تمرین: آیا ضابطه‌ی زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟

$x = y^2 \qquad f = \{(x,y) \mid x = y^2\}$

$x = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

$(1,1)(1,-1) \in f \Rightarrow$ f تابع نیست

آیا ضابطه‌ی زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟

$x = y^3 + y$

$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1^3 + y_1 = y_2^3 + y_2 \Rightarrow y_1^3 - y_2^3 + y_1 - y_2 = 0$

$\Rightarrow (y_1 - y_2)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2\right) + (y_1 - y_2) = 0$

$\Rightarrow (y_1 - y_2)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2 + 1\right) = 0$

$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2 + 1 = 0 \end{cases}$

$y_1^2 + y_2 y_1 + \left(y_2^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow \Delta = y_2^2 - 4y_2^2 - 4 = -3y_2^2 - 4 \Rightarrow \Delta < 0$

ریشه ندارد ← غیرممکن ⇐ تابع هست

آیا ضابطه‌ی زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟

$x = \dfrac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$

$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

$\dfrac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} = \dfrac{y_2}{\sqrt{1 + y_2^2}} \qquad \left(a = b \Rightarrow a^2 = b^2\right)$

باید y_1 و y_2 هم علامت باشند.

$\xrightarrow{\uparrow 2} y_2^2\left(1 + y_1^2\right) = y_1^2\left(1 + y_2^2\right) \Rightarrow y_2^2 + \cancel{y_1^2 y_2^2} - y_1^2 - \cancel{y_1^2 y_2^2} = 0$

$\Rightarrow y_2^2 = y_1^2 \Rightarrow y_2 = \pm y_1$ امکان ندارد زیرا y_1 و y_2 باید هم علامت باشند

$\Rightarrow$ تابع هست $(y_2 = y_1)$

۱- برد تابع زیر را به دست آورید.

$y = \dfrac{2x - 5}{3x + 4}$

$3xy + 4y = 2x - 5 \Rightarrow x = \dfrac{4y + 5}{2 - 3y}$

$\Rightarrow 2 - 3y \neq 0 \Rightarrow y \neq \dfrac{2}{3} \qquad R_f : R - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

۲- برد تابع زیر را به دست آورید:

$y = x + \dfrac{1}{x - 4}$

$$\begin{cases} a+\frac{۱}{a}\geqslant ۲ \Rightarrow a+\frac{۱}{a}+۴\geqslant ۶ \\ a+\frac{۱}{a}\leqslant -۲ \Rightarrow a+\frac{۱}{a}+۴\leqslant ۲ \end{cases} \Rightarrow R_f=(-\infty,۲]\cup[۶,+\infty)$$

فصل دوم

جامعه‌ی آماری: مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء است که درباره‌ی اعضای آن می‌خواهیم موضوع و یا موضوعاتی را مطالعه کنیم.

مثال: محصولات کشاورزی استان مازندران و موضوع مورد مطالعه، انواع محصولات.

نمونه: زیرمجموعه‌ای از جامعه‌ی آماری است.

نمونه تصادفی ساده:

اگر امکان انتخاب هر فرد به عنوان عضوی از نمونه امکان‌پذیر باشد و قبل از انتخاب نمونه، نتوانیم با اطمینان بیش‌تر درباره‌ی حضور یا عدم حضور عده‌ای در نمونه قضاوت کنیم، نمونه تصادفی می‌باشد.

متغیرهای تصادفی: هر موضوعی که در عضوهای مختلف یک جامعه متفاوت باشد متغیر تصادفی می‌گویند.

انواع متغیرهای تصادفی:
- متغیر کمی : متغیرهایی هستند که قابل اندازه گیری اند. مانند تعداد غائبین یک کلاس
- متغیر کیفی: متغیرهایی هستند که قابل اندازه گیری نمی باشند. مانند گروه خونی افراد

انواع متغیرهای کیفی:
- کیفی ترتیبی: اگر در متغیرهای کیفی نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد کیفی ترتیبی گویند. مانند مراحل زندگی انسان (نوزادی - قبل از کودکی - کودکی و ...)
- کیفی اسمی: اگر متغیر کیفی ویژگی فوق را نداشته باشد به آن کیفی اسمی گویند. مانند: گروه خونی افراد

مثال: اگر خواسته باشیم یک متغیر کمی نسبتی بین ۱۴ و ۱۹ انتخاب کنیم. کدام عدد درست نمی‌باشد؟

۱) $\frac{۱۹+۱۴}{۲}$ ۲) ۱۷/۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴/۵

حل: گزینه‌ی ۳ زیرا عدد ۱۲ بین دو عدد ۱۴ و ۱۹ نمی‌باشد.

فصل پنجم:

نمودارها:

۱) نمودار میله‌ای:

نکته: از این نمودار بیش‌تر برای متغیرهای کمی گسسته و کیفی استفاده می‌کنند.

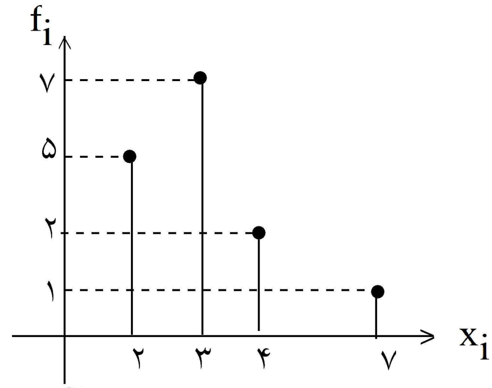
نکته: در این نمودار ترتیب قرار گرفتن میله‌ها اهمیت ندارد.

نکته: در این نمودار روی محور افقی نشان دسته (x_i) و روی محور عمودی فراوانی مطلق می‌باشد.

مثال: برای جدول زیر نمودار میله‌ای رسم کنید.

x_i	۲	۳	۴	۷
f_i	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

حل:



نمودار مستطیلی:

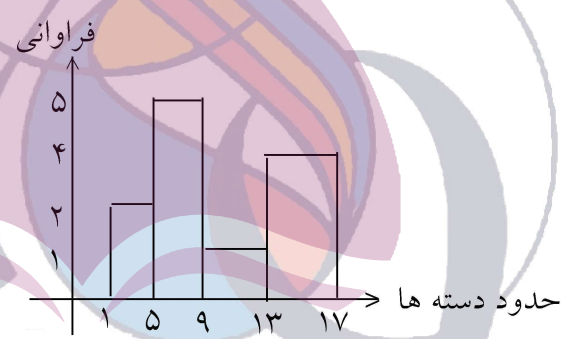
نکته: با این نمودار برای متغیرهای کمی پیوسته مناسب است.

نکته: روی محور افقی حدود دسته‌ها و روی محور عمودی فراوانی مطلق یا نسبی قرار می گیرد.

مثال: برای داده‌های زیر نمودار ستونی رسم کنید.

حدود دسته ها	۱ - ۵	۵ - ۹	۹ - ۱۳	۱۳ - ۱۷
فراوانی	۲	۵	۱	۴

حل:



نمودار دایره‌ای:

این نمودار مناسب برای متغیرهای کیفی است.

نکته: در این روش مساحت دایره به قطعه‌هایی تقسیم می‌شود که مساحت هر قطاع عبارت است از:

$S_i = \frac{f_i}{n} \times ۳۶۰$ زاویه مربوطه

مثال: در یک نمودار دایره‌ای نشان‌دهنده‌ی لیست‌های ۴۸ نفر کارمند یک موسسه است زاویه‌ی مرکزی مربوط به کارشناسان برابر ۴۵ درجه است. تعداد آنان چند نفر است؟

حل:

$$S_i = \frac{f_i}{n} \times ۳۶۰$$

$$۴۵ = \frac{f_i}{۴۸} \times ۳۶۰ \rightarrow f_i = \frac{۴۵ \times ۴۸}{۳۶۰} = ۶$$

نکته: اگر در نمودار دایره‌ای فراوانی داده‌ها را دو برابر کنیم زاویه مرکزی عوض نمی‌شود.

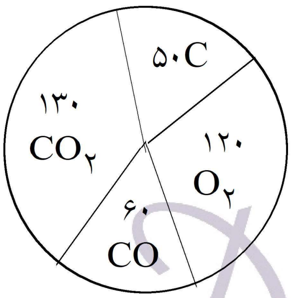
نکته: در نمودار دایره‌ای ترتیب قرار گرفتن نواحی مهم نمی‌باشد.

O	A	B	AB

خونی O در نمودار دایره‌ای را به دست آورید.

حل: $\frac{۱۲}{۶۰}\times ۱۰۰ = ۲۰\%$

شخصی به توصیه‌ی پزشک خود وارد محیطهایی که بیش از ۳۵% دی‌اکسیدکربن دارد نمی‌تواند وارد شود و در محیطهایی با دی‌اکسیدکربن ۲۰ تا ۳۵% باید از ماسک استفاده کند. در ورودی شهر نمودار مقابل رسم شده است. این فرد چه باید بکند؟



حل:

$$\frac{۱۳۰}{۳۶۰}\times ۱۰۰ = ۳۶$$

چون از ۳۵% بیشتر است این شخص نباید وارد این محدوده شود.

