq 0$ در نتیجه فرض کنید $c_{11} \neq 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{c_{11}}y_1 - \frac{c_{12}}{c_{11}}x_2 - \dots - \frac{c_{1n}}{c_{11}}x_n$$

قرار دهید $X' = \{y_1, x_1, \dots, x_n\}$

$X'' = \{y_1, x_2, \dots, x_n\}$

Subject :

Year : Month : Date :

$V=sp(X)=sp(X')=sp(X'') \Rightarrow sp(X'')=V$ $\qquad y_2\in V$

در نتیجه: $y_2=c_{21}y_1+c_{22}x_2+\dots+c_{2n}x_n$

$\Rightarrow x_2=\frac{1}{c_{22}}y_2-\frac{c_{21}}{c_{22}}y_1-\dots-\frac{c_{2n}}{c_{22}}x_n$

قرار دهید: $X_1=\{y_2, y_1, x_2,\dots,x_n\}$

$X_2=\{y_1,y_2,x_3,\dots,x_n\}$

$V=sp(X'')=sp(X_1)=sp(X_2)$

به همین طریق اگر ادامه دهیم $V=sp(Y)$

اما Y مستقل خطی است و از این رو Y یک پایه برای V است.

ب) فرض کنید $X'=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ و $k>n$ مستقل خطی است.

چون X یک پایه برای فضای برداری V است و $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ آنگاه:

$sp(X')=sp(X)$ پس: $x_k=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$ و از این رو X' وابسته خطی است.

ج) فرض کنید $X'=\{x_1,x_2,\dots,x_r\}$ و $r<n$ مولد باشد از این رو:

$x_n=c_1x_1+\dots+c_rx_r$ و این یعنی X پایه نیست.

قضیه: فرض کنید X یک پایه برای فضای برداری V باشد آنگاه هر بردار V را تنها به یک صورت می‌توان ترکیب خطی از بردارهای X در نظر گرفت.

Subject :

Year : Month : Date :

(یعنی اگر $y \in V$ باشد، چون X پایه است پس باید $\exists y = (c_1x_1 + \dots + c_nx_n)$

یعنی اگر $y \in V$ را فرض کنید: $y = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

$y = d_1x_1 + \dots + d_nx_n$

$\Rightarrow 0 = (c_1 - d_1)x_1 + \dots + (c_n - d_n)x_n$

$\Rightarrow c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \dots = c_n - d_n = 0$

تعریف: بعد یک فضای برداری برابر است با تعداد بردارهای واقع در پایه‌ی فضای برداری

پایه هر چند تا بردار داره همونقدر هم بعدش میشه.

قضیه: $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ وابسته خطی است اگر و تنها اگر یکی از بردارهای آن ترکیب خطی از بردارهای ماقبل خود باشد.

فرض کنید $c_1, \dots, c_{i-1}$ چنان وجود داشته باشند که $x_i = c_1x_1 + \dots + c_{i-1}x_{i-1}$

و بعضی از c ها صفر نیستند. $\Rightarrow c_1x_1 + \dots + c_{i-1}x_{i-1} - x_i = 0$

$\Rightarrow c_1x_1 + \dots + c_{i-1}x_{i-1} + 0x_{i+1} + \dots + 0x_n = 0$

و بعضی از c ها صفر نیست یعنی X وابسته خطی است.

حال فرض کنید X وابسته خطی باشد طبق تعریف: $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$

و بعضی از c_i ها صفر نیست.

فرض کنید i بزرگترین اندیسی باشد که $c_i \neq 0$.

$$x_i = \frac{c_1}{c_0}x_1 + c_2 x_2 + \dots + \frac{c_{i-1}}{c_i}x_{i-1}$$

و بعد از حذف ایب صفر نیست و از این رو x_i ترکیب خطی از بردارهای ماقبل خود است.

استخراج پایه: فرض کنید $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک زیرمجموعه از بردارها باشد. می‌خواهیم از بردارهای X یک پایه برای $W=Sp(X)$ بیابیم. اگر x_2 یک ترکیب خطی از x_1 بود آن را حذف می‌کنیم در غیر اینصورت نگه می‌داریم و اگر x_3 ترکیب خطی از x_1 و x_2 بود آن را حذف می‌کنیم در غیر اینصورت نگه می‌داریم و اگر به همین طریق ادامه دهیم یک مجموعه مستقل خطی از بردارها را داریم که مولد W است یعنی برای W پایه تولید کردیم.

متمم سازی پایه: فرض کنید می‌خواهیم پایه‌ای برای فضای برداری V چنان بیابیم که بردارهای مستقل $x_1, x_2, \dots, x_k$ جزء بردارهای آن باشد. برای این کار فرض کنید $Y=\{y_1, \dots, y_n\}$ یک پایه برای V باشد. مجموعه X' را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم: ابتدا $x_1, x_2, \dots, x_k$ را در X' قرار می‌دهیم. اگر y_1 از $x_1, x_2, \dots, x_k$ مستقل بود آن را در X' و اگر نبود در X' قرار نمی‌دهیم و به همین ترتیب تا y_n ادامه می‌دهیم. X' یک پایه برای V است.

Subject :
Year : Month : Date :

بعد فضای برداری V را با نماد $\dim(V)$ نمایش می‌دهیم و اگر $\dim(V)=n$ آنگاه فضای برداری را با نماد V_n نمایش می‌دهیم واضح است که:

قضیه: اگر $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک مجموعه از بردارهای فضای برداری V_n باشد و $sp(X)=V_n$ آنگاه X یک پایه برای V_n است.

توجه کنید که اگر W یک زیرفضای فضای برداری V_n باشد آنگاه: $\dim(W) \leq n$

فرض کنید $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک پایه برای V_n باشد در نتیجه $W \subseteq sp(X)=V_n$ در اینصورت بعضی از ترکیبات خطی X درون W نیست و این نشان می‌دهد که زیرمجموعه‌ای از X مولد W است و از این رو: $\dim(W) \leq \dim(V_n) \leq n$

نکته: $x \in V$ & $x \notin W$; $x = a_1x_1+\cdots+a_nx_n$

قضیه: فرض کنید W زیرفضای برداری محض V_n باشد، در اینصورت:

$\dim(W) < n$

زیرا اگر فرض کنیم $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ یک پایه برای W باشد آنگاه اگر فرض کنیم: $k>n$ در اینصورت پایه‌ی V_n باید بیشتر از n بردار داشته باشد و این صحیح نیست پس $k \leq n$ از طرفی $k=n$ آنگاه W زیرفضای محض V_n نیست بنابراین $k<n$.

