دفترچه پاسخ

# آزمون ۱۲ آذر ۱۴۰۲

## اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

| | نام درس | نام طراحان |
|---|---|---|
| اختصاصی | حسابان ۲ و ریاضی‌پایه | کاظم اجلالی-امیرمحمد باقری‌نصرآبادی-مسعود برملا-شاهین پروازی-عادل حسینی-محمدرضا راسخ-یاسین سپهر حسین شفیع‌زاده-علی شهرابی-فرشاد صدیقی‌فر-کامیار علّیون-مهرداد کیوان-جهانبخش نیکنام |
| | هندسه | امیرحسین ابومحبوب-سوگند روشنی-احمدرضا فلاح-مهرداد ملوندی |
| | ریاضیات گسسته | امیرحسین ابومحبوب-فرزاد جوادی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-سوگند روشنی-فرید غلامی-احمدرضا فلاح-هادی فولادی مریم مرسلی-مهرداد ملوندی |
| | فیزیک | کامران ابراهیمی-عبدالرضا امینی‌نسب-امیرحسین برادران-پژمان بردبار-علیرضا جباری-دانیال راستی-محمدجواد سورچی عطاالله شادآباد-شیلا شیرزادی-پدرام قلعه‌شاخانی-مهدی کیوانلو-غلامرضا محبی-مجتبی نکوئیان-محمد نهاوندی‌مقدم مصطفی واثقی-آرش یوسفی |
| | شیمی | هدی بهاری‌پور-محمدرضا پورجاوید-مسعود جعفری-امیرحاتمیان-ایمان حسین‌نژاد-پیمان خواجوی‌مجد-حسن رحمتی‌کوکنده فرزاد رضایی-روزبه رضوانی-میلاد شیخ الاسلامی-امیرحسین طیبی-پارسا عیوض‌پور-علیرضا کیانی‌دوست-هادی مهدی‌زاده |

### گزینشگران و ویراستاران

| نام درس | حسابان ۲ و ریاضی پایه | هندسه | ریاضیات گسسته و آمارواحتمال | فیزیک | شیمی |
|---|---|---|---|---|---|
| گزینشگر | حسین شفیع زاده | امیرحسین ابومحبوب | امیرحسین ابومحبوب<br>سوگند روشنی | امیرحسین برادران | امیر حاتمیان |
| گروه ویراستاری | مهدی ملارمضانی<br>سعید خان‌بابایی | مهرداد ملوندی | مهرداد ملوندی | زهره آقامحمدی<br>دانیال راستی | محمدحسن محمدزاده مقدم<br>امیررضا حکمت‌نیا |
| بازبینی نهایی رتبه های برتر | علی رضایی<br>سهیل تقی‌زاده<br>مهدی بحرکاظمی | مهبد خالتی | مهبد خالتی | نیما امینی | امیررضا واشقانی<br>ماهان زواری<br>احسان پنجه‌شاهی<br>مهدی سهامی |
| مسئول درس | عادل حسینی | امیرحسین ابومحبوب | امیرحسین ابومحبوب | امیرحسین برادران | پارسا عیوض‌پور |
| مستندسازی | سمیه اسکندری | سرژ یقیازاریان تبریزی | سرژ یقیازاریان تبریزی | علیرضا همایون‌خواه | سمیه اسکندری |

### گروه فنی و تولید

| | | |
|---|---|---|
| مدیر گروه | مهرداد ملوندی | |
| مسئول دفترچه | نرگس غنی‌زاده | |
| گروه مستندسازی | مدیر گروه: محیا اصغری | مسئول دفترچه: الهه شهبازی |
| حروف‌نگار | فرزانه فتح اله‌زاده | |
| ناظر چاپ | سوران نعیمی | |


**گروه آزمون**

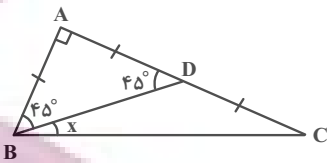
**بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)**

**دفتر مرکزی:** خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

## حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۱»** (یاسین سپهر)

مثلث ABD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. پس دو زاویهٔ ABD و ADB هر دو برابر $45^\circ$ هستند.




از طرفی $\tan\hat{B}=2$ است؛ زیرا:

$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}=2$$

پس داریم:

$$\tan\hat{B}=\tan(x+45^\circ)=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=2\Rightarrow \tan x=\frac{1}{3}$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۴۲)

---

۲- **گزینهٔ «۳»** (شاهین پروازی)

ابتدا $\tan 2x$ را می‌یابیم:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{3}$$

حال $\tan y$ را می‌یابیم:

$$\tan(2x+y)=\frac{\tan 2x+\tan y}{1-\tan 2x\tan y}=-2$$

$$\xrightarrow{\tan 2x=\frac{4}{3}} \frac{\frac{4}{3}+\tan y}{1-\frac{4}{3}\tan y}=-2\Rightarrow \tan y=2$$

و در نهایت $\tan 2y$ را حساب می‌کنیم:

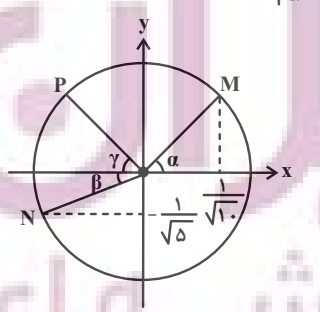
$$\tan 2y=\frac{2\tan y}{1-\tan^2 y}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۴۲)

---

۳- **گزینهٔ «۲»** (کامیار علّیون)

با توجه به شکل داریم:




$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

و طبق فرض سؤال $\alpha=\beta+\gamma$ یا $\gamma=\alpha-\beta$ است. عرض نقطهٔ P برابر $\sin\gamma$ است:

$$y_P=\sin\gamma=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow y_P=(\frac{3}{\sqrt{10}})(\frac{2}{\sqrt{5}})-(\frac{1}{\sqrt{10}})(\frac{1}{\sqrt{5}})=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

---

۴- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

ابتدا رابطهٔ داده شده را باز می‌کنیم تا رابطهٔ بین $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ را پیدا کنیم:

$$3\sin(\alpha+\beta)=2\sin(\alpha-\beta)\Rightarrow 3\sin\alpha\cos\beta+3\sin\beta\cos\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cos\beta-2\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin\alpha\cos\beta=-5\sin\beta\cos\alpha\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=-5\tan\beta \qquad (*)$$

حال از اتحاد $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{20}{29}\Rightarrow 29\tan\alpha=10+10\tan^2\alpha$$

$$10\tan^2\alpha-29\tan\alpha+10=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=\frac{2}{5}\xrightarrow{(*)}\tan\beta=-\frac{2}{25}\\ \tan\alpha=\frac{5}{2}\xrightarrow{(*)}\tan\beta=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

---

۵- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

روش اول: می‌توانیم از خود گزینه‌ها استفاده کنیم. مثلاً اگر $\alpha=9^\circ$ را جایگذاری کنیم، داریم:

$$A=\frac{\sqrt{2}}{4}+\sin 36^\circ\sin 9^\circ+\sin 18^\circ\cos 18^\circ$$

$$B=\cos 36^\circ\cos 9^\circ+\cos 18^\circ\sin 18^\circ-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

که از تساوی $A=B$ داریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{4}+\sin 36^\circ\sin 9^\circ=\cos 36^\circ\cos 9^\circ-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 36^\circ\cos 9^\circ-\sin 36^\circ\sin 9^\circ=\cos(36^\circ+9^\circ)$$

$$=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

که تساوی را برقرار می‌کند.

روش دوم:

$$۱۸^\circ = \frac{\pi}{۱۰}\text{rad} \quad , \quad ۳۶^\circ = \frac{\pi}{۵}\text{rad}$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۴} + \sin\frac{\pi}{۵}\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{۱۰}\cos۲\alpha$$

$$= \cos\frac{\pi}{۵}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{۱۰}\sin۲\alpha - \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos\frac{\pi}{۵}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{۵}\sin\alpha}_{\cos(\frac{\pi}{۵}+\alpha)} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{۱۰}\sin۲\alpha - \sin\frac{\pi}{۱۰}\cos۲\alpha}_{\sin(۲\alpha-\frac{\pi}{۱۰})} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۵}+\alpha) + \sin(۲(\frac{\pi}{۵}+\alpha) - \frac{\pi}{۲}) - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۵}+\alpha) - \cos۲((\frac{\pi}{۵}+\alpha)) - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۵}+\alpha) - ۲\cos^۲(\frac{\pi}{۵}+\alpha) + ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲(\frac{\pi}{۵}+\alpha) - \cos(\frac{\pi}{۵}+\alpha) + \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱ = ۰$$

$\cos(\frac{\pi}{۵}+\alpha)$ را متغیر جدید $T$ در نظر می‌گیریم:

$$۲T^۲ - T + \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow T = \frac{۱ \pm \sqrt{۹ - ۴\sqrt{۲}}}{۴} = \frac{۱ \pm (۲\sqrt{۲} - ۱)}{۴} = \frac{۱ - \sqrt{۲}}{۲} \quad \text{یا} \quad \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اما فقط $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برای ما آشناست و داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{۵}+\alpha) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{۵} + \alpha = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

azmonvip

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲۰} = k \times ۳۶۰^\circ + ۹^\circ \\ \text{یا} \\ \alpha = ۲k\pi - \frac{۹\pi}{۲۰} = k \times ۳۶۰^\circ - ۸۱^\circ \end{cases}$$

*(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲) (حسابان ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)*

---

۶- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد کیوان)*

ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = ۴(\frac{۱ - \cos۲(\frac{\pi x}{۳})}{۲}) = ۲ - ۲\cos\frac{۲\pi x}{۳}$$

و سپس معادلهٔ $f(x) = ۱$ را حل می‌کنیم:

$$۲ - ۲\cos\frac{۲\pi x}{۳} = ۱ \Rightarrow \cos\frac{۲\pi x}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi x}{۳} = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۶k \pm ۱}{۲} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های مثبت معادله عبارتند از: $\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}, \frac{۷}{۲}, \frac{۱۱}{۲}, \frac{۱۳}{۲}, \dots$

که دومین جواب مثبت طول نقطهٔ $A$، سومین جواب طول نقطهٔ $B$ و چهارمین جواب طول نقطهٔ $C$ است.

$$\Rightarrow x_A = \frac{۵}{۲} \quad , \quad x_B = \frac{۷}{۲} \quad , \quad x_C = \frac{۱۱}{۲} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{۱۱}{۲} - \frac{۷}{۲}}{\frac{۷}{۲} - \frac{۵}{۲}} = ۲$$

*(حسابان ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)*

---

۷- **گزینهٔ «۲»** *(حسین شفیع‌زاده)*

در ابتدا باید بگوییم که $\cos x \geq ۰$ است، پس با توجه به محدودهٔ تعیین شده صورت سؤال، بازهٔ $[۰ , \frac{\pi}{۲}]$ مورد نظر ماست. حال طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\cos^۲ x = \sin۲x + \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\cos^۲ x = ۲\sin۲x + ۱$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ = ۲\sin۲x \Rightarrow \cos۲x = ۲\sin۲x$$

$$\Rightarrow \tan۲x = \frac{۱}{۲}$$

$x$ در بازهٔ $[۰ , \frac{\pi}{۲}]$ و به تبع آن $۲x$ در بازهٔ $[۰ , \pi]$ قرار می‌گیرد، و در این بازه فقط یک کمان می‌توان یافت که تانژانت آن برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، در نتیجه فقط یک مقدار برای $x$ وجود دارد.

*(حسابان ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)*

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸- **گزینهٔ «۴»** (حسین شفیع‌زاده)

معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\sin(\pi - 4x) = \sin 4x$$

$$\cot(\frac{3\pi}{2} - 2x) = \tan 2x$$

$$\Rightarrow \sin 4x + \tan 2x = 0$$

از اتحاد $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$2\sin 2x\cos 2x + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0 \Rightarrow \sin 2x(\frac{2\cos^2 2x + 1}{\cos 2x}) = 0$$

$$\xrightarrow{2\cos^2 2x+1\neq 0} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های بازهٔ $(0 , \frac{3\pi}{2})$ عبارتند از $\frac{\pi}{2}$ و $\pi$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{3\pi}{2}$ است، پس داریم:

$$\cos\frac{\theta}{9} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

---

۹- **گزینهٔ «۳»** (مهرداد کیوان)

جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس $x = \frac{\pi}{6}$ را جای‌گذاری می‌کنیم و باید تساوی برقرار باشد:

$$\tan(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})\tan(m - \frac{\pi}{6}) = 1$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{7\pi}{12})\tan(m - \frac{\pi}{6}) = 1$$

$\tan(\frac{7\pi}{12})$ هم برابر $\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}) = -\cot\frac{\pi}{12}$ است که آن را به صورت $-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}}$ می‌نویسیم:

$$\Rightarrow -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}}\tan(m - \frac{\pi}{6}) = 1$$

$$\Rightarrow \tan(m - \frac{\pi}{6}) = -\tan(\frac{\pi}{12}) = \tan(-\frac{\pi}{12})$$

$$\Rightarrow m - \frac{\pi}{6} = k\pi - \frac{\pi}{12} \Rightarrow m = k\pi + \frac{\pi}{12} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

حال اگر $k = -1$ را به دلخواه جای‌گذاری کنیم، $m = -\frac{11\pi}{12}$ به دست می‌آید.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

---

۱۰- **گزینهٔ «۳»** (حسین شفیع‌زاده)

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$1 - \sin^2 x + \sin nx\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + \sin nx\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x(1 + \sin nx) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} & (1) \\ \sin nx = -1 \Rightarrow nx = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow x = \frac{4k-1}{2n}\pi & (2) \end{cases}$$

دسته جواب (۱) در بازهٔ $(0 , 2\pi)$ دو جواب $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ را دارد، پس باید دسته جواب (۲) نیز دو جواب متمایز از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ داشته باشد، داریم:

$$0 < x = \frac{4k-1}{2n}\pi < 2\pi \Rightarrow 0 < \frac{4k-1}{2n} < 2 \Rightarrow \frac{1}{4} < k < n + \frac{1}{4}$$

در بازهٔ داده شده، $k = 1$ صدق می‌کند، پس باید $k = 2$ نیز صدق کند و مقدار دیگری برای $k$ نتوانیم پیدا کنیم. برای این منظور $n + \frac{1}{4}$ باید بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ باشد، پس $n$ باید برابر ۲ باشد.

از طرفی اگر $n = 3$ باشد، دسته جواب (۲) سه مقدار در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد که یکی از آن‌ها $x = \frac{\pi}{2}$ (به ازای $k = 1$) است، این یعنی به ازای $n = 3$ نیز معادله ۴ جواب متمایز دارد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

## ریاضی پایه

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x=\frac{x^۲}{۴}-x+۱\Rightarrow \frac{x^۲}{۴}-۲x+۱=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۸x+۴=۰\Rightarrow x=۴\pm ۲\sqrt{۳}$$

اما فقط $x=۴+۲\sqrt{۳}$ در معادله صدق می‌کند. با در نظر گرفتن مقدار تقریبی $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$، مقدار تقریبی جواب ۷/۴ است که در بازهٔ $(۷/۵\ ,\ ۷)$ قرار می‌گیرد.

*(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)*

---

۱۲- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود برملا)*

عدد موردنظر را x درنظر می‌گیریم و طبق سؤال باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\frac{x^۲}{۲}>\frac{۴}{x}$$

بدیهی است که به ازای تمام xهای منفی نامعادله بالا درست است؛ زیرا سمت چپ مثبت و سمت راست منفی است. حال محدودهٔ قابل قبول در xهای مثبت را پیدا می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x>۰} x^۳>۸\Rightarrow x>۲$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-[۰,۲]$ است.

$$\Rightarrow a=۰\ ,\ b=۲\Rightarrow b-a=۲$$

*(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)*

---

۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

ابتدا توجه کنید که اگر $|x|=x$ باشد، مخرج صفر می‌شود، پس $x<۰$ است. حال سراغ حل نامعادله می‌رویم:

$$\frac{(x-۱)(x+۱)(x-۱)(x^۲+x+۱)(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)}{۲x}\le ۰$$

$$=\frac{(x-۱)^۳(x+۱)^۲(x^۲+x+۱)(x^۲+۱)}{۲x}\le ۰$$

عبارات $x^۲+۱$ و $x^۲+x+۱$ همواره مثبت هستند و تأثیری در تعیین علامت‌ها ندارند:

| | $-۱$ | | $۰$ | | $۱$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-۱)^۳$ | − | − | | − | ۰ | + |
| $(x+۱)^۲$ | + | ۰ | + | + | | + |
| $۲x$ | − | | − | ۰ | + | + |
| | + | ۰ | + | ت ن − | ۰ | + |

بازهٔ قابل قبول $[-۱\ ,\ ۰)\cup\{-۱\}$ است که با توجه به شرط $x<۰$، جواب نامعادله $\{-۱\}$ است.

*(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۹۰ تا ۹۳)*

---

۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(حسین شفیع‌زاده)*

بین a، b و ۱ براساس ویژگی‌های جملات متوالی دنبالهٔ حسابی رابطهٔ $a+۱=۲b$ برقرار است. $a=۲b-۱$

در این شرایط $b>\frac{۱}{۲}$ است؛ زیرا جملات دنباله مثبت هستند. حال معادله را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم: $(۲b-۱)x^۲+bx+۱=۰$

این معادله باید دو جواب داشته باشد، پس $\Delta$ ی آن مثبت است:

$$\Delta=b^۲-۴(۲b-۱)>۰\Rightarrow b^۲-۸b+۴>۰\Rightarrow \begin{cases} b<۴-۲\sqrt{۳} \\ b>۴+۲\sqrt{۳}\end{cases}$$

با توجه به شرط $b>\frac{۱}{۲}$ محدودهٔ قابل قبول برای b مجموعهٔ $(\frac{۱}{۲}\ ,\ ۴-۲\sqrt{۳})\cup(۴+۲\sqrt{۳}\ ,\ +\infty)$ است. حال اگر $\alpha$ و $\beta$ را جواب‌های معادله ساخته‌شده در نظر بگیریم، مجموع معکوس‌های آن‌ها برابر است با:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{S}{P}=\frac{-\frac{b}{۲b-۱}}{\frac{۱}{۲b-۱}}=-b$$

در نتیجه محدودهٔ $-b$ مجموعهٔ $(-\infty\ ,\ -۴-۲\sqrt{۳})\cup(-۴+۲\sqrt{۳}\ ,\ -\frac{۱}{۲})$ می‌شود که در بین گزینه‌ها فقط ۸- است که در این مجموعه قرار می‌گیرد.