مثال: در یک بررسی آماری طول ۱۰۰ شاخه تیرآهن تولید شده به وسیله‌ی یک کارخانه مورد بررسی قرار گرفته است. نمودار مناسب برای بهتر نشان دادن تغییرات این متغیر کدام نمودار است.

حل: نمودار چند بر فراوانی تغییرات یک متغیر تصادفی پیوسته را بهتر نمایش می‌دهد.

۳- ۱) میانگین

نکته: اگر x_n , … , $x_۲$, $x_۱$ داده‌های آماری باشند در آن صورت میانگین آن‌ها را با نماد $\bar{x}$ نمایش می‌دهند، که عبارت است از: $\bar{x} = \frac{\sum(x_i)}{n} = \frac{x_۱ + x_۲ + \dots + x_n}{n}$

۴- مثال) ۱) اگر میانگین x_n , … , $x_۲$, $x_۱$ برابر ۱۳/۵ باشد، میانگین داده‌های ۱۹ , ۱۴ , $x_{۱۰}$, … , $x_۲$, $x_۱$ را بیابید.

حل) $\bar{x} = \frac{\sum(x_i)}{n} \rightarrow ۱۳/۵ = \frac{x_۱ + x_۲ + \dots + x_n}{۱۰} \rightarrow x_۱ + x_۲ + \dots + x_n = ۱۳۵$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{x_۱ + x_۲ + \dots + x_{۱۰} + ۱۴ + ۱۹}{۱۲} = \frac{۱۳۵ + ۱۴ + ۱۹}{۱۲} = \frac{۱۶۸}{۱۲} = ۱۴$$

نکته ۲) اگر داده‌های آماری دارای فراوانی باشند میانگین طبق فرمول زیر محاسبه می‌شود.

(میانگین وزن‌دار) $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{x_۱ f_۱ + x_۲ f_۲ + \dots + x_n f_n}{n}$

مثال: میانگین را در جدول مقابل بیابید.

x_i	۲	۴	۷	۸
f_i	۷	۶	۴	۳

$$\bar{x} = \frac{x_۱ f_۱ + x_۲ f_۲ + x_۳ f_۳ + x_۴ f_۴}{n} = \frac{۱۴ + ۲۴ + ۲۸ + ۲۴}{۲۰} = \frac{۹۰}{۲۰} = ۴/۵$$

نکته: $\sum f_i = f_۱ + f_۲ + \dots + f_n = n$

۵- نکته: اگر میانگین n داده برابر a و میانگین m داده برابر b باشد میانگین کل داده‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{na + mb}{n + m}$$

آورید؟ $\bar{x} = \frac{۵ \times ۸ + ۱۰ \times ۵}{۱۵} \to \bar{x} = \frac{۹۰}{۱۵} = ۶$

۷- نکته: اگر میانگین را از کلیه‌ی داده‌ها کم کنیم و باقیمانده‌ها را با هم جمع کنیم مجموع آنها صفر می‌شود.
یعنی $\sum (x_i - \bar{x}) = ۰$ یا $\sum f_i(x_i - \bar{x}) = ۰$

مثال: داده‌های ۶, ۳, ۲, ۱ را در نظر بگیرید.
میانگین این داده‌ها عبارت است از $\bar{x} = \frac{۱ + ۲ + ۳ + ۶}{۴} = ۳$

$x_i - \bar{x} \to ۱ - ۳ = -۲ , ۲ - ۳ = -۱ , ۳ - ۳ = ۰$ و $۶ - ۳ = ۳$

$\sum (x_i - \bar{x}) = (-۲) + (-۱) + ۰ + (۳) = ۰$

۸- نکته: اگر به تمام داده‌های آماری مقدار ثابتی اضافه یا کم شود میانگین نیز به همان مقدار اضافه یا کم می‌شود به عبارت دیگر $\overline{(x + a)} = \bar{x} + a$

۹- مثال:
اگر میانگین اعداد $x_۱ , x_۲ , \ldots , x_n$ برابر ۱۲ باشد میانگین اعداد $۲x_۱ + ۳, ۲x_۲ + ۳, \ldots, ۲x_n + ۳$ را به دست آورید.
حل) چون داده‌ها در ۲ ضرب و با ۳ جمع شده‌اند میانگین اعداد جدید نیز در ۲ ضرب و با ۳ جمع می‌شود.
جدید $\bar{x} = ۲ (۱۲) + ۳ = ۲۴ + ۳ = ۲۷$

نکته: برای محاسبه میانگین در جدول توزیع فراوانی مرکز دسته‌ها را مشخص می‌کنیم و آن را در فراوانی مربوطه ضرب می‌کنیم یعنی: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n}$
که x_i مرکز دسته (نشان دسته) و f_i فراوانی مطلق هر دسته است.

مثال: میانگین داده‌های آماری را به دست آورید.

$\bar{x} = \frac{۱۲ \times ۴ + ۱۵ \times ۶ + ۱۸ \times ۲}{۱۲} = \frac{۴۸ + ۹۰ + ۳۶}{۱۲} = \frac{۱۷۴}{۱۲} = ۱۴/۵$

حدود طبقات	۱۳-۱۱	۱۶-۱۴	۱۹-۱۷
فراوانی	۴	۶	۲

نکته: میانگین همواره عددی بین min , max می‌باشد.
مثال) اگر کمترین داده ۱۰ و بیشترین داده ۱۸ باشد میانگین کدام عدد می‌تواند باشد.
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۹
گزینه‌ی ۳: زیرا میانگین عددی بین min , max است.

مثال: اگر ضریب نمره‌ی مستمر ۱ و ضریب نمره‌ی پایانی ۲ و نمره‌ی مستمر هنرجویی در یک کلاس ۱۱ باشد و بخواهد معدلش در این درس ۱۵ شود، در امتحان پایانی چه نمره‌ای باید کسب کند.

$۱۵ = \frac{۱۱ \times ۱ + ۲x}{۳} \to ۴۵ = ۱۱ + ۲x \to ۳۴ = ۲x \to x = ۱۷$

۱۰- میانه: میانه عددی است که از نصف داده‌ها کمتر و از نصف داده‌ها بیشتر است.

ب) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، نصف مجموع دو داده‌ای که در وسط قرار گرفته‌اند میانه است.

۱۱- مثال: در هر حالت زیر میانه را به دست آورید.

الف) ۱۷ ,۱۹ ,۱۲ ,۱۴ ,۱۲ , ۱۱ ,۱۳   ب) ۲ ,۵ ,۷ ,۸ ,۱۱ ,۹ ,۸ ,۷

حل: الف) میانه عدد ۱۳ می‌باشد. ۱۹ ,۱۷ ,۱۴ ,۱۳ ,۱۲ ,۱۲ ,۱۱

ب) $۲, ۵, ۷, ۷, ۸, ۸, ۹, ۱۱ \rightarrow$ میانه $\frac{۷+۸}{۲} = ۷/۵$

۱۲- چند نکته مهم درباره‌ی میانه:

۱) میانه منحصر به فرد است.

۲) میانه داده‌ها ممکن است از داده‌ها نباشد.

۳) اگر عدد ثابتی به تمام داده‌ها اضافه (کم) شود این عدد نیز به میانه اضافه می‌شود.

۴) اگر تمام داده‌ها را در عددی ضرب کنیم. میانه نیز در همان عدد ضرب می‌شود.

۱۳- مثال: میانگین داده‌های ۸ ,۶ ,۵ ,x ,۲ ,۷ عدد ۷ می‌باشد میانه را به دست آورید.

$$\frac{۷+۲+x+۵+۶+۸}{۶} = ۷ \rightarrow ۲۸ + x = ۴۲ \rightarrow x = ۱۴$$

$$۲, ۵, ۶, ۷, ۸, ۱۴ \rightarrow \text{میانه } \frac{۶+۷}{۲} = ۶/۵$$

۱۴- چارک‌ها:

اگر جامعه آماری را به چهار قسمت تقسیم کنیم چارک‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

۱) چارک اول: عددی که از $\frac{۱}{۴}$ داده‌ها بیشتر و از $\frac{۳}{۴}$ داده‌ها کمتر باشد. با $Q_۱$ نمایش می‌دهند.

۲) چارک دوم: (میانه) عددی که از نصف داده‌ها بیشتر و از نصف داده‌ها کمتر باشد. با $Q_۲$ نمایش می‌دهند.

۳) چارک سوم: عددی که از $\frac{۱}{۴}$ داده‌ها کمتر و از $\frac{۳}{۴}$ داده‌ها بیشتر باشد. با $Q_۳$ نمایش می‌دهند.

چارک اوّل: میانه‌ی نیمه اول داده‌ها را چارک اوّل گویند.