تعریف: تابع $f: A \to B$ را پوشا گویند اگر:

$$\forall\, y\in B \;,\; \exists\, x\in A \;;\; f(x)=y$$

تعریف: تابع $f:A\to B$ را یک به یک گویند:

$$\forall\, x_1\neq x_2\in A \;,\; f(x_1)\neq f(x_2)$$

قضیه: اگر f یک به یک و پوشا باشد آنگاه f^{-1} یک به یک و پوشا است.

تعریف: فرض کنید V با دو عمل $\odot$ و $\oplus$ و W با دو عمل $\boxdot$ و $\boxplus$ دو فضای برداری باشند،

گوییم V و W هم ریخت است، اگر تابع یک به یک و پوشای $L:V\to W$ بطوریکه:

$$\forall\, x,y\in V \qquad L(x\oplus y)=L(x)\boxplus L(y)$$

$$\forall\, c\in\mathbb{R} \;,\; \forall\, x\in V \;;\; L(c\odot x)=c\boxdot L(x)$$

مثال: فرض کنید $V=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix};\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ و $W=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix};\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ فرض کنید

$L:V\to W$ بصورت زیر تعریف شود:

$$L\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}$$

اثبات پوشایی:

$$\forall \begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}\in W \qquad \exists \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\in V \qquad \exists\, L\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}\in V \implies \begin{bmatrix}a_1\\b_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\0\end{bmatrix}\in V$$

Subject :
Year : Month : Date :

$$L\left(\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}\right)=L\left(\begin{bmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\0\end{bmatrix}=L\left(\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\right)+L\left(\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}\right)$$

$$L\left(c.\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\right)=L\left(\begin{bmatrix}ca_1\\ca_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}ca_1\\cb_1\\0\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\0\end{bmatrix}=c.L\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$$

قضیه: هر فضای برداری با خودش یک‌ریخت است.

فرض کنید V در $L:V\to V$ را بصورت $L(x)=x$ تعریف کنیم؛ این تابع یک به یک و پوشاست:

$$L(x+y)=x+y=L(x)+L(y)$$

$$L(c.x)=c.x=c.L(x)$$

قضیه: اگر V با W یک‌ریخت باشد W با V یک‌ریخت است.

$L:V\to W$, $\forall x,y\in V$

$L(x\oplus y)=L(x)\boxplus L(y)$

$\forall c\in R$; $\forall x\in V$; $L(c\odot x)=c\odot L(x)$

$\forall x'\in W$, $x'=L(x)$

$\Rightarrow L^{-1}(x')=L^{-1}(L(x))=x\in V$

$\forall x', y' \in W \; ; \; x' \boxplus y' = L(x \oplus y)$

$\Rightarrow L^{-1}(x' \boxplus y') = L^{-1}L(x \oplus y) = x \oplus y$

$\forall c \in R \;\&\; \forall x' \in W$

$c \odot x' = c \boxdot L(x) = L(c \odot x)$

$\Rightarrow L^{-1}(c \boxdot x') = L^{-1}L(c \odot x) = c \odot x$

• قضیه: اگر V با W و W با U یکریخت باشد، آنگاه V با U یکریخت است.

• مختصات: فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ یک پایه مرتب برای فضای برداری V باشد. اگر x متعلق به V باشد آنگاه: $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$

و بردار $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \alpha$ را بردار مختصات x نسبت به پایه مرتب T گویند و با نماد $[x]_T$ نمایش می‌دهند.

$\text{if } x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$

$\Leftrightarrow [x]_T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Subject :

Year : Month : Date :

قضیه: $\forall x,y\in V\ ;\ [x\oplus y]_T=[x]_T+[y]_T$

$\forall c\in R\ ;\ x\in V\ ;\ [c\odot x]_T=c[x]_T$

برهان: فرض کنید $T=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]$ یک پایه مرتب برای فضای برداری V باشد.

اگر x و y متعلق به V باشند. $x=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n$

$y=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\dots+b_n\alpha_n$

جمع $\Rightarrow (a_1+b_1)\alpha_1+(a_2+b_2)\alpha_2+\dots+(a_n+b_n)\alpha_n$

$[x\oplus y]_T=[x]_T+[y]_T$

قضیه: اگر $x=\theta$ آنگاه $[x]_T=0$ و بالعکس.

فرض کنید $T=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]$ در این صورت $x=a_1\alpha_1+\dots+a_n\alpha_n=\theta$

$\Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_n=0 \quad \Rightarrow [x]_T=0$

$0=[x]_T \Rightarrow 0\times\alpha_1+\dots+0\times\alpha_n=0 \Rightarrow x=0$

قضیه: مجموعه $X=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر $X'=\{[x_1]_T,\dots,[x_k]_T\}$ مستقل خطی باشند.

$a_1x_1+\dots+a_kx_k=0 \Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_k=0$

$\Rightarrow 0\times[a_1]_T+\dots+0\times[a_k]_T=0$

و از اینجا X مستقل خطی است . بالعکس

$$a_1[x_1]_T+\dots+a_k[x_k]_T=0 \Rightarrow a_1=\dots=a_k=0$$

X مستقل خطی است.

قضیه: V_n یک فضای برداری باشد آنگاه V_n با $\mathbb{R}^n$ یکریخت است.

زیرا اگر فرض کنیم $T=[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ یک پایه مرتب برای V_n و تعریف کنیم:

$$\forall x\in V_n \,;\, L(x)=[x]_T\in\mathbb{R}^n$$

L پوشا و یک به یک و دارای دو خاصیت در تعریف یکریختی می باشد.

قضیه: اگر $\mathbb{R}^n$ با $\mathbb{R}^m$ یکریخت باشد آنگاه $n=m$ و بالعکس.

