ایران توشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- دانلود گام به گام
- دانلود آزمون گاج و قلم چی و سنجش
- دانلود فیلم و مقاله آنلیزشی
- کنکور و مشاوره

IranTooshe.Ir

@irantooshe

IranTooshe

$*(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $*(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$* a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$ $* a^2+b^2 = (a-b)^2+2ab$ $*(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

$*(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$ $*(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

مثال: اگر $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{7x^2}{x^4+1}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$ (جواب: گزینه ۲)

$*(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ $*(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

$* a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$ $*(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

مثال: حاصل $A = (a+1)(a^2+1)(a^4+1)\cdots(a^{32}+1)+1$ به ازای $a=2$ کدام است؟

۱) 2^{32} ۲) $2^{32}-1$ ۳) 2^{64} ۴) $2^{64}-1$ (جواب: گزینه ۳)

$*(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $*(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$* a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$ $* a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$

$*(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ $*(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

* در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، مجموع ریشه‌ها $-\frac{b}{a}$ و ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ است.

$*((x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$ ، $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

مثال: اگر $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ باشد، حاصل x^3-3x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۶ (جواب: گزینه ۴)

مثال: با فرض صحیح بودن x، حاصل عبارت $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۲۱ ۳) ۲۰۰ ۴) ۳۵۱ (جواب: گزینه ۲)

مثال: در تجزیه عبارت x^2-y^2+2x+1 کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x-y$ ۲) $x+y$ ۳) $x-y+1$ ۴) $x-y-1$ (جواب: گزینه ۳)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

اتحادهای جبری، تجزیه، عبارت های گویا

مثال: در تجزیه عبارت $3x^2-13xy-10y^2$ کدام عامل زیر وجود دارد.
1) $3x-2y$ 2) $x+5y$ 3) $x-5y$ 4) $3x-5y$ (جواب: گزینه 3)

مثال: کدام عامل زیر در تجزیه عبارت x^5+x+1 وجود دارد. (جواب: گزینه 4)
1) x^2+1 2) x^3+x^2+1 3) x^2-x+1 4) x^3-x^2+1

مثال: در تجزیه عبارت x^3+3x^2-2x-2 یکی از عامل ها کدام است؟ (جواب: گزینه 1)
1) x^2+4x+2 2) x^2-x+2 3) $x+1$ 4) x^2-2x+2

مثال: در تجزیه عبارت x^3+3x^2+5x+6 کدام عامل وجود دارد؟
1) x^2+3 2) x^2+2 3) x^2+x+2 4) x^2+x+3 (جواب: گزینه 4)

حاصل ضرب عامل های مشترک و غیرمشترک با توان بزرگتر = ک.م.م ، حاصل ضرب عامل های مشترک با توان کوچکتر = ب.م.م

مثال: اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله ای های x^3+x^2-x-1 و x^2-2x-4 به ترتیب برابر A و B باشد، حاصل $\frac{B}{A^2}$ کدام است؟
1) $x-4$ 2) $x-1$ 3) x^2-5x+4 4) x^2-2x-3 (جواب: گزینه 3)

دامنه عبارت های گویا $*D=R-\{\text{ریشه های مخرج}\}$ $*\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$

$*\left(\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{d}{c}\right)$

مثال: دامنه عبارت $\frac{x^2+y}{2x^2+ax+b}$ برابر $R-\{2,-1\}$ است. $a+b$ کدام است؟
1) -6 2) -5 3) -4 4) -3 (جواب: گزینه 1)

مثال: اگر $\frac{1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$ باشد، $A+B-C$ کدام است؟
1) $-\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{2}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{2}{3}$ (جواب: گزینه 1)

توان های گویا و رادیکال ها، قواعد رادیکال ها

$*\left(\sqrt{b}\right)$ و $\left(-\sqrt{b}\right)$ را ریشه های دوم b می نامیم $*\sqrt[3]{b}$ را ریشه سوم b می نامیم

$(b>0)$، فرجم های زوج

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

توان های گویا و رادیکال ها

* $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$ (فرد) ، $\sqrt[3]{a^3} = a$ (فرد) ، $\sqrt{a^2} = |a|$ (زوج) ، $(\pm\sqrt[4]{a})^4 = a$ ، $(\sqrt[5]{b})^5 = b$

* $b = \sqrt[n]{a} \iff a = b^n$ ، $(\sqrt[n]{a})^n = a \quad (n \in N, n \geq 2)$

مثال: چند عدد طبیعی x در رابطه $2 < \sqrt[3]{x} < 3$ صدق می کند؟

۱) صفر ۲) ۷ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶ (جواب: گزینه ۴)

توان ها و ضرب های اعداد بین (1) و (-1) * $\sqrt{2} \simeq 1/4$ ، $\sqrt{3} \simeq 1/7$ ، $\sqrt{5} \simeq 2/2$ * (-1) و (1)

توان ها و ضرب های اعداد بین (1) و (-1) * مقایسه با نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

مثال: حاصل $A = \sqrt[10]{(2-\sqrt{5})^{10}} - 2\sqrt[7]{(\sqrt{5}-3)^7} + \sqrt[5]{-(1-\sqrt{5})^5}$ کدام است؟

۱) $5 - 2\sqrt{5}$ ۲) $6 - 3\sqrt{5}$ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

مثال: کدام گزینه صحیح است؟ (جواب: گزینه ۴)

۱) $\sqrt[4]{2} > \sqrt[5]{2}$ ۲) $\sqrt[7]{\frac{3}{5}} > \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ ۳) $\sqrt[5]{-7} > \sqrt[3]{-7}$ ۴) $\sqrt[5]{\frac{-1}{2}} > \sqrt[7]{\frac{-1}{2}}$

(مقایسه) در طرف راست توان های اعداد مختلف برسانیم. * $a < b$

از دو طرف رادیکال، ضرب های مختلف بگیریم.

$(a \neq 0 \to a^0 = 1)$ ، $(a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0)$ ، $((\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n, a, b \neq 0)$

$(a^m \times a^n = a^{m+n})$ ، $(a^n \times b^n = (ab)^n)$ ، $((a^m)^n = a^{mn})$

$(a^m \div a^n = a^{m-n})$ ، $(a^n \div b^n = (\frac{a}{b})^n, b \neq 0)$

$*(a > 0, n \in N, n \geq 2 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a})$

$*(a > 0, m, n \in Z, n \neq 0, n \geq 2 \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m})$ (توان های کسری)

$*(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$ ، $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ، $(ab)^x = a^x b^x$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

توان‌های گویا و گنگ، قواعد را در مثال‌ها

مثال: رشته دوم مثبت 8^{2n+1} با رشته سوم $(\frac{1}{2})^{2n}$ برابر است، n کدام است؟

۱) $-\frac{9}{7}$ ۲) $-\frac{9}{11}$ ۳) $-\frac{9}{13}$ ۴) $-\frac{9}{5}$ (جواب: گزینه ۳)

مثال: اگر $x^{\sqrt{5}-2}=2$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $2^{\sqrt{5}+2}$ ۲) $2^{\sqrt{5}-2}$ ۳) $\sqrt{2}^{\sqrt{5}-1}$ ۴) $\sqrt{2}^{2-\sqrt{5}}$ (جواب: گزینه ۱)

$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ، $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ، $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mxn]{a}$

$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ ، $\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$ ، $\sqrt[n]{a^n b}$ ← n زوج باشد: $|a|\sqrt[n]{b}$ ، n فرد باشد: $a\sqrt[n]{b}$

مثال: حاصل $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) 3 ۴) 2 (جواب: گزینه ۴)

مثال: حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{63}+8}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{63}-1$ ۲) 7 ۳) -7 ۴) $1-\sqrt{63}$ (جواب: گزینه ۲)

مخرج کسر راهنمای: گویا کردن

بازه‌ها، تعیین علامت، نامعادلات گویا

* بازه‌ی باز * بازه بسته * (انتهای بازه − ابتدای بازه = طول بازه)

* (ابتدای بازه + انتهای بازه / ۲ = نقطه میانی) * می‌توان، طرفین یک ناسازی، عددی را اضافه و یا از طرفین آن عددی را کم نمود. * اگر طرفین ناسازی را در عددی مثبت ضرب کنیم، جهت ناسازی تغییر نمی‌کند و اگر طرفین ناسازی را در عددی منفی ضرب کنیم، جهت ناسازی عوض می‌شود * اگر طرفین ناسازی هم علامت باشند، هنگام معکوس کردن، جهت ناسازی عوض می‌شود * به توان رساندن دو طرف یک ناسازی، با استفاده از نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی *

$\begin{cases} a<b \\ c<d \end{cases} \Rightarrow \boxed{a+c<b+d}$ ← همواره جمع را می‌توان انجام داد.

۴ $a,c>0$ (هر دو طرف نامساوی مثبت باشند) $\Rightarrow ac<bd$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

بازه ها، تعیین علامت، نامعادلات گویا

* اگر طرفین نامساوی هم علامت نباشند، هنگام معکوس کردن، جهت نامساوی عوض نمی شود.
$(a<b, b<c \Rightarrow a<c)$

مثال: اگر $A=[-1,4]$، $B=\left\{x\in R \mid \frac{-x+a}{2} \leq 3\right\}$، $C=A\cap B$, $C=[0,4]$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) -3 ۴) -2 (جواب: گزینه ۲)

مثال: اگر $2x^2 \leq 2x$, $y^3 \leq 2+y^2$، آن گاه کدام رابطه همواره درست است؟

۱) $2 \geq y-x \geq -1$ ۲) $1 \leq y-x \leq -2$ (جواب: گزینه ۲)

۳) $2 \geq y+x \geq -1$ ۴) $1 \leq y+x \leq -2$

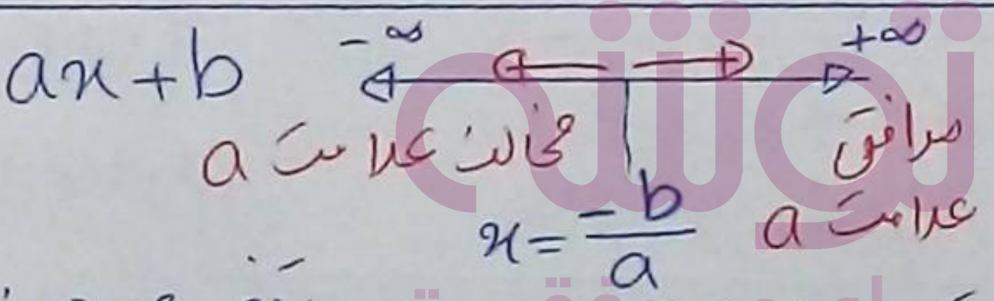
مثال: مجموعه جواب نامعادله $(\sqrt{2}-1)^{5x-3} < (\sqrt{2}-1)^{2x+3}$ کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,2)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(-1,2)$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: مجموعه جواب نامعادله $-7 \leq 3x-5 < -1+\frac{7x}{2}$ کدام است؟

۱) $\left(\frac{4}{3},-3\right]$ ۲) $[-2,-3]$ ۳) $(2,-4]$ ۴) $\left[\frac{2}{3},-4\right)$ (جواب: گزینه ۱)

* $y=ax+b$



* ریشه های ساده (مکرر از مرتبه فرد) یک عبارت، علامت آن عبارت را تغییر می دهند ولی ریشه های مضاعف (مکرر از مرتبه زوج) و نیز ریشه های (درون قدرمطلق) علامت عبارت را تغییر نمی دهند.

$y=ax^2+bx+c$

مجموع ریشه ها $=\frac{-b}{a}=x_1+x_2$

حاصل ضرب ریشه ها $=\frac{c}{a}=x_1 \times x_2$

$a>0$	$a>0$	$a<0$	$a<0$
$x=\frac{-b}{2a}$	$x=\frac{-b}{2a}$	x_1 x_2 $x=\frac{-b}{2a}$	x_1 x_2
$(\Delta>0)$	$(\Delta=0)$	$(\Delta<0)$	Δ
تنها در یک نقطه صفر می شود		همواره $\oplus$ یا $\ominus$ است.	(ناصفر یا مثبت)

ایران توشه
ترجمه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

بازه‌ها، تعیین علامت، نامعادلات گویا

مثال: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2-4x}{x+2} > -1$ کدام بازه است؟

۱) $(-2,1) \cup [2,4]$ ۲) $[0,1) \cup [2,4)$ (جواب: گزینه ۲)

۳) $(-2,1)$ ۴) $(-2,0] \cup [1,2)$

مثال: حدود m برای آن که عبارت $x^2+(m+1)x+(m+1)$ همواره نامنفی باشد کدام است؟

۱) $0 < m \leq 2$ ۲) $-1 < m \leq 3$ (جواب: گزینه ۳)

۳) $-1 \leq m \leq 3$ ۴) $-3 \leq m \leq 1$

معادلات

مثال: اگر $x=\frac{1}{2}$ یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $6x^2+ax-2a=0$ باشد، ریشه دیگر معادله کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$ (جواب: گزینه ۱)

---

* یافتن ریشه‌های معادله درجه دوم و تجزیه (ax^2+bx+c)

اتحاد جمله مشترک $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

روش Δ

جایگذاری اعداد $1, -1, 2, -2$ در $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$x_1 \times x_2=\frac{c}{a}$

در صورتی که $x=\alpha$ در معادله صدق کند آن‌گاه $(x-\alpha)$ یکی از عامل‌های عبارت درجه دوم است. (بر $(x-\alpha)$ بخش‌پذیر است)

مثال: اگر یکی از ریشه‌های معادله $4x^2+x+\frac{1}{m}=0$، از دو برابر ریشه دیگر آن یک واحد کمتر باشد، m کدام است؟

(جواب: گزینه ۲)

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

---

* اگر دو ریشه معادله درجه دوم قرینه باشند، آن‌گاه مجموع ریشه‌ها $(-\frac{b}{a})$ صفر است.

* اگر دو ریشه معادله درجه دوم عکس یکدیگر باشند، آن‌گاه حاصل ضرب ریشه‌ها $(\frac{c}{a})$ برابر یک است.

⊛ دو ریشه مخالف العلامت ⟺ حاصل ضرب ریشه‌ها $(\frac{c}{a})$ منفی است. (Δ همواره مثبت است و دو جواب دارد $\Delta=b^2-4ac>0$)

⊛ دو ریشه منفی: $\Delta>0$، $-\frac{b}{a}<0$، $\frac{c}{a}>0$

⊛ دو ریشه مثبت: $\Delta>0$، $-\frac{b}{a}>0$، $\frac{c}{a}>0$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: در معادله $mx^2+3x-5=0$، یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است. مجموع ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) $-12/5$ ۲) $-7/5$ ۳) $7/5$ ۴) $12/5$ (جواب: گزینه ۳)

مثال: در معادله $3x^2+7x+m=0$، یکی از ریشه‌ها ۳ واحد از ریشه دیگر بیشتر است. m کدام است؟

۱) $-\frac{8}{3}$ ۲) $-\frac{31}{3}$ ۳) $\frac{13}{7}$ ۴) $\frac{25}{7}$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: حدود m برای آن که معادله $(m+1)x^2+5x+m=0$، دو ریشه مخالف العلامت داشته باشد، کدام است؟

۱) $0<m<1$ ۲) $-1<m<0$ ۳) $m<-1$ یا $m>0$ ۴) $m<0$ یا $m>1$

(جواب: گزینه ۲) * شرط $\Delta>0$ را در نظر نمی‌گیریم. (دو ریشه مخالف العلامت $\leftrightarrow \frac{c}{a}<0$)

مثال: حدود m برای آن که معادله $x^2-(m+2)x+m+5=0$ دارای دو ریشه مثبت باشد، کدام است؟

۱) $m>4$ ۲) $m<-2$ ۳) $-2<m<-4$ ۴) $-5<m<-4$

(جواب: گزینه ۴) * شرط $\Delta>0$ را در نظر می‌گیریم.

مثال: اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2-2x-1=0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله به صورت $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ است؟ (جواب: گزینه ۱)

۱) $x^2+6x+1=0$ ۲) $x^2-6x+1=0$ ۳) $2x^2-3x-2=0$ ۴) $x^2+6x-1=0$

مثال: اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2-5x-4=0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله زیر برابر $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}$ است؟

۱) $-4x^2+5x-1=0$ ۲) $4x^2+5x-4=0$ (جواب: گزینه ۲)

۳) $4x^2+5x-5=0$ ۴) $-5x^2-4x+5=0$

مثال: اگر $x=2$، یکی از صفرهای تابع f با ضابطه $f(x)=x^3+2x^2+ax-6$ باشد، مجموع صفرهای تابع f کدام است؟ ۱) -2 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 6 (جواب: گزینه ۱)

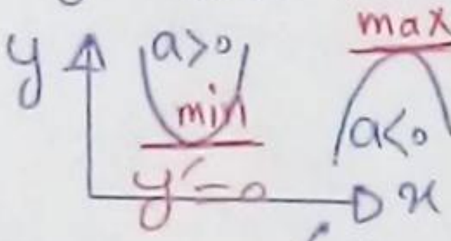
* جواب‌های معادله $f(x)=0$ را صفرهای تابع f می‌نامیم.

Scanned by TapScanner

مثال: معادله $x^2-4x-\frac{25}{x^2-4x}=1$ چند ریشه حقیقی دارد؟
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱ (جواب: گزینه ۲)

مثال: حدود m برای آن که معادله $x^4+2mx^2+m+2=0$ دارای چهار ریشه حقیقی باشد، کدام است؟
۱) $m>2$ ۲) $0<m<2$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $m<0$
(جواب: گزینه ۳)

$y=ax^2+bx+c \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=2ax+b \to y'=0 \to x=\frac{-b}{2a}$



با جایگذاری $x=\frac{-b}{2a}$ در معادله تابع ($y=ax^2+bx+c$) مختصات $y=\frac{-\Delta}{4a}$ بدست می‌آید (مختصات رأس سهمی: $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$)

$y=ax^2+bx+c$; $x=0 \to y=c$ (عرض از مبدا تابع درجه دوم)

+ محل تلاقی سهمی با محور y ها همان عدد c است

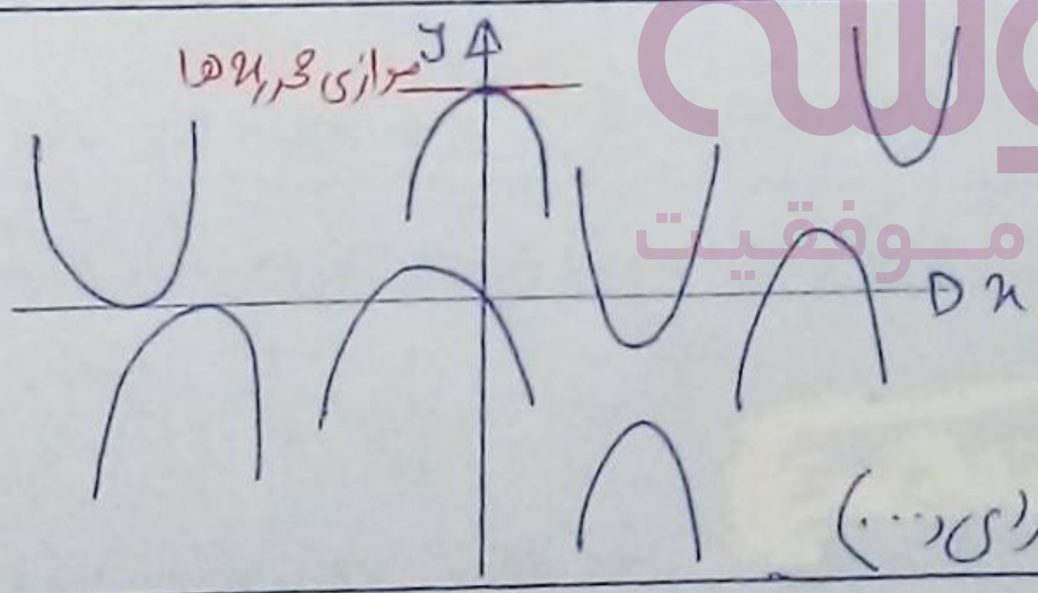
$y=ax^2+bx+c \quad y'=2ax+b$; $x=0 \to y'=b$ شیب خط مماس بر منحنی در $x=0$

$b>0 \leftrightarrow$ شیب مثبت

$b<0 \leftrightarrow$ شیب منفی

* استفاده از شیب خط مماس بر سهمی از نقطه تلاقی سهمی با محور y ها

مثال: علامت‌های a, b, c, Δ و $\frac{-b}{2a}$ و $\frac{-\Delta}{4a}$ را در نمودارهای زیر تعیین کنید.



(هر نمودار مربوط به یک تابع درجه دوم به معادله $y=ax^2+bx+c$ است)

(* رسم نمودار فصل تابع: انبساط، انقباض، جابجایی افقی و عمودی و ...)

مثال: اگر $(-3,4)$ و $(5,4)$ در نقطه از یک سهمی باشند، معادله محور تقارن این سهمی کدام است؟
۱) $x=2$ ۲) $x=1$ ۳) $x=-1$ ۴) $x=-2$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: اگر $x=1$ محور تقارن سهمی به معادله $y=-2(x+m)^2+8$ باشد، این سهمی محور x ها را در چه نقاطی قطع می‌کند؟
۱) -3 و 1 ۲) -2 و 2 ۳) -1 و 3 ۴) -2 و -3
(جواب: گزینه ۳)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

x_1, x_2 ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ هستند.

* $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

مثال: سهمی $y = ax^2+bx+c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطه (۱-و۲) نیز بگذرد، مختصات راس سهمی کدام است؟

۱) (۴,۳) ۲) (۱-,۲) ۳) (۳,۵) ۴) (۱,۶-) (جواب: گزینه ۲)

مثال: نقطه (۲و۱-) راس سهمی $y = ax^2+bx$ است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۵- ۳) ۴- ۴) ۳- (جواب: گزینه ۱)

---

* معادلات گویا: مخرج کسرها نباید صفر شود. ← جواب‌های بدست آمده باید (در دامنه) باشد
* معادلات گنگ: پس از حل، جواب‌های بدست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند.

مثال: معادله $\frac{x^2+1}{x^2-4} + \frac{x^2-4}{x^2+1} = \frac{5}{2}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

مثال: معادله $\frac{x-4}{x-2} = \frac{4}{x(x-2)} - \frac{5}{x}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار (جواب: گزینه ۲)

مثال: معادله $1 = \frac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار (جواب: گزینه ۲)

مثال: امیر و مهدی با هم خانه‌ای را در ۶ روز رنگ می‌کنند. اگر هرکدام بخواهند به تنهایی این خانه را رنگ کنند، مهدی ۵ روز زودتر کار را تمام می‌کند. مهدی به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کند؟ ۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰ (جواب: گزینه ۲)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

مثال: معادله $\sqrt[4]{x^3+x-10}+\sqrt{x^2-x-2}=0$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ (جواب: گزینه ۲)

مثال: معادله $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x-5$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ (جواب: گزینه ۱)

مثال: مجموع ریشه‌های معادله $\sqrt{2x^2+5x+8}-\sqrt{2x^2+5x+1}=1$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) -4 ۴) $-\frac{5}{2}$ (جواب: گزینه ۴)

مثال: معادله $\log x-\sin x=0$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

الگورد (دنباله)

مثال: در یک الگوی خطی، جملات سوم و یازدهم به ترتیب ۲۰ و ۷۶ می‌باشند، جمله چندم الگو برابر ۱۱۱ می‌باشد.

۱) نوزدهم ۲) هجدهم ۳) هفدهم ۴) شانزدهم (جواب: گزینه ۴)

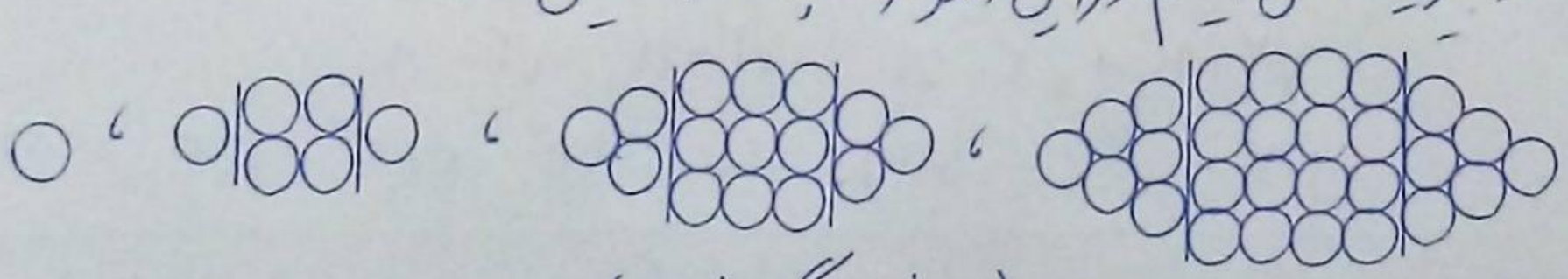
مثال: چند جمله دنباله $\{[\sqrt[3]{n^2+1}]\}$ برابر ۳ است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ (جواب گزینه ۱)

مثال: کدام دنباله ثابت است؟ (جواب: گزینه ۴)

۱) $\{(-1)^{n!}\}$ ۲) $\{\cos\frac{n!\pi}{3}\}$ ۳) $\{[\frac{n}{2}]-\frac{n}{2}\}$ ۴) $\{\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\}$

مثال: الگوی مقابل را در نظر بگیرید. شکل بیستم در این الگو از چند نقطه تشکیل شده است؟



۱) ۶۸۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۷۸۰ ۴) ۸۲۰ (جواب: گزینه ۳)

مثال: در یک دنباله، $a_1=-1$ و $a_n=3a_{n-1}+n$، جمله پنجم دنباله کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۲ ۴) ۲۶ (جواب: گزینه ۱)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

* $a_n = a_1 + (n-1)d$ (a_n: جمله nام، a_1: جمله اول، d: قدرنسبت دنباله)
  - $d>0$: صعودی
  - $d=0$: ثابت
  - $d<0$: نزولی

* نشان دهید تعداد جملات دنباله‌حای $a_n, \dots, a_2, a_1$ با قدرنسبت d، برابر است با:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

(* نشان دادن جملات دنباله‌ی جمله عمومی)

---

* سه جمله متوالی در دنباله‌حای حسابی: $(a-d), (a), (a+d)$

* میانگین دو جمله دیگر $= \frac{(a-d)+(a+d)}{2} = a$ جمله وسط (واسطه‌حای)

* چهار جمله متوالی، ...

مثال: در یک دنباله‌حای نزولی، مجموع سه جمله اول برابر ۱۵۷ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۸۵ می‌باشد. جمله دهم دنباله کدام است؟

۱) ۲۱- ۲) ۱۹- ۳) ۱۷- ۴) ۱۵-

(جواب: گزینه ۲)

مثال: در یک دنباله‌حای حسابی، حاصل ضرب جملات اول و چهارم $\frac{91}{9}$ و حاصل ضرب جملات دوم و سوم ۱۱ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{16}{9}$

(جواب: گزینه ۱)

---

* نشان دهید اگر a_n و a_m جملات nام و mام یک دنباله‌حای حسابی با قدرنسبت d باشند، آن‌گاه:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$$

مثال: اگر $2a+1$، $a+11$ و $a-20$ سه جمله متوالی یک دنباله‌حای حسابی با جمله اول $2a+1$ باشند، جمله دهم دنباله کدام است؟

۱) ۲۱۶- ۲) ۲۰۵- ۳) ۱۹۶- ۴) ۱۸۵-

(جواب: گزینه ۳)

---

* اگر بخواهیم بین دو عدد a, b، m واسطه‌حای عددی به گونه‌ای قرار دهیم که اعداد حاصل، تشکیل دنباله‌حای حسابی دهند، آن‌گاه:

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

(اثبات به عنوان تمرین)

---

* در دنباله‌حای با جمله عمومی a_n:

$$p+q = r+s \longrightarrow a_p + a_q = a_r + a_s$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: دو دنباله حسابی $(\ldots, 11, 4, -3)$ و $(\ldots, 12, 7, 2)$ چند جمله مشترک کوچکتر از ۱۰۰۰ دارند؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸ (جواب: گزینه ۴)

---

* در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d، مجموع n جمله اول برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad ، \quad (a_n = S_n - S_{n-1}) \quad ، \quad (S_1 = a_1)$$

مثال: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = 2n^2 + 3n$ است. مجموع جملات با شروع از جمله هشتم و ختم به جمله بیستم کدام است؟

۱) ۷۴۱ ۲) ۷۵۲ ۳) ۷۶۰ ۴) ۷۸۳ (جواب: گزینه ۱)

مثال: مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی مساوی برابر ۲۷، مجموع سه جمله آخر آن ۵۷ و مجموع تمام جملات آن برابر ۱۱۲ است. این دنباله چند جمله دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ (جواب: گزینه ۱)

مثال: در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول برابر $S_n = \frac{n}{2}(2n+1)$ است. جمله عمومی آن کدام است؟

۱) $3n - \frac{3}{2}$ ۲) $4n - \frac{5}{2}$ ۳) $2n + \frac{1}{2}$ ۴) $2n - \frac{1}{2}$ (جواب: گزینه ۴)

---

* مثال: (دنباله هندسی) $a_n = a_1 q^{n-1}$

در چه صورتی جمله عمومی دنباله هندسی چه صورتی است؟

a, aq, aq^2 ← جمله متوالی

$\pm aq = \pm\sqrt{a \times aq^2}$ ← جمله وسط (واسطه هندسی)

به ازای هر دو عدد مثبت و منفی، یک واسطه هندسی متفاوت بدست می‌آید.

مثال: در یک دنباله هندسی صعودی، مجموع سه جمله اول ۷ و حاصل ضرب آن‌ها ۸ می‌باشد. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳ (جواب: گزینه ۳)

ایران توشه
توشه ای برای کنکور موفقیت
Scanned by TapScanner

* مثال: نشان دهید اگر a_m و a_n به ترتیب جملات m ام و n ام یک دنباله هندسی باشند، آن گاه:

$$q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

مثال: در دنباله هندسی $\frac{1}{2}x^2+16, 0.00, 2x+4, \ldots$، جمله دهم چند برابر جمله ششم آن است؟

۱) ۲۴۳ ۲) ۸۱ ۳) ۶۴ ۴) ۲۷ (جواب: گزینه ۲)

مثال: جملات پنجم، یازدهم و چهاردهم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی می باشند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۴ ۴) ۶ (جواب: گزینه ۱)

مثال: نشان دهید اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، m واسطه هندسی چنان قرار دهیم که $m+2$ عدد حاصل، جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه:

$$q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

مثال: نشان دهید در دنباله هندسی با جمله عمومی a_n داریم:

$$m+n = p+q \rightarrow a_m \times a_n = a_p \times a_q$$

(اندیس (جمله‌ام))

مجموع جملات دنباله هندسی (مجموع n جمله اول) $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(a_1 =$ جمله اول، $q \neq 1)$

---

* مثال: نشان دهید اگر S_n، S_{2n} به ترتیب مجموع n، $2n$ جمله اول یک دنباله هندسی با قدرنسبت q باشند، آن گاه:

$$\left(\frac{S_{2n}}{S_n}\right) = (q^n + 1)$$

مثال: در یک دنباله هندسی روابط $a_1+a_5=51$ و $a_2+a_4=102$ برقرار است. چند جمله اول این دنباله را باید جمع کنیم تا حاصل برابر ۳۰۶۹ شود؟

$$\begin{cases} a_1+a_5=51 \\ a_2+a_4=102 \\ S_n=3069 \rightarrow (n=?) \end{cases}$$

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۳ (جواب: گزینه ۲)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

n عدد طبیعی باشد: $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^2+a+1)$

n عدد طبیعی فرد باشد: $a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots+a^2-a+1)$

n عدد طبیعی باشد: $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$

جمع توان‌های x و y برابر $n-1$ است.

مثال: حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1+x+x^2+x^3+x^4)(x^2-1)}{x^{10}-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲ (جواب: گزینه ۲)

قدر مطلق و آشنایی با هندسه تحلیلی

$$|x|=\sqrt[2k]{x^{2k}}=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}=\max\{-x,x\}$$

$(k\in N)$

* به تعبیر هندسی، به فاصله نقطه متناظر با عدد حقیقی x، روی محور اعداد حقیقی تا مبدا تحقیقات، قدر مطلق x می‌گوییم.

* به طور کلی فاصله نقاط متناظر با اعداد حقیقی a و b روی محور اعداد حقیقی از یکدیگر برابر $|a-b|$ است.

مثال: حاصل هریک از عبارت‌های زیر را ساده‌ترین صورت بنویسید.

① $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ جواب: ① $\sqrt{5}-2$

② $\sqrt{a^4+6a^2+9}$ جواب: ② a^2+3

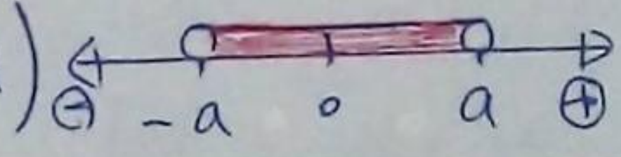
مثال: اگر $a>0>b$ و $|a|>|b|$، آن‌گاه حاصل عبارت $A=|a+b|+|a|+|b|$ کدام است؟ (جواب: گزینه ۳)

۱) $-2b$ ۲) $-2a$ ۳) $2a$ ۴) $2b$

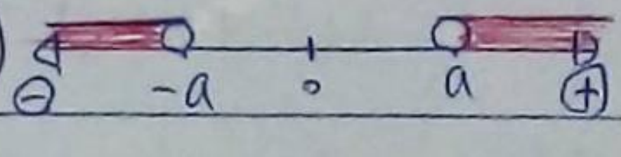
$|x|\geq 0$، $|x^2|=x^2$، $|x|=|-x|$، $|a-b|=|b-a|$، $|xy|=|x||y|$

$|x^n|=|x|^n$، $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$، $-|x|\leq x\leq|x|$، $|x|=|y|\Leftrightarrow(x=\pm y)$

$|x|=a\Leftrightarrow(x=\pm a)$ ($a>0$)، $|x|<a\Leftrightarrow(-a<x<a)$ ($a>0$)



$|x|>a\Leftrightarrow(x>a$ یا $x<-a)$



Scanned by TapScanner

(نامساوی مثلث) $|x+y| \le |x|+|y|$ ، تساوی زمانی برقرار است که x,y هم علامت باشند ($xy \ge 0$)

$a<|x|<b \Leftrightarrow \begin{cases} a<x<b \\ -b<x<-a \end{cases}$ $(b>0)$

* حالت تساوی زمانی برقرار است که x_iها هم علامت باشند

$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

مثال: با استفاده از رابطه‌ی نامساوی مثلث روابط زیر را اثبات کنید.

① $|x+y| \le |x|+|y|$ ② $|x-y| \le |x|+|y|$ ③ $|x-y| \ge |x|-|y|$

④ $|x-y| \ge ||x|-|y||$ ⑤ $|x+y| \ge |x|-|y|$ ⑥ $|x+y| \ge ||x|-|y||$

مثال: کم‌ترین مقدار عبارت $A=|x+2|+|x-3|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷ (جواب: گزینه ۳)

مثال: مجموعه جواب معادله $|x-2|+\max\{x,-x\}=2$ برابر بازه $[a,b]$ است.

بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$ (جواب: گزینه ۳)

$|u|<|v| \Leftrightarrow u^2<v^2 \Leftrightarrow (u-v)(u+v)<0$

$|u+v|=|u|+|v| \Leftrightarrow uv \ge 0$ ، $|u+v|<|u|+|v| \Leftrightarrow uv<0$

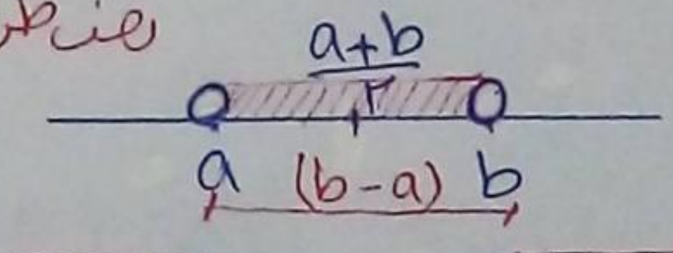
مثال: اگر نامعادلات $|2x+3|<x+2$ و $a<3x+2<b$ معادل یکدیگر باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -4 ۳) ۱ ۴) ۳ (جواب: گزینه ۲)

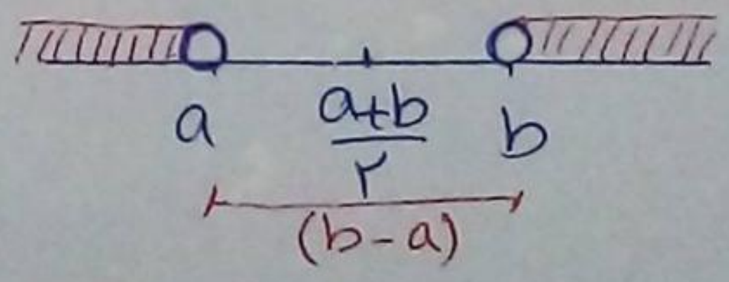
مثال: روابط زیر را به روش هندسی تعبیر کنید (رسم روی محور اعداد)

$a<x<b \Leftrightarrow |x-\frac{a+b}{2}|<\frac{b-a}{2}$

($\frac{a+b}{2}$: وسط بازه، $\frac{b-a}{2}$: نصف طول بازه)

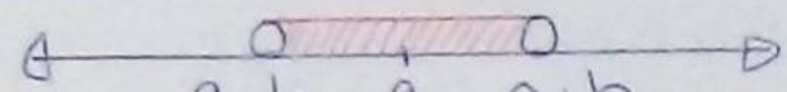


$\begin{cases} x>b \\ \cup \\ x<a \end{cases} \Leftrightarrow |x-\frac{a+b}{2}|>\frac{b-a}{2}$

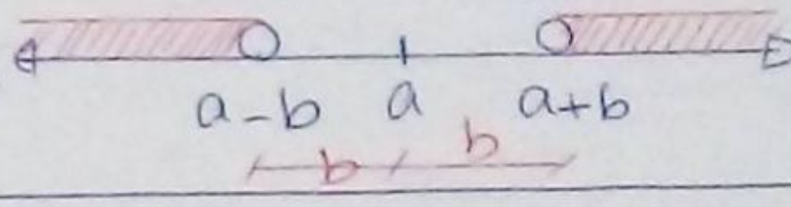


Scanned by TapScanner

$(b>0)$ ، $|x-a|<b$ ⟺ $a-b < x < a+b$



$(b>0)$ ، $|x-a|>b$ ⟺ $x < a-b$ یا $x > a+b$



* برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس بخش‌های از نمودار $y=f(x)$ که زیر محور xها واقع است را نسبت به همین محور قرینه می‌کنیم

* برای رسم نمودار $y=f(|x|)$ ، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس بخش‌های از نمودار $y=f(x)$ که در سمت چپ محور yها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن، قرینه آن قسمت از نمودار f که در سمت راست محور yها واقع است را در سمت چپ محور yها نیز رسم می‌کنیم. در واقع باید نمودار تابع $y=f(|x|)$ نسبت به محور yها متقارن باشد

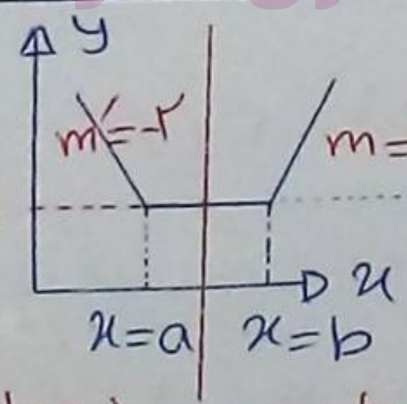
عبارت‌های شامل قدرمطلق: برای از بین بردن قدرمطلق باید عبارت را از نقاطی که عبارت داخل قدرمطلق صفر می‌شود (ریشه‌های قدرمطلق) بشکنیم. (حاشیه علامت آن را قرار می‌دهیم)

عبارت‌های شامل جزصحیح: برای از بین بردن جزصحیح باید عبارت را از نقاطی که عبارت داخل جزصحیح عدد صحیح می‌شود بشکنیم (حاشیه مقدار عبارت جزصحیح را قرار می‌دهیم)

مثال: معادله $x=|x|-|x+1|+|x-2|$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ (جواب گزینه ۲)

$y=|x-a|+|x-b|$ $(a,b\in R)$



$x=\frac{a+b}{۲}$ (معادله محور تقارن)

نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند ⟵ $y=k>|a-b|$

نمودار را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند ⟵ $y=k=|a-b|$

هیچ نقطه تلاقی با نمودار ندارد ⟵ $y=k<|a-b|$

معادله $|x-a|+|x-b|=k$ ،

$k=|a-b|$ ⟵ بی‌شمار جواب دارد

$k>|a-b|$ ⟵ دو جواب دارد.

$k<|a-b|$ ⟵ جواب ندارد.

* $R_f=[|a-b|,+\infty)$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

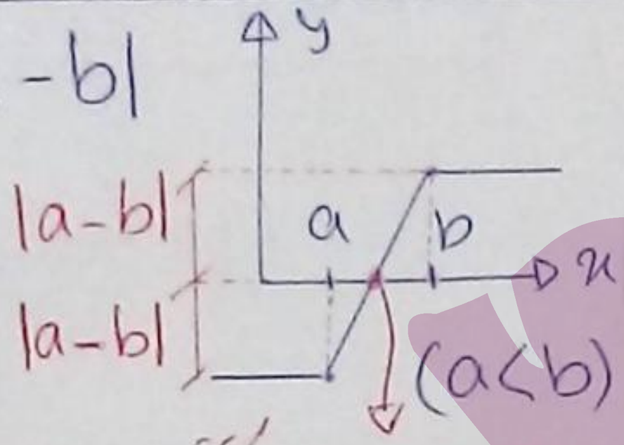
مثال: مجموع جواب های معادله $|x-2|+|x+1|=5$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۱)

مثال: به ازای چند مقدار صحیح m، معادله $|x-m|+|x+2m-1|=2m+1$ جواب ندارد؟

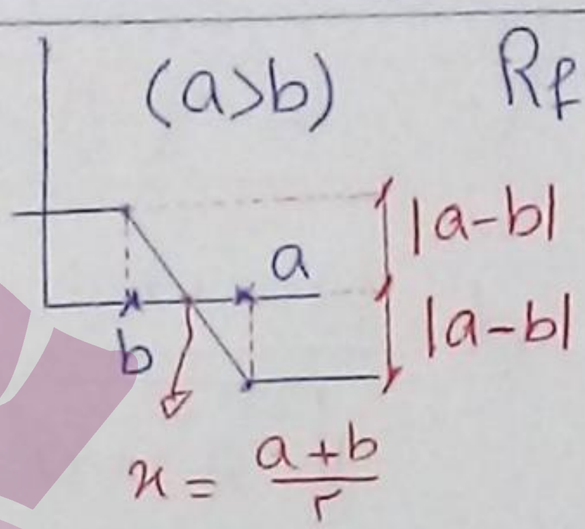
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار (جواب: گزینه ۴)

$y=|x-a|-|x-b|$



$x=\frac{a+b}{2}$ (مرکز تقارن نمودار)

(a>b) $R_f=[-|a-b|, |a-b|]$



$x=\frac{a+b}{2}$

* مثال: جواب های (نقاط تلاقی) نمودارهای $y=k$ و نمودار بالا را به ازای مقادیر مختلف k بررسی کنید.

مثال: معادله $|x+1|-|x-2|=\sqrt{x}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ (جواب: گزینه ۳)

مثال: اگر معادله $|x+1|-|x-2|=m+1$ بی شمار جواب داشته باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

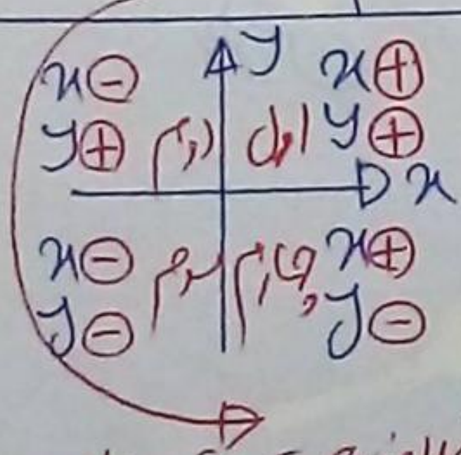
۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۲

(جواب: گزینه ۲)

مثال: حدود m برای آن که معادله $|x+m+1|-|x-m|=m$ فاقد جواب باشد، کدام است؟

(جواب: گزینه ۱)

۱) $-\frac{1}{3}>m>-1$ ۲) $\frac{1}{3}>m>0$ ۳) $m>\frac{1}{3}$ ۴) $m<\frac{1}{3}$

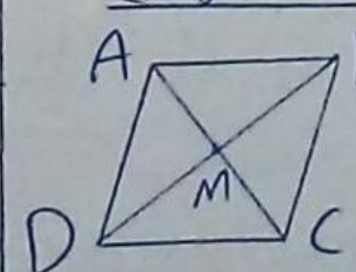


خلاف جهت عقربه های ساعت

طول پاره خط $=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

* مختصات نقطه M وسط پاره خط AB: $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}, y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

* مختصات محل تلاقی سه میانه مثلث ABC (مرکز ثقل مثلث ABC): $x_M=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, y_M=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$



$x_A+x_C=x_B+x_D=2x_M$

$y_A+y_C=y_B+y_D=2y_M$

متوازی الاضلاع ABCD، M محل برخورد قطرهای AC، BD

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

* دو خط موازی، شیب خط‌های یکسان دارند.

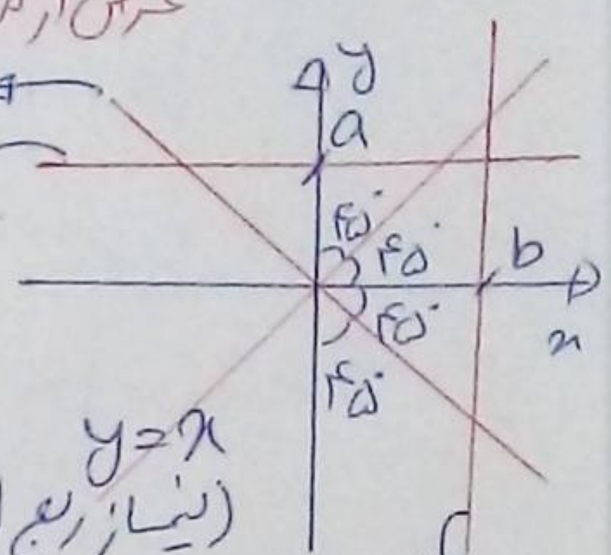
* معادله خطی که از نقطه (x_0, y_0) می‌گذرد و شیب آن برابر m باشد: $y - y_0 = m(x - x_0)$

(معادله خط: $y = \underbrace{a}_{\text{شیب خط}}x + \underbrace{b}_{\text{عرض از مبدا}}$)

$$\left(\text{شیب خط} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$y = -x$ (نیساز ربع دوم و چهارم)

$y = a$ (موازی محور xها)



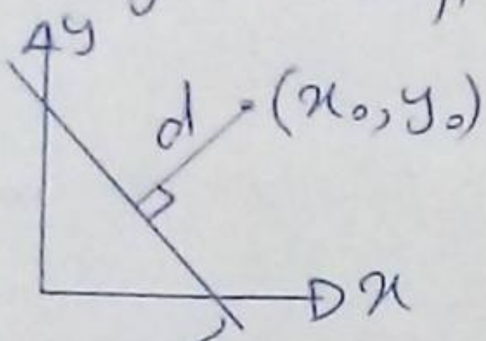
$\left(\text{دو خط بر هم عمود باشند}\right) \longleftarrow \left(\underline{\text{حاصل ضرب شیب‌هایشان}}\right) * (m \times m' = -1)$ ، $\underline{\text{برابر } (-1) \text{ است.}}$

محور xها = (خط $y = 0$)

محور yها = (خط $x = 0$)

* فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + C = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + C|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



برای استفاده از فرمول بالا (d) باید معادله خط به این شکل نوشته شود.

* فاصله یک نقطه از خطوط موازی محور xها یا yها

* قرینه یک نقطه نسبت به خطوط موازی محور xها یا yها

خطوط $y = x$ یا $y = -x$ و ... نیاز به مبحث انتقال دارد.

مثال: معادله خط عمودمنصف پاره‌خطی که نقاط $A(-2, 3)$ و $B(4, -1)$ را به هم وصل می‌کند، کدام است؟ (جواب: گزینه ۲)

۱) $3y - 2x = 1$ ۲) $2y - 3x = -1$ ۳) $3y + 2x = 5$ ۴) $2y + 3x = 5$

مثال: معادله دو ضلع یک مستطیل، به صورت $x + y = 7$ و $x - y = -5$ می‌باشد. اگر مبدا مختصات یکی از رئوس این مستطیل باشد، مساحت مستطیل چند واحد سطح است؟ (جواب: گزینه ۴)

۱) ۳۵ ۲) ۲۴/۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۷/۵

مثال: طول ارتفاع وارد بر ضلع BC در مثلثی با رئوس $A(-2, 3)$، $B(-4, 2)$ و $C(-4, -4)$ کدام است؟ (جواب: گزینه ۳)

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

---

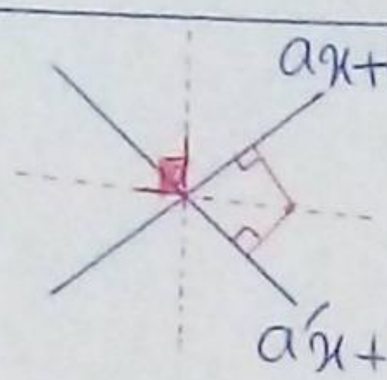
* معادله نیمساز $D: ax + by + C = 0$ و $D': a'x + b'y + C' = 0$:

$$\frac{|ax + by + C|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + C'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

فاصله دو خط موازی از هم $ax + by + C = 0$ و $ax + by + C' = 0$:

$$d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner



معادله نیمساز: محرکه نقاطی که از دو خط متقاطع به یک اندازه‌اند.

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

$\pm$ ← دو معادله خط عمود بر هم بدست می‌آید.

مثال: مساحت مربعی که معادله در ضلع آن به صورت $y=2x+9$ و $2x-y=1$ باشد، چند واحد سطح است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۶

(جواب: گزینه ۲)

مثال: معادله خطی که فاصله آن از دو خط متقاطع $x+2y=5$ و $2x-4y=1$ به یک فاصله است، کدام است؟

(جواب: گزینه ۱)

نقاط؟

$x-y=3$ (۴ $x+y=3$ (۳ $x=\frac{9}{8}$ (۲ $y=\frac{9}{8}$ (۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

$$(a,b)=(c,d) \iff a=c,\ b=d$$

مثال: اگر دو زوج مرتب $(\frac{y}{x}-\frac{y}{x}, \frac{y}{x}-\frac{y}{x})$ و $(-1,-3)$ برابر باشند، حاصل $\frac{y}{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -1

جواب:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-1 \\ \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{x}+\frac{3}{y}=3$$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{y}=-2$$

$$\frac{-2}{y}=2 \Rightarrow \frac{-2}{2}=y=-1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{-1}=-1 \Rightarrow \frac{1}{x}=-2 \Rightarrow \frac{1}{-2}=x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$$ گزینه ۲

تابع ← فرض کنید A و B دو مجرده باشند، در این صورت تابع f از A به B، رابطه‌ای است که در آن، هر عضو مجرده A دقیقاً یک عضو از مجرده B نسبت داده شود.

نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب

مثال: اگر رابطه $f=\{(1,b),(3,5),(a+2,3),(3,a^2+4)\}$ تابع باشد، ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) -3 ۴) ۳

ایران توشه
Scanned by TapScanner

جواب:

$(3,5)$
$(3, a^2+4) \Rightarrow a^2 = 1 \begin{cases} \Rightarrow a = 1 \\ \Rightarrow a = -1 \end{cases}$

$a=1 \Rightarrow f = \{(1,b), \underbrace{(3,5), (3,3)}_{\text{تکراری}}, (3,5)\} \Rightarrow a \neq 1$ (X)

$a=-1 \Rightarrow f = \{(\underline{1},b), (3,\underline{1}), \underbrace{(3,5)}_{\text{تکراری}}\} \Rightarrow b = 3$

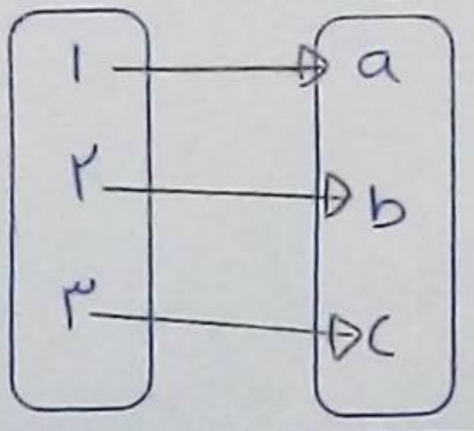
$ab = -1 \times 3 = -3$ گزینه ۳

نمایش تابع به صورت نمودار پیکانی

مثال: تعداد توابع از $A \to B$ ؟
$3 \times 3 \times 3 = 27$

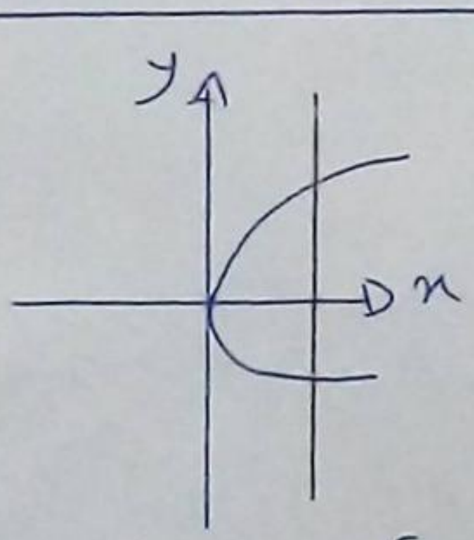
مثال: تعداد توابع یک به یک از $A \to B$ ؟
$3 \times 2 \times 1 = 6$

(13) برد (A) دامنه

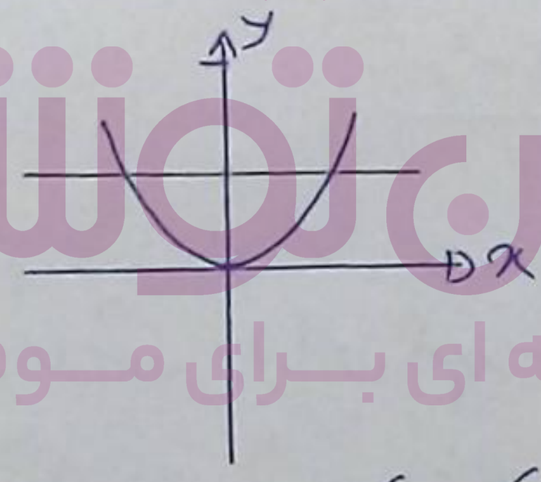


نمایش نموداری تابع

دامنه ← محور x ها
برد ← محور y ها

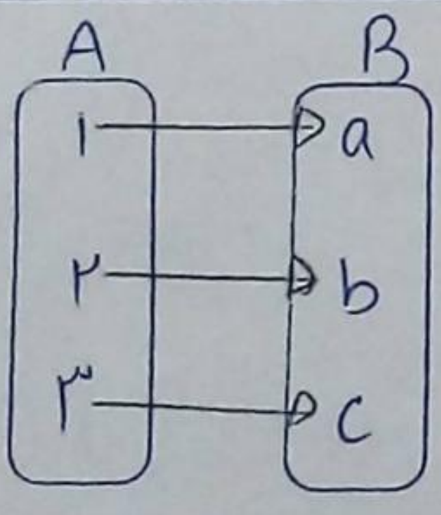


تابع برد یا برد



تک به تک برد یا برد

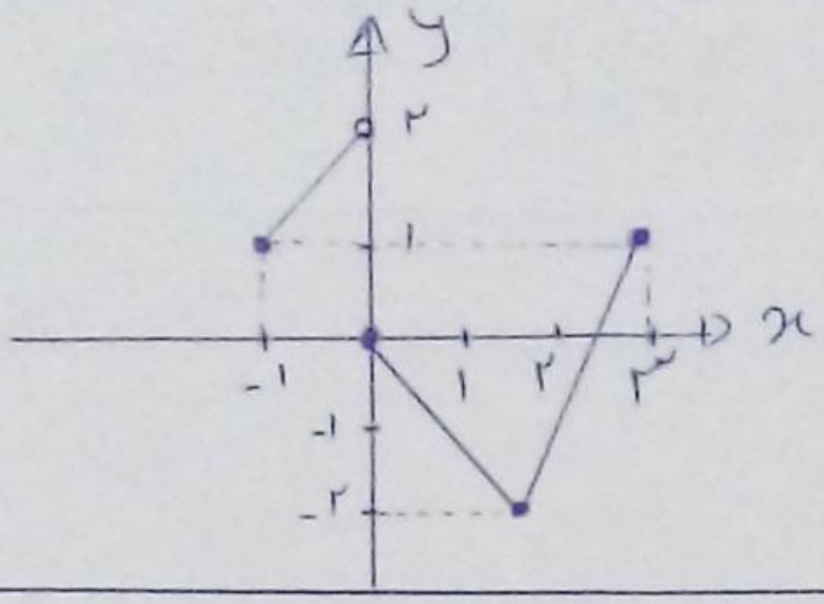
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



از هر یک از اعضای مجموعه A (حداقل یک پیکان خارج شود ← تابع برد
به هر یک از اعضای مجموعه B حداکثر یک پیکان وارد شود ← تک به تک برد
تمامی اعضای B حداقل یکبار انتخاب شده باشند ← پوشا برد
نحوه بدست آوردن تعداد توابع پوشا با استفاده از اصل شمول و عدم شمول

Scanned by TapScanner

مثال: اگر D_f دامنه، R_f برد تابع شکل مقابل باشد، $R_f - D_f$ کدام است؟



۱) $[-۱, -۲]$

۲) $(-۱, -۲]$

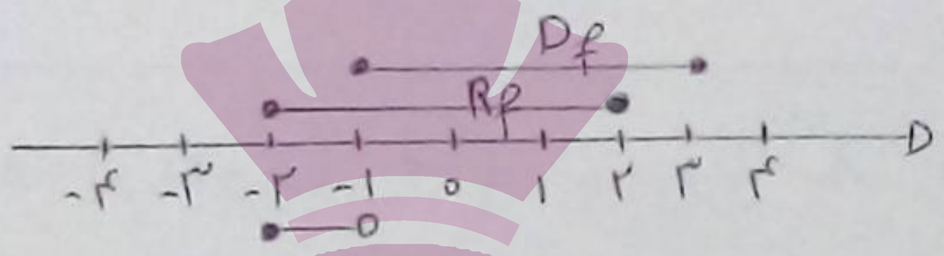
۳) $(۲, ۳]$

۴) $[۲, ۳]$

جواب:

$R_f = [-۲, ۲]$

$D_f = [-۱, ۳]$



$\Rightarrow R_f - D_f = [-۲, -۱)$ گزینه ۲

نمایش جبری تابع

$f: A \to B$

$x \to f(x)$

$A =$ همواره دامنه تابع.