چارک سوم: میانه‌ی نیمه دوم داده‌ها را چارک سوم گویند.

مثال: انحراف متوسط از میانگین داده‌های ۹ و ۷ و ۵ و ۱ را بیابید.

حل)

$$\bar{x} = \frac{۱+۵+۷+۹}{۴} = ۵/۵$$

انحراف از میانگین $\rightarrow$ ۴/۵ - , ۰/۵- , ۱/۵ , ۳/۵

$$A = \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{۴/۵ + ۰/۵ + ۱/۵ + ۳/۵}{۴} = \frac{۱۰}{۴} = ۲/۵$$

مثال: واریانس داده‌های ۱,۲,۳,۴,۵ را بیابید.

حل) $\bar{x} = \frac{۱+۲+۳+۴+۵}{۵} = ۳$

$$\delta^۲ = \frac{(۱-۳)^۲ + (۲-۳)^۲ + (۳-۳)^۲ + (۴-۳)^۲ + (۵-۳)^۲}{} = \frac{۱۰}{} = ۲$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^{۲}}{n}} \text{ یا } \delta = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^{۲}}{n}}$$

۱۶- چند نکته درباره واریانس و انحراف معیار:

۱) اگر داده‌های آماری با عددی جمع یا تفریق شوند در واریانس و انحراف معیار تغییری ایجاد نمی‌شود. یعنی

$$\delta^{۲}_{a+x} = \delta^{۲}_{x}$$

۲) اگر داده‌های آماری در عددی ضرب یا تقسیم شود، واریانس در توان دوم آن عدد ضرب می‌شود و انحراف معیار در قدر مطلق آن عدد ضرب می‌شود. $\delta_{ax} = |a|\delta_x$ و $\delta^{۲}_{ax} = a^{۲}\delta^{۲}_{x}$

۳) اگر همه داده‌ها برابر باشند واریانس و انحراف معیار صفر هستند.

۱۷- مثال: اگر انحراف معیار داده‌های ۱,۲,۳,۴,۵ برابر $\sqrt{۲}$ باشد انحراف معیار ۱۰- ,۸- ,۶- , ۴- ,۲- را به دست آورید.

حل: چون اعداد در ۲- ضرب شده‌اند انحراف معیار در قدرمطلق آن عدد ضرب می‌شود.

$$\delta_{\text{جدید}} = |-۲|\,\delta_{\text{قدیم}} \to \delta_{\text{جدید}} = ۲ \times \sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

۱۸- مثال: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x) = \frac{۷}{x - ۲} \Rightarrow D = R - \{۲\}$

۲) $f(x) = \frac{۸x - ۲}{x^{۲} - ۱۶}$

$$x^{۲} - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱۶ \Rightarrow x = \pm ۴ \Rightarrow D = R - \{+۴ , -۴\}$$

۳) $f(x) = \frac{۵x - ۱}{x^{۲} - ۵x + ۶}$

$$x^{۲} - ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۲ , x = ۳ \Rightarrow D = R - \{۲ , ۳\}$$

۱۹- مثال: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x) = \frac{۴}{|x| - ۵}$

$$|x| - ۵ = ۰ \Rightarrow |x| = ۵ \Rightarrow x = \pm ۵ \Rightarrow D = R - \{۵ , -۵\}$$

۲) $f(x) = \frac{۷x}{|x| + ۲}$

$$|x| + ۲ = ۰ \Rightarrow |x| = -۲ \text{ غ ق ق} \Rightarrow D = R - \{\ \} \to D = R$$

۳) $f(x) = \frac{۴x - ۱}{|x - ۲| - ۵}$

$$|x - ۲| - ۵ = ۰ \Rightarrow |x - ۲| = ۵ \Rightarrow x - ۲ = \pm ۵ \Rightarrow x = ۷ , x = -۳ \Rightarrow D = R - \{۷ , -۳\}$$

مثال ۱: $\frac{x - ۱}{۲} - ۴ = -\frac{x}{۳} \xrightarrow{\text{طرفین} \times ۶} \cancel{۶}^{۳} \times \left(\frac{x - ۱}{\cancel{۲}}\right) - ۶ \times ۴ = -\frac{x}{\cancel{۳}} \times \cancel{۶}^{۲}$

$$\Rightarrow ۳x + ۲x = +۳ + ۲۴ \Rightarrow ۵x = ۲۷ \Rightarrow \boxed{x = \frac{۲۷}{۵}}$$

مثال ۲:

$$\frac{(x - ۳)}{۴} + ۲x = ۱ + \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times\ ۴} \cancel{۴}^{۱} \times \left(\frac{x - ۳}{\cancel{۴}^{۱}}\right) + ۴ \times ۲x = ۴ \times ۱ + \cancel{۴}^{۲} \times \frac{۳}{\cancel{۲}^{۱}}$$

$$\Rightarrow x - ۳ + ۸x = ۴ + ۶ \longrightarrow x + ۸x = ۱۰ + ۳$$

$$\Rightarrow ۹x = ۱۳ \longrightarrow \boxed{x = \frac{۱۳}{۹}}$$

معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۷x + ۹}{۴} + x = \frac{۵x}{۲} + ۳$

۲) $\frac{۱}{۲}x - ۱ = \frac{۳}{۴}x + ۵$

۳) $۲x + ۹ = x - \frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱۴ - ۲c}{۵} = -\frac{۱}{۱۰}$

۵) $\frac{۵a - ۲}{۴} = ۳$

۶) $\frac{۲x - ۱}{۵} - \frac{x}{۴} = \frac{x + ۱}{۲}$

۷) $x - ۲ + ۲x = ۳$

۸) $-۶x - ۱ = ۱۰$

۹) $\frac{x + ۸}{۱۶} + ۱ = ۴ - x$

۱۰) $\frac{x - ۱}{۲} + \frac{x}{۳} = ۴$

۱۱) $x - ۲\,(۱ - x) = ۳$

پاسخ:

۱) $$\frac{۷x + ۹}{۴} + x = \frac{۵x}{۲} + ۳ \xrightarrow{\text{طرفین}\ \times\ ۴} \left(\frac{۷x + ۹}{\cancel{۴}_{۱}}\right) \times \cancel{۴}^{۱} + (x) \times ۴ = \left(\frac{۵x}{\cancel{۲}_{۱}}\right) \times \cancel{۴}^{۲} + ۳ \times ۴$$

$$\Rightarrow ۷x + ۹ + ۴x = ۱۰x + ۱۲ \xrightarrow[\text{مجهول یک طرف}]{\text{معلوم یک طرف}} ۷x + ۴x - ۱۰x = ۱۲ - ۹$$

$$\Rightarrow ۱x = ۳ \longrightarrow x = ۳$$

---

۲) $$\frac{۱}{۲}x - ۱ = \frac{۳}{۴}x + ۵ \xrightarrow{\times\ ۴} \left(\frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}}x\right) \times \cancel{۴}^{۲} - ۱ \times ۴ = \left(\frac{۳}{\cancel{۴}}x\right) \times \cancel{۴} + ۵ \times ۴$$

$$\Rightarrow ۲x - ۴ = ۳x + ۲۰ \longrightarrow ۲x - ۳x = ۲۰ + ۴ \longrightarrow -۱x = ۲۴$$

$$x = \frac{۲۴}{-۱} \longrightarrow x = -۲۴$$

---

۳) $$۲x + ۹ = x - \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times\ ۲} ۲x \times ۲ + ۹ \times ۲ = ۲ \times x - \frac{۱}{۲} \times ۲$$

$$\Rightarrow ۴x + ۱۸ = ۲x - ۱ \longrightarrow ۴x - ۲x = -۱۸ - ۱$$

$$\Rightarrow ۲x = -۱۹ \longrightarrow x = \frac{-۱۹}{۲}$$

۴) $\frac{۱۴ - ۲c}{۵} = -\frac{۱}{۱۰} \xrightarrow{\text{طرفین} \times ۱۰} \frac{(۱۴ - ۲c)}{\cancel{۵}} \times \cancel{۱۰}^{۲} = \left(-\frac{۱}{\cancel{۱۰}}\right) \times \cancel{۱۰}^{۱}$

$۲(۱۴ - ۲c) = -۱ \longrightarrow ۲۸ - ۴c = -۱ \longrightarrow -۴c = -۱ - ۲۸$

$-۴c = -۲۹ \longrightarrow c = \frac{-۲۹}{-۴} = \frac{۲۹}{۴}$

---

۵) $\frac{۵a - ۲}{۴} = ۳ \xrightarrow[\text{وسطین کنیم}]{\text{می توانیم طرفین}} ۵a - ۲ = ۳ \times ۴ \longrightarrow ۵a = ۱۲ + ۲$