قضیه: فضاهای برداری V و W یکریختند اگر $\dim(V)=\dim(W)$.

ابتدا توجه کنید اگر V با $\mathbb{R}^n$ یکریخت باشد آنگاه $\dim(V)=n$. از طرفی فرض کنید V با $\mathbb{R}^n$ و W با $\mathbb{R}^m$ یکریخت باشند.

① $W\to\mathbb{R}^m$, $V\to\mathbb{R}^n$; ② $W\to V\to\mathbb{R}^n$

$$② \Rightarrow W\to\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(W)=n$$
$$\Rightarrow \dim(V)=n \Rightarrow \dim(V)=\dim(W)$$

$$\dim(W)=\dim(V)=n \Rightarrow \begin{matrix}V\to\mathbb{R}^n\\ W\to\mathbb{R}^m\end{matrix} \Rightarrow W\to V$$

Subject :
Year : Month : Date :

ماتریس انتقال:

فرض کنید T و S دو پایه مرتب متفاوت برای فضای برداری V باشند. اگر برای مختصات

برداری چون $x\in V$ نسبت به T برابر $[x]_T$ می‌خواهیم $[x]_S$ را بدست آوریم.

برای این کار فرض کنید $T=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]$ در اینصورت $x=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n$

چون $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ خود بردارهایی از V می‌باشند.

با فرض $[\alpha_1]_S=\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{21}\\\vdots\\c_{n1}\end{bmatrix}$ (یعنی اگر $S=[\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n]$ آنگاه $\alpha_1=c_{11}\beta_1+c_{21}\beta_2+\dots+c_{n1}\beta_n$) به همین طریق

$$[\alpha_2]_S=\begin{bmatrix}c_{12}\\c_{22}\\\vdots\\c_{n2}\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$[\alpha_n]_S=\begin{bmatrix}c_{1n}\\c_{2n}\\\vdots\\c_{nn}\end{bmatrix}$$

$$[x]_S=a_1[\alpha_1]_S+a_2[\alpha_2]_S+\dots+a_n[\alpha_n]_S=C\cdot\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

که در آن $C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}$ یا به عبارت دیگر $[x]_S=C[x]_T$

Subject :
Year : Month : Date :

مثال: فرض کنید $T=\left[\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right]$ و $S=\left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right]$

اولاً مختصات بردار $x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ را نسبت به T بدست آورید.

ثانیاً ماتریس انتقال از T به S را بدست آورید.

ثالثاً $[x]_S$ را بدست آورید.

$$x=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$$

$$=a_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{cases}2a_1+a_2+a_3=1\\ a_1+2a_2+a_3=2\\ a_1+a_2+2a_3=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a_1+a_2+a_3=1\\ -a_1-2a_2-a_3=-2\\ a_1+a_2+2a_3=3\end{cases}$$

$$-a_2+a_3=1$$

$$a_3=1+a_2$$

$$2a_1+a_2+1+a_2=1$$

$$2a_1+2a_2=0 \Rightarrow 2a_1=-2a_2 \Rightarrow a_1=-a_2$$

$$-a_2+a_2+(1+a_2)2=3$$

$$2+2a_2=3 \Rightarrow 2a_2=1 \Rightarrow \boxed{a_2=\frac{1}{2}}$$

$$a_1=-\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow [x]_T=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

Subject: .... Year: .... Month: .... Day: ....

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=c_{11}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_{21}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_{31}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow c_{11}=2 \text{ و } c_{21}=1 \text{ و } c_{31}=1$$

$$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=c_{12}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_{22}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_{32}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow c_{12}=1 \text{ و } c_{22}=2 \text{ و } c_{32}=1$$

$$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=c_{13}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_{23}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_{33}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow c_{13}=1 \text{ و } c_{23}=1 \text{ و } c_{33}=2$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

• قضیه: ماتریس انتقال یکتاست، و نیز اگر $C\neq D$ و ماتریس انتقال از T به S باشند آنگاه:

$$[x]_S=C[x]_T$$

$$[x]_S=D[x]_T$$

$$\Rightarrow C[x]_T-D[x]_T=\theta \Rightarrow (C-D)[x]_T=\theta$$

$$\Rightarrow M[x]_T=0 \Rightarrow M=0 \Rightarrow C=D$$

• قضیه: C وارون پذیر است.

و در نتیجه C وارون پذیر است. $C[x]_T=\theta \Rightarrow [x]_T=\theta$

Subject: Year: Month: Day:

قضیه: اگر ماتریس انتقال از T به S، C باشد، آنگاه ماتریس انتقال از S به T، C^{-1} است. زیرا:

$$[x]_S = C[x]_T$$

$$C^{-1}[x]_S = C^{-1}(C[x]_T) = [x]_T$$

مرتبه یک ماتریس:

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ باشد. مجموعه $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و $Y = \{a'_1, a'_2, \ldots, a'_m\}$ را به ترتیب در نظر بگیرید. مجموعه X بردارهایی از فضای برداری R^m و مجموعه Y بردارهایی از فضای برداری R^n هستند.

$sp(X)$ را فضای ستونی ماتریس A و $sp(Y)$ را فضای سطری ماتریس گویند.

توجه کنید که:

۱) تعویض جای دو بردار در یک مجموعه از بردارها تأثیری در گستره آن ندارد.

۲) حاصل جمع

۳) ضرب یک بردار در یک عدد غیر صفر c از یک مجموعه از بردارها تأثیری در گستره آن ندارد.

قضیه: اگر A هم‌ارز B باشد، آنگاه فضای سطری (ستونی) آنها با هم برابر است و بالعکس.

Subject :
Year : Month : Date :

تعریف: پایه فضای سطری A را رتبه سطری A گویند. پایه فضای ستونی A را رتبه ستونی A گویند.

قضیه: رتبه سطری (ستونی) A برابر رتبه سطری یا ستونی B است اگر و تنها اگر $A\sim B$

قضیه: رتبه سطری یک ماتریس برابر رتبه ستونی آن ماتریس

تعریف: رتبه ماتریس A را با نماد $r(A)$ نمایش می‌دهیم و آن برابر است با رتبه سطری A (رتبه ستونی A)

واضح است که اگر $[A]_{m\times n}$ آنگاه $r(A)\leqslant Min(m,n)$

تعریف: اگر $r(A)=Min(m,n)$ ، A را پر رتبه گویند.