*(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)*

توشه‌ای برای موفقیت

۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمحمد باقری نصرآبادی)*

قاعدهٔ مثلث هاشورخورده اختلاف صفرهای تابع و ارتفاع آن برابر ۴ است.

$$\text{قاعده} = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16-4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{12}}{|a|} = \frac{2\sqrt{3}}{|a|}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{|a|}\right)(4) = 8\sqrt{3} \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}$$

دهانه‌های سهمی رو به پایین است، پس $a = -\frac{1}{2}$ و در نتیجه $c = -2$،

پس معادلهٔ سهمی داده شده $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$ است که مجموع

صفرهای آن برابر $\frac{-4}{-\frac{1}{2}} = 8$ است.

*(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)*

---

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 3x - 8 = 0$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = 3 \\ P = \frac{c}{a} = -8 \end{cases}$$

$x_1 = \alpha^2\beta$ و $x_2 = \alpha\beta^2$ ریشه‌های معادلهٔ بالا بودند، پس داریم:

$$x_1 x_2 = (\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2) = (\alpha\beta)^3 = -8 \Rightarrow \alpha\beta = -2$$

$$x_1 + x_2 = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \underbrace{\alpha\beta}_{-2}(\alpha+\beta) = 3 \Rightarrow \alpha+\beta = -\frac{3}{2}$$

با توجه به این‌که $\alpha+\beta = -\frac{3}{2}$ است، $3\alpha+2\beta$ برابر است با:

$$\alpha + 2\alpha + 2\beta = \alpha + 2\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-\frac{3}{2}} = \alpha - 3$$

پس ریشه‌های معادله،دو عدد $\alpha-3$ و $\beta-3$ هستند.

$S$ و $P$ معادلهٔ جدید را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{ج}} = (\alpha-3)+(\beta-3) = \alpha+\beta-6 = -\frac{3}{2}-6 = -\frac{15}{2}$$

$$P_{\text{ج}} = (\alpha-3)(\beta-3) = \alpha\beta - 3(\alpha+\beta) + 9$$

$$= -2 - 3(-\frac{3}{2}) + 9 = -2 + \frac{9}{2} + 9 = \frac{23}{2}$$

پس معادلهٔ جدید به صورت زیر است:

$$x^2 - S_{\text{ج}}x + P_{\text{ج}} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{23}{2} = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 15x + 23 = 0$$

در نهایت مطلوب سؤال برابر است با:

$$c - b = 23 - 15 = 8$$

*(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۷ تا ۹)*

---

۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا راسخ)*

روش زیبای حل این سؤال این است که فرض کنیم

$a(x) = 4x^2 + 15x + 17$، $b(x) = x^2 + 4x + 12$ و

$c(x) = x^2 + x + 1$ باشد، در این صورت معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x)+c(x)}{b(x)+c(x)}$$

$$\Rightarrow a(x)b(x) + a(x)c(x) = a(x)b(x) + b(x)c(x)$$

$$\Rightarrow a(x)c(x) = b(x)c(x)$$

حال چون $c(x) \neq 0$ است، نتیجه می‌گیریم که $a(x) = b(x)$ است:

$$4x^2 + 15x + 17 = x^2 + 4x + 12 \Rightarrow 3x^2 + 11x + 5 = 0$$

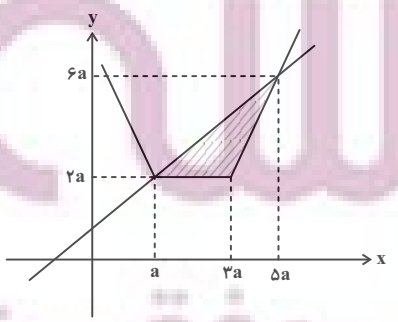
این معادله دو جواب حقیقی دارد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{11}{3}$ است.

*(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)*

---

۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(حسین شفیع‌زاده)*

برای این‌که سطحی بین خط و نمودار تابع گلدانی ایجاد شود، لازم است که $a$ مثبت باشد. حال با این فرض شکل زیر را داریم:



پس مساحت مثلث هاشورخورده برابر ۳۶ است:

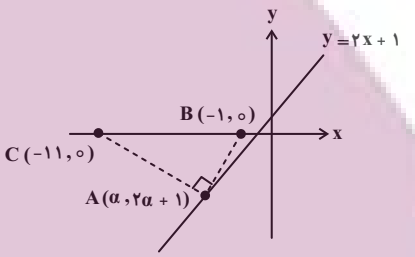
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲}(۲a)(۴a) = ۴a^۲ = ۳۶ \Rightarrow a = ۳$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

---

۱۹- **گزینهٔ «۲»** (جوانبخش نیکنام)

شکل زیر را در نظر می‌گیریم:




مطابق شکل شیب خطوط AB و AC قرینه و معکوس یکدیگرند:

$$m_{AB} = \frac{۲\alpha+۱}{\alpha+۱} \quad , \quad m_{AC} = \frac{۲\alpha+۱}{\alpha+۱۱}$$

$$\xrightarrow{m_{AB}.m_{AC}=-۱} \frac{(۲\alpha+۱)^۲}{(\alpha+۱)(\alpha+۱۱)} = -۱$$

$$\Rightarrow ۴\alpha^۲ + ۴\alpha + ۱ = -\alpha^۲ - ۱۲\alpha - ۱۱$$

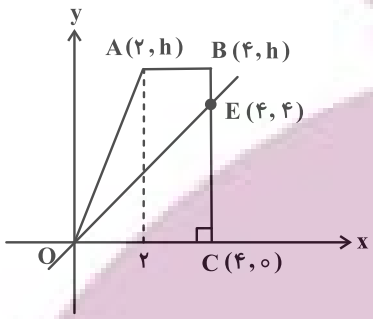
$$\Rightarrow ۵\alpha^۲ + ۱۶\alpha + ۱۲ = (\alpha+۲)(۵\alpha+۶) = ۰ \Rightarrow \alpha = -۲ \text{ یا } -\frac{۶}{۵}$$

در این صورت مختصات نقطهٔ A به صورت $A(-۳, -۲)$ یا $A(-\frac{۶}{۵}, -\frac{۷}{۵})$ خواهد بود که کمترین فاصله از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{(-\frac{۶}{۵})^۲ + (-\frac{۷}{۵})^۲} = \frac{\sqrt{۸۵}}{۵}$ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

۲۰- **گزینهٔ «۴»** (کاظم اجلالی)

ارتفاع ذوزنقه را که مطلوب مسئله است، h درنظر می‌گیریم. در نتیجه مختصات رأس‌های ذوزنقه مطابق شکل زیر است:




همچنین محل برخورد خط $y = x$ با ضلع BC نقطهٔ $E(۴, ۴)$ است.

حال باید مساحت مثلث OCE و چهارضلعی OABE باید برابر باشند. azmonvip

مساحت مثلث OCE برابر $\frac{۴\times۴}{۲} = ۸$ است، پس مساحت چهارضلعی OABE را نیز باید برابر ۸ قرار دهیم.

می‌توانیم چهارضلعی OABE را متشکل از دو مثلث OAE و ABE در نظر بگیریم و مجموع مساحت آن‌ها را برابر ۸ قرار دهیم، اما راه ساده‌تر این است که مساحت چهارضلعی را مستقیم حساب کنیم:

$$S_{OABE} = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۴ & ۴ \\ ۴ & h \\ ۲ & h \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}|۸h - (۲h+۱۶)| = \frac{|۶h-۱۶|}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{OABE} = |۳h - ۸| = ۸ \xrightarrow{h>۴} ۳h - ۸ = ۸$$

$$\Rightarrow h = \frac{۱۶}{۳}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶)

## هندسه ۳

۲۱- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

فرض:

$$A^3 = 2I$$

$$A^3 + A = 2I + A \Rightarrow A(A^2 + I) = 2I + A$$

از طرفین دترمینان می‌گیریم:

$$|A||A^2 + I| = |2I + A| \Rightarrow \frac{|2I + A|}{|A^2 + I|} = |A|$$

از طرفی داریم:

$$A^3 = 2I \xrightarrow{\text{دترمینان}} |A^3| = |2I| = 2^3 |I| = 8$$

$$\Rightarrow |A|^3 = 8 \Rightarrow |A| = 2$$

بنابراین جواب سؤال برابر ۲ است.

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

---

۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

ماتریس $A^2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$B = A^2 + A + I = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|B| \overset{\text{ساروس}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (1+36+6) - (6+6+6) = 25$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

---

۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم اگر سطری (ستونی) از ماتریس در عدد حقیقی $m$ ضرب شود، دترمینان ماتریس $m$ برابر می‌شود، بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\times a & b\times b & c\times c \\ a\times 1 & b\times 1 & c\times 1 \\ a\times\frac{1}{a} & b\times\frac{1}{b} & c\times\frac{1}{c} \end{vmatrix} = k$$

از مقادیر $a$، $b$ و $c$ به ترتیب در ستون‌های اول، دوم و سوم فاکتور می‌گیریم.

$$\Rightarrow abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = k$$

سپس مقدار $abc$ را در سطر سوم ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{abc}{a} & \frac{abc}{b} & \frac{abc}{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = k$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

---

۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(سوکند روشنی)*

دترمینان را محاسبه کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم؛ (نسبت به سطر دوم بسط می‌دهیم)

$$0 + 1(8-1) - x(2x+2+3) = 0$$

$$7 - 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{5}{2} \\ P = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{7}{2}} = \frac{5}{7}$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

---

۲۵- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

تساوی داده شده را به صورت $BAC = -2I$ می‌نویسیم، در این صورت $|B||A||C| = |-2I|$. دترمینان ماتریس‌های $B$ و $C$ به صورت زیر هستند:

$$|B|=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&1&0\\-4&5&2\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{قطر اصلی}]{\text{حاصلضرب درایه‌های}}=1\times1\times2=2$$

$$|C|=\begin{vmatrix}3&-2&2\\4&1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{درایه‌های قطر فرعی}]{\text{منفی حاصلضرب}}=-(-1)\times1\times2=2$$

همچنین داریم: $|-2I|=(-2)^3\,|I|=-8$

در نتیجه:

$$|B||A||C|=|-2I|\Rightarrow|A|=\frac{-8}{2\times2}=-2$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

---

۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

اگر از طرفین رابطه داده شده دترمینان بگیریم، خواهیم داشت:

$$\big||A|A\big|=\begin{vmatrix}|A|&3&0\\0&-1&|A|\\0&0&-3|A|\end{vmatrix}$$

$$|A|^4=|A|(3|A|)=3|A|^2\Rightarrow|A|^4-3|A|^2=0$$

$$\Rightarrow|A^2|(|A|^2-3)=0$$

چون $A$ وارون‌پذیر است، $|A|\neq0$ و در نتیجه $|A|^2=3$ است.

$$|kA^2|=k^3\,|A|^2=24\Rightarrow k^3=8\Rightarrow k=2$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

---

۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

ماتریس $B$ را نوشته و ماتریس‌های $AB$ و $BA$ را تشکیل می‌دهیم:

$$B=\begin{bmatrix}m&-1\\0&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}m^2+4&-m-2\\-m-2&3\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}m^2+1&-1&2m+1\\-1&1&-1\\2m+1&-1&5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow|AB|=3(m^2+4)-(m+2)^2=\underbrace{2m^2-4m+8}_{(\Delta=-48)}\neq0$$

هیچ مقداری برای $m$ وجود ندارد که $|AB|=0$ باشد. (مورد (الف)؛ نادرست)

$$|BA|\xrightarrow{\text{ساروس}}(5(m^2+1)+(2m+1)+(2m+1))$$

$$-((2m+1)^2+5+(m^2+1))=0$$

به ازای تمام مقادیر حقیقی $m$ رابطه $|BA|=0$ برقرار است. (مورد (ب)؛ نادرست)

مورد (پ) درست است، زیرا $|AB|\neq0$ و $|BA|=0$ و به ازای هیچ مقدار $m$، رابطهٔ $|AB|=|BA|$ برقرار نیست.

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

---

۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیررضا فلاح)*

$$|I-AB|=\begin{vmatrix}-2&1\\-5&3\end{vmatrix}=-6+5=-1$$

$$|I-AB|=|AA^{-1}-AB|=|A(A^{-1}-B)|=|A|\,|A^{-1}-B|$$

$$=|A^{-1}-B|\,|A|$$

$$=|(A^{-1}-B)A|=|A^{-1}A-BA|=|I-BA|=-1$$

$$|BA-I|=|-(I-BA)|=(-1)^2\,|I-BA|=|I-BA|=-1$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

---

۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا دترمینان ماتریس $A$ را با استفاده از بسط برحسب ستون دوم به‌دست می‌آوریم:

$$|A|=(-1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&2\\2&2\end{vmatrix}=-2$$

با جایگذاری ماتریس $B$ برحسب ماتریس $A$ در رابطه داریم:

$$|A^3B^2|=|A^3\times(-2A)^2|=|A^3\times4A^2|=|4A^5|$$

$$=4^3\times|A^5|=4^3\times|A|^5=2^6\times(-2)^5=-2^{11}$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

---

۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

$$|A+B|=\frac{1}{|(A+B)^{-1}|}=6\quad,\quad|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{3}$$

$$|I+BA^{-1}|=|AA^{-1}+BA^{-1}|=|(A+B)A^{-1}|$$

$$=|A+B|\,|A^{-1}|=6\times\frac{1}{3}=2$$

*(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)*

## ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(اخشین خاصه‌خان)*

اگر عضو دلخواهی از مجموعهٔ $A$ را با $x$ نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow[(۴,۵)=۱]{\div ۴} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x \in [۳]_۵$$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)*

---

۳۲- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا با محاسبهٔ فاصلهٔ یازدهم تیرماه تا اول دی ماه، مشخص می‌کنیم اول دی ماه آن سال چه روزی از هفته است.

$$\underset{\text{تیر}}{۲۰} + \underbrace{۲\times۳۱}_{\text{مرداد و شهریور}} + \underbrace{۳\times۳۰}_{\text{مهر تا آذر}} + \underbrace{۱}_{\text{دی}} = ۱۷۳$$

$$۱۷۳ = ۲۴\times۷ + ۵$$

بنابراین اول دی ماه پنج روز بعد از سه‌شنبه، یعنی یکشنبه است. در نتیجه اولین چهارشنبهٔ دی ماه روز چهارم و سومین چهارشنبه، روز هجدهم دی ماه است.

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۲۴)*

---

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ در صورتی در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است که $(a , m) \mid b$. بنابراین داریم:

$$(a , ۹۰) \mid ۲۴ \Rightarrow (a , ۲\times۳^۲\times۵) \mid ۲^۳\times۳$$

در نتیجه $a$ فاقد عامل ۵ است و حداکثر یک عامل ۳ دارد. همچنین $a$ می‌تواند عامل ۲ داشته باشد یا فاقد آن باشد. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: شرط وجود جواب معادله آن است که $۲ \mid (a , ۶)$. در صورتی که $a$ مضرب ۳ باشد، معادله جواب ندارد.

گزینهٔ «۲»: شرط وجود جواب معادله آن است که $۳ \mid (a , ۹)$. با توجه به این‌که $۹ = ۳^۲$ و $a$ حداکثر یک عامل ۳ دارد، رابطهٔ عاد کردن برقرار است و معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد.

گزینهٔ «۳»: شرط وجود جواب معادله آن است که $۴ \mid (a , ۸)$. اگر $a$ مضرب ۸ باشد، معادله جواب ندارد.

گزینهٔ «۴»: شرط وجود جواب معادله آن است که $۵ \mid (a , ۱۵)$. اگر $a$ مضرب ۳ باشد، معادله جواب ندارد.

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)*

---

۳۴- **گزینهٔ «۲»** *(فرزاد هوادی)*

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$۳۲x^۲ - ۱۹x + ۱ \overset{۸}{\equiv} ۰ \xrightarrow{۳۲ \overset{۸}{\equiv} ۰} -۱۹x + ۱ \overset{۸}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۱۹x \overset{۸}{\equiv} ۱ \xrightarrow{۱۹ \overset{۸}{\equiv} ۳} ۳x \overset{۸}{\equiv} ۱ \overset{۸}{\equiv} ۹ \xrightarrow[(۳,۸)=۱]{\div ۳} x \overset{۸}{\equiv} ۳$$

$$\Rightarrow x = ۸k + ۳ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

می‌خواهیم $x$ دو رقمی باشد، پس داریم:

$$۱۰ \le ۸k + ۳ < ۱۰۰ \Rightarrow ۷ \le ۸k < ۹۷ \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} ۱ \le k \le ۱۲$$

پس ۱۲ مقدار برای $k$ و در نتیجه ۱۲ عدد طبیعی دو رقمی $x$ پیدا می‌شود.