$\Rightarrow ۵a = ۱۴ \longrightarrow a = \frac{۱۴}{۵}$

---

۶) $\frac{۲x - ۱}{۵} - \frac{x}{۴} = \frac{x + ۱}{۲} \xrightarrow[۲۰]{\text{طرفین} \times} \left(\frac{۲x - ۱}{۵} \times ۲۰\right) - \left(\frac{x}{۴}\right) \times ۲۰ = \left(\frac{x + ۱}{۲}\right) \times ۲۰$

$\left(\frac{۲x - ۱}{\cancel{۵}}\right) \times \cancel{۲۰}^{۴} - \left(\frac{x}{\cancel{۴}}\right) \times \cancel{۲۰}^{۵} = \left(\frac{x + ۱}{\cancel{۲}_{۱}}\right) \times \cancel{۲۰}^{۱۰} \longrightarrow ۸x - ۴ - ۵x = ۱۰x + ۱۰$

$\xrightarrow[\text{جدا}]{\text{معلوم و مجهول}} ۸x - ۵x - ۱۰x = ۱۰ + ۴ \longrightarrow -۷x = ۱۴$

$\Rightarrow x = \frac{۱۴}{-۷} \longrightarrow x = -۲$

---

۷) $x - ۲ + ۲x = ۳ \longrightarrow ۳x = ۳ + ۲ \longrightarrow ۳x = ۵ \longrightarrow x = \frac{۵}{۳}$

---

۸) $-۶x - ۱ = ۱۰ \longrightarrow -۶x = ۱۰ + ۱ \longrightarrow -۶x = ۱۱$

$\Rightarrow x = \frac{۱۱}{-۶} \longrightarrow x = \frac{-۱۱}{۶}$

---

۹) $\frac{x + ۸}{۱۶} + ۱ = ۴ - x \xrightarrow{\times ۱۶} \left(\frac{x + ۸}{\cancel{۱۶}}\right) \times \cancel{۱۶}^{۱} + ۱ \times ۱۶ = ۱۶\,(۴ - x)$

$x + ۸ + ۱۶ = ۶۴ - ۱۶x \longrightarrow x + ۱۶x = ۶۴ - \overset{-۲۴}{\cancel{۸ - ۱۶}}$

$۱۷x = +۴۰ \longrightarrow x = \frac{۴۰}{۱۷}$

---

۱۰) $\frac{x - ۱}{۲} + \frac{x}{۳} = ۴ \xrightarrow{\times ۶} \left(\frac{x - ۱}{\cancel{۲}}\right) \times \cancel{۶}^{۳} + \frac{x}{\cancel{۳}} \times \cancel{۶}^{۲} = ۴ \times ۶$

$۳x - ۳ + ۲x = ۲۴ \longrightarrow ۵x = ۲۴ + ۳ \longrightarrow ۵x = ۲۷ \longrightarrow x = \frac{۲۷}{۵}$

---

۱۱) $x - ۲(۱ - x) = ۳ \xrightarrow[\text{پخش می کنیم}]{\text{۲- را در پرانتز}} x - ۲ + ۲x = ۳$

$\Rightarrow ۳x = ۳ + ۲ \longrightarrow ۳x = ۵ \longrightarrow x = \frac{۵}{۳}$

رابطه‌ی خطی:

امروزه بسیاری از پدیده‌ها با هم در ارتباطند. مثل سن شما و مادرتان، سن مادر و سن پدرتان، رابطه‌ی بین اضلاع یک مربع و محیط آن، میزان درآمد یک کارگاه تولیدی و...

مثال ۱: پدر لاله از او ۳۰ سال بزرگ‌تر است. حال می‌توانیم سن لاله و پدرش را به زبان ریاضی به‌صورت مقابل بیان کنیم:

x سن لاله
y سن پدر
$\Rightarrow \boxed{y = x + ۳۰}$

مثال ۲: اگر اضلاع یک لوزی را a بنامیم و محیط آن‌را بخواهیم و محیط را b بنامیم، رابطه‌ای بین محیط و ضلع لوزی به‌صورت مقابل خواهد بود:

یک ضلع × ۴ = محیط لوزی

$\boxed{b = ۴a}$

اگر برای دو رابطه‌ای که مثال‌های بالا آمده‌اند، شکلی در صفحه‌ی مختصات رسم کنیم، به شکل یک خط راست درخواهد آمد. <u>به این نوع رابطه‌ها، رابطه‌ی خطی گویند.</u>

تذکر مهم: رابطه‌هایی که x و y دارای توان باشند، مثل $y = x^۲$ و یا بین x و y رابطه‌ی ضرب یا تقسیم وجود داشته باشد، مثل $۲xy = ۴ + ۱$ و یا x و y در توان دیده شوند، مثل $y = a^x$ رابطه‌ی خطی نیستند.

توجه: رابطه‌های خطی دارای یک خاصیت مشترکند و آن این‌که نسبت افزایش، یا کاهش یک متغیر به افزایش یا (کاهش) متغیر دیگر مقداری ثابت است.

مثال غیرخطی

x	۰	۱	۲	۳	۴
$y = x^۲$	۰	۱	۴	۹	۱۶

+۱ +۳ +۵ +۷

مثال خطی

x	۰	۱	۲	۳	۴
$y = ۲x - ۱$	-۱	۱	۳	۵	۷

+۲ +۲ +۲ +۲

کدام‌یک از روابط زیر خطی <u>نیست</u>؟

۱) $y = -۳x + ۲$
۲) $y = ۲x^۲ + ۱$
۳) $۲x + ۵y = -۱$
۴) $xy + ۲ = ۱$

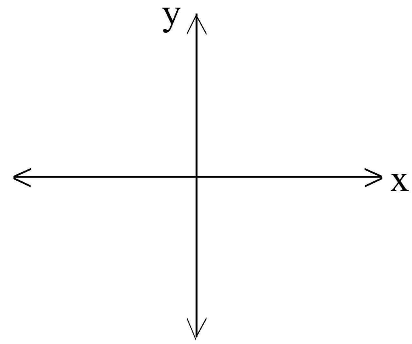
پاسخ: شماره‌های ۲ و ۴ خطی نیستند، زیرا در شماره‌ی ۲ توان x عدد ۲ است و در شماره‌ی ۴، $x \times y$ شده است.

کدام‌یک از روابط عنوان‌شده در زیر، خطی <u>نیستند</u>؟

۱) رابطه‌ی طول ضلع مربع و محیط آن مربع.
۲) رابطه‌ی طول ضلع مربع و مساحت آن.
۳) رابطه‌ی بین شعاع و محیط دایره.
۴) رابطه‌ی بین ساعت کار و دستمزد کارگری که ساعتی ۳۵۰۰ تومان حقوق می‌گیرد.

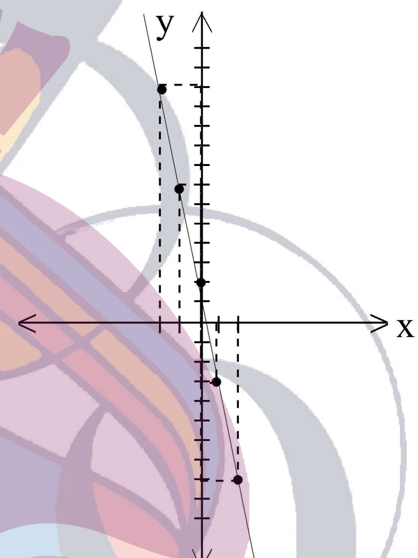
جدول زیر را کامل نموده و جدول را در صفحه‌ی مختصات رسم کنید و نشان دهید نمودار حاصل خطی است.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
y = -۵x + ۲						

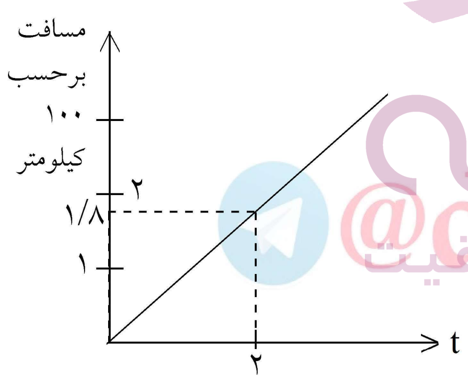


پاسخ:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
y = -۵x + ۲	۱۲	۷	۲	-۳	-۸	-۱۳



یک خودرو از تهران به سمت اصفهان در حرکت است. نمودار رابطه‌ی بین زمان و مسافتی که خودرو طی می‌کند، به شکل روبرو است. هر یک واحد روی محور افقی معادل یک ساعت و هر واحد روی محور عمودی معادل [redacted] کیلومتر است.