واضح است که اگر $[A]_{n\times n}$ و پر رتبه باشد آنگاه $A\sim I$ و در نتیجه A وارون‌پذیر و بالعکس.

و واضح است که اگر B و C نامنفرد باشند آنگاه:

$B\sim I\sim C \Rightarrow BA\sim CA\sim A$. $\qquad r(BA)=r(CA)=r(A)$

برهان قضیه: باید نشان دهیم که تعداد بردارهای واقع در پایه‌ی فضای سطری با تعداد بردارهای واقع در پایه فضای ستونی یکی است.

فرض کنید
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
و $X=\{B_1,B_2,\ldots,B_r\}$ یک پایه برای فضای ستونی

Subject :

Year : Month : Date :

A باشد.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = C_{11}B_1 + C_{12}B_2 + \cdots + C_{1r}B_r$$

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} = C_{21}B_1 + C_{22}B_2 + \cdots + C_{2r}B_r$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = C_{n1}B_1 + C_{n2}B_2 + \cdots + C_{nr}B_r$$

در واقع

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{m1} \end{bmatrix} + C_{21} \begin{bmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + C_{r1} \begin{bmatrix} \beta_{1r} \\ \beta_{2r} \\ \vdots \\ \beta_{mr} \end{bmatrix}$$

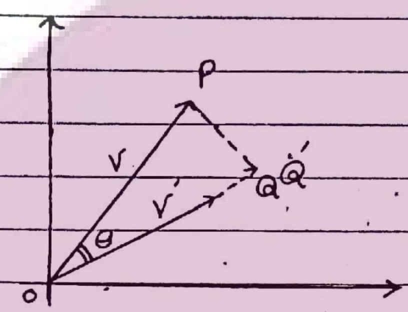
$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = C_{1n} \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + C_{rn} \begin{bmatrix} \beta_{1r} \\ \beta_{2r} \\ \vdots \\ \beta_{mr} \end{bmatrix}$$

Subject :
Year : Month : Date :

تصویر یک بردار:

به شکل زیر توجه کنید



بردار OQ' را تصویر بردار OP بر بردار OQ گویند و با نماد $OQ' = proj_{OQ}^{OP}$ نمایش می‌دهند.

در واقع تصویر بردار V بر بردار V' برداریست هم جهت با V' که فاصله انتهای آن از بردار V کمترین مقدار است یا به عبارت دیگر انتهای آن پای عمودیست که از V بر V' فرود می‌آید.

$proj_{v'}^{v}$ $|v|$

$\cos\theta = \frac{|OQ'|}{|OP|}$ زیرا $|OQ'| = |OQ|\cos\theta$

از آنجا که $\cos\theta = V'.V/(\sqrt{V'V'}\sqrt{VV})$

$$\Rightarrow |OQ'| = |OP| . (V.V')/(\sqrt{V'.V'}\sqrt{V.V})$$

یعنی $|OP| = \sqrt{V.V}$

از طرفی طبق تعریف تصویر بردار $|OQ'| = C.|OQ|$

و چون $|OQ| = \sqrt{V'V'}$ پس $|OQ'| = C.\sqrt{V'V'}$

$$\Rightarrow C.\sqrt{V'V'} = \sqrt{V.V} . \frac{V'V}{\sqrt{V'V'}\sqrt{V.V}} \Rightarrow C = \frac{V'V}{(V'V')}$$

$$\Rightarrow proj_{v'}^{v} = \left(\frac{V'.V}{|V|^2}\right) V'$$

در فرآیند گرام اشمیت دیدیم که اگر $T=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد آنگاه

$S=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\}$ یک پایه متعامد برای V است اگر طبق فرآیند گرام اشمیت داشته باشیم:

$$\beta_1=\alpha_1 \implies \beta_2=\alpha_2-\left(\frac{\beta_1\alpha_2}{|\beta_1|^2}\right)\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\left(\frac{\beta_1\alpha_3}{|\beta_1|^2}\right)\beta_1-\left(\frac{\beta_2\alpha_3}{|\beta_2|^2}\right)\beta_2$$

یعنی

$\beta_1=\alpha_1$ $\qquad$ $\beta_2=\alpha_2-($ تصویر α_2 بر $\beta_1)$

$\beta_3=\alpha_3-($ تصویر α_3 بر $\beta_1)-($ تصویر α_3 بر $\beta_2)$

مثال: فرض کنید $V_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $V_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ در اینصورت

$$proj_{V_2}^{V_1}=\left(\frac{V_1\cdot V_2}{|V_2|^2}\right)V^2=\left(\frac{4}{4}\right)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید $V_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $V_2=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ در اینصورت

$$proj_{V_2}^{V_1}=\left(\frac{V_1\cdot V_2}{|V_2|^2}\right)V^2=\left(\frac{7}{13}\right)\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{21}{13}\\\frac{14}{13}\end{bmatrix}$$

از تعریف دیدیم که $proj_{V_2}^{V_1}$ برداری است به صورت cV_2 به طوری که فاصله آن از V_1 کمترین است.

فاصله $proj_{V_2}^{V_1}$ از V_1 برابر است با $|proj_{V_2}^{V_1}-V_1|=|cV_2-V_1|$

اگر $F(c)=|cV_2-V_1|^2=(cV_2-V_1)(cV_2-V_1)$

Subject :
Year : Month : Date :

$$\Rightarrow f(c) = c^2|v_2|^2 - c v_1 v_2 - c v_1 v_2 + |v_1|^2$$

$$= c^2|v_2|^2 - 2c v_1 v_2 + |v_1|^2$$

$$\Rightarrow 0 = f'(c) = 2c|v_2|^2 - 2 v_1 v_2$$

$$\Rightarrow c = \frac{v_1 v_2}{|v_2|^2} \quad \Rightarrow \operatorname{proj}_{v_2}^{v_1} = \left(\frac{v_1 v_2}{|v_2|^2}\right) v_2$$

فرض کنید V یک فضای برداری و x یک بردار از این فضای برداری باشد و W یک زیرفضای برداری از این فضای برداری باشد. منظور از تصویر x بر W برداری از W است که دارای کمترین فاصله با x است و آن را با proj_W^x نشان می‌دهیم.