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)*

---

۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

$$\left.\begin{array}{l} A \overset{۹}{\equiv} ۴ \overset{۹}{\equiv} -۱۴ \\ A \overset{۱۱}{\equiv} ۸ \overset{۱۱}{\equiv} -۱۴ \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{۹\times۱۱}{\equiv} -۱۴ \Rightarrow A \overset{۹۹}{\equiv} -۱۴$$

$$\Rightarrow \overline{baba} \overset{۹۹}{\equiv} -۱۴ \Rightarrow (a+۱۰b)+۱۰۰(a+۱۰b) \overset{۹۹}{\equiv} -۱۴$$

$$\xrightarrow{۱۰۰ \overset{۹۹}{\equiv} ۱} ۲(a+۱۰b) \overset{۹۹}{\equiv} -۱۴ \Rightarrow a+۱۰b \overset{۹۹}{\equiv} -۷$$

$$\Rightarrow \overline{ba} \overset{۹۹}{\equiv} -۷ \overset{۹۹}{\equiv} ۹۲ \Rightarrow \begin{cases} b = ۹ \\ a = ۲ \end{cases} \Rightarrow a.b = ۱۸$$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)*

---

۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنیم $(n^۲ + ۳n + ۱ , ۸n + ۵) = d$ باشد، در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid n^۲ + ۳n + ۱ \xrightarrow{\times ۸} d \mid ۸n^۲ + ۲۴n + ۸ \\ d \mid ۸n + ۵ \xrightarrow{\times n} d \mid ۸n^۲ + ۵n \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid ۱۹n + ۸$$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 19n+8 \xrightarrow{\times 8} d \mid 152n+64 \\ d \mid 8n+5 \xrightarrow{\times 19} d \mid 152n+95 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 31 \xrightarrow{d \neq 1} d = 31$$

$$8n+5 \overset{31}{\equiv} 0 \Rightarrow 8n \overset{31}{\equiv} -5 \overset{31}{\equiv} -5+3\times 31$$

$$\Rightarrow 8n \overset{31}{\equiv} 88 \xrightarrow[(8,31)=1]{+8} n \overset{31}{\equiv} 11 \Rightarrow n = 31k+11$$

به ازای $k=3$، کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی ممکن به دست می‌آید:

$$k=3 \Rightarrow n = 31\times 3+11 = 104 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 5$$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)*

---

۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا فلاح)*

می‌دانیم حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی، مضرب ۶ است، بنابراین داریم:

$$x^3-x = x(x^2-1) = (x-1)x(x+1) = 6q \Rightarrow x^3-x \overset{6}{\equiv} 0$$

$$x^3+x+2 \overset{6}{\equiv} 0 \Rightarrow (x^3-x)+(2x+2) \overset{6}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow 0+2x+2 \overset{6}{\equiv} 0 \Rightarrow 2(x+1) \overset{6}{\equiv} 0 \xrightarrow[(2,6)=2]{+2}$$

$$x+1 \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} -1 \Rightarrow x = 3k-1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$x$ بزرگ‌ترین عدد دو رقمی $= 3(33)-1 = 98$

$\Rightarrow$ مجموع ارقام $= 9+8 = 17$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)*

---

۳۸- **گزینهٔ «۲»** *(سوکند روشنی)*

اگر عددی بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر است. در نتیجه:

$$8+b+6+a+a \overset{9}{\equiv} 0$$

$$2a+b \overset{9}{\equiv} 4 \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=4 \\ \text{یا} \\ 2a+b=13 \end{cases}$$

$$\overline{8b6aa} \overset{11}{\equiv} a-a+6-b+8 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow b \overset{11}{\equiv} 14 \overset{11}{\equiv} 3 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+3=4 & \text{غ ق ق} \\ 2a+3=13 \Rightarrow a=5 \end{cases}$$

$$5x \overset{3}{\equiv} 1 \overset{3}{\equiv} 1+9 = 10 \xrightarrow[(3,5)=1]{+5} x \overset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow x = 3k+2$$

$$100 \le 3k+2 \le 999$$

$$98 \le 3k \le 997 \Rightarrow 33 \le k \le 332$$

$k$ تعداد $= 332-33+1 = 300$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)*

---

۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(سوکند روشنی)*

عدد $n!$ به ازای $n \ge 4$، بر ۸ بخش‌پذیر است، پس اگر عبارت سمت چپ را باز کنیم خواهیم داشت:

$$0!+2!+4!+\ldots \overset{8}{\equiv} 1+2+0+\ldots \overset{8}{\equiv} 3$$

از طرفی: $1402 \overset{8}{\equiv} 2$

در نتیجه: $3x \overset{8}{\equiv} 2-8 \overset{8}{\equiv} -6 \xrightarrow{+3} x \overset{8}{\equiv} -2$

$$\Rightarrow x = 8k-2 \xrightarrow{k=125} x = 998$$

مجموع ارقام: $9+9+8 = 26$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)*

---

۴۰- **گزینهٔ «۳»** *(سوکند روشنی)*

$$(n+30, 2n-7) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid n+30 \xrightarrow{\times 2} d \mid 2n+60 \\ d \mid 2n-7 \longrightarrow d \mid 2n-7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \mid 67 \Rightarrow \begin{cases} d=1 & \text{غ ق ق} \\ d=67 \end{cases}$$

شرط وجود جواب این معادله هم‌نهشتی به صورت زیر است:

$$(n+30, 2n-7) \mid 2a+1 \Rightarrow 67 \mid 2a+1 \Rightarrow 2a+1 \overset{67}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow 2a \overset{67}{\equiv} -1+67 = 66 \Rightarrow a \overset{67}{\equiv} 33 \Rightarrow a = 67k+33$$

$$100 \le 67k+33 \le 999$$

$$67 \le 67k \le 966$$

$$1 \le k \le 14$$

$k$ تعداد $= 14$

*(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)*

## آمار و احتمال

۴۱- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» به ازای $x=1$، هیچ $y$ای عضو اعداد طبیعی نمی‌توان یافت که در نامساوی صدق کند.

*(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)*

---

۴۲- **گزینهٔ «۱»** *(مریم مرسلی)*

نقیض گزارهٔ $p$ نادرست است، پس گزارهٔ $p$ و در نتیجه گزارهٔ $p\vee(q\wedge r)$ درست است. یک ترکیب دو شرطی تنها در صورتی درست است که دو گزارهٔ سازندهٔ آن دارای ارزش یکسان باشند، بنابراین گزارهٔ $q\Rightarrow(\sim p\wedge r)$ باید درست باشد. از طرفی $\sim p$ و در نتیجه $\sim p\wedge r$ نادرست هستند، پس لزوماً $q$ نیز باید نادرست باشد تا ترکیب شرطی به انتفای مقدم درست شود. حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»:

$$\sim(q\wedge r)\Leftrightarrow(r\Rightarrow p)\equiv\underbrace{\sim(F\wedge r)}_{T}\Leftrightarrow\underbrace{(r\Rightarrow T)}_{T}\equiv T$$

گزینهٔ «۲»:

$$(p\Rightarrow r)\vee q\equiv\underbrace{(T\Rightarrow r)}_{r}\vee F\equiv r$$

گزینهٔ «۳»:

$$(\sim r\Rightarrow q)\wedge p\equiv\underbrace{(\sim r\Rightarrow F)}_{r}\wedge T\equiv r$$

گزینهٔ «۴»:

$$(r\Leftrightarrow p)\Leftrightarrow(q\Leftrightarrow r)\equiv(r\Leftrightarrow T)\Leftrightarrow(F\Leftrightarrow r)$$
$$\equiv r\Leftrightarrow\sim r\equiv F$$

*(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۲)*

---

۴۳- **گزینهٔ «۲»** *(خرزانه خاکپاش)*

حالت‌های ممکن برای این افراز عبارتند از:

۱) یک زیرمجموعهٔ ۴ عضوی و یک زیرمجموعهٔ ۲ عضوی که تعداد اعضای این دسته برابر است با: $\binom{6}{2}=15$

۲) دو زیرمجموعهٔ ۳ عضوی که تعداد اعضای این دسته برابر است با:

$$\frac{\binom{6}{3}}{2!}=\frac{20}{2}=10$$

۳) سه زیرمجموعهٔ ۲ عضوی که تعداد اعضای این دسته برابر است با:

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{3!}=\frac{15\times6}{6}=15$$

بنابراین تعداد کل افرازها برابر $15+10+15=40$ است.

*(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحهٔ ۲۱)*

---

۴۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به هم‌ارزی $p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ و قوانین گزاره‌ها داریم:

$$(p\Leftrightarrow q)\wedge(\sim q\Rightarrow p)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\wedge(\sim q\Rightarrow p)$$
$$\equiv(\sim p\vee q)\wedge[(\sim q\vee p)\wedge(q\vee p)]$$
$$\equiv(\sim p\vee q)\wedge[\underbrace{(\sim q\wedge q)}_{F}\vee p)]$$
$$\equiv(\sim p\vee q)\wedge p\equiv\underbrace{(\sim p\wedge p)}_{F}\vee(q\wedge p)$$
$$\equiv p\wedge q$$

*(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۶ تا ۱۳)*

---

۴۵- **گزینهٔ «۴»** *(مریم مرسلی)*

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$M=(A\cap B)\cup[B'\cap(A\cap B)']'$$
$$=(A\cap B)\cup[\underbrace{B'\cap(A'\cup B')}_{\text{قانون جذب}}]'$$
$$=(A\cap B)\cup(B')'=\underbrace{(A\cap B)\cup B}_{\text{قانون جذب}}=B$$

$$N=\underbrace{[A\cap(A\cup B)]}_{\text{قانون جذب}}-\underbrace{[A'\cup(A'\cap B)]}_{\text{قانون جذب}}$$
$$=A-A'=A\cap A=A$$

بنابراین همواره داریم: $M-N=B-A$

*(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)*

---

۴۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم اگر $A\times B=B\times A$ و $A$ و $B$ دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، آن‌گاه $A=B$ است.

باتوجه به این‌که عدد ۱ در مجموعهٔ $B$ وجود دارد، حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

حالت اول: $a=1$ باشد. در این صورت داریم:

$$A=B\Rightarrow\{1,b,c,2\}=\{3,b-1,2c,1\}$$
$$b=3\Rightarrow\{1,3,c,2\}=\{3,2,2c,1\}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}c=0\\c=1\end{cases}\Rightarrow a+b+c=4\text{ یا }5$$

توجه: به ازای $c=۲\ ,\ ۳$، دو مجموعهٔ $A$ و $B$ مساوی نیستند.

حالت دوم: $b=۱$ باشد. در این صورت داریم:

$$A=B\Rightarrow\{a,۱,c,۲\}=\{a+۲,۰,۲c,۱\}$$

$$a=۰\Rightarrow\{۰,۱,c,۲\}=\{۲,۰,۲c,۱\}\Rightarrow\begin{cases}c=۰\\c=۱\end{cases}\Rightarrow a+b+c=۱\text{ یا }۲$$

به ازای $c=۰$، همان حالت $a=۰$ به‌دست می‌آید که تکراری است.

حالت سوم: $c=۱$ باشد. در این صورت یکی از دو حالت تکراری $\begin{cases}a=۰\\b=۱\end{cases}$

یا $\begin{cases}a=۱\\b=۳\end{cases}$ به‌دست می‌آید.

بنابراین ۴ مقدار متفاوت برای $a+b+c$ وجود دارد.

*(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)*

---

۴۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

دو حالت متفاوت برای این زیرمجموعه‌ها وجود دارد.

اول: شامل عدد ۸ باشند. در این صورت حاصل‌ضرب اعضای چنین مجموعه‌هایی قطعاً بر ۸ بخش‌پذیر است. با توجه به این‌که سایر اعداد طبیعی یک رقمی می‌توانند در این زیرمجموعه‌ها باشند یا نباشند، تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با: $۲^۸=۲۵۶$

دوم: فاقد عدد ۸ باشند. در این صورت چنین زیرمجموعه‌ای حتماً باید شامل عدد ۴ باشد و از میان دو عدد ۲ و ۶ نیز حداقل یکی را داشته باشد، یعنی برای دو عدد ۲ و ۶، سه حالت متفاوت وجود دارد (یا هر دو در زیرمجموعه هستند، یا فقط ۲ عضو زیرمجموعه است و یا فقط ۶ عضو زیرمجموعه است.)

هر کدام از اعداد فرد نیز می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند، پس تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با: $۳\times۲^۵=۹۶$

پس تعداد کل این زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$۲۵۶+۹۶=۳۵۲$$

*(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)*

---

۴۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $n$ عضوی برابر $۲^n$ است، پس داریم:

$$\frac{۲^{n(B)}}{۲^{n(A-B)}}=۸\Rightarrow ۲^{n(B)-n(A-B)}=۲^۳\Rightarrow n(B)-n(A-B)=۳$$

$$\Rightarrow n(B)=n(A-B)+۳$$

$$n(A\cup B)=n(B)+\underbrace{n(A)-n(A\cap B)}_{n(A-B)}$$

$$\Rightarrow ۷=n(A-B)+۳+n(A-B)$$

$$\Rightarrow ۲n(A-B)=۴\Rightarrow n(A-B)=۲$$

از طرفی $(A-B)\subseteq A$، پس مجموعهٔ $A$ حداقل ۲ عضو و در نتیجه حداقل ۴ زیرمجموعه دارد. چون تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است، پس مجموعهٔ $A$ حداقل ۳ زیرمجموعه مانند $C$ دارد به‌طوری که $C\not\subseteq B$.

دقت کنید که این دو عضو مجموعهٔ $A$ قطعاً به مجموعهٔ $B$ تعلق ندارند. (چون اعضای مجموعهٔ $A-B$ هستند.)

*(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)*

---

۴۹- **گزینهٔ «۲»** *(هادی فولادی)*

می‌دانیم اگر $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B'\subseteq A'$، پس داریم:

$$A'\subseteq B'\subseteq C'\Rightarrow (C')'\subseteq (B')'\subseteq (A')'$$

$$\Rightarrow C\subseteq B\subseteq A\Rightarrow\begin{cases}B\cup C=B\\B\cap C=C\end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$\left.\begin{matrix}A\subseteq A\\B'\subseteq C'\end{matrix}\right\}\Rightarrow (A\cap B')\subseteq (A\cap C')\Rightarrow (A-B)\subseteq (A-C)$$

پس عبارت صورت سؤال برابر است با:

$$(A-B)\cap(A-C)=A-B$$

*(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)*

---

۵۰- **گزینهٔ «۲»** *(فرید غلامی)*

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$(A\cup B)-(B-A')=\varnothing\Rightarrow (A\cup B)-(B\cap A)=\varnothing$$

$$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq (A\cap B)$$

از طرفی $(A\cap B)\subseteq (A\cup B)$، بنابراین داریم:

$$A\cup B=A\cap B\Rightarrow A=B\Rightarrow\begin{cases}A-B=B-A=\varnothing\\A\cap B=A=B\neq\varnothing\end{cases}$$

*(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)*

## آمار و احتمال

۵۱- **گزینهٔ «۴»** *(اخشین خاصه‌خان)*

مجموع زوایا در نمودار دایره‌ای برابر $۳۶۰^\circ$ است، بنابراین:

$$\frac{۹}{۸}\alpha-۱^\circ+\frac{۵}{۴}\alpha+۵^\circ+\frac{۷}{۶}\alpha+۱^\circ+\frac{۳}{۲}\alpha-۸^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow(\frac{۹}{۸}+\frac{۵}{۴}+\frac{۷}{۶}+\frac{۳}{۲})\alpha-۳^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow\frac{۱۲۱}{۲۴}\alpha=۳۶۳^\circ\Rightarrow\alpha=۷۲^\circ$$

بنابراین زوایا مطابق جدول زیر خواهد بود:

| کارشناسی‌ارشد | کارشناسی | کاردانی | دیپلم | مدرک |
|---|---|---|---|---|
| ۱۰۰ | ۸۵ | ۹۵ | ۸۰ | زاویه (درجه) |

پس تعداد افراد دارای مدرک کارشناسی ارشد بیشتر از سایر گروه‌ها بوده و مُد داده‌ها مربوط به این مدرک است.

*(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲ و ۸۸)*

---

۵۲- **گزینهٔ «۳»** *(مریم مرسلی)*

ضریب تغییرات داده‌های $y_۱ , y_۲ , ... , y_m$ برابر صفر است، پس انحراف معیار این داده‌ها صفر است و در نتیجه این داده‌ها برابر یکدیگرند. از طرفی دامنهٔ تغییرات داده‌های $x_۱ , x_۲ , ... , x_n$ برابر صفر است، پس این داده‌ها نیز همگی برابر یکدیگرند.

فرض کنید تمام $x_i$ها برابر $a$ و تمام $y_i$ها برابر $b$ باشند. در این صورت اگر داده‌ها را به ترتیب صعودی مرتب کنیم، یکی از دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

۱) $\underbrace{a , a , ... , a}_{n} , \underbrace{b , ... , b}_{m}$

۲) $\underbrace{b , b , ... , b}_{m} , \underbrace{a , ... , a}_{n}$

چون $m>n$، مُد داده‌ها در هر دو حالت برابر $b$ است. اگر $m+n$ عددی فرد باشد، آن‌گاه دادهٔ وسط برابر میانه است که این داده قطعاً برابر $b$ است. اگر $m+n$ عددی زوج باشد، میانهٔ داده‌ها برابر میانگین دو دادهٔ وسط است که چون در این حالت تعداد داده‌های $b$ حداقل ۲ واحد بیشتر از داده‌های $a$ است، پس هر دو دادهٔ وسط و در نتیجه میانه برابر $b$ است. بنابراین اختلاف مُد و میانه همواره برابر صفر است.

*(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۹۸)*

---

۵۳- **گزینهٔ «۳»** *(سوکند روشنی)*

$$\frac{۴۵^\circ}{۳۶۰^\circ}=\frac{A}{۸۰}\Rightarrow A=۱۰\Rightarrow x-۲=۱۰\Rightarrow x=۱۲$$

$$\text{مجموع فراوانی‌ها}=۲a+۱۵+۱۰+۳a=۸۰\Rightarrow ۵a=۵۵\Rightarrow a=۱۱$$

$$\alpha=\frac{۲a}{۸۰}\times۳۶۰^\circ=\frac{۲۲}{۸۰}\times۳۶۰^\circ=۹۹^\circ \text{ (دستهٔ اول)}$$

*(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۶ تا ۸۲)*

---

۵۴- **گزینهٔ «۱»** *(فرزاد جوادی)*

ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$$

می‌دانیم اگر به همهٔ داده‌ها مقدار ثابتی اضافه شود به میانگین هم همان مقدار اضافه می‌شود اما انحراف معیار تغییر نمی‌کند. پس:

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\bar{x}+۲۸ \text{ و } \sigma_{\text{جدید}}=\sigma_{\text{قدیم}}$$

$$CV_{\text{قدیم}}=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۳/۲}{۴}=۰/۸$$

$$CV_{\text{جدید}}=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۳/۲}{\bar{x}+۲۸}=\frac{۳/۲}{۴+۲۸}=\frac{۳/۲}{۳۲}=۰/۱$$

با مقایسهٔ $CV_{\text{قدیم}}$ و $CV_{\text{جدید}}$ معلوم می‌شود که ضریب تغییرات داده‌های جدید $\frac{۱}{۸}$ ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود.