$B =$ برد تابع زیر مجموعه‌ای از مجموعه B است. $(R_f \subseteq B)$

مثال: برای تابع $f: \begin{cases} [-۲, ۱] \to R \\ f(x) = x^۲ \end{cases}$ کدامیک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول می‌باشد؟

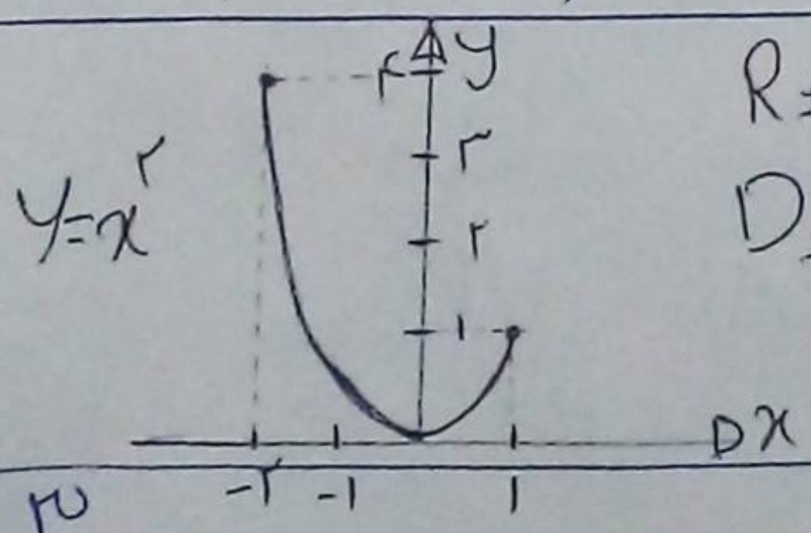
۱) $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = x^۲ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f: R \to [۰, ۴] \\ f(x) = x^۲ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f: [-۲, ۱] \to [۰, ۲] \\ f(x) = x^۲ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f: [-۲, ۱] \to [۰, +\infty) \\ f(x) = x^۲ \end{cases}$

گزینه ۳



$R_f = [۰, ۴]$

$D_f = [-۲, ۱]$

گزینه ۳

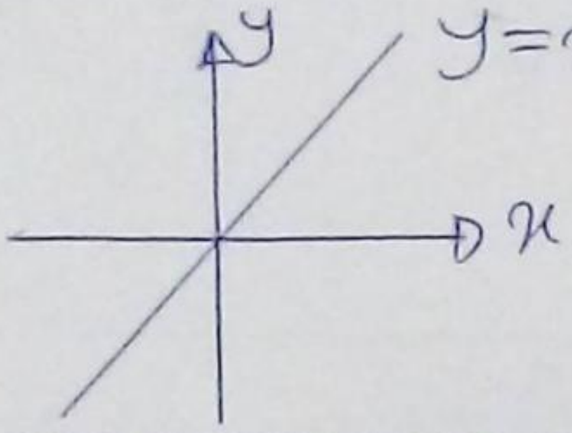
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

تذکر: معمولا معادلاتی که در آن ها توان x زوج بوده و یا y در توان قدر مطلق و یا در توان برابکت باشد، تابع نیستند

$$x^2+y^2=1$$

تابع همانی: $f(x)=x$



مثال: اگر تابع $f=\{(a+b,1-a),(b,a-2)\}$ همانی باشد، ab کدام است؟

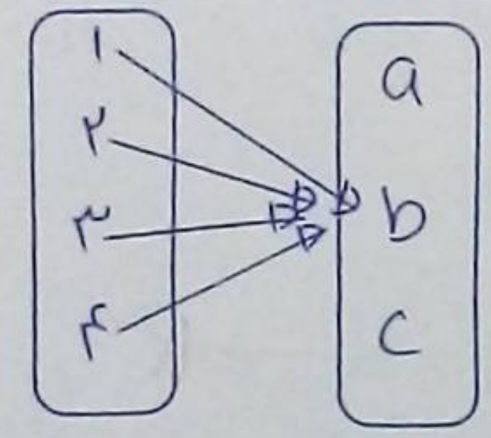
۱) -2 ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۱

حواب:

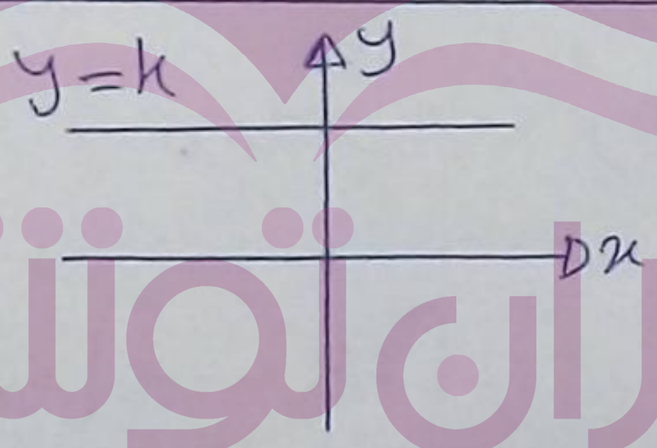
$$\left.\begin{array}{l} a+b=1-a \\ b=a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a+a-2=1-a \Rightarrow 3a=3$$

$$a=1, b=-1 \Rightarrow ab=-1$$

گزینه ۲

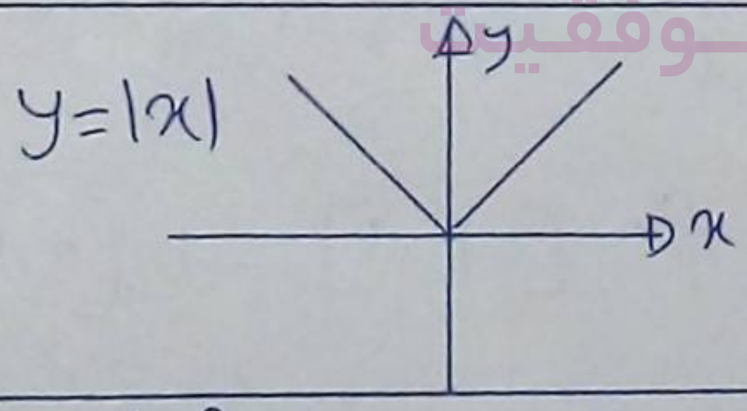


تابع ثابت: $f(x)=k$



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

تابع قدرمطلق: $f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$



تابع چندضابطه‌ای:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & D_1 \\ f_2(x) & D_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & D_n \end{cases}$$

$$D_f=D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$$

$$R_f=R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n$$

Scanned by TapScanner

نکته: شرط آن که یک معادله چند ضابطه ای، ضابطه یک تابع باشد، آن است که هریک از ضابطه های آن، تابع بوده و اشتراک دامنه های هر دو ضابطه دلخواه آن تهی باشد یا اگر عضو مشترکی در دامنه ها داشتند، مقدار تابع از ضابطه ها برای آن عضو برابر شود.

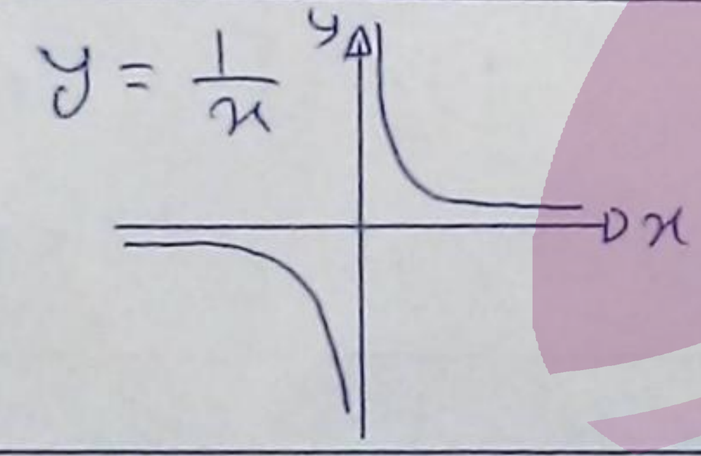
مثال: اگر رابطه $y=\begin{cases} mx-x^2 & x\geq -1 \\ 1-\frac{1}{x} & x\leq -1 \end{cases}$ تابع باشد، m کدام است؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 3

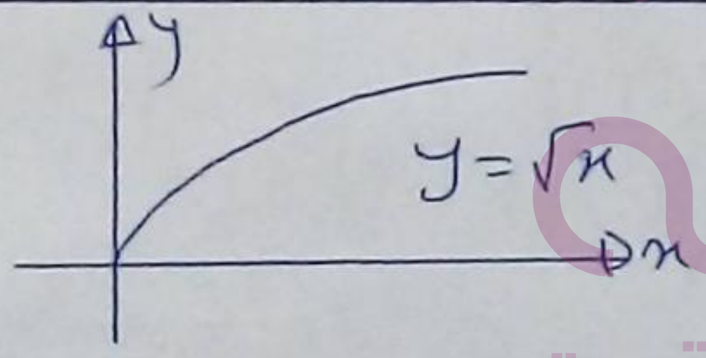
جواب: گزینه ۱

$-m-1=1-(-1)=2 \Rightarrow -m-1=2 \Rightarrow m=-3$

تابع گویا: $f(x)=\frac{P(x)}{q(x)}$ $\quad q(x)\neq 0$



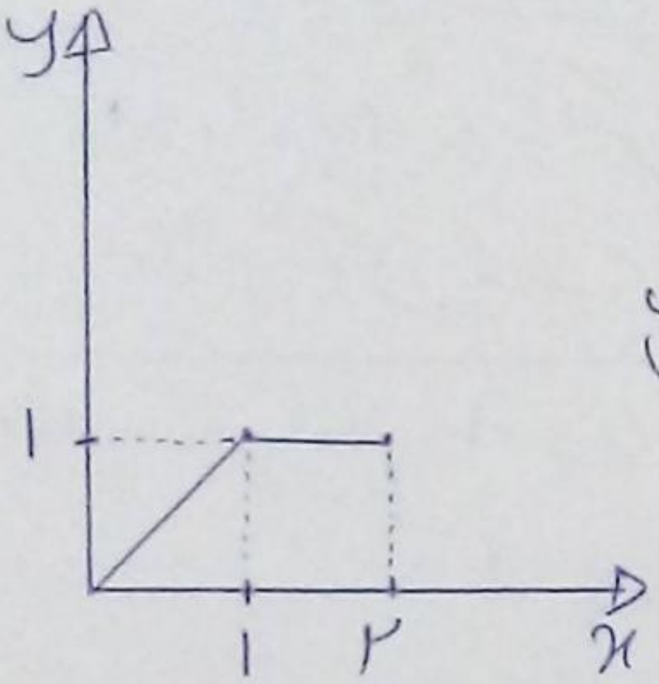
توابع رادیکالی: $f(x)=\sqrt{g(x)}$ $\quad g(x)\geq 0$



$f(x)+k$	$f(x)-k$	$kf(x)$	$\frac{1}{k}f(x)$	$-f(x)$
k واحد به بالا	k واحد به پایین	yها k برابر می شوند	yها بر k تقسیم می شوند	قرینه نسبت به محور xها
$f(x+k)$	$f(x-k)$	$f(kx)$	$f(\frac{x}{k})$	$f(-x)$
k واحد به چپ	k واحد به راست	xها بر k تقسیم می شوند	xها در k ضرب می شوند	قرینه نسبت به محور yها

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل است. به کمک آن، نمودار هرکدام از توابع زیر را رسم کنید.



آ) $y=f(x)+1$ ب) $y=f(x+1)$ پ) $y=2f(x)$

ت) $y=f(2x)$ ث) $y=-f(x)$ ج) $y=f(-x)$

چ) $y=-2f(x-1)+1$ ح) $y=\frac{1}{2}f(-\frac{x}{2})-1$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g مساوی یکدیگر هستند، هرگاه دو شرط لازم زیر هم زمان برقرار باشند:

الف) $D_f=D_g$

ب) ازای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم $f(x)=g(x)$

مثال: کدام جفت از توابع زیر با یکدیگر برابر هستند؟

۱) $f(x)=(x^2)^{\frac{1}{2}}$ ، $g(x)=(x^{\frac{1}{2}})^2$

۲) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ، $g(x)=\sqrt{x-2}\times\sqrt{x+2}$

۳) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ، $g(x)=\sqrt{3-x}\times\sqrt{3+x}$

۴) $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x^3-1}}$ ، $g(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3-1}}$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

نکته: برد تابع هموگرافیک با ضابطه $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ برابر است با:

$R_f=R-\{\frac{a}{c}\}$ $(c\neq 0)$ ، $(ad-bc\neq 0)$

Scanned by TapScanner

Scanned by TapScanner

$\sqrt{۱۲} \leq ۱۲/۲$

$\sqrt{۱۳} \simeq ۱۱/۷$

$\sqrt{۱۵} \simeq ۱۲/۲$

ب) $\left[\frac{\sqrt{۱۲}}{\sqrt{۱۲}-۱}\right]$

ا) $[\sqrt{۱۲}-\sqrt{۱۳}]$

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید:

ج) $g(x) = |x-۳|-|x+۱|$

ب) $f(x) = |x+۳|+|x-۲|$

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید:

f ضابطه‌ی $f(x) = ۲\sin^۲x + ۳\cos x - ۳$ مفروض است: دامنه‌ی

د) $[-۶, \frac{۳}{۴}]$ ج) $[-\frac{۱}{۲}, ۶]$ ب) $[-۱, ۳]$ ا) $[-۶, \frac{۱}{۸}]$

$-\sqrt{a^۲+b^۲} \leq a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^۲+b^۲}$

$a+b \geq ۲\sqrt{ab}$: a, b حقیقی مثبت باشند اگر

$a + \frac{۱}{a} \geq ۲$: a حقیقی مثبت باشد اگر

$a>۰ \Rightarrow Rf = [-\frac{\Delta}{۴a}, +\infty)$ ، $a<۰ \Rightarrow Rf = (-\infty, -\frac{\Delta}{۴a}]$

مثال: برد تابع $f(x) = ۲x^۲ + bx + c$ برابر $[۲, +\infty)$ است. b و c را بیابید.

د) $R-\{۱, ۳\}$ ج) $R-\{-۴, ۳\}$ ب) $R-\{۱, ۲\}$ ا) $R-\{۳\}$

ضابطه‌ی تابع $f(x) = \frac{۳x^۲-۲x-۱}{۲x^۲-۳x+۲}$ دامنه‌اش:

ویژگی‌های جزء صحیح:

$$[x+K] \overset{K\in Z}{=\!=} [x]+k$$

$$x-1 < [x] \leq x \quad , \quad 0 \leq x-[x] < 1$$

$$[x]=K \overset{K\in Z}{\longleftrightarrow} K \leq x < K+1$$

$$[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x\in Z \\ -1 & x\notin Z \end{cases}$$

$$[-x] = \begin{cases} -x & x\in Z \\ -[x]-1 & x\notin Z \end{cases}$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

الف) $[x+[x]]=6$

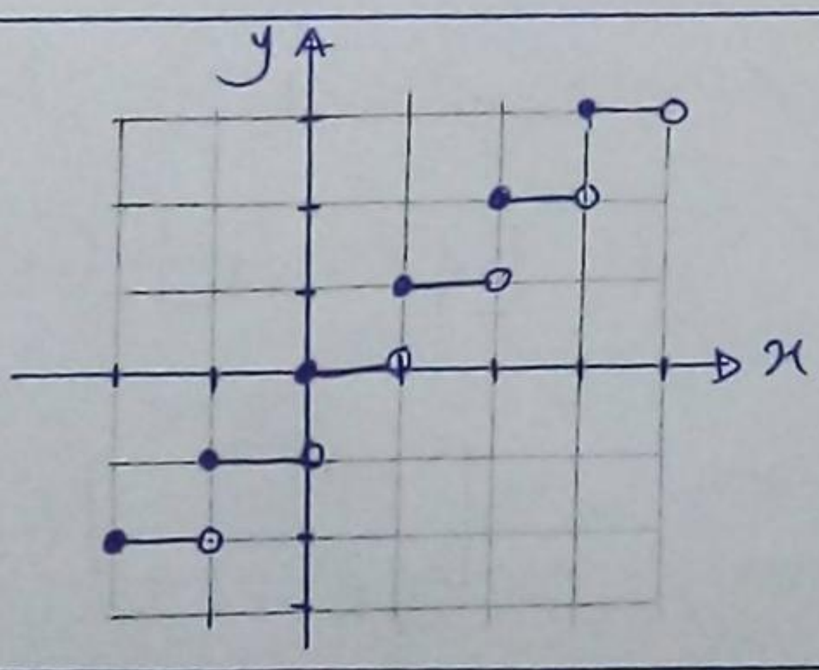
ب) $[x+1]-[x-3]=12-[x+2]$

ج) $\frac{1}{[x]+[-x]} = 2x^2-7x+4$

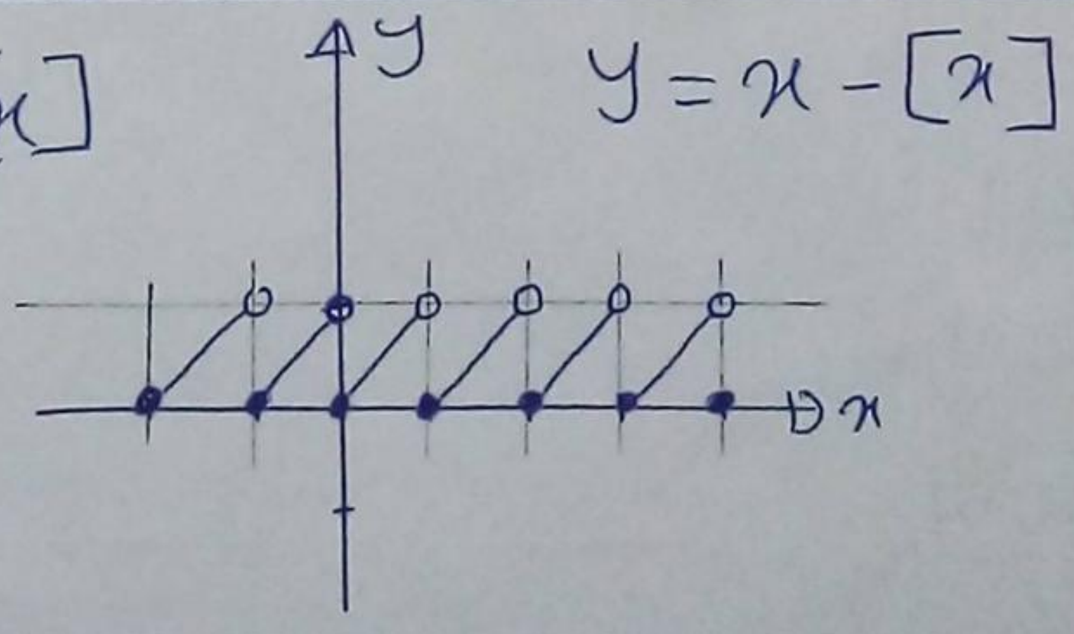
مثال: چند عدد صحیح در رابطه $5 < \left[\frac{2x-1}{3}\right] < \sqrt{35}$ صدق می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$y=[x]$



$y=x-[x]$



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: نمودار تابع $f(x)=[2x]+|x|$ در بازه $[-1,1)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

رسم نمودار تابع $y=[f(x)]$

مثال: نمودار تابع $y=[x^2]$ را در بازه $[-2,2]$ رسم کنید.

مثال: نمودار تابع $y=[x]^2$ را رسم کنید.

مثال: اگر تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 2 \\ 2x+a & x\leq 1 \end{cases}$ یک به یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a>-1$ ۲) $a>1$

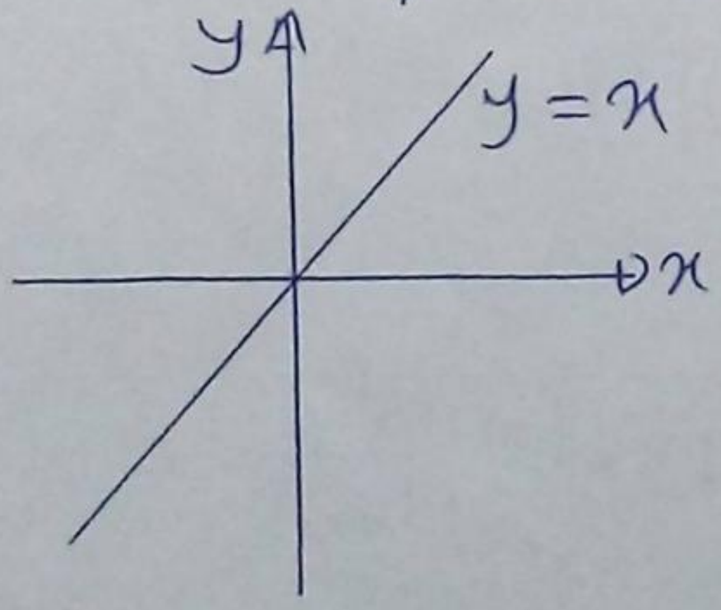
۳) $a<1$ ۴) $a<-1$

شرط وارون پذیری یک تابع یک به یک بودن آن است.

$(x,y)\in f \iff (y,x)\in f^{-1}$

$D_f=R_{f^{-1}}$, $R_f=D_{f^{-1}}$

نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه هستند.



برای بدست آوردن ضابطه تابع وارون، جای x و y را عوض می‌کنیم و سپس آن را ساده می‌کنیم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

f^{-1} ایجاد کنید: $f(x) = \frac{x-2}{1+x^2}$ ، $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، $(g \circ f)^{-1}(x)$ را محاسبه کنید.

۱) $\frac{x^2-2}{1+x^2}$ ۲) $\frac{2}{x-1}$ ۳) $\frac{2}{1-x}$ ۴) $x(1-x)$

$f \circ g(x) = f(g(x))$ ، $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$(f+g)(x)$	$(f-g)(x)$	$(fxg)(x)$	$(\frac{f}{g})(x)$
$D_f \cap D_g$	$D_f \cap D_g$	$D_f \cap D_g$	$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\}$

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ضابطه‌ی تابع $x \neq 0$ و $ad-bc \neq 0$:

$f^{-1}(x) = f(x)$ آن‌گاه ضابطه‌ی تابع $a+d=0$

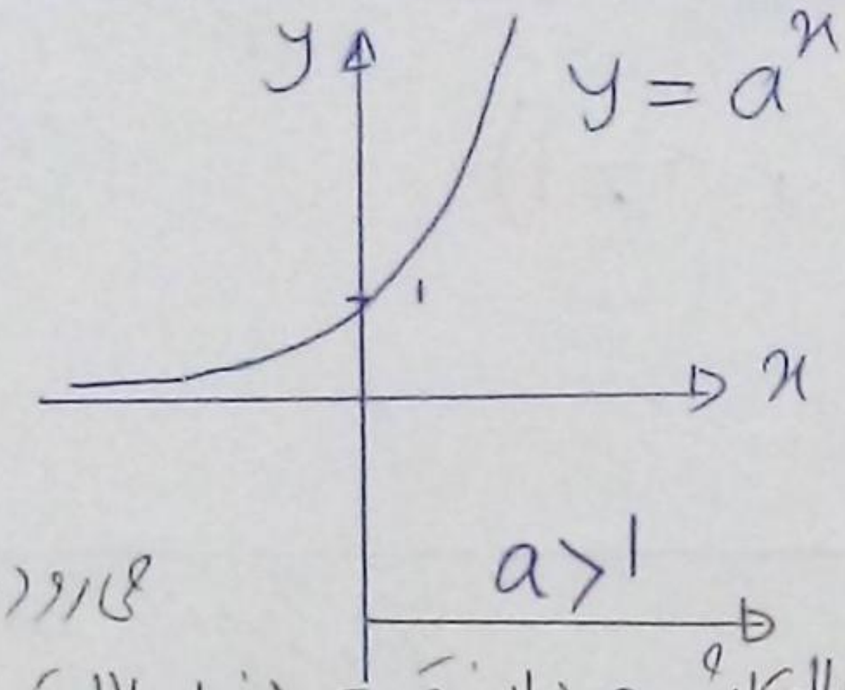
$f \circ f^{-1}(x) = x$ $f^{-1} \circ f(x) = x$

f^{-1} ایجاد کنید: $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}$ ، $f^{-1}(-1)$ را محاسبه کنید.

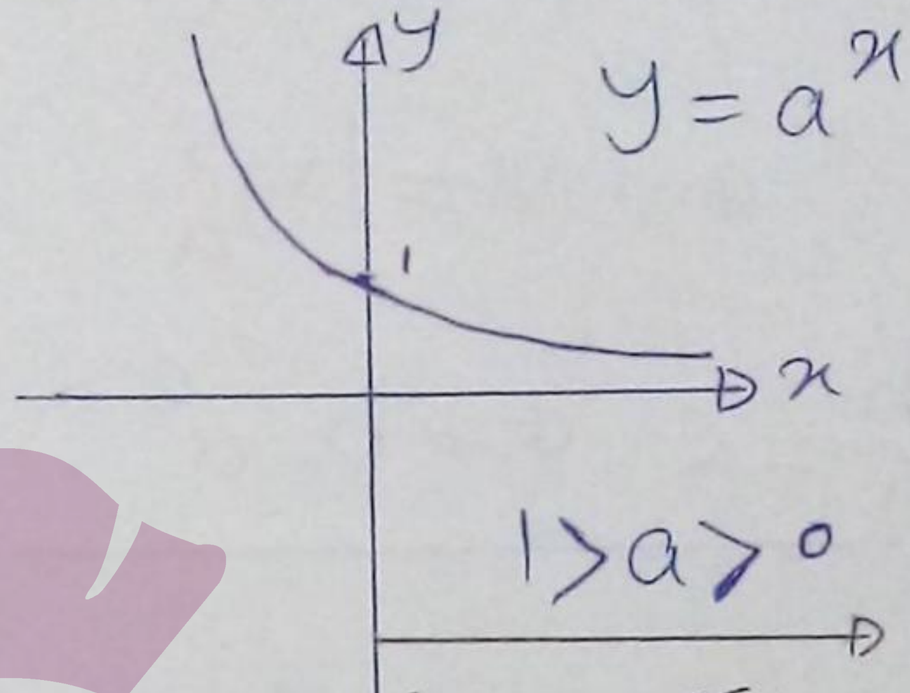
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی: به تابع با ضابطه $f(x)=a^x$ $(a\neq 1 , a>0)$، تابع نمایی می‌گوییم.



نمودار تابع نمایی با پایه a در این حالت نمودار بالا رو به بالا می‌رود.



نمودار تابع نمایی با پایه a در این حالت نمودار بالا رو به پایین می‌رود.

معادلات نمایی

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Longrightarrow f(x)=g(x)$$

مثال: نمودارهای دو تابع $f(x)=2^{ax+b}$ و $g(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^x$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(2)=64$ باشد، مقدار $f\left(\frac{1}{16}\right)$ کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۴- ۳) ۲- ۴) ۲

نامعادلات نمایی

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \xrightarrow{a>1} f(x)<g(x)$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \xrightarrow{0<a<1} f(x)>g(x)$$

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{1}{729} < 3^{\frac{5}{x}+4}$

ب) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x^2+x+1} \leq \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{4x+5}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی $f(x)=a^x$ یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. تابع وارون تابع f را با نماد $f^{-1}(x)=\log_a^x$ نمایش می دهیم و به آن تابع لگاریتمی در پایه یا مبنای a می گوییم.

$$y=a^x \iff x=\log_a^y \qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

$$\log_a^b=c \iff b=a^c$$

دامنه توابع لگاریتمی

$$f(x)=\log_{h(x)}^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ h(x)>0,\ h(x)\neq 1 \end{cases}$$

$$\log_a^1=0 \qquad \log_a^a=1 \qquad \log AB=\log A+\log B$$

$$\log_a \frac{A}{B}=\log_a^A-\log_a^B \qquad \log_a^{A^n}=n\log_a^A$$

$$\log_{a^m}^A=\frac{1}{m}\log_a^A \qquad \log_{a^m}^{A^n}=\frac{n}{m}\log_a^A$$

$$\log_a^A=\frac{\log_b^A}{\log_b^a} \qquad \log_b^a=\frac{1}{\log_a^b} \qquad a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$$

$$\log_b^a \times \log_c^b=\log_b^a \times \frac{1}{\log_b^c}=\frac{\log_b^a}{\log_b^c}=\log_c^a$$

$$a^{\log_a^A}=A \qquad \log_a^x=\log_a^y \iff x=y$$

نتیجه

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

تابع چندجمله‌ای از درجه n $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

تابع درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

نمودار تابع درجه سوم

مثال: نمودار تابع $y = x^3$ را به روش نقطه یابی رسم کنید. با استفاده از نمودارشان دهید این تابع دارای وارون پذیراست. نمودار f^{-1} را رسم کنید، ضابطه آن را تعیین کنید.

توابع صعودی و نزولی:

تابع اکیداً صعودی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

تابع اکیداً نزولی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

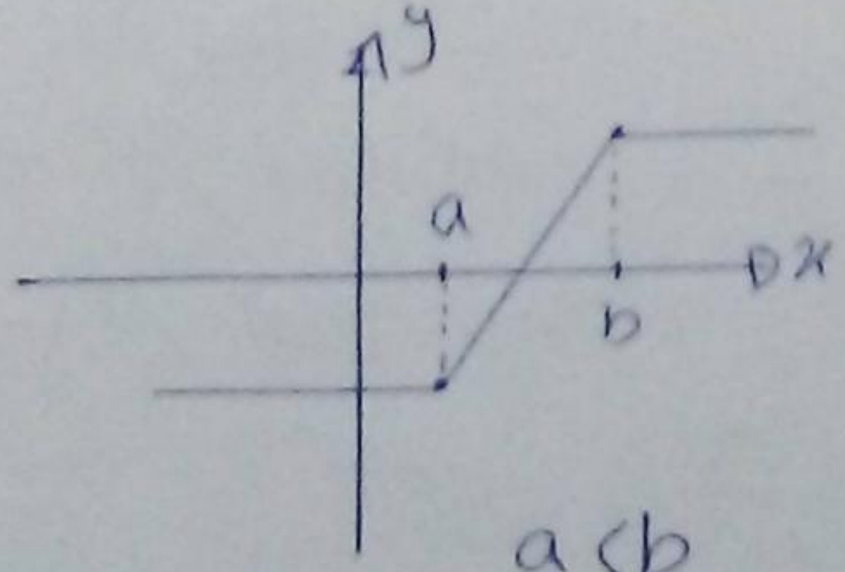
تابع صعودی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

تابع نزولی $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

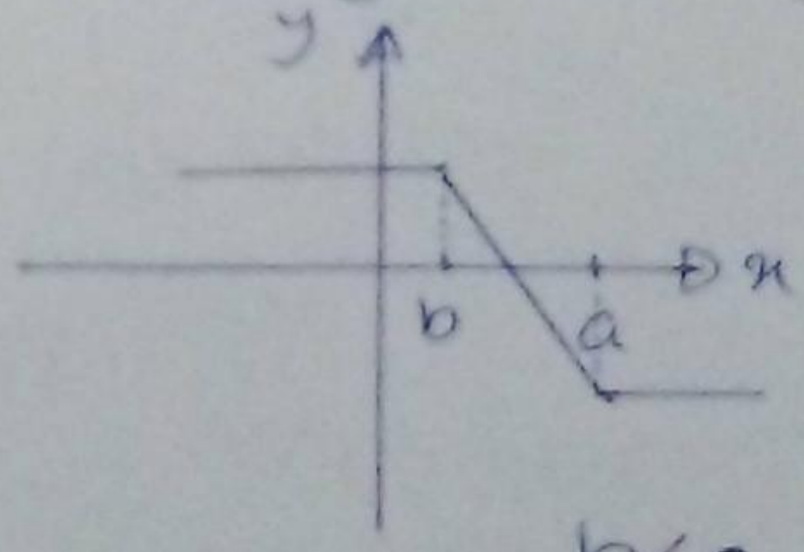
تشخیص یکنوایی ← به کمک نمودار
← به کمک علامت تابع مشتق
← به کمک تعریف یکنوایی

$f(x) = |x-a| - |x-b|$

نکته: تابع آشاری غیر ثابت با ضابطه $f(x) = |x-a| - |x-b|$ که $a < b$ و a و b اعدادی حقیقی باشند، نمودار این تابع به صورت مقابل است.



$a < b$



$b < a$

ایران توشه
توشه‌ای برای همه فرصت‌ها
Scanned by TapScanner

مثال: حدود m را برای آن که تابع $f(x)=|x-m^2|-|x-3m+2|$ روی R صعودی باشد، کدام است؟

1) $0<m<1$ 2) $m>1$ 3) $1<m<2$ 4) $m>2$

نکته: توابع $f(x)=\log_a^x$ ، $g(x)=a^x$ با شرط $(a>0, a\neq 1)$ ، $a>1$ صعودی اکید، با شرط $0<a<1$ نزولی اکید هستند.

مثال: اگر تابع با ضابطه $f(x)=\left(\frac{1-2m}{3}\right)^x$ همواره نزولی باشد، حدود m کدام است؟

1) $1<m<2$ 2) $-1<m<\frac{1}{2}$ 3) $-\frac{1}{2}<m\leq 1$ 4) $-2<m<-1$

مثال: حدود a برای آن که تابع درجه دوم $f(x)=(a-1)x^2-ax+3$ در بازه $[1, -\infty)$ نزولی اکید باشد، کدام است؟

1) $1<a\leq 2$ 2) $a\geq 2$ 3) $a\leq 1$ 4) $0<a\leq 1$

مثال: اگر توابع f و g روی R صعودی اکید باشند، ثابت کنید تابع $f+g$ نیز روی R صعودی اکید است.

نکته: اگر $f(x)$ صعودی باشد، آنگاه $-f(x)$ نزولی است، اگر $f(x)$ نزولی باشد آنگاه $-f(x)$ صعودی است.

نکته: اگر $f(x)$ مثبت باشد:

الف) اگر $f(x)$ صعودی باشد آنگاه $\frac{1}{f(x)}$ نزولی است.

ب) اگر $f(x)$ نزولی باشد آنگاه $\frac{1}{f(x)}$ صعودی است.

صعودی = نزولی − صعودی

نزولی = صعودی − نزولی

صعودی = صعودی / نزولی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{درجه } n} = \underbrace{p(x)}_{\text{درجه } m} \underbrace{q(x)}_{\text{درجه } n-m} + \underbrace{r(x)}_{\text{حداکثر از درجه } m-1}$$

درصورتی که $r(x)$ برابر صفر باشد آنگاه چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر چندجمله‌ای درجه اول $p(x)=ax+b$ تقسیم کنیم، آنگاه باقی‌مانده حتماً از درجه صفر خواهد بود و در این حالت داریم:

$$r = f\left(\frac{-b}{a}\right)$$

مثال: اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^{۴} + ax + b$ بر $x^{۲} - ۲x - ۳$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-۱$ کدام است؟

۱) -۲۱ ۲) -۲۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۵

مثال: باقی‌مانده تقسیم $f(x)=۲x^{۵}+x^{۴}+۲x^{۳}-x^{۲}-۱$ بر $x^{۲}-۱$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $x+۴$ ۳) $۹x-۱$ ۴) $۲x+۳$

$$x^{۳} \mp a^{۳} = (x \mp a)(x^{۲} \pm ax + a^{۲})$$

$$x^{n} - a^{n} = (x-a)(x^{n-۱} + x^{n-۲}a + x^{n-۳}a^{۲} + \cdots + xa^{n-۲} + a^{n-۱})$$

$$x^{n} + a^{n} = (x+a)(x^{n-۱} - x^{n-۲}a + x^{n-۳}a^{۲} - \cdots - xa^{n-۲} + a^{n-۱}),\ (n \text{ فرد})$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

عبارت $x^n - a^n$ همواره بر $x-a$ بخش پذیر است.

عبارت $x^n + a^n$ بر $x+a$ وقتی بخش پذیر است که n فرد باشد.

عبارت $x^n - a^n$ بر $x+a$ وقتی بخش پذیر است که n زوج باشد.

مثال: عبارت $x^{12}+1$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

۱) x^2+1 ۲) x^3+1 ۳) x^4+1 ۴) x^6+1

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

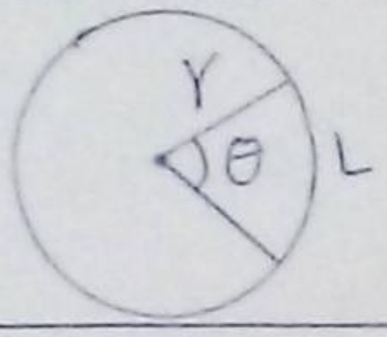
Scanned by TapScanner

مثلثات

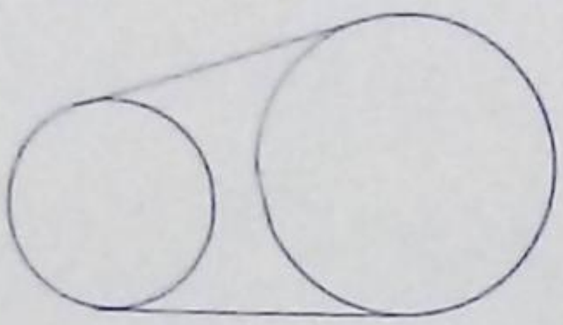
پاد ساعتگرد ↺ : زاویه مثبت ساعتگرد ↻ : زاویه منفی

$۳۶۰ \equiv ۲\pi$
درجه رادیان

زاویه θ برحسب رادیان $= \frac{L}{۲}$



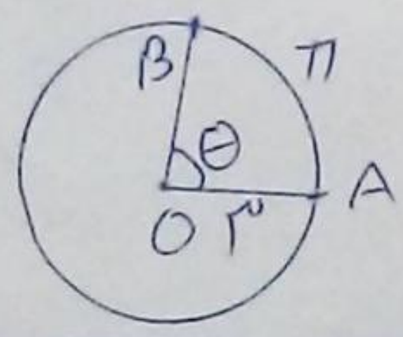
مثال: در شکل مقابل یک تسمه، دو قرقره به شعاع های 15cm و 6cm را هم وصل کرده است. وقتی قرقره بزرگ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان می چرخد، قرقره کوچک تر چند رادیان می چرخد؟



جواب: $\frac{۵\pi}{۳}$ rad

مساحت قطاعی از دایره:

مثال: در شکل مقابل، طول کمان روبرو به زاویه θ، برابر π سانتی متر است. مساحت قطاع OAB چند سانتی متر مربع است؟

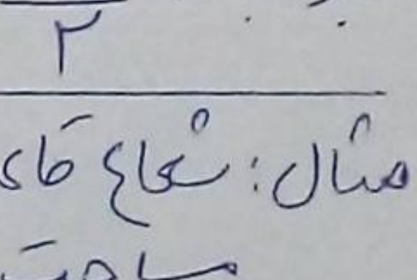


جواب: $\frac{۳\pi}{۲}$

مثال: شعاع قاعده و ارتفاع مخروطی به ترتیب برابر $r=9$ و $h=12$ سانتی متر است. مساحت قطاع حاصل از بسط گسترده این مخروط چند سانتی متر مربع است؟

جواب: ۱۳۵π

$\sin\theta = \frac{c}{a}$ $\cos\theta = \frac{b}{a}$ $\tan\theta = \frac{c}{b}$ $\cot\theta = \frac{b}{c}$



* اگر α و β دو زاویه متمم باشند، آن گاه داریم: ($\alpha+\beta=90$)

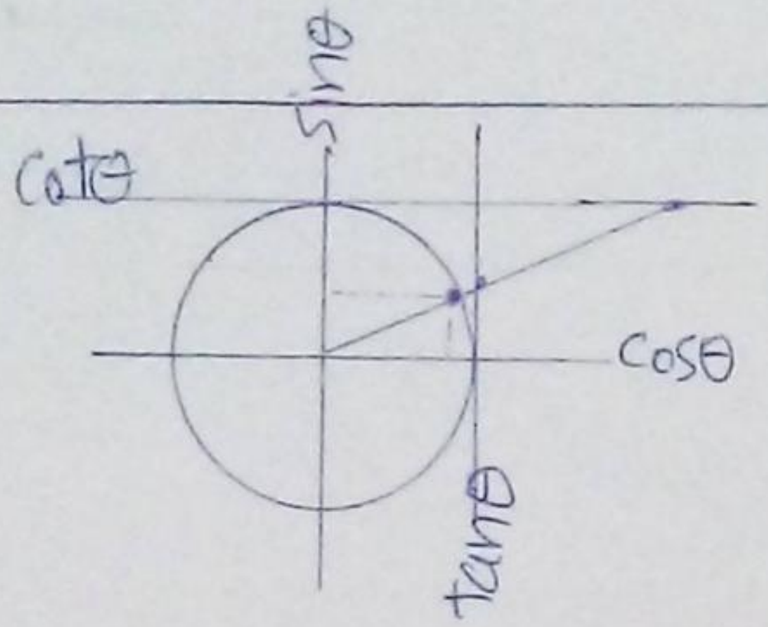
متمم

$\sin\alpha = \cos\beta$ $\cos\alpha = \sin\beta$

$\tan\alpha = \cot\beta$ $\cot\alpha = \tan\beta$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner



علامت‌های نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های مختلف

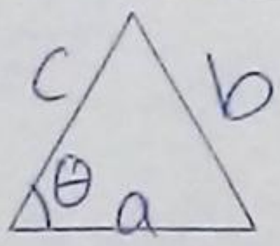
$-1 \leq \sin\theta, \cos\theta \leq 1$

$\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \cdots$

زاویه‌های پرکاربرد

مثال: اگر $\frac{-\pi}{3} < \theta < \pi$ و $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2m-1}{3}$، حدود تغییرات m کدام است؟

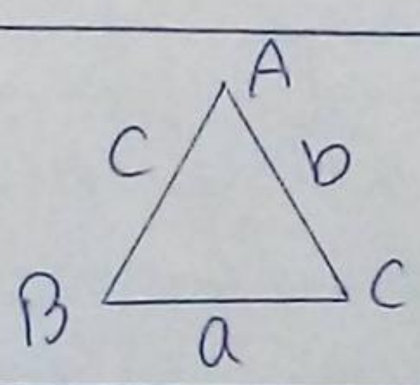
جواب: $\frac{1}{2} < m \leq 2$



$S = \frac{1}{2} a \times c \times \sin\theta$

مثال: مساحت لوزی که طول ضلع آن 6 و اندازه یک زاویه آن 120° باشد، کدام است؟

جواب: $18\sqrt{3}$



$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

مثال: اگر $\tan x = -\frac{1}{2}$، $\cos x < 0$، مقدار $\sin x$ کدام است؟

جواب: $\frac{\sqrt{5}}{5}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثلثات

مثال: حاصل عبارت $\frac{1}{\sin\theta(1-\cos\theta)} - \frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}$ کدام است؟

جواب: صفر

$\sin, \cos$ دوره تناوب $= 2\pi$ $\quad \tan, \cot$ دوره تناوب $= \pi$

درصورتی که دوره تناوب را بالکان تابع مثلثاتی جمع یا از آن کم کنیم، حاصل تابع مثلثاتی تغییر نمی کند

خریبی از

درصورتی که مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ را بالکان تابع مثلثاتی جمع کنیم، تابع مثلثاتی از:

$$\ldots \frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$$

$\sin$ به $\cos$ و از $\cos$ به $\sin$ یا از $\tan$ به $\cot$ و از $\cot$ به $\tan$ تغییر می کند

$\sin \longrightarrow \cos$
$\cos \longrightarrow \sin$

$\tan \longrightarrow \cot$
$\cot \longrightarrow \tan$

برای مشخص شدن علامت آن از دایره مثلثاتی استفاده می کنیم.

$\pm$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

درصورتی که مضربی از π را بالکان تابع مثلثاتی جمع یا از آن کم کنیم، تابع مثلثاتی تغییر نمی کند و برای مشخص شدن علامت آن از دایره مثلثاتی استفاده می کنیم.

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cot\alpha \qquad \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha) = -\cos\alpha \qquad \cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

مثال: معادله خطی که از نقطه $(4,-3)$ بگذرد و با جهت مثبت محور xها زاویه $45°$ بسازد، کدام است؟

جواب: $y-x=7$

اگر f تابعی متناوب و T دوره تناوب اصلی آن باشد، آنگاه:

$$f(x \pm nT) = f(x) \quad n \in N$$

مثال: فرض کنید f تابعی متناوب با دامنه R و دوره تناوب $T=4$، ضابطه آن در بازه $[0,4)$ به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ باشد. مقدار $f(-1/75)$ کدام است؟

جواب: $1/5$

$$\begin{cases} f(x)=k\sin(ax+b)+c \\ g(x)=k\cos(ax+b)+c \end{cases}$$

$$T=\frac{2\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} h(x)=k\tan(ax+b) \\ k(x)=k\cot(ax+b) \end{cases}$$

$$T=\frac{\pi}{|a|}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1 \mp \tan\alpha}{1 \pm \tan\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} \mp \alpha\right)$$

مثال: اگر $\tan(a-b)=\frac{3}{7}$، $\tan(a+b)=\frac{2}{5}$ باشد، حاصل $\tan 2a$ کدام است؟

جواب: ۱

Scanned by TapScanner

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$= 2\cos^2\alpha - 1$
$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ ، $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ ، $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

مثال: اگر $\tan x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\tan\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$ کدام است؟

جواب = ۷-

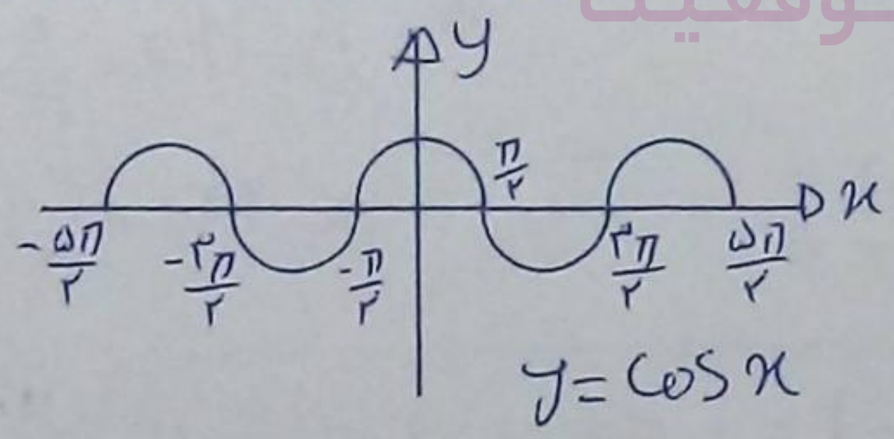
مثال: ثابت کنید:

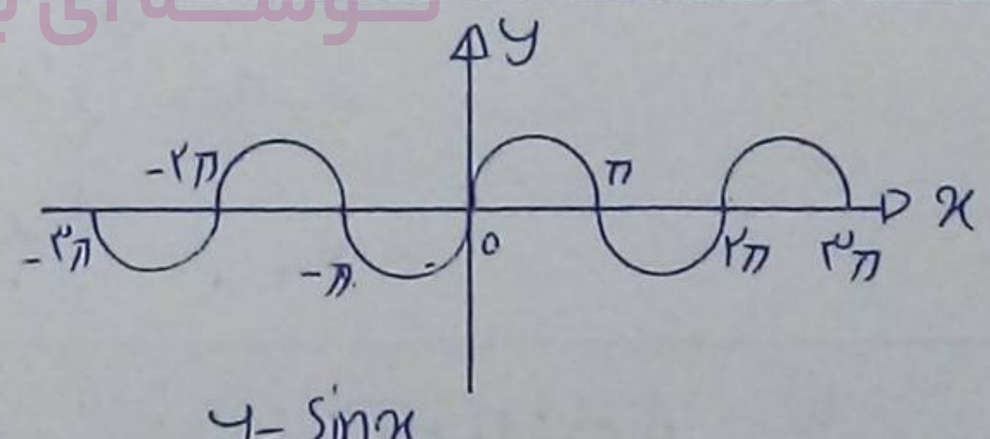
$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$

$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

مثال: اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

جواب: $-\frac{8}{3}$





توابع $y=a\cos(bx+d)+c$ ، $y=a\sin(bx+d)+c$ ($a,b\neq 0$) دارای:

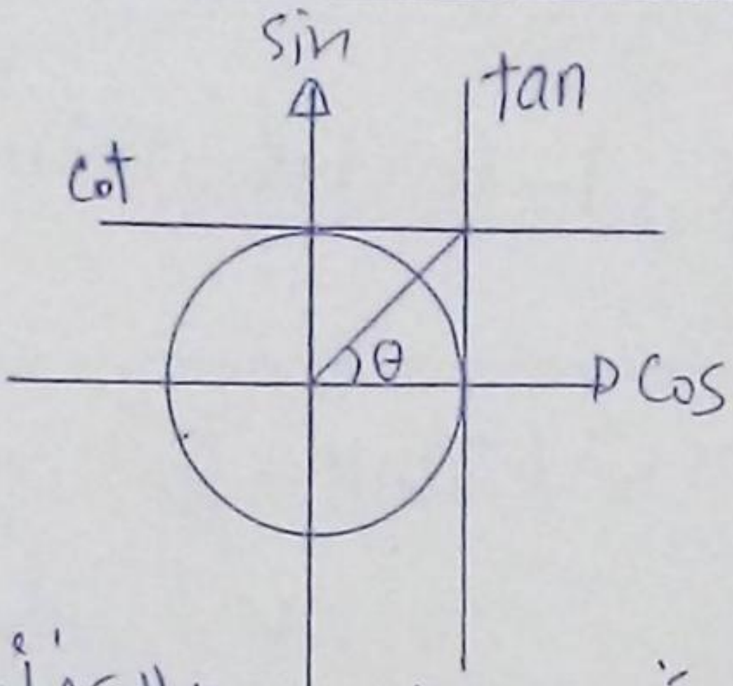
$Max = |a|+c$ $Min = -|a|+c$ $c = \frac{max+min}{2}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

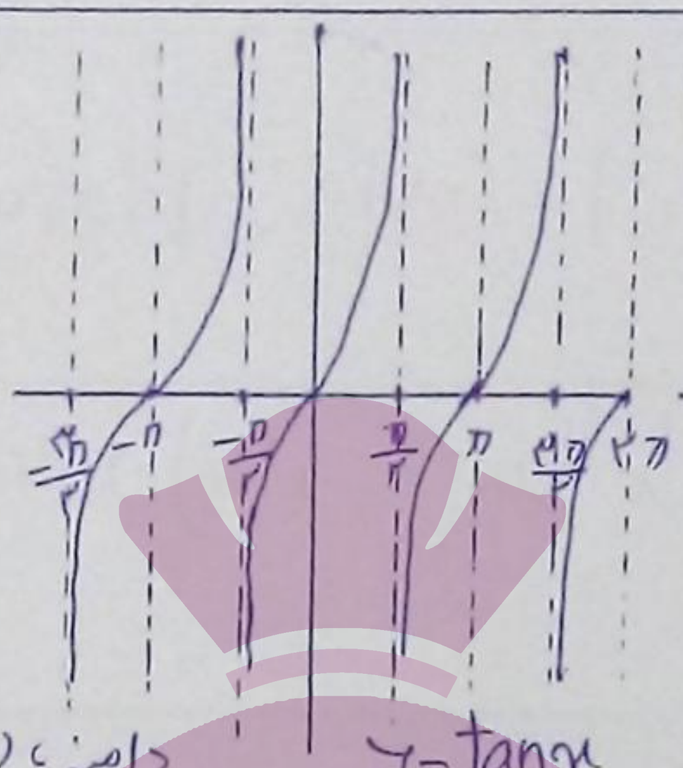
در حدودی که توان sin یا cos زوج باشد، دوره تناوب آن π، در حدودی که توان فرد باشد، دوره تناوب آن 2π است.

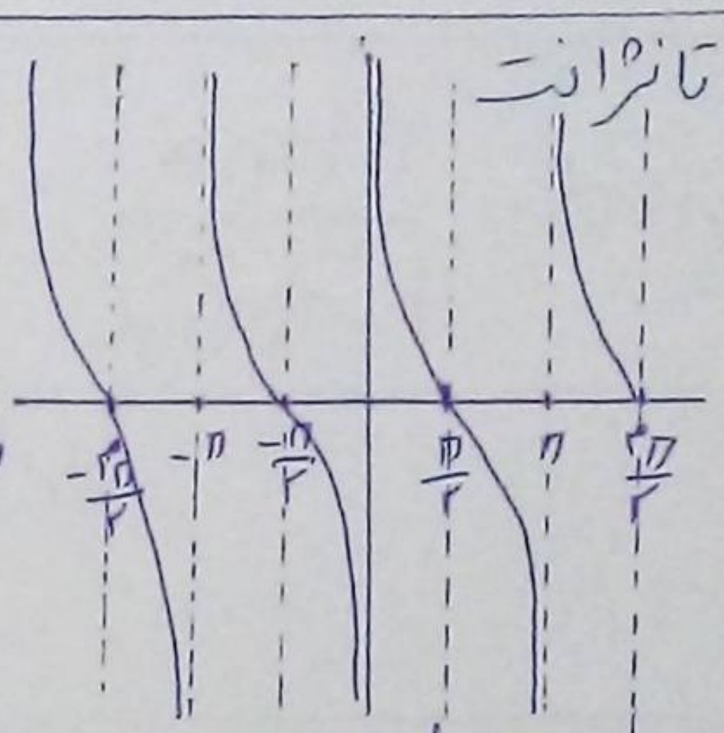
توابع مثلثاتی tan , cot هرتوانی که داشته باشند (چه زوج چه فرد)، دوره تناوب آن π است.

تابع تانژانت

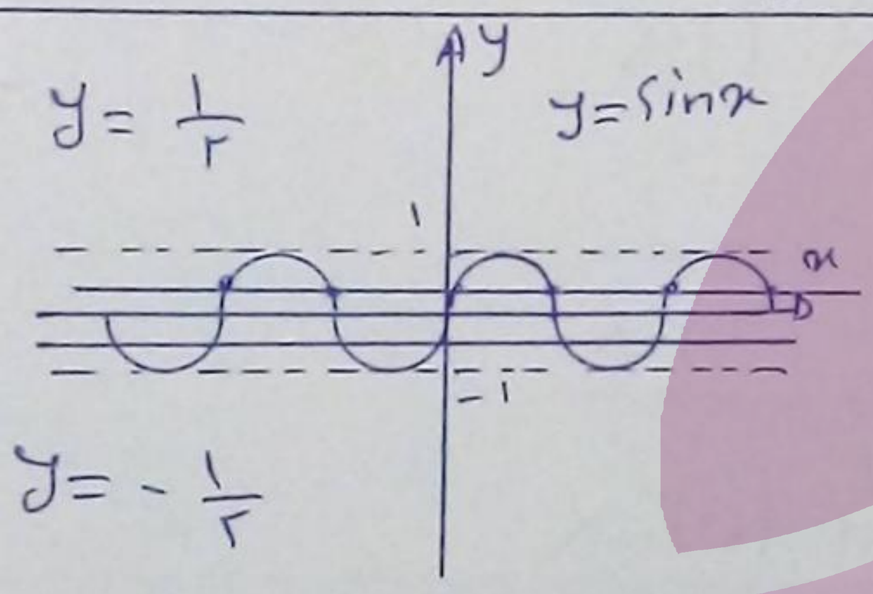


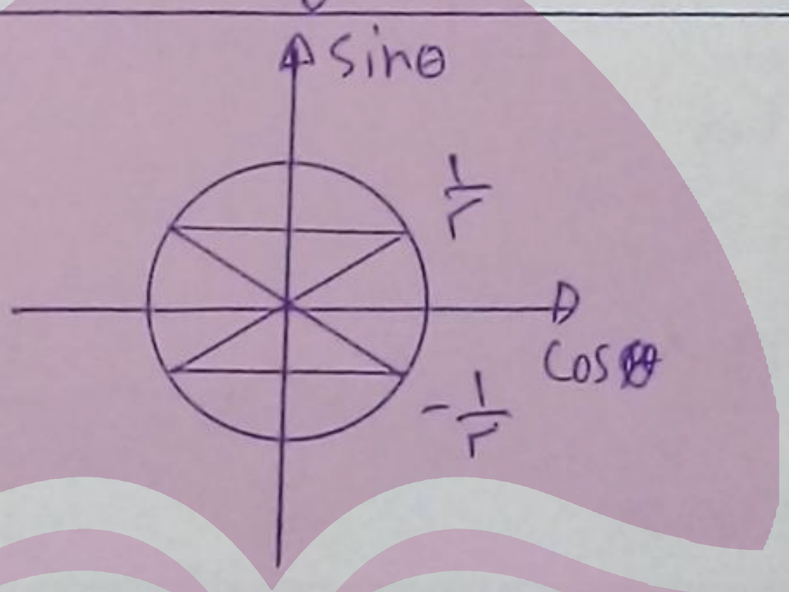
حل معادلات مثلثی | رسم نمودار، دوره تناوب، دامنه





معادلات مثلثی





$\sin U=\sin\alpha$

مثال: $|\sin\alpha|=\frac{1}{2}$

$\sin U=\sin\alpha \Rightarrow U=2k\pi+\alpha,\ 2k\pi+\pi-\alpha=U,\ k\in Z$

مثال ۱) $\sqrt{3}\sin x=2$

$\Downarrow$

جواب‌ها $\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \end{cases}$

۲) $\sin 5x-\sin x=0$

$\Downarrow$

جواب‌ها $\begin{cases} x=\frac{2k\pi}{3} \\ x=\frac{(2k+1)}{3}\pi \end{cases}$

مثال: مجموع جواب‌های معادله $2\sin(2x-\frac{\pi}{3})-1=0$ در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟

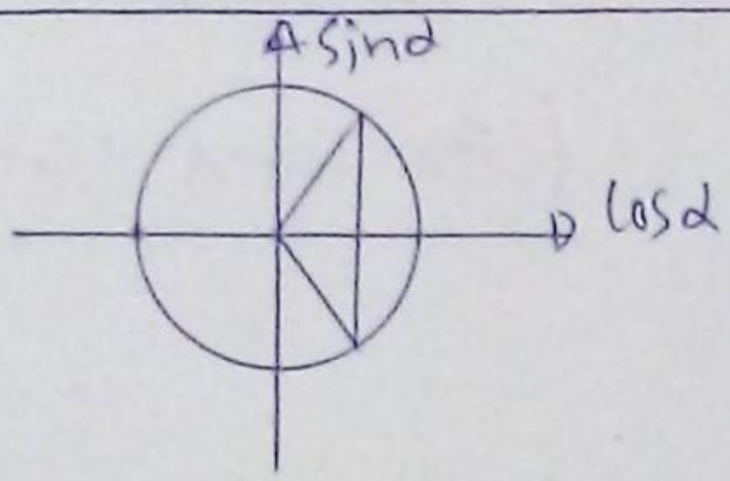
جواب: $\frac{11\pi}{3}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

حالات خاص: $\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$ ، $\sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\sin x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$

مثال: معادله مثلثی $\sin^2 x+\sin x=0$ را حل کنید.