حال فرض کنید $T=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ یک پایه برای W باشد. اگر $y \in W$ باشد، آنگاه

$$y = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$$

اگر قرار باشد y تصویر x بر W باشد، باید فاصله y از x مینیمم باشد یعنی $|x-y|$ کمترین مقدار باشد یا به عبارتی $|x-y|^2 = (x-y)(x-y)$ کمترین باشد.

$$(x-y) = [x - (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n)]$$

$$\Rightarrow (x-y)(x-y) = \left[x - \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right]\left[x - \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right]$$

$$= |x|^2 - 2x\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j$$

توجه کنید

Subject :

Year : Month : Date :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i\alpha_i\alpha_j c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^{2}$$

زیرا $\alpha_i\alpha_i=1$ و $\alpha_i\cdot\alpha_j=0$ $\quad i\neq j$

درنتیجه

$$|x-y|^{2} = \sum_{i=1}^{n} c_i^{2} - 2x\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + |x|^{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(c_i^{2} - 2x c_i x_i\right) + |x|^{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(c_i^{2} - 2x c_i x_i + |x\alpha_i|^{2} - |x\alpha_i|^{2}\right) + |x|^{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(c_i - |x\alpha_i|\right)^{2} - \sum_{i=1}^{n}|x\alpha_i|^{2} + |x|^{2}$$

$$\Longrightarrow \forall i=1,2,3,\dots,n \;;\; c_i = |x\alpha_i|$$

$|x\alpha_i|$ مختصات x نسبت به T است.

Subject :
Year : Month : Date :

$$\Rightarrow \beta_3 = \alpha_3 - \beta_1 \cdot \left(\frac{\alpha_3 \cdot \beta_1}{|\beta_1|^2}\right) - \beta_2\left(\frac{\alpha_3 \cdot \beta_2}{|\beta_2|^2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\beta_k = \alpha_k - \beta_1\left(\frac{\alpha_k \beta_1}{|\beta_1|^2}\right) - \dots - \beta_{k-1}\left(\frac{\alpha_k \beta_{k-1}}{|\beta_{k-1}|^2}\right)$$

از این روابط مجموعه برداری $X=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ مجموعه متعامد $Y=\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ را ساختیم و توجه کنید که $sp(X)=sp(Y)$ و Y یک پایه متعامد برای $sp(X)$ است به شرط اینکه X یک پایه برای $sp(X)$ باشد.

مثال: می‌دانیم که $X=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ یک پایه R^3 است. با استفاده از فرآیند گرام اشمیت یک پایه متعامد از روی X برای R^3 بسازید.

$$\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \beta_1\left(\frac{\alpha_2 \beta_1}{|\beta_1|^2}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\left(\frac{5}{6}\right) \qquad \begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{7}{6}\\ -\frac{4}{6}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{7}{6}\\ -\frac{4}{6}\end{bmatrix} = \frac{66}{36} = \frac{11}{6}$$

$$\beta_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \beta_1\left(\frac{\beta_1 \alpha_3}{|\beta_1|^2}\right) - \beta_2\left(\frac{\beta_2 \alpha_3}{|\beta_2|^2}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\left(\frac{5}{6}\right) - \begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{7}{6}\\ -\frac{4}{6}\end{bmatrix}\left(\frac{\frac{5}{6}}{\frac{11}{6}}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\ \frac{5}{6}\\ \frac{10}{6}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{5}{66}\\ \frac{35}{66}\\ \frac{-20}{66}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{60}{66}\\ \frac{-90}{66}\\ \frac{-90}{66}\end{bmatrix}$$

Subject :

Year : Month : Date :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{60}{66} \\ -\frac{90}{66} \\ -\frac{90}{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{66} \\ -\frac{24}{66} \\ -\frac{24}{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 + c_2 + 2c_3 = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} c_2 - c_3 = 0 &\Rightarrow c_2 = c_3 \\ c_1 - c_2 = 0 &\Rightarrow c_1 = c_2 \end{aligned}$$

نکته: متعامدها حتماً مستقل خطی هستند.

مثال: $X = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \left(\frac{12}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Subject :

Year : Month : Date :

• نامساوی کشی - شوارتز :

اگر x و y متعلق به فضای اقلیدسی V_n باشند آنگاه $|(x.y)| \leq |x||y|$

برهان : فرض کنید $Z = tx + y$ در اینصورت :

$$0 \leq Z^2 = (tx+y)(tx+y)$$

$$= t^2 x.x + y.y + 2t x.y$$

$$= t^2|x|^2 + 2t x.y + |y|^2$$

$$\Delta = 4|x.y|^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow |x.y|^2 \leq |x|^2|y|^2$$

$$\Rightarrow |(x.y)| \leq |x||y|$$

نامساوی مثلث : $|x+y| \leq |x| + |y|$

زیرا : $|x+y|^2 = (x+y)(x+y) = |x|^2 + 2xy + |y|^2$

$$\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

$$= (|x| + |y|)^2$$

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \Rightarrow |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

Subject :
Year : Month : Date :

حال فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = X$ مقدار دهید $\beta_1 = \alpha_1$ و β_2 را یک ترکیب خطی

از α_2 و β_1 بگیریم بطوری که بر β_1 عمود باشد.