*(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۰)*

---

۵۵- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

اگر فرض کنیم میانگین داده‌ها $\bar{x}$ باشد، در این صورت عددی که بیشترین انحراف از $\bar{x}$ را دارد، همان عددی است که با حذف آن، میانگین داده‌ها بیشترین تغییرات را دارد. این عدد یا $min$ داده‌ها یا $max$ داده‌هاست. با توجه به این که ۲۷ بزرگترین داده است، طبق فرض نتیجه می‌گیریم که ۱۵ کوچک‌ترین داده خواهد بود. از آن‌جا که $\frac{۱۵+۲۷}{۲}=۲۱$، پس باید میانگین داده‌ها از ۲۱ بیشتر باشد تا با حذف عدد ۱۵، بیشترین تغییرات حاصل شود، یعنی:

$$\frac{۱۵+۲۰+۲۳+۲۷+a}{۵}>۲۱\Rightarrow ۸۵+a>۱۰۵\Rightarrow a>۲۰$$

از طرفی $a<۲۷$ و همچنین داده‌ها متمایز است، پس مقادیر صحیح قابل قبول برای $a$ عبارتند از:

۲۱,۲۲,۲۴,۲۵,۲۶ (پنج مقدار)

*(آمار و احتمال - آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶ و ۸۹ تا ۹۱)*

---

۵۶- **گزینهٔ «۴»** *(سوکند روشنی)*

می‌دانیم اگر داده‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند؛

$$\text{میانگین } \bar{x}=\frac{\text{داده آخر}+\text{داده اول}}{۲}$$

$$\text{واریانس } \sigma^۲=\frac{n^۲-۱}{۱۲}.d^۲$$

$$۴,۷,۱۰,\ldots,۱۲۱ \Rightarrow n=\frac{۱۲۱-۴}{۳}+۱=۴۰$$

$$\sigma^۲=\frac{۴۰^۲-۱}{۱۲}\times ۹=۱۱۹۹/۲۵$$

$$\bar{x}=\frac{۴+۱۲۱}{۲}=۶۲/۵$$

$$\Rightarrow ۱۱۹۹/۲۵-۶۲/۵=۱۱۳۶/۷۵$$

(آمار و احتمال – آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶ و ۹۳ تا ۹۵)

---

۵۷- **گزینهٔ «۲»** (سوکند روشنی)

در ۱۳ دادهٔ آماری، میانه، دادهٔ هفتم بوده و چارک‌های اول و سوم به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$Q_۱=\frac{x_۳+x_۴}{۲}$$

$$Q_۳=\frac{x_{۱۰}+x_{۱۱}}{۲}$$

در نتیجه نمودار جعبه‌ای به صورت زیر رسم می‌شود؛

$$x_۱,x_۲,x_۳,\boxed{x_۴,x_۵,x_۶,\underset{\text{میانه } Q_۲=x_۷}{\underset{\downarrow}{x_۷}},x_۸,x_۹,x_{۱۰}},x_{۱۱},x_{۱۲},x_{۱۳}$$

میانگین کل $\bar{x}=\dfrac{۳\times\frac{۷}{۳}+۷\times۵+۳\bar{x}'}{۱۳}$

$$\Rightarrow ۱۳\bar{x}=۴۲+۳\bar{x}' \xrightarrow{\bar{x}'=۲\bar{x}} ۱۳\bar{x}=۴۲+۶\bar{x}$$

$$\Rightarrow ۷\bar{x}=۴۲ \Rightarrow \bar{x}=۶$$

مجموع کل داده‌ها: $۶\times۱۳=۷۸$

(آمار و احتمال – آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۹۷ و ۹۸)

---

۵۸- **گزینهٔ «۱»** (سوکند روشنی)

$$\sigma_۱^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{۲۰}(x_i-\bar{x})^۲}{۲۰} \Rightarrow (۲\sqrt{۲})^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{۲۰}(x_i-\bar{x})^۲}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=۱}^{۲۰}(x_i-\bar{x})^۲=۱۶۰$$

$$\sum_{i=۱}^{۱۷}(x_i-\bar{x})^۲$$

$$=۱۶۰-\left[(۱۳-۱۲)^۲+(۱۳-۱۲)^۲+(۱۰-۱۲)^۲\right]=۱۵۴$$

$$\Rightarrow \sigma_۲^۲=\frac{۱۵۴}{۱۷}=۹/۰۶$$

دقت کنید که میانگین ۳ دادهٔ ۱۰، ۱۳ و ۱۳، برابر ۱۲ است و با حذف این داده‌ها، میانگین کل داده‌ها تغییری نمی‌کند.

(آمار و احتمال – آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶ و ۹۳ تا ۹۶)

---

۵۹- **گزینهٔ «۲»** (مهرداد ملوندی)

ابتدا میانگین محیط مربع‌ها را برابر ۲۶ واحد قرار می‌دهیم:

$$\frac{۴\times۳+۴a+۴(a+۲)+۴\times۱۰}{۴}=۲۶$$

$$\Rightarrow ۳+(۲a+۲)+۱۰=۲۶ \Rightarrow a=\frac{۱۱}{۲}$$

میانگین مساحت‌ها برابر است با:

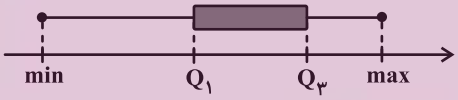
$$\frac{۳^۲+(\frac{۱۱}{۲})^۲+(\frac{۱۱}{۲}+۲)^۲+۱۰^۲}{۴}=\frac{۹+\frac{۱۲۱}{۴}+\frac{۲۲۵}{۴}+۱۰۰}{۴}=\frac{۷۸۲}{۱۶}$$

با توجه به $\frac{۸۰۰}{۱۶}=۵۰$ نتیجه می‌گیریم که میانگین مساحت مربع‌ها از ۵۰ واحد مربع، به اندازهٔ $\frac{۱۸}{۱۶}=\frac{۹}{۸}$، کمتر است.

(آمار و احتمال – آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

---

۶۰- **گزینهٔ «۳»** (فرزاد بوادی)



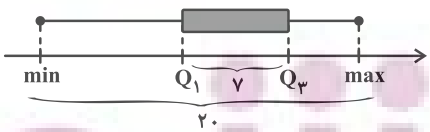

می‌دانیم منظور از دامنهٔ میان چارکی همان اختلاف $Q_۱$ از $Q_۳$ است (یعنی طول جعبه مستطیلی) که آن را با IQR نشان می‌دهند.

$$IQR=Q_۳-Q_۱=۷$$

همچنین می‌دانیم دامنهٔ تغییرات داده‌ها، اختلاف min از max می‌باشد.

یعنی: $R=max-min=۲۰$

پس شکل زیر را خواهیم داشت:




بنابراین مجموع طول دنباله‌های چپ و راست برابر است با: $۲۰-۷=۱۳$

اگر طول دنباله سمت راست را x درنظر بگیریم، طول دنبالهٔ چپ، $۳x$ می‌شود. پس:

$$۳x+x=۱۳ \Rightarrow ۴x=۱۳ \Rightarrow x=\frac{۱۳}{۴}=۳/۲۵$$

(آمار و احتمال – آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

## فیزیک ۳

۶۱- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین برادران)*

نیرویی که از طرف شخص به جعبه وارد می‌شود، به سمت غرب است و نیرویی که از طرف زمین به جعبه وارد می‌شود به‌سمت پایین است.

بنابراین مطابق قانون سوم نیوتون واکنش این دو نیرو از طرف جعبه به شخص در جهت شرق و از طرف جعبه به زمین به‌سمت بالا است.

*(فیزیک ۳- صفحهٔ ۳۴)*

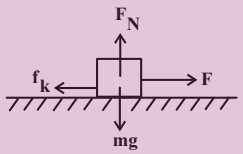
---

۶۲- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی کیوانلو)*

در ابتدا با توجه به نیروی اصطکاک ایستایی، بررسی می‌کنیم که آیا جعبه شروع به حرکت می‌کند یا خیر.

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[m=20kg\ ,\ g=10\frac{m}{s^2}]{F_N=mg\ ,\ \mu_s=0/5} f_{s,max} = 100N$$

با توجه به این‌که فرد با نیروی $140N$ جعبه را می‌کشد و حداکثر نیروی اصطکاک ایستایی $100N$ است، پس جسم شروع به حرکت می‌کند (از اینجا به بعد نیروی اصطکاک جنبشی داریم)




$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow[m=20kg\ ,\ g=10\frac{m}{s^2}]{F_N=mg\ ,\ \mu_k=0/4} f_k = (0/4)(20)(10) = 80N$$

$$F_{net_x} = F - f_k = ma \xrightarrow[m=20kg]{F=140N\ ,\ f_k=80N} 140 - 80 = 20a$$

$$\Rightarrow a = 3\frac{m}{s^2}$$

*(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۳)*

---

۶۳- **گزینهٔ «۲»** *(پژمان بردبار)*

گزاره‌های الف، ب و پ درست و گزاره‌های ت و ث نادرست‌اند.

بررسی گزاره‌ها:

الف) با توجه به قانون دوم نیوتون بزرگ نیروی خالص وارد بر متحرک با بزرگی شتاب حرکت متناسب است. بنابراین با افزایش بزرگی نیروی خالص، بزرگی شتاب جسم افزایش می‌یابد و بالعکس. (درست)

ب) با توجه به رابطهٔ $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$، در حرکت با شتاب ثابت، بردار تغییرات سرعت با بردار شتاب هم‌جهت است. از طرفی چون طبق قانون دوم نیوتون $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$، بنابراین بردار نیروی خالص با بردار شتاب و بنابراین با بردار تغییرات سرعت هم جهت است (درست).

پ) اگر اثر نیروهای وارد بر متحرک متوازن شوند، برایند نیروهای وارد بر آن برابر صفر می‌شود و مطابق قانون اول نیوتون حرکت جسم با سرعت ثابت است (درست).

ت) اگر بزرگی نیروی خالص وارد بر متحرک کاهش یابد، بزرگی شتاب آن نیز کاهش می‌یابد در صورتی که حرکت متحرک تند شونده باشد و با کاهش بزرگی نیروی خالص وارد بر متحرک جهت آن تغییر نکند، در این صورت تندی متحرک افزایش می‌یابد. (نادرست)

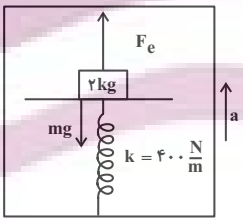
ث) این گزاره زمانی صحیح است که بردار نیروی خالص و بردار سرعت هم‌جهت باشند. در این صورت حرکت تند شونده است و با عکس شدن جهت نیروی خالص نوع حرکت کندشونده می‌شود. اما اگر در ابتدا بردار نیروی خالص و بردار سرعت خلاف جهت باشند، در این صورت با عکس شدن جهت نیروی خالص، نوع حرکت تند شونده شده و تندی متحرک افزایش می‌یابد. (نادرست)

*(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)*

---

۶۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمدجواد سورچی)*

نیروهای وارد بر جسم را مشخص می‌کنیم. چون حرکت جسم شتاب‌دار است، از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم:




$$F_{Net} = ma \rightarrow F_e - mg = ma$$

$$\xrightarrow[a=2\frac{m}{s^2}]{g=10\frac{N}{kg},m=2kg} F_e - 20 = 2\times 2 \rightarrow F_e = 24N$$

$$F_e = kx$$

$$\xrightarrow{F_e=24N,k=400\frac{N}{m}} 24 = 400\times\Delta x$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{100}m = 6cm$$

پس طول فنر $6cm$ کاهش می‌یابد:

$$L_2 - L_1 = -6 \xrightarrow{L_1=30cm} L_2 = 30 - 6$$

$$L_2 = 24cm$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۴)

---

۶۵- **گزینهٔ «۲»** (پژمان بردبار)

با توجه به این‌که گفته شده جسم در حالت تعادل است، داریم:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_2 \quad (1)$$

$$\vec{F}'_{net} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_3 = ma \xrightarrow[\vec{F}'_3=-\frac{1}{3}\vec{F}_3]{\vec{F}'_1=-\frac{1}{3}\vec{F}_1}$$

$$\vec{F}'_{net} = -\frac{1}{3}\vec{F}_1 - \frac{1}{3}\vec{F}_3 + \vec{F}_3 = ma$$

$$-\frac{1}{3}(\vec{F}_1 + \vec{F}_3) + F_2 = ma \xrightarrow{(1)} -\frac{1}{3}(-\vec{F}_2) + \vec{F}_2 = ma$$

$$\frac{1}{3}\vec{F}_2 + \vec{F}_2 = ma \Rightarrow \frac{4\vec{F}_2}{3} = ma \xrightarrow{F_2=12N}$$

$$F'_{net} = \frac{4}{3}\times 12 = 16N$$

$$F'_{net} = ma \xrightarrow[F'_{net}=16N]{m=2kg} 16 = 2\times a \Rightarrow a = 8\frac{m}{s^2}$$

سرعت جسم پس از ۵ ثانیه برابر است با:

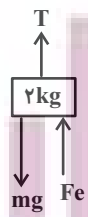
$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0=0]{a=8\frac{m}{s^2},\ t=5s} v = 8\times 5 = 40\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

---

۶۶- **گزینهٔ «۲»** (آرش یوسفی)

چون فنر فشرده شده است، نیرویی که از طرف فنر به جسم وارد می‌شود به سمت بالا است. با مشخص کردن جهت نیروهای وارد بر جسم، نیروی کشش نخ را به دست می‌آوریم.




$$T + F_e = mg \xrightarrow{F_e=k|\Delta\ell|} T + k\Delta\ell = mg$$

$$\xrightarrow[g=10\frac{N}{kg},m=2kg]{k=300\frac{N}{m},|\Delta\ell|=40-34=6cm=0/06m} T = 20 - 18 = 2N$$

چون نخ بدون جرم است بنابراین نیروی کشش نخ در سراسر طول آن یکسان است. از طرفی نیروی وارد بر نخ همواره در جهتی است که نخ در حال کشش باشد.

عکس‌العمل نیروی وارد بر نخ از طرف سقف، نیرویی است که نخ به سقف به طرف پایین وارد می‌کند. $\vec{F}_1 = (-2N)\vec{j}$

عکس‌العمل نیرویی که از طرف فنر به جسم وارد می‌شود، نیرویی است که از طرف جسم به فنر به سمت پایین وارد می‌شود. $\vec{F}_2 = (-18N)\vec{j}$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۶)

---

۶۷- **گزینهٔ «۳»** (محمدجواد سورچی)

با توجه به این‌که جهت شتاب گفته نشده بنابراین هر دو حالت (رو به بالا یا رو به پایین) را در نظر می‌گیریم.

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ زیرا عدد ترازو ممکن است $160N$ بیشتر یا $160N$ کمتر از وزن شخص باشد.

$$F_N = m(g \pm a) \Rightarrow F_N = mg \pm ma$$

$$\Rightarrow F_N - mg = \pm ma = \pm 80(2) = \pm 160N$$

ب) درست؛ با توجه به مقدار شتاب، در هر ثانیه مقدار تندی $2\frac{m}{s}$ کم یا زیاد می‌شود (تغییر می‌کند).

پ) نادرست؛ زیرا اگر جهت شتاب رو به بالا باشد، کابل آسانسور مقدار بیشتری از وزن اتاقک آسانسور و اجسام داخل آن را تحمل می‌کند.

ت) درست؛ اگر جهت شتاب رو به بالا باشد، نیروسنج $24N$ را نشان می‌دهد و اگر جهت شتاب رو به پایین باشد، نیروسنج $16N$ را نشان می‌دهد. پس در هر صورت، $4N$ با وزن جسم $(mg = 20N)$ تفاوت دارد.

$$\vec{a} \Rightarrow F_{\text{نیروسنج}} = m(g+a) \xrightarrow[a=2\frac{m}{s^2},\ g=10\frac{m}{s^2}]{m=2kg}$$ رو به بالا

$$F_{\text{نیروسنج}} = 2\times(10+2) = 24N$$

$$\vec{a} \Rightarrow F_{\text{نیروسنج}} = m(g-a) \xrightarrow[a=2\frac{m}{s^2},\ g=10\frac{m}{s^2}]{m=2kg}$$ رو به پایین

$$F_{\text{نیروسنج}} = 2\times(10-2) = 16N$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۹)

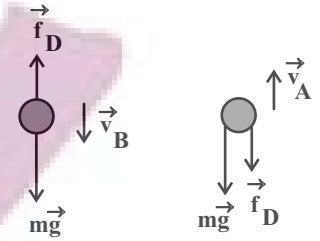
---

۶۸- **گزینهٔ «۴»** (محمدجواد سورچی)

نیروی مقاومت هوا، در خلاف جهت حرکت جسم است.