$\cos U=\cos\alpha$

$U=2k\pi\pm\alpha$

مثال: $\sqrt{2}\cos 2x-1=0$ $\left(x=\frac{2k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}\right)$

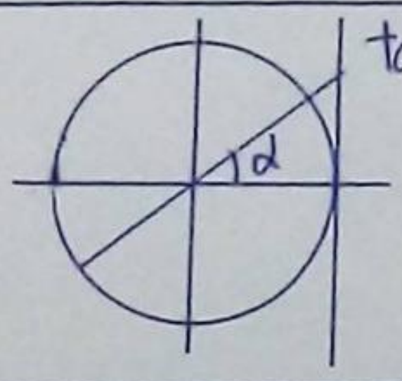
مثال: $\cos 5x\cos 2x+\sin 5x\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(x=k\pi\pm\frac{\pi}{12}\right)$

حالات خاص $\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، $\cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi$

$\cos x=-1 \Rightarrow x=(2k+1)\pi$

مثال: مجموع جواب های معادله $2\cos^2 x+1=3\cos x$ در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟

جواب: 4π



$\tan U=\tan\alpha$

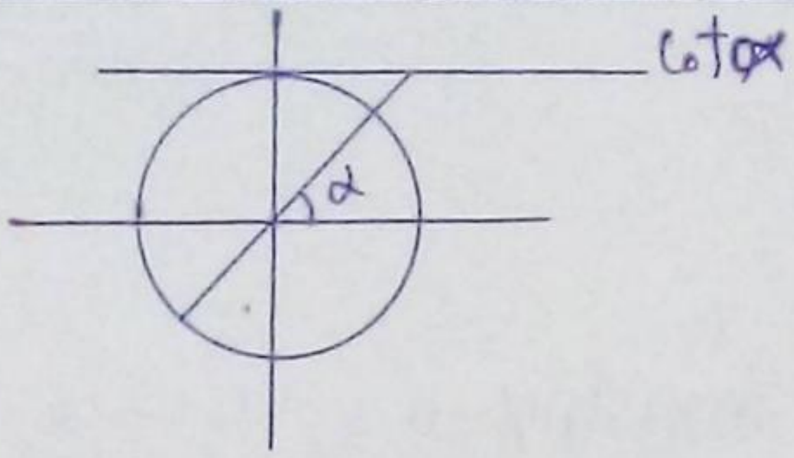
$\tan U=\tan\alpha \Rightarrow U=k\pi+\alpha, k\in Z$

مثال: $\sqrt{3}\tan 3x-1=0$ $\left(x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{18}\right)$

$\tan(x+\frac{\pi}{6})-\tan(\frac{\pi}{6}-x)=2$ $\left(x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$

$\tan x+\cot x=2$ $\left(x=k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner



$\cot U = \cot \alpha$

$U = k\pi + \alpha \; , k \in Z$

مثال: $\cot x - \tan x = 2\sqrt{3}$ $\left(x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right)$

$(\cot x - \tan x = 2\cot 2x)$

$\sin^2 U = \sin^2 \alpha$

$\cos^2 U = \cos^2 \alpha$

$\tan^2 U = \tan^2 \alpha$

$\cot^2 U = \cot^2 \alpha$

با دارای قدر مطلق باشند.

مثال: $\sin(\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{6} = 0$

$\left(x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \right)$

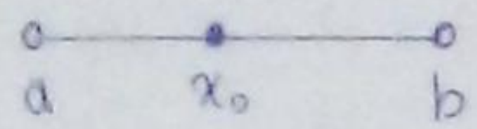
مثال: معادله $(2\cos^2 x - 2)(4\sin x - 5) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

(۶) جواب.

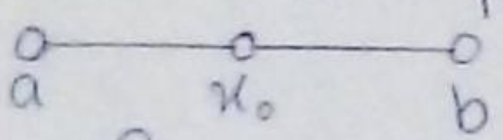
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

* اگر $x_0 \in (a,b)$، آن گاه بازه (a,b) یک همسایگی x_0 است.



* اگر بازه (a,b) یک همسایگی x_0 باشد و نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، به مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$، یک همسایگی محذوف x_0 گفته می‌شود.



مثال: اگر بازه $(4+3x, 1-2x)$ یک همسایگی 1 باشد، آن گاه x به کدام بازه تعلق دارد.

۱) $(0,2)$ ۲) $(-2,0)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(1,4)$ (جواب: گزینه ۳)

مقدار تابع	حد تابع	همسایگی چپ x_0 (حد چپ)	همسایگی راست x_0 (حد راست)
$f(a)$	$\lim_{x \to a} f(x)$	(x_0-r, x_0)، $(r>0)$	(x_0, x_0+r)، $(r>0)$

* شرط آن که در تابع f، متغیر x $(x \in D_f)$ بتواند با مقادیر بیش‌تر (یا کم‌تر) از a به عدد a میل کند، یعنی شرط آن که $x \to a^+$ (حد راست) یا $x \to a^-$ (حد چپ)، آن است که تابع f در همسایگی راست (یا چپ) نقطه a تعریف شده باشد.

* ممکن است یک تابع در نقطه a تعریف شده باشد، اما حد تابع وقتی $x \to a$ موجود باشد

* شرط لازم برای وجود حد تابع در نقطه‌ای مانند a، آن است که تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد.

عدد متناهی معلوم — $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) =$ ی گران باشد

* شرط وجود حد در یک نقطه

(حد راست) (حد چپ)

* تابع f در همسایگی یا همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد

* حد چپ و راست تابع f در نقطه a موجود و برابر باشند

* تابع در همسایگی های محذوف نقاط ابتدا و یا انتهای بازه تعریف نشده است. (در این نقاط حد وجود ندارد) و تنها در صورت وجود حد به صورت حد چپ یا حد راست وجود دارد.

در این نقاط

مثال: اگر تابع f در نقطه $x=2$ دارای حد باشد و $\lim_{x \to 2} \frac{3f(x)-2}{f(x)+3^4} = 1$، آن گاه $\lim_{x \to 2} f(x)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 3 (جواب: گزینه ۴)

* اعمال جبری روی حد توابع

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: اگر توابع $f+g$ ، $f-g$ هردو در $x=a$ دارای حد باشند، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) توابع f و g در $x=a$ حد دارند. ۲) تابع f در $x=a$ دارای حد و تابع g در $x=a$ فاقد حد است.
۳) تابع f در $x=a$ فاقد حد و تابع g در $x=a$ دارای حد است. (جواب: گزینه ۱)
۴) یا هردوی آن‌ها در $x=a$ دارای حد یا هردو در $x=a$ فاقد حد است.

مثال: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-a & x>1 \\ \frac{4x+2}{4x^2-x+1} & x\leq 1 \end{cases}$ در $x=1$ دارای حد است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هر مقدار a ۴) به ازای هیچ مقدار a (جواب: گزینه ۴)

مثال: حد توابع $f(x)=\sqrt{x^2-x^4}$ ، $g(x)=\sqrt{x^4-x^5}$ در $x=0$ به ترتیب از راست و چپ کدام است؟

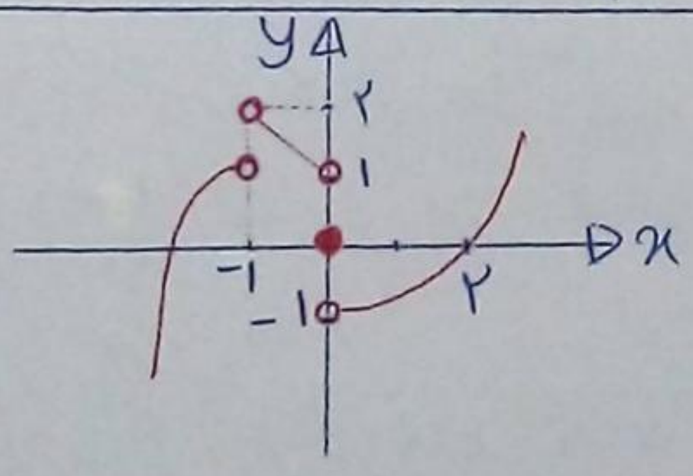
۱) صفر - صفر ۲) مرجب‌بینهایت - مرجب‌بینهایت ۳) صفر - مرجب‌بینهایت ۴) مرجب‌بینهایت - مرجب‌بینهایت.
(جواب: گزینه ۳)

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0}(\sin x\cos^3 x-\cos x\sin^3 x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: حاصل $\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{2x-1}{x-2}\right]$ کدام است؟ ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) مرجب‌بینهایت.
(جواب: گزینه ۱)

مثال: نمودار تابع f به صورت مقابل است



حاصل $\lim_{x\to 0^-} f(x^2-1)+\lim_{x\to 1^+} f(x^2-3x+2)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳ (جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner

مثال: اگر $f(x)=[x]$ ، $g(x)=\frac{x}{x-1}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 2^+} fog(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر (جواب: گزینه ۱)

* صفر حدی، صفر مطلق

$1^+=1/001$ ، $1^-=0/999\ldots$

مثال: $\lim_{x\to 2^+}[x^2-4]^{(x^2-4)}=[0^+]^{0^+}=0$ ، $\lim_{x\to 1^-}(x^2-1)^{[x]}=(0^-)^{[1^-]}=1$

* رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$: ① حذف عامل ابهام ② هرپتال ③ هم ارزی ④ تغییر متغیر

$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2[x]-12}{x[x]-4}=4$ ، $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{|x^2-5x+4|}=4$ ، (* گویا کردن مخرج کسر جزیی)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\frac{3}{2}$ ، * $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan mx}{x}=m$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}=9$ ، $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=-\sqrt{2}$ ، $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\cos 2x}=1$

* قاعده هرپتال * روابط مشتق گیری

$$* \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

* در رابطه ی هرپتال بالا، اگر توابع $f(x)$ (صورت) یا $g(x)$ (مخرج) صورت را انتگرالی و یا کسری باشند، زیر انتگرال منفی باشد و یا از مخرج عبارت هایی $f(x)$ یا $g(x)$، غیر ظاهر شود از قاعده هرپتال استفاده نمی کنیم.

f یا g صورت را انتگرالی f یا g صورت کسری باشند.

* اگر $g(x)$ صفر باشد، در مشتق آن نیز ظاهر می شود و همچنان مبهم باقی می ماند.

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \to y'=\frac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{g^2(x)}$$

* اگر زیر رادیکال صفر باشد، در مشتق آن نیز در مخرج کسر صفر ظاهر می شود و همچنان مبهم باقی می ماند.

$$y=\sqrt[m]{f^n(x)} \to y'=\frac{n f'(x)}{m\sqrt[m]{f^{m-n}(x)}}$$

Scanned by TapScanner

مثال: اگر $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

(جواب: گزینه ۳)

* هم ارزی

$\sin x \sim x$ $(x\to 0)$ ، $\tan x \sim x$ $(x\to 0)$ ، $\sqrt[n]{1\pm u}\sim 1\pm\frac{u}{n}$ $(u\to 0)$

$(1\pm u)^n \sim 1\pm nu$ $(u\to 0)$

* اگر در هنگام استفاده از هم ارزی حاصل عبارت صفر شد، باید تعداد جملات سری مک لورن را افزایش دهیم

$u\to 0$ ، جملات با توان بزرگتر ناچیز

(* بسط های مک لورن)

(* استفاده از هم ارزی $u\to 0$)

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots$$
$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \cdots$$
$$\tan u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + \cdots$$

(* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan 2x - 2x} = \frac{x-x}{2x-2x}$)

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + \tan^3 2x + \sin 5x}{\sin^3 x + 2\tan x}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲۷ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۱

(جواب: گزینه ۳)

مثال: اگر $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+3x}+9}{x^2-2x}=-\frac{1}{4}$ باشد، n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

(جواب: گزینه ۳)

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin x \times \tan 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $-\frac{9}{4}$

(جواب: گزینه ۳)

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 2x}-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt[4]{\cos 3x}}$ کدام است؟

(جواب: گزینه ۴)

۱) $-\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{10}{27}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $-\frac{10}{27}$

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan 2x - 2x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $-\frac{3}{8}$

(جواب: گزینه ۱)

Scanned by TapScanner

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2\tan x}{x \times \sin x \times \sin 2x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{4}$ ۲) $-\frac{11}{2}$ ۳) $\frac{11}{2}$ ۴) $\frac{11}{4}$ (جواب: گزینه ۱)

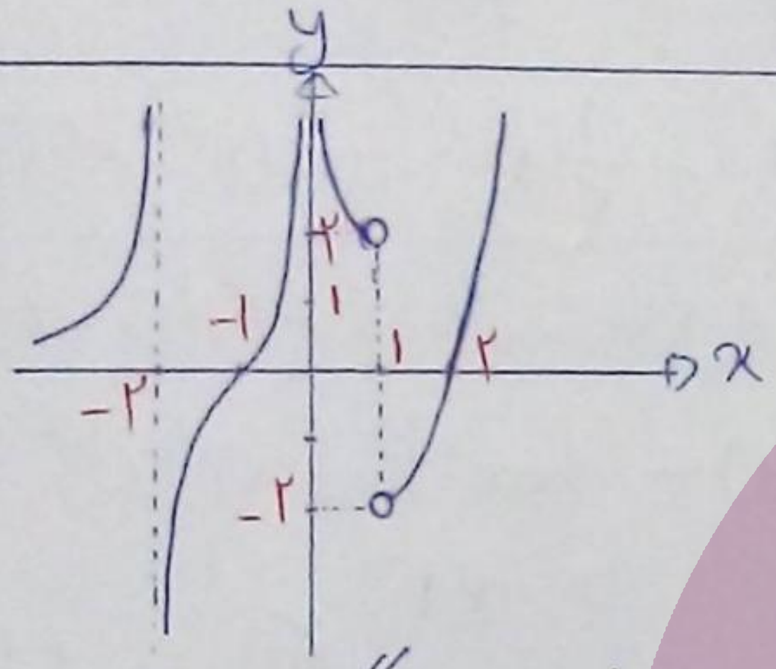
---

* استفاده از تغییر متغیر

مثال: حد زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر، به روش هر سال حل کند.

$\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x^2 - 1}$ (جواب $-\frac{\pi}{2}$)

مثال: نمودار f به صورت مقابل است. حاصل تمام گزینه‌ها به جز گزینه .... برابر $+\infty$ است.



(جواب: گزینه ۱)

۱) $\lim_{x\to 1^+} f\circ f(x)$ ۲) $\lim_{x\to (-1)^-} f\circ f(x)$

۳) $\lim_{x\to (-1)^+} f\circ f(x)$ ۴) $\lim_{x\to 1^-} f\circ f\circ f(x)$

---

* حد صفر حدی * حد مطلق

$\frac{1}{0^-} = -\infty$, $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

$(-)\times(-) = (-)$ ، $(+)\times(+) = +$ ، $(+)\times(-) = (-)$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 6x + 8}$ ، $g(x) = 3^x$ باشد، حد تابع $g\circ f$ در $x=2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) $+\infty$ (جواب: گزینه ۴)

مثال: حاصل $\lim_{x\to 2} \frac{2^x}{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟ ۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) $\pm\infty$

۴) صفر (جواب: گزینه ۱)

مثال: اگر $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 3x}{-2x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد، ab کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲ (جواب: گزینه ۲)

حد توابع نمایی، لگاریتمی، توابع تانژانت، کتانژانت، با استفاده از نمودار

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: حاصل $\lim_{x \to 0^+} \sin 2x \times \tan \frac{\pi}{2} x$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) $\sin 2$ (جواب: گزینه ۳)

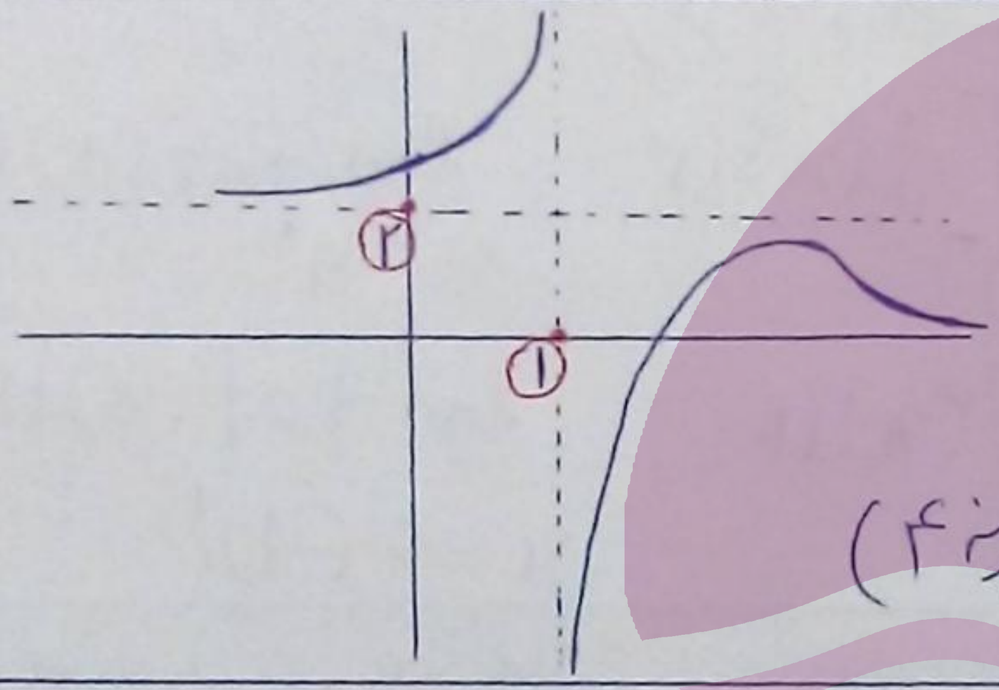
مثال: حاصل $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{\log x}$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: حاصل $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) بی‌حد (جواب: گزینه ۳)

مثال: نمودار تابع f به صورت مقابل است.



حاصل $\lim_{x \to 1^+} f \circ f(x) - \lim_{x \to 1^-} f \circ f(x)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲ (جواب: گزینه ۴)

مثال: حاصل $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{-x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x+1}} \right)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌حد (جواب: گزینه ۱)

مثال: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{9x^2 - x + 1}}{5x + 6}$$

جواب: $-\frac{2}{5}$

* $(x \to \infty)$: توان‌های بزرگ تعیین کننده هستند
* $(x \to 0)$: توان‌های کوچک تعیین کننده هستند

مثال: حاصل $\lim_{x \to +\infty} \frac{|1-2x| + \sqrt{x^2 - 5x}}{\sqrt{x} + \sqrt{9x^2 - x + 1}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱ (جواب: گزینه ۴)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: حد تابع $f(x)=\frac{(x+2)^3-(x-2)^3}{4x^2-7x+1}$ وقتی $x\to+\infty$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) صفر ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

مثال: اگر $4=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3a-2)x^n+x-1}{ax^2+5x+3}$ باشد، حاصل axn کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۱)

مثال: اگر $-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2a+1)x^n+2x^2-3x}{3x^2+\sqrt{x}}$، حاصل $a+n$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۳ (جواب: گزینه ۲)

مثال: در تابع $f(x)=\frac{x-\sqrt{x+2}}{(a+3)x^n+\sqrt{x+14}}$، اگر $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to 2}f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $-\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: حاصل حدود زیر را در صورت وجود بدست آورید.

① $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}$ (جواب: صفر)

* در هریک از حالت‌های $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$، صفر مثبت (0^+) یا صفر منفی بودن (صفر حدی (0^-)) را تعیین کنید.

② $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-[x]+2}{5x+1}$ (جواب: صفر)

مثال: حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{|x+2|-\sqrt{9x^2+x}}{[3x]+\sqrt{-x}}$ کدام است؟

$([u]\sim u \quad u\to\pm\infty)$

۱) -1 ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱ (جواب: گزینه ۳)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

مثال: اگر $\lim_{x\to 0}(x^3+ax+b)\left[\frac{1}{x}\right]=2$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر (جواب: گزینه ۲)

مثال: حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{5^{x-1}+2^{3x+1}}{5^{x+2}-2^{3x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{125}$ ۲) $-\frac{1}{25}$ ۳) -2 ۴) -8 (جواب: گزینه ۳)

مثال: حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}+7^{x-1}}{2^{x-1}-7^{x}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{7}$ ۲) -7 ۳) 2 ۴) 4 (جواب: گزینه ۴)

---

* هنگامی که جنس توابع های صورت و مخرج یکی نباشد ← استفاده از تمارین سرعت رشد

$x^x \gg$ توابع $\gg$ توابع چند جمله‌ای $\gg$ توابع رادیکالی $\gg$ توابع لگاریتمی $\gg$ توابع نمایی (a^x)

* در این گونه حدها، در اکثر موارد جواب حد یا صفر (هرگاه سرعت رشد بیشتری داشته باشد) و یا ∞ (هرگاه سرعت رشد بیشتری داشته باشد) است.

در حدی که n فرد باشد: $\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}\sim\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)$ $(x\to\pm\infty)$

در حدی که n زوج باشد: $\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}\sim\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$ $(x\to\pm\infty)$

$a>0\to\sqrt{ax^2+bx+c}\sim\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$ $(x\to\pm\infty)$

△

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: اگر $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+ax}{bx-1}+x-1\right)=3$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۹- ۴) صفر (جواب گزینه ۳)

مثال: اگر $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax-1}+bx+1\right)=0$، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۲)

مثال: اگر $\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{x+1}{x-a}}-x\right)=-1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) ۱ (جواب: گزینه ۱)

(راهنمایی: عبارت زیر رادیکال را به صورت $1+u$ نوشته و از هم ارزی استفاده کنید)

$\sqrt{1+u}\sim 1+\frac{u}{2}$ $(u\to 0)$

$\sqrt[n]{1\pm u}\sim\left(1\pm\frac{u}{n}\right)$

$(1\pm u)^n\sim(1\pm nu)$

مثال: حد تابع $f(x)=2x^2\left(1-\cos\frac{\pi}{x}\right)$ وقتی $x\to\infty$، کدام است؟

۱) π^2 ۲) $\frac{\pi^2}{2}$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{8}$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: حاصل $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}\times\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) ۲ ۴) ۲- (جواب: گزینه ۴)

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-x\left[\frac{1}{x}\right]\right)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) مرجد (نیست). (جواب: گزینه ۴)

مثال: به ازای چند مقدار m، تابع $f(x)=\frac{x-2}{x^2+mx+2}$، فقط یک مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

(راهنمایی: مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد و یکی از ریشه‌های مخرج (ریشه تکراری) شده باشد)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: اگر تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^2+2ax+a}$ فاقد مجانب قائم باشد، حدود a کدام است؟ (*مقایسه گزینه‌ها)

۱) $-1<a\leq 1$ ۲) $0<a<1$ ۳) $-1<a<1$ ۴) $0\leq a<1$ (جواب: گزینه ۴)

مثال: تابع $f(x)=\frac{\tan x}{\sin x-\cos x}$ در بازه $[0,2\pi]$ چند خط مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۴)

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x^2-1} & x\notin Z\\ x+1 & x\in Z\end{cases}$ مجانب‌های قائم خود را در نقاط A, B قطع می‌کند. اندازه پاره خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{\cos \pi x}{x-2\sqrt{x}+1}$ در اطراف مجانب قائم خود به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

(جواب: گزینه ۴)

---

* در ریشه‌های مضاعف (یا ریشه‌های مکرر از مرتبه‌ی زوج)، تابع تغییر علامت ندارد.
* در ریشه‌های ساده (یا ریشه‌های مکرر از مرتبه‌ی فرد)، تابع تغییر علامت دارد.

---

* تابع f را بر بازه باز (a,b) پیوسته گوییم، هرگاه در هر نقطه‌ای از بازه (a,b) پیوسته باشد.
* در صورتی که در نقاط ابتدا و انتهای بازه پیوستگی راست و یا پیوستگی چپ وجود داشته باشد، می‌توانیم بازه را به صورت بسته نیز در نظر گیریم.

$(a,b]$ ، $[a,b]$ ، $[a,b)$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

پیوستگی راست (مقدار تابع = حد راست)

(حد چپ = مقدار تابع) پیوستگی چپ

تعریف پیوستگی در یک نقطه

(حد راست = مقدار تابع = حد چپ)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[x]-\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1} & x\neq -1\\ -3 & x=-1\end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x=-1$ چگونه است؟

۱) از راست پیوسته، از چپ پیوسته ۲) از راست پیوسته، از چپ ناپیوسته
۳) از راست ناپیوسته، از چپ پیوسته ۴) از راست ناپیوسته، از چپ ناپیوسته

(جواب: گزینه ۴)

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x<0\\ a\cos x & x=0\\ b[-2x]+1 & x>0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 3 (جواب: گزینه ۴)

---

* توابع چند جمله‌ای، توابع گویا (توابعی که ضابطه‌ی آن‌ها حاصل‌تقسیم دو چندجمله‌ای است)، توابع مثلثاتی، توابع رادیکالی، توابع نمایی و لگاریتمی، توابع قدرمطلقی و توابع چندضابطه‌ای در نقاط دامنه خود پیوسته هستند.

مثال: مقدار a برای آن که تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}a+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x<1\\ \dfrac{ax^2+x}{x+1} & x\geq 1\end{cases}$ بر $[2,5]$ پیوسته باشد، کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2 (جواب: گزینه ۱)

Scanned by TapScanner

* تابع f با ضابطه $f(x)=[x]$ در هر نقطه با طول صحیح پیوسته است.
($k\in\mathbb{Z}, x\in[k,k+1)\Leftrightarrow f(x)=k$:یادآوری)

* فرض کنید توابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند. در این صورت تابع $h(x)=g(x)[f(x)]$ فقط در سه حالت زیر پیوسته است.

$x=a$ ،

① $f(a)\notin\mathbb{Z}$

② $g(a)=0, f(a)\in\mathbb{Z}$

③ $f(a)\in\mathbb{Z}$ ، برای هر x در یک همسایگی $x=a$ ، $f(x)\geq f(a)$ باشد

* در این حالت $x=a$ نقطه مینیمم نسبی تابع f است

* $f(x)=[x^2]$ در نقطه $x=0$ پیوسته است ($x=0$ ، مینیمم نسبی است)

مثال: تابع $f(x)=(3x^2+x-4)[x]$ در چند نقطه با طول صحیح پیوسته است؟

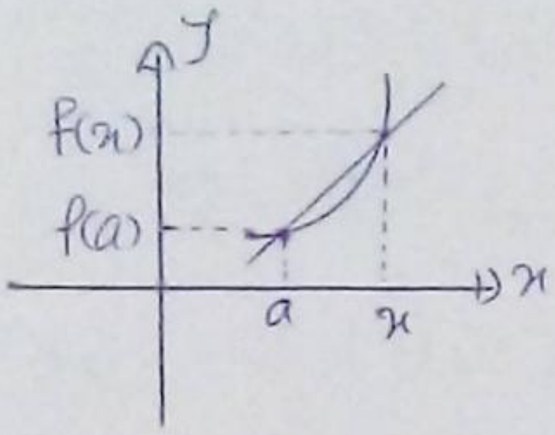
1) صفر 2) 1 3) 2 4) بی‌شمار (جواب: گزینه ۲)

مثال: تابع $f(x)=\cos x[\sin x]$ در کدام یک از نقاط زیر ناپیوسته است؟

1) $\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) π 4) $\frac{3\pi}{2}$ (جواب: گزینه ۳)

البرز نوشته
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

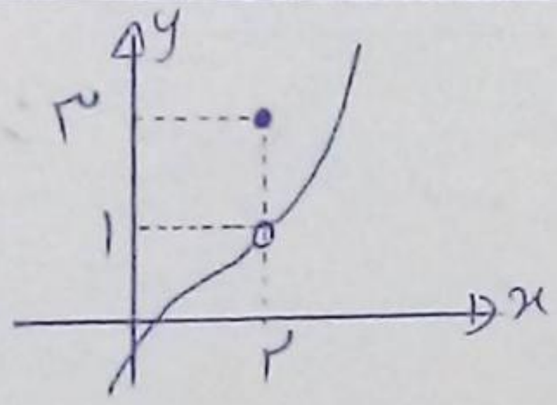


$m = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ شیب

$m \times m' = -1$ شیب خط عمود

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

راه هر مثال، مشتق چپ، مشتق راست، مشتق = شیب خط مماس



مثال: نمودار تابع f در همسایگی $x=2$ به صورت مقابل است.
مقدار مشتق تابع $g(x) = (x-2)f(x)$ در $x=2$ چقدر است؟

جواب = ۱

شرط مشتق پذیری ← پیوسته باشد ⇐ حد چپ = حد راست = مقدار تابع
مشتق چپ = مشتق راست
(≠) مشتق متناظر نباشد

* در جاهایی که تابع چند ضابطه‌ای شده است و یا قدر مطلق و یا جزء صحیح استفاده شده است، باید از تعریف مشتق استفاده کنیم.

حاشیه کلامت: آن تابع را غیر پیوسته می‌دهیم

حاشیه مقدار جزء صحیح را صحیح می‌دهیم.

مثال: مشتق‌های چپ و راست توابع زیر را در نقطه داده شده بدست آورید. آیا این توابع در این نقاط مشتق پذیرند؟

۱) $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$ ، $x=1$

$f'_+(1) = 2$ $f'_-(1) =$

$\frac{-1}{0^-} = +\infty$ (مشتق پذیر نیست)

۲) $f(x) = (x-2)[x]$ ، $x=2$

$f'_+(2) = 2$ ، $f'_-(2) = 1$

مشتق پذیر نیست

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: شیب نیم مماس راست تابع با ضابطه $f(x)=|x^2-4|$، در نقطه $x=2$ چقدر از شیب نیم مماس چپ تابع f در این نقطه بیش‌تر است؟

جواب: $f'_+(2)=4$ ، $f'_-(2)=-4$

مثال: اگر $f(x)=x^2[x]$ باشد، حاصل $f'_+(2)$ ، $f'_-(2)$ به ترتیب کدام است؟

جواب: ۸ و مرجوع‌ست (پیوستگی راست و پیوستگی چپ)

شرایط نقطه ناپیوستگی:
- ناپیوسته باشد
- پیوسته باشد ولی مشتق‌های چپ و راست برابر نباشند
- یکی از دو مشتق چپ و راست (یا هر دو) نامتناهی باشند (بی‌نهایت باشند)

مثال: مشتق‌پذیری توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x)=[2x]$ ؛ $(x=1)$ ب) $f(x)=|x^2-2x|$ ؛ $(x=2)$

پیوسته است — مشتق چپ و راست برابرند

پ) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ؛ $(x=-1)$ (مشتق نامتناهی است)

مثال: نشان دهید نقطه $x=0$ یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+2^{1/x}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ است

نقطه زاویه‌دار
نقطه بازگشتی

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+2^{1/x}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Scanned by TapScanner

مثال: نقاط مشکوک نابدیر توابع زیر را تعیین کنید

۱) $f(x)=|(x-2)(x-1)^2(x+3)^5|$ $\quad f(x)=x|x^3-9x|(2$

جواب ۱) ریشه‌های ساده (درون قدر مطلق) یعنی $x=2$ مشکوک نابدیرانست توجه کنید که مقدار مشتق تابع f در ریشه‌های مضاعف (مکرر) $x=1$ و $x=-3$ برابر صفر می‌شود.

۲) اگرچه تابع (درون قدر مطلق) دارای سه ریشه ساده $x=0$، $x=2$، $x=-3$ است، اما تابع f به ازای $x=0$ در بیرون قدر مطلق دارای عامل صفر کننده بوده، لذا تابع f در $x=0$ مشتق پذیر است. پس این تابع در دو نقطه با طول‌های $x=3$، $x=-3$ مشتق نابدیر است

مثال: اگر تابع $f(x)=x^3|x-2|+ax|x-2|$ در R مشتق پذیر نباشد، a کدام است؟

جواب: -4

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x(x-2)^2(x+1)^3(x-5)^7}$ در چند نقطه مشتق نابدیر است؟

جواب: ۲ نقطه، تابع f (نقاط با طول‌های $x=0$، $x=2$) مشتق نابدیر است (فرجی خرد)

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x(x-1)^3(x+2)^3(x-2)^4}$ در (کدام نقطه) مشتق پذیر است؟

۱) صفر $\quad$ ۲) ۱ $\quad$ ۳) -2 $\quad$ ۴) ۲

(فرجی زوج)

جواب: گزینه‌ی ۴

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}|x^2-9| & x>0\\ \sqrt[3]{x^2-1} & x\le 0\end{cases}$ در چند نقطه مشتق نابدیر است؟

۱) ۲ $\quad$ ۲) ۳ $\quad$ ۳) ۴ $\quad$ ۴) ۵

جواب: گزینه ۲

نقاط $x=3$، $x=-1$، $x=0$ (نابدیر شکل)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: تابع $f(x)=(x-1)(x+1)^2[x^2]$ در کدام یک از نقاط زیر مشتق پذیر است؟

۱) $x=\frac{1}{2}$ ، ۲) $x=0$ ۳) $x=-1$ ۴) $x=1$

جواب: گزینه ۴

مثال: کدام یک از توابع زیر روی بازه $[0,2]$ مشتق پذیر می‌باشد؟

۱) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ۲) $f(x)=|5x^2+x-1|$

۳) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ x+1 & x\geq 1 \end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ 2x-1 & x\geq 1 \end{cases}$

گزینه ۴

توابع مشتق و قواعد مشتق گیری

$y=k$	$y'=0$	$y=\frac{k}{x}$	$y'=\frac{-k}{x^2}$	
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$y=\frac{k}{u}$	$y'=\frac{-ku'}{u^2}$	
$y=fxg$	$y'=fg+gf$	$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	
$y=f\circ g(x)$	$y'=g'\times f'(g(x))$	$y=f/g$	$y'=\frac{fg-gf}{g^2}$	
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$y=u^n$	$y'=nxu'xu^{n-1}$	
$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x$	$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$y=\cot x$	$y'=-(1+\cot^2 x)$	$y=\tan u$	$y'=u'(1+\tan^2 u)$	
$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=\cot u$	$y'=-u'(1+\cot^2 u)$	$y=\sqrt[m]{u^n}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: مشتق توابع زیر را حساب کنید:

۱) $y=(x^2+2x)^5$ ۲) $y=x^2\sqrt{x^3-2}$ ۳) $y=\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt{x}}{2x+7}$

۴) $y=\sin(x^3+2x^6)$ ۵) $y=\frac{\cos 2x}{2+\tan(2x+1)}$ ۶) $y=\sqrt[5]{\sin^2\sqrt{x}}$

۷) $y=\cos(\sin\pi x)$ ۸) $y=\frac{5}{\sin x}$

مثال: اگر $f(x)=(x^2+\sqrt{x+2})^5$ ، $g(x)=(x^2-\sqrt{x+2})^5$ باشد، حاصل $f'g+g'f$ برای $x=0$ کدام است؟

جواب: ۸۰-

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+b\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x} & x\ge 1\end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، a - b کدام است؟

جواب: ۳۰

مشتق توابع دارای عامل صفرشونده

$f(x)=g(x)h(x) \Rightarrow f'(x)=g'(x)h(x)+h'(x)g(x)$

$x=a, g(a)=0 \Rightarrow f'(a)=g'(a)h(a)+h'(a)g(a)$

$g(a)h(a)=0$

$\Rightarrow f'(a)=g'(a)h(a)$

مشتق تابع در نقطه‌ای که یکی از عوامل تابع صفر شوند = مشتق عامل صفرشونده × بقیه‌ی تابع

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال:

۱) $f(x)=(x^2-1)\sqrt[3]{x^3+3x+2}$; $(x=1)$ جواب: ۴

۲) $f(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-10)$; $(x=0)$ جواب: $!10$

۳) $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$; $(x=\frac{\pi}{2})$ جواب: ۲

مثال: مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x+\sqrt[3]{x}}+\frac{x^2-1}{x^3+x+1}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

جواب: $\frac{2}{3}$

قدرمطلق: جاش کلاست تابع را قرار می‌دهیم $f(x)$ یا $-f(x)$

جزء صحیح: جاش مقدار تابع را قرار می‌دهیم، جاش عدد قرار می‌دهیم.

مثال: اگر $f(x)=||\sqrt{x}-x|-4|$، حاصل $f'(4)$ کدام است؟

جواب: $-\frac{3}{4}$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=\sin 4x[\cos x]$ به ازای $x=\frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

جواب: ۴

مثال: اگر $f(x)=|x^2-4|[\frac{x^2}{3}]$، حاصل $f'_+(2)-f'_-(2)$ کدام است؟

$f'_+(2)-f'_-(2)=40$

جواب: $f'_+(2)=32$

$f'_-(2)=-24$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: اگر $f(x)=x[x^2-3]$ باشد، $f'_+(1)$ ، $f'_-(1)$ به ترتیب کدام اند؟

جواب: صفر، ۴

$$y=f^n(u) \Rightarrow y'=n u' f'(u) \times f^{n-1}(u)$$

$$y=f^n(g(x)) \Rightarrow y'=n\, f^{n-1}(g(x)) \times g'(x) \times f'(g(x))$$

مثال:

۱) $y=\sin^3\sqrt{x}$ ۲) $y=\cos^3(x^2-x)$ ۳) $y=\tan^4(3x-1)$

۴) $y=\sin^2 u$ ۵) $y=\cos^2 u$

$y=\sin^2 u$

$y'=u'\sin 2u$

$y=\cos^2 u$

$y'=-u'\sin 2u$

مثال: مقدار شیب تابع $y=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$ به ازای $x=\frac{\pi}{24}$ کدام است؟

جواب: ۱

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(u)=\frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow \underbrace{f'(u)\times u'}_{y'}=\frac{(ad-bc)u'}{(cu+d)^2}$$

مثال: مقدار شیب تابع $f(x)=\frac{2\sin^2 x-1}{3\sin^2 x+1}$ به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ کدام است؟

جواب: $\frac{4}{5}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مشتق تابع مرکب:

$$y = fog(x) \Rightarrow y' = g'(x) \times f'(g(x))$$

مشتق تابع مرکب = مشتق تابع درونی × مشتق تابع بیرونی نسبت به تابع درونی

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

مثال: اگر $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f'(2) = 8$ باشد، مشتق تابع fog به ازای $x = 4$ کدام است؟

جواب: ۲۰

مثال: اگر $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ، $g(x) = \tan x$ و $g'(x) \times f'(g(x))$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟ جواب: ۱

مثال: اگر $xf'(x) = 1$ ، $g(1) = -2$ ، $(fog)(x) = x^2$ باشد، مقدار $g'(1)$ کدام است؟

جواب: -4

قاعده زنجیری

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad , \quad y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

مثال: $y = u^3 + \sqrt[3]{u}$ ، $u = x\sin x + \cos x$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \pi$ کدام است؟

جواب: $\frac{-10\pi}{3}$

مشتق مرتبه دوم:

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$y'' = f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

ایران‌آموزش
نوشته‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: مقدار مشتق مرتبه دوم توابع زیر را به ازای $x=1$ تعیین کنید.

۱) $f(x)=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$ جواب: $\frac{11}{4}$

۲) $f(x)=\cos \pi x$ جواب: π^2

مثال: اگر $f(x)=x^6-2x^4-x+1$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

جواب: ۶

شرایط وجود مشتق مرتبه دوم: مشتق مرتبه اول پیوسته باشد ←

مشتق‌های مرتبه اول چپ و راست برابر باشند: $f'_+(a)=f'_-(a)$

$f_+(a)=f(a)=f_-(a)$

مثال: اگر تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^3 & ;x<1 \\ ax^2+bx+c & ;x\geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ دارای مشتق مرتبه دوم باشد، مقدار $a+2b+3c$ کدام است؟

جواب = صفر

مثال: اگر $f(x)=(x-2)^2\sqrt{4x+1}$، مقدار $f''(2)$ کدام است؟

جواب: ۶

معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی: $y=ax+b$, $mxm'=-1$

$x=a$, $f(a)$ ← $f'(a)$

مثال: معادلات خطوط مماس و قائم بر منحنی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-3}$ را در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر منحنی بنویسید.

جواب: مماس: $4y+7x=36$

قائم: $7y-4x+2=0$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

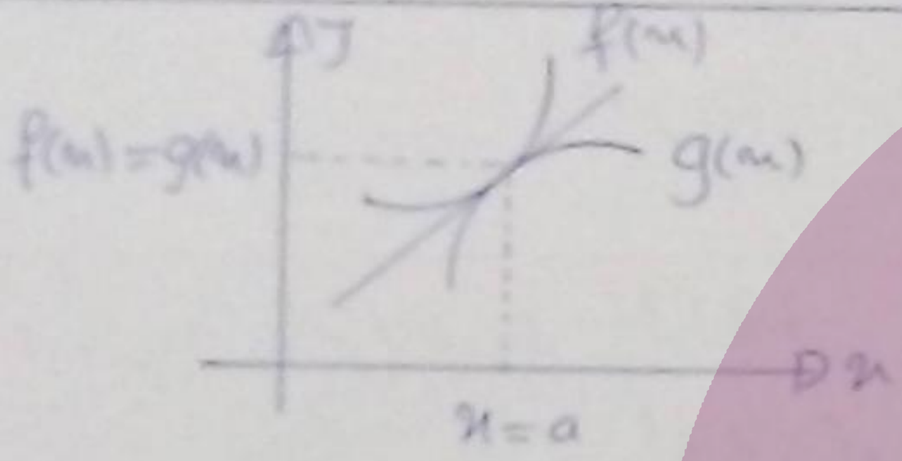
مثال: معادله خط مماس بر منحنی $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x+2$ در نقطه‌ای به طول 1 واقع بر منحنی کدام است؟

جواب: $x=1$ (با استفاده از نمودار هم مشخص است)

مثال: خط مماس بر منحنی $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ در نقطه‌ای به طول 2 واقع بر منحنی، نیمساز ربع اول و سوم را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند. جواب: $x=\frac{28}{11}$

مثال: فاصله دو نقطه از منحنی $f(x)=x^3-3x+4$ که خط مماس در آن نقاط، موازی محور xها می‌باشد، چقدر است؟ جواب: $2\sqrt{5}$

شرط مماس بودن دو منحنی یا یک خط و یک منحنی بر هم:



$$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$$

* اگر معادله تلاقی دو منحنی، یک معادله درجه دوم باشد، برای مماس بودن دو منحنی همواره به جای شرایط فوق، شرط $\Delta=0$ را اعمال کنید.

مثال: اگر منحنی توابع $f(x)=\frac{ax+b}{x+1}$ و $g(x)=x^2+2x$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ بر یکدیگر مماس باشند، b کدام است؟ جواب: -2

مثال: به ازای کدام مقدار a، منحنی به معادله $y=a(x+1)(x+2)^2$ بر نیمساز ناحیه اول مماس است؟

جواب: $\frac{1}{9}$

آهنگ متوسط تغییر: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (شیب خط قاطع)

آهنگ لحظه‌ای تغییر: $\frac{df}{dx}=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x)$ شیب خط مماس

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: آهنگ متوسط تغیرات تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ نسبت به تغیرات x، وقتی متغیر x از $x=2$ به $x=5$ تغییر می‌کند، چقدر است؟ جواب: $\frac{1}{6}$

مثال: آهنگ متوسط تغیر تابع $f(x)=\frac{1}{x+3}$ نسبت به x، روی بازه $[1,a]$، $\frac{1}{4}$ برابر آهنگ لحظه‌ای تغیر آن در $x=2$ است. مقدار a کدام است؟ جواب: ۲۲

مثال: در چند نقطه‌ای از بازه $[0,3]$، آهنگ لحظه‌ای تغیر تابع $f(x)=x^3+x-18$ نسبت به x، با آهنگ متوسط تغیر f روی این بازه برابر است؟ جواب: $\sqrt{3}$

نکته: آهنگ متوسط تغیرات تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ نسبت به x روی بازه $[\alpha;\beta]$، با آهنگ لحظه‌ای تغیرات تابع f در وسط این بازه یعنی $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ برابر است.

مثال: آهنگ متوسط تغیر تابع $f(x)=2x^3-3x^2-2x+1$ نسبت به x در بازه $[1,a]$، با آهنگ لحظه‌ای تغیر تابع f نسبت به x در نقطه‌ای به طول $x=3$ برابر است. a کدام است؟ جواب: ۵

---

* آهنگ تغیرات تابع f نسبت به تابع g برابر است با: $fg=\frac{f'(x)}{g'(x)}$

مثال: آهنگ لحظه‌ای تغیر مساحت یک دایره نسبت به محیط آن، وقتی شعاع دایره برابر $15cm$ باشد، چقدر است؟ جواب: ۱۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

سرعت و شتاب متوسط، لحظه‌ای

متن معادله مکان = سرعت لحظه‌ای

$\bar{V}$ (سرعت متوسط) $= \frac{\Delta x}{\Delta t}$

متن معادله سرعت = شتاب لحظه‌ای

$\bar{a}$ (شتاب متوسط) $= \frac{\Delta V}{\Delta t}$

مثال: متحرکی با معادله حرکت $x(t)=t^3-6t^2+12$ روی محور xها در حرکت است متحرک پس از طی چه مسافتی توقف آنی خواهد داشت (قبل از توقف آنی)، در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (t برحسب ثانیه و x برحسب متر است)

جواب: ۳۲ متر در جهت منفی

مثال: متحرکی روی محور xها با معادله $x(t)=t^3-18t^2+60t-1$ حرکت می‌کند. در چه بازه زمانی این متحرک در جهت منفی محور xها حرکت می‌کند؟ جواب: $2<t<10$

علامت و وضعیت یکی‌ای آهنگ تغییر و قابیه آهنگ لحظه‌ای و متوسط تغییر

متن
- مثبت ← صعودی
- منفی ← نزولی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال: $y=x^2$

مثال: $y=\sin x$

Scanned by TapScanner

تشخیص یکنوایی با استفاده از مشتق:

$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)=0$
صعودی اکید	نزولی اکید	ثابت

مثال: وضعیت یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x)=x^3-3x+1$ ۲) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ ۳) $f(x)=x+\sin x$

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=2x^3-3x^2-12x+7$ روی بازه $[a,b]$ نزولی اکید است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ جواب: ۳

مثال: تابع $\frac{1}{x^2-2x}$ در کدام بازه زیر صعودی است؟ ریشه‌های مخرج: مجانب‌های قائم

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(-\infty,0)$

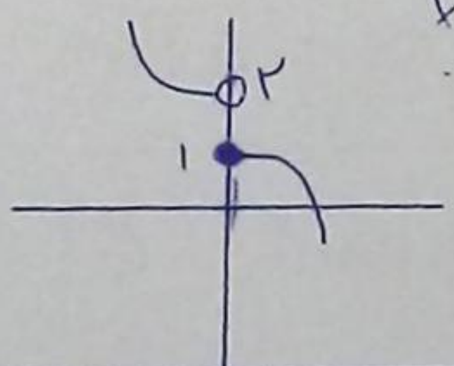
جواب: گزینه ۴

مثال: حدود a برای آنکه تابع $f(x)=\frac{ax-4}{x-a}$ روی بازه $(1,+\infty)$ صعودی اکید باشد، کدام است؟

جواب: $-2<a\leq 1$ ریشه مخرج در این بازه قرار نگیرد و شیب آن مثبت باشد

$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^4+1 & x\geq 0 \\ 2-x^3 & x<0 \end{cases}$ از نظر یکنوایی کدام وضعیت را دارد؟



ج: همواره نزولی است

مثال: اگر توابع مشتق‌پذیر f و g به ترتیب صعودی و نزولی باشند، آن‌گاه توابع fog و gof به ترتیب چگونه‌اند؟ جواب: نزولی - صعودی

نقاط بحرانی: ۱) نقاط بازگشتی ۲) نقاط گوشه‌دار (زاویه‌دار) ۳) نقاط با مماس قائم ۴) نقاط با مماس افقی ۵) نقاط ابتدا و انتهای بازه

Scanned by TapScanner

کاربردهای مشتق

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=x-[x]$ در بازه $[0,2]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

جواب: ۴

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=||x|-1|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

جواب: ۳

مثال: طول نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید:

۱) $f(x)=x^3-6x^2+1$

$x=0, x=4$

۲) $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x}$

$x=0, x=\frac{1}{4}$

۳) $f(x)=\begin{cases} x^2-x & x>0 \\ 2x^2+x+1 & x\leq 0 \end{cases}$

$x=0, x=\frac{1}{2}, x=-\frac{1}{4}$

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ بر روی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد چند است؟

نقاط بحرانی: $x=0, x=1, x=-1$ مساحت $=1$

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 0 \\ x^3-12x & x<0 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

جواب: ۳ نقطه بحرانی $\Leftarrow x=-2, x=1, x=0$

مثال: تابع $y=|x^3-12x|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

جواب

$f(x)=0$

$x=0, x=\pm\sqrt{12}$

$f(x)=0$

$x=\pm 2$

مثال: تابع $y=x|x-2|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

جواب: $x=1$، $x=2$ و ۲ نقطه بحرانی دارد.

مثال: مجموعه نقاط بحرانی تابع $y=[\sqrt{1-x^2}]$ کدام است؟ جواب: $[-1,1]$

$y=[\sqrt{1-x^2}]$

در توابع جزصحیح، کل نقاط، نقاط بحرانی هستند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مقدار ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} 2-x & 0\le x\le 2 \\ \frac{1}{2}x^2 & 2<x\le 3 \end{cases}$ چقدر از مقدار مینیمم مطلق آن بیشتر است؟

$f_{max}-f_{min}=\frac{9}{2}-1=\frac{7}{2}$

روش تعیین اکسترمم های مطلق در توابع پیوسته
- ابتدای بازه
- انتهای بازه
- نقاطی که مشتق آنها صفر است.

مثال: مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع f با ضابطه $f(x)=-2x^3+3x^2$ را در بازه $[-\frac{1}{2},2]$ تعیین کرده و برد تابع f را به دست آورید. جواب: $R_f=[-4,1]$

مثال: به ازای کدام مقدار k، مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^4-8x^2+k$ در فاصله $[-4,4]$، قرینه یکدیگر هستند؟ جواب: -16

مثال: برد و مقادیر اکسترمم مطلق توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

1) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

$R_f=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

2) $g(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+2}$

$R_g=[-4,1)$

3) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

با استفاده از دامنه

$R_f=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

4) $f(x)=\frac{3}{2\cos x+3}$

$-1\le\cos x\le 1$

$R_f=[1,5]$

5) $f(x)=2\sin^2 x-\sin x+1$

$y=ax^2+bx+c$

$x=-\frac{b}{2a}$

$R_f=[\frac{7}{8},3]$

6) $f(x)=\sin^2 x-\cos x$

$R_f=[-1,\frac{5}{4}]$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

کاربردهای مشتق

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$ کدام است؟

جواب: ۲

بهینه سازی

مثال: به کمک ۶۰ متر طناب، می خواهیم زمین مستطیل شکلی در کنار رودخانه ای محصور کنیم. مساحت بزرگترین زمین چند متر مربع است؟ جواب: ۴۵۰

مثال: مخروط شعاع قاعده دار ارتفاع استوانه ای برابر ۲۰ سانتی متر است. بیشترین سطح جانبی استوانه چقدر است؟ جواب: $200\pi\ cm^2$

مثال: کوتاه ترین فاصله نقاط منحنی $y=2\sqrt{x}$ از نقطه $A(3,0)$ کدام است؟

جواب: $2\sqrt{2}$

مثال: اگر $3x+4y=36$ $(x,y>0)$، بیشترین مقدار xy کدام است؟ ج: ۲۷

اکسترمم های نسبی: ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی (جایی که حتماً تغییر علامت داشته باشد)

مثال: طول نقاط اکسترمم نسبی و نوع آنها را در توابع زیر در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x)=-x^3+3x+1$

$x=-1$ min, $x=+1$ max

۲) $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$

$x=0$ max, $x=\frac{2}{5}$ min

۳) $f(x)=x|x-2|$

$x=2$ min, $x=1$ max

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=x^4-4x^3$ چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟ جواب: یک نقطه

$x=3$ ریشه ساده تابع مشتق، $x=0$ ریشه مضاعف تابع مشتق است

تابع مشتق در این نقطه تغییر علامت می دهد.

تابع مشتق در این نقطه تغییر علامت نمی دهد، فقط یک لحظه مقدار آن برابر صفر می شود.

ایران توشه
توشه ات برای موفقیت
Scanned by TapScanner

کاربردهای مشتق

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x^8}-\sqrt[3]{x^2}$ چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟ جواب: ۳ نقطه

$x=0\ ,\ x=\pm\frac{1}{2}$

مثال: به ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=x^3+mx^2+3x+1$ فاقد اکسترمم نسبی است؟

جواب: $-3\leq m\leq 3$ ، ۷ نقطه

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ در بازه $(0,2\pi)$ از نظر تعداد نقاط اکسترمم های نسبی کدام وضعیت را دارد؟

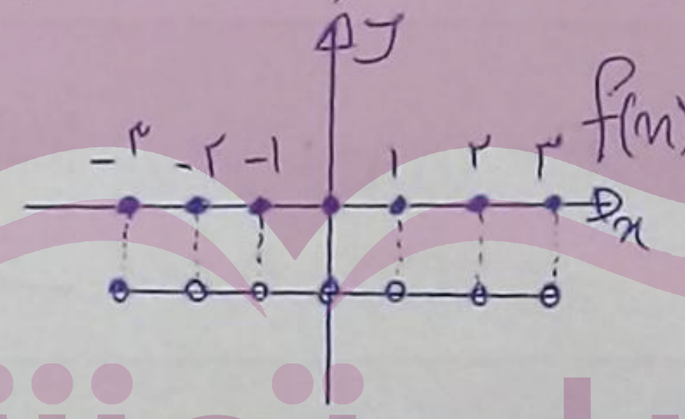
$x=\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$ ، ۲ ماکسیمم و ۲ مینیمم

مثال: اگر $A(1,\sqrt{3})$ نقطه اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x)=ax+b\sqrt{x}$ باشد، $a-b$ کدام است؟

جواب $=-9$

مثال: تابع f با ضابطه $f(x)=[x]+[-x]$ در بازه $[-1,2]$ چند نقطه Max نسبی دارد؟

جواب: بی شمار، نقاط روی توابع ثابت، هم max هم min نسبی هستند



$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}-|x-1| & x>0\\ m & x=0\\ x-2 & x<0\end{cases}$، حدود m برای آنکه نقطه به طول $x=0$ اکسترمم نسبی نباشد، کدام است؟ جواب: $-1<m\leq 2$

مثال: $x=0$ و $x=1$ برای تابع $f(x)=(-1)^{[x]}$ به ترتیب طول های چه نقاطی هستند؟

جواب: max نسبی، min نسبی

تقعر رو به بالا	تقعر رو به پایین
$f''(x)>0$	$f''(x)<0$

جهت تقعر نمودار در نقطه عطف عوض شود.

نقطه عطف: مشتق اول صفر یا نباشد و مشتق دوم تغییر علامت دهد

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

مثال: جهت تقعر نمودار توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x)=x^3-3x^2+x$

$x=1$: − | +

۲) $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$

$x=3$: − | +

۳) $f(x)=x^2-2\sin x$

جهت تقعر همواره رو به بالا است.

۴) $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$

$x=-1$: + | −

$x=1$: − | +

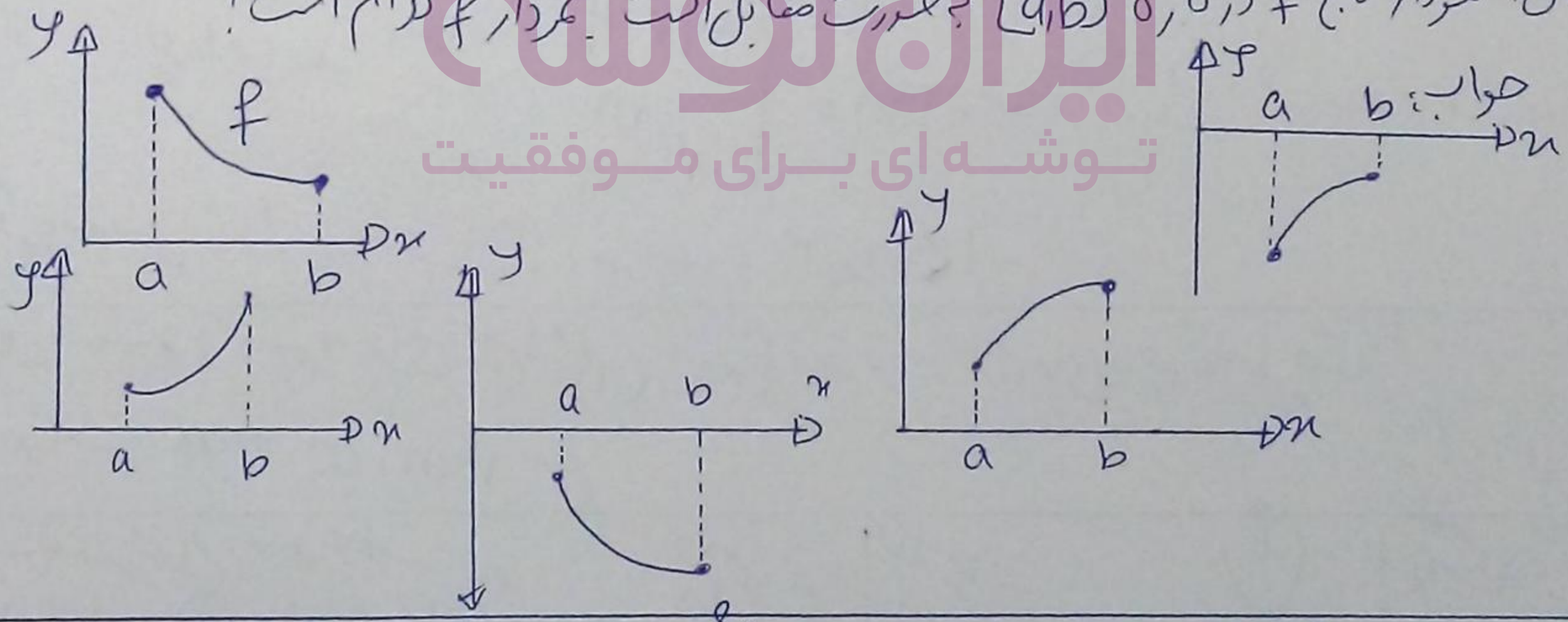
مثال: منحنی تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$ در کدامیک از بازه های زیر تردیدی در تقعر آن رو به بالا است؟ جواب: [۳،۱]

مثال: جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^{\frac{8}{3}}-2x^{\frac{5}{3}}$ در بازه (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $a-b$ کدام است؟ جواب: $\frac{1}{2}$

مثال: به ازای چند مقدار صحیح m تقعر منحنی $f(x)=2x^4-3(m+1)x^3+3x^2+1$ همواره رو به بالا است؟ جواب: ۳

مثال: تقعر نمودار تابع $f(x)=x^2|x-6|$ در بازه (a,b) به طرف y های منفی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ جواب: ۴

مثال: نمودار تابع f در بازه $[a,b]$ به صورت مقابل است. نمودار f' کدام است؟



جواب:

نقطه عطف: مشتق اول مرجود باشد ← پیوسته باشد
مشتق چپ و راست برابر باشند (همامس قائم اشکال ندارد)
و جهت تقعر تغییر کند. (مشتق دوم تغییر علامت داشته باشد)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: طول نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱) $f(x)=x^4-3x^3+2x$ در $x=1$

۲) $f(x)=x^5-5x^4+x$ ($x=0$ ریشه مضاعف f'' است و نقطه عطف نیست و $x=3$ تنها نقطه عطف است)

۳) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ در $x=\pm\sqrt{3}, x=0$

۴) $f(x)=\sqrt[3]{x^5}+\frac{5}{9}x^2$ (جواب: $x=0, x=-1$)

مثال: به ازای چه مقدار صحیح m، تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}mx^3+\frac{1}{2}x^2+1$ فاقد نقطه عطف است؟ ($-2\leq m\leq 2$، جواب: ۵ نقطه)

مثال: معادله خط قائم بر صخی $f(x)=x^3-3x^2+4$ در نقطه عطف آن کدام است؟

جواب: $3y-x=5$

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x}$ چند نقطه عطف دارد؟ (جواب: ۲ نقطه)

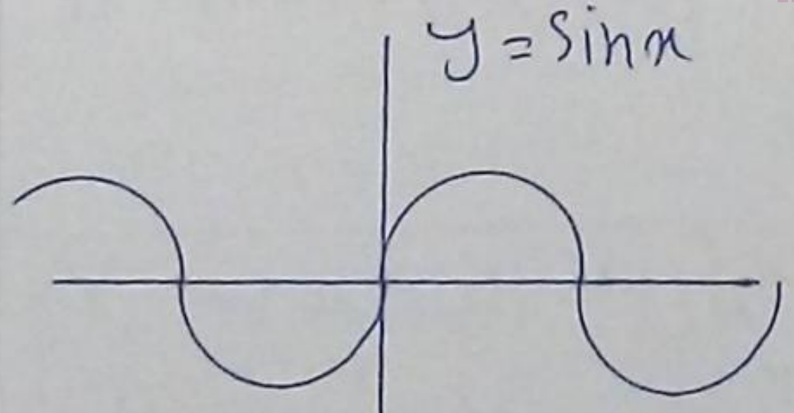
$f'_+(0)=f'_-(0)=-\infty$ $\quad x=0, x=-2$

در این نقطه مماس قائم وجود دارد.