یعنی: 1) $\beta_2 = a_1\beta_1 + a_2\alpha_2$ 2) $\beta_1 \cdot \beta_2 = 0$

$$\Rightarrow \beta_1\beta_2 = \beta_1(a_1\beta_1 + a_2\alpha_2) = 0$$

$$\Rightarrow a_1(\beta_1 \cdot \beta_1) + a_2\alpha_2\beta_1 = 0$$

فرض کنید $a_2 = 1$ در نتیجه

$$a_1(\beta_1 \cdot \beta_1) + \alpha_2\beta_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{\alpha_2\beta_1}{(\beta_1\beta_1)}$$

$$\Rightarrow \beta_2 = -\frac{\alpha_2\beta_1}{(\beta_1\beta_1)} \cdot \beta_1 + \alpha_2$$

حال β_3 را یک ترکیب خطی از α_3 و β_2 و β_1 می‌گیریم بطوری که بر β_2 و بر β_1 عمود باشد

یعنی

$$\begin{cases} \beta_3 = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\alpha_3 \\ \beta_1(b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\alpha_3) = 0 \\ \beta_2(b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\alpha_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(\beta_1 \cdot \beta_1) + b_2\cancel{(\beta_1 \cdot \beta_2)} + b_3\alpha_3\beta_1 = 0 \\ b_1\cancel{(\beta_1 \cdot \beta_2)} + b_2(\beta_2 \cdot \beta_2) + b_3\alpha_3\beta_2 = 0 \end{cases}$$

فرض کنید $b_3 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{\alpha_3\beta_1}{(\beta_1 \cdot \beta_1)} \\ b_2 = \frac{\alpha_3\beta_2}{(\beta_2 \cdot \beta_2)} \end{cases}$$

Subject :

Year : Month : Date :

$$[x]_T' \, C \, [y]_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 1$$

تعریف: مجموعه $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ از بردارهایی که دو به دو بر هم عمودند را یک مجموعه متعامد از بردارها گویند و اگر طول بردارها یک باشد X را یک مجموعه متعامد یکه از بردارها گویند.

توجه کنید اگر x یک بردار باشد $u = \frac{1}{|x|}x$ برداری است به طول ۱.

قضیه: هر مجموعه متعامد از بردارهای غیر صفر مستقل خطی است و در نتیجه یک پایه برای گستره خود می باشد.

برهان: فرض $X=\{x_1, \dots, x_n\}$ یک مجموعه از بردارهای غیر صفر متعامد باشد. در این صورت:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \theta$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) = x_1 \cdot \theta$$

$$\Rightarrow c_1 \cdot x_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot \underbrace{\cancel{x_1 x_2}}_{0} + \dots + c_n \cdot \underbrace{\cancel{x_1 x_n}}_{0} = x_1 \cdot \theta$$

$$\Rightarrow c_1 |x_1|^2 = x_1 \cdot \theta = 0$$

زیرا

Subject :
Year : Month : Date :

$(-1)\theta x = (-\theta) x = \theta x \Rightarrow \theta x = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد $c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ پس X مستقل خطی است.

حال فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ یک پایه متعامد یکه برای V_n باشد.

$\forall x \in V_n ,\ x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots a_n\alpha_n$

$\Rightarrow \alpha_1 x = a_1|\alpha_1|^2 + a_2\alpha_1\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n\alpha_1$

$\Rightarrow \alpha_1 x = a_1$

به همین طریق $a_i = x.\alpha_i \ ;\ i = 1, 2, \dots, n$ یعنی
$$[x]_T = \begin{bmatrix} x\alpha_1 \\ x\alpha_2 \\ \vdots \\ x\alpha_n \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید $T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ یک پایه متعامد یکه برای V_n باشد.

$\forall x, y \in V_n \quad \exists \quad x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$

$y = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$

$\Rightarrow x.y = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = [x]_T[y]_T$

زیرا $x.y = (a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n)(b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n)$

$= a_1\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + a_2\alpha_2 \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i + \dots + a_n\alpha_n \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i$

$= a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

Subject :

Year : Month : Date :

$$\Rightarrow |OV_1||OV_2|\cos\theta = x_1x_2+y_1y_2$$

$|OV_1||OV_2|\cos\theta$ را ضرب داخلی دو بردار V_1 و V_2 گوییم و می‌نویسیم:

$$V_1\cdot V_2 = |OV_1||OV_2|\cos\theta = x_1x_2+y_1y_2$$

توجه کنید $V_1\cdot V_1 = x_1 x_1+y_1 y_1$

$$\Rightarrow |OV_1| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

$$V_2\cdot V_2 = x_2^2+y_2^2 \Rightarrow |OV_2| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{V_1\cdot V_2}{\sqrt{V_1\cdot V_1}\,\sqrt{V_2\cdot V_2}}$$

اگر فرض کنیم $V_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $V_2=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ از آنجا که $V_1\cdot V_2=\begin{bmatrix}x_1x_2+y_1y_2\end{bmatrix}$ بدون در نظر گرفتن تفاوت مابین یک ماتریس تک عضوی و یک عدد حقیقی گاهی به جای $V_1\cdot V_2$ می‌نویسیم V_1V_2

توجه کنید:

۱) $V\cdot V \geq 0$ ۲) $V_1\cdot V_2 = V_2\cdot V_1$

۳) $V_1\cdot(V_2+V_3) = V_1V_2+V_1V_3$ ۴) $cV_1\cdot V_2 = c(V_1\cdot V_2)$

تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری باشد به طوری که عمل ضرب به صورت زیر باشد

$$V\times V \to R$$

Subject :
Year : Month : Date :

و دارای چهار خاصیت فوق باشد. در اینصورت عمل فوق را ضرب درونی تعریف شده بر V

گویند و V را یک فضای اقلیدسی نامند.

بر یک فضای برداری چندین ضرب درونی را می‌توان تعریف کرد که ضرب درونی فوق را

ضرب درونی متعارف گویند.

از آنجائیکه $\cos\frac{\pi}{2}=0$ اگر x و y دو بردار باشند بطوریکه $x\cdot y=0$ گوییم x و y متعامد می‌باشند

توجه کنید بردار صفر بر تمامی بردارهای فضای برداری عمود است.