با توجه به این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱) این خودرو پس از ۲ ساعت از حرکتش چند کیلومتر با تهران فاصله دارد؟

۲) این خودرو پس از ۳ ساعت از حرکتش چند کیلومتر با تهران فاصله دارد؟

۳) این خودرو در هر ساعت چند کیلومتر راه می‌رود؟ نسبت مسافتی که خودرو طی می‌کند به زمان گذرانده‌شده چه‌قدر است؟ آیا این نسبت ثابت است؟

۴) اگر t نشان زمان گذشته برحسب ساعت و d نشان‌دهنده‌ی مسافت طی‌شده توسط خودرو باشد، چه رابطه‌ای بین t و d وجود دارد؟

پاسخ:

۱) $۱/۸ \times ۱۰۰ = ۱۸۰$ کیلومتر

۲) $\frac{۱۸۰}{۲} \times ۳ = ۲۷۰$ کیلومتر

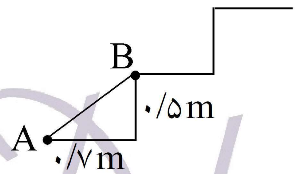
۳) $\frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰$ کیلومتر، بله، این نسبت ثابت است چون رابطه خطی است.

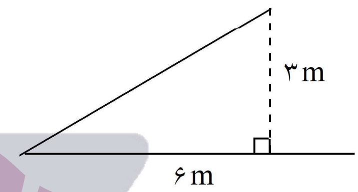
شیب و شیب خط:

هرگاه بخواهیم میزان شیب یک سربالایی را اندازه‌گیری کنیم، مقدار افزایش ارتفاع، به «مقدار مسافت افقی طی‌شده» را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{شیب یک سطح} = \frac{\text{میزان افزایش ارتفاع}}{\text{مسافت افقی طی شده}}$$

مثال: شیب هر یک از شکل‌های زیر را به‌دست آورید.

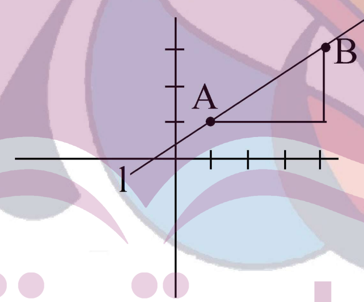




$$\text{شیب پله} = \frac{\text{میزان افزایش ارتفاع}}{\text{مسافت افقی طی شده}} = \frac{۰/۵}{۰/۷} = \frac{۵}{۷} = ۰/۷ \qquad \text{شیب سطح} = \frac{\text{میزان افزایش ارتفاع}}{\text{مسافت افقی طی شده}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

حال برای پیداکردن شیب یک خط در صفحه‌ی مختصات باید دو نقطه مثل $A\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$ را روی خط مشخص کنیم. در این صورت افزایش ارتفاع $y_۲ - y_۱$ و مسافت طی‌شده $x_۲ - x_۱$ خواهد بود.

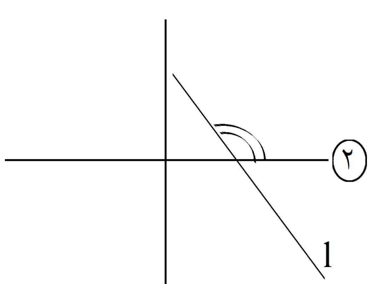
$$\text{شیب خط } l = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

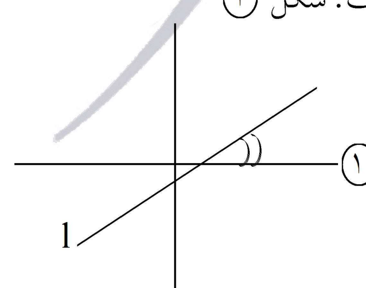


مثال: در شکل بالا $A\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ از خط l را داریم. شیب l برابر است با:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳-۱}{۴-۱} = \frac{۲}{۳}$$

نکته‌ی مهم: اگر با افزایش طول نقاط عرض نقاط هم افزایش پیدا کند، شیب مثبت و زاویه‌ای که خط با محور افقی می‌سازد، تند است. شکل ①





و اگر با افزایش طول، عرض نقاط کاهش یابد، شیب منفی و زاویه‌ای که خط l با محور افقی می‌سازد، زاویه‌ی باز است. شکل ②

حال می‌خواهیم معادله‌ی خطی را بنویسیم که یک نقطه از آن و شیب آن را داریم. اگر شیب خط m و یک نقطه از آن $\begin{bmatrix} x_۰ \\ \end{bmatrix}$ باشد، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$y - y_{۰} = m(x - x_{۰})$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۲- و یکی از نقاطش $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ باشد.

$m = -۲$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \begin{matrix} x_{۰} \\ y_{۰} \end{matrix} \longrightarrow y - y_{۰} = m(x - x_{۰})$

$$y - ۳ = -۲(x - ۱) \xrightarrow{\text{مرتب}} y - ۳ = -۲x + ۲$$

$$y = -۲x + ۲ + ۳$$

$$\boxed{y = -۲x + ۵}$$

حال اگر به‌جای شیب و یک نقطه از خط فقط دو نقطه از خط را داشته باشیم، چه کنیم؟

اگر دو نقطه مثل $A \begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ و $B \begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$ از یک خط را داشته باشیم:

۱) ابتدا با استفاده از فرمول شیب، شیب خط AB را به‌دست می‌آوریم. $m = \dfrac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$

۲) با استفاده از شیب و یکی از نقاط A یا B از فرمول $y - y_{۰} = m(x - x_{۰})$ استفاده کرده و معادله‌ی خط را به‌دست می‌آوریم.

نکته: استفاده‌کردن از هرکدام از نقاط A یا B فرقی ندارد و در آخر جواب معادله با هر یک از نقاط یکسان خواهد بود.

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $A \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ و $B \begin{bmatrix} -۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

ابتدا شیب: $m = \dfrac{-۳ - ۵}{-۱ - ۳} = \dfrac{-۸}{-۴} = +۲$

با استفاده از A: $y - ۵ = ۲(x - ۳) \Rightarrow y = ۲x - ۶ + ۵ \Rightarrow \boxed{y = ۲x - ۱}$

با استفاده از B: $y \overset{+}{-} (-۳) = ۲(x \overset{+}{-} (-۱)) \Rightarrow y + ۳ = ۲x + ۲ \Rightarrow y = ۲x + ۲ - ۳ \Rightarrow \boxed{y = ۲x - ۱}$

البته شما فقط از یکی از آن‌ها استفاده می‌کنید.

نکته: برای پیدا کردن شیب خط $ax + by = c$ باید ابتدا آن را مرتب کرده، به شکل $y = mx + b$ درآوریم تا بتوانیم شیب و عرض از مبدأ آن را پیدا کنیم.

$$ax + by = c \longrightarrow \frac{by}{b} = \frac{-ax}{b} + \frac{c}{b}$$

$-\dfrac{a}{b}$ شیب خط

$\dfrac{c}{b}$ عرض از مبدا خط

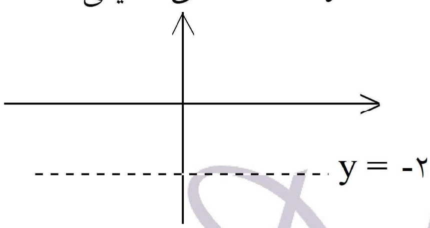
$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

مثال: شیب خط $۲y - ۵x = ۱$ را پیدا کنید.

$\frac{۵}{۲}$ = شیب خط   ۱ = عرض از مبدا

خطوط موازی با محورها:

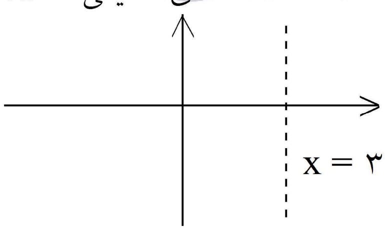
۱) خطوطی که پس از رسم، موازی با محور xها هستند، معادله‌شان به‌صورت $y = b$ که b عددی حقیقی است،



می‌باشد. مثال $y = -۲$

نکته‌ی مهم: این خطوط افقی هستند و شیب‌هایشان صفر است. شما می‌توانید این مطلب را با پیداکردن دو نقطه روی خط رسم شده و فرمول شیب تحقیق کنید.

۲) خطوطی که پس از رسم، موازی با محور yها هستند، معادله‌شان به‌صورت $x = a$ که a عددی حقیقی است،



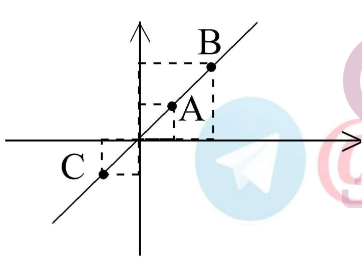
می‌باشد. مثال $x = ۳$

نکته مهم: شیب این خطوط تعریف نشده است.

اگر دو نقطه روی شکل $\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۳\\۰\end{bmatrix}$ را روی این خط در نظر بگیریم، شیب آن‌ها به‌صورت زیر خواهد شد:

$m = \frac{۱ - ۰}{۳ - ۳} = \frac{۱}{۰}$ تعریف نشده

مطلب مهم: همان‌طور که می‌دانید، در دستگاه مختصات چهار ربع یا ناحیه داریم. وقتی نیمساز ربع اول را رسم می‌کنیم، امتداد آن در ربع سوم قرار می‌گیرد.