مثال. اگر نقطه عطف منحنی $y=mx^3-(m+1)x^2-x$ در ناحیه دوم یا سوم قرار داشته باشد، حدود m کدام است؟ جواب: $-1<m<0$

نقطه عطف در توابع مثلثاتی

$y=\sin x$, $y=\cos x$



* نقاط برخورد نمودار توابع $y=k\sin(ax+b)$, $y=k\tan(ax+b)$ با محور x ها، نقاط $y=k\cos(ax+b)$, $y=k\cot(ax+b)$

عطف این توابع می باشند (در صورتی که این توابع با مقدار ثابتی جمع شده باشند برای به دست آوردن نقطه عطف، مقدار ثابت را در نظر نمی گیریم)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=3\cos(2x+\frac{\pi}{4})$ چند نقطه عطف در بازه $[0,2\pi]$ دارد؟

هم می‌توانیم دو بار مشتق بگیریم، تا طی آن $\sin$ یا $\cos$ تغییر علامت می‌دهد را بدست بیاوریم،
هم می‌توانیم با استفاده از نکته‌ی قبل $3\cos(2x+\frac{\pi}{4})=0$ حل کنیم.

جواب: ۴ نقطه

مثال: تابع با ضابطه $f(x)=x^2+2\sin x$ در بازه $[0,2\pi]$ چند نقطه عطف دارد؟

جواب: صفر * مشتق دوم آن تغییر علامت نمی‌دهد و از یک نقطه عبور می‌کند.

نقطه عطف در توابع چند ضابطه‌ای: در نقطه‌ای که ضابطه تابع عوض می‌شود باید:
مشتق اول موجود باشد (پیوسته باشد) و مشتق چپ و راست برابر باشد)
حتماً تقعر عوض شود، مشتق دوم تغییر علامت داشته باشد.

مثال: مجموعه طول‌های نقاط عطف نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^3+4x^2 & x\le 1\\ 22-\frac{15}{x} & x>1\end{cases}$ کدام است؟

جواب: $\{1,-2\}$

مثال: اگر $A(1,-1)$ مختصات نقطه عطف منحنی تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x^2}$ باشد، $b-a$ کدام است؟

جواب: ۳

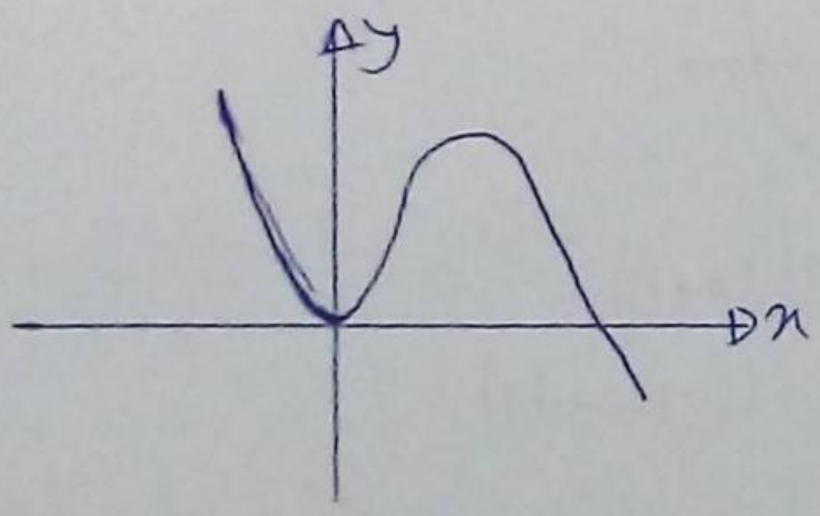
مثال: مختصات نقطه عطف توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=(x-1)^3+3x+1$ $\quad x=1$

$f(x)=(x-2)|x-2|+3x(3$ $\quad x=2$

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}-x(3$ $\quad x=-1$

مثال: ضابطه نمودار مقابل کدام می‌تواند باشد؟



۱) $y=x^3-x$ $\quad$ ۲) $y=x^3-3x^2$

۳) $y=-x^3+3x^2$ $\quad$ ۴) $y=-x^3+x$

جواب: گزینه ۳

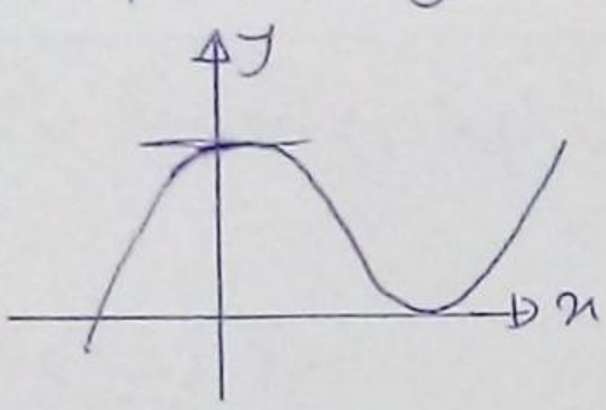
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

به ازای کدام مقدار a، جهت تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=ax^3+(4-a^2)x^2+x$ در

مثال: در بازه $(\frac{1}{3},-\infty)$ رو به بالا و در بازه $(\infty+,\frac{1}{3})$ رو به پایین است؟ جواب:

$a=3$ ~~$a=-3$~~

مثال: شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟



جواب: ۳-

$(y=ax^3+bx^2+cx+d)$

$\Rightarrow$ نقطه عطف $x=\frac{-b}{3a}$

$\Leftarrow$

مثال: خط $y=-3$ منحنی تابع $f(x)=x^3-3x^2+mx+1$ را در سه نقطه A,B,C قطع کرده است. اگر $AB=AC$ باشد، m کدام است؟ جواب: ۲-

مثال: به ازای کدام مقدار m، مجموع طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+mx^2+x$ برابر ۲ است؟ جواب: $\frac{1}{2}$

تابع همدگراضی $(0\neq ad-bc, c\neq 0)$ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

$D_f=R-\{\frac{-d}{c}\}$

$R_f=R-\{\frac{a}{c}\}$

اگر c صفر باشد $\rightarrow$ یک خط راست تبدیل می‌شود.

اگر $ad-bc$ صفر باشد $\rightarrow$ یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مثال: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{(m-1)x+5}{x+m}$ مجانب‌های موازی محور xها باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

$m_1+m_2=-\frac{b}{a}=\frac{1}{1}$ جواب:

* در تابع همدگراضی محل تلاقی مجانب‌های قائم و افقی، مرکز تقارن تابع است و مختصات آن به صورت $(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$ می‌باشد
* نمودار دارای دو محور تقارن عمود بر هم یا شیب‌های 1 و -1 می‌باشد که از مرکز تقارن تابع می‌گذرند.

Scanned by TapScanner

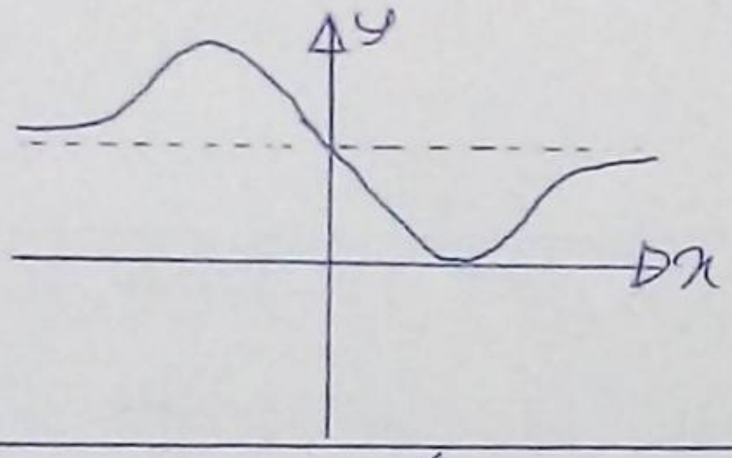
* اگر نمودار تابع مشتق پذیر f بر محور x ها مماس شده باشد، آن گاه معادله $f(x)=0$ جواب مضاعف دارد. بدیهی است که اگر تابع f کسری باشد، آن گاه در این حالت صورت کسر، ریشه مضاعف خواهد داشت.

* در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر $\Delta=0$ باشد، معادله ریشه مضاعف دارد،

$$ax^2+bx+c=0$$

ریشه مضاعف این معادله از رابطه $x=\frac{-b}{2a}$ به دست می آید.

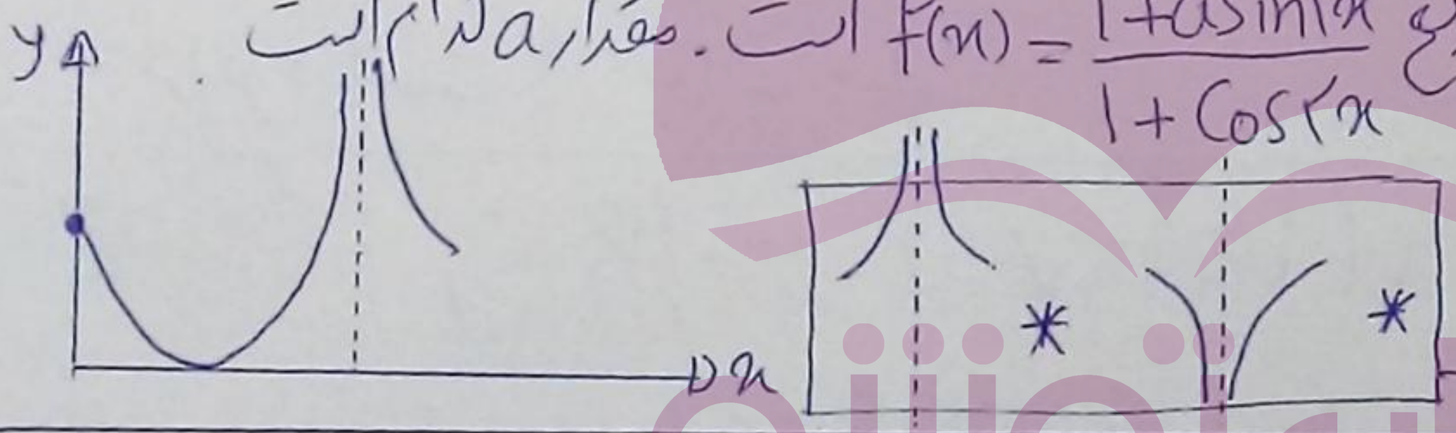
مثال: شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}$ است. مقدار a کدام است؟



جواب: ۲-

* معادلات $\sin(ax+b)=k$، $\cos(ax+b)=k$ وقتی ریشه مضاعف دارند که $k=\pm 1$

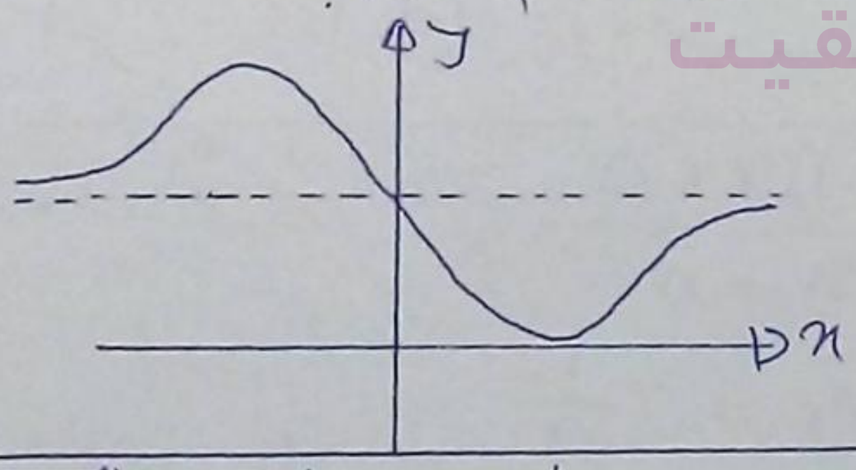
مثال: شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{1+a\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$ است. مقدار a کدام است؟



جواب: $a=-1$

مخرج کسر ریشه‌ی مضاعف دارد.

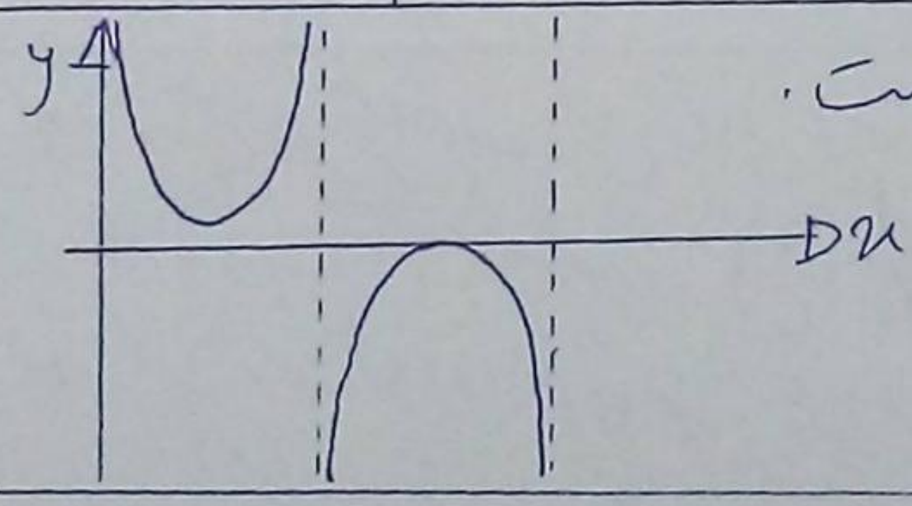
مثال: شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=\frac{2x^2+ax+b}{x^2+2x+3}$ می باشد، مقدار a کدام است؟



جواب: $-4\sqrt{3}$

مثال: شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{a+\sin x}{b\cos x+\sin x}$ است.

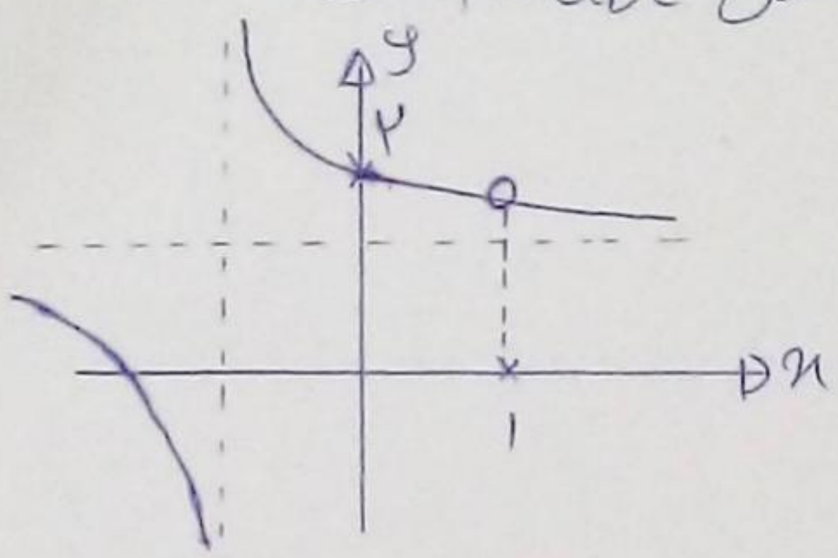
حاصل $a+b$ کدام است؟



جواب: ۱

Scanned by TapScanner

مثال: شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+c}$ است. حاصل abc کدام است؟



* نقطه توخالی روی نمودار، هم ریشه صورت کسر است هم ریشه مخرج کسر. جواب: ۲ — رهم / هم

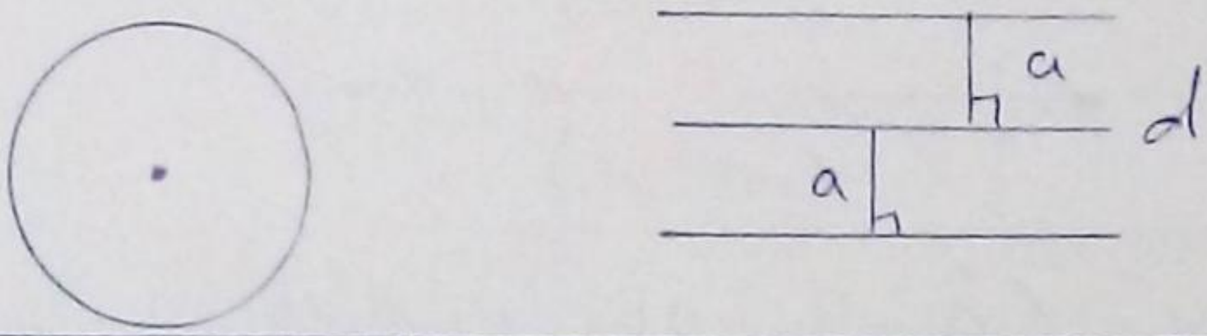
$$c=-1\ ,\ b=-2,\ a=1$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

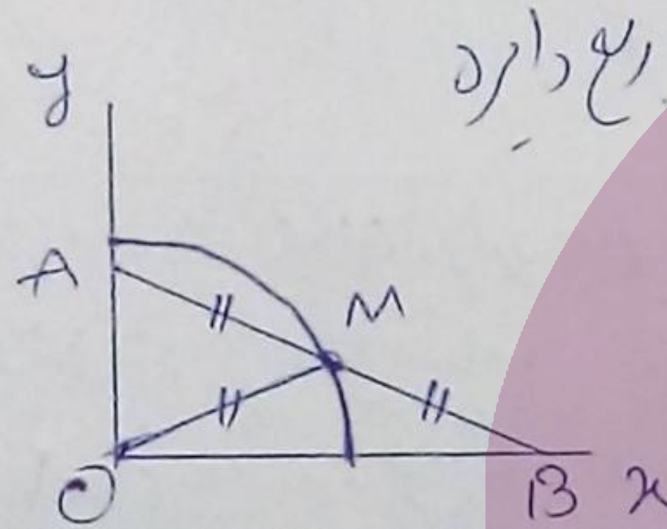
دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت (همان صفحه) فاصله معلومی هستند.

* مجموعه نقاطی که از خط معلوم d به فاصله ثابت a هستند، دو خط موازی با خط d به فاصله a از خط d هستند.



مثال: پاره‌خط AB به طول ثابت l داخل زاویه قائمه xOy چنان تغییر مکان می‌دهد که همواره A بر Oy، B بر Ox واقع است. وسط همه پاره‌خط‌های AB روی چه شکلی تغییر می‌کند؟

۱) نیم‌خط ۲) نیم‌دایره ۳) پاره‌خط ۴) ربع دایره



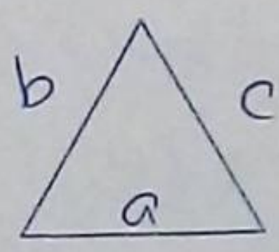
جواب: گزینه ۴

* (زاویه قائمه افرازیه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.)

مثال: پاره‌خط AB به طول ۳ سانتی‌متر عرض است. چند نقطه از صفحه یافت می‌شود که از نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر و از نقطه B به فاصله ۲/۵ سانتی‌متر باشد؟

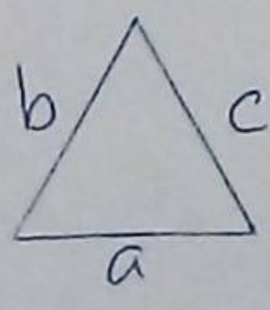
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر

جواب: گزینه ۲



$\Rightarrow$ برای حالت‌های مختلف

- $b+c>a \rightarrow$ دو جواب
- $b+c=a \rightarrow$ یک جواب
- $b+c<a \rightarrow$ جواب ندارد



نامساوی‌های مثلث

$b<a+c$

$a<b+c$

$c<b+a$

$\Rightarrow$

$|b-c|<a<b+c$

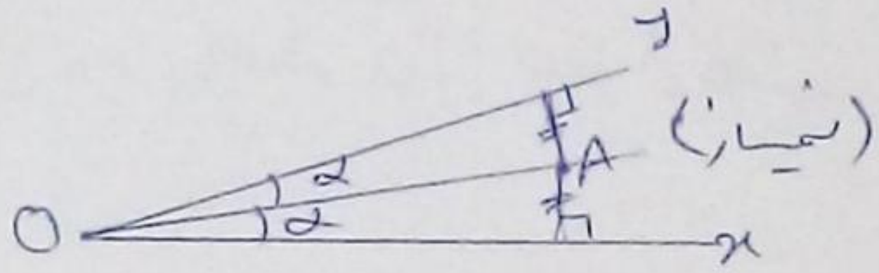
$|a-c|<b<a+c$

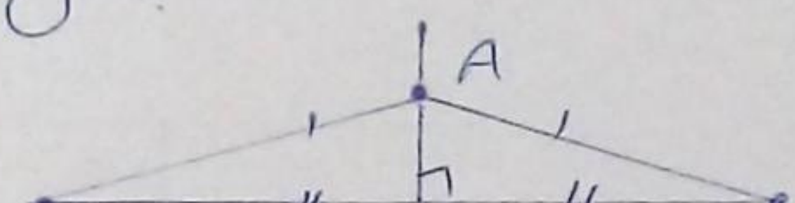
$|b-a|<c<b+a$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

خاصیت عمود منصف از یک زاویه: هر نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله است.
خاصیت عمود منصف یک پاره‌خط: هر نقطه‌ای که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است. (در هر شکل)


(نیمساز)


(عمود منصف)

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. نیمساز زاویه B این ارتفاع را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $AD=4$ و $DH=2$ باشد، آن‌گاه فاصله نقطه D تا ضلع AC کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

جواب: گزینه ۴

مثال: در مثلث ABC، پاره‌خط AD نیمساز زاویه A است و نقطه E روی ضلع AC چنان قرار دارد که از خط شامل AB و خط شامل AD به یک فاصله است.
اگر $\hat{C}=35^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه B چند درجه است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

جواب: گزینه ۱

مثال: دو خط غیرموازی d و d' و نقطه A روی d مفروض‌اند. می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که در نقطه A بر خط d مماس باشد و خط d' را هم قطع کند. تعداد جواب‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

جواب: گزینه ۲

قرینه‌های هندسی

- در کمان → مثلثی که ضلع آن معلوم باشد
- سه کمان → رسم نیمساز یک زاویه
- دو کمان → رسم عمود منصف یک پاره‌خط
- یک دایره + دو کمان → عمود مرکز خط از یک نقطه‌ی روی آن
- سه کمان → عمود مرکز خط از یک نقطه غیر واقع بر آن
- خط موازی با یک خط از یک نقطه غیر واقع بر آن

قرینه‌ی ۴ و ۵ → قرینه‌ی ۱ و ۳

Scanned by TapScanner

مثال: مثلثی با علوم بودن دو ضلع ۶ و ۱۴، ضلع سوم قابل رسم است. بیشترین مقدار صحیح محیط این مثلث کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۹ ۳) ۴۱ ۴) ۳۸

جواب: گزینه ۲

مثال: مثلث ABC با علوم بودن دو میانه $m_b=12$ ، $m_c=18$ ، ضلع a قابل رسم است. اندازه ضلع a کدام عدد می‌تواند نباشد؟

عدد

۱) ۱۳ ۲) ۲۵ ۳) ۲۱ ۴) ۴

جواب: گزینه ۱

* در مثلث میانه‌ها یکدیگر را همواره ۱ به ۲ قطع می‌کنند.

$$\frac{|b-c|}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$$

* تشخیص زاویه حاده، قائمه، منفرجه از اضلاع:

مقایسه با حالت مثلث قائم‌الزاویه

* قضیه میانه‌ها:

$$b^2+c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$a^2+b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

$$a^2+c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$

مساحت مثلث:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$$

رسم مثلثی که سه میانه آن معلوم است: مسائل وقتی جواب دارند که با سه عدد m_c, m_b, m_a بتوان یک مثلث ساخت.

* مساحت مثلثی که با میانه‌های غرض ساخته می‌شود، همواره $\frac{3}{4}$ مساحت مثلث غرض است.

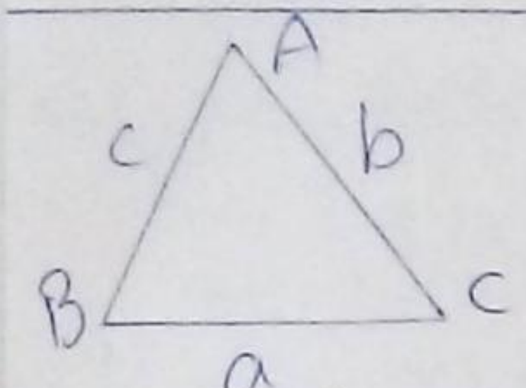
* دستور هرون برای محاسبه مساحت مثلث:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

P = نصف محیط

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

قضیه سینوس ها:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

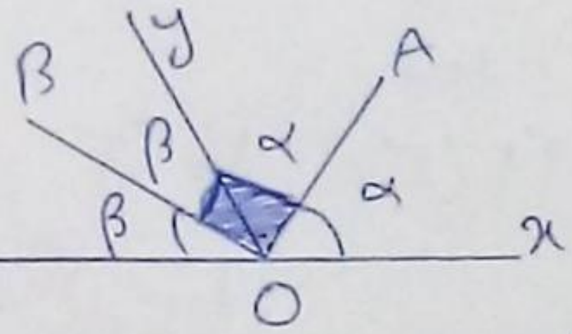
مثال: با اطلاعات $b=14$ ، $\hat{A}=45^\circ$ ، a (حتماً در مثلث متمایز می‌توان رسم کرد.
مقدار a، چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

$\sqrt{2}=1.4$ ، $\sqrt{5}=2.2$

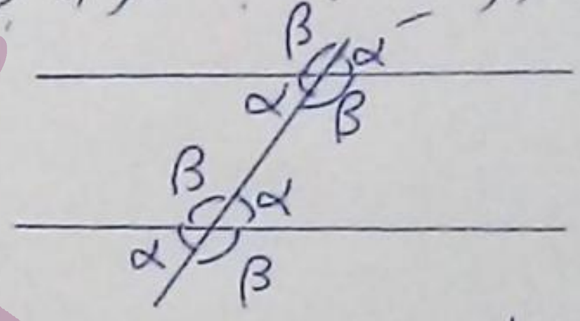
گزینه‌ها

جواب: $14 < a < 14\sqrt{2}$ (گزینه ۲) | ۳) ۴ ۳) ۴ ۵) ۴ ۶) ۷ | $\sqrt{3}=1.7$ ،

* نیمسازهای دو زاویه مجانب همواره برهم عمودند.

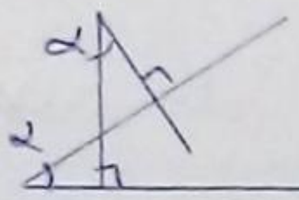


$OB \perp OA$

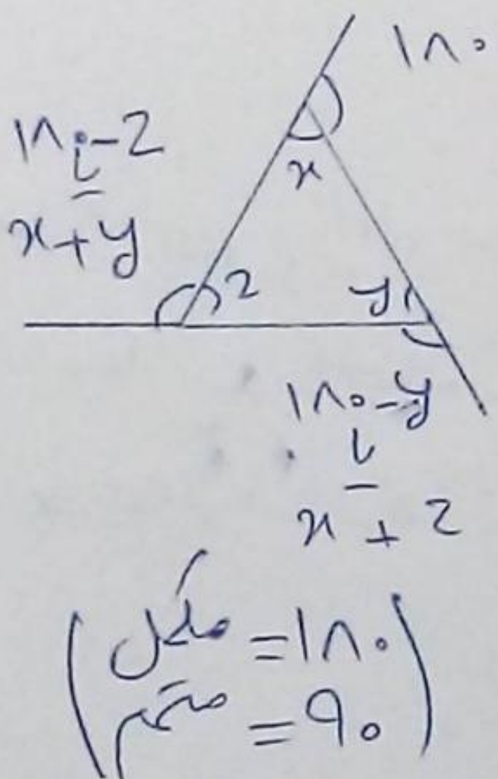


$\alpha+\beta=180^\circ$

* اگر اضلاع دو زاویه دو به دو برهم عمود باشند، دو زاویه مساوی یا مکمل اند.



* مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر $(n-2)\times 180$ است



$180-x = z+y$

$\Rightarrow x+y+z = 180$ (مجموع زوایای داخلی مثلث)

$\Rightarrow$ اندازه زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم $= \frac{(n-2)\times 180}{n}$

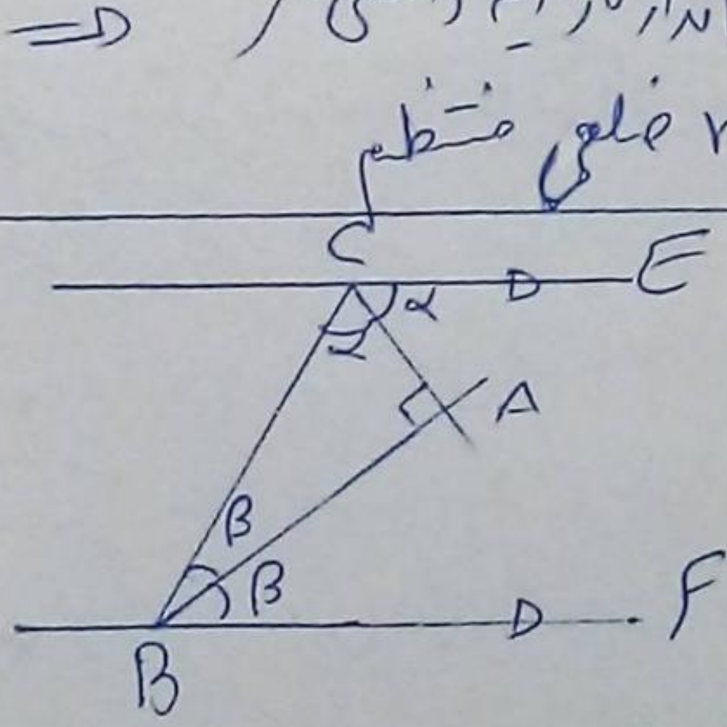
* مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر 360° درجه است.

$\Rightarrow$ اندازه زاویه خارجی هر n ضلعی منتظم برابر $\frac{360}{n}$

$\Rightarrow$ اندازه زاویه داخلی هر n ضلعی منتظم $= 180 - \frac{360}{n} = \frac{(n-2)\times 180}{n}$

(مکمل $=180$ ، متمم $=90$)

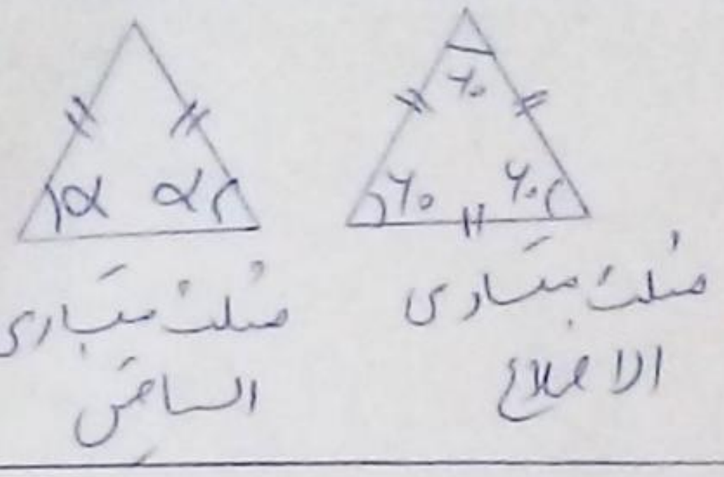
مثال: BA, CA نیمساز، $BF \parallel CE$



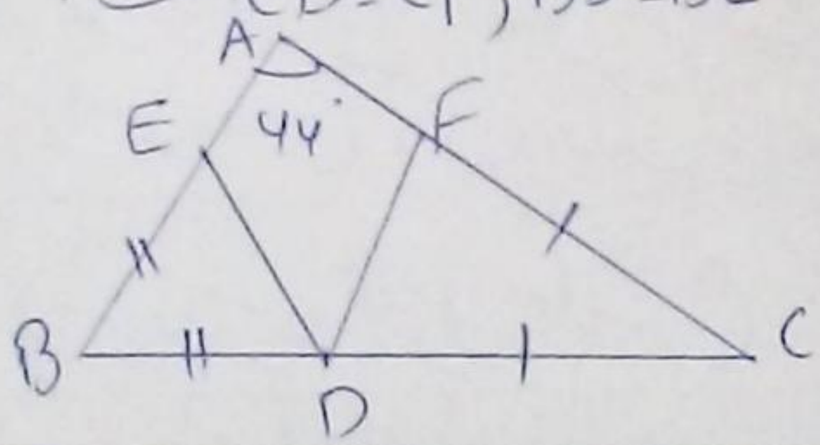
$A=90^\circ$ $\Leftarrow$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

* در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن زاویه.



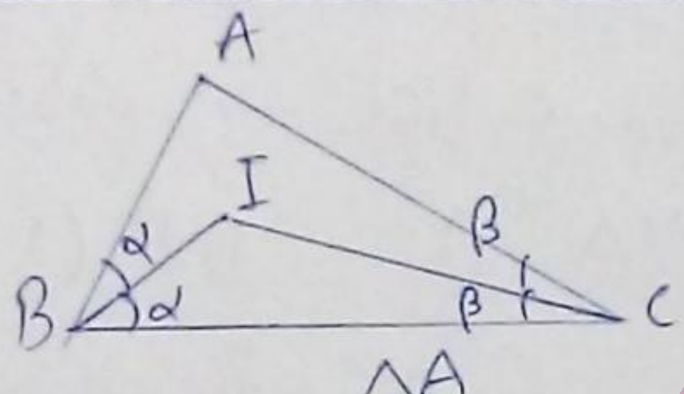
مثال: در مثلث ABC مطابق شکل اندازه زاویه A برابر ۴۴° ، CD=CF, BD=BE است. اندازه زاویه EDF چند درجه است؟



۱) ۵۸
۲) ۵۹
۳) ۵۷
۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۳

مثال: روابط زیر را اثبات کنید:

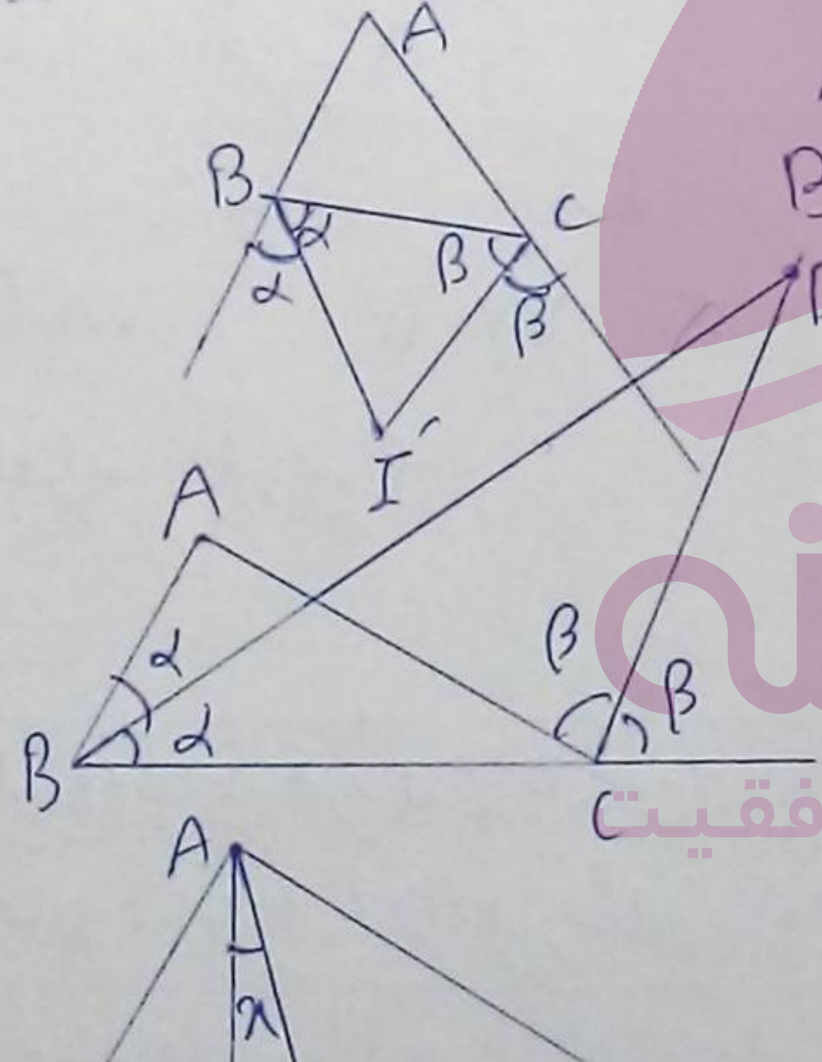


(نیمساز داخلی: BI, IC)

$$\hat{BIC} = 90 + \frac{\hat{A}}{2}$$

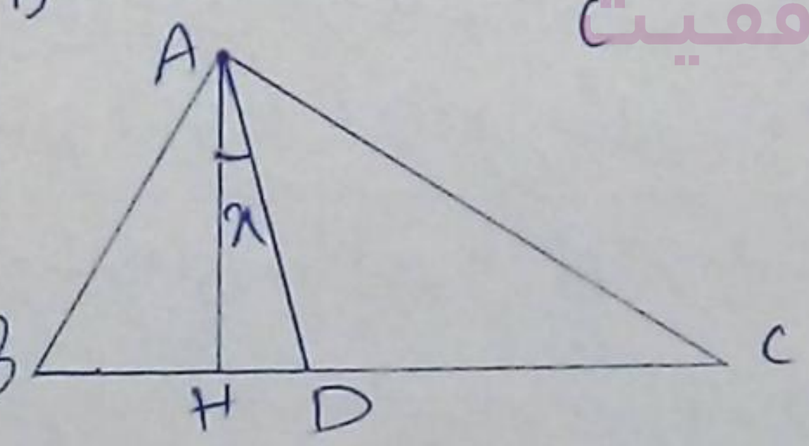
(نیمساز خارجی: BI', CI')

$$\hat{BI'C} = 90 - \frac{\hat{A}}{2}$$



(نیمساز داخلی: BD
نیمساز خارجی: CD)

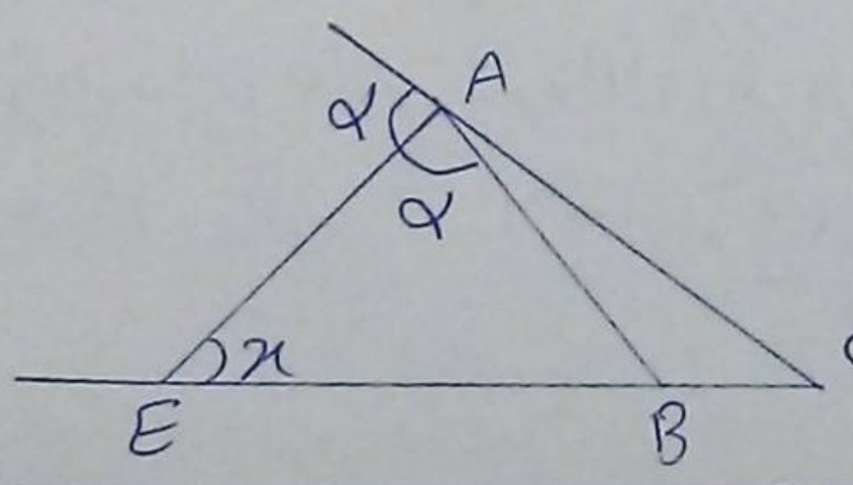
$$\hat{BDC} = \frac{\hat{BAC}}{2}$$



(ارتفاع: AH
نیمساز: AD)

$$x = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$$

* در مثلث متساوی الساقین، x برابر صفر است ($\hat{B} = \hat{C}$) و AE همان BC است.



(نیمساز خارجی: AE)

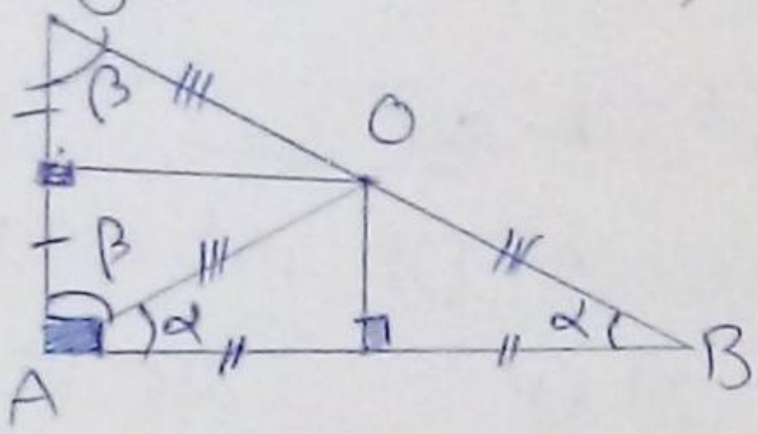
$$x = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

* در مثلث حاده الزوایا، عامل افزاینده در ضرب افزاینده به ترتیب نقطه همرسی عمود منصف ها داخل، او در خارج مثلث قرار می گیرد.

* یک مثلث عامل افزاینده است اگر و تنها اگر نقطه همرسی عمود منصف های آن روی یک ضلع آن قرار گیرد. (وسط وتر)



* عمود منصف های اضلاع هر مثلث همرس هستند از تمام راس های آن، یک فاصله است.

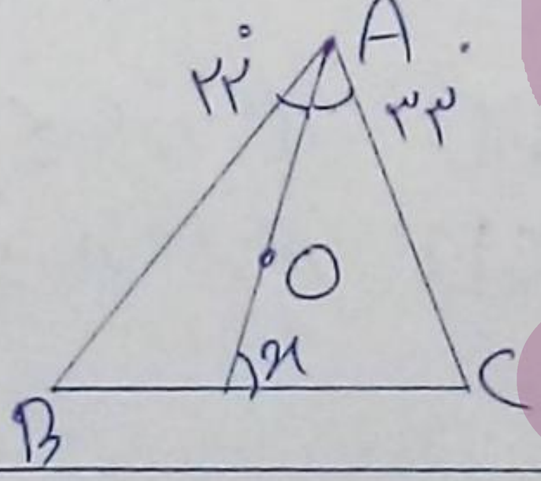
(مرکز دایره محیطی مثلث)

مثال: در مثلث حاده الزوایای ABC، $\hat{A}=48^\circ$، O نقطه همرسی عمود منصف هایی باشد. اندازه زاویه BOC چند درجه است؟

۱) ۱۶۲ ۲) ۱۶۸ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۳۵

جواب: گزینه ۲

مثال: در شکل مقابل O نقطه همرسی عمود منصف های مثلث ABC است. مقدار x کدام است؟



۱) ۷۸ ۲) ۷۶ ۳) ۷۹ ۴) ۸۰

جواب: گزینه ۳

---

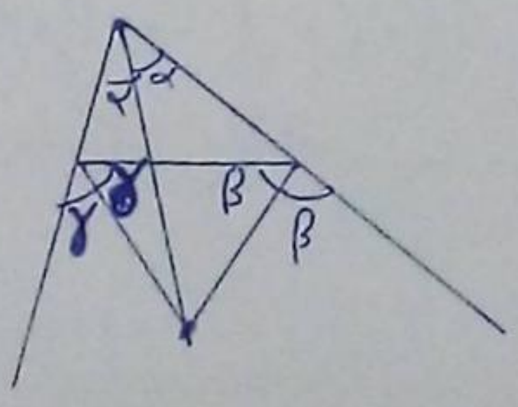
* ارتفاع های هر مثلث همرس اند (در مثلث حاده الزوایا: داخل مثلث، عامل افزاینده: راس زاویه حاده، ضرب افزاینده: خارج مثلث)

---

* نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس اند (همواره داخل مثلث، مرکز دایره محاطی مثلث)

* در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی مثلث با نیمسازهای زاویه های خارجی دو زاویه دیگر همرس اند.

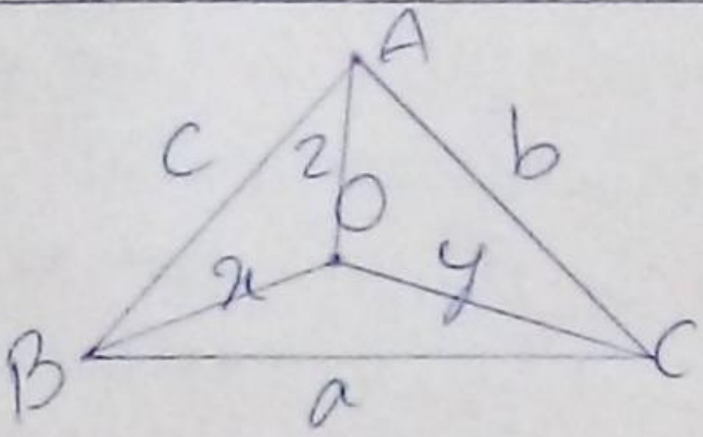
* محل برخورد نیمسازها، از اضلاع مثلث به یک فاصله است.



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

* اگر دو ضلع مثلثی نابرابر باشند، زاویه روبرو ضلع بزرگتر، از زاویه روبرو ضلع کوچکتر، بزرگ‌تر است. (و برعکس)

O: نقطه‌ای دلخواه درون مثلث



$a < x+y < b+c$

$\Rightarrow \frac{a+b+c}{2} < x+y+z < a+b+c$

* محرج میانه‌های هر مثلث، از $\frac{3}{4}$ محیط مثلث بزرگتر و از محیط آن کوچکتر است.
* محرج میانه‌های هر مثلث از نصف محیط مثلث، بزرگتر و از محیط آن کوچکتر است.
* محرج ارتفاع‌های هر مثلث حاده‌الزوایا، از نصف محیط مثلث بزرگتر و از محیط آن کوچکتر است.

قضیه و عکس قضیه، گزاره، نقیض یک گزاره، گزاره شرطی، برهان خلف (برهان غیرمستقیم)
مثال نقض، گزاره دوشرطی $\Leftrightarrow$

$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (طرفین وسطین)

$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (تعویض طرفین یا وسطین)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

* $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = ac$ (b، میانگین هندسی بین a و c است)

مثال: پاره خط AB مفروض است. نقطه M روی آن چنان قرار دارد که طول پاره خط MB واسطه هندسی طول پاره خط‌های MA و AB است. نسبت طول پاره خط‌های MA به MB کدام است؟

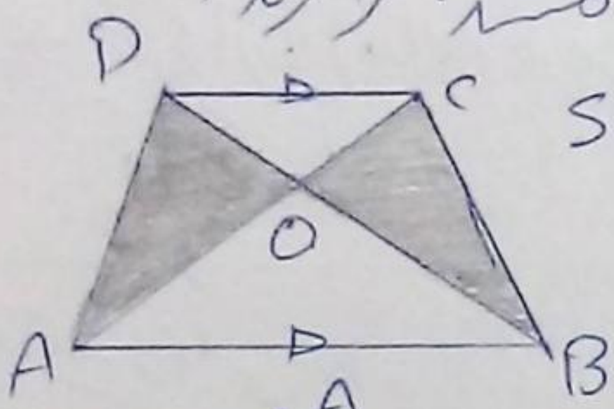
۱) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ۳) $\sqrt{5}-1$ ۴) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

جواب: گزینه ۲

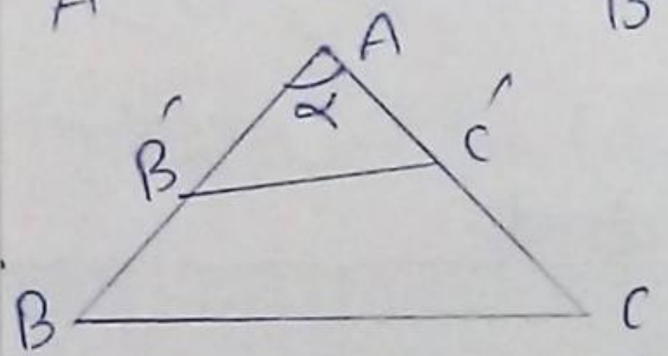
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}h_a \times a = \frac{1}{2}h_b \times b = \frac{1}{2}h_c \times c \longrightarrow$

* نسبت دو ارتفاع با نسبت عکس اندازه‌های قاعده‌های نظیر آن‌ها مساوی است.
* هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده‌اند.
⇐ خط هر ذوزنقه آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های ذوزنقه است.
⇐ میانه هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند
⇐ اگر چند مثلث قاعده مشترکی داشته باشند و راس‌های روبروی قاعده (رأس‌ها) روی خطی موازی این قاعده باشند، آن‌گاه این مثلث‌ها هم مساحت هستند.
⇐ در هر ذوزنقه مساحت دو مثلثی که محل برخورد قطرها را رأس‌های مشترک هستند، برابرند.



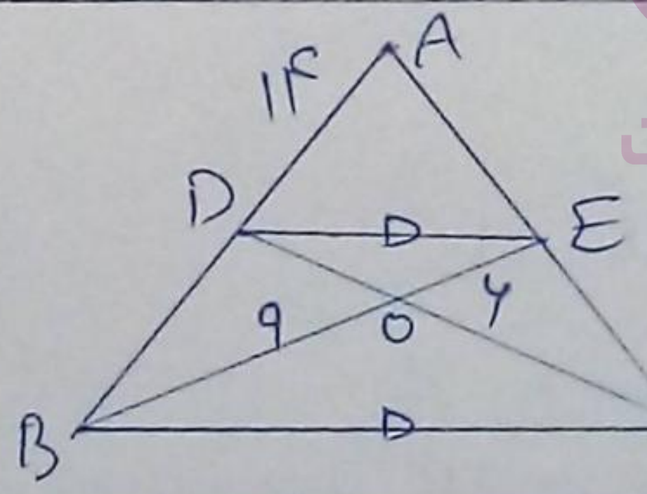
$S(AOD) = S(BOC)$



$$\frac{S(AB'C')}{S(ABC)} = \frac{\frac{1}{2} \times AB' \times AC' \times \sin A}{\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A} = \frac{AB' \times AC'}{AB \times AC}$$

* قضیه تالس * عکس قضیه تالس
* اگر نسبت تشابه k باشد ← نسبت محیط‌ها k و نسبت مساحت‌ها k^2 است.

مثال: در ذوزنقه روبرو اندازه ساق BD کدام است؟

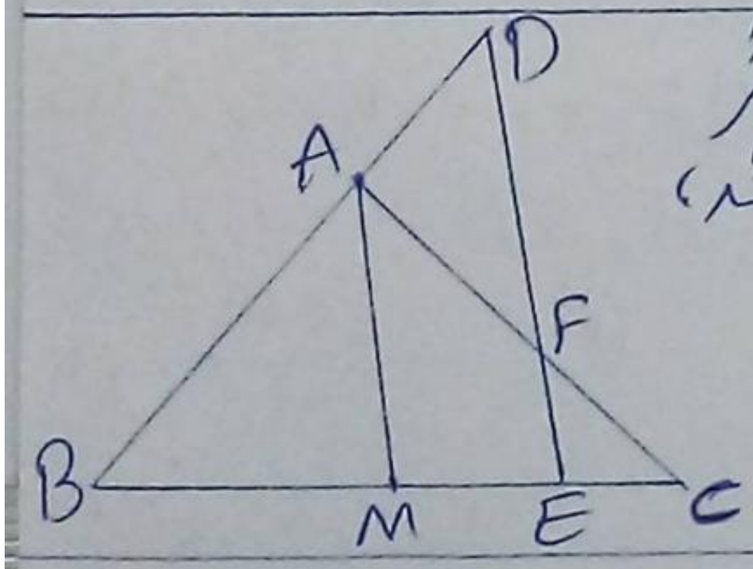


$(OE = 6,\ OB = 9,\ AD = 14)$

۱) ۶ ۲) $\sqrt{7}$ ۳) ۸ ۴) ۹

جواب: گزینه ۲

مثال: در مثلث ABC مطابق شکل، AM میانه و $DE \parallel AM$. اگر $\frac{EF}{AM} = \frac{3}{5}$ باشد، $\frac{DE}{AM}$ آن‌گاه نسبت کدام است؟

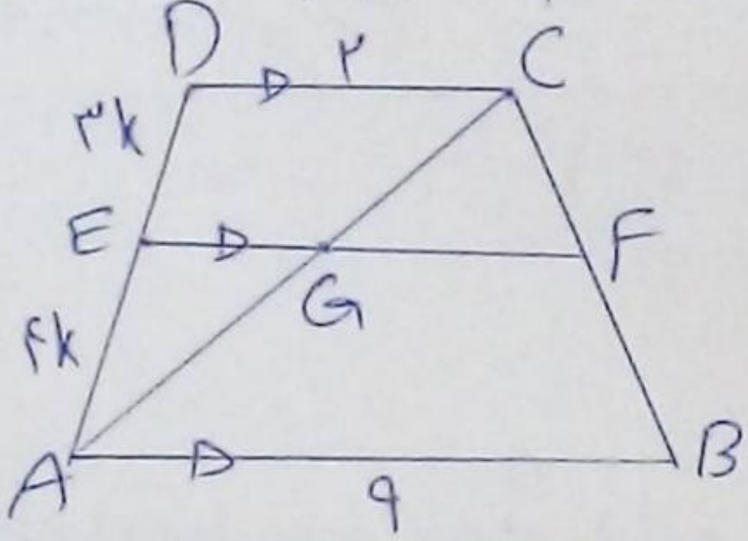


۱) ۱/۵ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۲

جواب: گزینه ۲

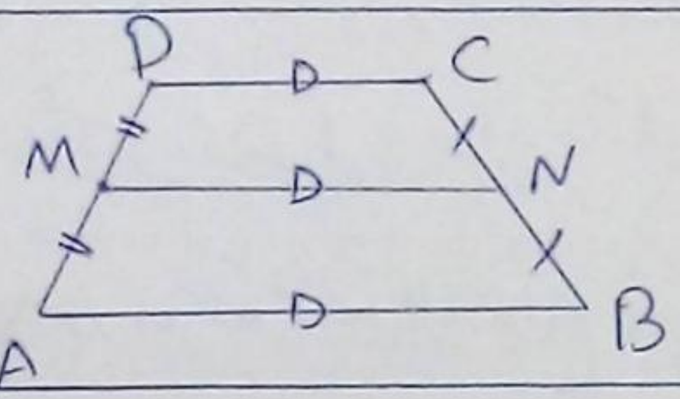
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: در ذوزنقه $ABCD$ $(AB\|CD)$، $AB=9$، $CD=2$. نقطه E روی ساق AD چنان قرار دارد که $\frac{DE}{EA}=\frac{3}{4}$ است. از E خطی موازی قاعده‌ها رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با ساق BC را F می‌نامیم. طول پاره‌خط EF کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

جواب: گزینه ۳

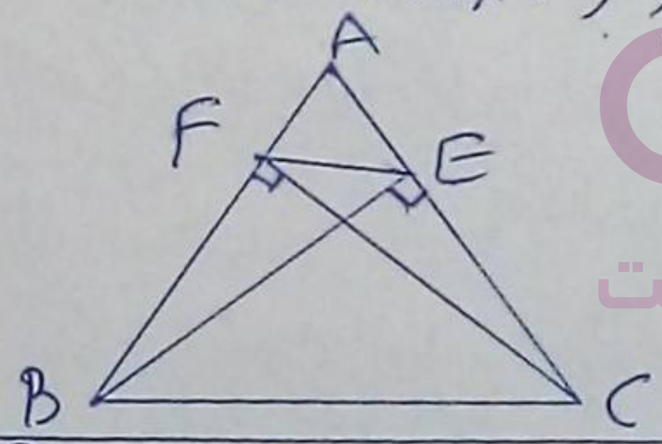


$$MN=\frac{AB+DC}{2}$$

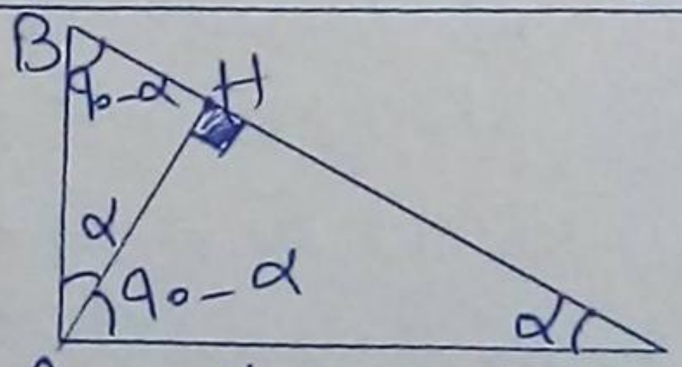
(در سایر موارد استفاده از دو نسبتی خطی)

حالات تشابه دو مثلث: ① دو زاویه برابر باشند
② یک زاویه و دو ضلع این زاویه متناسب باشند
③ سه ضلع متناسب باشند.

مثال: ثابت کنید اگر در مثلث ABC دو ارتفاع BE و CF را رسم کنیم، در مثلث AEF و ABC همواره متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر $\cos A$ است.