فرض کنید a و b دو بردار از فضای برداری R^n و $C=[c_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس باشد در

اینصورت $a'.c.b=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i c_{ij} b_j$

زیرا

$$a'.c.b=[a_1,a_2,\dots,a_n]\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

$$=[a_1,a_2,\dots,a_n]\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{n}c_{1j}b_j\\\sum_{j=1}^{n}c_{2j}b_j\\\vdots\\\sum_{j=1}^{n}c_{nj}b_j\end{bmatrix}=[a_1,a_2,\dots,a_n]\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{bmatrix}$$ و $d_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}b_j$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i d_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i c_{ij} b_j$$

Subject :
Year :   Month :   Date :

فرض کنید V یک فضای برداری و $T=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]$ یک پایه مرتب برای این فضای برداری

باشد و فرض $x=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n$ و $y=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\dots+b_n\alpha_n$

دو بردار از این فضای برداری باشد. در اینصورت $x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\sum_{j=1}^{n}b_j\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\alpha_i\alpha_j b_j$

فرض کنید $c_{ij}=\alpha_i\alpha_j \Rightarrow x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i c_{ij} b_j$

از طرفی:

$$[x]_T=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} \text{ و } [y]_T=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

و طبق مطالب قبل $x\cdot y=[x]'_T\, C[y]_T$

از آنجا که $\alpha_i\alpha_j=\alpha_j\alpha_i$ ⟵ نتیجه $c_{ij}=c_{ji}$ یعنی C یک ماتریس متقارن است

ماتریس C را ماتریس حاصلضرب درونی V براساس پایه مرتب T گویند.

توجه کنید که C یک ماتریس متقارن است که $a'Ca>0$ و $\forall a\neq 0\,;a\in R^n$

و در اینصورت C را یک ماتریس مثبت قطعی گویند. $a'Ca$ را فرم درجه دو گویند.

$x\cdot y=[x]'_T\, C[y]_T$ $\quad C^{-1}[x]_S=[x]_T$

$\Rightarrow x\cdot y=(C^{-1}[x]_S)'\,C\,(C^{-1}[y]_S)$

Subject :
Year : Month : Date :

فرض کنید $T=\left[\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right]$ یک پایه مرتب برای R^3 باشد و فرض کنید $x=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ و

$y=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس حاصلضرب درونی R^3 نسبت به T به صورت

$\begin{bmatrix}6&5&5\\5&6&5\\5&5&6\end{bmatrix}$ برای آنکه $[x]_T$ را بیابیم:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1+2a_2+a_3=1\\2a_1+a_2+a_3=1\\a_1+a_2+2a_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+2a_2+a_3=1\\-2a_1-a_2-a_3=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow -a_1+a_2=0 \Rightarrow a_1=a_2$$

$$2a_2+2a_3=0 \Rightarrow a_3=-a_2$$

$$a_2=\frac{1}{2} \quad a_3=\frac{-1}{2} \quad a_1=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow [x]_T=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{bmatrix} \qquad [y]_T=\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

در نتیجه: $x^t y=[1\ 1\ 0]\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=1$

Subject :

Year : Month : Date :

$$\Rightarrow A=[a_1, a_2, \dots, a_n]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mr} \end{bmatrix} \times \begin{array}{c} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} C'_1 \\ C'_2 \\ \vdots \\ C'_r \end{array}$$

با فرض اینکه $T=\{C'_1, C'_2, \dots, C'_n\}$ حکم برقرار است.

دیدیم که اگر * $A\sim B \iff r(A)=r(B)$

قضیه: معادله $Ax=b$ دارای جواب یکتاست؛ اگر $A\sim[A \mid b]$

زیرا معادله فوق دارای جواب یکتاست اگر از * نتیجه می‌شود که برای یافتن رتبه یک ماتریس آن را تبدیل به یک ماتریس پلکانی کاهش یافته می‌کنیم.

یعنی اگر:

$$A\sim\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

آنگاه رتبه ماتریس A برابر K است.

مثال: رتبه ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} -3 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} -4 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -4 & -1 & \frac{7}{2} \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject :

Year : Month : Date :

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{8} \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{8} \\ 0 & -8 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \qquad \sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

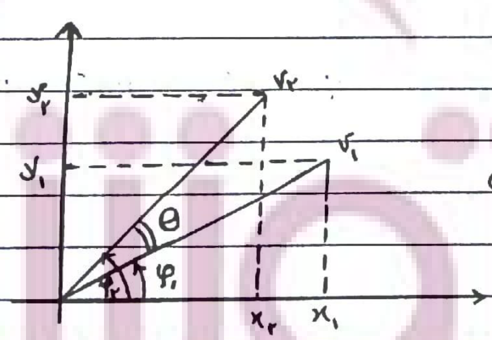
$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فضاهای اقلیدسی:

در علم مکانیک بردار به کمیتی دارای جهت و اندازه گفته می‌شود.

حال اکنون سعی داریم مفاهیمی که در مکانیک بکار می‌بریم را به جبر خطی مجرد تعمیم دهیم.

به شکل زیر توجه کنید. مفروض کنید V_1 و V_2 دو بردار در فضای برداری باشند.



$$\cos(\theta) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_1$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{x_2}{|OV_2|}\,\frac{x_1}{|OV_1|} + \frac{y_2}{|OV_2|}\,\frac{y_1}{|OV_1|}$$

• تعریف: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ آنگاه $|A|=|A^T|$

و $i=1,2,\ldots,n$: $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$

که در آن $|A_{ij}|$ دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر iام و ستون jام A بدست آمده است.

به طور مثال فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$|A|=(-1)^{2}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{3}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{4}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{5}a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

قضیه: $|A|=|A^T|$

زیرا $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a'_{ji}|A'_{ji}|=|A^T|$

Subject :
Year : Month : Date :

دترمینان:

دترمینان عددی است که به یک ماتریس مربع نسبت داده می‌شود.

تعریف: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربع از مرتبه دو باشد. دترمینان ماتریس A را با نماد $|A|$ نمایش می‌دهیم $|A|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

تعریف: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ آنگاه $|A|=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$

یعنی اگر $i=1$ بگیریم آنگاه $|A|=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}|+(-1)^{1+2}a_{12}|A_{12}|+(-1)^{1+3}a_{13}|A_{13}|$ *

توجه کنید $|A_{ij}|$ دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A بدست آمده باشد.

* برابر است با $=(-1)^{2}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{3}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}+(-1)^{4}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

فرمول ای بسط دترمینان A برحسب سطر iام گویند.

قضیه: بسط دترمینان A برحسب سطر iام برابر است با بسط دترمینان A برحسب سطر kام.