با توجه به جهت حرکت گوی‌ها داریم:

(چون گوی‌ها مشابه و تندی یکسان دارند، بزرگی نیروی $f_D$ برای هر دو یکسان است.)



$$F_{net} = ma \xrightarrow{m_A = m_B} \frac{F_{netB}}{F_{netA}} = \frac{a_B}{a_A} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{mg - f_D}{mg + f_D} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3mg - 3f_D = 2mg + 2f_D$$

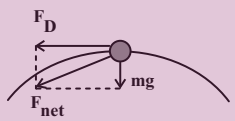
$$\Rightarrow mg = 5f_D \Rightarrow f_D = \frac{1}{5}mg$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

---

۶۹- **گزینهٔ «۴»** (آرش یوسفی)

در نقطهٔ اوج به گلوله دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می‌شود. برایند این نیروها $F_{net}$ است. چون در نقطهٔ اوج، جهت سرعت جسم، افقی است، جهت نیروی مقاومت هوا نیز، افقی است.



$$F_{net} = ma = 2 \times 13 = 26N$$

$$mg = 2 \times 10 = 20N$$

$$F_{net} = \sqrt{(F_D)^2 + (mg)^2}$$

$$F_{net}^2 = F_D^2 + mg^2 \xrightarrow[m=2kg,\ g=10\frac{N}{kg}]{F_{net}=26N}$$

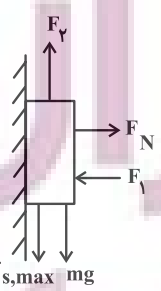
$$F_D = \sqrt{26^2 - 20^2} = \sqrt{276}N = 2\sqrt{69}N$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

---

۷۰- **گزینهٔ «۴»** (مجتبی نکوئیان)

چون جسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا است، بنابراین نیروی اصطکاک از نوع ایستایی بیشینه و به سمت پایین است. در این حالت برایند نیروهای وارد بر جسم برابر صفر است.



$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F_2 = f_{s,max} + mg$$

$$\xrightarrow[F_2=25N\ ,\ m=1/5kg]{g=10\frac{N}{kg}} 25 = f_{s,max} + (1/5)(10)$$

$$\Rightarrow f_{s,max} = 10N$$

در حالت دوم که نیروی $F_2$ حذف می‌شود، چون $mg > f_{s,max}$ است، جسم با شتاب ثابت به سمت پایین شروع به حرکت می‌کند. در این حالت اصطکاک از نوع جنبشی است $(f_k < f_{s,max})$. بنابراین نیروی سطح وارد بر جسم کاهش می‌یابد، زیرا:

$$R_1 = \sqrt{f_{s,max}^2 + F_1^2}$$

$$R_2 = \sqrt{f_k^2 + F_1^2}$$

$$\xrightarrow[\mu_s > \mu_k]{f_{s,max} > f_k} R_1 > R_2$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۳)

---

۷۱- **گزینهٔ «۳»** (شیلا شیرزادی)

چون جسم با سرعت ثابت در حال حرکت است، مطابق قانون اول نیوتون برایند نیروهای وارد بر آن صفر است. با نوشتن برآیند نیروهای وارد بر جسم در دو راستای $x$ و $y$ داریم:

(در اینجا طبق قانون سوم نیوتون اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ با اندازهٔ نیروی کشسانی $\vec{F_e}$ برابر است.)

$$F_{net_y} = 0 \rightarrow F_N = mg \xrightarrow[g=10\frac{N}{kg}]{m=5kg} F_N = 50N$$

$$F_{net_x} = 0 \rightarrow F_e - f_k = 0 \rightarrow F_e = f_k$$

$$kx = \mu_k F_N \rightarrow k = \frac{\mu_k F_N}{x} \xrightarrow[x=5cm]{\mu_k=0/2,\ F_N=50N} k = \frac{0/2 \times 50}{5} = 2\frac{N}{cm}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۴)

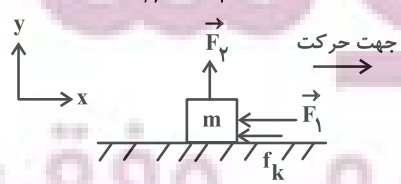
---

۷۲- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین برادران)

چون جسم با تندی ثابت روی خط راست در حال حرکت است، برایند نیروهای وارد بر آن برابر صفر می‌باشد.

$$F_{net_x} = 0 \Rightarrow F_1 = \mu_k F_N \xrightarrow[F_1=F_2,\ mg=W]{F_N=F_2+mg} F_1 = \mu_k (F_1 + w)$$

$$F_1 = 0/4(F_1 + W) \Rightarrow F_1 = \frac{0/4}{0/6}W = \frac{2}{3}W$$



وقتی جهت نیروهای $F_1$ و $F_2$ عوض شود، حرکت جسم شتاب‌دار می‌شود. با نوشتن قانون دوم نیوتون در این حالت داریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow -F_1-f'_k=ma\xrightarrow[F'_N=W-F_2]{F_k=\mu_k F'_N}-F_1-\mu_k(W-F_2)=ma$$

$$\xrightarrow[\mu_k=0/4]{F_2=F_1=\frac{2}{3}W}-\frac{2W}{3}-0/4(W-\frac{2}{3}W)=ma$$

$$W(-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{4}{15})=ma\Rightarrow mg(\frac{-10-6+4}{15})=ma$$

$$\Rightarrow a=\frac{-12}{15}g=\frac{-4}{5}g\xrightarrow{g=10\frac{m}{s^2}}a=-8\frac{m}{s^2}$$

در ابتدا جسم به سمت راست در حال حرکت است. بنابراین با نوشتن معادلهٔ سرعت – زمان داریم:

$$v=at+v_0\xrightarrow[v_0=20\frac{m}{s}]{a=-8\frac{m}{s^2}}v=-8t+20\xrightarrow{t=2s}v=4\frac{m}{s}$$

*(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۳)*

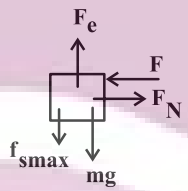
---

۷۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمدجواد سورچی)*

ابتدا نیروی کشسانی فنر را بدست می‌آوریم:

$$F_e=kx\Rightarrow F_e=2\times10^3\times(0/36-0/32)=2\times10^3\times0/04=80N$$

برای اینکه با حداقل نیروی $F$، وزنه در حال تعادل باشد، باید در آستانهٔ لغزش به سمت بالا قرار بگیرد، لذا می‌توان نوشت:




$$F_{net_y}=0\rightarrow F_e=mg+f_{s,max}\xrightarrow[m=6kg,\ g=10\frac{N}{kg}]{F_e=80N}$$

$$80=(6\times10)+f_{s,max}\Rightarrow f_{s,max}=20N\quad(1)$$

$$F_{net_x}=0\rightarrow F=F_N\quad(2)$$

$$f_{s,max}=\mu_S F_N\xrightarrow[\mu_S=0/8]{(1)}20=0/8\times F_N\rightarrow F_N=25N\xrightarrow{(2)}F=25N$$

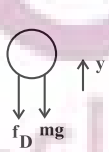
*(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۴)*

---

۷۴- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به نمودار شتاب- زمان و با فرض جهت مثبت حرکت به سمت بالا داریم:

مسیر رفت :




$$F_{net_1}=ma\Rightarrow -mg-f_D=ma_1$$

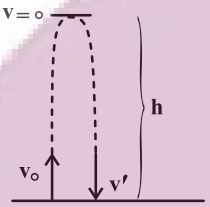
$$\xrightarrow[g=10\frac{N}{kg},\ a_1=-15\frac{m}{s^2}]{m=0/2kg}-(0/2)(10)-f_D=(0/2)(-15)$$

$$\Rightarrow F_D=1(N)$$

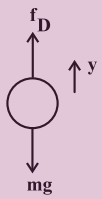
با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت و در راستای قائم می‌توان نوشت:

$$v^2-v_0^2=2a_1\Delta y_1\xrightarrow[a_1=-15\frac{m}{s^2},\ \Delta y_1=h]{v=0,\ v_0=30\frac{m}{s}}$$

$$0-30^2=2(-15)h\Rightarrow h=30m$$




مسیر برگشت :




$$F_{net_2}=ma_2\Rightarrow f_D-mg=ma_2$$

$$\xrightarrow[g=10\frac{N}{kg}]{f_D=1N,\ m=0/2kg}1-(0/2)(10)=0/2a_2$$

$$\Rightarrow a_2=-5\frac{m}{s^2}$$

و در نهایت با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه جایی در حرکت با شتاب ثابت و در راستای قائم داریم:

$$v'^2-v^2=2a_2\Delta y_2\xrightarrow[\Delta y_2=-h=-30m]{v=0,\ a_2=-5\frac{m}{s^2}}v'^2=2(-5)(-30)=300$$

$$\Rightarrow|v'|=10\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

*(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۸ و ۳۰ تا ۳۷)*

---

۷۵- **گزینهٔ «۱»** *(کامران ابراهیمی)*

در بازهٔ زمانی (۰,۴) ثانیه، نیروی عمودی سطح ($F_N=720N$) از وزن شخص ($mg=600N$) بیشتر است پس آسانسور در این بازهٔ زمانی تند شونده روبه بالا در حرکت است و داریم:

$$F_{N_1}-mg=ma_1\rightarrow720-600=60a_1\rightarrow a_1=2(\frac{m}{s^2})$$

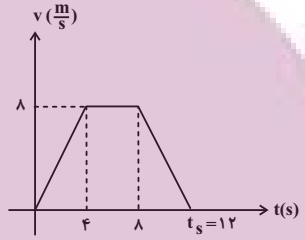
در بازهٔ زمانی (۴،۸) ثانیه $F_N = mg$ بوده و آسانسور با سرعت ثابت v بالا می‌رود:

$$v = v_\circ + a_1 t \xrightarrow[t=4s, v_\circ=\circ]{a_1=2\frac{m}{s^2}} v = \circ + (2)(4) \to v = 8(\frac{m}{s})$$

از لحظهٔ $t = 8s$ به بعد، $F_{N_3} < mg$ بوده و حرکت آسانسور کند شونده روبه‌بالا است تا متوقف شود و داریم:

$$F_{N_3} - mg = ma_3 \to 480 - 600 = 60a_3 \to a_3 = -2(\frac{m}{s^2})$$

با اطلاعات فوق نمودار سرعت – زمان حرکت آسانسور را رسم می‌کنیم. داریم:




با توجه به اینکه از $t = 8s$ به‌بعد شیب نمودار ۲− می‌باشد، پس $t_s = 12s$ خواهد بود یعنی آسانسور ۱۲s پس از شروع حرکت متوقف می‌شود مسافت طی‌شده توسط آسانسور در این مدت نیز برابر سطح زیر نمودار سرعت – زمان است:

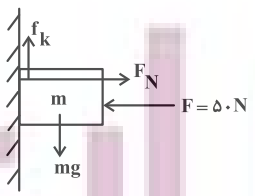
$$L = S_{V-t\,\text{زیرنمودار}} = \frac{(4+12)\times 8}{2} = \boxed{L = 64(m)}$$

*(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۹)*

---

۷۶- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی نکوئیان)*

در بازهٔ زمانی صفر تا ۶s، حرکت جسم با سرعت ثابت به طرف پایین است. بنابراین مطابق با قانون اول نیوتون، برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است.




$$F_{netx} = \circ \Rightarrow F = F_N = 50N$$

$$F_{nety} = \circ \Rightarrow mg = f_k = \mu_k F_N$$

$$\xrightarrow[F_N=50N]{m=2kg\ ,\ g=10\frac{N}{kg}} 20 = \mu_k(50) \Rightarrow \mu_k = \circ/4$$

اگر جهت رو به پایین را جهت مثبت محور y در نظر بگیریم، داریم:

$$\Delta y = v\Delta t \xrightarrow[\Delta t=6s]{v=5\frac{m}{s}} \Delta y = 5(6) = 30m$$

در لحظهٔ $t = 6s$، با افزایش ۱۰ نیوتونی نیروی F، اندازهٔ نیروی اصطکاک افزایش می‌یابد. پس:

$$F'_{netx} = \circ \Rightarrow F' = F'_N = 60N$$

$$f'_k = \mu_k F'_N \xrightarrow[F'_N=60N]{\mu_k=\circ/4} f'_k = (\circ/4)(60) = 24N$$

$$F_{nety} = ma \Rightarrow mg - f'_k = ma \xrightarrow[g=10\frac{N}{kg}]{m=2kg\ ,\ f'_k=24N}$$

$$20 - 24 = 2a \Rightarrow a = -2\frac{m}{s^2}$$

با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی جسم تا لحظهٔ توقف را به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_\circ^2 = 2a\Delta y' \xrightarrow[a=-2\frac{m}{s^2}]{v=\circ\ ,\ v_\circ=5\frac{m}{s}} \circ - 25 = 2(-2)\Delta y'$$

$$\Rightarrow \Delta y' = 6/25m$$

پس کل مسافت طی شده متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا توقف برابر است با:

$$L = \Delta y + \Delta y' = 30 + 6/25 = 36/25m$$

*(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۳)*

---

۷۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین برادران)*

در لحظه‌ای که نیروی مقاومت هوا با وزن چترباز برابر می‌شود، چترباز با تندی حدی ادامه می‌دهد.

$$f_D = 5v_{\text{حدی}}^2 = W$$

در لحظه‌ای که تندی چترباز ۳ برابر تندی حدی آن است، نیروی مقاومت هوا را برحسب وزن چترباز به دست می‌آوریم:

$$f_D = 5v^2 \Rightarrow \frac{f_D}{f'_D} = (\frac{v}{v'})^2 \xrightarrow[v'=3v_{\text{حدی}}]{v=v_{\text{حدی}}\ ,\ f_D=W}$$

$$\frac{W}{f'_D} = (\frac{v_{\text{حدی}}}{3v_{\text{حدی}}})^2 \Rightarrow f'_D = 9W$$

با نوشتن قانون دوم نیوتون برای چترباز در این لحظه داریم: (با در نظر گرفتن جهت مثبت به سمت پایین)

$$F_{net_y} = W - f'_D = ma \xrightarrow{f'_D = 9W} ma = W - 9W = -8W$$

$$\Rightarrow a = \frac{-8W}{m} \xrightarrow{W=mg} a = -\frac{8mg}{m} = -8g = -80\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۷)

---

۷۸- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین برادران)

فنر نسبت به طول عادی آن فشرده شده است بنابراین نیرویی که فنر به شخص وارد می‌کند به سمت پایین است با توجه به جهت شتاب و نوشتن قانون دوم نیوتون برای شخص داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow$$

$$mg + F_e - F_N = ma \xrightarrow[g=10\frac{N}{kg},\ m=70kg,\ F_e=k|x|,\ a=2\frac{m}{s^2}]{|x|=45-20=25cm=0/25m,\ k=600\frac{N}{m}}$$

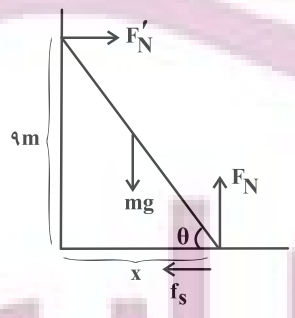
$$700+600\times\frac{25}{100}-F_N = 70\times 2 \Rightarrow F_N = 850-140 = 710N$$

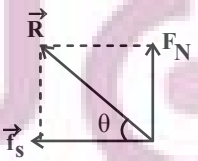
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۴)

---

۷۹- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین برادران)

نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم. نیروی سطح افقی وارد بر نردبان برایند نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است.




$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{F_N}{f_s}$$

چون نردبان در حال تعادل است برایند نیروهای وارد بر آن در راستای قائم و افقی برابر صفر است.

$$\left.\begin{matrix} F'_N = f_s \\ \tan\theta = \frac{F_N}{f_s} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{F_N}{F'_N} \xrightarrow[m=18kg,\ g=10\frac{N}{kg}]{F_N=mg}$$

$$\tan\theta = \frac{180}{F'_N} \Rightarrow F'_N = \frac{180}{\tan\theta}$$

برای معادلهٔ $\tan\theta$ داریم:

$$11^2 = 9^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}m$$

$$\tan\theta = \frac{9}{x} = \frac{9}{2\sqrt{10}}$$

$$F'_N = \frac{180}{\tan\theta} = \frac{180\times 2\sqrt{10}}{9} = 40\sqrt{10}N$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۶)

---

۸۰- **گزینهٔ «۴»** (کنکور خارج ریاضی- ۱۴۰۲)

حرکت جسم شامل دو مرحله است. در مرحلهٔ اول، حرکت تندشونده است و دو نیروی F و $f_k$ در راستای حرکت به جسم وارد می‌شوند. در مرحلهٔ دوم حرکت کندشونده است و تنها نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت به جسم وارد می‌شود. با توجه به اینکه جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده است با نوشتن رابطهٔ سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، نسبت اندازهٔ شتاب دو مرحله را به‌دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \begin{cases} v^2 - 0 = 2a_1\Delta x_1 \quad (*) \\ 0 - v^2 = 2a_2\Delta x_2 \xrightarrow{\Delta x_2 = 4\Delta x_1} \\ -v^2 = 8a_2\Delta x_1 (**) \end{cases}$$

$$(*),(**) \Rightarrow \frac{|a_2|}{|a_1|} = \frac{1}{4} (I)$$

اکنون با نوشتن قانون دوم نیوتون برای جسم در دو مرحله داریم:

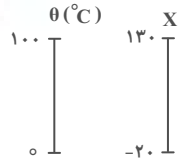
$$\begin{cases} F - f_k = m|a_1| \\ f_k = m|a_2| \end{cases} \xrightarrow{(I)} \frac{F - f_k}{f_k} = 4 \Rightarrow F = 5f_k$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳۰ تا ۴۳)

## فیزیک ۱

۸۱- **گزینهٔ «۲»** (عطاله شارآباد)

رابطهٔ مقیاس دمایی $X$ را برحسب سلسیوس به دست می‌آوریم:




$$\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1-\theta}=\frac{X_2-X_1}{X_1-X} \xrightarrow[X_1=-20\ ,\ X_2=130]{\theta_1=0^\circ C\ ,\ \theta_2=100^\circ C}$$

$$\frac{100-0}{0-\theta}=\frac{130-(-20)}{-20-X}\Rightarrow -1/5\theta=-20-X\Rightarrow X=1/5\theta-20$$

$$\Delta X=1/5\Delta\theta \xrightarrow{\Delta X=30} 30=1/5\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=20^\circ C$$

$$F=\frac{9}{5}\theta+32\Rightarrow\Delta F=\frac{9}{5}\Delta\theta$$

$$\xrightarrow{\Delta\theta=20^\circ C}\Delta F=\frac{9}{5}\times 20=36^\circ F$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۸۴ و ۸۵)