$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}=\cos A$$



$$\left.\begin{aligned}AB^2&=BH\times BC\\AC^2&=CH\times CB\end{aligned}\right\}\Rightarrow \underbrace{AB^2+AC^2=CB^2}_{\text{رابطه فیثاغورس}}$$

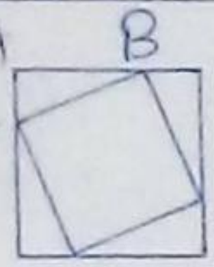
$(AH^2=BH\times HC)$ ، $S_{\text{مثلث}}=\frac{1}{2}AH\times BC=\frac{1}{2}AB\times AC$

اعداد فیثاغورسی معروف $(3,4,5)$ ، $(5,12,13)$، $(15,8,17)$

(ضرب‌های این اعداد نیز فیثاغورسی هستند)، مثلث‌های متشابه

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: در شکل مقابل مساحت مربع بزرگ $\frac{49}{25}$ مساحت مربع کوچک است. اگر ضلع مربع بزرگ ۱۴ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۴۸ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۶

جواب: گزینه ۲

تعداد قطرهای یک n ضلعی = $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

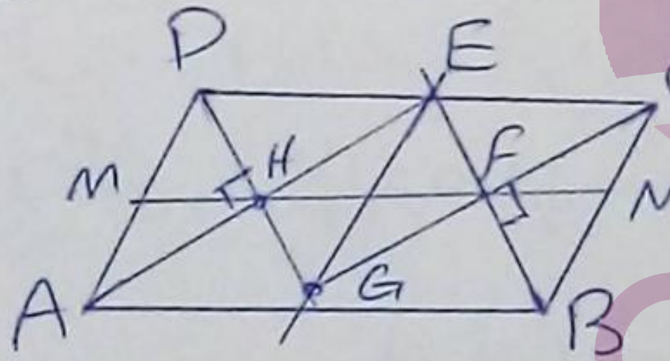
تعداد اضلاع — مجموع تعداد قطرها و اضلاع

* تعداد قطرهای رسم شده از یک راس، همواره برابر $n-3$ است.

---

* در هر متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند و برعکس.
* از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک متوازی الاضلاع یک مستطیل ایجاد می‌شود.

مثال: نشان دهید مساحت مستطیل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی یک متوازی الاضلاع از رابطه‌ی $S = \frac{1}{2}(AB-AD)^2 \sin\hat{A}$ به دست می‌آید.



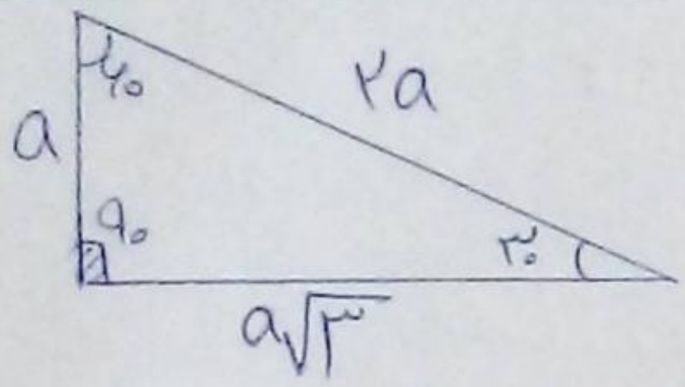
* در صورتی که $AB=2AD$ باشد نقاط E و G روی محیط متوازی الاضلاع قرار دارند.

مثال: نشان دهید اگر وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی دلخواه را به طور متوالی به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل متوازی الاضلاع است.

* مساحت متوازی الاضلاع به وجود آمده برابر نصف مساحت چهارضلعی است.
* اگر دو قطر چهارضلعی بر هم عمود باشند ← شکل حاصل مستطیل است.
* اگر دو قطر چهارضلعی با هم برابر باشند ← شکل حاصل لوزی است.
* اگر دو قطر چهارضلعی برابر و با هم عمود باشند ← شکل حاصل مربع است.

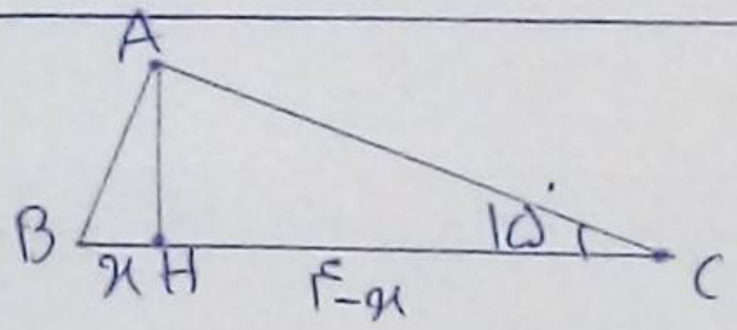
مثال: نشان دهید محیط شکل حاصل برابر مجموع قطرهای چهارضلعی است.

Scanned by TapScanner



$a^2+(a\sqrt{3})^2=(2a)^2$

* در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه میانه وارد بر وتر، نصف وتر است (و برعکس)
* اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه یک زاویه ۱۵ یا $\sqrt{15}$ باشد آن‌گاه اندازه ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ وتر است. (و برعکس)



مثال: در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

۱) $2-\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\sqrt{3}-1$

جواب: گزینه ۱

$(AH^2=BH\times HC)$

$HC=4-x$

$BH=x$

چهارضلعی

چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای زاویای مستطیل

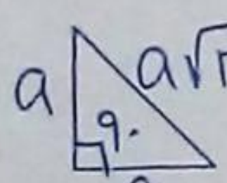
طول مستطیل $=a$

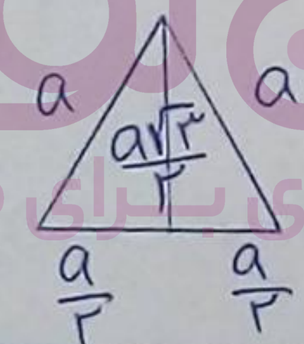
عرض مستطیل $=b$

نیمساز زاویای داخلی ⟹ اندازه ضلع مربع $=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$

نیمساز زاویای خارجی ⟹ اندازه ضلع مربع $=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین





مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برحسب اندازه ضلع آن (a)

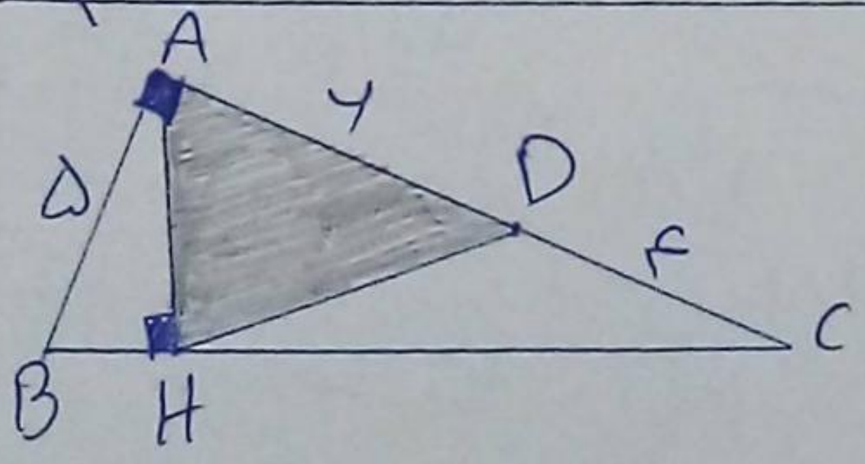
$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

قضیه کسینوس‌ها

$(AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos B)$

مثال: در شکل مقابل مساحت مثلث ADH کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵



جواب: گزینه ۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

محیط دایره $= 2R\pi$ مساحت دایره $= \pi R^2$

مثال: سطح مقطع صفحه‌ای با یک مکعب، بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع ممکن است. اگر طول یال مکعب $\sqrt{6}$ باشد، آن‌گاه مساحت این سطح مقطع کدام است؟

۱) $6\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{3}$ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$

جواب: گزینه ۲

حجم مخروط $= \frac{1}{3} \times$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع

مثال: صفحه P کره‌ای به مرکز O، شعاع R را قطع کرده است. اگر مساحت مقطع ایجاد شده $\frac{1}{9}$ مساحت کره باشد، آن‌گاه شعاع مقطع تا مرکز کره از صفحه P چند است؟ شعاع کره کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

جواب: گزینه ۱

مساحت جانبی $=$ محیط قاعده $\times$ ارتفاع

مساحت کل $=$ مساحت جانبی $+$ مساحت قاعده‌ها

مثال: قطر یک مستطیل با ضلع آن، زاویه 30° می‌سازد. از دوران این مستطیل حول ضلعش در شکل فضایی حاصل می‌شود، نسبت مساحت کل آن‌ها کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

جواب: گزینه ۱

مثال: یک مثلث قائم‌الزاویه را که اندازه یک زاویه‌اش 30° است، حول ضلع زاویه قائمه‌اش دوران می‌دهیم. نسبت حجم شکل‌های فضایی ایجاد شده کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۱

جواب: گزینه ۱

مساحت کره به شعاع r $= 4\pi r^2$ حجم کره به شعاع r $= \frac{4}{3}\pi r^3$

مثال: دورترین و نزدیک‌ترین فاصله یک نقطه ثابت خارج دایره از مرکز آن ۱۳ و ۵ است. مساحت دایره کدام است؟

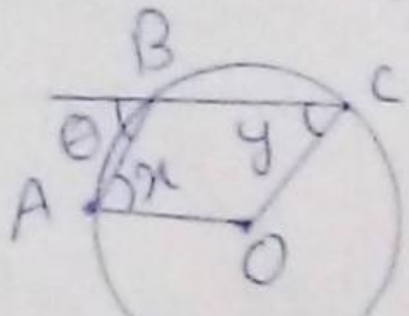
۱) 9π ۲) 16π ۳) 25π ۴) 4π

جواب: گزینه ۲

ایران توشه
Scanned by TapScanner

* برای محاسبه مساحت قطاع، طول کمان: $\frac{\text{زاویه}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{زاویه}}{360} = \frac{\text{کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{مساحت قطاع}}{\text{مساحت دایره}}$

مثال: در شکل مقابل O مرکز دایره است. حاصل $\theta+\gamma$ کدام است؟



1) 2θ 2) $90+\theta$ 3) $180-2\theta$ 4) $180-\theta$

جواب: گزینه ۴

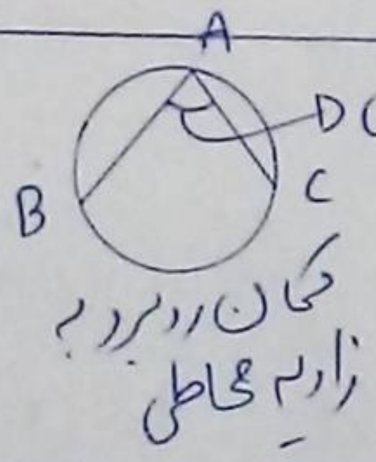
فاصله وترها از مرکز $\Longleftrightarrow$ اندازه وترها برابر $\Longleftrightarrow$ اندازه کمان‌ها برابر باشد دایره یکسان است

* در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. (برعکس)

مثال: در یک دایره سه وتر، برابر ۲ و ۳ و ۴ و ۹ باشد، مساحت دایره کدام است؟

1) 144π 2) 128π 3) 133π 4) 121π

جواب: گزینه ۳



زاویه محاطی

کمان روبروی زاویه محاطی

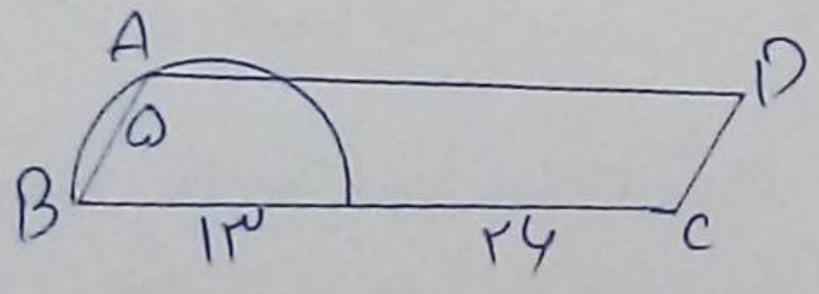
* اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان روبرو به آن

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

* اندازه زاویه محاطی روبرو به قطر دایره، ۹۰ است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مثال: در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع، BC قطر نیم‌دایره است. مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟



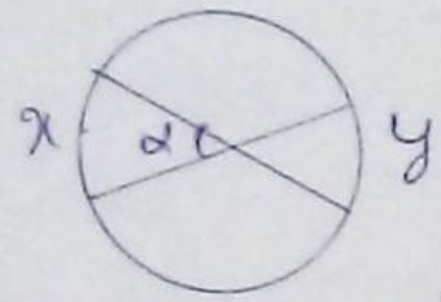
1) 52 2) 48 3) 180 4) 65

جواب: گزینه ۳

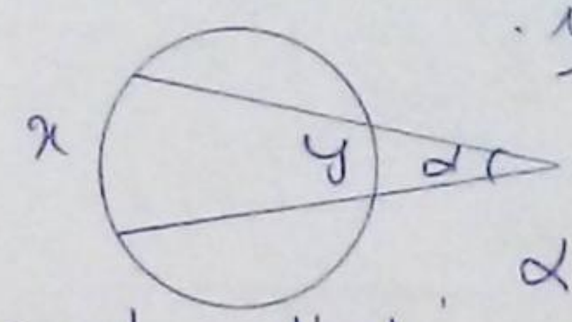
* اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف اندازه کمان روبرو به آن
* در دستگاه یک دایره متوازی الاضلاع، اگر تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.

Scanned by TapScanner

مثال: روابط زیر را اثبات کنید.



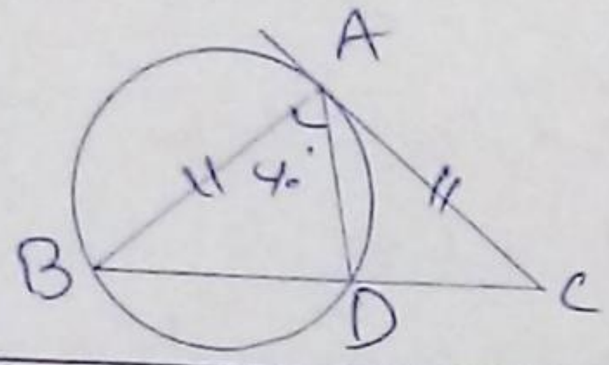
$\alpha = \frac{x+y}{2}$



$\alpha = \frac{x-y}{2}$

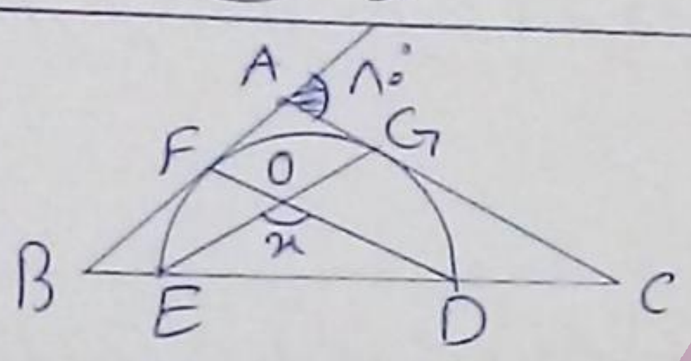
* می‌توانند یک، یا هر دو ضلع زاویه بر دایره مماس باشند

مثال: در شکل مقابل، AC در نقطه A بر دایره مماس، $AB=AC$ و $\hat{BAD} = 40^\circ$ است. اندازه $\hat{DAC}$ کدام است؟



۱) 30° ۲) 40° ۳) 35° ۴) 45°

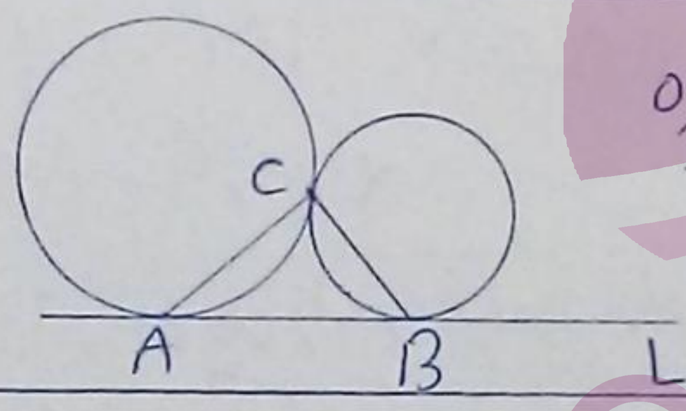
مثال: در شکل مقابل نیم دایره و قطر DE بر ضلع‌های AB، AC مماس است. مقدار x کدام است؟



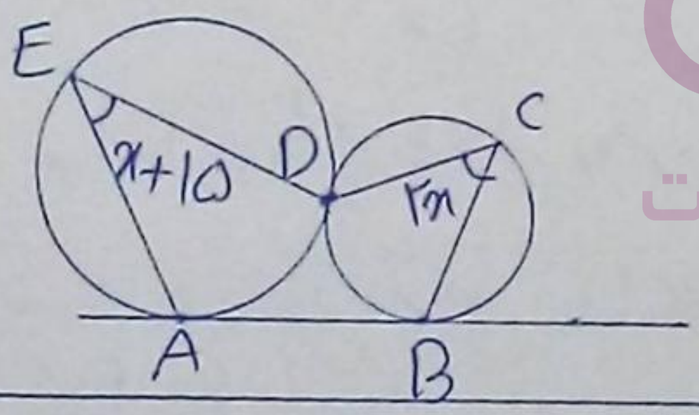
۱) 110° ۲) 125° ۳) 130° ۴) 140°

جواب: گزینه ۳

مثال: اگر در شکل مقابل دو دایره مماس و خط L نیز بر دو دایره مماس خارج باشد، ثابت کنید: $\hat{ACB} = 90^\circ$



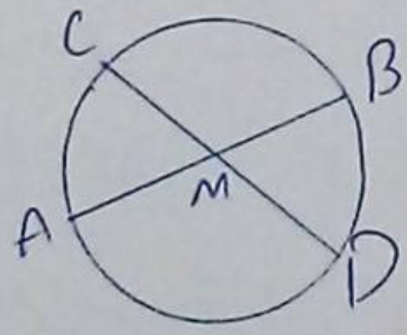
مثال: در شکل مقابل مقدار x کدام است؟



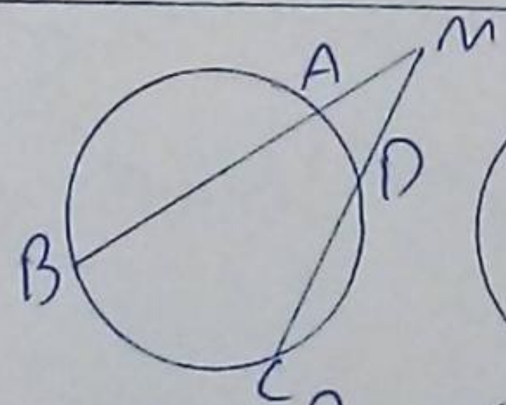
۱) 10° ۲) 15° ۳) 20° ۴) 25°

جواب: گزینه ۴

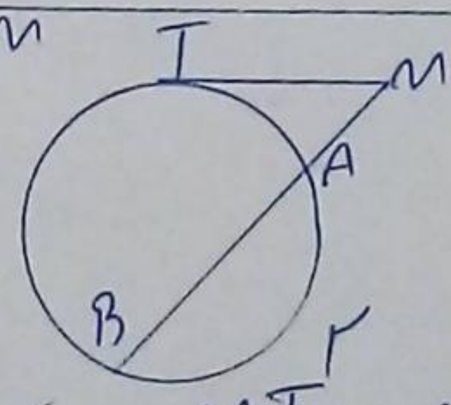
مثال: با استفاده از روابط شباهت در مثلث‌ها، روابط طرفی زیر را اثبات کنید:



$MA \times MB = MC \times MD$



$MA \times MB = MD \times MC$

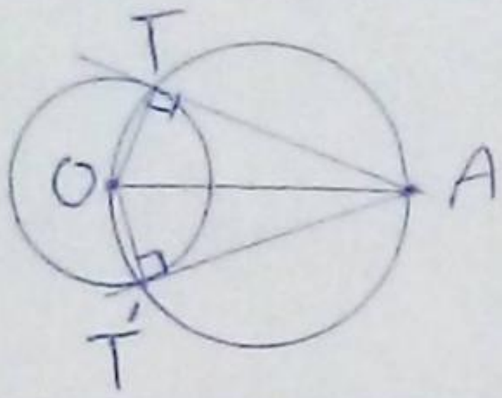


$MT^2 = MA \times MB$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

Scanned by TapScanner

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج از دایره (A)



دایره‌ای به مرکز O و قطر OA رسم می‌کنیم، زوایای $O\hat{T}A$ ، $O\hat{T'}A$ روبرو به قطر هستند

مثال: دو دایره هم مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ مفروض‌اند. وتری از دایره بزرگ‌تر مماس بر دایره کوچک‌تر است. اگر در مماس صرسم از در سر این وتر بر دایره بزرگ‌تر از نقطه M متقاطع باشند، آن‌گاه فاصله M تا مرکز دایره‌ها کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

جواب: گزینه ۱

در دایره به شعاع‌های R, R' با فاصله مراکز d از هم در نظر می‌گیریم:

$d > R+R'$ ، در دایره متخارج هستند

$d = R+R'$ ، در دایره مماس خارج هستند

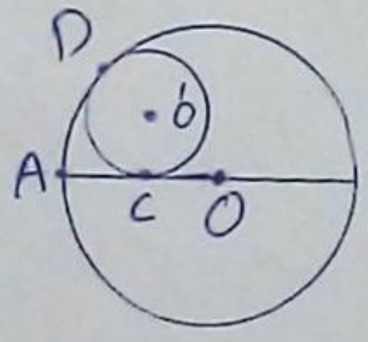
$|R-R'| < d < R+R'$ ، در دایره متقاطع هستند

$d = |R-R'|$ ، در دایره مماس داخل هستند

$d < |R-R'|$ ، دو دایره متداخل هستند

$d = 0$ ، در دایره هم مرکز هستند

مثال: در شکل مقابل، دایره کوچک به قطر AB، دایره بزرگ را مماس است. اگر $BC=12$ ، $AC=6$ شعاع آن‌گاه شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

جواب: گزینه ۲

مثال: طول خط المس گزین دو دایره مماس داخل ۵ و مساحت ناحیه بین دو دایره 16π است. محیط دایره بزرگ‌تر کدام است؟

۱) 12π ۲) 22π ۳) 16π ۴) 24π

جواب: گزینه ۲

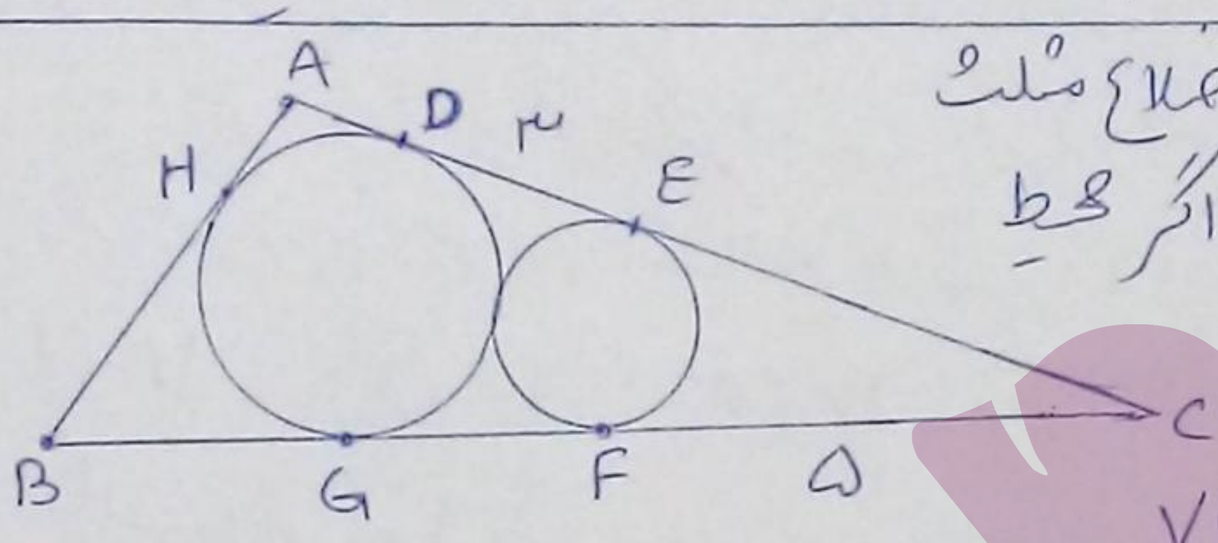
Scanned by TapScanner

رسم مماس مشترک خارجی دو دایره: دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R-R'$ رسم می‌کنیم و ...
$C(O,R)$ و $C'(O',R')$ $(R>R')$

طول مماس مشترک خارجی دو دایره $= \sqrt{d^2-(R-R')^2}$ (اثبات به عنوان تمرین)

مثال: در شکل مقابل، دو دایره بر یکدیگر و بر اضلاع مثلث مماس‌اند و $DE=3$ ، $CF=5$ است. اگر محیط مثلث ABC برابر ۲۸ باشد، اندازه‌ی AB کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷



جواب: گزینه ۳

رسم مماس مشترک داخلی دو دایره: دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R+R'$ رسم می‌کنیم و ...
$C(O,R)$ ، $C'(O',R')$ ، $(R>R')$

طول مماس مشترک داخلی دو دایره $= \sqrt{d^2-(R+R')^2}$ (اثبات به عنوان تمرین)

مثال: اندازه مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره به ترتیب $\sqrt{24}$ و $\sqrt{48}$ است. حاصل ضرب شعاع‌های این دو دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۶

جواب: گزینه ۴

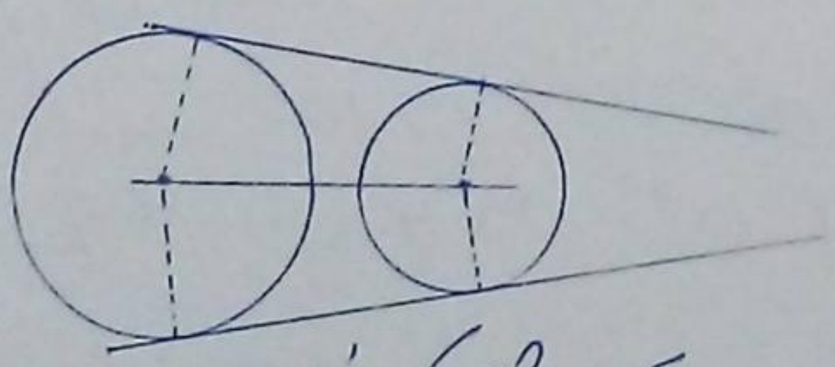
مثال: دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۵، طول خط‌المرکزین ۱۹ مفروض‌اند. فرض کنیم M نقطه‌ی تماس مماس مشترک داخلی دو دایره با دایره‌ی کوچک باشد. دورترین فاصله نقاط دایره بزرگ تا M کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

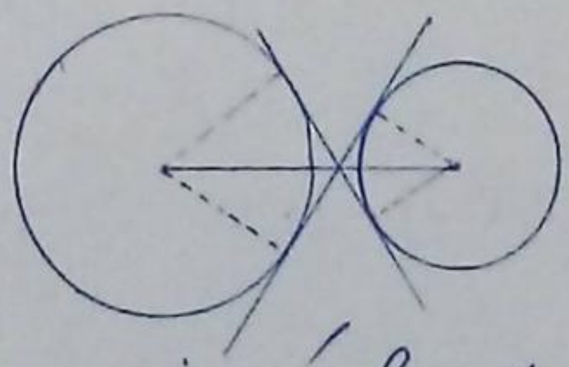
جواب: گزینه ۳

---

* استفاده از تشابه مثلث‌ها
* استفاده از روابط مثلثاتی
* تعداد مماس مشترک‌های داخلی و خارجی در حالات مختلف دو دایره نسبت به هم



مماس مشترک خارجی



مماس مشترک داخلی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

مثال: دو دایره به شعاع های ۴ و ۸ و خط المرکزین ۱۵ مفروض اند. فاصله نقطه تلاقی مماس مشترک های داخلی از نقطه تلاقی مماس مشترک های خارجی دو دایره کدام است؟

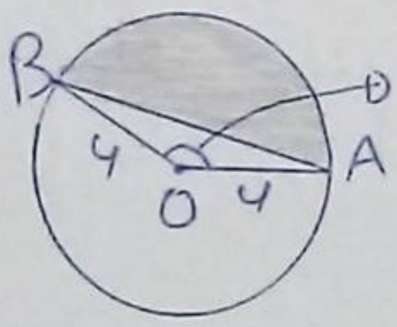
۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴ جواب: گزینه ۱

مثال: طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، برابر $TT' = 2\sqrt{RR'}$ است. نشان دهید

مثال: دو دایره به شعاع های ۱ و ۳ مماس خارج هستند. فاصله وسط مماس مشترک خارجی آن ها از مرکز دایره بزرگتر کدام است؟

۱) ۴ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$ جواب: گزینه ۲

مثال: شعاع دایره مقابل ۶ و اندازه زاویه مرکزی AOB برابر ۱۵۰° است. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



۱) $15\pi - 15$ ۲) $15\pi - 9$ ۳) $15\pi - 8$ ۴) $15\pi - 12$

جواب: گزینه ۲

* یک چند ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمود منصف های اضلاع آن همرس باشند
* یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر زاویه های روبرو مکمل یکدیگر باشند.
* دورنقطه متمایز الساحل یک چهارضلعی محاطی است. (محاطی: درون دایره)

* یک چند ضلعی، محیطی است، اگر و تنها اگر نیمسازهای زاویه های آن همرس باشند.
* مساحت هر چند ضلعی محیطی برابر است با نصف محیط آن در شعاع دایره محاطی آن ($S = P.r$ ، P = نصف محیط چند ضلعی محیطی)
* یک چهارضلعی، محیطی است، اگر و تنها اگر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل دیگر باشند.
* ارشمیدس بدست آورد ان مساحت n ضلعی منتظم برابر است با داشتن شعاع دایره محیطی یا محاطی ربنا ضلع

Scanned by TapScanner

مثال: در یک ذوزنقه قائم‌الزاویه محیطی، اندازه قاعده بزرگ ۷ و طول ساق قائم ۹ است. طول قاعده بزرگ این ذوزنقه کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۲/۸ جواب: گزینه ۳

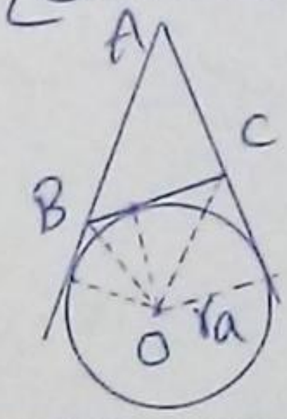
---

* در یک مثلث، شعاع دایره محاطی داخلی برابر $r = \frac{S}{P}$ (P = نصف محیط مثلث)

* در یک مثلث، شعاع دایره‌های محاطی خارجی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$r_a = \frac{S}{P-a} \quad , \quad r_b = \frac{S}{P-b} \quad , \quad r_c = \frac{S}{P-c}$$

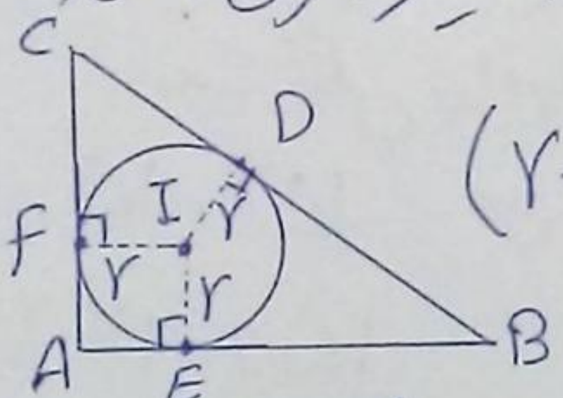
(اثبات به عنوان تمرین)



---

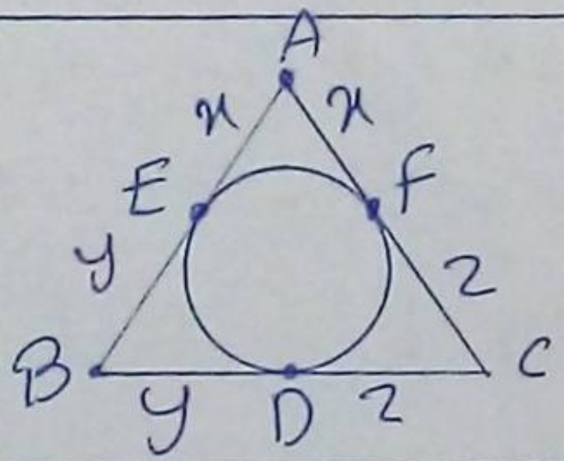
* شعاع دایره محیطی هر مثلث قائم‌الزاویه برابر نصف وتر یا میانه نظیر وتر می‌باشد.

* در هر مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایره محاطی داخلی $(r = P-a)$ برابر است با نصف حاصل جمع ضلع‌های وتر

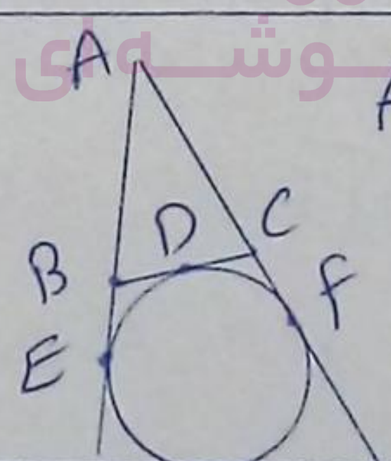


مثال: در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. شعاع‌های دایره‌های محاطی سه مثلث ABC، ABH و ACH را به ترتیب r_1، r_2 و r_3 می‌نامیم. اگر $AB=6$ و $AC=8$ باشد، آن‌گاه $r_1+r_2+r_3$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴/۶ ۳) ۴/۲ ۴) ۴/۸ جواب: گزینه ۲



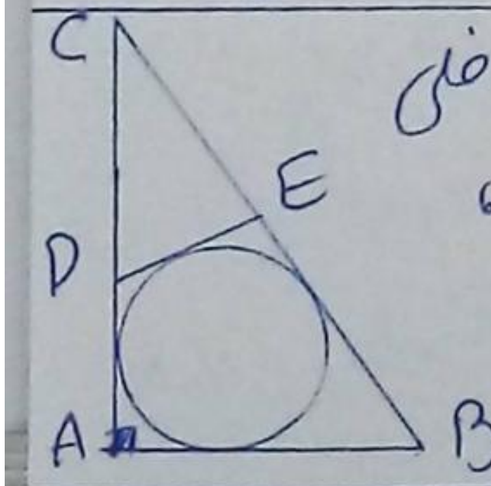
$$P = x+y+z$$
$$x = P-a$$
$$y = P-b$$
$$z = P-c$$



$$AE = AF = P$$
$$BE = BD = P-C$$
$$CD = Cf = P-b$$

مثال: در شکل مقابل مثلث ABC قائم‌الزاویه است $(\hat{A}=90^\circ)$. دایره محاطی داخلی مثلث رسم شده و DE بر این دایره مماس است. اگر $AB=3$، $AC=4$، آن‌گاه محیط مثلث CDE کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۶ ۳) ۵/۵ ۴) ۷ جواب: گزینه ۲



Scanned by TapScanner

* تبدیل همانی: هرگاه برازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم $I(A)=A$
(هر نقطه روی خودش تصویر شود)

* تبدیل طولپا (ایزومتری): تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کند

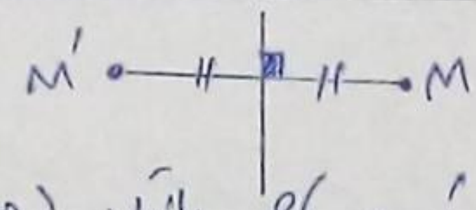
* در هر تبدیل ایزومتری، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است.

---

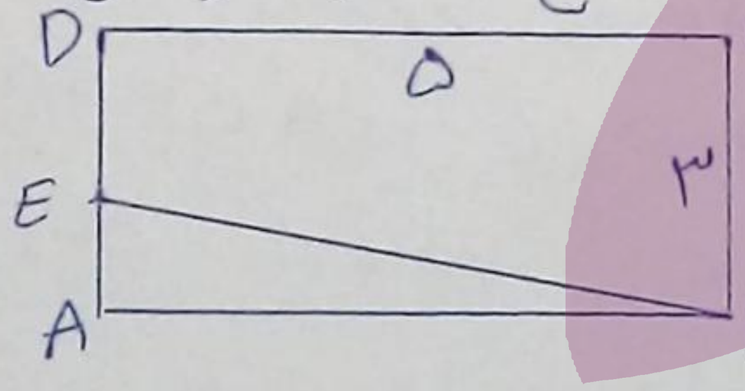
* بازتاب نسبت به خط (ایزومتری):

از حالت هایی نیز خط را حفظ می کند که خط سوازی و یا عمود بر محور بازتاب باشد	(عمود منصف MM') محور بازتاب (هر نقطه روی محور بازتاب تصویرش روی خودش قرار دارد)

از بقیه حالات محور بازتاب نیاز است.



مثال: مستطیل ABCD با ابعاد ۳ و ۵ مفروض است. اگر تصویر راس A در بازتاب نسبت به محور BE روی ضلع CD قرار گیرد آن گاه نقطه E ضلع AD را به چه نسبتی تقسیم می کند؟



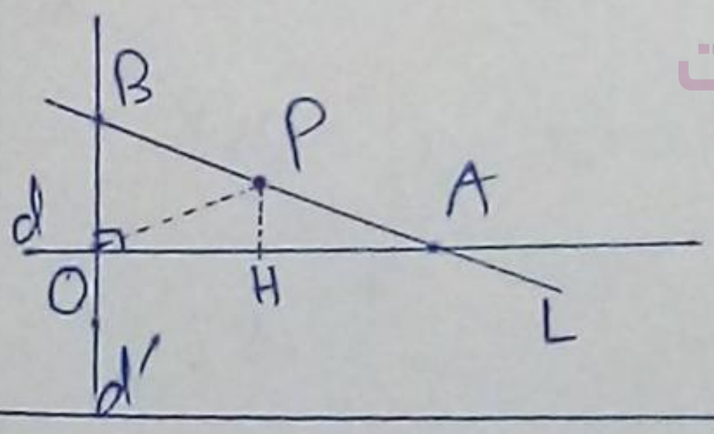
۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۲}{۵}$

جواب: گزینه ۲

مثال: در شکل مقابل دو خط d و d' بر هم عمودند. خط l آن ها را به ترتیب در نقاط A و B قطع کرده است، به طوری که $OA=۳$ و $OB=۱$. اگر P نقطه دلخواهی روی l باشد، آن گاه کمترین مقدار $OP+PH$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

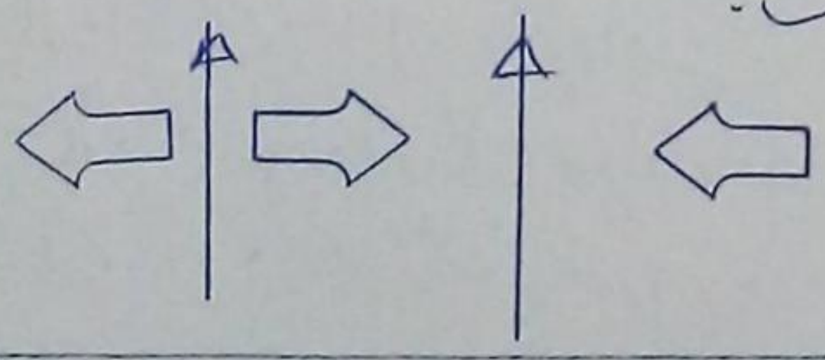
جواب: گزینه ۴



---

* انتقال، یک تبدیل ایزومتری است. * انتقال شیب خط را تغییر نمی دهد.

* ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی، یک انتقال است.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

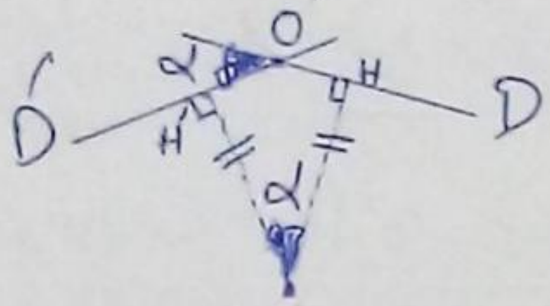
مثال: دایره (O,R) را تحت انتقال با بردار به طول $2R$ تصویر می‌کنیم، دایره‌ی به دست می‌آید. مساحت ناحیه بین دو دایره، مماس مشترک آن‌ها چه کسری از مساحت هریک از دایره‌هاست؟

۱) $\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi}-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{\pi}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

جواب: گزینه ۳

---

* دوران یافته یک خط، خطی است که یکی از زوایای که با خط مفروض می‌سازد برابر هم جهت با زاویه دوران است.



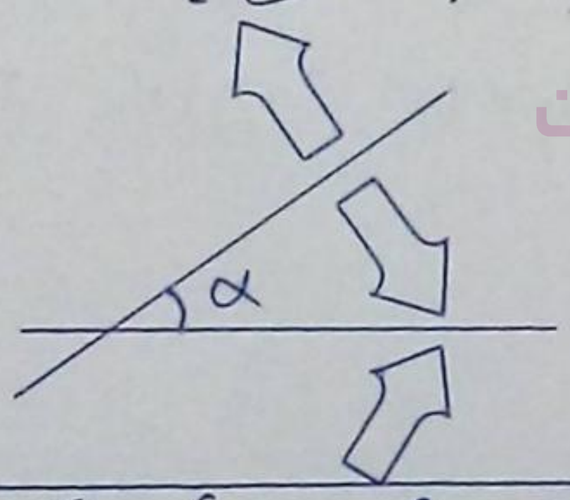
* دوران، شیب خط را حفظ نمی‌کند، مگر اینکه زاویه دوران مضرب صحیحی از 180° باشد. * دوران، ایزومتری است.

مثال: در مثلث ABC، $\hat{B}=128^\circ$ است. این مثلث را حول نقطه B با زاویه 52° دوران می‌دهیم و تصویر اضلاع A و C را به ترتیب A' و C' می‌نامیم. زاویه برخورد خط‌های AA' و CC' چند درجه است؟

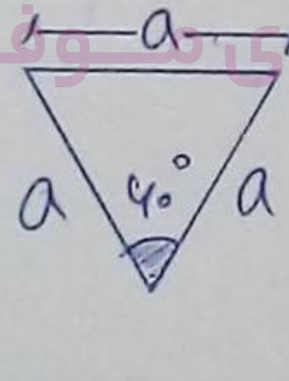
۱) 52° ۲) 64° ۳) 68° ۴) 76° جواب: گزینه ۱

---

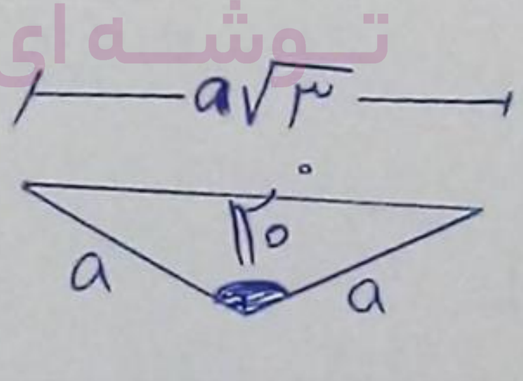
* دوران، اندازه زاویه و جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.
* ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، دورانی است که مرکز آن محل تلاقی محورهای بازتاب‌ها و زاویه آن دو برابر زاویه بین دو محور بازتاب است.



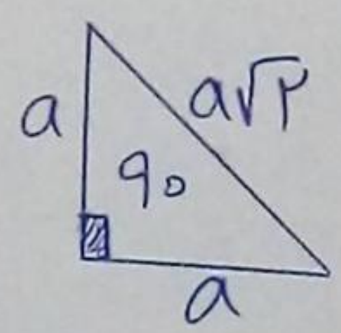
*



*



*



---

* تجانس: $OM'=|k|OM$ ، k * ثابت باشد، M و M' در یک طرف O (مستقیم) هستند اگر k مثبت باشد، M و M' در دو طرف O (معکوس) هستند.
* $k=1$: تجانس، تبدیل همانی است
* $k=-1$: تجانس، دوران به زاویه 180° است
* تجانس شیب خط را تغییر نمی‌دهد.
* $|k|>1$: انبساطی و $|k|<1$: انقباضی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
Scanned by TapScanner

در تجانسی، محیط l را برابر مساحت k^2 برابر می‌شود. * تجانس اندازه زاویه و تک‌تک را تغییر می‌دهد

مثال: نقطه M' تصویر نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{4}{3}$ است. اگر نقطه M' تصویر نقطه O در تجانس به مرکز M باشد، نسبت تجانس کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$ جواب: گزینه ۲

مثال: دایره $((0,5))$ و نقطه A به فاصله ۷ از مرکز آن مفروض است. تصویر دایره (C) را در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۲ - دایره (C') می‌نامیم. طول مماس مشترک داخلی دو دایره کدام است؟

۱) $5\sqrt{5}$ ۲) $5\sqrt{3}$ ۳) $6\sqrt{6}$ ۴) $6\sqrt{2}$ جواب: گزینه ۳

مثال: دایره $((0,4))$ و نقطه A به فاصله ۳ از مرکز آن مفروض است. تصویر دایره (C) را در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۳ دایره (C') می‌نامیم. دو دایره (C) و (C') چگونه‌اند؟

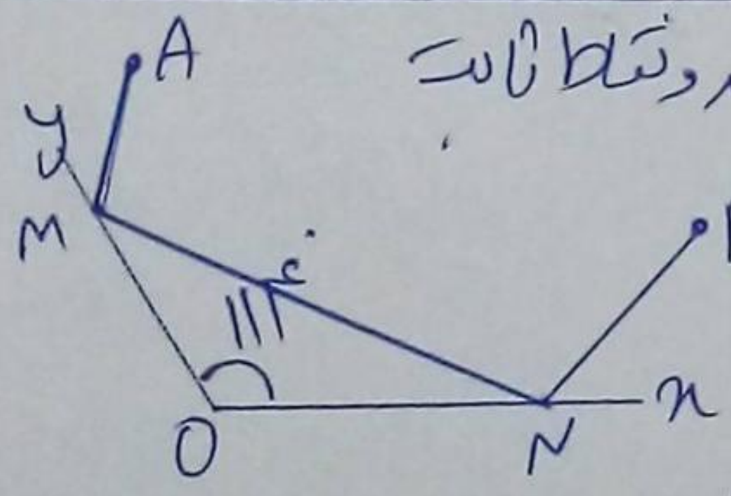
۱) متخارج ۲) متماس ۳) مماس خارج ۴) متداخل (جواب: گزینه ۴)

* هر دو دایره با شعاع‌های مختلف در صفحه، تصویر هم در یک تجانس مستقیم و معکوس می‌باشند.

مثال: در دایره با شعاع‌های ۶ و ۴ تصویر یکدیگر در یک تجانس مستقیم و معکوس هستند. اگر فاصله مراکز در دایره برابر ۱۰ باشد، آن‌گاه فاصله مراکز تجانس‌ها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴ (جواب: گزینه ۱)

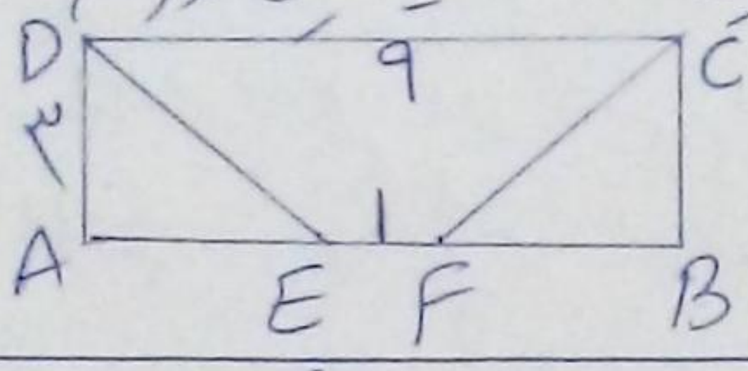
مثال: مطابق شکل مقابل اگر اندازه زاویه O برابر 114° باشد و نقطه ثابت A، B در درون آن باشند، در مسیری که مسیر AMNB کوتاه‌ترین باشد، آن‌گاه زاویه برخورد خط‌های شامل MA، NB کدام است؟



۱) 52° ۲) 46° ۳) 48° ۴) 54° (جواب: گزینه ۳)

Scanned by TapScanner

مثال: مطابق شکل اضلاع مستطیل ABCD برابر ۹ و ۳ سانتی‌متر است. اگر مانند شکل دو رئوس نقطه CDEF برابر ۱=EF باشد، آن‌گاه کمترین مقدار محیط این دو رئوس کدام است؟

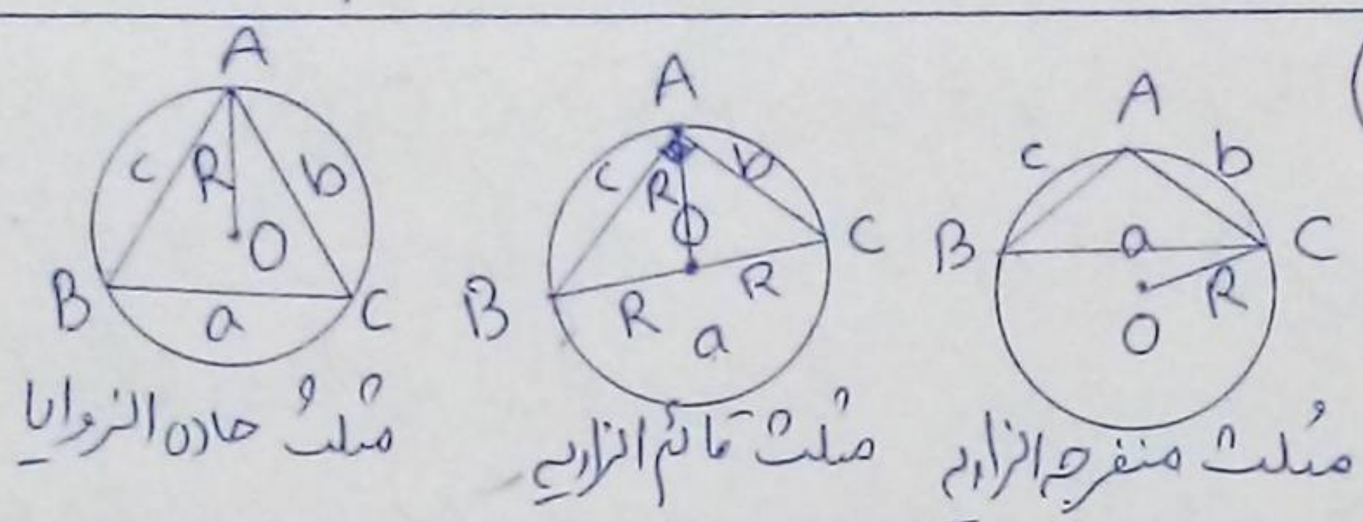


۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۱۶ (جواب: گزینه ۴)

$(a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A)$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

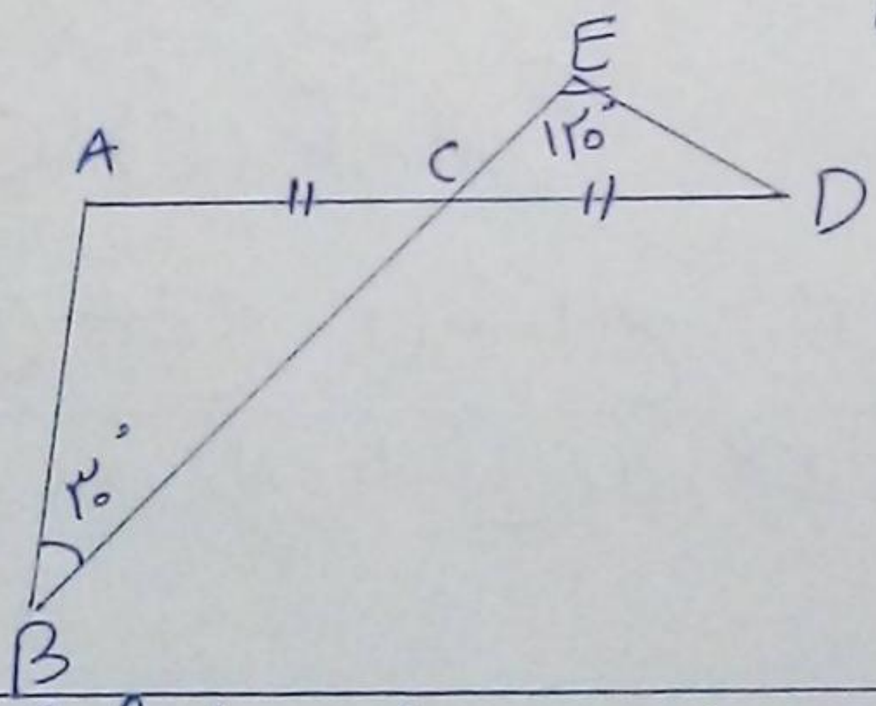
(اثبات به عنوان تمرین)



مثال: در مثلث ABC، $\hat{A} = 60^\circ$ و $BC = 6$ است. مساحت دایره محیطی مثلث کدام است؟

۱) 8π ۲) 9π ۳) 12π ۴) 15π جواب: گزینه ۳

مثال: در شکل مقابل پاره‌خط AD و پاره‌خط BE در نقطه C متقاطع‌اند، به طوری که C وسط AD، $\hat{B} = 30^\circ$، و $\hat{E} = 120^\circ$ است. حاصل $\frac{AB}{DE}$ کدام است؟



۱) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$ جواب: گزینه ۴

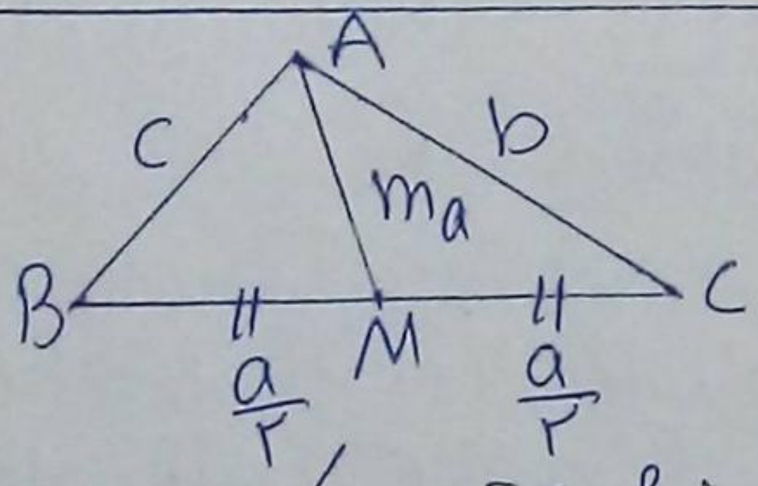
مثال: در مثلثی اندازه دو ضلع ۸ و ۶ و زاویه بین این دو ضلع، حاده است. محیط این مثلث کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۲۳/۵ ۲) ۱۵/۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴ جواب: گزینه ۱

(*میانه‌ها همدیگر را با نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند.)

میانه: m_a =

$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$



* در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

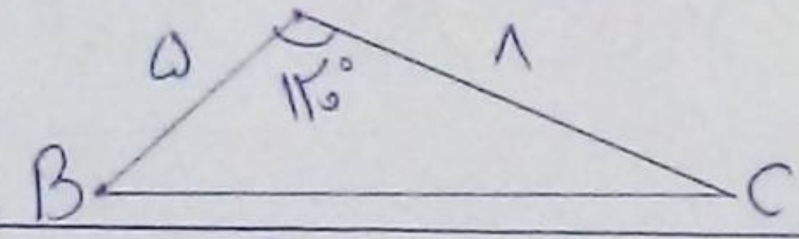
* در مثلث متساوی‌الساقین میانه مثلث را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کند.

Scanned by TapScanner

مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC (AB=AC)، اندازه میانه نظیر ساق‌ها برابر $\sqrt{3}$ و اندازه ارتفاع وارد بر قاعده برابر $\sqrt{6}$ است. مساحت مثلث کدام است؟

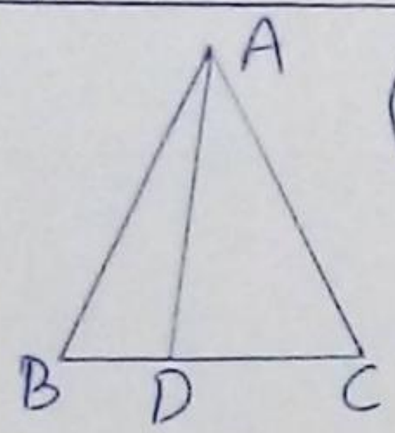
۱) ۲ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{2}$ جواب: گزینه ۱

مثال: در مثلث زیر طول میانه وارد بر ضلع BC کدام است؟



۱) ۳ ۲) $4\sqrt{3}$
۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}$

جواب: گزینه ۴

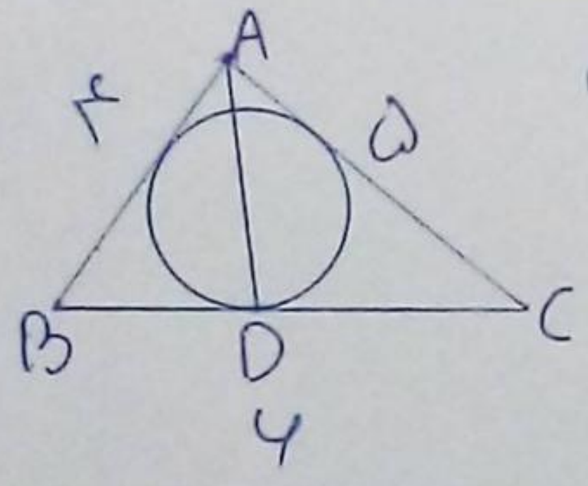


(D: نقطه دلخواه)

قضیه استوارت $\Rightarrow AB^2 \times CD + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times CD \times BC$

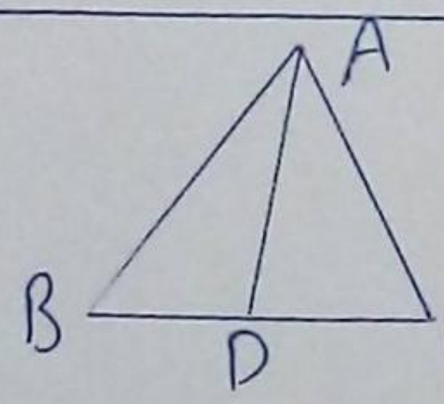
$$\Rightarrow AD^2 = \frac{BD \times AC^2 + CD \times AB^2}{BD + CD} - BD \times CD$$

مثال: در مثلث ABC (AB=۴، AC=۵، BC=۶. اگر D نقطه تماس دایره محاطی داخلی مثلث با ضلع BC باشد، طول AD کدام است؟



۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{11}$ ۳) $\sqrt{12}$ ۴) $\sqrt{13}$

جواب: گزینه ۲



* در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند. (AD= نیمساز A)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

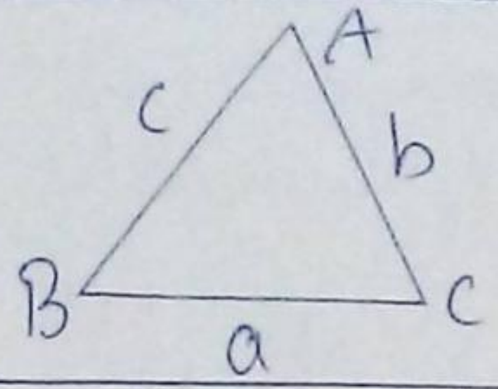
$$AD^2 = AB \times AC - BD \times CD$$

مثال: در یک مثلث اندازه دو ضلع ۵ و ۱۰، اندازه نیمساز زاویه بین این دو ضلع ۶ است. اندازه ضلع سوم مثلث کدام است؟

۱) $2\sqrt{7}$ ۲) $3\sqrt{7}$ ۳) $3\sqrt{6}$ ۴) $4\sqrt{2}$

جواب: گزینه ۲

Scanned by TapScanner



$p = \frac{a+b+c}{2}$ (نصف محیط) ، $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = \frac{1}{2} b.c.\sin A$

مثال: اندازه اضلاع مثلثی ۷ و ۱۵ و ۲۰ است. طول بزرگترین ارتفاع مثلث کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۹

جواب: گزینه ۱

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ⇒ مساحت مثلث متساوی الاضلاع، a ضلع

Scanned by TapScanner

ماتریس مربعی = تعداد سطرها و ستون‌ها برابر باشد.