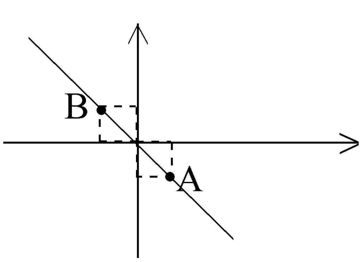


این خط خاصیت‌های مهمی دارد. معادله‌ی این خط به‌صورت $y = x$ است.

تمامی نقاطی که روی آن پیدا می‌کنیم، دارای طول و عرض برابرند.

$A\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۲\\۲\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right.$

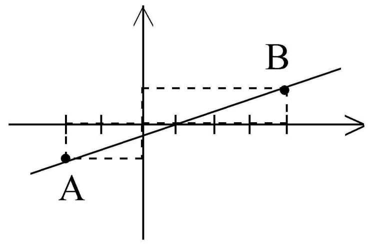
شیب این خط همان‌طور که می‌بینید، ۱ است و با سطح افق زاویه‌ی ۴۵° می‌سازد.



همچنین وقتی نیمساز ربع دوم و چهارم را رسم می‌کنیم، معادله‌ی آن به‌صورت $y = -x$ درمی‌آید. هر نقطه‌ی دلخواه روی این خط طول و عرضشان قرینه‌ی هم هستند، شیب این خط ۱- است.

$A\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۱\\۱\end{matrix}\right.$

در شکل مقابل، پس از پیداکردن مختصات A و B شیب گذرنده از خط AB را تعیین کنید.



پاسخ: از روی شکل مختصات A و B را پیدا کردیم.

$A \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \qquad B \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$

$A = \left| \begin{matrix} -۲ \\ -۱ \end{matrix} \right. \qquad B = \left| \begin{matrix} ۴ \\ ۱ \end{matrix} \right.$

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{۱ - (-۱)}{۴ - (-۲)} = \dfrac{۱ + ۱}{۴ + ۲} = \dfrac{۲}{۶} = \dfrac{۱}{۳}$ شیب AB

در هر مورد داده‌شده، معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$

ب) $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$

پاسخ:

الف) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{۵ - ۳}{۱ - ۳} = \dfrac{۲}{-۲} = -۱$ شیب خط AB

$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۵ = -۱\ (x - ۱) \Rightarrow y = -x + ۱ + ۵ \Rightarrow y = -x + ۶$

ب) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-۱ - ۲}{۵ - (-۱)} = \dfrac{-۳}{۶} = -\dfrac{۱}{۲}$ شیب خط AB

$y - y_۰ = m\ (x - x_۰) \Rightarrow y - (-۱) = -\dfrac{۱}{۲}(x - ۵) \Rightarrow y + ۱ = -\dfrac{۱}{۲} + \dfrac{۵}{۲}$

$y = -\dfrac{۱}{۲}x + \dfrac{۵}{۲} - ۱ \Rightarrow y = -\dfrac{۱}{۲}x + \dfrac{۳}{۲}$

ج) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-۴ - ۰}{-۱ - ۱} = -\dfrac{۴}{-۲} = +۲$ شیب خط AB

$y - y_۰ = m(x - x_۰) \longrightarrow y - (-۴) = ۲\ (x - (-۱)) \Rightarrow y + ۴ = ۲x + ۲$

$\Rightarrow y = ۲x - ۲$

معادله‌ی خطی را بنویسید که عرض از مبدأ آن ۲- و شیب آن $\frac{۱}{۳}$ باشد.

پاسخ: عرض از مبدأ ۲- و شیب خط $\frac{۱}{۳}$

$y = mx + b$

$b = -۲$ و $m = \frac{۱}{۳} \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x - ۲$

معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix}۴\\۷\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}۴\\۰\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

پاسخ: ابتدا به‌وسیله‌ی دو نقطه‌ی A و B شیب خط AB را به‌دست می‌آوریم.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۰ - ۷}{۴ - ۴} = \frac{۷}{۰}$$ تعریف نشده

این خط موازی محور yهاست که در درس‌نامه راجع به آن گفتیم. معادله خط $\boxed{x = ۴}$

معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix}۰\\-۵\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}۵\\-۵\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

پاسخ: این خط هم موازی با محور x هاست. چون در هر دو، عرض نقطه ۵- است. $\boxed{y = -۵}$

معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ای به عرض ۳ روی خط $۳x + y = ۶$ می‌گذرد و:

الف) موازی محور xها است.

ب) موازی با خط $x = -۱$ است.

پاسخ: نقطه‌ای به عرض ۳ یعنی باید ۳ را به خط بدهیم تا طول مورد نظر هم به‌دست آید. نقطه‌ی به‌دست آمده متعلق به خط جدید نیز هست.

$$۳x + y = ۶ \longrightarrow ۳x + ۳ = ۶ \longrightarrow ۳x = ۳ \longrightarrow \boxed{x = ۱}$$

الف) نقطه‌ی مورد نظر $\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ و موازی محور xها. پس معادله به‌صورت $y = ۳$ درمی‌آید.

ب) موازی $x = -۱$، پس موازی محور yهاست. پس به‌صورت $x = ۱$ درمی‌آید.

به ازای کدام مقدار m خط $mx + y - ۵ = ۰$ موازی محور xها است.

پاسخ: اگر خط موازی محور xها باشد و $mx = ۰$ خواهد شد تا معادله به‌صورت $y - ۵ = ۰$ درآید. پس:

$$mx = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۰}$$

معادلاتی که پس از ساده‌کردن بالاترین درجه‌ی متغیرشان ۲ باشد، را معادلات درجه‌ی ۲ می‌نامند.

مثال: $x^۲ - ۳ = ۰$ $x^۲ + ۲x + ۸ = ۰$

برای حل این نوع معادلات روش‌های مختلفی وجود دارد که ما مهم‌ترین آن‌ها را بررسی خواهیم کرد.

۴) روش تجزیه:

در این روش با کمک فاکتورگیری و یا با استفاده از اتحادها عبارت مورد نظر را به‌صورت دو حاصل‌ضرب چند عبارت درمی‌آوریم که مساوی صفر است. با توجه به این‌که اگر $a . b = ۰$ باشد، نتیجه می‌گریم که یا $a = ۰$ و یا $b = ۰$. هر یک از عبارت‌های تجزیه‌شده را برابر صفر قرار داده، جواب معادله را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱:

$$x^۲ - ۶x = ۰ \xrightarrow{\text{روش فاکتورگیری}} x(x - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases}\boxed{x = ۰}\\ x - ۶ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۶}\end{cases}$$

چون $x(x - ۶)$ برابر صفر شد، پس یا x صفر است و یا $x - ۶$ برابر صفر است که از هر دوی این‌ها نتیجه می‌گریم یا x صفر و یا برابر عدد ۶ است.

$$x^۲ + ۱۳x - ۳۰ = ۰ \xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{اتحاد}} (x + ۱۵)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = -۱۵} \\ x - ۲ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۲} \end{cases}$$

مثال ۳: معادله‌ی $۳x^۳ - ۴۸x = ۰$ را به روش تجزیه حل کنید.

$$۳x^۳ - ۴۸x = ۰ \xrightarrow[۳x]{\text{فاکتورگیری از}} ۳x\underbrace{(x^۲ - ۱۶)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = ۰ \longrightarrow ۳x(x - ۴)(x + ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ \text{یا} \\ x - ۴ = ۰ \\ \text{یا} \\ x + ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \\ x = -۴ \end{cases}$$

روش تجزیه، روش بسیار مفیدی است.

فقط همه‌ی معادلات را نمی‌توان تجزیه کرد.

۵) روش مربع کامل:

روش مربع کامل همان روش خوارزمی است، با این تفاوت که در روش خوارزمی مسأله از طریق مساحت و در روش مربع کامل از روش جبری حل می‌شود. برای حل از این روش، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

۱) ضریب $x^۲$ اگر غیر از ۱ بود، باید از بین برود. پس تمامی جملات معادله را بر ضریب $x^۲$ تقسیم می‌نماییم.

۲) در معادله‌ای مثل $x^۲ + ۶x - ۱ = ۰$ عدد ثابت ۱- را به سمت راست معادله منتقل می‌کنیم.

۳) ضریب x را به ۲ تقسیم کرده، به توان ۲ می‌رسانیم و به طرفین معادله اضافه می‌کنیم.

$$\left(\frac{\text{ضریب } x}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{۶}{۲}\right)^۲ = (۳)^۲ = ۹ \longrightarrow x^۲ + ۶x + \underline{۹} = ۱ + \underline{۹}$$

۴) حال در طرف چپ معادله، اتحاد اول (مربع دوجمله‌ای) داریم. آن را به شکل اولیه‌ی اتحاد می‌نویسیم.

$$(x + ۳)^۲ = ۱۰$$

۵) برای از بین‌بردن توان ۲ در سمت چپ از طرفین ریشه‌ی دوم می‌گیریم.

$$\sqrt{(x + ۳)^۲} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow x + ۳ = \pm\sqrt{۱۰} \Rightarrow x = \begin{cases} -۳ - \sqrt{۱۰} \\ -۳ + \sqrt{۱۰} \end{cases}$$

به این طریق معادلات درجه‌ی ۲ را به روش مربع کامل حل می‌نماییم.