---

۸۲- **گزینهٔ «۴»** (غلامرضا محبی)

در ابتدا رابطهٔ تعیین طول ثانویه برای هر یک را می‌نویسیم، سپس اختلاف آن‌ها را معادل $2/5mm$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} L_{مس}=L_0(1+\alpha_{مس}\Delta\theta)\xrightarrow[\alpha_{مس}=1/7\times10^{-5}C^{-1}]{L_0=1m} \\ L_{مس}=1(1+1/7\times10^{-5}\Delta\theta) \\ L_{آهن}=L_0(1+\alpha_{آهن}\Delta\theta)\xrightarrow[\alpha_{آهن}=1/2\times10^{-5}C^{-1}]{L_0=1m} \\ L_{آهن}=1(1+1/2\times10^{-5}\Delta\theta) \end{cases}$$

$$\Delta L=L_{مس}-L_{آهن}=2/5\times10^{-3}m=0/5\times10^{-5}\Delta\theta$$

$$\Rightarrow\Delta\theta=500^\circ C$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

---

۸۳- **گزینهٔ «۳»** (مصطفی واثقی)

ابتدا ضریب انبساط طولی را به دست می‌آوریم:

$$\Delta A=A_1(2\alpha)\Delta\theta$$

$$\text{درصد تغییر مساحت}=\frac{\Delta A}{A_1}\times100=(2\alpha)\Delta\theta\times100=0/2$$

$$\xrightarrow{\Delta\theta=70-10=60^\circ C}2\alpha(60)=2\times10^{-3}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{60}\times10^{-3}C^{-1}$$

$$\text{درصد تغییر حجم}=\frac{\Delta V}{V_1}\times100=(3\alpha)\Delta\theta\times100=0/3$$

$$\alpha\Delta\theta=10^{-3}\xrightarrow{\alpha=\frac{1}{60}\times10^{-3}C^{-1}}$$

$$\frac{1}{60}\times10^{-3}\Delta\theta=10^{-3}\Rightarrow\Delta\theta=60^\circ C$$

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1\xrightarrow[\theta_1=10^\circ C]{\Delta\theta=60^\circ C}60=\theta_2-10\Rightarrow\theta_2=70^\circ C$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۸۷ تا ۹۴)

---

۸۴- **گزینهٔ «۲»** (کامران ابراهیمی)

شرط آن‌که با افزایش دمای مجموعه و انبساط ظرف و مایع، مایع از ظرف بیرون نریزد آن است که $v_{\text{مایع}2}\geq v_{\text{ظرف}2}$ باشد پس می‌توان نوشت:

$$v_{\text{ظرف}1}(1+3\alpha_{\text{ظرف}}\Delta\theta)\geq v_{\text{مایع}1}(1+\beta_{\text{مایع}}\Delta\theta)$$

$$\xrightarrow[v_{1\text{مایع}}=80cm^3\ ,\ \Delta\theta=50K]{v_{1\text{ظرف}}=100cm^3\ ,\ \beta_{\text{مایع}}=0/01K^{-1}}$$

$$100(1+150\alpha_{\text{ظرف}})\geq 80(1+0/01\times50)$$

$$\Rightarrow 1+150\alpha_{\text{ظرف}}\geq 1/2\Rightarrow\alpha_{\text{ظرف}}\geq\frac{0/2}{150}$$

$$\Rightarrow\alpha_{\text{ظرف}\,min}=\frac{1}{750}K^{-1}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۸۷ تا ۹۴)

---

۸۵- **گزینهٔ «۴»** (پررام قلعه‌شاهانی)

ابتدا تغییرات دما را برحسب سلسیوس به دست می‌آوریم:

$$\Delta F=\frac{9}{5}\Delta\theta=\frac{9}{5}\Delta T\xrightarrow{\Delta F=36^\circ}\Delta\theta_1=20^\circ C\ ,\ \Delta\theta_2=\Delta T_2=12^\circ C$$

$$Q=m_1c_1\Delta\theta_1=m_2c_2\Delta\theta_2$$

$$\xrightarrow[m_2=2kg\ ,\ \Delta\theta_2=12^\circ C]{m_1=3kg\ ,\ \Delta\theta_1=20^\circ C}(3)(20)c_1=(2)(12)c_2\Rightarrow c_2=\frac{5}{2}c_1$$

$$2Q=m_1c_1\Delta\theta+m_2c_2\Delta\theta\xrightarrow[Q=(m_1c_1)(20)\ ,\ c_2=\frac{5}{2}c_1]{m_1=3kg\ ,\ m_2=2kg}$$

$$(2)(3)(20)c_1=3c_1\Delta\theta+2\times\frac{5}{2}c_1\Delta\theta\Rightarrow 120=(3+5)\Delta\theta$$

$$\Rightarrow\Delta\theta=15^\circ C\Rightarrow\Delta\theta=\theta_2-\theta_1\xrightarrow[\Delta\theta=15^\circ C]{\theta_1=10^\circ C}\theta_2=25^\circ C$$

$$F=\frac{9}{5}\theta+32\xrightarrow{\theta=25^\circ C}F=(\frac{9}{5})25+32=77^\circ F$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

---

۸۶- **گزینهٔ «۱»** (مجتبی نکوئیان)

براساس قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله شده در حالت تعادل گرمایی، برابر صفر است، پس:

$$Q_{30^\circ C\ آب}+Q_{50^\circ C\ آب}+Q_{گرماسنج}=0$$

$$\Rightarrow m_{30^\circ C\ آب}c_{آب}\Delta\theta+m_{50^\circ C\ آب}c_{آب}\Delta\theta'+C_{گرماسنج}\Delta\theta=0$$

$$\xrightarrow[c_{آب}=4/2\frac{J}{g.K}\ ,\ c_{گرماسنج}=252\frac{J}{K}\ ,\ \Delta\theta=5^\circ C\ ,\ \Delta\theta'=-15^\circ C]{m_{30^\circ C\ آب}=500-m\ ,\ m_{50^\circ C\ آب}=2m}$$

$$(500-m)(4/2)(5)+2m(4/2)(-15)+252(5)=0$$

$$\Rightarrow 500-m-6m+60=0\Rightarrow 560-7m=0\Rightarrow m=80g$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۳)

۸۷- **گزینهٔ «۱»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

گرمایی که از کتری برقی به آب می‌رسد، صرف بـه جـوش آوردن و تبخیـر آب درون کتری می‌شود. بنابراین داریم:

$$۵۰^\circ C \text{ آب} \xrightarrow{Q_۱} ۱۰۰^\circ C \text{ آب}$$

$$\xrightarrow{Q_۲} ۱۰۰^\circ C \text{ بخار آب } ۳۰g + ۱۰۰^\circ C \text{ آب } ۳۷۰g$$

$$Q_{کل} = Q_۱ + Q_۲ \Rightarrow \frac{۸۰}{۱۰۰}(P.t) = Q_۱ + Q_۲$$

در محاسبهٔ گرمای $Q_۲$، دقت کنید که فقـط $۳۰g$ از آب بـه بخـار تبـدیل شده و $m_۲ = ۳۰g$ باید در رابطه جایگذاری شود. داریم:

$$\frac{۴}{۵}\times ۲۰۰۰ \times t = (m_۱ c_{آب}\Delta\theta) + m_۲ L_V \xrightarrow[m_۲=۳۰g\ ,\ c_{آب}=۴۲۰۰]{m_۱=۴۰۰g\ ,\ \Delta\theta=۵۰^\circ C}$$

$$۱۶۰۰t = ۰/۴\times ۴۲۰۰\times ۵۰ + ۰/۰۳\times ۲۲۴۰۰۰۰$$

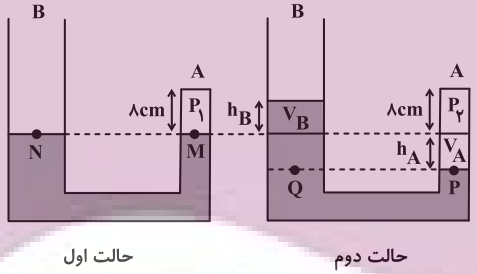
$$۱۶۰۰t = ۸۴۰۰۰ + ۶۷۲۰۰ = ۱۵۱۲۰۰ \Rightarrow t = \frac{۱۵۱۲۰۰}{۱۶۰۰} = ۹۴/۵s$$

*(فیزیک ۱- صفحه‌های ۹۶ تا ۱۱۱)*

---

۸۸- **گزینهٔ «۲»** *(محمدنوایی‌مقدم)*

اگر دمای هوای محبوس را بالا ببریم، حجم گاز محبوس زیاد شده و در شاخهٔ B ارتفاع جیوه بالا می‌رود. حجم جیوه‌ای که در شاخهٔ چپ بـه بـالا مـی‌رود $(\Delta V)$، برابر با حجم جیوه‌ای است که در شاخهٔ راسـت بـه پـایین مـی‌رود $(\Delta V_A)$. چون می‌خواهیم اختلاف ارتفاع دو شاخه $۶cm$ شود، داریم:




حالت اول — حالت دوم

تغییرات حجم $\Delta V_A = \Delta V_B \Rightarrow A_A h_A = A_B h_B$

$$\Rightarrow ۵h_A = ۱۰h_B \Rightarrow h_A = ۲h_B$$

اگر: $h_A = x \Rightarrow h_B = \frac{x}{۲}$

$$x + \frac{x}{۲} = ۶ \Rightarrow x = ۴cm$$

در حالت اول دو نقطهٔ $M$ و $N$ هم‌فشار هستند، بنابراین داریم:

$$P_M = P_N \Rightarrow P_۱ = P_۰ = ۷۶cmHg$$

در حالت دوم دو نقطهٔ $P$ و $Q$ هم‌فشار هستند، بنابراین داریم:

$$P_P = P_Q \Rightarrow P_۲ = P_۰ + ۶cmHg$$

$$\Rightarrow P_۲ = ۷۶ + ۶ = ۸۲cmHg$$

دمای اولیهٔ گاز $T_۱ = ۲۷۳ + ۳۱ = ۳۰۴K$ است و بـا اسـتفاده از نسـبت معادلهٔ حالت داریم:

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \xrightarrow[T_۱=۳۰۴K\ ,\ P_۲=۸۲cmHg\ ,\ V_۲=(۸+۴)A_A]{P_۱=۷۶cmHg\ ,\ V_۱=۸\times A_A}$$

$$\frac{۷۶\times ۸A}{۳۰۴} = \frac{۸۲(۸+۴)A}{T_۲} \Rightarrow T_۲ = ۴۹۲K$$

$$\Delta T = ۴۹۲ - ۳۰۴ = ۱۸۸K \Rightarrow \Delta\theta = ۱۸۸^\circ C$$

*(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۳)*

---

۸۹- **گزینهٔ «۱»** *(دانیال راستی)*

طبق معادله حالت برای گازهای آرمانی داریم:

$$PV = nRT$$

با توجه به ثابت بودن $nR$ داریم:

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \quad (۱)$$

فشار آب در عمق $۳۰۵m$ برابر است با:

$$P_۱ = P_۰ + \rho_{آب} g h_۱ \xrightarrow[g=۱۰\frac{N}{kg},P_۰=۱۰^۵Pa]{h_۱=۳۰۵m,\rho_{آب}=۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}}$$

$$P_۱ = ۱۰^۵ + ۱۰^۳\times ۱۰\times ۳۰۵ = ۳۱۵\times ۱۰^۴ Pa$$

و در عمق $h_۲ = h_۱ - ۲۱۵ = ۹۰m$ برابر است با:

$$P_۲ = P_۰ + \rho_{آب} g h_۲ \xrightarrow[g=۱۰\frac{N}{kg},P_۰=۱۰^۵Pa]{h_۲=۹۰m,\rho_{آب}=۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}}$$

$$P_۲ = ۱۰^۵ + ۱۰^۳\times ۱۰\times ۹۰ = ۱۰۰\times ۱۰^۴ Pa$$

با توجه به نسبت مساحت سطح‌ها، نسبت حجم‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \ ,\ S = ۴\pi R^۲$$

$$\frac{V_۲}{V_۱} = (\frac{S_۲}{S_۱})^{\frac{۳}{۲}} = (\frac{۱۸cm^۲}{۸cm^۲})^{\frac{۳}{۲}} = (\frac{۹}{۴})^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲۷}{۸}$$

در نهایت با توجه به معادله (۱) داریم:

$$(۱) \xrightarrow[P_۲=۱۰۰\times ۱۰^۴ Pa]{V_۲=\frac{۲۷}{۸}V_۱,P_۱=۳۱۵\times ۱۰^۴ Pa}$$

$$\frac{۳۱۵\times ۱۰^۴ V_۱}{T_۱} = \frac{۱۰۰\times ۱۰^۴\times ۲۷\times V_۱}{T_۲\times ۸} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{۱۵}{۱۴}$$

*(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۳)*

---

۹۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین برادران)*

در شکل چون جسم غوطه‌ور است بنابراین چگالی جسم، برابر با چگـالی آب در دمای $۲^\circ C$ است.

$$\rho_{جسم} = \rho_{آب\ ۲^\circ C}$$

با افزایش دمای آب از $۲^\circ C$ تا $۴^\circ C$ چگالی آب افزایش می‌یابد. بنـابراین با توجه به ثابت بودن چگالی جسم داریم:

$$\rho_{آب\ ۲^\circ C} < \rho_{آب\ ۴^\circ C} \xrightarrow{\rho_{جسم}=\rho_{آب\ ۲^\circ C}} \rho_{جسم} < \rho_{آب\ ۴^\circ C}$$

$\Rightarrow$ جسم در آب $۴^\circ C$ شناور می‌شود.

با کاهش دمای آب از $۲^\circ C$ تا $۰^\circ C$ چگالی آن کاهش می‌یابد.

$$\rho_{آب\ ۲^\circ C} > \rho_{آب\ ۰^\circ C} \xrightarrow{\rho_{جسم}=\rho_{آب\ ۲^\circ C}} \rho_{جسم} > \rho_{آب\ ۰^\circ C}$$

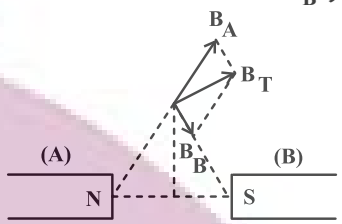
$\Rightarrow$ جسم در آب $^\circ C$ ته‌نشین می‌شود.

*(فیزیک ۱- صفحهٔ ۹۵)*

## فیزیک ۲

۹۱- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

با رسم خطوط میدان مغناطیسی در نقطهٔ $M$، می‌توان میدان مغناطیسی برایند را رسم کرد. چون آهنربای $A$ قوی‌تر است، شدت میدان حاصل از قطب $N$ آن بیشتر از قطب $S$ آهنربای $B$ است. بنابراین بردار برایند، به $B_A$ نزدیک‌تر از $B_B$ است.



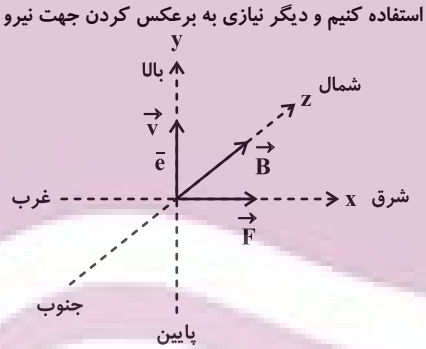

نکته: توجه کنید که میدان مغناطیسی از قطب $N$ خارج و به قطب $S$ وارد می‌شود.

*(فیزیک ۲- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)*

---

۹۲- **گزینهٔ «۱»** *(شیلا شیرزادی)*

اگر چهار انگشت دست راست را در جهت سرعت الکترون یعنی به سمت بالا بگیریم، به گونه‌ای که کف دست به طرف شمال یعنی در جهت میدان مغناطیسی باشد، در این صورت انگشت شست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی مثبت را به سمت غرب نشان می دهد و چون بار منفی است، جهت نیرو برعکس خواهد بود. در نتیجه الکترون به سمت مشرق منحرف می‌شود. (البته چون بار منفی است، از همان ابتدا می‌توانستیم به جای دست راست، از دست چپ استفاده کنیم و دیگر نیازی به برعکس کردن جهت نیرو نبود.)

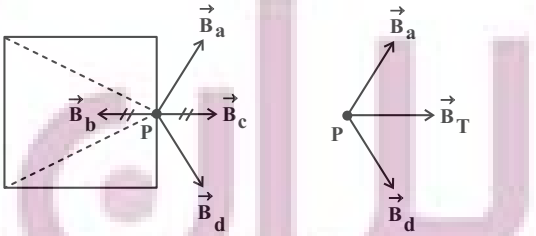



*(فیزیک ۲- صفحه‌های ۸۹ تا ۹۱)*

---

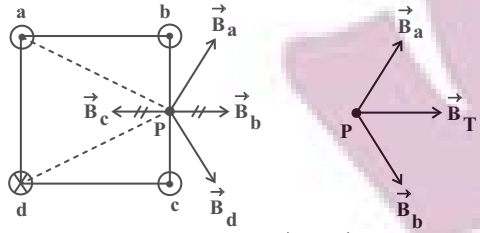
۹۳- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

گام اول: میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌های $b$ و $c$ در نقطهٔ $P$ هم‌اندازه و در جهت مخالف یکدیگرند. یعنی اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.




برایند دو میدان $\vec{B}_a$ و $\vec{B}_b$ به سمت راست است.

گام دوم: اگر جریان سیم‌های $b$ و $c$ برون‌سو شوند، باز هم میدان مغناطیسی حاصل از آن‌ها در نقطهٔ $P$، هم‌اندازه و خلاف جهت می‌شوند و اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.



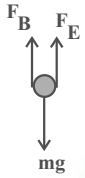

میدان‌های مغناطیسی $\vec{B}_a$ و $\vec{B}_d$ نیز نسبت به حالت قبل هیچ تغییری ندارند. پس میدان برایند دوباره به سمت راست خواهد بود.