$[a_{ij}]_{m\times n}$ (شمار سطر، شمار ستون)

ماتریس سطری = ماتریسی که فقط یک سطر دارد

ماتریس ستونی = ماتریسی که فقط یک ستون دارد

ماتریس قطری = ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر هستند.

ماتریس ایکالر = ماتریس قطری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر هستند.

ماتریس واحد یا همانی = ماتریس مربعی که تمام درایه‌های روی قطر اصلی ۱ و بقیه صفر هستند.

ماتریس صفر = ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد.

---

* دو ماتریس هم مرتبه را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

* جمع دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبه باشند و درایه‌های آن‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم.

(خاصیت جابجایی دارد: $A+B=B+A$)

---

* قرینه یک ماتریس: $(-A)$ درایه‌هایش قرینه می‌شوند. $A+(-A)=\overline{0}$ (ماتریس صفر)

* تفاضل دو ماتریس: درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر از هم کم می‌شوند.

* ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس: ضرب عدد حقیقی در تمام درایه‌های ماتریس.

---

* ضرب ماتریس‌ها: ضرب سطر در ستون (سطر ماتریس اول، ستون ماتریس دوم)

$A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}$

(باید برابر باشند)

(خاصیت جابجایی ندارد: $A\times B\neq B\times A$)

$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$

(* می‌توان رساندن ماتریس‌ها)

---

* حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $B\times A$ = حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $A\times B$

Scanned by TapScanner

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}4&1\\3&2\end{bmatrix}$ ، $BxA^n=\begin{bmatrix}4&41\\3&32\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۸ ۴) ۱۰ جواب: گزینه ۴

---

* اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه A^n کافی است که درایه‌های قطر اصلی A را به توان n برسانیم.

* حاصل ضرب دو ماتریس قطری: درایه‌های روی قطر اصلی را نظیر به نظیر در هم ضرب می‌کنیم.

خاصیت تعویض پذیری دارد ($AxB=BxA$ در ماتریس‌های قطری A,B هستند)

$$(A\pm B)^2=A^2\pm AxB\pm BxA+B^2$$

$$(I+A)^3=(I+A)(I+2A+A^2)=A^3+3A^2+3A+I$$

⋮

(اتحادهای جبری بین ماتریس‌ها: اتحاد مربع، مکعب، مزدوج، چاق و لاغر)

(خاصیت تعویض پذیری ندارد)

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\longrightarrow A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{0}$$

---

* دترمینان ماتریس $2x2$:

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\longrightarrow |A|=ad-bc$$

(دترمینان ماتریس $2x2$)

یک سطر یا یک ستون را هم دلخواه انتخاب می‌کنیم، درایه‌ها را یکی در میان مثبت و منفی می‌گذاریم و بسط دترمینان را اصلاح می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}\oplus a&\ominus b&\oplus c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$

(سطر اول انتخاب شده است)

* جهت ساده شدن محاسبات برای بدست آوردن دترمینان، بهتر است سطر یا ستونی انتخاب شود که بیشترین تعداد صفر را دارد.

---

* اگر مضربی از یک سطر یا یک ستون را با سطر یا ستونی دیگر جمع (یا تفریق) کنیم، حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند.

Scanned by TapScanner

* اگر دو سطر (یا دو ستون) ماتریس با هم برابر باشند و یا یکی از سطرها (ستون‌ها) صفر باشد، حاصل دترمینان برابر صفر است.

* اگر یک سطر (یا یک ستون) ماتریسی را k برابر کنیم، دترمینان k برابر خواهد شد.

* $|A \times B| = |B \times A| = |A||B|$

* دترمینان هر ماتریس مثلثی، اسکالر برابر است با حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی آن

* اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k یک عدد حقیقی باشد: $|kA| = k^n |A|$

k^n: تعداد سطرها (یا ستون‌ها) که در k ضرب شده است (n بار)

مثال: معادله $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟

۱) بی‌شمار ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حواب: گزینه ۳

---

* اگر $A_{m \times n} \times B_{n \times m} = C_{m \times m}$ و $m > n$ باشد آن‌گاه دترمینان ماتریس C برابر صفر است

---

* $A \times B = I$ (B، A وارون یکدیگرند)، $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

جای درایه‌های روی قطر اصلی را عوض می‌کنیم، درایه‌های روی قطر فرعی را قرینه می‌کنیم.

* ماتریس A وارون پذیر است هرگاه دترمینان آن مخالف صفر باشد ($|A| \neq 0$)

$(A^{-1})^{-1} = A$ ، $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$ ، $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ، $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

مثال: اگر A یک ماتریس مربعی 2×2 و $|A| = -2$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\frac{1}{2} A^{-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) -1 (جواب: گزینه ۳)

Scanned by TapScanner

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \times B$

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

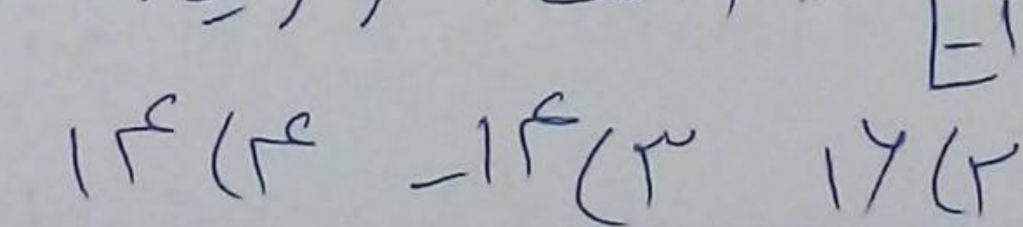
$(D=0)$ (در صورتی ماتریس وارون ندارد) یک سطر صفر از سطر دیگر است، (دو خط دارای بیشمار نقطه مشترک) هستند

$\Leftarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right) \Leftarrow$ دو خط برهم منطبق هستند و بی شمار جواب دارد.

$\Leftarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}\right) \Leftarrow$ دو خط موازی هستند و لی برهم منطبق نیستند

بنابراین در این حالت معادله جواب ندارد.

$(D \neq 0)$ معادله یک جواب منحصر بخرد دارد. (دو خط با هم متقاطع هستند)



مثال: اگر $A^2 = 2I$ باشد، آن گاه وارون ماتریس $A-I$ کدام است؟

۱) $A+\frac{1}{2}I$ ۲) $A+I$ ۳) $A-\frac{1}{2}I$ ۴) $A-I$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: اگر دستگاه $\begin{cases} mx-12y=0 \\ 4x+3y=0 \end{cases}$ دارای جواب غیر صفر باشد، آن گاه (ترجمان ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & m \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است.

(* دستگاه همگن همواره دارای جواب صفر است. (یک طرف صفر باشد))

۱) -16 ۲) 16 ۳) -14 ۴) 14 (جواب: گزینه ۳)

* فصل مشترک کره و صفحه ⇐ دایره، نقطه یا تهی، (بسته به کم و زیاد شدن شعاع دایره و فاصله تا مرکز کره ⇐ استفاده از رابطه فیثاغورس)

رویه مخروطی

⇐ فصل مشترک های رویه مخروطی با یک صفحه، مقاطع مخروطی را به وجود می آورد

Scanned by TapScanner

* هر چهارضلعی که قطرهاش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است.
* هر چهارضلعی که قطرهاش برابر و منصف هم باشند، مستطیل است.
* هر چهارضلعی که قطرهاش عمود منصف هم باشند، لوزی است.

مثال: مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $2\sqrt{3}$ مفروض است. چند نقطه روی محیط آن وجود دارد که از مرکز مثلث به فاصله $\frac{3}{4}$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴ جواب: گزینه ۳

مثال: مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر یک خط در نقطه‌ای معلوم از آن مماس‌اند، کدام است؟

۱) دایره ۲) خط ۳) یک پاره خط ۴) نیم دایره (جواب: گزینه ۲)

---

* مکان هندسی دایره * (در خط مفروض) * عمود منصف * نیمساز

مثال: مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر (در) خط متقاطع مماس‌اند، کدام است.

۱) (در) خط عمود منصف ۲) یک دایره ۳) یک خط ۴) (در) خط موازی (جواب: گزینه ۱)

مثال: اثبات کنید نقطه همرسی میانه‌های مثلث، مکان هندسی نقطه‌ای در داخل مثلث است که اگر آن را به راس‌های مثلث وصل کنیم، سه مثلث با مساحت‌های برابر ایجاد می‌شود.

معادله استاندارد دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ ، فاصله دو نقطه از هم $=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

(R شعاع دایره، (α,β) مرکز دایره)

مثال: معادله دایره‌ای که نقاط $A(-1,2)$ و $B(3,4)$ دو سر قطر AB از آن است، کدام است؟

۱) $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ ۲) $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ (جواب: گزینه ۱)

۳) $x^2+y^2+2x-6y-5=0$ ۴) $x^2+y^2+2x+4y-4=0$

* بدست آوردن نقاط درونی یک پاره خط $\Leftarrow$ با استفاده از درون‌یابی خطی

* بدست آوردن نقطه میانی یک پاره خط $\Leftarrow$ میانگین مختصات (در نقطه) $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

* تبدیل کردن معادله دایره به فرم استاندارد $\Leftarrow$ استفاده از اتحاد مربع (نقطه، دایره یا تهی)

مثال: اگر $x^2+y^2-2x+5y+m=0$ معادله یک دایره باشد، بیشترین مقدار صحیح m کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶ جواب: گزینه ۲

---

* تعیین دایره‌ای که از سه نقطه معلوم می‌گذرد $\Leftarrow$ جایگذاری در معادله دایره و تعیین پارامترها

$\Leftarrow$ رسم عمود منصف‌ها و تعیین مرکز دایره و شعاع

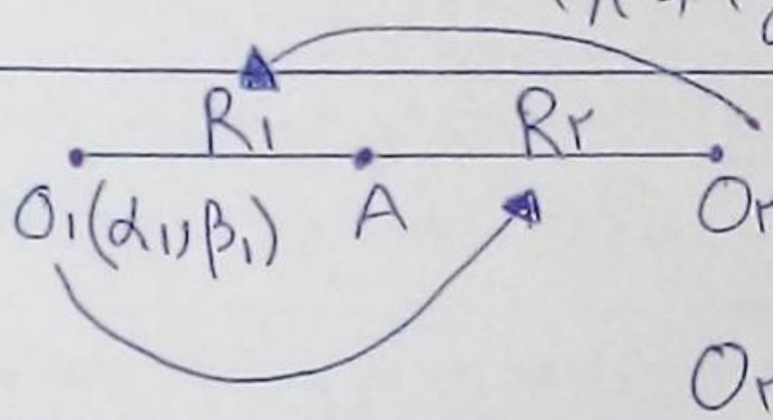
Scanned by TapScanner

فاصله نقطه (α,β) از خط $ax+by+c=0$ $= \dfrac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال: معادله دایره‌ای که مرکز آن $O(1,0)$ بوده و روی خط به معادله $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند، کدام است؟

۱) $2x^2+2y^2-4y-3=0$ ۲) $2x^2+2y^2-4y-1=0$ (جواب: گزینه ۱)

۳) $2x^2+2y^2-4y-5=0$ ۴) $2x^2+2y^2-4y-7=0$



مرکز آورانِ O_1, O_2 و نقطه A در امتداد خطی بین دو نقطه

مختصات نقطه A

$\Rightarrow OA = \dfrac{O_1 \times R_2 + O_2 \times R_1}{R_2 + R_1}$

مثال: به ازای کدام مقدار a دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-2x+a=0$ مماس داخل هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -2 ۴) -3 (جواب: گزینه ۴)

مثال: به ازای کدام مقدار k، خط $3x+4y+k=0$ بر دایره $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ مماس است؟ ۱) ۵ ۲) ۳ ۳) -5 ۴) -3 (جواب: گزینه ۱)

* دو خط که بر هم عمود هستند، حاصل ضرب شیب خط‌هایشان -1 است. $m \perp m' \Rightarrow mm' = -1$

مثال: معادله خط حائل بر دایره $x^2+y^2+8x-10y+32=0$ که بر خط $x+y=0$ عمود باشد کدام است؟

۱) $y=-x+9$ ۲) $y=x+9$ ۳) $y=-x+1$ ۴) $y=x+1$ (جواب: گزینه ۲)

* دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره از یک نقطه معلوم (در سر قطر دایره هستند)

مثال: معادله دایره‌ای که مرکزش روی خط $x+y=2$ بوده و بر محورهای مختصات مماس است، کدام است؟

۱) $x^2+y^2-2x-2y-1=0$ ۲) $x^2+y^2+x+y+1=0$

۳) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ ۴) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ (جواب: گزینه ۴)

* وضعیت یک نقطه و دایره: معادله دایره را به صورت $F(x,y)=0$ می‌نویسیم (مربعات x و y مثبت باشند) نقطه را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم و با استفاده از اعداد مثبت و منفی به دست آمده وضعیت را تعیین می‌کنیم. (همه را به یک طرف منتقل می‌کنیم)

⊕ خارج ⊖ داخل ⊜ محیط دایره

Scanned by TapScanner

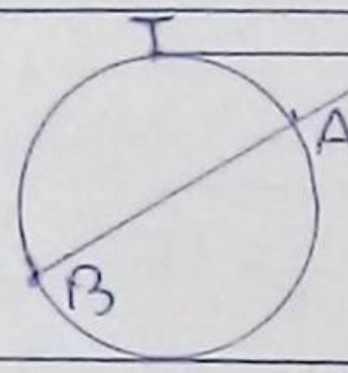
مثال: نقطه $(2,1)$ خارج دایره $x^2+y^2+3x+5y+k=0$ است، حدود عدد k کدام است؟

۱) $k>16$ ۲) $k<-16$ ۳) $-16<k<\frac{17}{2}$ ۴) $-16<k<24$

جواب: گزینه ۳

مثال: از نقطه $A(2,3)$ در مماس بر دایره $(x+2)^2+y^2=9$ رسم کرده‌ایم. اندازه پاره‌خط واصل بین دو نقطه تماس کدام است؟

۱) $5\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{8}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{6}$ (جواب: گزینه ۲)



$MT^2=MA\times MB$

فاصله در خط موازی $= \frac{|C-C'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\begin{cases} ax+by+C=0 \\ ax+by+C'=0 \end{cases}$

مثال: معادله دایره‌ای که مرکز آن روی خط $y=2x-3$ قرار دارد و بر دو خط به معادله $y=-x$, $y=-x+4$ مماس می‌باشد، کدام است؟

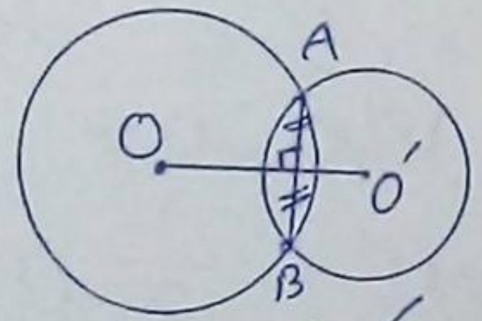
۱) $x^2+y^2-8x-4y+2=0$ ۲) $x^2+y^2-8x-4y+1=0$ ۳) $2x^2+2y^2-8x-4y+1=0$ ۴) $x^2+y^2-8x+4y-2=0$ (جواب: گزینه ۱)

$D:ax+by+C=0$, $D':a'x+b'y+C'=0$ $\Rightarrow \frac{ax+by+C}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+C'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$ معادله‌های نیمسازهای زوایای بین دو خط

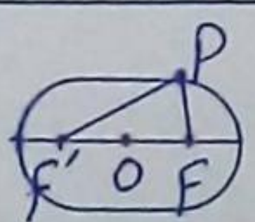
* کوتاهترین وتر گذرنده بر نقطه A داخل یک دایره، وتری است عمود بر قطری از دایره که از نقطه A می‌گذرد.

* برای نوشتن معادله خط شامل این وتر مشترک، کافی است عبارات درجه اول را از معادلات دو دایره حذف کنیم.

* در صورتی که نقاط A, B را در اختیار نداشته باشیم نیز می‌توانیم معادله خط وتر مشترک را بنویسیم



خط المرکزین عمود منصف وتر مشترک می‌باشد



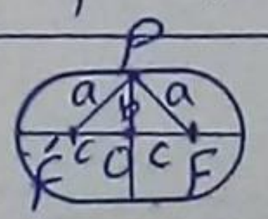
$FF'=2C$, $O=$ مرکز بیضی

$FP+FP=2a$ (عدد ثابت بیضی) , $a>C$ و a,b,c فیثاغورس

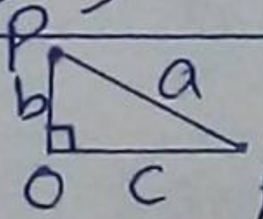
فاصله کانونی

وسط فاصله کانونی

کانون‌های بیضی



$\Rightarrow$

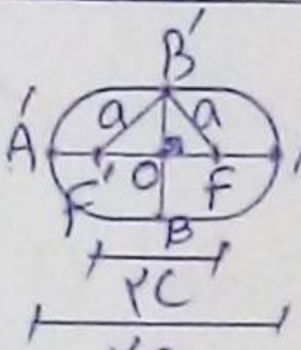


این مقدار همواره ثابت است.

Scanned by TapScanner

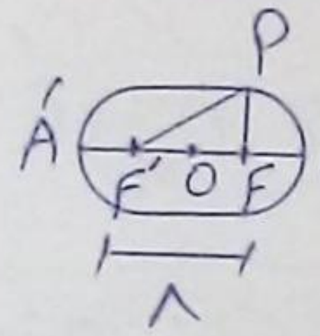
* $FP+Ff' > 2a$ ، نقطه P خارج از بیضی
$FP+Ff' = 2a$ ، نقطه P روی بیضی
$FP+Ff' < 2a$ ، نقطه P درون بیضی

* بیضی: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل شان از دو نقطه ثابت (F, F') مقدار ثابت ($2a$) باشد.



$2a$ (قطر بزرگ) $\Rightarrow AA'$
$2b$ (قطر کوچک) $\Rightarrow BB'$
$\Rightarrow (a^2 = b^2 + c^2)$ رابطه فیثاغورس بین (OFB')

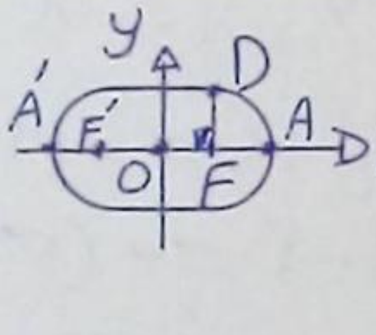
مثال: در بیضی مقابل نسبت طول قطر کوچک به بزرگ کدام است؟



$(FP=6, Ff'=8)$

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$ (جواب: گزینه ۳)

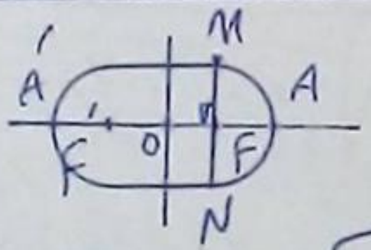
مثال: مطابق شکل قطرهای بیضی مرکزهای مخروطات چنان منطبق اند که صدا مخروطات مرکز بیضی است. اگر $OF = FA = 2$ کانون باشد آن‌گاه مجموع مخروطات نقطه D کدام است؟



۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۱)

---

* اگر وتر کانونی بر قطر بزرگ آن عمود باشد آن‌گاه از همه وترهای کانونی دیگر، کوتاه‌تر است.



مثال: ثابت کنید طول کوتاه‌ترین وتر کانونی از رابطه $MN = \frac{2b^2}{a}$ بدست می‌آید.

مثال: در یک بیضی دو سر کوتاه‌ترین وتر کانونی و کانون دیگر تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع می‌دهند. حاصل $\frac{c}{a}$ کدام است؟

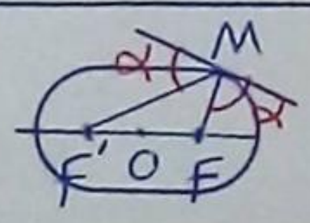
۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{2}{3}$ (جواب: گزینه ۱)

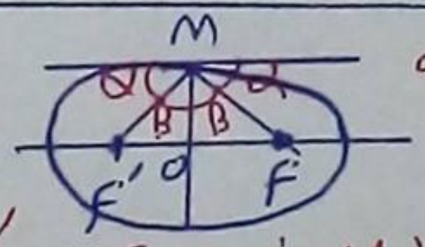
$e = \frac{c}{a}$ $(0 < e < 1)$ خروج از مرکز بیضی

$\begin{pmatrix} e=1 \\ \text{پاره خط} \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} e=0 \\ \text{دایره} \end{pmatrix}$

---

* اگر پرتو داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر پرتو بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کانون دیگر می‌گذرد.





$\alpha + \beta = 90$

* خط عمود بر بیضی در نقطه M، نیمساز MF و Mf' است.

Scanned by TapScanner

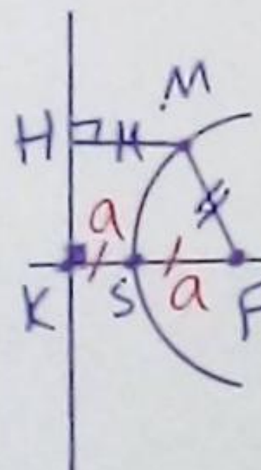
مثال: کانون های یک بیضی نقاط $F'(0,-2)$ و $F(0,4)$ هستند. از نقطه $M(2,4)$ روی آن مماسی بر بیضی رسم می کنیم. اگر در این نقطه خطی بر مماس عمود کنیم. ماصله کانونی را در نقطه D قطع می کند. حاصل $\frac{DF}{DF}$ کدام است؟

۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ (جواب: گزینه ۴)

سهمی: مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه، به یک فاصله باشند. نقطه ثابت کانون سهمی و خط ثابت، خط هادی سهمی نامیده می شود.

* فاصله کانونی سهمی: $(SF=a)$ کانون سهمی $F=$ راس سهمی $S=$

* فاصله کانون تا خط هادی سهمی برابر $KF=2a$ است.



⊕ دهانه رو به راست
⊖ دهانه رو به چپ
سهمی افقی
$(y-\beta)^2 = \pm 4a(x-\alpha)$

⊕ رو به بالا
⊖ رو به پایین
سهمی قائم
$(x-\alpha)^2 = \pm 4a(y-\beta)$

معادله سهمی با راس $S(\alpha,\beta)$

* اگر بدنه یک سهمی، آینه‌ای باشد و از کانون سهمی، شعاع نوری بر بدنه آن تابیده شود، انعکاس نور موازی محور سهمی تابیده می شود و برعکس.

مثال: از کانون سهمی به معادله $y^2-2y+8x+9=0$ خطی عمود بر محور آن رسم می کنیم. اگر نقاط برخورد این خط با سهمی را M و N بنامیم، طول پاره خط MN کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۲ جواب: گزینه ۱

مثال: مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از نقطه $(2,3)$ می گذرند بر خط $y=-1$ مماس هستند، کدام است؟

۱) $(x-3)^2=6(y-\frac{1}{2})$ ۲) $(y-2)^2=-6(x-3)$
۳) $(y-2)^2=6(x-3)$ ۴) $(x-3)^2=-6(y-\frac{1}{2})$

(جواب: گزینه ۱)

Scanned by TapScanner

مثال: به ازای چه مقادیری از x رابطه $|x-1|<|x+1|$ برقرار است؟ جواب: $(x>0)$

مثال: به ازای کدام مقدار m نقطه $A(m-1, 2m-4)$ بالای محور xها و در نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

۱) $1<m<3$ ۲) $2<m<3$ ۳) $0<m<1$ ۴) $m>0$ جواب: گزینه ۱

مثال: مساحت ناحیه بردار رابطه‌های $x+y\geq 2$ ، $x^2+y^2\leq 4$ ، کدام است؟

۱) $2-\pi$ ۲) $1-\frac{\pi}{2}$ ۳) $2\pi-2$ ۴) $2\pi-4$ جواب: گزینه ۱

مثال: مساحت ناحیه بردار رابطه‌های $x^2+y^2\leq 16$ و $x^2+y^2-4x\geq 0$ کدام است؟

۱) 8π ۲) 12π ۳) 10π ۴) 15π جواب: گزینه ۲

فاصله بین دو نقطه در فضای R^3 $=\sqrt{5x^2+5y^2+5z^2}$

مثال: نقطه $P=(-6,6,-6)$ مفروض است. اگر تصاویر قائم P را بر محورهای مختصات نقاط A، B، C فرض کنیم. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $9\sqrt{3}$ ۲) $36\sqrt{3}$ ۳) $18\sqrt{3}$ ۴) $27\sqrt{3}$ جواب: گزینه ۳

مثال: اگر نقطه $M=(\cos^2\alpha, \frac{1}{2}+\sin^2\alpha, 1)$ روی صفحه yoz باشد، فاصله M از مبدا مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{1}{2}$ جواب: گزینه ۲

* قرینه یک نقطه نسبت به محورهای مختصات * مختصات وسط یک پاره خط $(\frac{A+B}{2})$

محور xها، yها، zها

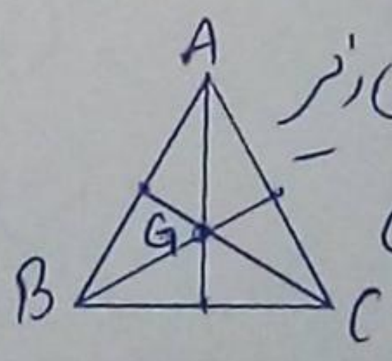
* قرینه نقطه نسبت به مبدا مختصات * قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

* قرینه یک نقطه نسبت به یک خط * قرینه یک نقطه نسبت به صفحات متوازی صفحه‌های مختصات

* به طور کلی نقاط A، B، C و D راس‌های یک متوازی الاضلاع‌اند، اگر و تنها اگر $\frac{A+C}{2}=\frac{B+D}{2}$

* اگر A، B، C راس‌های یک مثلث باشند، محل برخورد میانه‌ها (مرکز ثقل مثلث) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$G=\frac{A+B+C}{3}$$



مختصات مرکز ثقل ⟵ متوازی الاضلاع

Scanned by TapScanner

مثال: اگر $M_1=(۱,۰,۲)$ ، $M_2=(۰,۱,۲)$ و $A=(۲,۱,۱)$ سه نقطه در فضا باشند و قرینه A نسبت به نقطه M_1 نقطه B و قرینه B نسبت به نقطه M_2 نقطه C باشد. آن‌گاه طول پاره‌خط AC کدام است؟ ($AC=?$)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

جواب: گزینه ۲

مثال: قرینه نقطه $A(۳,۱,-۲)$ نسبت به صفحه yoz ، B و قرینه B نسبت به محورهای مختصات را C می‌نامیم. مجموع مولفه‌های نقطه C کدام است؟ ۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۶-

جواب: گزینه ۱

مثال: قرینه نقطه $M=(۱,۲,-۲)$ نسبت به صفحه $z=۳$ ، نقطه M' می‌نامیم. فاصله M' از صفحه به معادله $y=-۲$ کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب: گزینه ۳

---

* معادلات خط‌های موازی محورهای مختصات یا عمود بر صفحه‌های مختصات

مثال: نقطه A روی خط $\begin{cases}x=-۱\\z=۳\end{cases}$ و نقطه B روی خط $\begin{cases}y=-۲\\z=۴\end{cases}$ قرار دارد. کوتاه‌ترین طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۱

جواب: گزینه ۲

⊛ طول بردار (رابطه فیثاغورس) ⊛ تساوی دو بردار (مولفه‌های آن‌ها نظیر به نظیر برابر باشند)

⊛ ضرب یک عدد در بردار (در صورتی که عدد منفی باشد، جهت بردار عوض می‌شود)

⊛ موازی بودن دو بردار (یکی مضربی از دیگری باشد) ⊛ جمع دو بردار (روش متوازی الاضلاع)

مثال: اگر دو بردار $\vec{a}=(m,۱)$ ، $\vec{b}=(۵,۳m+۱۴)$ موازی باشند، اندازه بردار $\vec{b}$ کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۵}$ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

جواب: گزینه ۳

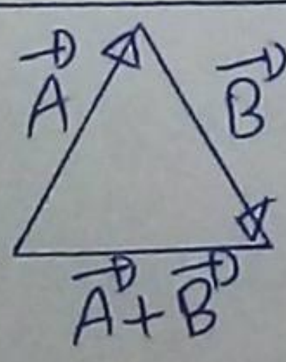
مثال: بردارهای غیرصفر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ غیرموازی‌اند. اگر بردارهای $\vec{u}=۳\vec{a}+x\vec{b}$ و $\vec{v}=(۱-x)\vec{a}-\frac{۲}{۳}\vec{b}$ موازی و هم‌جهت باشند، x کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

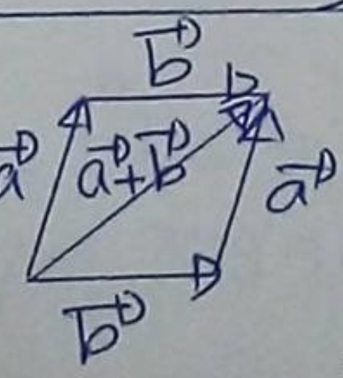
جواب: گزینه ۳

---

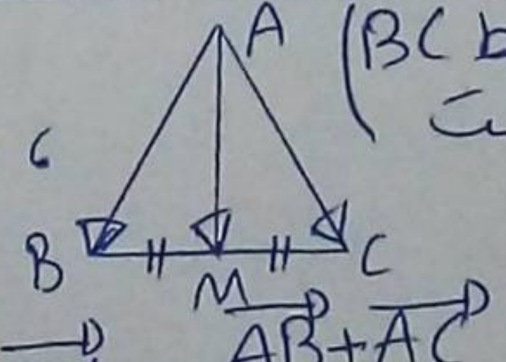
* جمع و یا تفریق بردارها: مولفه‌های آن‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع و یا از هم کم می‌کنیم.



،



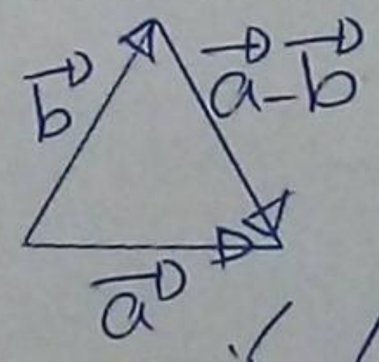
،



(BC با M است)

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{۲}$$

،



Scanned by TapScanner

مثال: اگر $\vec{a}=(\frac{\pi}{2}, 8)$، $\vec{b}=(1, x)$ و دو بردار $\vec{a}-2\vec{b}$ و $\vec{a}+2\vec{b}$ موازی باشند آن‌گاه مقدار x کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴± ۳) ۳ ۴) ۴-

جواب: گزینه ۴

مثال: اگر G نقطه برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد حاصل $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$ کدام است؟ (O نقطه دلخواه)

۱) $\vec{0}$ ۲) $\vec{OG}$ ۳) $3\vec{OG}$ ۴) $2\vec{OG}$ جواب: گزینه ۳

* مختصات برداری که ابتدا و انتهای آن در نقطه معلوم باشد (انتها منهای ابتدا)

$\vec{AB}=B-A=\vec{OB}-\vec{OA}$ (مبدا مختصات $=O$)

مثال: نقطه P روی پاره خط AB واقع است، به طوری که $\vec{AP}=\frac{2}{3}\vec{PB}$. اگر O مبدا مختصات باشد، در این صورت داریم $\vec{OP}=m\vec{OA}+n\vec{OB}$

$\vec{AP}=\frac{2}{3}\vec{PB}$

حاصل $m-n$ کدام است؟ ۱) ۱/۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۱ جواب: گزینه ۲

مثال: اگر سه نقطه $A=(a, 1)$، $B=(2, a+1)$ و $C=(3, 3)$ روی یک خط باشند.

آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵ جواب: گزینه ۲

مثال: بردار $\vec{a}=(1, 0, 2)$، موازی صفحه xOz است.

* مثال: بردار $\vec{a}=(0, 0, -1)$، عمود بر صفحه xOy و موازی محور zها است.

محور zها

* تصویر یک بردار بر صفحات مختصات * تصویر یک بردار بر محورهای مختصات

* تصویر یک بردار بر صفحات مختصات

مثال: اگر $A=(-3, 6, 9)$، $B=(6, 18, 14)$ و $2\vec{AC}=3\vec{BC}$، آن‌گاه $|\vec{OC}|$ کدام است؟ ($|\vec{OC}|$ طول بردار $\vec{OC}$?)

۱) ۶۰ ۲) ۶۴ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴ جواب: گزینه ۴

مثال: نقطه A روی خط $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ و نقطه B روی خط $\begin{cases} z=-1 \\ x=3 \end{cases}$ قرار دارد. اگر بردار $\vec{AB}$ موازی بردار $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ باشد، آن‌گاه طول بردار $\vec{AB}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$ جواب: گزینه ۲

Scanned by TapScanner

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 120° است. اگر $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=4$، حواب انداره بردار $\frac{3}{2}\vec{b}-2\vec{a}$ کدام است؟ ۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{85}$ ۳) 9 ۴) $6\sqrt{3}$ گزینه ۴

* در متوازی الاضلاع قطرها حداره منصف همدیگر هستند.

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$ (لوزی)

$\theta=90^\circ$ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ (مستطیل)

$90^\circ<\theta<180^\circ$ $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$

$0<\theta<90^\circ$ $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$

* $\vec{a}+\vec{b}$ نیاز بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است، اگر و تنها اگر $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

* برای بدست آوردن نیاز بین دو بردار، ابتدا بردارها را به بردار یکه تبدیل می‌کنیم سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم

راستای نیاز زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ $\vec{v}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

مثال: اگر اندازه سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر و $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ باشد، آن‌گاه زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟ ۱) 0° ۲) 60° ۳) 120° ۴) 90° (جواب: گزینه ۳)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

* $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$

ضرب داخلی هر بردار در خودش

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\vec{a}\times\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ ($\sin\theta$)

* $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

* حاصل ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است.

مثال: روابط زیر را اثبات کنید:

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

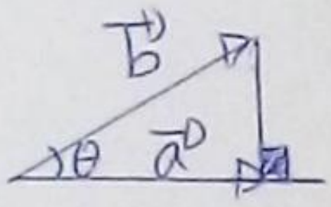
$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{b})$

مثال: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار به طول‌های ۲ باشند به طوری که $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$، حاصل $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$ کدام است؟ ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ (جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

مثال: اندازه بردار $\vec{b}$ دو برابر اندازه بردار $\vec{a}$ است. اگر زاویه بین دو بردار 120° باشد، به ازای کدام مقدار x دو بردار $\vec{a}+x\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمودند؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$ جواب: گزینه ۲

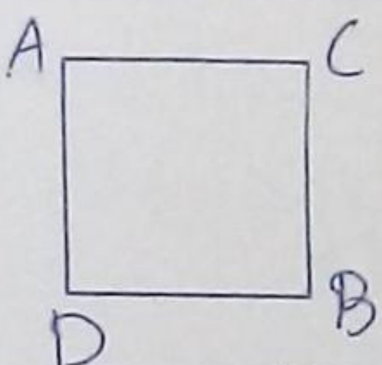


$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|^2,\ \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

($|\vec{b}|\cos\theta$ = تصویر $\vec{b}$ روی $\vec{a}$ = $|\vec{a}|$)

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

مثال: در مربع ABCD به قطر ۲ حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ کدام است؟ ۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$



جواب: گزینه ۱

مثال: اگر $\vec{a}=(m,-2)$ و $\vec{b}=(1,m,3)$ اضلاع یک مستطیل باشند، آن‌گاه کسینوس زاویه بین دو قطر مستطیل کدام است؟

۱) $-\frac{3}{33}$ ۲) $-\frac{5}{33}$ ۳) $-\frac{3}{11}$ ۴) $-\frac{4}{33}$ جواب: گزینه ۱

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\Rightarrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\underbrace{\frac{a_1}{|\vec{a}|}}_{\cos\theta_x},\underbrace{\frac{a_2}{|\vec{a}|}}_{\cos\theta_y},\underbrace{\frac{a_3}{|\vec{a}|}}_{\cos\theta_z}\right)=(\cos\theta_x,\cos\theta_y,\cos\theta_z)$$

($\theta_x,\theta_y,\theta_z\Rightarrow$ زاویه بردار با محورهای x,y,z)

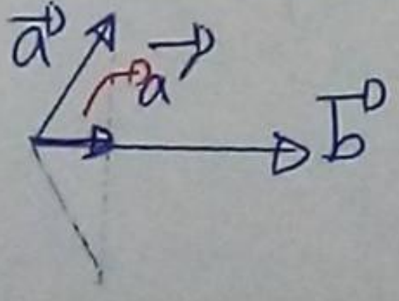
(بردار هادی = بردار یکه)

$$\Rightarrow(\cos^2\theta_x+\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=1)$$

مثال: اگر $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$ و $|\vec{b}|=2\sqrt{3}$ و زوایای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با محورها 45° و 30° باشد، آن‌گاه طول تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بر محور yها کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ جواب: گزینه ۳

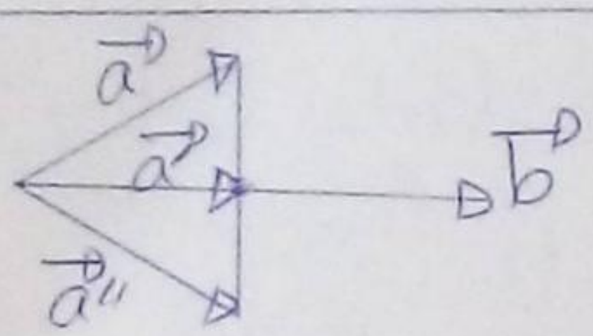
مثال: نشان دهید تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ برابر است با:



$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

* اگر بردار $\vec{b}$ را در عددی ضرب کنیم، مقدار $\vec{a'}$ تغییری نمی‌کند. (فقط به راستای بردار $\vec{b}$ بستگی دارد)

Scanned by TapScanner



$$\vec{a'} = \frac{\vec{a} + \vec{a''}}{2} \quad , \quad \vec{a''} = \frac{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b} - \vec{a}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{a''}| \quad , \quad (\vec{a''} = 2\times\vec{a'} - \vec{a})$$

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 60° و $|\vec{a}|=6$ است. اگر $\vec{a'}$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ باشد. حاصل $\vec{a}\cdot\vec{a'}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۲ (جواب: گزینه ۲)

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \le |\vec{a}||\vec{b}| \quad , \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\Rightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \times \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

* نامساوی رقمی برقرار است که $\cos\theta = 1$ باشد، $(\vec{a} \parallel \vec{b}) \Leftarrow \theta = 0^\circ$ در این حالت b, a هم‌راستا می‌شوند.

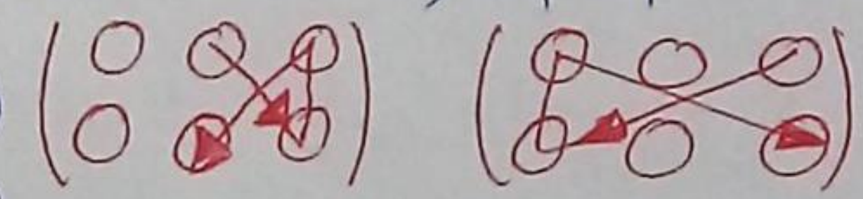
$$\Rightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

$$(-1 \le \cos\theta \le 1)$$

مثال: اگر حاصل ضرب نقطه‌ای $A=(x,y,z)$ از مبدا مختصات ۳ باشد آن‌گاه حداکثر مقدار عبارت $2x+4y+3z$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۵ ۳) ۱۹ ۴) ۲۲ (جواب: گزینه ۱)

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

(a_1, a_2, a_3)  (b_1, b_2, b_3)

* ضرب خارجی در مردار همواره یک بردار است.

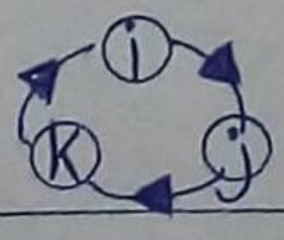
* $\vec{a}\times\vec{b}$ بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

* $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

* $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0} \quad (\theta = 0^\circ)$

* $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$

* جهت تعیین جهت $\vec{a}\times\vec{b}$ با استفاده از قاعده دست راست، چهار انگشت را در جهت $\vec{a}$ حرکتی دهیم و در جهت بردار $\vec{b}$ خم می‌کنیم، جهت انگشت شصت، جهت $\vec{a}\times\vec{b}$ را نشان می‌دهد.



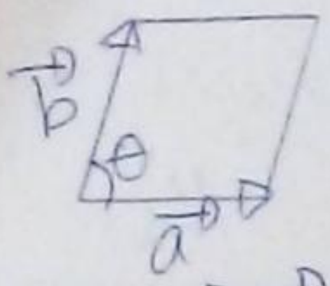
$$(*\ |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)$$

Scanned by TapScanner

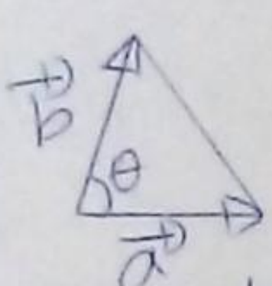
مثال: اگر $\vec{a}=(1,2,3)$ و $\vec{b}=(2,-1,1)$ آنگاه $|(\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+3\vec{b})|$ چقدر است؟

۱) $21\sqrt{3}$ ۲) $42\sqrt{3}$ ۳) $28\sqrt{3}$ ۴) $35\sqrt{3}$

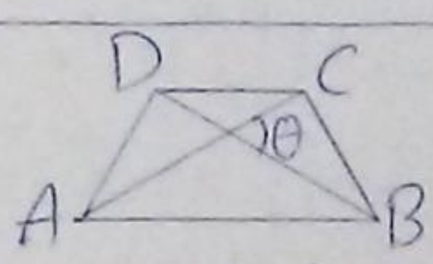
جواب: گزینه ۴



$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$
$=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$
(متوازی الاضلاع)



$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$
$\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$
(مثلث)



$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$
$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|\sin\theta$
(مساحت چهارضلعی دلخواه)

$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$, $\tan\theta=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$

(*اثبات به عنوان تمرین)

مثال: اگر $|\vec{a}|=2$ ، $|\vec{b}|=3$ و $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ آنگاه $|\vec{a}\times\vec{b}|$ کدام است؟

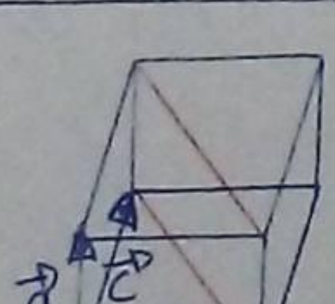
۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $5\sqrt{3}$ (جواب: گزینه ۱)

ضرب مختلط سه بردار: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

* سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم صفحه‌اند، اگر و تنها اگر ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد.
* در صورتی که سه بردار دارای یک ترکیب خطی با ضرایب غیرصفر باشند که حاصل عبارت برابر صفر شود (یا بتوان یک بردار را براساس یک ترکیب خطی بیان کرد) بقیه بردارها هم‌صفحه‌اند.

آن‌گاه نیز می‌توانیم بگوییم که سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ هم صفحه‌اند

$\Leftrightarrow$
- $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ (یک ترکیب خطی برابر با بردار صفر)
- $\vec{c}=m'\vec{a}+n'\vec{b}$ (یکی از بردارها را بتوانیم براساس یک ترکیب خطی بقیه بردارها بنویسیم)



* حجم متوازی السطوح $V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$
* ارتفاع وارد بر قاعده شامل بردارهای $\vec{b}$، $\vec{c}$: $\frac{|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$
* حجم منشور مثلث‌القاعده: $\frac{1}{2}V$
* حجم هرم: $\frac{1}{6}V$

Scanned by TapScanner

* گزاره: جمله‌ای خبری است. (هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش T یا F را داشته باشد)
* اگر n گزاره داشته باشیم، جدول ارزش آن گزاره‌ها دارای 2^n حالت است.

* گزاره نما: جمله‌ای خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود. * دامنه متغیر گزاره نما * مجموعه جواب گزاره نما

* نقیض یک گزاره (P یا $\sim P$) * مثال: نشان دهید $P \equiv (P$ یا $\sim P)$

* ترکیب عطفی دو گزاره ($P \wedge Q$): ارزش ترکیب عطفی دو گزاره زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره آن درست باشد و در بقیه حالات ارزش آن نادرست است. (و)

* ترکیب فصلی دو گزاره ($P \vee Q$): ارزش ترکیب فصلی دو گزاره زمانی نادرست است که ارزش هر دو گزاره آن نادرست باشد و در بقیه حالات ارزش آن درست است. (یا)

* $P \vee \sim P \equiv T$ * $P \vee T \equiv T$ * $\sim T \equiv F$ * $\sim F \equiv T$
* $P \wedge \sim P \equiv F$ * $P \wedge F \equiv F$ * $P \vee F \equiv P$ * $P \wedge T \equiv P$

* $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ * $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
* $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ * $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
* $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ * $P \vee Q \equiv Q \vee P$
* $P \vee P \equiv P$ * $P \vee (\sim P \wedge Q) \equiv P \vee Q$ * $P \wedge (\sim P \vee Q) \equiv P \wedge Q$
* $\sim (P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$ * $\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$
* $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$ * $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

* ترکیب شرطی دو گزاره: ($P \Rightarrow Q$)، ارزش ترکیب شرطی دو گزاره زمانی نادرست است که مقدم درست (تالی نادرست) باشد. در بقیه حالات ارزش آن درست است.
(مقدم: P، تالی: Q)
* اگر تالی یک ترکیب شرطی درست باشد، ارزش آن ترکیب شرطی درست است.
* اگر مقدم یک ترکیب شرطی نادرست باشد، ارزش آن ترکیب شرطی درست است.
در این حالت می‌گوییم ارزش $P \Rightarrow Q$، به انتفای مقدم درست است.

Scanned by TapScanner

* درستی گزاره شرطی $p \Rightarrow q$، درستی گزاره q را تضمین نمی‌کند

* ترکیب شرطی هر گزاره دلخواه با خودش، همیشه درست است. $(p \Rightarrow p \equiv T)$

p	q	$p \Rightarrow q$
ر	ر	ر
ر	ن	ن
ن	ر	ر
ن	ن	ر

* تبدیل گزاره شرطی به ترکیب فصلی $(p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
ر	ر	ر	ن	ر
ر	ن	ن	ن	ن
ن	ر	ر	ر	ر
ن	ن	ر	ر	ر

$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

$r \Leftarrow (b \vee d) \equiv (r \Leftarrow b) \Leftarrow d$

مثال: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \Rightarrow r) \equiv \sim p \vee (r \Leftarrow b) \Leftarrow d \equiv \sim p \vee (r \wedge \sim b) \wedge \sim d$

$r \Leftarrow (b \vee d) \equiv r \wedge (b \vee d) \sim \equiv r \wedge (b \sim \wedge d \sim) \equiv$

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge r \equiv \sim (p \wedge q) \vee r \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

* $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$

* $p \wedge (q \Rightarrow r) \not\equiv (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$

* $(r \vee d) \Leftarrow (b \vee d) \not\equiv (r \Leftarrow b) \wedge d$

* $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

* $(r \Leftarrow d) \wedge (b \Leftarrow d) \equiv (r \wedge b) \Leftarrow d$

* $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

مثال: $(r \Leftarrow d) \vee (b \Leftarrow d) \equiv (r \wedge b) \Leftarrow d$: اثبات

$(r \wedge b) \wedge d \sim \equiv (r \Leftarrow b) \wedge (b \Leftarrow d) \equiv (r \Leftarrow d) \wedge (d \sim \wedge d \sim) \equiv$

$\equiv \sim p \vee (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

$\underbrace{d \sim}$

یک گزاره همیشه درست.

$\equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$ ، $(r \Leftarrow d) \Leftarrow [(r \Leftarrow b) \vee (b \Leftarrow d)]$ *

* عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$، $p \Rightarrow q$ است. (جای مقدم و تالی را عوض می‌کنیم)

$p \Rightarrow q$ { p یک شرط کافی برای q است
q یک شرط لازم برای p است.

* ارزش ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ربطی به ارزش $q \Rightarrow p$ ندارد.

Scanned by TapScanner

نقیض یک ترکیب شرطی

$\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

$\sim(p \to q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv (\sim\sim p) \wedge (\sim q)$: اثبات

$\equiv p \wedge \sim q$

عکس نقیض یک ترکیب شرطی

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

* هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم ارز است.

ترکیب دو شرطی در گزاره

$p \leftrightarrow q \equiv [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

$p \leftrightarrow q \equiv [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

* ارزش گزاره $p \leftrightarrow q$ زمانی درست است که p و q هم ارزش باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

p	q	$p \leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

* $p \leftrightarrow \sim p \equiv F$

اگر p آن گاه q و برعکس

p اگر و تنها اگر q

p یک شرط لازم و کافی برای q است.

نقیض ترکیب دو شرطی

$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q$

$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \sim q$

$\forall x$ (همه، به ازای هر) all

$\exists x$ (وجود دارد، بعضی از) Exist

نقیض گزاره های سوری

$\sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$

$\sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$

* گزاره با سوره عمومی

* گزاره با سوره وجودی

* گزاره های سوری دوگانه (دو متغیر داشته باشد)

مجموعه ها

Scanned by TapScanner

مجموعه ها

* مجموعه همواره فاقد ترتیب و تکرار است. * (مجموعه $\in$ عضو مجموعه / عضویت ($\notin$))
* مجموعه مرجع * مجموعه تهی * نمودار ون

مثال: مجموعه $H=\left\{\frac{x^2+4}{3x+2}\in Z \mid x\in N \wedge x<5\right\}$ چند عضو دارد؟ جواب: $H=\{1\}$

$\emptyset\subseteq A$ * $A\subseteq A$ * نمودار ون * $(A\subseteq B\wedge B\subseteq C)\Rightarrow A\subseteq C$ * (مجموعه $\subseteq$ مجموعه / زیرمجموعه)

$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x\in A\Rightarrow x\in B)$ ، 2^n (تعداد زیرمجموعه ها) *
$A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x\in A\wedge x\notin B)$

* زیرمجموعه های محض یا سره: از زیرمجموعه های یک مجموعه خود آن مجموعه را کنار می گذاریم

* اگر $A\subseteq B$ و $A\neq B$، آن گاه A را زیرمجموعه محض (سره) مجموعه B می نامیم

$A=B \Leftrightarrow [\forall x;(x\in A\Leftrightarrow x\in B)]$
$A=B \Leftrightarrow [(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$

مثال: ثابت کنید اگر $A\subseteq\emptyset$، آن گاه $A=\emptyset$
مثال: ثابت کنید اگر $U\subseteq A$، آن گاه $A=U$ (U = مجموعه مرجع)

$A\cup B=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$ ، $x\in(A\cup B)\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)$

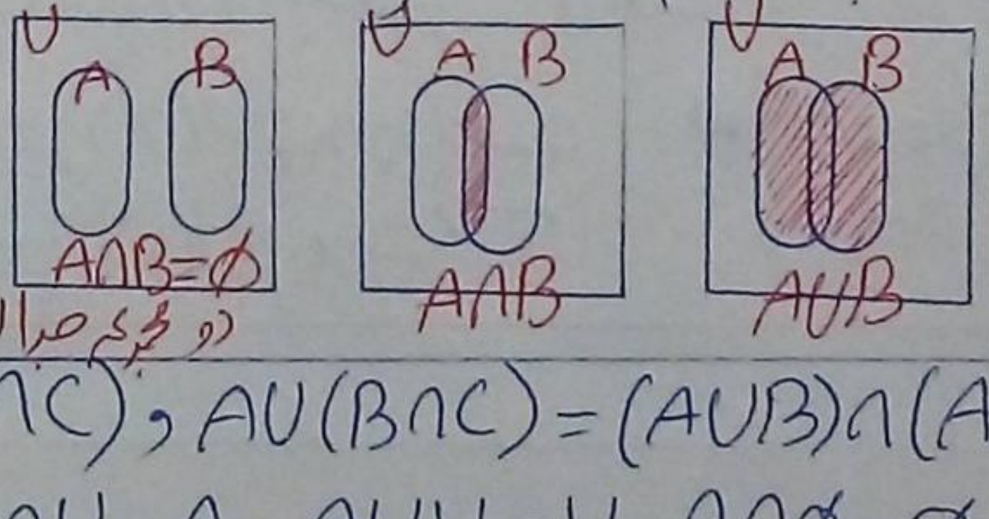
$A\cap B=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\in B\}$ ، $x\in(A\cap B)\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)$

$\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\ C\subseteq D\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}(A\cup C)\subseteq(B\cup D)\\ (A\cap C)\subseteq(B\cap D)\subseteq(B\cup D)\end{matrix}\right.$ ، ($A\cap A=A$ *, $A\cup A=A$ *)

* دو مجموعه A و B جدا از هم هستند هرگاه $A\cap B=\emptyset$

عکس آن درست نیست

$\left.\begin{matrix}A=B\\ C=D\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}A\cup C=B\cup D\\ A\cap C=B\cap D\end{matrix}\right.$



دو مجموعه جدا از هم

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ، $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A$ ، $A\cap U=A$ ، $A\cup U=U$ ، $A\cap\emptyset=\emptyset$ ، $A\cup\emptyset=A$
$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$ ، $A\cap(A\cup B)=A$ ، $A\cup(A\cap B)=A$

Scanned by TapScanner

مجموعه ها

مثال: برای سه مجموعه دلخواه A، B و C از مرجع U، حاصل عبارت
$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$ کدام است؟
۱) A ۲) B ۳) $\emptyset$ ۴) U جواب: گزینه ۲

$A\cup B=A\cap B \Leftrightarrow A=B$ ، $A\cap B=U \Leftrightarrow A=B=U$
اجتماع یا اشتراک در مجموعه زمانی برابر است که هر دو مجموعه مساوی باشند. $A\cup B=\emptyset \Leftrightarrow A=B=\emptyset$

افراز یک مجموعه { هیچکدام تهی نباشند
دو به دو از هم جدا باشند (باهم اشتراکی نداشته باشند)
اجتماع آن ها برابر مجموعه مرجع باشد.

* برای یافتن تمام افرازهای مختلف یک مجموعه n عضوی، کافی است افرازهای یک مجموعه ای، افرازهای دو مجموعه ای، ... افرازهای n مجموعه ای آن مجموعه را بیابیم.

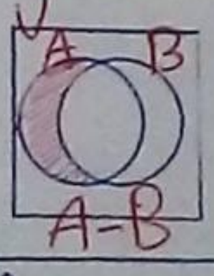
$A'=\{x \mid x\in U \wedge x\notin A\}$ ، $A=B \Leftrightarrow A'=B'$ ، $(A')'=A$ ، $U'=\emptyset$
$\emptyset'=U$ ، $A\subseteq B \Leftrightarrow B'\subseteq A'$ ، $A\cap A'=\emptyset$ ، $A\cup A'=U$
$(A\cap B)'=A'\cup B'$ ، $(A\cup B)'=A'\cap B'$

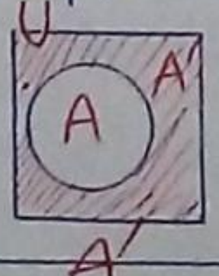
$(x\subseteq A)\wedge(x\subseteq A')\Rightarrow x=\emptyset$ ، $(A\subseteq x)\wedge(A'\subseteq x)\Rightarrow x=U$

مثال: اثبات کنید
$A\cap(A'\cup B)=A\cap B$ ، $A\cup(A'\cap B)=A\cup B$
$A'\cup B=U \Leftrightarrow A\cap B'=\emptyset$ ، $A\cap B=\emptyset \Leftrightarrow (A\subseteq B' \wedge B\subseteq A')$

مثال: برای سه مجموعه دلخواه A، B و C از مرجع U عبارت
$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]$ برابر کدام است؟
۱) A ۲) B ۳) $\emptyset$ ۴) A' جواب: گزینه ۲

$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$ ، $x\in(A-B) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B)$





* $(B-A)\subseteq B$ * $A-B=A\cap B'$
* $(A-B)\subseteq A$ * $A-B=B'-A'$

Ω

Scanned by TapScanner

مثال: نشان دهید:
* خواص تفاضل

$A-B=(A\cup B)-B$ ، $A-B=A-(A\cap B)$

$*\ A'=U-A$ ، $A-A'=A$ ، $\emptyset-A=\emptyset$ ، $A-\emptyset=A$

$A-A=\emptyset$ ، $A\cap B=\emptyset \iff (A-B=A)\wedge(B-A=B)$

$A\subseteq B \iff A-B=\emptyset$ ، $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

$A-B=B-A \iff A=B$

مثال: اگر A، B و C سه مجموعه از مرجع U باشند و $A\subseteq(B\cap C)$، آن‌گاه $(A-B)\cup(A-C)$ برابر کدام است؟

$A\subseteq(B\cap C)$

1) A 2) B 3) $\emptyset$ 4) $B\cap C$

جواب: گزینه ۳

مثال: برای سه مجموعه A، B و C از مرجع U، اگر $A-B=A-C$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

1) $B=C$ 2) $A\cap B=A\cap C$ 3) $A\cup B=A\cup C$ 4) $A\cap C=\emptyset$

جواب: گزینه ۲

---

* دو زوج مرتب با هم برابرند، اگر و تنها اگر مولفه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$ ، $(x,y)\in(A\times B)\iff(x\in A\wedge y\in B)$

$*\ n(A\times B)=n(A)\times n(B)$ $A\times B\neq B\times A$ (مگر اینکه $A=B$ یا حداقل یکی از آنها $\emptyset$ باشد.)