مثال ۱:

$$x^۲ - ۴x - ۲۱ = ۰ \longrightarrow x^۲ - ۴x = ۲۱$$

$$\left(\frac{\text{ضریب } x}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{۴}{۲}\right)^۲ = ۴ \xrightarrow[\text{اضافه می کنیم}]{\text{به طرفین ۴ را}} x^۲ - ۴x + \underline{۴} = ۲۱ + \underline{۴}$$

$$x^۲ - ۴x + ۴ = ۲۵ \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله ای}} (x - ۲)^۲ = ۲۵ \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} \sqrt{(x - ۲)^۲} = \sqrt{۲۵}$$

$$\longrightarrow x - ۲ = \pm ۵ \longrightarrow x = \begin{cases} +۲ - ۵ = -۳ \\ +۲ + ۵ = ۷ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -۳ \\ x = +۷ \end{cases}$$

مثال ۲: $$۳x^۲ - ۶x + ۱ = ۰ \xrightarrow[\text{تا ضریب } x \text{ از بین برود}]{\text{طرفین تقسیم بر ۳}} \frac{۳x^۲}{۳} - \frac{۶x}{۳} + \frac{۱}{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x = -\frac{۱}{۳} \xrightarrow[\text{به طرفین اضافه می شود}]{\left(\frac{\text{ضریب } x}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{۲}{۲}\right)^۲ = ۱} x^۲ - ۲x + ۱ = -\frac{۱}{۳} + ۱$$

$$\longrightarrow (x - ۱)^۲ = \frac{۲}{۳} \longrightarrow \sqrt{(x - ۱)^۲} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \longrightarrow x - ۱ = \pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{۲}{۳}} + ۱ \\ x = +\sqrt{\frac{۲}{۳}} + ۱ \end{cases}$$

۶) روش کلی:

فرمول کلی معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت $ax^۲ + bx + c = ۰$ می‌باشد. با تبعیت از فرمول‌های به‌دست آمده از فعالیت کتاب، جواب‌های مسأله را به‌دست می‌آوریم.

توجه: با این‌که در این‌جا به کاربرد فرمول‌ها نیاز داریم، از اثبات فرمول‌ها صرف‌نظر می‌کنیم.

فرمول مقابل را در نظر می‌گیریم. $ax^۲ + bx + c = ۰ \longrightarrow$

a و b و c را که به‌ترتیب ضریب $x^۲$ و ضریب x و عدد ثابت هستند را از معادله جدا می‌کنیم. و در فرمول $\Delta = b^۲ - ۴ac$ قرار می‌دهیم.

اگر حاصل این عبارت عددی بزرگ‌تر از صفر شد، $(\Delta > ۰)$ می‌گوییم معادله دو جواب دارد و برای به‌دست‌آوردن جواب‌های معادله از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases}$$

۲) اگر حاصل $b^۲ - ۴ac$ برابر صفر شد، $(\Delta = ۰)$ آن‌گاه معادله ۱ جواب دارد و این جواب از فرمول $x = \frac{-b}{۲a}$ به‌دست می‌آید.

۳) اگر حاصل $b^۲ - ۴ac$ کوچک‌تر از صفر شد (منفی) $(\Delta < ۰)$، آن‌گاه معادله اصلاً جوابی ندارد.

معادله‌ی روبه‌رو را به روش کلی حل کنید. $۲x^۲ - ۵x - ۳ = ۰$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۵)^۲ - ۴ \times (۲)(-۳)$$

چون $\Delta > ۰$ شد، پس دو جواب داریم. $\Delta = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹ > ۰$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۵ - \sqrt{۴۹}}{۲ \times ۲} = \frac{۵ - ۷}{۴} = \frac{-۲}{۴} = \boxed{-\frac{۱}{۲}}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۵ + \sqrt{۴۹}}{۲ \times ۲} = \frac{۵ + ۷}{۴} = \frac{۱۲}{۴} = \boxed{۳}$$

معادله‌ی روبه‌رو را به روش کلی حل کنید. $x^۲ - x + ۸ = ۰$

$a = ۱ \quad b = -۱ \quad c = ۸ \qquad \Delta = b^۲ - ۴ac \Rightarrow \Delta = (-۱)^۲ - ۴ \times ۸ \times ۱ = ۱ - ۳۲ = -۳۱$

$\Delta = ۱ - ۳۲ = -۳۱ < ۰ \Rightarrow$ چون $\Delta < ۰$ (منفی)، پس معادله جواب ندارد.

معادله‌ی روبه‌رو را به روش کلی حل کنید. $۹x^۲ - ۶x + ۱ = ۰$

$a = ۹ \quad b = -۶ \quad c = ۱$

$\Delta = b^۲ - ۴ac \longrightarrow \Delta = (-۶)^۲ - ۴(۹)(۱) \longrightarrow \Delta = ۳۶ - ۳۶ = ۰$

چون $\Delta = ۰$ شد، پس معادله یک جواب دارد.

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{+۶}{۲ \times ۹} = \frac{۶}{۱۸} \longrightarrow \boxed{x = \frac{۱}{۳}}$$

۲) به روش تجزیه:

۱) $x^۲ - ۶x - ۱۶ = ۰$ ۲) $۷x - x^۲ = ۰$

۳) $۲x^۲ - ۳۰x + ۷۲ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۱۰x + ۲۵ = ۰$

۵) $۴x(x - ۱) = ۳$ ۶) $۳x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$

۷) $x^۲ - ۲۴ = ۱۰x$ ۸) $x^۲ - ۱۱x - ۶۰ = ۰$

پاسخ:

۱) $x^۲ - ۶x - ۱۶ = ۰ \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x - ۸)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۸ = ۰ \Rightarrow x = ۸ \\ x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$

---

۲) $۷x - x^۲ = ۰ \Rightarrow x(۷ - x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۷ - x = ۰ \Rightarrow \boxed{۷ = x} \\ \boxed{x = ۰} \end{cases}$

---

۳) $۲x^۲ - ۳۰x + ۷۲ = ۰ \longrightarrow ۲\left(x^۲ - ۱۵x + ۳۶\right) = ۰$

$\Rightarrow ۲(x - ۱۲)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱۲ = ۰ \\ x - ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = ۱۲} \\ \boxed{x = ۳} \end{cases}$

---

۴) $x^۲ - ۱۰x + ۲۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۵)^۲ = ۰ \Rightarrow x - ۵ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۵}$

$$۵)\ ۴x(x - ۱) = ۳ \xrightarrow{\text{۴x را پخش می کنیم}} ۴x^۲ - ۴x = ۳ \Rightarrow ۴x^۲ - ۴x - ۳ = ۰$$

$$(۲x)^۲ - ۲\,(۲x) - ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{جمله مشترک می کنیم}} (۲x - ۳)(۲x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۳ = ۰ \longrightarrow \boxed{x = \frac{۳}{۲}} \\ ۲x + ۱ = ۰ \longrightarrow \boxed{x = -\frac{۱}{۲}} \end{cases}$$

$$۶)\ ۳x^۲ - ۵x + ۲ = ۰ \xrightarrow[\text{تجزیه می کنیم}]{\text{به روش A}} A = ۳x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین} \times ۳} ۳A = ۹x^۲ - ۵(۳x) + ۶ \Rightarrow ۳A = (۳x - ۳)(۳x - ۲)$$

$$\Rightarrow (۳x - ۳)(۳x - ۲) = ۳A \Rightarrow \cancel{۳}(x - ۱)(۳x - ۲) = \cancel{۳}A$$

$$\Rightarrow (x - ۱)(۳x - ۲) = ۰ \begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۱} \\ ۳x - ۲ = ۰ \longrightarrow \boxed{x = \frac{۲}{۳}} \end{cases}$$

$$۷)\ x^۲ - ۲۴ = ۱۰x \longrightarrow x^۲ - ۱۰x - ۲۴ = ۰ \longrightarrow (x - ۱۲)(x + ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱۲ = ۰ \longrightarrow \boxed{x = ۱۲} \\ x + ۲ = ۰ \longrightarrow \boxed{x = -۲} \end{cases}$$

$$۸)\ x^۲ - ۱۱x - ۶۰ = ۰ \longrightarrow (x + ۴)(x - ۱۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x + ۴ = ۰ \\ x - ۱۵ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -۴} \\ \boxed{x = +۱۵} \end{cases}$$

$$(x + ۴)(x - ۱۵) = ۰$$

$$\begin{cases} x + ۴ = ۰ \longrightarrow x = -۴ \\ x - ۱۵ = ۰ \longrightarrow x = ۱۵ \end{cases}$$