*(فیزیک ۲- صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)*

---

۹۴- **گزینهٔ «۴»** *(کامران ابراهیمی)*

با توجه به منفی بودن بار، نیروهای وارد بر گلوله به شکل زیر می‌باشند:




$$F_B = |q|VB$$
$$F_E = |q|E$$

شرط عدم انحراف ذره آن است که برایند نیروهای وارد بر آن صفر باشد، پس:

$$|q|E + |q|vB = mg \xrightarrow[V_B = 10^2 \frac{m}{s},\ m = 0/2kg,\ g = 10\frac{N}{kg}]{|q| = 10^{-3}C,\ E = 10^3 \frac{N}{C}}$$

$$\Rightarrow 10^{-3} \times 10^3 + 10^{-3} \times 10^3 \times B = 0/2 \times 10$$
$$\Rightarrow 1 + B = 2 \Rightarrow B = 1T$$

*(فیزیک ۲- صفحه‌های ۸۹ و ۱۰۵)*

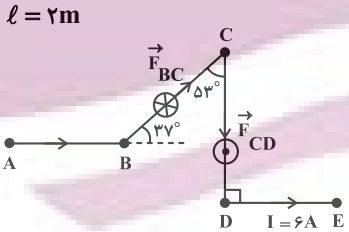
---

۹۵- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

باید نیروی وارد بر هر قطعه سیم را جداگانه به دست آوریم. سپس نیروی خالص وارد بر آن‌ها را حساب کنیم.

$$F = BI\ell \sin\theta$$

$$B = 400G = 400 \times 10^{-4}T = 0/04T$$
$$\ell = 2m$$




$\theta$: زاویهٔ بین جهت جریان سیم و میدان مغناطیسی است.

برای دو قطعهٔ $AB$ و $DE$ زاویهٔ $\theta = 0$ است. در نتیجه $\sin\theta = 0$ است و نیرویی به این دو قطعه سیم وارد نمی‌شود. $F_{AB} = F_{DE} = 0$

$F_{BC} = 0/04 \times 6 \times 2 \times \sin 37^\circ = 0/288N$ ⊗ درون‌سو

$F_{CD} = 0/04 \times 6 \times 2 \times \sin 90^\circ = 0/48N$ ⊙ برون‌سو

جهت این نیروها با استفاده از قاعدهٔ دست راست تعیین شده است.

$F_t = F_{CD} - F_{BC} = 0/48 - 0/288 = 0/192N$ ⊙

چون $F_{CD} > F_{BC}$ است، پس نیروی خالص هم‌جهت با $F_{CD}$، یعنی برون‌سو می‌باشد.

*(فیزیک ۲- صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)*

---

۹۶- **گزینهٔ «۴»** *(دانیال راستی)*

میدان برایند (قبل از تغییر جهت جریان پیچهٔ (۳) برابر است با:

$$\vec{B}_T=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3=0\Rightarrow\vec{B}_3=-(\vec{B}_1+\vec{B}_2)=-\vec{B}_{1,2}$$

$$|\vec{B}_1|=\frac{\mu_0 I_1N_1}{2r_1}\xrightarrow{I_1=5A\ ,\ N_1=20\ ,\ r_1=5cm}|\vec{B}_1|=\frac{12\times10^{-7}\times5\times20}{2\times5\times10^{-2}}$$

$$=12\times10^{-4}=12G\quad\text{درون‌سو}$$

$$|\vec{B}_2|=\frac{\mu_0 I_2N_2}{2r_2}\xrightarrow{I_2=20A\ ,\ N_2=15\ ,\ r_2=10cm}|\vec{B}_2|=\frac{12\times10^{-7}\times20\times15}{2\times10\times10^{-2}}$$

$$=18\times10^{-4}=18G\quad\text{برون‌سو}$$

چون اندازهٔ میدان پیچهٔ (۲) بیشتر از میدان پیچهٔ (۱) است، جهت میدان برایند (۱) و (۲) $(\vec{B}_{1,2})$، برون‌سو است.

$$|\vec{B}_{1,2}|=|\vec{B}_2|-|\vec{B}_1|=18-12=6G\quad\text{برون‌سو}$$

بنابراین داریم:

$$B_3=-\vec{B}_{1,2}=6G\quad\text{درون‌سو}$$

$$B'_3=6G\quad\text{برون‌سو}$$

برایند بعد از تغییر جهت برابر است با:

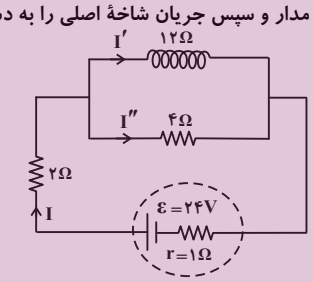
$$B'_T=B_1+B_2+B'_3=12G\quad\text{برون‌سو}$$

*(فیزیک ۲- صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹)*

---

۹۷- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*

ابتدا مقاومت معادل مدار و سپس جریان شاخهٔ اصلی را به دست می‌آوریم:




$$\frac{(12)(4)}{12+4}=3\Omega\Rightarrow R_{eq}=3+2=5\Omega$$

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}=\frac{24}{5+1}=4A$$

با توجه به این‌که در مقاومت‌های موازی، نسبت جریان‌ها برابر با عکس نسبت مقاومت‌ها است، می‌توان نوشت:

$$\frac{I'}{I''}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\ ,\quad I'+I''=I=4A\Rightarrow I'=1A\ ,\ I''=3A$$

میدان مغناطیسی درون سیملوله‌ای که حلقه‌های آن بدون فاصله و در یک ردیف در کنار هم پیچیده شده باشند، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$B=\frac{\mu_0 NI'}{L}\xrightarrow{L=ND}B=\frac{\mu_0 I'}{D}$$

( D : قطر مقطع سیم)

$$\xrightarrow[D=8mm=8\times10^{-3}m]{\mu_0=12\times10^{-7}\frac{T.m}{A}\ ,\ I'=1A}B=\frac{(12\times10^{-7})(1)}{8\times10^{-3}}=1/5\times10^{-4}T=1/5G$$

*(فیزیک ۲- صفحه‌های ۹۹ و ۱۰۰)*

---

۹۸- **گزینهٔ «۴»** *(دانیال راستی)*

چون طول سیم در هر دو حالت برابر است داریم:

$$L_{\text{سیملوله}}=L_{\text{پیچه}}$$

$$\Rightarrow 2\pi N_{\text{پیچه}}R_{\text{پیچه}}=2\pi N_{\text{سیملوله}}R_{\text{سیملوله}}\xrightarrow[R_{\text{سیملوله}}=\frac{R}{2}]{R_{\text{پیچه}}=R}$$

$$2\pi N_{\text{پیچه}}R=2\pi N_{\text{سیملوله}}\frac{R}{2}\Rightarrow N_{\text{سیملوله}}=2N_{\text{پیچه}}$$

با توجه به رابطهٔ میدان سیملوله و میدان پیچه داریم:

$$B_{\text{پیچه}}=\frac{\mu.I_{\text{پیچه}}N_{\text{پیچه}}}{2R_{\text{پیچه}}}\ ,\ B_{\text{سیملوله}}=\frac{\mu.I_{\text{سیملوله}}N_{\text{سیملوله}}}{\ell}$$

$$\xrightarrow[N_{\text{سیملوله}}=2N_{\text{پیچه}}\ ,\ 6I_{\text{پیچه}}=I_{\text{سیملوله}}]{B_{\text{پیچه}}=B_{\text{سیملوله}}\ ,\ R_{\text{پیچه}}=R}$$

$$\frac{\mu.N_{\text{پیچه}}I_{\text{پیچه}}}{2R}=\frac{\mu_0(6I_{\text{پیچه}})(2N_{\text{پیچه}})}{\ell}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2R}=\frac{6\times2}{\ell}\xrightarrow{R=2R_{\text{سیملوله}}}$$

$$\frac{1}{2\times2R_{\text{سیملوله}}}=\frac{12}{\ell}\Rightarrow\frac{\ell}{R_{\text{سیملوله}}}=48$$

*(فیزیک ۲- صفحه‌های ۹۷ و ۱۰۰)*

---

۹۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین برادران)*

فقط موارد (الف) و (ت) در مورد مواد پارامغناطیسی صحیح هستند.

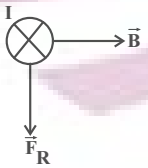
مورد (ب) به مواد دیامغناطیسی اشاره می‌کند و برای ساختن آهنربای دائمی از مواد فرومغناطیسی سخت استفاده می‌شود.

*(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)*

---

۱۰۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین برادران)*

عددی که ترازو در هر حالت نشان می‌دهد، برابر برایند نیروی وزن آهنربا و عکس العمل نیرویی است که از طرف آهنربا به سیم وارد می‌شود. چون با تغییر جهت جریان عبوری از سیم، عددی که ترازو نشان می‌دهد افزایش یافته است، بنابراین در حالت اول نیرویی که از طرف سیم به آهنربا وارد می‌شود به سمت بالا و در حالت دوم به سمت پایین است. بنابراین مطابق قانون سوم نیوتون در حالت اول نیرویی که از طرف میدان به سیم وارد می‌شود به سمت پایین است. با توجه به قاعده دست راست و جهت میدان مغناطیسی، جریان عبوری از سیم در حالت اول درون‌سو است.




اکنون جریان عبوری از سیم را به دست می‌آوریم:

$$W_{\text{ترازو}}=W_{\text{آهنربا}}-F_{\text{سیم}}\quad\text{(حالت اول}$$

$$W'_{\text{ترازو}}=W_{\text{آهنربا}}+F_{\text{سیم}}\quad\text{(حالت دوم}$$

$$\xrightarrow{W'_{\text{ترازو}}-W_{\text{ترازو}}=0/24N}0/24=2F_{\text{سیم}}$$

$$\Rightarrow F_{\text{سیم}}=0/12N$$

اکنون با توجه به رابطهٔ $F_B=BIL$ جریان عبوری از سیم را به دست می‌آوریم:

$$F_B=BIL\xrightarrow[L=50cm=0/5m,F_{\text{سیم}}=F_B=0/12N]{B=400G=4\times10^{-2}T}$$

$$0/12=4\times10^{-2}\times I\times0/5\Rightarrow I=6A$$

*(فیزیک ۲- صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)*

ایران توشه‌ای برای موفقیت

## شیمی ۳

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

موارد اول و پنجم نادرست‌اند.

بررسی موارد نادرست:

مورد اول) برقکافت جزو قلمروی تولید مواد از دانش الکتروشیمی است.

مورد پنجم) در محل باتری با انجام یک فرایند شیمیایی، انرژی الکتریکی تولید می‌شود.

*(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)*

---

۱۰۲- **گزینهٔ «۳»** *(هادی مهدی‌زاده)*

ماده‌ای که با گرفتن الکترون سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود اکسنده نامیده می‌شود.

*(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)*

---

۱۰۳- **گزینهٔ «۲»** *(فرزاد رضایی)*

ابتدا واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم:

آ) $2Al(s)+3Cu^{2+}(aq)\rightarrow 2Al^{3+}(aq)+3Cu(s)\rightarrow$

(۶ مول الکترون مبادله شده)

ب) $Mn(s)+Cu^{2+}(aq)\rightarrow Mn^{2+}(aq)+Cu(s)\rightarrow$

(۲ مول الکترون مبادله شده)

پ) $Zn(s)+2V^{3+}(aq)\rightarrow Zn^{2+}(aq)+2V^{2+}(aq)\rightarrow$

(۲ مول الکترون مبادله شده)

$$\frac{\text{بیشترین مول الکترون‌های مبادله شده}}{\text{کمترین مول الکترون‌های مبادله شده}}=\frac{6}{2}=3$$

یون $Cu^{2+}$ در واکنش (آ) با ضریب ۳ بالاترین ضریب را در بین گونه‌های اکسنده دارد.

*(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)*

---

۱۰۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به واکنش‌های انجام شده، از مقایسه قدرت اکسندگی کاتیون‌های موجود در واکنش‌های داده شده خواهیم داشت:

واکنش اول: $A^{2+}>B^{2+}$

واکنش دوم: $C^{2+}>D^{2+}$

واکنش سوم: $D^{2+}>A^{2+}$

*(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)*

---

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** *(هدی بهاری‌پور)*

الف، ب و پ؛ چون الکترون از دست داده‌اند پس واکنش اکسایش انجام گرفته است.

الف) $Sn^{2+}\rightarrow Sn^{4+}+2e^-$

ب) $Mg\rightarrow Mg^{2+}+2e^-$

پ) $Pb^{2+}\rightarrow Pb^{4+}+2e^-$

ولی موارد ت و ث همراه با گرفتن الکترون هستند پس کاهش یافته‌اند.

ت) $Al^{3+}+3e^-\rightarrow Al$

ث) $Fe^{2+}+2e^-\rightarrow Fe$

*(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)*

---

۱۰۶- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود جعفری)*

عبارت‌های اول، دوم، سوم و چهارم نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: اگر قدرت اکسندگی یون $X^{2+}$ از یون $Mn^{2+}$ بیش‌تر باشد، یعنی Mn نسبت به X کاهنده‌تر است و به همین دلیل فلز X نمی‌تواند با محلولی از نمک‌های منگنز وارد واکنش شود.

عبارت دوم: آهن قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به مس دارد و به همین علت اگر یک قطعه فلز مس را در محلول آهن (II) کلرید قرار بدهیم، هیچ واکنشی انجام نمی‌شود.

عبارت سوم: گاز اکسیژن در دما و فشار اتاق نمی‌تواند با پلاتین وارد واکنش شود.

عبارت چهارم: معادلهٔ واکنش مورد نظر به‌صورت $Zn(s)+Cu^{2+}(aq)\rightarrow Zn^{2+}(aq)+Cu(s)$ است. کاتیون فرآورده $Zn^{2+}$ و اتم واکنش‌دهنده، Zn است. Zn نسبت به $Zn^{2+}$ شعاع بزرگ‌تری دارد.

عبارت پنجم: با توجه به اطلاعات بیان شده، در می‌یابیم که A نسبت به C قدرت کاهندگی بیش‌تری دارد و به همین دلیل واکنش $(A+C^{2+}\rightarrow\cdots)$ در جهت طبیعی و به‌صورت خودبه‌خودی انجام می‌شود.

*(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)*

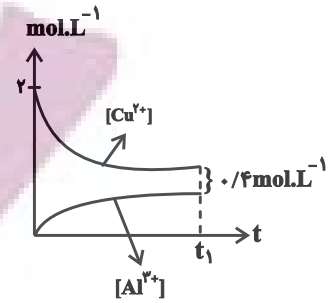
---

۱۰۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

واکنش انجام شده به صورت زیر می‌باشد:

$$2Al(s)+3CuSO_4(aq)\rightarrow Al_2(SO_4)_3(aq)+3Cu(s)$$

می توان نتیجه گرفت که به ازای مصرف ۳ مول $Cu^{2+}$، ۲ مول $Al^{3+}$ تولید می‌شود.




$$3Cu^{2+} \longrightarrow 2Al^{3+}$$

۲ : غلظت اولیه ۰

$-3x$ : تغییرات غلظت $+2x$

$2-3x$ : غلظت نهایی $2x$

$$\Rightarrow [Cu^{2+}]-[Al^{3+}] : 2-3x-(2x)=2-5x=0/4\frac{mol}{L}$$

$$\Rightarrow 5x=1/6 \Rightarrow x=0/32\frac{mol}{L}$$

$$\Rightarrow [Al^{3+}]=2x=2\times 0/32=0/64\frac{mol}{L}$$

نیم‌واکنش اکسایش به‌صورت $Al \rightarrow Al^{3+}+3e^-$ می‌باشد:

$$?\,mol\,e^- \text{ محلول} : 1L\times\frac{0/64\,mol\,Al^{3+}}{1L\ \text{محلول}}\times\frac{3\,mol\,e^-}{1\,mol\,Al^{3+}}=1/92\,mol\,e^-$$

*(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)*

---

۱۰۸- **گزینهٔ «۳»** *(حسن رحمتی‌کوکنده)*

فلز روی نسبت به مس تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون دارد و با قرار گرفتن تیغه روی درون محلول مس (II) سولفات واکنش شیمیایی زیر انجام می‌شود:

$$Zn(s)+Cu^{2+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq)+Cu(s)$$

$$?g \text{ تغییر جرم تیغه} = 9/03\times10^{23}e^-\times\frac{1mole^-}{6/02\times10^{23}e^-}\times\frac{(-65+64)g}{2mole^-}$$

$$=-0/75g$$

جرم تیغه $0/75g$ کاهش می‌یابد.

*(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)*

---

۱۰۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیر هاتمیان)*

معادلهٔ موازنه شده واکنش:

$$Al(s)+3Ag^+(aq) \rightarrow Al^{3+}(aq)+3Ag(s)$$

مول یون نقره در محلول اولیه در ابتدای واکنش:

$$?\,mol\,Ag^+ = 0/2L\times\frac{0/2mol}{1L}=0/04mol\ Ag^+$$

چون غلظت نصف شده پس می‌توانیم مقدار مول یون نقره در محلول پس از گذشت مدت زمانی از واکنش حساب کنیم:

$$\text{باقی‌مانده } ?\,mol\,Ag^+ = 0/2L\times\frac{0/1mol}{1L}=0/02mol$$

$$\text{مقدار مول مصرفی } Ag^+ = 0/04-0/02=0/02mol$$

$$\text{مصرف شده } Al\ ?=0/02mol\,Ag^+\times\frac{1mol\,Al}{3mol\,Ag^+}$$

$$\times\frac{27g\,Al}{1mol\,Al}=0/18g\,Al$$

$$\text{مقدار } Ag \text{ تولید شده} = 0/02mol\,Ag^+\times\frac{3mol\,Ag}{3mol\,Ag^+}$$

$$\times\frac{108g\,Ag}{1mol\,Ag}=2/16g\,Ag$$

$$\text{تغییرات جرم تیغه} = \frac{50}{100}\text{(جرم مصرف شده } Al\text{)} - \text{(جرم } Ag \text{ تولید شده)}$$

$$=\frac{50}{100}\times2/16-0/18=0/9g$$

$$\text{درصد تغییرات جرم تیغه} = \frac{\text{تغییرات جرم}\uparrow\ 0/9}{\text{جرم اولیه تیغه}\downarrow\ 25}\times100=3/6$$

*(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۴۴)*

---

۱۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(ایمان حسین‌نژاد)*

آرایش الکترونی فشردهٔ اتم‌های روی و اکسیژن به ترتیب $[Ar]3d^{10}4s^2$ و $[He]2s^22p^4$ است که پس از انجام واکنش به صورت $[Ar]3d^{10}$ و $[He]2s^22p^6$ تغییر می‌کند، پس دو الکترون از زیرلایهٔ $4s$ کم شده (مجموع $n$ و $l$ برابر ۸) و دو الکترون به زیرلایهٔ $2p$ اضافه می‌شود (مجموع $n$ و $l$ برابر ۶)؛ بنابراین مجموع $n$ و $l$ ذرات واکنش‌دهنده به اندازهٔ ۲ واحد تغییر می‌کند.