مثال: اگر $A=\{2,3,4,5,6\}$، $A\cap B=\{2,3\}$ و $(A-B)\times(B-A)$ دارای 6 عضو باشد، تعداد اعضای مجموعه B کدام است؟

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

جواب: گزینه ۲

$*\ A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$ $*\ A\times B=\emptyset\iff(A=\emptyset\vee B=\emptyset)$

$*\ A\times B=B\times A$ { حداقل یکی از مجموعه‌های A یا B برابر تهی باشند یا $A=B$

$*\ (A\subseteq C\wedge B\subseteq D)\iff(A\times B)\subseteq(C\times D)$

$*\ A\subseteq B\iff(A\times C)\subseteq(B\times C)$ $*\ (A=C\wedge B=D)\iff A\times B=C\times D$

$*\ A\subseteq B\iff(C\times A)\subseteq(C\times B)$ $*\ A\times C=B\times C\iff A=B$

$*\ C\times A=C\times B\iff A=B$

Scanned by TapScanner

* به جای □ می‌توان ∪، ∩ یا − قرار داد. $A\times(B\square C)=(A\times B)\square(A\times C)$

$(B\square C)\times A=(B\times A)\square(C\times A)$

$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$ * $A-B=A\cap B'$

مثال: اگر $A=\{x^2\mid x\in Z, -1\le x\le 1\}$، $B=\{x^2\mid x\in Z\wedge |x|\le 2\}$ و آن‌گاه مجموعه $(A\times B)\cap(B\times A)$ دارای چند زیرمجموعه سره غیرتهی است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶ (جواب: گزینه ۳)

احتمال

* فضای نمونه * پیشامد ($A\cup B$، $A\cap B$، A'، $A-B$، $(A-B)\cup(B-A)$)

مجموع احتمال‌ها برابر یک است * A,B دو پیشامد ناسازگارند $\iff A\cap B=\emptyset$ (جزء لازم مجزا)

* $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ * $\underbrace{P(A)}_{\text{احتمال}}=\frac{n(A)}{n(S)}$ مطلوب / کل حالات

اگر دو پیشامد ناسازگار نباشند، جزء است.

مثال: در یک کلاس ۳۲ دانش‌آموز در ۴ ردیف روی نیمکت نشسته‌اند. در تقریح تصادفی از دانش‌آموزان این کلاس انتخاب می‌شوند. احتمال این که دو نفر از یک ردیف باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{7}{15}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{7}{31}$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: روی هر یک از چند کارت مثلثی، ترکیب‌های چهارحرفی (عوض کردن ترتیب حروف، حالت جدیدی کارت جدید) را برجسته می‌کنند (ترتیب قرارگیری چهار حرف اهمیت ندارد)) از مجموعه $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ را برداشته و به تصادف یک کارت از بین آن‌ها برمی‌داریم. احتمال این که حروف a و i با هم روی این کارت باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{7}$ (گزینه ۳ = جواب)

مثال: از ظرفی شامل ۵ گوی آبی و ۲ گوی قرمز، به طور تصادفی دو گوی پی در پی بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن که هر دو هم‌رنگ باشند، کدام است؟ (گوی‌ها متمایز و ترتیب گوی‌ها اهمیت دارد.)

۱) $\frac{11}{21}$ ۲) $\frac{13}{21}$ ۳) $\frac{22}{49}$ ۴) $\frac{26}{49}$ (جواب: گزینه ۱)

Scanned by TapScanner

مثال: از ظرفی شامل ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه، به تصادف مهره‌ای برمی‌داریم و پس از مشاهده رنگ آن به کیسه برمی‌گردانیم. سپس مهره دیگری انتخاب می‌کنیم، با کدام احتمال این دو مهره هم رنگ نمی‌باشند؟ ۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{5}{9}$ (جواب گزینه ۳)

مثال: اعضای تیم والیبال، که ۱۴ نفرند و قد هیچ دو عضوی برابر نیست، به طور تصادفی یکی‌یکی وارد سالن می‌شوند. احتمال آن که اولین کسی که وارد می‌شود بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ ۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{14}$ ۳) $\frac{2}{7}$ ۴) $\frac{1}{2}$ (جواب گزینه ۲)

$P(A') = 1 - P(A)$ ، $P(A \cap B) = 0$ ، $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

($A \cap B = \emptyset$ دو پیشامد ناسازگارند)

$B \subseteq A \Longrightarrow P(A-B) = P(A) - P(B)$ * $P(B) \leq P(A \cup B)$

$B \subseteq A \Longleftarrow P(B-A) = 0$ * $P(A) \leq P(A \cup B)$ * $P(A \cap B) \leq P(B)$

$B \subseteq A \Longrightarrow P(B) \leq P(A)$ * $P(A \cap B) \leq P(A)$ * $P(B-A) \leq P(B)$

برعکس آن نادرست. * $P(A-B) \leq P(A)$ * $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$

(درست نیست.) * $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

مثال: (در پرتاب دو تاس سالم باهم) با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۱۰ می‌باشد.
۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{2}{3}$ (جواب: گزینه ۳)

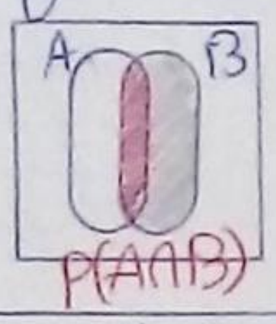
مثال: اگر $P(A) = \frac{2}{5}$ ، $P(B) = \frac{3}{5}$ و $P(A \cup B') = \frac{4}{5}$ آن‌گاه $P(A \cup B)$ کدام است؟
۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$ (جواب: گزینه ۳)

مثال: عددی به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال رخ دادن هریک از پیشامدهای زیر را به دست آورید:
(الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد ← (جواب: ۰/۶۷)
ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۳ بخش‌پذیر نباشد ← (جواب: ۰/۳۴)
پ) عدد انتخابی نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد ← (جواب: ۰/۳۳)
ت) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۶ بخش‌پذیر نباشد ← (۰/۵۱: جواب)

Scanned by TapScanner

* احتمال غیرهم شانس: مجموع تمام احتمال‌های ست داده شده ← هریک از اعضا 1 است.

* احتمال شرطی: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ (احتمال A ← شرط B)



$P((A_1\cup A_2)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B) \iff$ دو پیشامد A_1 و A_2 از فضای نمونه ناسازگارند

$P(A_1|A_2)=P(A_2|A_1)=0 \iff$ دو پیشامد A_1 و A_2 ناسازگارند

* $P(A'|C)=1-P(A|C)$
* $P((A-B)|C)=P(A|C)-P((A\cap B)|C)$
* $P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)-P((A\cap B)|C)$

$P((A\cap B)|C)$

مثال: در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم که حداقل یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال این که دقیقاً دو پسر داشته باشند، کدام است؟

1) $\frac{1}{7}$ 2) $\frac{2}{7}$ 3) $\frac{3}{7}$ 4) $\frac{4}{7}$ (جواب: گزینه 3)

مثال: در آزمایش پرتاب دو تاس سالم، می‌دانیم مجموع دو عدد ظاهر شده بیشتر از 4 است. با کدام احتمال هر دو عدد مساوی‌اند؟ 1) $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{2}{15}$ 3) $\frac{1}{10}$ 4) $\frac{1}{25}$ (جواب: گزینه 2)

مثال: ظرفی شامل 4 مهره سفید و 3 مهره سیاه است. دو مهره به طور تصادفی، پی در پی و بدون جای‌گذاری از ظرف خارج می‌کنیم. اگر مهره اول سیاه باشد، با کدام احتمال دومی نیز سیاه است؟ 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{7}$ 3) $\frac{3}{7}$ 4) $\frac{1}{3}$ (جواب: گزینه 4)

احتمال

مثال: برای دو پیشامد دلخواه و ناتهی A و B از فضای نمونه‌ای که، حاصل $P((A\cap B')|A)$ کدام است؟ 1) $P(A|B)$ 2) $1-P(A|B)$ 3) $P(B|A)$ 4) $1-P(B|A)$ (جواب: گزینه 4)

مثال: جعبه‌ای شامل 12 لامپ است که 3 عدد از این لامپ‌ها معیوب‌اند. دو لامپ به تصادف و به صورت پی در پی و بدون جای‌گذاری از جعبه خارج می‌کنیم. احتمال این که هر دو معیوب باشند، چند برابر احتمال این است که اولی سالم و دومی معیوب باشد؟

سالم

1) $\frac{1}{9}$ 2) $\frac{2}{9}$ 3) $\frac{4}{9}$ 4) $\frac{5}{9}$ (جواب: گزینه 2)

Scanned by TapScanner

مثال: کیسه‌ای شامل ۲ گوی سبز، ۴ گوی قرمز و ۵ گوی آبی است. از این کیسه به طور تصادفی سه گوی به ترتیب و بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. احتمال این که فقط گوی اول و سوم آبی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{4}{33}$ ۳) $\frac{11}{18}$ ۴) $\frac{7}{66}$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: دسته‌ای کارت بازی شامل ۴ کارت دو رو سفید و ۶ کارت تک رو سفید و تک رو آبی است. کارتی را به تصادف برمی‌داریم و یک روی آن را می‌بینیم. احتمال آن که روی سفید مشاهده شود چقدر است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۷ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹ (جواب: گزینه ۲)

مثال: دو ظرف داریم. اولی شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و دومی شامل ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برداشته و بدون مشاهده، آن را در ظرف دوم قرار می‌دهیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم برمی‌داریم. احتمال این که این مهره سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{34}{91}$ ۲) $\frac{48}{121}$ ۳) $\frac{56}{135}$ ۴) $\frac{67}{162}$

(جواب: گزینه ۲)

مثال: کیسه‌ای شامل a مهره سفید و b مهره سیاه است. مهره‌ای به تصادف بیرون می‌آوریم و بدون مشاهده رنگ آن مهره دومی خارج می‌کنیم. احتمال آن که مهره دوم سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{a}{a+b}$ ۲) $\frac{a-1}{a+b}$ ۳) $\frac{a-1}{a+b-1}$ ۴) $\frac{ab}{a+b}$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: در ظرف‌ها تند داریم. اولی شامل ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از دو ظرف را انتخاب می‌کنیم و مهره‌ای از آن خارج می‌نماییم. اگر این مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{4}{9}$ (جواب: گزینه ۴)

A, B مستقل‌اند $\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

A, B مستقل $\iff P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A) \times P(B)}_{P(A \cap B)}$

(*در غیر این صورت A, B وابسته‌اند)

Scanned by TapScanner

مثال: در جعبه A، ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه B، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. از هرکدام از این دو جعبه یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره‌های خارج شده هم‌رنگ باشند چقدر است؟ ۱) $\frac{12}{20}$ ۲) $\frac{18}{35}$ ۳) $\frac{21}{40}$ ۴) $\frac{25}{61}$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: کیسه‌ای شامل ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه است. دو مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. حرض می‌کنیم A پیشامد «سفید بودن مهره اول» و B پیشامد «سفید بودن مهره دوم» است. در دو حالت زیر پیشامد A و B چگونه هستند؟

۱) انتخاب مهره‌ها با جایگذاری ← (مستقل: جواب)

۲) انتخاب مهره‌ها بدون جایگذاری ← (وابسته: جواب)

A و B در پیشامد مستقل $\begin{cases} A \cap B \neq \emptyset \\ P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \end{cases}$

* در صورتی که A و B ناسازگار باشند، مستقل نیستند.

* در صورتی که A و B مستقل باشند، ناسازگار نیستند.

A و B در پیشامد ناسازگار $\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ P(A \cap B) = 0 \end{cases}$

---

* متمم‌گیری استقلال پیشامدها را حفظ می‌کند

* اگر A و B در پیشامد مستقل باشند $\begin{cases} A \text{ و } B' \text{ نیز در پیشامد مستقل‌اند} \\ B \text{ و } A' \text{ نیز در پیشامد مستقل‌اند} \\ A' \text{ و } B' \text{ نیز در پیشامد مستقل‌اند} \end{cases}$

مثال: اگر A و B در پیشامد مستقل باشند و $P(A \cap B) = 0/1$ و $P(A \cap B') = 0/4$، آن‌گاه $P(A \cup B')$ کدام است؟ ۱) ۰/۸ ۲) ۰/۹ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۵۴ (جواب: گزینه ۲)

مثال: سه تیم کوهنوردی A و B و C با احتمال موفقیت به ترتیب ۴۰، ۴۵، ۵۰ درصد به طور جداگانه به قصد صعود به قله، اعزام می‌شوند. احتمال این که حداقل یکی از این تیم‌ها موفق به صعود شود چقدر است؟

۱) ۰/۴۷۵ ۲) ۰/۶۲۵ ۳) ۰/۸۲۵ ۴) ۰/۹۲۴

(جواب: گزینه ۳)

Scanned by TapScanner

مثال: سه تفر تیرانداز به نام‌های A، B و C با احتمال‌های به ترتیب $\frac{1}{6}$، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ هدفی را می‌زنند. اگر هرکدام یک بار تیراندازی کنند، با کدام احتمال فقط یک نفر به هدف می‌زند؟ ۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{29}{60}$ ۳) $\frac{31}{72}$ ۴) $\frac{49}{90}$ (جواب: گزینه ۳)

احتمال (وقوع ای که دقیقاً k بار موفقیت در n بار تکرار یک آزمون)

$$= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

p^k: k بار موفقیت

$(1-p)^{n-k}$: $n-k$ بار عدم موفقیت

$\binom{n}{k}$: انتخاب k بار موفقیت از n بار تکرار

p: احتمال موفقیت در هر بار تکرار یک آزمون

مثال: در پرتاب چهار سکه سالم باهم، با کدام احتمال ۳ بار «رو» یا ۳ بار «پشت» ظاهر می‌شود؟ ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$ (جواب: گزینه ۴)

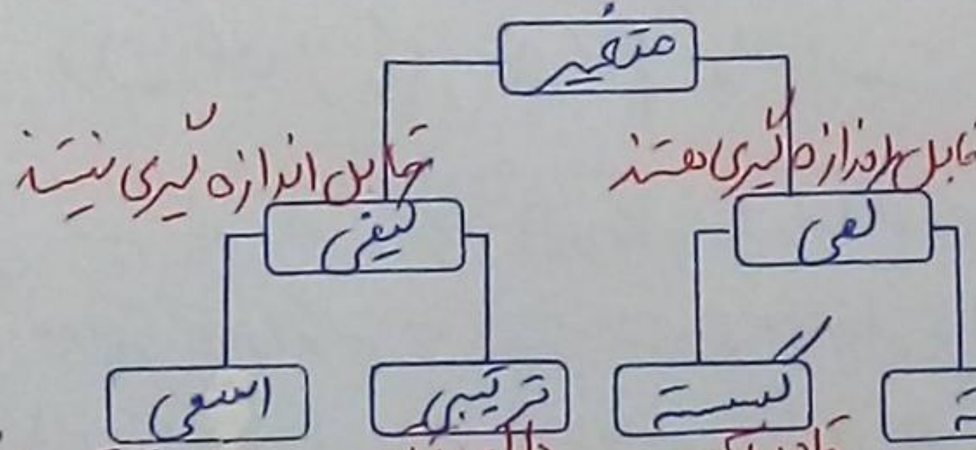
مثال: ۸۰ درصد افراد جامعه‌ای باسوادند. اگر ۷ نفر به تصادف از این جامعه انتخاب کنیم احتمال آن که هر ۷ نفر بی‌سواد باشند، چند برابر احتمال آن است که ۴ نفر آن‌ها بی‌سواد باشند؟ ۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{20}$ ۳) $\frac{1}{30}$ ۴) $\frac{1}{40}$ (جواب: گزینه ۲)

آمار

* جامعه یا جمعیت آماری * اندازه یا حجم جامعه * نمونه آماری * اندازه یا حجم نمونه
* اندازه نمونه کوچک‌تر مساوی اندازه جامعه است.
* اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم، سرشماری کرده‌ایم.
* در سرشماری، اندازه نمونه برابر اندازه جامعه است

---

* فراوانی یک داده f_i
* فراوانی نسبی یک داده $\frac{f_i}{n}$ (n: تعداد کل داده‌ها) $(n = f_1 + f_2 + \dots + f_n)$
* درصد فراوانی نسبی: $\left(\frac{f_i}{n} \times 100\right)$



$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{f_i}{f_1 + \dots + f_n} \times 100$$

* مجموع فراوانی‌های نسبی برابر یک و مجموع درصد فراوانی‌های نسبی برابر ۱۰۰ است.

Scanned by TapScanner

* اختلاف بزرگترین و کوچکترین داده را دامنه تغییرات می نامیم (R=max-min)

(نشان یا نماینده دسته) مرکز دسته $[a,b) = \frac{a+b}{2}$ ، C (طول دسته) $= \frac{R(\text{دامنه تغییرات})}{K(\text{تعداد دسته})}$

طول دسته $= b-a = C$

مثال: ۲۵۰ داده آماری در ۸ دسته مفروض، دسته بندی شده‌اند. اگر فراوانی‌های نسبی تا قبل از دسته هشتم برابر ۹۵٪ باشد، فراوانی دسته آخر کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶ (جواب: گزینه ۳)

مثال: در یک دسته بندی داده‌ها، کران پایین دسته اول و مرکز دسته هشتم به ترتیب ۷ و ۳۳ است. اگر این داده‌ها را در ۱۲ طبقه دسته بندی کرده باشیم، مرکز دسته آخر چقدر است؟

۱) ۴۷ ۲) ۴۹ ۳) ۵۱ ۴) ۵۳ (جواب: گزینه ۲)

مثال: ۸۵ داده آماری در ۷ طبقه دسته بندی شده‌اند. اگر ۲۵ داده جدید به این جدول افزوده شود، فراوانی نسبی دسته وسط تغییر نمی‌کند. سنت افراشی داده‌های دسته مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{8}$ (جواب: گزینه ۳)

* نمودار میله‌ای: این نمودار برای نمایش متغیرهای کیفی گسسته و کیفی مناسب است.

* نمودار دایره‌ای: این نمودار برای متغیرهای کیفی گسسته و کیفی مناسب است.

* برای بدست آوردن زاویه هر قطعه از تناسب استفاده می‌کنیم ($\theta_i = \frac{f_i}{n} \times 360°$)

n	کل دایره
f_i	?

تعداد قسمت‌های که نمودار دایره‌ای از آن تشکیل شده است $= 1 \equiv 100 \equiv 360 \equiv \pi r^2 \equiv 2\pi r \equiv$ کل دایره

(1: مجموع فراوانی‌های نسبی؛ 100: مجموع درصد فراوانی‌های نسبی؛ 360: درجه؛ πr^2: مساحت کل دایره؛ $2\pi r$: محیط دایره)

* نمودار یافت نگاشت: برای نمایش متغیرهای پیوسته به کار می‌رود. در این نمودار، حدود دسته‌ها یا مازه‌های پیوسته را روی محور افقی و فراوانی (یا فراوانی نسبی) را روی محور عمودی نمایش می‌دهیم.

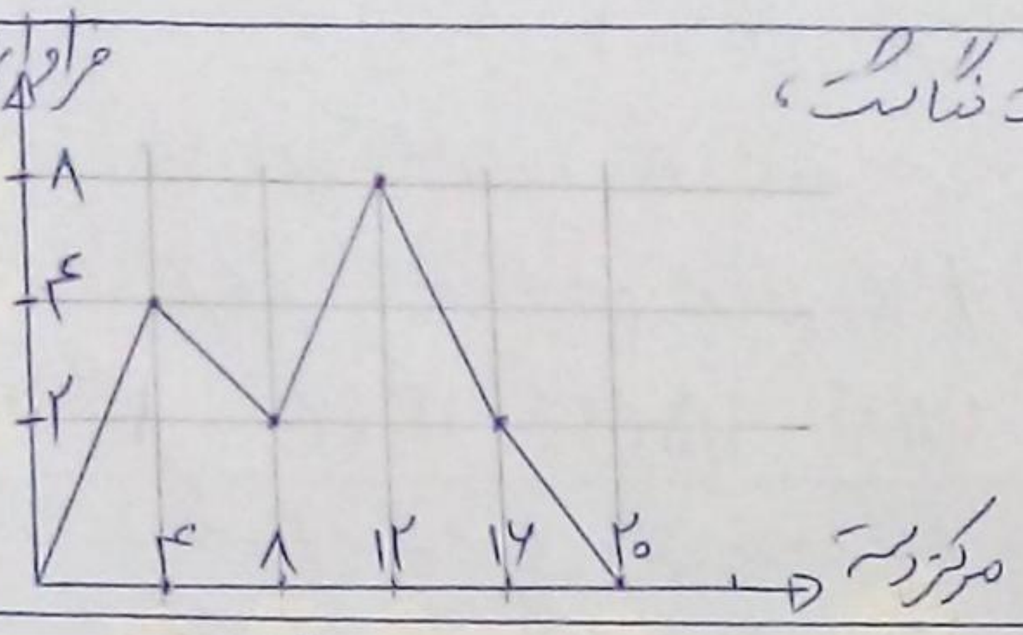
مثال: در یک نمودار یافت نگاشت، فراوانی نسبی یکی از دسته‌ها ۴٪ و فراوانی همین دسته، ۸ است. اگر طول هر دسته ۲ باشد، مجموع مساحت مستطیل‌ها در این نمودار کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۰ (جواب: گزینه ۳)

Scanned by TapScanner

* نمودار چند برفراوانی با فت نگاشت: طول نقاط، مرکز دسته ها و عرض نقاط، فراوانی دسته ها می باشد. در آخر دو نقطه با فراوانی صفر (ابتدا و انتهای نمودار روی محور افقی) در نظر گرفته و نمودار را با آن نقاط وصل می کنیم.

مثال: شکل مقابل نمودار چند برفراوانی است. (نمودار با فت نگاشت)



مگر ان با ین دسته سوم کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

(جواب: گزینه ۲)

میانگین = $\frac{w_1x_1+\cdots+w_nx_n}{w_1+\cdots+w_n}$ = $\frac{\sum w_ix_i}{\sum w_i}$ (وزن داده‌ها (فراوانی))

میانگین (متوسط داده‌ها) $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\sum x_i}{n}$

* $\bar{x}=x_1\times\frac{f_1}{n}+x_2\frac{f_2}{n}+\cdots+x_n\frac{f_n}{n}$

(میانگین با استفاده از فراوانی نسبی)

* مجموع جبری تفاضل داده‌ها از میانگین برابر صفر است. ($\sum(x_i-\bar{x})=0$)
* اگر داده‌ها را در عدد a ضرب کنیم و با b جمع کنیم، میانگین داده‌ها نیز a برابر و با b جمع شده است.
* اگر داده‌ها اعداد بزرگی بودند، $(x_i \longrightarrow ax_i+b) \longrightarrow (\bar{x} \longrightarrow a\bar{x}+b)$
برای محاسبه میانگین می‌توانیم یک عدد ثابت را از تمام داده‌ها کم کنیم، سپس میانگین را حساب کنیم، پس از آن عدد ثابت را به میانگین اضافه کنیم.

مثال: میانگین ۵ داده آماری ۱۷ است. اگر دو عدد ۱۷ و ۱۰ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟ ۱) ۲۲/۴ ۲) ۱۲/۱ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴/۶ (جواب: گزینه ۳)

* هرگاه داده‌ها دسته‌بندی شده باشند، از مراکز دسته‌ها به عنوان نماینده هر دسته برای محاسبات استفاده می‌شود.

مثال: داده‌های آماری در چهار دسته با فراوانی نسبی آن‌ها بیان شده است. میانگین این داده‌ها کدام است؟

حدود دسته	۱۰-۱۴	۱۴-۱۸	۱۸-۲۲	۲۲-۲۶
فراوانی نسبی	۰/۱۵	۰/۳	۰/۲۵	a

۱) ۱۶/۴ ۲) ۱۸/۴ ۳) ۱۶/۸ ۴) ۱۸/۸

حدود دسته‌ها	(۱۰-۱۴)	(۱۴-۱۸)	(۱۸-۲۲)	(۲۲-۲۶)
فراوانی نسبی	۰/۱۵	۰/۳	۰/۲۵	a

جواب: گزینه ۴

Scanned by TapScanner

مثال: اگر میانگین داده های آماری $(۳x_n+۲)$ و ... و $(۳x_۲+۲)$، $(۳x_۱+۲)$ برابر ۲۶ باشد، میانگین داده‌های آماری $(۲x_n-۳)$ و ... و $(۲x_۲-۳)$، $(۲x_۱-۳)$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۱۳ ۳) ۸۱ ۴) ۷۸ (جواب: گزینه ۲)

---

*میانه: داده ها را بصورت افزایشی مرتب می کنیم *(چارک دوم = $Q_۲$ = میانه)

* اگر تعداد داده ها فرد باشد، داده‌ای که در وسط قرار می گیرد، برابر میانه است.

* اگر تعداد داده ها زوج باشد، میانگین دو داده‌ای که در وسط قرار می گیرند، برابر میانه است.

* میانه، مقداری است که تعداد داده های کوچکتر از آن با تعداد داده های بزرگتر از آن برابر است.

*$(ax_i+b \rightarrow a(\text{میانه})+b)$

---

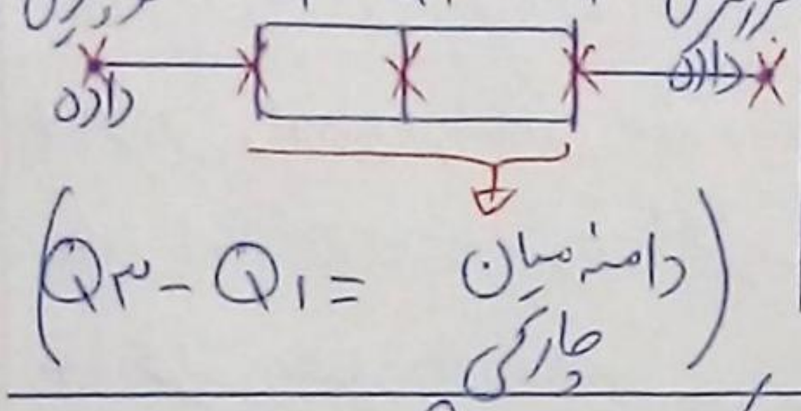
* میانه داده های کوچکتر از میانه ← چارک اول ($Q_۱$)

خود میانه را در نظر نمی گیریم

* میانه داده های بزرگتر از میانه ← چارک سوم ($Q_۳$)

بزرگتر از = بزرگ تر از

*نمودار جعبه‌ای



$(Q_۳-Q_۱=$ دامنه میان چارکی$)$

مثال: چارک اول و سوم برای داده های جدول فراوانی زیر، به ترتیب کدام است؟

حدود رده	۴-۸	۸-۱۲	۱۲-۱۶
فراوانی	۵	۶	۴

۱) ۱۰، ۱۳ ۲) ۶، ۱۰ ۳) ۶، ۱۴ ۴) ۶، ۱۲ (جواب: گزینه ۳)

---

* داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد، مدهای داده ها نام دارد. اگر همه داده‌ها فراوانی یکسانی داشته باشند، آن گاه این داده ها مد ندارند. اگر چند داده بیشترین فراوانی را داشته باشد، آن گاه این داده ها چند مد دارد. *$(ax_i+b \rightarrow a(\text{مد})+b)$

---

* در صورت وجود داده های دور افتاده، میانه را به کار می بریم.

---

* اگر همه داده ها با هم برابر باشند، دامنه تغییرات برابر صفر می شود، اگر دامنه تغییرات صفر باشد، در این صورت همه داده ها با هم برابرند *$(R=\max-\min)$

*$(ax_i+b \rightarrow |a|R)$

* اگر همه داده ها با عددی جمع یا تفریق شوند، در این صورت دامنه تغییرات تغییر نمی کند. همچنین اگر همه داده ها k برابر شوند، در این صورت دامنه تغییرات $|k|$ برابر می شود.

$$\text{واریانس } \sigma^۲ = \frac{(x_۱-\bar{x})^۲+\cdots+(x_n-\bar{x})^۲}{n} = \frac{w_۱(x_۱-\bar{x})^۲+\cdots+w_n(x_n-\bar{x})^۲}{w_۱+\cdots+w_n}$$

Scanned by TapScanner

* اگر تمام داده ها با هم برابر باشند، واریانس صفر است و برعکس
* اگر به داده ها عدد ثابتی را اضافه یا کم کنیم، واریانس آن ها تغییر نمی کند. اگر داده ها را در عددی ثابت (k) ضرب کنیم، واریانس آن ها در مجذور آن عدد (k^2) ضرب می شود.

مثال: اگر داده های آماری ۱۹، ۱۸، ۱۵، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۱۵ را با نمودار جعبه ای نشان دهیم، واریانس داده های داخل جعبه کدام است؟ ۱) ۳/۲ ۲) ۳/۴ ۳) ۳/۶ ۴) ۳/۸
(جواب: گزینه ۳)

$\sigma^2 = \frac{f_1}{n}(x_1-\bar{x})^2 + \frac{f_2}{n}(x_2-\bar{x})^2 + \cdots + \frac{f_n}{n}(x_n-\bar{x})^2$ (رابطه واریانس براساس فراوانی های نسبی)

* جذر واریانس را انحراف معیار می گویند و با σ نشان می دهند.

$* \sigma^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n} - \bar{x}^2$

* اگر همه داده ها را با یک مقدار ثابت جمع یا تفریق کنیم، انحراف معیار تغییر نمی کند. اگر تمام داده ها در عدد ثابت k ضرب شوند، انحراف معیار آن ها در $|k|$ ضرب می شوند. $*(ax_i+b \longrightarrow |a|\sigma)$
* انحراف معیار داده ها کم ← پراکندگی داده ها حول میانگین کم ← داده ها به هم نزدیک ترهستند. (زیاد ← زیاد ← داده ها از هم دور هستند)

* هرگاه واریانس دو جامعه برابر باشند و یا در دو یا چند جامعه آماری که هر کدام یک واحد نباشند، میزان پراکندگی را براساس ضریب تغییرات می خواهیم مقایسه کنیم. + ضریب تغییرات کم ← پراکندگی داده ها کمتر است.

$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$ ضریب تغییرات

$*(ax_i+b \longrightarrow \frac{|a|\sigma}{a\bar{x}+b})$

مثال: اگر در یک آزمون ۱۵ درصد نمره هر دانش آموز به نمره او اضافه شود، ضریب تغییرات جدید چند برابر ضریب تغییرات اولیه است؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: ضریب تغییرات داده های جدول مقابل کدام است؟

x_i	۲	۱	۰	-۱	-۲	$2x_i-10$
فراوانی	۱	۶	۱۲	۲	۳	

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۴۵
(جواب: گزینه ۱)

آمار استنباطی

* مشکلات سرشماری: ① در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه ② ازبین رفتن اعضای جامعه ③ وقت گیر بودن ④ هزینه بر بودن

Scanned by TapScanner

* نمونه گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری: در این روش احتمال انتخاب شدن برای اولین عضو نمونه برابر با $\frac{1}{N}$، برای دومین عضو نمونه برابر با $\frac{1}{N-1}$ و .... (N: اندازه جامعه)

* نمونه گیری تصادفی ساده با جایگذاری: در این روش احتمال انتخاب هریک از عضوهای جامعه آماری برابر $\frac{1}{N}$ است.

* نمونه گیری خوشه ای: در نمونه گیری خوشه ای، جامعه به خوشه (گروه) های تقسیم می شود.
* در این روش واحدهای نمونه گیری اولیه در جامعه، گروه ها یا خوشه ها هستند

* نمونه گیری طبقه ای: از روش های نمونه گیری است که در آن با طبقه بندی جامعه به زیر جامعه های همگن، تک تک نمونه تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می شود.

* نمونه گیری سامان مند یا سیستماتیک: نوعی نمونه گیری طبقه ای است که در آن اندازه طبقات با هم برابر است. فقط از طبقه اول، واحد آماری به تصادف انتخاب می شود و باهمان رتبه از طبقات دیگر، این کار انجام می گیرد. (بقیه عضوهای تصادفی نمونه، از فرمول دنباله حسابی بدست می آیند)

* $a_n = a_1 + (n-1)d$

* $d = \left[\frac{N}{n}\right]$ جزء صحیح

* در روش سیستماتیک اگر جامعه به n طبقه با d عضو تقسیم شده باشد، هر عضو جامعه با احتمال $\frac{1}{d}$، شانس انتخاب شدن دارد.

مثال: در یک باشگاه جهت ارتقای خدمت رسانی به مشتریان در یک روز، از بین شماره های ۷ تا ۷۱، ۵ نفر را به صورت سیستماتیک انتخاب کرده و از آن ها خواهش کردند با پر کردن پرسشنامه، باشگاه را در رسیدن به این هدف یاری کند. اگر اولین انتخاب شماره ۱۷ باشد، چهارمین شماره ای که انتخاب می شود، چه شماره ای است؟ (راهنمایی: $d = \frac{71-7+1}{5} = 13$)

۱) ۵۶ ۲) ۴۳ ۳) ۶۹ ۴) ۳۰ (جواب: گزینه ۱)

* احتمال انتخاب یک نمونه به اندازه n از یک جامعه N عضوی با هریک از $\binom{N}{n}$ روش در نظر گرفته برابر $\frac{n}{N}$ است. البته برای روش طبقه ای باید تعداد عضوهای طبقات یکسان باشد.

* هرچقدر، حجم (اندازه) نمونه ها بیشتر باشد، مقادیر برآورد (میانگین) به میانگین جامعه نزدیک تر خواهد بود. در واقع با افزایش تعداد عضوهای نمونه، خطای برآورد (میانگین) نیز کاهش می یابد.

Scanned by TapScanner

مثال: در جامعه ۱۷، ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲ نمونه‌ای ۲ عضوی می‌گیریم. احتمال این که میانگین را به درستی برآورد کنیم، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{2}{15}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{4}{15}$ (جواب: گزینه ۳)

σ = انحراف معیار جامعه

n = اندازه نمونه

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ انحراف معیار برآورد میانگین

* مقدار انحراف معیار میانگین یعنی $\sigma_{\bar{x}}$، با حذر اندازه نمونه، نسبت عکس دارد.

* با افزایش حجم یا اندازه نمونه (n) مقدار $\sigma_{\bar{x}}$ کاهش می‌یابد: ($n \uparrow \rightarrow \sqrt{n} \uparrow \rightarrow \sigma_{\bar{x}} \downarrow$)

انحراف معیار برآورد میانگین

مثال: اگر واریانس جامعه‌ای ۹ باشد، حجم نمونه چقدر باشد تا انحراف معیار برآورد میانگین برابر ۰/۶ شود؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۵۰۰ ۴) ۱۲۵۰

(جواب: گزینه ۳)

---

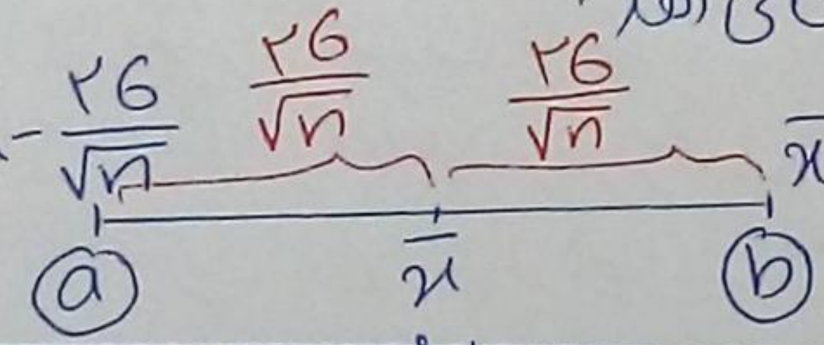
* اگر از جامعه‌ای با انحراف معیار σ در میانگین نمونه $\bar{x}$ انحراف معیار برآورد میانگین $\sigma_{\bar{x}}$ نمونه‌ای به اندازه n را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪، میانگین جامعه (μ) در بازه زیر قرار دارد.

$$\bar{x} - 2\sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + 2\sigma_{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

* بازه اطمینان برای میانگین را می‌توانیم به صورت زیر هم بنویسیم:

$$|\mu - \bar{x}| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

* $|\mu - \bar{x}|$ میزان خطای برآورد (نقطه‌ای میانگین) را نشان می‌دهد.



$$\frac{a+b}{2} = \bar{x}, \quad \frac{b-a}{2} = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

مثال: اگر حداکثر اختلاف میانگین جامعه و نمونه، حجم ۴۰۰ برابر ۰/۲۵ باشد، واریانس جامعه کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۶/۲۵ ۴) ۵ (جواب: گزینه ۳)

مثال: میانگین جامعه‌ای با اطمینان بیش از ۹۵٪ در بازه [۱۵/۳۵، ۱۵] برآورد شده است. اگر واریانس جامعه ۱۶۰۰ باشد، تعداد عضوهای نمونه کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶۴ ۳) ۴ ۴) ۱۶ (جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

* اثبات مستقیم (روش استدلال استنتاجی) * اعداد گویا $\left(\frac{p}{q}, q\neq 0\right)$ * $2k$ زوج * $2k+1$ فرد
* مثال نقض * اثبات غیرمستقیم (روش برهان خلف) * اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)
$(p \to q \equiv \sim q \to \sim p)$

---

* عضو برعضو غنی پذیر است (* طبق a,b عضو پذیر است) $\Rightarrow$
$a|b \longleftrightarrow b=aq\ (q\in Z)$
$m\le n \Longrightarrow m!|n!\ (m,n\in N)$ ، $a|0\ (a\in Z)$ ، $1|a$ ، $-1|a\ (a\in Z)$
$a|a$ ، $-a|a\ (a\in Z)$ ، $a|b \longrightarrow -a|b, a|-b, -a|-b$
* عدد صفر تأثیری در غنی پذیری ندارد
$(b\neq 0)\ a|b \longrightarrow |a|\le|b|$ *
$(a|b \wedge b|a) \Longleftrightarrow |a|=|b|$ *$(a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c$
* جمع راست نماد غنی پذیری را می‌توان در هر عدد صحیح ضرب کرد و یا به توان هر عدد طبیعی رساند.
$a|b \longrightarrow a|mb\ (m\in Z)$ ، $a|b \longrightarrow a|b\ (b\in N)$

---

* اگر یک عدد اول، حاصل ضرب دو عدد صحیح را شمارد، آن‌گاه حداقل یکی از آن دو عدد صحیح را می‌شمارد.
$p|ab \longrightarrow (p|a \vee p|b)$ (عدد اول)

---

* اگر یک عدد اول، توان n ام یک عدد صحیح را شمارد، آن‌گاه خود آن عدد را نیز می‌شمارد.
(صحیح)
$p|a^n\ (n\in N) \longrightarrow p|a$ (عدد اول)

---

* در طرف نماد غنی پذیری را می‌توان در هر عدد صحیح (غیر صفر) ضرب کرد و یا به توان هر عدد طبیعی رساند و برعکس
$a|b \longleftrightarrow ma|mb\ (m\in Z)$
$a|b \longleftrightarrow a^n|b^n\ (n\in N)$
برای m تقسیم کنیم و یا جذر بگیریم به ازای n

مثال: اگر $12|a$ ، $a|288$ آن‌گاه برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟
1) 12 2) 16 3) 20 4) 24 (جواب: گزینه ۲)

$a|b \xrightarrow{m\le n} a^m|b^n\ (m,n\in N)$ ، $m\le n\ (m,n\in N)\ a^m|a^n$ *

$a^m|b^n \xrightarrow{m\ge n} a|b\ (m,n\in N)$ ، $a^m|b^n \longrightarrow a^i|b^j\ (m,n,i,j\in N)$
$mj-ni\ge 0$
mj: دور در دور
ni: نزدیک در نزدیک

Scanned by TapScanner

مثال: اگر $a \neq 0$ و a و b دو عدد صحیح باشند، آن گاه کدام گزاره همواره درست است؟

۱) $a^3 | b^5 \rightarrow a^4 | b^5$ ۲) $a^3 | b^3 \rightarrow a | b$

۳) $a^4 | b^5 \rightarrow a^3 | b^2$ ۴) $a | b \rightarrow a^3 | b^2$

(جواب: گزینه ۱)

* اگر عددی بر حاصل ضرب چند عدد صحیح غیرصفر بخش پذیر باشد، آن گاه بر هرکدام از آن ها نیز بخش پذیر است. $(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) | b \rightarrow (a_1 | b \wedge a_2 | b \wedge \cdots \wedge a_n | b)$

* $a^n | b \rightarrow a | b \quad (n \in N)$ (عکس این رابطه لزوماً درست نیست)

مثال: اگر $a \neq 0$، $b \neq 0$، c سه عدد صحیح باشند و $a^3 | b$، $2b | c^2$، آن گاه کدام نتیجه گیری همواره درست است؟

۱) $a | c$ ۲) $a^2 | c$ ۳) bc ۴) $c | a$

$b | c$

(جواب: گزینه ۱)

* هر رابطه‌ی بخش پذیری (عاد) را می‌توان همواره عاد تر و هر رابطه‌ی بخش پذیری لاعاد را می‌توان همواره لاعادتر کرد.

عاد ← عاد یا لاعاد | لاعاد ← لاعاد

مثال: اگر $a^n | 150$، آن گاه a عدد صحیح کدام عدد همواره بخش پذیر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۵ ۴) ۶۰ (جواب: گزینه ۱)

* دو طرف دو یا چند بخش پذیری را می‌توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد.

$\begin{cases} a | b \\ c | d \end{cases} \rightarrow ac | bd$

* عکس این رابطه لزوماً درست نیست ← ×

* دو طرف دو یا چند رابطه بخش پذیری را نمی‌توان نظیر به نظیر جمع (یا تفریق) نمود.

~~$(a \pm c) | (b \pm d)$~~

* اگر عددی دو عدد صحیح را بشمارد، آن گاه مجموع، تفاضل و حاصل ضرب آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$(a | b \wedge a | c) \Rightarrow (a | (b \pm c) \wedge a | b.c)$

* اگر عددی مجموع یا تفاضل دو عدد صحیح را بشمارد، آن گاه یا هر دو را می‌شمارد یا هیچ کدام را نمی‌شمارد.

$a | (b \pm c) \rightarrow [(a | b \wedge a | c) \vee (a \nmid b \wedge a \nmid c)]$

* اگر عددی دو عدد صحیح را بشمارد، آن گاه هر ترکیب خطی آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$(a | b \wedge a | c) \xrightarrow[(m,n \in Z)]{} a | (mb + nc)$

Scanned by TapScanner

مثال: اگر $a|3b-1$ و $a|b+2$، آن‌گاه برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۲)

* در یک بخش‌پذیری، همواره می‌توان مضرب دلخواهی از عدد سمت چپ (لاغر) را به عدد سمت راست (چاق) اضافه یا کم کرد.

مثال: اگر عدد $2n^2-3n+7$ بر $n-2$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه برای عدد طبیعی n، چند جواب وجود دارد؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۴)

* در سوال بالا می‌توانیم عبارت $2n^2-3n+7$ را بر $n-2$ تقسیم کنیم و باقی‌مانده تقسیم را به جای عبارت سمت راست $(2n^2-3n+7)$ قرار دهیم.

مثال: اگر $k\in\mathbb{Z}$، $4k+1|16k^2+28k+6$، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم عدد $16k^2+28k+6$ بر عدد ۲۵ کدام است؟
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۷ ۴) صفر (جواب: گزینه ۴)

$(a+b)\mid a^n+b^n$	$(a+b)\mid a^n-b^n$	$(a-b)\mid a^n-b^n$
$n\in\mathbb{N}$ فرد	$n\in\mathbb{N}$ زوج	$(n\in\mathbb{N})$

مثال: اگر $3^n+1|82$، آن‌گاه برای n چند جواب طبیعی کمتر از ۱۰۰ وجود دارد؟
۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴ (جواب: گزینه ۳)

* عدد ۱ نه اول است و نه مرکب

* عدد اول $(2,3,5,7,11,13,\dots)$

مثال: چند عدد اول مانند p وجود دارد که $16p+1$ مربع کامل باشد؟
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار (جواب: گزینه ۲)

مثال: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $b^2-41=a^2$، آن‌گاه $2b-3a$ کدام است؟
۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴ (جواب: گزینه ۳)

* اگر یک عدد طبیعی بر هیچ یک از اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی با جذرش بخش‌پذیر نباشد، اول است.

مثال: $2^{12}-2^{10}$ دارای چند شمارنده اول است؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ (جواب: گزینه ۳)

* یک عدد طبیعی مربع کامل است اگر و تنها اگر در تجزیه استاندارد آن، توان تمام عوامل، زوج باشد.

* تعداد شمارنده‌های مثبت عدد طبیعی $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$: $d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$

* تعداد کل شمارنده‌های عدد طبیعی n : $2d(n)$ (تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت و منفی)

Scanned by TapScanner

مثال: عدد طبیعی $N=18\times 9^{\alpha}\times 8^{\beta}$ دارای ۵۵ مقسوم علیه مثبت است. کمترین مقدار β کدام است؟
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۱)

* یک عدد طبیعی مربع کامل است اگر و تنها اگر تعداد شمارنده‌های آن عددی فرد باشد.
* تعداد عوامل عدد اول P در $n!$: $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$ مثبت ($[\ ]$: نماد جزء صحیح)

مثال: اگر $n!$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد، کوچکترین مقدار طبیعی n کدام است؟
۱) ۴۵ ۲) ۳۵ ۳) ۵۵ ۴) ۵۰ (جواب: گزینه ۴)

مثال: اگر $37!$ بر 6^k بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بیشترین مقدار k کدام است؟
۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۳۴ ۴) ۶ (جواب: گزینه ۱)

$(a,b)=d \rightarrow (d|a \wedge d|b)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک b,a
$*(a,0)=|a| \quad (a\neq 0)$
$*(0,0)=?$ (مبهم)
$(a,b)=(\pm a,\pm b)$، $(a,b)|a \rightarrow (a,b)\leq |a|$، $(a,b)|b \rightarrow (a,b)\leq |b|$
* روش تجزیه: ضرب عامل‌های مشترک با توان کوچکتر
* روش نردبانی درختی (ب.م.م)

مثال: اگر $a\in Z$، آن‌گاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $2-3a$ و $1+5a$ کدام است؟
۱) ۱ یا ۷ ۲) ۱ یا ۱۱ ۳) ۱ یا ۱۳ ۴) ۱ یا ۱۷ (جواب: گزینه ۳)

مثال: اگر $a\in Z$، آن‌گاه حاصل $(5+6a, 1-2a)$ چند جواب دارد؟
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۱)، (راهنمایی: $1-2a$ فرد است)

* دو عدد را نسبت هم اول می‌گوییم هرگاه ب.م.م آن‌ها برابر ۱ باشد و برعکس
a,b نسبت به هم اول‌اند (متباین‌اند) $\leftrightarrow (a,b)=1$
* عدد ۱ نسبت به هر عدد صحیح همواره اول است $(a,1)=1 \ , \ (a\in Z)$
* هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول‌اند $(a,a+1)=1 \ , \ (a\in Z)$

مثال: نشان دهید هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

* اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه شمارنده‌های آن‌ها نیز نسبت به هم اول‌اند
* عکس این گزاره لزوماً درست نیست.

$(a,b)=1 \xrightarrow[c|a,\ d|b]{} (c,d)=1$

* اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، به طوری که $p|a$، آن‌گاه $(p,a)=1$.
* دو عدد اول متمایز، نسبت به هم اول‌اند.
* $p|a$ یعنی a بر p بخش‌پذیر باشد
* در صورتی که $p|a$ باشد، حاصل ب.م.م برابر p است. $\leftrightarrow (p,a)=p$ *

Scanned by TapScanner

* دو طرف ب.م.م را می‌توان در هر عدد صحیح (غیرصفر) ضرب کرد و یا می‌توان هر عدد طبیعی را ساند و برعکس.

$$(a,b)=d \xleftrightarrow[k\neq 0]{k\in Z} (ka,kb)=|k|d \quad * a|b \longleftrightarrow (a,b)=|a|$$

$$(a,b)=d \xleftrightarrow[n\in N]{} (a^n,b^n)=d^n \quad * (ka,kb)=|k|(a,b) *$$

مثال: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $(a^3,b^3)-(-4a,-4b)=0$، آن‌گاه (a,b) کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱۲ (گزینه ۲ = جواب)

* یا ضمن ب.ع.م ترکیب خطی مختلف در عدد صحیح

$$(ma+nb, ra+sb) \mid k(a,b)$$

* در ب.ع.م همواره می‌توان، یک عدد را ثابت در نظر گرفت و مضربی از آن را به عدد دیگر اضافه (یا کم) کرد، بدون آن که مقدار ب.ع.م تغییر کند.

$$|\underbrace{ms}_{\text{در دو}} - \underbrace{nr}_{\text{در تر دیگر}}| = k$$

*(نوشتنی نرد باختی)

$$*(k=1 \rightarrow (ma+nb, ra+sb)=(a,b))$$

مثال: اگر $(a,b)=5$، آن‌گاه $(4a+7b, 5a+9b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۱ یا ۵ ۴) ۵ یا ۱ (جواب: گزینه ۲)

مثال: به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به صورت‌های $5n-2$ و $7n+3$ نسبت به هم غیراول‌اند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ (جواب: گزینه ۲)

* $[a,b]=c \rightarrow (a|c \wedge b|c)$ کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)

* $[a,0]=$ وجود ندارد * عدد صفر تأثیری در محاسبه ک.م.م دو عدد صحیح ندارد

$$* a|[a,b] \rightarrow |a| \leq [a,b] \quad * b|[a,b] \rightarrow |b| \leq [a,b]$$

مثال: برای دو عدد طبیعی a و b، اگر $[a,b]=\frac{a+b}{2}$، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) a ۳) b ۴) صفر (جواب: گزینه ۴)

* ک.م.م پایه‌های مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر $(a,b)=1 \longleftrightarrow [a,b]=|ab|$ *

* دو طرف ک.م.م را می‌توان در هر عدد صحیح (غیرصفر) ضرب کرد و یا به توان هر عدد طبیعی رساند.

$$* [a,b]=c \xleftrightarrow[k\neq 0]{k\in Z} [ka,kb]=|k|[a,b]=|k|c$$

$$* [a,b]=c \xleftrightarrow[n\in N]{} [a^n,b^n]=c^n * [ka,kb]=|k|[a,b] * \text{فاکتورگیری}$$

$$(k\in Z, k\neq 0)$$

$$* a|b \longleftrightarrow [a,b]=|b|$$

Scanned by TapScanner

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۱۲ و ۱۸ برابر ۶ باشد، آن‌گاه رقم یکان کوچک‌ترین مقدار طبیعی رقم a کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۴)

$*[a,b]=\frac{|ab|}{(a,b)}$ یا $[a,b]\times(a,b)=|ab|$ $*[a,b]=[b,a]$

$*(a,b)=(b,a)$

$*(a,b,c)=((a,b),c)=(a,(b,c)),[a,b,c]=[[a,b],c]$ $*$

$*(a,[b,c])=[(a,b),(a,c)]$ $=[a,[b,c]]$

$*[a,(b,c)]=([a,b],[a,c])$ $*(a,[a,b])=|a|$

$*[a,(a,b)]=|a|$

$*(a,b)=[a,b]\longleftrightarrow|a|=|b|$

$*(a,b)=|a|\longleftrightarrow[a,b]=|b|$

مثال: اگر $a\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه $((a-2)^3,a^7,(a+1)^5)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $|a|$ ۳) a^2 ۴) $|a^3|$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم عدد a بر ۱۴، ۲۴، ۳۵ به ترتیب ۵، ۱۵ و ۲۶ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵ (جواب: گزینه ۱)

مثال: اگر a و b دو عدد صحیح غیرصفر باشند، حاصل $[(a,b),(a^2,a)]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $|a|$ ۳) $|b|$ ۴) a^2 (جواب: گزینه ۲)

خارج قسمت

$*\ a=bq+r$, $0\le r<|b|$ $*(na,nb)\longrightarrow n|r$, $b\neq 0$

(مقسوم، مقسوم‌علیه، باقی‌مانده)

* هرگاه باقی‌مانده صفر شد، مقسوم‌علیه را اضافه و یا کم می‌کنیم.

به اندازه‌ی مقسوم‌علیه به باقی‌مانده اضافه می‌کنیم.

$*(a,b)=(b,r)$ $*$

مثال: در یک تقسیم، اگر ۸۸ واحد به مقسوم و ۶ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییری نمی‌کند، اما باقی‌مانده ۲ واحد کم می‌شود. خارج قسمت این تقسیم مفروض کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ (جواب: گزینه ۲)

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۱۷ برابر ۱۱ باشد، باقی‌مانده تقسیم $a-9$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۸ ۳) ۱۵ ۴) ۶ (جواب: گزینه ۴)

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر دو عدد ۶ و ۸ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۴ کدام است؟ (تقسیم ۴)

۱) ۲۱ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۳ (جواب: گزینه ۱)

Scanned by TapScanner

افراز مجموعه اعداد صحیح: اگر $b>1$ عددی طبیعی باشد، آن‌گاه هر عدد صحیح به صورت bk یا $bk+1$ یا ... یا $bk+(b-1)$ است $(k\in\mathbb{Z})$ (*نمایش توسط باقی‌ماندهٔ تقسیم)

مثال: مربع عددی صحیح که مضرب ۵ نیست، به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $5k\pm1$ ۲) $5k\pm2$ ۳) $25k+1$ ۴) $25k+2$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: ثابت کنید هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ همواره به صورت $6k+1$ یا $6k+5$ است. $(k\in\mathbb{Z})$

$6k+1$ یا $6k+5$; $6k\pm1$

مثال: چند عدد اول مانند p وجود دارد که p^2+2 عددی اول باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) هیچ (جواب: گزینه ۱)

فرد = (فرد) × (فرد)	فرد = (زوج) ± (فرد) ، فرد = $2k+1$ ، زوج = $2k$ $(k\in\mathbb{Z})$
زوج = (فرد) × (زوج)	زوج = (زوج) ± (زوج)
زوج = (زوج) × (زوج)	زوج = (فرد) ± (فرد)

* اگر حاصل ضرب تعدادی عدد صحیح، فرد باشد، آن‌گاه تمام آن اعداد فردند.
* حاصل ضرب عدد زوج در هر عددی صحیح، همواره زوج است.
* توان‌های طبیعی هر عدد زوج، همواره زوج است و برعکس
* توان‌های طبیعی هر عدد فرد، همواره فرد است و برعکس
* از هر دو عدد صحیح متوالی، همواره یکی زوج و دیگری فرد است. پس حاصل ضرب هر دو عدد متوالی همواره زوج است.
* از هر n عدد صحیح متوالی، همواره یکی مضرب n است.
* حاصل ضرب n عدد صحیح متوالی، همواره مضرب $n!$ است.

مثال: ثابت کنید مربع هر عدد صحیح فرد به صورت $8q+1$ است $(q\in\mathbb{Z})$

مثال: اگر a عدد صحیح فرد باشد و $b\mid(a+2)$، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر عدد ۸ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ (جواب: گزینه ۳)

مثال: ثابت کنید: ① دو برابر یک عدد صحیح فرد، مربع کامل نیست.
② هیچ مربع کاملی به تعدادی فرد رقم صفر ختم نمی‌شود. ③ هیچ مربع کاملی با ارقام ۲، ۳، ۷ و ۸ ختم نمی‌شود
④ هیچ مربع کاملی به صورت $3k+2$ نیست ⑤ اگر یک عدد طبیعی، مربع مضرب ۳ باشد، آن‌گاه مضرب ۹ نیز هست.

Scanned by TapScanner

نمایش عدد طبیعی در مبنای ۱۰ $a=\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}=10^n\times a_n+10^{n-1}\times a_{n-1}+\cdots+10\times a_1+a_0$

مثال: چند عدد دورقمی طبیعی وجود دارد که از حاصل ضرب ارقام خود ۱۰ واحد بیشتر است.
۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰ (جواب: گزینه ۳)

مثال: چند عدد دورقمی به صورت ab وجود دارد به طوری که $\overline{ab}+\overline{ba}$ مربع کامل باشد؟
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ (جواب: گزینه ۱)

$a,b\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}$ ، $a\overset{m}{\equiv}a$ ، $m\overset{|m|}{\equiv}0$ ، $(a\overset{m}{\equiv}b\wedge b\overset{m}{\equiv}c)\to a\overset{m}{\equiv}c$

$a\overset{m}{\equiv}b\to(a\pm c)\overset{m}{\equiv}(b\pm c)$ * دو طرف هم‌نهشتی را می‌توان با هر عدد صحیح جمع یا تفریق کرد

$a\overset{m}{\equiv}b\xrightarrow{c\in\mathbb{Z}}\begin{cases}ac\overset{m}{\equiv}bc & \text{بدون تغییر پیمانه}\\ ac\overset{m|c|}{\equiv}bc & \text{با تغییر پیمانه}\end{cases}$ * طرفین یک هم‌نهشتی را در عدد صحیح دلخواه یا طرفین یک هم‌نهشتی را به توان طبیعی رساند

$a\overset{m}{\equiv}b\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}a^n\overset{m}{\equiv}b^n$

$\begin{cases}a\overset{m}{\equiv}b\\ c\overset{m}{\equiv}d\end{cases}\to\begin{cases}(a\pm c)\overset{m}{\equiv}(b\pm d)\\ ac\overset{m}{\equiv}bd\end{cases}$ * دو طرف (و یا چند) هم‌نهشتی را می‌توان با هم جمع یا تفریق نمود و یا در یکدیگر ضرب کرد، بدون آن که پیمانه تغییر کند

$a\overset{m}{\equiv}b\xrightarrow{(k\in\mathbb{Z})}a\overset{m}{\equiv}b\pm mk$ * به یک طرف هم‌نهشتی می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد

$a\overset{m}{\equiv}b\Leftrightarrow$ (a و b در تقسیم بر m هم باقی‌مانده‌اند) ، $a=mq+r\overset{0\le r<m}{\Leftrightarrow}a\overset{m}{\equiv}r$ (باقی‌مانده = مقسوم‌علیه (مقسوم))

* اگر a عددی صحیح، p عددی اول باشد، به طوری که $p\nmid a$ یا $(p,a)=1$ ، آن‌گاه $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$ یا $p\mid(a^{p-1}-1)$ (p عددی اول) $(p-1)!\overset{p}{\equiv}(-1)$

Scanned by TapScanner

مثال: اگر دو عدد ۲۷۵ و ۱۸۴ به پیمانه عدد طبیعی $m \neq 1$ با یکدیگر هم نهشت باشند، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم عدد ۱۵۰ بر m کدام است؟ (هم نهشت)

۱) ۲۱ ۲) ۴۵ ۳) ۱۳ ۴) ۳ (جواب: گزینه ۴)

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۱۷ برابر ۷ است. باقی‌مانده تقسیم عدد $(2a^2-3a)$ بر ۱۷ کدام است؟ ۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۱ (جواب: گزینه ۱)

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد 10^{11} بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰ (جواب: گزینه ۴)

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد 17^{19} بر ۱۹ کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۱)

مثال: برای دو عدد صحیح a و b، به ازای هر مقدار طبیعی n، باقی‌مانده تقسیم عدد $(a+b)^n - a^n - b^n$ بر عدد ab کدام است؟ ۱) $a+b$ ۲) ۱ ۳) a^2+b^2 ۴) صفر (جواب: گزینه ۴)

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد $19 + 19^{39}(2^{63})$ بر عدد ۱۳ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲ (جواب: گزینه ۲)

$[2]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \overset{m}{\equiv} 2 \Leftrightarrow x = mk+2\}$ * کلاس (دسته) هم نهشتی ۲

$a \in [2]_m \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} 2$ *

مثال: در یک هم نهشتی، مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۵ کلاس افراز شده است. کدام دو عدد در یک دسته قرار دارند؟

۱) ۴۳ و ۹۷ ۲) ۹۸ و ۳۷ ۳) ۹۹ و ۵۹ ۴) ۸۱ و ۹۴ (جواب: گزینه ۳)

* اگر یک عدد طبیعی دو پیمانه را بشمارد، آن‌گاه می‌توانیم به جای دو پیمانه قرار دهیم. $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n \mid m} a \overset{n}{\equiv} b$

$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \overset{(m,n)}{\equiv} b \\ a \overset{[m,n]}{\equiv} b \end{cases}$ ، $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \xrightarrow[[m,n]=mn]{(m,n)=1} \left(a \overset{mn}{\equiv} b\right)$

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۱۲ و ۱۱ به ترتیب ۸ و ۷ است. باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴۴ کدام است؟ ۱) ۴۰ ۲) ۳۱ ۳) ۲۹ ۴) ۱۶

(جواب: گزینه ۱)

Scanned by TapScanner

$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{\div c} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$ $\quad (m,c)=d$

* تقسیم دو طرف هم نهشتی بر یک عدد صحیح غیر صفر

* نکته: قاعده حذف، برای هر عددی که نسبت به پیمانه اول باشد، همواره برقرار است.