قضیه: بسط دترمینان A برحسب سطر iام مساوی است با بسط دترمینان برحسب ستون jام.

قضیه: فرض کنید B ماتریس A باشد به طوری که سطر i ام آن در عدد c ضرب شده باشد. در این صورت $|B|=c|A|$

$$|B|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}|B_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}ca_{ij}|A_{ij}|=$$

$$=c\sum_{j=1}^{n}(-1)a_{ij}|A_{ij}|=c|A|$$

فرض کنید B ماتریس A باشد که جای سطر $i+1$ و i ام آن عوض شده باشد.

قضیه: اگر جای دو سطر متوالی یک ماتریس عوض شود دترمینان در -1 ضرب می‌شود.

$$|B|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}|B_{ij}|$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i+1,j}|A_{i+1,j}|$$

$$=(-1)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{i+1,j}|A_{i+1,j}|=-|A|$$

نتیجه: اگر جای دو ستون متوالی یک ماتریس عوض شود دترمینان آن در یک منفی ضرب می‌شود.

قضیه: اگر جای دو سطر یک ماتریس عوض شود به تعداد عدد فردی جای سطرهای

Subject :
Year. Month.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A=\sum_{j=1}^{۳}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| \qquad i=1$$

$$(-1)^{۲}۴\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}+(-1)^{۳}۵\begin{vmatrix} ۵ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix}+(-1)^{۴}۳\begin{vmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}=۱۲-۳۵-۳=-۲۶$$

قضیه: اگر A یک ماتریس بالا (پایین) مثلثی باشد آنگاه $|A|=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$

زیرا اگر A پایین مثلثی باشد $|A|=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}|$

از طرفی $|A_{11}|=(-1)^{2+2}a_{22}|A'_{22}| \Rightarrow |A|=a_{11}(a_{22}|A'_{22}|)\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

و اگر A بالا مثلثی باشد A^T پایین مثلثی است و چون $|A|=|A^T|$ پس قضیه به اثبات می‌رسد

نتیجه: اگر A یک ماتریس قطری باشد $|A|=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Subject :
Year. Month.

ستوالی عوض می شود.

نتیجه: اگر جای دو سطر یک ماتریس عوض شود، دترمینان آن در یک منفی ضرب می شود.

(برای ستون هم صدق می کند)

قضیه: فرض کنید مضربی از سطر kام A به اضافه سطر iام آن شده است.

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} |B_{ij}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (ca_{kj} + a_{ij}) |A_{ij}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} ca_{kj} |A_{ij}| + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

A

قضیه: فرض کنید ماتریس B همان ماتریس A باشد بطوری که مضربی از یک سطر آن

با سطر دیگر جمع شده باشد در این صورت $|B| = |A|$

برهان: فرض کنید c برابر سطر iام را با سطر kام جمع بسته ایم.

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} |B_{ij}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (ca_{kj} + a_{ij}) |A_{ij}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} c a_{kj} |A_{ij}| + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$$= c \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}| + |A|$$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}|$$ کافیست نشان دهیم

ابتدا توجه کنید که اگر دو سطر یک ماتریس باهم برابر باشند دترمینان ماتریس صفر است

زیرا $|A| = -|A| = 0$

حال فرض کنید سطر iام و سطر kام ماتریس A باهم برابر باشند در اینصورت

$$0 = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}|$$

نتیجه: اگر یک سطر ماتریس A صفر باشد آنگاه $|A| = 0$

مقدمه: دترمینان ماتریس مقدماتی سطری غیرصفر است؛ زیرا $|I| = 1$

۱) اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از تغییر جای دو سطر باشد آنگاه

$$|E| = -|I| = -1$$

۲) اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از ضرب عدد $c \neq 0$ در یک سطر باشد

$$|E| = c|I| = c$$

Subject :
Year. Month.

۳) اگر E ماتریس مقدماتی حاصل از جمع یک سطر با مضربی از سطر دیگر باشد:

$$|E|=|I|=1$$

قضیه: فرض کنید E یک ماتریس مقدماتی سطری و A یک ماتریس باشد.

$$|EA|=|E||A| \quad \text{و} \quad |AE|=|A||E|$$

نتیجه: اگر E_1 و E_2 و ... و E_r ماتریس های مقدماتی سطری باشند و A یک ماتریس مربع باشد.

$$|E_r\cdots E_1A|=|E_r|\cdots|E_1||A|$$

قضیه: ماتریس مربع A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $|A|\neq 0$

برهان: فرض کنید $|A|\neq 0$ و A منفرد باشد. چون A منفرد است پس

$$A=E_r E_{r-1}\cdots E_1 C$$

که در آن C حداقل دارای یک سطر صفر است $\Rightarrow |A|=|E_r E_{r-1}\cdots E_1 C|$

$=|E_r|\cdots|E_1||C|=0$ و این خلاف فرض است

از طرفی فرض کنید A وارون پذیر باشد در این صورت $A=E_r\cdots E_1 I$

$\Rightarrow |A|\neq 0$

Subject :
Year. Month.

قضیه: اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند $|A.B|=|A||B|$

برهان: فرض کنید A وارون پذیر باشد پس $A=E_k \dots E_1$

$\Rightarrow |A.B|=|E_k \dots E_1 B|=|E_k \dots E_1||B|=|A||B|$

فرض کنید A منفرد باشد در این صورت $A.B=E_k \dots E_1 CB$

و CB ماتریسی که یک سطر آن صفر است.

در این صورت $|A.B|=|A||B|$ و $|A||B|=0$ و $|A.B|=0$

ماتریس الحاقی: فرض کنید $\overset{*}{a}_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$

$\Rightarrow |A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overset{*}{a}_{ij}$

توجه کنید که اگر $A^*=[\overset{*}{a}_{ij}]_{n\times n}$ آنگاه

$$AA^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \dots & a^*_{1n} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & \dots & a^*_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*_{n1} & a^*_{n2} & \dots & a^*_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a^*_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a^*_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a^*_{in} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a^*_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a^*_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a^*_{in} \\ \vdots & & & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in}a^*_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{in}a^*_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{in}a^*_{in} \end{bmatrix}$$

توجه کنید $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a^*_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|=|A|$