*(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۴)*

## شیمی ۱

۱۱۱- **گزینهٔ «۲»** (پارسا عیوض‌پور)

$$۳O_۲(g) \rightarrow ۲O_۳(g)$$

$$?L\ O_۲ = ۱۰۰۰m^۳\ \text{آب} \times \frac{۱۰۰g\ O_۳}{۱m^۳\ \text{آب}} \times \frac{۱mol\ O_۳}{۴۸g\ O_۳} \times \frac{۳mol\ O_۲}{۲mol\ O_۳} \times \frac{۲۲/۴L\ O_۲}{۱mol\ O_۲} = ۷۰۰۰۰L\ O_۲$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۸۱)

---

۱۱۲- **گزینهٔ «۱»** (محمدرضا پورجاوید)

در نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی برای تبدیل گاز $CO_۲$ به مواد معدنی از منیزیم اکسید و کلسیم اکسید (و نه منیزیم (II) اکسید و کلسیم (II) اکسید) استفاده می‌کنند.

نکته: برای فلزاتی که فقط یک ظرفیت دارند در نام‌گذاری ترکیب‌های یونی حاصل از آن‌ها، بار کاتیون ذکر نمی‌شود.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۳)

---

۱۱۳- **گزینهٔ «۴»** (میلاد شیخ‌الاسلامی)

با استفاده از رابطهٔ زیر می‌توان حجم ثانویه را محاسبه کرد:

$$\frac{P_۱ \times V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲ \times V_۲}{T_۲} \Rightarrow \frac{P_۱ \times (h \times A)}{T_۱} = \frac{۱/۲۵P_۱ \times (h_۲ \times A)}{T_۱}$$

$$\Rightarrow h_۲ = ۰/۸h$$

توجه ۱: در رابطهٔ بالا حجم سیلندر استوانه‌ای شکل برابر با حاصل‌ضرب مساحت سطح مقطع $(A)$ در ارتفاع پیستون $(h)$ است.

توجه ۲: دقت کنید بر اساس صورت سؤال فشار ثانویه سیلندر برابر است با فشار اولیه + ۲۵٪ فشار اولیه یا به عبارتی ۱/۲۵ برابر فشار اولیه.

بر اساس معادلات بالا ارتفاع پیستون کم‌تر شده است پس پیستون به سمت پایین حرکت کرده.

برای محاسبهٔ درصد تغییرات داریم:

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{-۰/۲h}{h} \times ۱۰۰ = -۲۰٪$$

علامت منفی نشان دهندهٔ کاهش حجم می‌باشد پس حجم جدید، ۸۰ درصد حجم اولیه است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

---

۱۱۴- **گزینهٔ «۳»** (هادی مهدی‌زاده)

سوختن کامل: $۲C_۲H_۶ + ۷O_۲ \rightarrow ۴CO_۲ + ۶H_۲O$

سوختن ناقص: $۲C_۲H_۶ + ۵O_۲ \rightarrow ۴CO + ۶H_۲O$

دقت شود که به ازای مصرف ۲ مول اتان در سوختن کامل نسبت به سوختن ناقص، ۲ مول اکسیژن بیشتر مصرف شده است.

$$?L\ O_۲ = ۴۵g\ C_۲H_۶ \times \frac{۱mol\ C_۲H_۶}{۳۰g\ C_۲H_۶} \times \frac{۲mol\ O_۲}{۲mol\ C_۲H_۶} \times \frac{۲۲/۴L\ O_۲}{۱mol\ O_۲} = ۳۳/۶L\ O_۲$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱)

---

۱۱۵- **گزینهٔ «۱»** (روزبه رضوانی)

$$CO_۲ = ۰/۱۲۵ \quad Ar = ۰/۲ \quad O_۲ = ۰/۲۵ \quad N_۲ = ۰/۲۵$$

مجموعاً ۰/۸۲۵

$$CO = ۱ - ۰/۸۲۵ = ۱۷/۵٪$$

فرض بر اینکه مخلوط اولیه ۱۰۰ لیتر باشد:

$$۲۵L\ O_۲\ ,\ ۲۵L\ N_۲\ ,\ ۲۰L\ Ar\ ,\ ۱۲/۵L\ CO_۲\ ,\ ۱۷/۵L\ CO$$

$$۲CO + O_۲ \rightarrow ۲CO_۲$$

$$۲L \quad ۱L \quad ۲L$$

$$۱۷/۵L \quad ۸/۷۵L \quad ۱۷/۵$$

$O_۲$ باقی‌مانده $= ۲۵ - ۸/۷۵ = ۱۶/۲۵L$

$CO_۲$ در مخلوط جدید $= ۱۲/۵ + ۱۷/۵ = ۳۰L$

حجم گازها در مخلوط جدید $= ۲۰ + ۱۶/۲۵ + ۲۵ + ۳۰ = ۹۱/۲۵L$

$$\text{درصد حجمی } CO_۲ \text{ در مخلوط حاصل} = \frac{\text{حجم } CO_۲}{\text{حجم مخلوط}} \times ۱۰۰$$

$$= \frac{۳۰L}{۹۱/۲۵L} \times ۱۰۰ \simeq ۳۳$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۱)

---

۱۱۶- **گزینهٔ «۳»** (پیمان فوادوی مهر)

مجموع ضرایب مواد در معادله‌های زیر با هم برابر است:

$$N_۲(g) + ۳H_۲(g) \rightarrow ۲NH_۳(g)$$

$$CH_۴(g) + ۲O_۲(g) \rightarrow CO_۲(g) + ۲H_۲O(g)$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: نیتروژن و هیدروژن در دمای اتاق حتی در حضور جرقه و کاتالیزگر هم با هم واکنش نمی‌دهند و نیازمند شرایط خاصی هستند.

گزینهٔ «۲»: در واکنش هابر، همه واکنش دهنده‌ها به فراورده تبدیل نمی‌شوند و واکنش برگشت‌پذیر است.

گزینهٔ «۴»: امروزه فراورده‌های صنعتی گوناگون از $N_2$ تهیه می‌شود که $NH_3$ یکی از آنهاست.

*(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)*

---

۱۱۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

| نام یون | کلرید | سدیم | سولفات | منیزیم | کلسیم | پتاسیم | کربنات | برمید |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| نماد یون | $Cl^-$ | $Na^+$ | $SO_4^{2-}$ | $Mg^{2+}$ | $Ca^{2+}$ | $K^+$ | $CO_3^{2-}$ | $Br^-$ |
| میلی‌گرم یون در یک کیلوگرم آب دریا | ۱۹۰۰۰ | ۱۰۵۰۰ | ۲۶۵۵ | ۱۳۵۰ | ۴۰۰ | ۳۸۰ | ۱۴۰ | ۶۵ |

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: درست- یون‌های $_{11}Na^+$ و $_{12}Mg^{2+}$ هر دو ۱۰ الکترون در آرایش الکترونی خود دارند و هر دو به آرایش گاز نجیب $Ne$ می‌رسند.

گزینهٔ «۲»: درست- نقره کلرید $(AgCl)$ یک ترکیب نامحلول در آب می‌باشد.

گزینهٔ «۳»: درست- مطابق جدول بالا درست است.

گزینهٔ «۴»: نادرست- نسبت شمار اتم‌ها به عنصرها در باریم سولفات $(BaSO_4)$ برابر با $\frac{1+1+4}{3}=2$ خواهد بود.

*(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)*

---

۱۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

گزینهٔ «۱»: لازم است نمک $Na_3PO_4$ محلول در آب بوده و نمک $Ca_3(PO_4)_2$ به صورت رسوب باشد.

گزینهٔ «۲»: برای شناسایی یون $Cl^-$ لازم است رسوب $AgCl$ در فراورده‌های واکنش موجود باشد.

گزینهٔ «۴»: واکنش نوشته شده باید برعکس باشد. ضمن آنکه $AgNO_3$ نمکی محلول در آب بوده و $AgCl$ در آب نامحلول خواهد بود.

*(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۸۹ تا ۹۲)*

---

۱۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

$$\begin{cases} V_{\text{گازوئیل}} = 50\,L \\ d_{\text{گازوئیل}} = 0/85\frac{g}{mL} = 850\frac{g}{L} \end{cases} \Rightarrow m_{\text{گازوئیل}} = d\times V$$

$$= 850\times 50 = 42500\,g$$

$$400\,ppm = \frac{x}{42500}\times 10^6 \Rightarrow x = \frac{42500\times 400}{10^6} = 17\,g \text{ گوگرد}$$

مقدار گوگردی که در طول یک ماه در خودروی دیزلی می‌سوزد برابر است با:

$$S = 30\times 17 = 510\,g\ S \text{ در یک ماه}$$

$$S + O_2 \rightarrow SO_2$$

$$?g\ SO_2 = 510\,g\ S\times\frac{1\,mol\,S}{32\,g\,S}\times\frac{1\,mol\,SO_2}{1\,mol\,S}\times\frac{64\,g\,SO_2}{1\,mol\,SO_2} = 1020\,g\ SO_2$$

$$\text{مقدار } S \text{ سوخته در یک روز} = 17\,g$$

$$S + O_2 \rightarrow SO_2$$

$$?L\,O_2 = 17\,g\,S\times\frac{1\,mol\,S}{32\,g\,S}\times\frac{1\,mol\,O_2}{1\,mol\,S}\times\frac{22/4\,L\,O_2}{1\,mol\,O_2} = 11/9\,L\ O_2$$

$$\frac{11/9\,L \mid 20\%}{\text{هوا}\ ?\,L \mid 100\%} \Rightarrow \text{هوا}\ ?\,L = 59/5\,L$$

*(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱ و آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)*

---

۱۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(ایمان حسین‌نژاد)*

موارد اول و چهارم درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

مورد دوم: مقایسهٔ درصد جرمی آب در این سه محلول به صورت «دریای مدیترانه > دریای سرخ > دریای مرده» است.

مورد سوم: حلال جزئی از محلول است که حل‌شونده را در خود حل می‌کند و شمار مول‌های آن بیشتر است.

*(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۳ تا ۹۸)*

## شیمی ۲

۱۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا کیانی‌دوست)*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: قاووت به دلیل سطح تماس بیش‌تر با هوا از مغز آن زودتر فاسد می‌شود.

گزینهٔ «۲»: روغن‌های مایع به جهت دور ماندن از نور در ظروف مات نگهداری می‌شوند.

گزینهٔ «۳»: محیط‌های سرد، تاریک و خشک برای نگهداری مواد غذایی مناسب‌تر هستند.

*(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷)*

---

۱۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(هدی بهاری‌پور)*

$$CaCO_3 + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + CO_2 + H_2O$$

سرعت در ۲۰ تا ۳۰ ثانیه:

$$\bar{R} : \frac{0/030 - 0/025}{30 - 20} = \frac{0/005}{10} = 5\times10^{-4}\ mol/s$$

سرعت در ۱۰ تا ۵۰ ثانیه:

$$\bar{R} : \frac{0/035 - 0/005}{50 - 10} = \frac{0/03}{40} = 7/5\times10^{-4}\ mol/s$$

مجموع سرعت در این دو بازهٔ زمانی:

$$5\times10^{-4} + 7/5\times10^{-4} = 12/5\times10^{-4}\ mol/s$$

*(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)*

---

۱۲۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

تمام عبارت‌های داده شده درست هستند.

*(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷ و ۸۳)*

---

۱۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(میلاد شیخ‌الاسلامی)*

در نمودارهای غلظت ـ زمان، منحنی (یا خط)های صعودی مربوط به فرآورده‌ها می‌باشند زیرا رفته رفته به غلظت آن‌ها افزوده می‌شود و منحنی (یا خط)های نزولی مربوط به واکنش‌دهنده‌ها می‌باشند زیرا با گذر زمان از غلظت آن‌ها کاسته می‌شود. نکتهٔ مهم در تشخیص نمودار صحیح این است که تغییرات غلظت مواد باید متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها باشد. برای مثال در واکنش صورت سؤال ضریب $NO_2$ دو برابر ضریب $O_2$ است پس در طول واکنش قدرمطلق تغییرات غلظت $NO_2$، ۲ برابر تغییرات غلظت $O_2$ خواهد بود.

با توجه به توضیحات بالا، به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: نادرست، در واکنش صورت سؤال یک واکنش دهنده داریم پس در نمودار باید فقط یک منحنی نزولی داشته‌باشیم. در این گزینه دو منحنی نزولی داریم.

گزینهٔ «۲»: درست، یک منحنی نزولی مربوط به واکنش‌دهنده و دو منحنی صعودی مربوط به فرآورده‌ها داریم که تغییرات تمام مواد متناسب با ضریبشان است.

گزینهٔ «۳»: نادرست، طبق صورت سؤال واکنش باید کامل باشد یعنی غلظت واکنش‌دهنده به صفر برسد. در نمودار این گزینه غلظت واکنش‌دهنده به صفر نرسیده است.

گزینهٔ «۴»: نادرست، قبل از اتمام واکنش (زمان متناظر با خط‌چین) منحنی یکی از فرآورده‌ها $(O_2)$ شروع به افقی شدن کرده که این موضوع به معنی ثابت بودن غلظت آن ماده است در حالی‌که غلظت هر دو فرآوردهٔ گازی این واکنش تا لحظهٔ آخر رو به افزایش است.

*(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۹۰ و ۹۱)*

---

۱۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(پیمان خوابوی‌مهر)*

معادله واکنش پس از موازنه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$3As_2S_3 + 4H_2O + 28HNO_3 \rightarrow 6H_3AsO_4 + 9H_2SO_4 + 28NO$$

سرعت متوسط تولید $NO$ در ۱۰ ثانیه دوم برابر است با:

$$\bar{R}_{NO} = \frac{0/01\,mol}{\frac{1}{6}\,min} = 0/06\ mol.min^{-1}$$

سرعت متوسط تولید $H_2SO_4$، $\frac{9}{28}$ سرعت متوسط تولید $NO$ است، پس داریم:

$$\frac{9}{28}\times\frac{6}{100} \simeq 0/019\ mol.min^{-1}$$

*(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸ و ۹۰ و ۹۱)*

---

۱۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(پیمان خوابوی‌مهر)*

معادله واکنش پس از موازنه به‌صورت زیر است:

$$2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$$

حال داریم:

| ماده | $N_2O_5$ | $NO_2$ | $O_2$ |
|---|---|---|---|
| مول اولیه | ۰/۸ | ۰ | ۰ |
| مول نهایی | ۰/۸−۲x | +۴x | +x |

$$0/8 - 2x + 4x + x = 1/25 \Rightarrow x = 0/15$$

پس مقدار ۰/۳ مول از $N_2O_5$ تجزیه شده است:

$$\text{درصد } N_2O_5 \text{ تجزیه شده} = \frac{0/3}{0/8}\times100 = 37/5$$

سرعت متوسط واکنش با سرعت متوسط تولید $O_2$ برابر است زیرا ضریب یک دارد.

$$\bar{R}_{O_2} = \frac{0/15\,mol}{2L\times2/5\,min} = \frac{0/15}{5} = 0/03\ mol.L^{-1}.min^{-1}$$

*(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸ و ۹۰ و ۹۱)*

---

۱۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا کیانی‌دوست)*

چون انحلال آمونیوم نیترات گرماگیر است انرژی توسط سامانه جذب می‌شود نه آزاد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: صحیح؛ از این واکنش برای سرد کردن محل آسیب‌دیدگی استفاده می‌شود.

گزینهٔ «۳»: صحیح؛ هر دو واکنش انحلال کلسیم کلرید در آب و تولید اکسیژن از اوزون گرمازه می‌باشند.

گزینهٔ «۴»: فرض می‌کنیم ۱ مول از هر نمک در آب حل شده است. در این شرایط مطابق قانون هس گرمای مبادله شده بین سامانه و محیط برابر است با:

$$Q = (-83) + 26 = -57\,kJ$$

پس به‌طور کلی آنتالپی این فرایند منفی بوده و گرماده است و دمای آب بالا خواهد رفت.

*(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)*

---

۱۲۸- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا کیانی‌دوست)*

عبارت دوم نادرست است. خاک باغچه حاوی کاتالیزگرهای مناسب است و به اثر سطح تماس مربوط نمی‌شود.

*(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)*

---

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(پارسا عیوض‌پور)*

فقط مورد اول درست است.

بررسی موارد نادرست:

ب) افزودن محلول نقره نیترات به محلول سدیم کلرید باعث تشکیل سریع رسوب سفیدرنگ نقره کلرید می‌شود.

$$AgNO_3(aq) + NaCl(aq) \rightarrow NaNO_3(aq) + AgCl(s)$$

ج) ۳۰ درصد غذای جهان به زباله تبدیل می‌شود.

د) در واکنش ترمیت $Fe(l)$ تشکیل می‌شود و مایعات رسوب نمی‌کنند.

*(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۲، ۸۳، ۹۱ و ۹۲)*

---

۱۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(ایمان حسین‌نژاد)*

همهٔ موارد درست هستند.

*(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۲ و ۸۶ تا ۹۰)*