۴) به روش مربع کامل:

$۱)\ x^۲ + ۶x = -۲$

$۲)\ x^۲ - ۴x = ۲۱$

$۳)\ x^۲ - ۶x = -۵$

$۴)\ ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

$۵)\ x(x - ۴) = ۳$

$۶)\ ۹x^۲ + ۹x + ۲ = ۰$

پاسخ:

$۱)\ x^۲ + ۶x = -۲$

$$۱)\ (\text{نصف ضریب}\ x)^۲ = \left(\frac{۶}{۲}\right)^۲ = ۳^۲ = ۹ \xrightarrow[\text{اضافه می کنیم}]{\text{۹ را به طرفین}} x^۲ + ۶x + ۹ = -۲ + ۹$$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد اول}]{\text{طرف چپ}} (x + ۳)^۲ = ۷ \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} x + ۳ = \pm\sqrt{۷} \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ - \sqrt{۷} \\ x = -۳ + \sqrt{۷} \end{cases}$$

۲) $x^۲ - ۴x = ۲۱ \longrightarrow \left(\frac{\text{ضریب } x}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{۴}{۲}\right)^۲ = ۲^۲ = ۴ \xrightarrow[\text{اضافه می کنیم}]{\text{به طرفین}} x^۲ - ۴x + ۴ = ۲۱ + ۴$

$\Rightarrow (x - ۲)^۲ = ۲۵ \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \sqrt{(x - ۲)^۲} = \sqrt{۲۵}$

$x - ۲ = \pm ۵ \Rightarrow \begin{cases} x = +۲ + ۵ \\ x = +۲ - ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = ۷} \\ \boxed{x = -۳} \end{cases}$

---

۳) $x^۲ - ۶x = -۵ \longrightarrow \left(\frac{-۶}{۲}\right)^۲ = ۹ \longrightarrow x^۲ - ۶x + ۹ = -۵ + ۹$

$(x - ۳)^۲ = ۴ \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \sqrt{(x - ۳)^۲} = \sqrt{۴} \Rightarrow x - ۳ = \pm ۲ \longrightarrow \begin{cases} x = +۳ - ۲ = ۱ \\ x = +۳ + ۲ = ۵ \end{cases}$

---

۴) $۲x^۲ + ۳x = -۱ \xrightarrow{\text{طرفین} \div ۲} x^۲ + ۳x + \frac{۱}{۲} = ۰$

$(\text{نصف ضریب } x)^۲ = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ = \frac{۹}{۴} \longrightarrow x^۲ + ۳x + \frac{۹}{۴} = \frac{۹}{۴} - \frac{۱ \times ۲}{۲ \times ۲} \Rightarrow \left(x + \frac{۳}{۲}\right)^۲ = \frac{۷}{۴}$

$\longrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{۳}{۲}\right)^۲} = \sqrt{\frac{۷}{۴}} \Rightarrow x + \frac{۳}{۲} = \pm \frac{\sqrt{۷}}{۲} \longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{۳}{۲} - \frac{\sqrt{۷}}{۲} \\ x = -\frac{۳}{۲} + \frac{\sqrt{۷}}{۲} \end{cases}$

---

۵) $x(x - ۴) = ۳ \longrightarrow x^۲ - ۴x = ۳ \xrightarrow[\text{به طرفین اضافه می کنیم}]{(\text{نصف ضریب } x)^۲} x^۲ - ۴x + ۴ = ۳ + ۴$

$(x - ۲)^۲ = ۷ \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt{(x - ۲)^۲} = \sqrt{۷} \longrightarrow x - ۲ = \pm\sqrt{۷} \Rightarrow x = \begin{cases} +۲ - \sqrt{۷} \\ +۲ + \sqrt{۷} \end{cases}$

---

۶) $۹x^۲ + ۹x + ۲ = ۰ \xrightarrow[\text{ضریب } x^۲]{\text{طرفین تقسیم بر}} \frac{۹x^۲}{۹} + \frac{۹x}{۹} + \frac{۲}{۹} = ۰ \Rightarrow x^۲ + x = \frac{-۲}{۹}$

$\xrightarrow{\left(\frac{\text{ضریب } x}{۲}\right)^۲} x^۲ + x + \frac{۱}{۴} = \frac{-۲}{۹} + \frac{۱}{۴} \longrightarrow \left(x + \frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{-۸ + ۹}{۳۶} \longrightarrow \left(x + \frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۳۶}$

$$\longrightarrow x+\frac{۱}{۲}=\pm\frac{۱}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{۱\times۳}{۲\times۳}-\frac{۱}{۶}\\x=-\frac{۱\times۳}{۲\times۳}+\frac{۱}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-۳-۱}{۶}=\frac{-۴}{۶}=\frac{-۲}{۳}\\x=\frac{-۳+۱}{۶}=\frac{-۲}{۶}=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

۵) به روش کلی:

۱) $x^۲-\sqrt{۳}x+۳=۰$ ۲) $۹x^۲+۶x+۱=۰$

۳) $۲x^۲+۵x-۳=۰$ ۴) $\sqrt{۲}x^۲+\sqrt{۲}x-۱=۰$

۵) $۴x^۲+۴x+۱=۰$ ۶) $x^۲+\sqrt{۳}x-۶=۰$

پاسخ: ۱) $x^۲-\sqrt{۳}x+۳=۰$ $a=۱$ $b=-\sqrt{۳}$ $c=۳$

$$\Delta=b^۲-۴ac=\left(-\sqrt{۳}\right)^۲-۴\times۱\times۳=۳-۱۲=-۹<۰$$

یعنی معادله جواب ندارد و کار را ادامه نمی‌دهیم.

---

۲) $۹x^۲+۶x+۱=۰$ $a=۹$, $b=۶$, $c=۱$

$$\Delta=b^۲-۴ac\longrightarrow\Delta=۶^۲-۴\times۹\times۱=۳۶-۳۶=۰$$

$\Delta=۰$ هرگاه $\Delta=۰$ شد، معادله یک جواب دارد.

$$x=\frac{-b}{۲a}=-\frac{۶}{۲\times۹}=\frac{-۶}{۱۸}=\boxed{\frac{-۱}{۳}}$$

---

۳) $۲x^۲+۵x-۳=۰$ $a=۲$, $b=۵$, $c=-۳$

معادله جواب دارد $\Delta=b^۲-۴ac\Rightarrow۵^۲-۴\times۲\times-۳\geqslant۲۵+۲۴=۴۹>۰$

$$x_۱=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۵-\sqrt{۴۹}}{۲\times۲}=\frac{-۵-۷}{۴}=\boxed{-\frac{۱۲}{۴}=-۳}$$

$$x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۵+\sqrt{۴۹}}{۲\times۲}=\frac{-۵+۷}{۴}=\boxed{\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}}$$

---

۴) $\sqrt{۲}\,x^۲+\sqrt{۲}\,x-۱=۰$ $a=\sqrt{۲}$ $b=\sqrt{۲}$ $c=-۱$

معادله جواب دارد $\Delta=b^۲-۴ac=\left(\sqrt{۲}\right)^۲-۴\times\left(\sqrt{۲}\right)\times(-۱)=۲+۴\sqrt{۲}>۰$

$$x_۱ = \frac{-\sqrt{۲} - \sqrt{۲ + ۴\sqrt{۲}}}{۲\sqrt{۲}} \quad , \quad x_۲ = \frac{-\sqrt{۲} + \sqrt{۲ + ۴\sqrt{۲}}}{۲\sqrt{۲}}$$

---

۵) $۴x^۲ + ۴x + ۱ = ۰ \longrightarrow a = ۴ \quad , \quad b = ۴ \quad , \quad c = ۱$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۴^۲ - ۴ \times ۴ \times ۱ = ۱۶ - ۱۶ = ۰ \qquad \Delta = ۰$ معادله یک جواب دارد

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲ \times ۴} = \boxed{\frac{-۱}{۲}}$$

---

۶) $x^۲ + \sqrt{۳}x - ۶ = ۰ \qquad a = ۱ \quad , \quad b = \sqrt{۳} \ , \ c = -۶$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = \left(\sqrt{۳}\right)^۲ - ۴ \times ۱ \times -۶ = ۳ + ۲۴ = ۲۷ > ۰$$

$$x_۱ = \frac{-\sqrt{۳} - \sqrt{۲۷}}{۲} = \frac{-\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۳}}{۲} = \frac{-۴\sqrt{۳}}{۲} = \boxed{-۲\sqrt{۳}}$$

$$x_۱ = \frac{-\sqrt{۳} + \sqrt{۲۷}}{۲} = \frac{-\sqrt{۳} + ۳\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\cancel{۲}\sqrt{۳}}{\cancel{۲}} = \boxed{\sqrt{۳}}$$