مثال: باقی‌مانده تقسیم عدد صحیح a بر عدد ۱۷ برابر ۱۱ می‌باشد. اگر a مضرب ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم $\frac{a}{3}$ بر ۱۷ کدام است؟ ۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

(جواب: گزینه ۴)

مثال: ثابت کنید:

① باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۳ یا ۹ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹.

② بخش‌پذیری بر ۱۱ ⟵ $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$

(رقم دهگان، رقم یکان، رقم صدگان)

③ باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۸ برابر است با باقی‌مانده تقسیم سه رقم سمت راست آن عدد بر ۸.

④ باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۴ برابر است با باقی‌مانده تقسیم دو رقم سمت راست آن عدد بر ۴.

⑤ باقی‌مانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲، ۵ و ۱۰ برابر است با باقی‌مانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲، ۵ و ۱۰.

(زوج باشد ⟵ بر ② بخش‌پذیر است.
۰ یا ۵ باشد ⟵ بر ⑤ بخش‌پذیر است
۰ (صفر) باشد ⟵ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.)

* رقم یکان هر عدد طبیعی = باقی‌مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰.

* اضافه یا کم کردن مضرب‌های عدد ۴ (یا توان هر عدد طبیعی)، رقم یکان آن عدد را تغییر نمی‌دهد.

$(a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}) \quad (a^k \overset{10}{\equiv} a^{4k+r})$

مثال: رقم یکان عدد $(۱۲۷)^{۱۲۷!} + (۱۲۳)^{۱۲۳!}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۲)

---

* معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ جواب دارد اگر و تنها اگر $(a,m) \mid b$

$(a,b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N})$

Scanned by TapScanner

مثال: اگر معادله هم نهشتی $۲۹+۵ \overset{۱۷}{\equiv} ۶x$ دارای جواب باشد، a به کدام صورت است؟

۱) $۳k+۱$ ۲) $۳k+۲$ ۳) $۶k+۱$ ۴) $۶k+۲$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: معادله هم نهشتی $۷۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۴۲۳x$ در مجموعه اعداد طبیعی دارای چند جواب بسته‌ای است؟

۱) ۸۱ ۲) ۸۲ ۳) $۸^۳$ ۴) $۸^۴$ (جواب: گزینه ۲)

* معادله سیاله $ax+by=c$ جواب (صحیح) دارد، اگر و تنها اگر $(a,b)|c$.

* تبدیل به معادله هم نهشتی $ax+by=c \longrightarrow ax \overset{|b|}{\equiv} c \;,\; by \overset{|a|}{\equiv} c$

* معادله سیاله خطی (دو متغیری)، $(a,b,c \in Z)$
جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد.

مثال: به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلوی را با وزنه‌های ۳ کیلویی و ۵ کیلویی وزن کرد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۲)

مثال: معادله سیاله خطی $۱۵۹x+۱۹۶y=۱۰۵۰$ در مجموعه اعداد طبیعی دارای چند جواب است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

گراف

* راس * یال * مجموعه رئوس گراف G $(V(G))$ * مجموعه یال‌های گراف G $(E(G))$

* در گراف را یکریخت می‌گوییم هرگاه راس‌های آن‌ها را بتوان طوری نام‌گذاری کرد که مجموعه یالی در گراف یکسان شود. * در گراف یکریخت تعداد رئوس برابر، تعداد یال‌های برابر دارند

* یک زیرگراف G، گرافی است که مجموعه رئوس آن، زیرمجموعه‌ای ناتهی از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های گراف G باشد.
* هر گراف، زیرگراف خودش است.
* گراف H را زیرگراف فراگیر گراف G می‌گوییم، هرگاه $E(H) \subseteq E(G), V(H)=V(G)$

* گراف ساده، همواره فاقد طوقه (فاقد یال‌های چندگانه (موازی)) است. به عبارت دیگر در گراف ساده بین دو راس، حداکثر یک یال وجود دارد و طوقه نیز وجود ندارد.

* تعداد رئوس گراف G را مرتبه گراف می‌گویند و با نماد $p(G)$ نشان می‌دهند $\to p$
* تعداد یال‌های گراف G را اندازه گراف می‌گویند و با نماد $q(G)$ نشان می‌دهند $\to q$

Scanned by TapScanner

* حداکثر تعداد یال‌های گراف ساده، با تعداد کل انتخاب‌های دو راس از راس‌های گراف برابر است. * حداکثر تعداد یال‌های یک گراف ساده از مرتبه p: $\binom{p}{2}$

مثال: در گرافی با ۲۳ یال، حداقل چند راس وجود دارد؟
۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹ (جواب: گزینه ۳)

* تعداد گراف‌های ساده از مرتبه p، که به طور دقیق دارای n یال هستند، برابر است با:
* (در این حالت راس‌ها نام‌گذاری شده‌اند)
حداکثر تعداد یال‌ها $= \binom{p}{2}$ ، $\binom{\binom{p}{2}}{n}$

مثال: با مجموعه رئوس $\{v_4, v_3, v_2, v_1\}$ چند گراف ساده با ۳ یال وجود دارد که شامل یال v_1v_2 باشند؟
۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰ (جواب: گزینه ۲)

* تعداد گراف‌های ساده از مرتبه p، برابر است با:
$$\binom{\binom{p}{2}}{0} + \binom{\binom{p}{2}}{1} + \cdots + \binom{\binom{p}{2}}{\binom{p}{2}} = 2^{\binom{p}{2}} * \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$
حداکثر تعداد یال‌ها: $n = \binom{p}{2}$

مثال: با مجموعه رئوس $\{v_4, v_3, v_2, v_1\}$ چند گراف ساده وجود دارد، که حداقل یال v_1v_2 باشند؟
۱) ۶۳ ۲) ۱۵ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴ (جواب: گزینه ۳)

مثال: با راس‌های a, b, c, d چند گراف ساده وجود دارد که شامل یال bc باشند؟
۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۶۳ ۴) ۳۲ (جواب: گزینه ۴)

* در حالتی که راس‌ها نام‌گذاری شده باشند، برای شمارش تعداد گراف‌های ساده، باید تعداد گراف‌های غیر یکریخت را، به کمک رسم گراف‌های متمایز، بیابیم.

مثال: چند گراف ساده با ۴ راس، ۳ یال وجود دارد؟ (راس‌ها نام‌گذاری شده‌اند).
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ (جواب: گزینه ۲)

* در راس گراف را مجاور (همسایه) می‌گوییم، هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند.

مثال: چند گراف ساده با راس‌های a, b, c, d, e وجود دارد به طوری که $q = 4$ و دو راس a و b مجاور و دو راس b و c غیر مجاور باشند؟
۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۵۶ (جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner

* مجموعه تمام راس‌های از گراف G که با راس v هسایه (مجاور) اند را مجموعه همسایگی باز راس v می نامند (خود v جزء مجموعه نیست)
* اگر خود راس v را به مجموعه همسایگی باز آن اضافه کنیم، مجموعه همسایگی بسته راس v بدست می آید.
* دو یال را مجاور می گوییم هرگاه در یک راس مشترک باشند (به یک راس متصل باشند)

---

* گرافی که برای تمام یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، گراف جهت دار نامیده می شود.
* در هر گراف جهت دار G، مجموعه یال‌های گراف شامل زوج‌های مرتبی است که مولفه‌های آن‌ها از مجموعه رئوس گراف هستند $E(G) \subseteq (V(G) \times V(G))$
* در این ضرب دکارتی، طرفه‌ها نیز حساب شده اند
* طرفه‌ها نوع سرنیزه‌هایی هستند که سر پیکان اول و دم پیکان دارند. ضرب دکارتی

مثال: روی مجموعه رئوس $\{c, d, e\}$ چند گراف جهت دار نامتطرفه وجود دارد.
۱) ۵۰۹ ۲) ۵۰۸ ۳) ۶۴ ۴) ۶۳ (جواب: گزینه ۳)

---

* تعداد گراف‌های جهت دار از مرتبه p، با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$، برابر است با: 2^{p^2} ($*_{(p^2)}$، طرفه‌ها نیز در نظر گرفته شده اند.)
* اگر گراف‌های جهت دار از مرتبه p با مجموعه رئوس $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ نامتطرفه و بدون طرفه مورد نظر باشد، تعداد آن‌ها برابر است با: $2^{p(p-1)}$

مثال: با راس‌های v_1, v_2, v_3, v_4 چند گراف جهت دار بدون طرفه شامل یال (v_1, v_2) وجود دارد.
۱) ۲۰۴۸ ۲) ۱۰۲۴ ۳) ۵۱۲ ۴) ۲۵۶ (جواب: گزینه ۱)

---

* تعداد یال‌هایی که به یک راس از گراف متصل اند، درجه آن راس نامیده می شود.
* در هر گراف، مجموع درجه‌های رئوس، دو برابر تعداد یال‌هاست $(\sum deg(v_i) = 2q)$
* در هر گراف مجموع درجه‌های رئوس، همواره عددی زوج است
* تعداد رئوس مرد هر گراف، همواره عددی زوج است.

مثال: در گرافی با ۱۴ یال، دو راس با درجه ۴، سه راس با درجه ۳ و چهار راس با درجه ۲ وجود دارد. اگر درجه سایر راس‌ها برابر ۱ باشد، مرتبه گراف کدام است؟
۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴ (جواب: گزینه ۳)

Scanned by TapScanner

مثال: در گرافی از مرتبه ۹ و اندازه ۱۶، درجه تمام راس ها ۳ یا ۴ است. اختلاف تعداد راس ها با درجه ۳ و تعداد راس ها با درجه ۴ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۱)

مثال: با مجموعه رئوس $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$ چند گراف ساده با $q=6$ و $\deg(V_1)=4$ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸ (جواب: گزینه ۳)

* بزرگترین درجه یک گراف: $\Delta(G)$ * کوچکترین درجه یک گراف: $\delta(G)$

$$0 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq p-1 \qquad \delta(G) \leq \deg(V_i) \leq \Delta(G)$$

* در هر گراف ساده G، از مرتبه p، راس با درجه $p-1$ را (با تمام راس های گراف مجاور است) راس مرکز (Full) می گوییم.

* در صورتی که $\delta(G) = \Delta(G) = p-1$ باشد آن گاه تمام راس های گراف مرکز هستند.

* اگر گراف ساده G دست کم یک راس منزوی داشته باشد، آن گاه حاصلضرب راس تنها است، به عبارت دیگر $\delta(G) \geq 1$.

مثال: چند گراف ساده با ۴ راس، که ماکزیمم درجه آن برابر ۲ است، وجود دارد؟ (راس ها نام گذاری شده اند)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ (جواب: گزینه ۳)

مثال: درجه های راس یک گراف ساده در کدام گزینه قابل قبول است؟

۱) ۱، ۲، ۳، ۳، ۵ ۲) ۱، ۳، ۴، ۴، ۶، ۶ ۳) ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۵، ۶ ۴) ۳، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴، ۴

(جواب: گزینه ۳)

گراف ساده نیست

مثال: آیا درجه های ۴، ۲، ۲، ۳، ۵ مربوط به یک گراف ساده هستند یا نه؟ (جواب: نه)

* اگر در یک گراف از مرتبه p، یک راس از درجه $p-1$ (راس مرکز) را حذف کنیم، آن گاه از تمام درجه راس های دیگر یک واحد کم می شود.

* اگر درجه یک راس صفر باشد آن گاه هیچ یالی به آن راس وصل شده است.

* اگر در یک گراف مرتبه p، یک راس با درجه بیشتر از $p-1$ وجود داشته باشد آن گاه آن گراف ساده نیست.

* تشخیص ساده بودن یک گراف: ① درجه های راس های گراف به طور نزولی مرتب می کنیم ② یک راس با درجه ماکزیمم را حذف می کنیم و به تعداد عدد درجه همان راس، از بقیه درجه ها، هر کدام یک واحد کم می کنیم (اگر راس با درجه m حذف شد، از m راس بعدی، هر کدام یک واحد کم می کنیم). ③ اگر در حین تکرار، ادامه کار ممکن نشد یا درجه منفی بدست آمد، گراف ساده نیست و اگر تمام درجه ها صفر شدند، گراف ساده است.

Scanned by TapScanner

مثال: آیا درجه های یک گراف ساده می توانند اعداد ۲،۲،۱،۳،۶،۱،۱،۴،۶ باشند یا نه.
جواب: بله ـ گراف ساده است.

میانگین درجه‌های گراف $= \frac{\text{مجموع درجه‌های راس‌های گراف}}{\text{تعداد راس‌ها}} = \frac{2q}{p} \leq \Delta(G) * \frac{2q}{p} \leq \delta(G)$

مثال: در گراف G با ۲۵ راس، اگر درجه هر راس حداکثر ۷ باشد، آن‌گاه بیشترین تعداد یال در گراف G کدام است؟ ۱) ۸۴ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۸۷ (جواب: گزینه ۴)

مثال: در یک گراف با میانگین درجه های ۲،۴، تعداد یال ها یکی بیشتر از تعداد راس ها است. اندازه این گراف کدام است؟ ۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸ (جواب: گزینه ۲)

مثال: ثابت کنید در یک گراف با p راس که درجه تمام راس های آن با هم مساوی و برابر عدد k باشد، از مرتبه p و اندازه q داریم: $pk = 2q$ (مجموع درجه‌های راس‌های گراف) $* \Delta(G) = \delta(G) = k$ $* 0 \leq k \leq p-1$
عددهای p و k هر دو فرد نیستند (فرد = فرد × فرد)

مثال: در یک گراف ۳ـ منتظم از مرتبه p و اندازه q، تساوی $3q = 4(p+1)$ برقرار است. حاصل $p+q$ کدام است؟ ۱) ۱۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵ (جواب: گزینه ۲)

* گرافی که درجه همه رأس‌های آن صفر باشد، گراف تهی نامیده می‌شود. به عبارت دیگر گراف G، گراف تهی است اگر و تنها اگر $E(G) = \emptyset$ یا $q = 0$ (مجموعه یال‌ها برابر تهی است)
* $\Delta(G) = \delta(G) = 0$
* گراف تهی = گراف ۰ـ منتظم

Scanned by TapScanner

گراف

* گرافی که هر راس آن با تمام راس‌های دیگر، مجاور (همایه) باشد، گراف کامل نامیده می‌شود.
* در هر گراف کامل، تمام راس‌ها هم‌درجه هستند (درجه تمام راس‌ها $(p-1)$ است.)
* گراف G، از مرتبه p، یک گراف کامل است، اگر و تنها اگر $\Delta(G)=\delta(G)=p-1$
* $\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}=q \Leftrightarrow \frac{p\times(p-1)}{2}=2q \Leftrightarrow$ گراف کامل = گراف $(p-1)$-منتظم

گراف $(p-1)$-منتظم

مثال: در یک گراف کامل، تعداد یال‌ها، پنج برابر تعداد راس‌های آن است. مجموع مرتبه و اندازه این گراف کامل کدام است؟ ۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۶۶ ۴) ۷۲ (جواب: گزینه ۳)

مثال: به یک گراف ۳-منتظم مرتبه ۶، چند یال اضافه کنیم تا گراف کامل هم‌مرتبه با آن حاصل شود؟ ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸ (جواب: گزینه ۳)

* مکمل گرافی مانند G، گرافی است که مجموعه راس‌های آن، همان مجموعه راس‌های گراف G است و یال‌های آن، تمام یال‌های رسم نشده در گراف G است. ($\overline{G}$ یا G^c)
* از ترکیب یک گراف با مکمل آن، گراف کامل به دست می‌آید. $q(G)+q(\overline{G})=\binom{p}{2}$
* گراف کامل و گراف تهی هم‌مرتبه با آن، مکمل یکدیگرند. $\deg_G(V_i)+\deg_{\overline{G}}(V_i)=p-1$

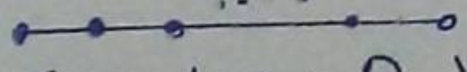
($\deg_G(V_i)$: درجه راس V_i در گراف G؛ $\deg_{\overline{G}}(V_i)$: درجه راس V_i در گراف $\overline{G}$؛ $p-1$: درجه راس مرکز (گراف کامل))

مثال: چند گراف ساده از مرتبه ۵ و اندازه ۸ وجود دارد؟ (راس‌ها نامگذاری شده‌اند) ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۲)

مثال: چند گراف ۴-منتظم مرتبه ۷ وجود دارد؟ (راس‌ها نامگذاری شده‌اند) ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۲)

مثال: نشان دهید مکمل گراف k-منتظم از مرتبه p، گراف $(p-k-1)$-منتظم از مرتبه p است.

* مسیر در گراف * طول مسیر: تعداد یال‌های موجود در مسیر را طول مسیر می‌گوییم، که همواره یکی کمتر از تعداد راس‌های موجود در مسیر است. * مسیر به طول m، همواره شامل $m+1$ راس است.
* هر یال گراف، یک مسیر به طول ۱ است. * هر راس، یک مسیر به طول صفر است.
* گرافی که تنها از یک مسیر n راسی تشکیل شده باشد، گراف P_n نامیده می‌شود.
* ۲ راس با درجه ۱ و $n-2$ راس با درجه ۲ ($\Delta=2$ و $\delta=1$)
* n راس و $n-1$ یال وجود دارد.


(n راس، P_n)

Scanned by TapScanner

مثال: در گراف P_8 چند میر به طول حداکثر ۲ وجود دارد؟
۱) ۲۸ ۲) ۲۱ ۳) ۱۴ ۴) ۱۹ (جواب: گزینه ۲)

* در گراف کامل، تمام راس ها دوبه دو مجاور (همسایه) هستند، بنابراین هر دنباله ای از راس های متمایز گراف کامل، تشکیل یک میر می دهد.

مثال: اگر ۷,۱۸ دو راس دلخواه و متمایز از گراف K_4 باشند، چند ۷-۱۸ میر متمایز وجود دارد؟
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ (جواب: گزینه ۲) گراف کامل از مرتبه ۴

مثال: در گراف K_5 (گراف کامل از مرتبه ۵)، بین دو راس دلخواه و متمایز ۷,۱۸ چند ۷-۱۸ میر وجود دارد؟
۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶ (جواب: گزینه ۴)

مثال: در گراف K_7، بین دو راس دلخواه و متمایز ۷,۱۸ چند ۷-۱۸ میر به طول ۴ وجود دارد؟
۱) ۳۰ ۲) ۶ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶ (جواب: گزینه ۲)

* میری که ابتدا و انتهایش یک راس از گراف باشد، دور نامیده می شود.
* طول دور: تعداد یال های موجود در دور را طول دور می نامند که همواره یکی کمتر از تعداد راس های موجود در دور است. (ابتدا و انتهای دور، راس های تکراری هستند)
* دوری به طول کمتر از ۳ وجود ندارد.

مثال: در گرافی با درجه راس های ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳ که در راس با درجه بزرگ تر مجاور نیستند، چند دور به طول ۴ وجود دارد؟
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

مثال: نشان دهید:
① در گراف G، اگر $\delta(G) \geq k$، آن گاه میری به طول حداقل k وجود دارد. $(k \in \mathbb{N})$
② در گراف G، اگر $\delta(G) \geq 2$، آن گاه گراف G حداقل یک دور دارد.

* گرافی که تنها از یک دور n راسی تشکیل شده باشد، گراف C_n نامیده می شود.
* هر گراف C_n، همواره ۲-منتظم n راسی است. $(\Delta = \delta = 2)$
* گراف C_n، دارای n راس و n یال است.

C_3 C_4 C_6

مثال: در یک گراف با ۲۵ راس درجه ۲، حداکثر چند دور وجود دارد؟
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۸ (جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner

* گراف K_p (گراف کامل از مرتبه p)، $p \geq 3$، همواره دوری به طول m دارد به طوری که: $m = 3, \dots, p$

* تعداد دورهای به طول m در گراف K_p، $p \geq 3$ برابر است با:

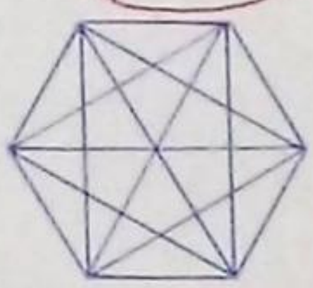
$$\left(\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}\right)$$

$\binom{p}{m}$: انتخاب m راس از p راس

$\frac{(m-1)!}{2}$: دور به طول m شامل m راس متمایز است

$(m-1)!$: حالت دایره‌ای m راس متمایز

2: نصف دورها تکراری هستند (هم طور رفت، برگشت اند)



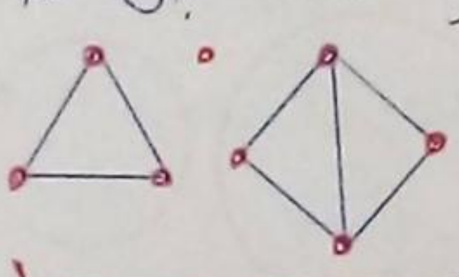
---

* یک گراف را همبند می‌گوییم هرگاه بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت آن گراف را ناهمبند می‌نامیم.

* برای تشخیص همبندی یک گراف، کافی است، کمک تجسم ذهنی، یک راس گراف را از صفحه بلند کنید، اگر تمام راس‌ها از صفحه کنده شدند، گراف همبند (اگر راس‌های) روی صفحه باقی ماند، گراف ناهمبند است.

* هر گراف ناهمبند، از چند گراف همبند تشکیل شده است، که به هر کدام یک مولفه همبندی گفته می‌شود.

* هر گراف همبند، حداقل از یک راس، حداقد راس تشکیل است، اما عکس آن لزوماً درست نیست. یعنی هر گرافی که حداقد راس تشکیل است، لزوماً همبند نیست.



سه مولفه همبندی وجود دارد.

$\delta(G) \geq 1 \Rightarrow$ گراف همبند G با مرتبه $p > 1$

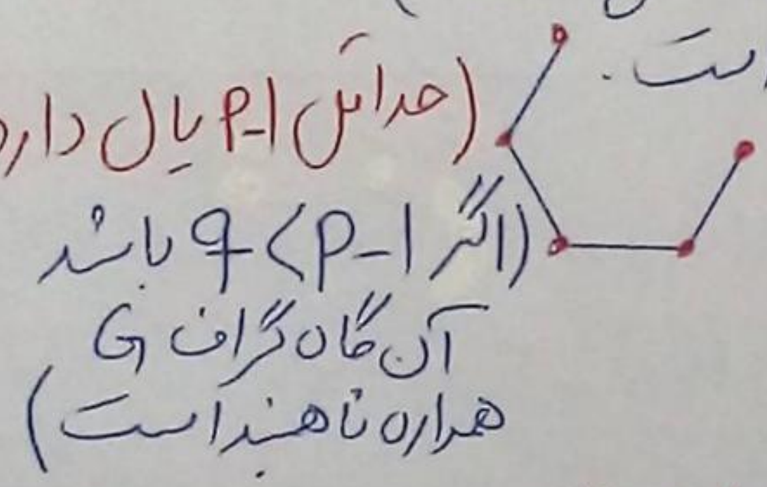
عکس آن لزوماً درست نیست

* اگر گراف G از مرتبه p، یک راس منزوی داشته باشد ($\Delta(G) = p-1$)، آن گاه گراف G همواره همبند است. (زیرا یک راس به تمام راس‌ها متصل است)

* اگر G یک گراف ناهمبند باشد، آن گاه گراف $\overline{G}$ همبند است.

* یک گراف همبند از مرتبه p، حداقل $p-1$ یال دارد.

* یک گراف ناهمبند از مرتبه p، حداکثر $\binom{p-1}{2}$ یال دارد.



(حداقل $p-1$ یال دارد)

(اگر $q < p-1$ باشد آن گاه گراف G همواره ناهمبند است)

---

* برای آن که گراف از مرتبه p، ناهمبند باشد، یک راس را تنها در نظر می‌گیریم، و با سایر راس‌ها ($p-1$ راس باقی مانده) گراف کامل می‌سازیم

* اگر در گراف G از مرتبه p و اندازه q، $q > \binom{p-1}{2}$ باشد، گراف G همواره همبند است.

کامل یکدیگر هستند

* $q = 0$ گراف تهی (T_p)

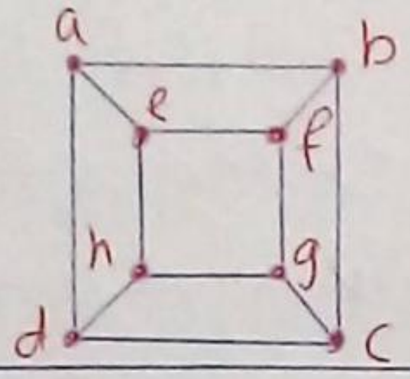
* $q = \binom{p}{2}$ گراف کامل (K_p)

$q = 0$	$q = p-1$	$q = \binom{p-1}{2}$	$q = \binom{p}{2}$
گراف تهی (T_p)	min یال‌های گراف همبند	max یال‌های گراف ناهمبند	گراف کامل (K_p)

Scanned by TapScanner

* زیرمجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه‌گر گراف G می‌گوییم، هرگاه هر راس از گراف G، یا به مجموعه D تعلق داشته باشد یا حداقل با یکی از راس‌های متعلق به مجموعه D، مجاور (همسایه) باشد.
* در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیم می‌گویند. * تعداد عضوهای مجموعه احاطه‌گر مینیم گراف G را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامند و آن را با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهند
* یک مجموعه احاطه‌گر مینیم از گراف G را، یک (γ - مجموعه) نیز می‌گویند

مثال: برای گراف شکل مقابل، کدام مجموعه، می‌تواند مجموعه احاطه‌گر مینیم این گراف باشد.



۱) $\{a,c\}$ ۲) $\{f,b,g\}$ ۳) $\{b,h\}$ ۴) $\{h,c\}$

(جواب: گزینه ۳)

* برای یافتن مجموعه احاطه‌گر مینیم گراف G: در هر مرحله راس با بیشترین درجه را در مجموعه احاطه‌گر مینیم قرار می‌دهیم و راس و راس‌های مجاور (همسایه) با آن راس را از گراف حذف می‌کنیم و در گراف جدید بدست آمده نیز این کار را تکرار می‌کنیم تا تمامی راس‌ها حذف شوند.

* اگر در گراف G از مرتبه n، راس با درجه $n-1$ (راس منزوی) وجود داشته باشد، آن‌گاه عدد احاطه‌گری گراف G برابر 1 است. $(\Delta(G)=n-1 \leftrightarrow \gamma(G)=1)$
* در هر گراف کامل، همواره $\gamma(G)=1$ * اگر در گراف G، $\gamma(G)=1$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت گراف G، یک گراف کامل است و تنها می‌توان گفت، گراف G حداقل یک راس منزوی دارد.
* گراف G، از مرتبه n با $\gamma(G)=1$، حداقل $(n-1)$ یال و حداکثر $\binom{n}{2}$ یال دارد.

مثال: در یک گراف ۸ راسی با $\gamma(G)=1$، تعداد یال‌ها برابر کدام عدد نمی‌باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴ (جواب: گزینه ۱)

* در گراف تهی، عدد احاطه‌گری با مرتبه گراف برابر است. $(\gamma(G)=n)$

مثال: نشان دهید اگر G یک گراف n راسی (از مرتبه n) باشد، آن‌گاه:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta(G)+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq (n-\Delta(G)), \quad \lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\lceil x \rceil + 1)$$

Scanned by TapScanner

مثال: نشان دهید اگر G یک گراف n راسی باشد، که فاقد راس تنهاست، آن گاه:

* در هر گراف k-منتظم G، با n راس: $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \leq \chi(G) \leq n-k$ * $\chi(G) \leq \frac{n}{2}$

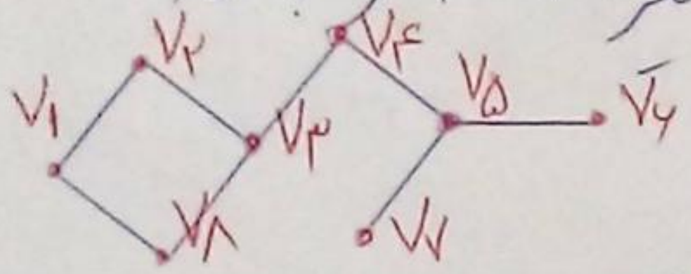
(A: گراف k-منتظم G، با n راس) — (برای هر گراف همبند بایش از یک راس نیز برقرار است.)

مثال: نشان دهید عدد احاطه گری در هر گراف P_n و C_n برابر است با:

$$\chi(P_n) = \chi(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

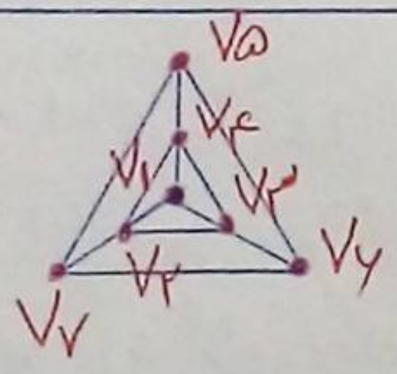
---

* یک مجموعه احاطه گر گراف G، که با حذف هر یک از راس هایش دیگر احاطه گر نباشد، مجموعه احاطه گر مینیمال گراف می نامند.



* مجموعه $S = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمال است.
* مجموعه $S' = \{v_1, v_3, v_5\}$ نیز یک مجموعه احاطه گر مینیمال است.
* مجموعه احاطه گر $\{v_1, v_2, v_5\} = S''$، مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف G است.
* هر مجموعه احاطه گر مینیمم گراف G، همواره یک مجموعه احاطه گر مینیمال گراف G نیز است. اما عکس این مطلب همواره درست نیست.

مثال: برای گراف G، در شکل زیر، کدام یک مجموعه احاطه گر مینیمال نیست؟



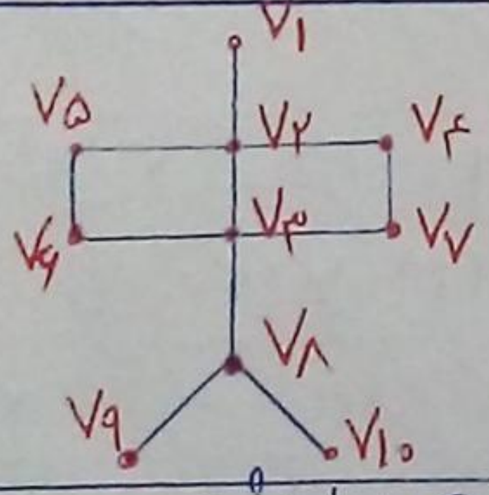
۱) $\{v_2, v_3, v_4\}$ ۲) $\{v_1, v_6\}$ ۳) $\{v_2, v_5, v_3\}$
۴) $\{v_2, v_5, v_3\}$

(جواب: گزینه ۳)

مثال: در گراف P_{12}، مجموعه احاطه گر مینیمال، حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ (جواب: گزینه ۳)

مثال: با توجه به گراف شکل مقابل، از مجموعه $\{v_1, v_2, v_3, v_8, v_9, v_{10}\}$، حداکثر چند عضو حذف کنیم تا مجموعه احاطه گر مینیمال حاصل شود؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

(تنها)

* اگر G گرافی فاقد راس تنها باشد و S یک مجموعه احاطه گر مینیمال گراف G فرض شود، آن گاه مجموعه $V(G) - S$ یک مجموعه احاطه گر گراف G است.

مجموعه رئوس گراف G

Scanned by TapScanner

ترکیبیات

* اصل ضرب

مثال: 5 جاده به تپه کوهی می روند. اگر بخواهیم از یک جاده بالا رفته و از جاده دیگری پایین بیاییم، این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۵ (جواب: گزینه ۳)

* اصل جمع

مثال: چند ماتریس 2×3 با عناصر صفر و یک می توان ساخت؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۰ ۳) ۶۴ ۴) ∞ (جواب: گزینه ۳)

مثال: مجموعه $\{\{b\},\{a\},a,b\}$ دارای چند زیرمجموعه شامل عضو a است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۸ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

* تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی که شامل (یا فاقد) k عضو معلوم باشد برابر است با 2^{n-k}

مثال: با ارقام ۷، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام متمایز می توان ساخت؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۲۵ ۴) ۳۰۰ (جواب: گزینه ۳)

* متمم

مثال: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد سه رقمی می توان ساخت که در هرکدام حداقل یک رقم تکراری وجود داشته باشد؟

۱) ۴۰ ۲) ۲۸ ۳) ۶۰ ۴) ۴۶ (جواب: گزینه ۱)

* تعداد جایگشت های خطی n شی متمایز برابر است با $n!$

مثال: به چند طریق می توان با ۶ دانش آموز، نام های a، b، c، d، e، f یک صف ۵ نفری تشکیل داد؟

۱) $5!$ ۲) $6!$ ۳) $6!\times5$ ۴) $\frac{6!}{2}$ (جواب: گزینه ۲)

* تعداد جایگشت های $(n-1)$ تایی n شی با تعداد جایگشت های n شی برابر است. $(n!)$

مثال: ۵ دختر و ۴ پسر اعضای یک خانواده اند و می خواهند در یک صف بایستند به طوری که پسرها کنار هم باشند. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

۱) $5!\times4!$ ۲) $4!\times6!$ ۳) $5!\times6!$ ۴) $4!\times5!\times6!$ (جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

مثال: ۵ دختر و ۴ پسر اعضای یک خانواده‌اند و می‌خواهند در یک صف بایستند به طوری که دخترها کنار هم و پسرها کنار هم باشند. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

۱) $5!\times 4!$ ۲) $6!\times 4!$ ۳) $5!\times 5!$ ۴) $2\times 5!\times 4!$ (جواب: گزینه ۴)

مثال: ۵ دختر و ۴ پسر اعضای یک خانواده‌اند و می‌خواهند در یک ردیف بایستند.
در چند حالت دخترها و پسرها یکی در میان ایستاده‌اند؟

۱) $5!\times 4!$ ۲) $6!\times 4!$ ۳) $2\times 5!\times 4!$ ۴) $5!\times 5!$ (جواب: گزینه ۱)

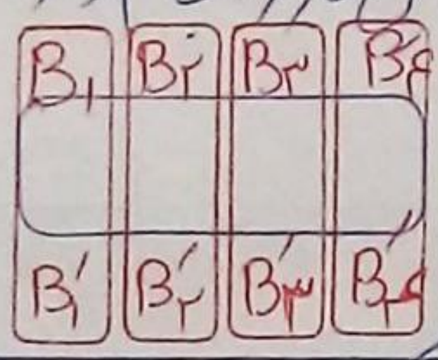
* در سوال بالا اگر تعداد پسرها و دخترها با هم برابر باشند (به عنوان مثال ۵ دختر و ۵ پسر) در حالت پیش می‌آید: $\{$ د ب د ب د ب د ب د ب / ب د ب د ب د ب د ب د $\}$ (د: دختر، ب: پسر)

مثال: ۵ دختر و ۵ پسر اعضای یک خانواده‌اند و می‌خواهند در یک ردیف بایستند.
در چند حالت دخترها و پسرها یکی در میان ایستاده‌اند؟

۱) $5!\times 4!$ ۲) $6!\times 4!$ ۳) $2\times 5!\times 4!$ ۴) $5!\times 5!\times 2$ (جواب: گزینه ۴)

مثال: می‌خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۳۸۴ ۲) ۲۵۶ ۳) ۱۹۲ ۴) ۹۶ (جواب: گزینه ۱)



مثال: پنج نفر به نام‌های A، B، C، D و E قرار است در یک سنخوانی شرکت کنند.
ترتیب سنخوانی این افراد به چند طریق ممکن است در صورتی که شخص A بلافاصله بعد از B سنخوانی کند؟ ۱) ۹۶ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲ (جواب: گزینه ۳)

مثال: تعداد اعداد سه رقمی با ارقام ۱ تا ۹، به شرط آن که تکرار مجاز نباشد، چقدر است؟
جواب: $9\times 8\times 7 = 504$

---

* تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه n عضوی $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ * بدون در نظر گرفتن ترتیب

مثال: با ۸ نقطه واقع بر محیط یک دایره چند مثلث می‌توان ساخت؟
۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۵۶ ۴) ۷۰ (جواب: گزینه ۳)

Scanned by TapScanner

مثال: مجموع $\binom{14}{13}+\binom{14}{3}+\cdots+\binom{14}{2}$ برابر کدام است؟

۱) $2^{14}-2$ ۲) $2^{14}-14$ ۳) $2^{14}-16$ ۴) $2^{14}-30$ (جواب: گزینه ۳)

کل تعداد زیرمجموعه‌ها ← $2^n=\binom{n}{n}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$

$\binom{n}{0}$: تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی

$\binom{n}{1}$: تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی

$\binom{n}{2}$: تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی

$\binom{n}{n}$: تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی (خود مجموعه)

$*\left(\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\right)$

مثال: نشان دهید برای محاسبه $\binom{n}{2}$ می‌توانیم کا عدد متوالی با شروع از n و به صورت نزولی را به صورت کسر و ۲ عدد متوالی و با شروع از یک و به صورت صعودی از مخرج کسر را از هم ضرب کنیم.

$*\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}$ $*\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ $*\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

* زیرمجموعه صفر عضوی: تهی
* زیرمجموعه n عضوی: (خود مجموعه)

$\binom{n}{2}$: در یک مجموعه n عضوی تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی، $n-2$ عضوی با هم برابرند

$\binom{n}{1}$: در یک مجموعه n عضوی تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی و تعداد زیرمجموعه‌های $(n-1)$ عضوی با هم برابرند

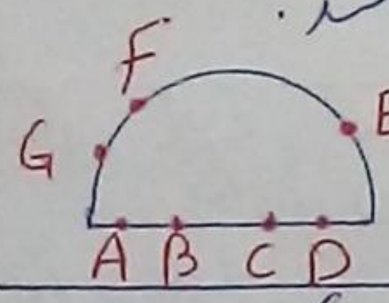
$*\binom{n}{x}=\binom{n}{y} \longleftrightarrow (x+y=n)\vee(x=y)$

* یا x و y با هم برابرند یا مجموع آن‌ها برابر n است.

مثال: مقدار n از معادله $\binom{18}{2n-3}=\binom{18}{n}$ کدام است؟

۱) فقط ۳ ۲) فقط ۵ ۳) ۳ یا ۷ ۴) ۳ یا ۵ (جواب: گزینه ۳)

مثال: چند مثلث می‌توان رسم کرد که راس‌های آن‌ها نقاط داده شده در شکل روبرو باشد.



۱) ۳۱ ۲) ۳۵ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰ (جواب: گزینه ۱)

مثال: از بین ۷ نفر مرد و ۴ نفر زن می‌خواهیم یک گروه ۵ نفره انتخاب کنیم به طوری که حداقل ۳ عضو گروه مرد باشند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) $\binom{7}{3}\binom{4}{2}$ ۲) $\binom{7}{5}\binom{4}{2}$ ۳) ۳۵۰ ۴) ۳۷۱ (جواب: گزینه ۴)

مثال: از میان ۵ زوج پدر و پسر، ۴ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. در چند حالت دقیقاً یک زوج پدر و پسر در میان آن‌ها وجود دارد؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۵ (جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner

مثال: از هریک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیرهم منطقه‌ای هستند انتخاب کرد؟
۱) ۵۷۶۰۰ ۲) ۶۷۵۰۰ ۳) ۷۱۶۰۰ ۴) ۷۶۵۰۰ (جواب: گزینه ۲)

مثال: گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. در این صورت چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟
۱) ۳۶۵ ۲) ۴۳۶ ۳) ۵۸۲ ۴) ۶۲۴ (جواب: گزینه ۳)

مثال: یک آشپزخانه ۵ نوع ادویه دارد و با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم جدید درست می‌کند. اگر در نوع ادویه متمایز باهم استفاده شوند این آشپز چند طعم مختلف می‌تواند درست کند؟
۱) ۱۱۲ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۹۲ ۴) ۲۱۰ (جواب: گزینه ۱)

مثال: در سوال قبل اگر ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم شوند به طوری که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری نداشته باشند، در این صورت چند طعم جدید حاصل می‌شود؟
۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۵ (جواب: گزینه ۲)

مثال: تعداد حالت‌های انتخاب k شی از میان n شی به طوری که:
① شامل k شی مشخص باشد برابر است با $\binom{n-k}{r-k}$ (* $\binom{n-k}{r-k}$)
② حامل k شی مشخص باشد برابر است با $\binom{n-k}{r}$

مثال: ثابت دهید $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$ *

مثال: مجموع $\binom{10}{5}+\binom{10}{4}2+\binom{10}{3}$ برابر کدام است؟
۱) $\binom{12}{5}$ ۲) $\binom{12}{6}$ ۳) $\binom{11}{6}$ ۴) $\binom{10}{6}$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: از میان شش کتاب مختلف به چند طریق می‌توان چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم چید.
۱) ۳۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴ (جواب: گزینه ۱)

کتاب‌ها
$6\times5\times4\times3=360$ حالت
قفسه‌ها

Scanned by TapScanner

مثال: ۵ دختر و ۴ پسر اعضای یک خانواده‌اند و می‌خواهند در یک ردیف بنشینند، به طوری که هیچ دو پسری کنار هم نباشند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (جواب: گزینه ۴)

۱) $5! \times 4!$ ۲) $5! \times 4! \times 2$ ۳) $\binom{5}{4} \times 5! \times 4!$ ۴) $\binom{6}{4} \times 5! \times 4!$

مثال: ده مهره سیاه یکسان و ۷ مهره سفید یکسان را به چند طریق می‌توان در یک ردیف قرار داد به طوری که هیچ دو مهره سفیدی پهلوی هم نباشند؟ (جواب: گزینه ۴)

۱) $7! \binom{11}{7} 10!$ ۲) $\binom{11}{7} 10!$ ۳) $\binom{11}{7} 10!$ ۴) $\binom{11}{7} 7!$

مثال: با حروف کلمه «جهانگردی» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری که همگی شامل حروف «ه» و «گ» باشند و حاصل حرف «ا» باشد و با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۱۴۴ (جواب: گزینه ۲)

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۱) ۲۴۰۰ ۲) ۳۶۰۰ ۳) ۶۳۰۰ ۴) ۷۲۰۰ (جواب: گزینه ۴)

* جایگشت دایره‌ای: تعداد حالت‌های قرارگرفتن n شیء متمایز بر روی یک میز دایره‌ای: $(n-1)!$

* تعداد دستبندهایی که با n مهره متمایز می‌توان ساخت برابر است با $\frac{(n-1)!}{2}$

مثال: ۵ پسر و ۳ دختر دور یک میز دایره‌ای می‌نشینند. در چند حالت هیچ دو دختری پهلوی هم نیستند؟

۱) $2 \times 6!$ ۲) $6!$ ۳) $4 \times 5!$ ۴) $3 \times 5!$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: به چند طریق می‌توان ۸ نفر را که دو به دو برادرند، دور یک میز نشاند به طوری که هر نفر روبروی برادرش ننشیند؟ ۱) ۱۲ ۲) ۹۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸ (جواب: گزینه ۴)

مثال: با ارقام ۰، ۰، ۲، ۲، ۲، ۴، ۳، ۱ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت؟

۱) $\frac{7!}{3! \times 2!}$ ۲) $\frac{8!}{3! \times 2!}$ ۳) $\frac{7!}{3!}$ ۴) $\frac{7!}{2!}$ (جواب: گزینه ۴)

مثال: چند جایگشت ۱۰ حرفی از حروف کلمه «Mississippi» وجود دارد.

۱) $\frac{10!}{3! \times 3! \times 2!}$ ۲) $\frac{10!}{2! \times 3! \times 4!}$ ۳) $\frac{10!}{2! \times 4! \times 4!}$ ۴) $\frac{11!}{2! \times 4! \times 4!}$ (جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner

مثال: با ارقام ۶، ۶، ۴، ۴، ۲، ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸ (جواب: گزینه ۳)

مثال: چند کلمه ۳ حرفی با حروف کلمه «عاشورا» می‌توان ساخت؟

۱) ۳۳ ۲) ۲۷ ۳) ۵۴ ۴) ۷۲ (جواب: گزینه ۴)

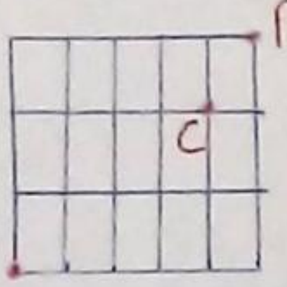
مثال: در یک جلسه قرار است ۵ نفر سخنرانی کنند. در چند حالت شخص A بعد از شخص B صحبت می‌کند.

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰ (جواب: گزینه ۳)

مثال: در یک جلسه قرار است ۵ نفر سخنرانی کنند. در چند حالت A بعد از B و B بعد از C صحبت می‌کند.

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۴۸ (جواب: گزینه ۱)

مثال: در شکل زیر چند مسیر از A به B وجود دارد، که کوتاهترین مسیر بوده و از نقطه C بگذرد.



۱) ۵۵ ۲) ۴۸ ۳) ۳۰ ۴) ۲۴ (جواب: گزینه ۳)

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ نفر را در گروه ۲ نفره تقسیم کرد.

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰ (جواب: گزینه ۲)

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر را به ۳ گروه ۲ نفره و یک گروه ۴ نفره تقسیم کرد.

۱) ۶۳۰۰ ۲) ۲۱۰۰ ۳) ۱۰۵۰ ۴) ۳۱۵۰ (جواب: گزینه ۱)

مثال: به چند طریق می‌توان $\frac{10}{10}$ نفر را به ۳ گروه ۲ نفره و یک گروه ۴ نفره تقسیم کرد.

۱) ۶۳۰۰ ۲) ۲۱۰۰ ۳) ۱۰۵۰ ۴) ۳۱۵۰ (جواب: گزینه ۴)

مثال: مجموعه $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ چند افراز ۳ عضوی دارد؟

۱) ۱۴۵ ۲) ۳۵۱ ۳) ۳۵۰ ۴) ۲۰۳ (جواب: گزینه ۲)

* تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$ (اثبات به عنوان تمرین)

* تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی (حسابی) معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n+(k-1)}{k-1}$ (اثبات به عنوان تمرین)

Scanned by TapScanner

مثال: ۶ نفر می خواهند با استفاده از سه وسیله نقلیه یکسان سفری را انجام دهند به طوری که از هر سه وسیله نقلیه استفاده شود. تعداد روش های ممکن برای انجام این سفر را به دست آورید.

(جواب) * دو گروه یک نفره و یک گروه ۴ نفره $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 15$ سه گروه ۲ نفره، $\frac{\binom{6}{4}\binom{5}{1}\binom{1}{1}}{2!} = 15$

$\binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{3} = 60$ ← گروه های ۱، ۲، ۳ نفره $\rightarrow 15+60+15 = 90$

* حال اگر شرط خالی نماندن وسیله نقلیه را نداشتیم، باید افرادهای ۲ عضوی و ۱ عضوی که تعدادشان به ترتیب ۳ و ۱ است را نیز به جواب فوق اضافه می کردیم.

* تعداد روش های توزیع n شی متمایز در k جعبه یکسان که هیچ جعبه ای خالی نماند، برابر است با تعداد افرازهای k عضوی یک مجموعه n عضوی.

* تعداد روش های توزیع n شی متمایز در k جعبه یکسان برابر است با مجموع تعداد افرازهای 1 عضوی تا k عضوی یک مجموعه n عضوی.

مثال: چند دسته ۳ تایی گل از ۵ نوع گل مختلف می توان ساخت؟ (تکرار مجاز است)

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۵ ۴) ۲۱ (جواب: گزینه ۳)

مثال: به چند طریق می توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آن که از هر نوع گل حداقل یک شاخه انتخاب شود؟

۱) ۲۸ ۲) ۵۶ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲ (جواب: گزینه ۲)

مثال: معادله $x_4 = x_3 + x_2 + \sqrt{x_1} + 3$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۲۱ (جواب: گزینه ۱)

مثال: معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ چند جواب طبیعی دارد که $x_1 \geq 2$ و $x_2 > 3$ باشد؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۳۶۴ ۴) ۲۸۶ (جواب: گزینه ۲)

مثال: معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به طوری که دقیقاً ۲ تا از آن ها (x_iها) برابر صفر باشند؟ ۱) ۱۲۵ ۲) ۲۱۰ ۳) ۹۶ ۴) ۱۹۲

(جواب: گزینه ۲)

مثال: تعداد جواب های صحیح و غیرمنفی نامساوی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵ (جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner

* هر مربع لاتین از مرتبه n یک جدول (ماتریس) nxn است، که درایه های آن با اعداد 1 و ... و n پر شده اند، به طوری که هرکدام (دقیقاً) یک بار در هر سطر و ستون ظاهر شوند. به عبارت دیگر در هیچ سطر آن و در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود ندارد.

* مربع لاتین جرخشی * سطر اول آن با اعداد 1 و ... و n پر شده است.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

* با شروع از سطر اول هر سطر را یک واحد به جهت راست انتقال دهیم و عدد خارج شده را در اولین خانه سطر بعد قرار دهیم این کار را برای تمامی سطرها تکرار نماییم، یک مربع لاتین جرخشی به دست می آید.

مثال: در یک مربع لاتین جرخشی 10x10، که سطر اول آن با اعداد 1 و ... و 10 پر شده اند، اگر درایه سطر iام و ستون jام را با نماد a_{ij} نمایش دهیم، حاصل $a_{47} - a_{81}$ کدام است؟

(جواب: گزینه ۳)

1) 2 2) 5 3) صفر 4) 1

مثال: تعداد مربع های لاتین مرتبه 1، 2 و 3 به ترتیب 1، 2 و 12 است. $K \times [n! \times (n-1)!]$

مثال: قرار است سه سنجران، در سه شبکه رادیویی A، B و C، در سه روز اول هفته سنجرانی کنند، به طوری که هر شخص در هر روز و در هر شبکه (دقیقاً) یک بار سنجرانی کند. اگر شخص P در روز شنبه در شبکه رادیویی C سنجرانی داشته باشد، به چند طریق می توان برای این سنجرانی ها برنامه ریزی کرد.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 (جواب: گزینه ۴)

* با تعویض جای دو سطر (و یا دو ستون) از یک مربع لاتین، باز هم یک مربع لاتین حاصل می شود.

* در هر مربع لاتین، با اعمال یک جابجایی بررسی اعداد 1، 2، ...، n یک مربع لاتین جدید حاصل می شود.

* دو مربع لاتین متعامد * اگر در مربع لاتین A و B هم مرتبه باشند، به طوری که از کنار هم قرار دادن نظیر به نظیر درایه های این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود، هر درایه آن حاوی یک عدد دورقمی خواهد بود که تمامی رقم های سمت چپ (دهگان) مربوط به مربع A و تمامی رقم های سمت راست (یکان) مربوط به مربع B است (یا برعکس). مربع های A و B را متعامد می گوییم در صورتی که در مربع جدید عدد دورقمی تکراری وجود نداشته باشد.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲→۳، ۳→۲، ۱→۱

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

* دو مربع A و B در شکل مقابل متعامد هستند، زیرا در مربع AB هیچ کدام از اعداد ۲ رقمی تکراری نیستند

A= | | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |

B= | | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۲ |
| ۳ | ۲ | ۱ |
| ۲ | ۱ | ۳ |

AB= | | | |
|---|---|---|
| ۱۱ | ۲۳ | ۳۲ |
| ۳۳ | ۲۲ | ۱۱ |
| ۲۲ | ۳۱ | ۱۳ |

Scanned by TapScanner

* برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین یک راه می تواند این باشد که یک عدد از مربع لاتین A، مثلا ۲ را انتخاب کنیم و در تمامی همان هایی که در مربع لاتین A عدد ۲ وجود دارد، در ماتریس متناظرشان در ماتریس B را رنگ آمیزی کنیم. اگر در دو درایه رنگ آمیزی شده عدد تکراری داشتیم، دو مربع لاتین B, A متعامد نیستند.

* برای $n=1, 2, 6$ مربع لاتین متعامد مرتبه n وجود ندارد.

* اگر $n \neq 1, 2, 6$، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n همواره وجود دارد.

* در مربع لاتین 3×3، اگر جای دو سطر (دو ستون) تعویض شوند، مربع لاتین حاصل با مربع لاتین اولیه همواره متعامد است.

* از آن جایی که در یک مربع لاتین 3×3، می توان سه بار جابجایی هر دو سطر با هم و سه بار جابجایی هر دو ستون با هم، اعمال کرد، بنابراین ۶ حالت مربع لاتین متعامد 3×3 همواره وجود دارد.

* در مربع لاتین 3×3، اگر بیش از یک بار جابه جایی دو سطر (دو ستون) اعمال شود، مربع لاتین نهایی با مربع لاتین اولیه متعامد نیست.

* هر مربع لاتین مرتبه 3×3، تنها با مربع لاتین حاصل از یک مرحله اعمال تعویض های دو سطر (دو ستون) خود، متعامد است.

* اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که از اعمال حالتی بر روی درایه های یکی از آن ها بدست می آید، با مربع لاتین دیگر متعامد است. ($\begin{cases} 1 \to 1 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 2 \end{cases}$ حالتی بر روی درایه ها)

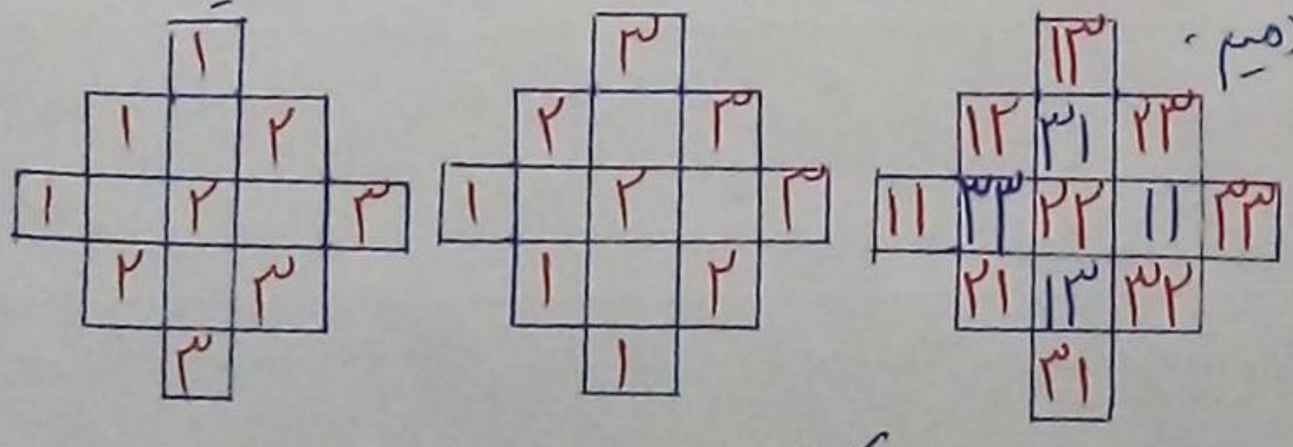
(مربع لاتین حاصل از اعمال حالتی روی درایه های یک مربع لاتین، با مربع لاتین اولیه متعامدیست. $(A, B \to A', B \to B, A \to B', A')$)

* روشی برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه فرد: * ابتدا دو مربع $n \times n$ از مرتبه فرد رسم می کنیم و از هر چهار طرف طرری خانه اضافه می کنیم، که همه ردیف های موازی با قطر اصلی n درایه داشته باشند.

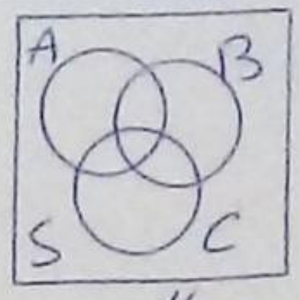
* مطابق شکل اعداد ۱ تا n را در جدول ها قرار می دهیم.

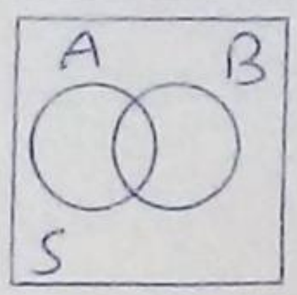
* اعداد مربع وسط را در درایه های خارج مربع را، مطابق شکل طرری به داخل آن انتقال می دهیم، که هر کدام به درایه خالی در قطر خود به اندازه n واحد منتقل شوند.

* حال مربع به دست آمده را به دو مربع لاتین متعامد تبدیل می کنیم



Scanned by TapScanner





* اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

* اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

$|A\cup B\cup C|$

* متمم گیری را دست آوردن ساده تر است ما با استفاده از نمودار ون

مثال: چند عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ وجود دارد، که نسبت به ۳۲۵ اول باشد؟ (p)
۱) ۷۲۷ ۲) ۷۲۴ ۳) ۷۳۹ ۴) ۵۴۰۴ (جواب: گزینه ۳) (p) نباشد

مثال: چند عدد طبیعی مانند n، به طوری که $1 \le n \le 350$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۵، ۴ و ۶ بخش پذیر نباشد؟ (p)
۱) ۱۵۱ ۲) ۱۶۳ ۳) ۱۷۹ ۴) ۱۸۷ (جواب: گزینه ۴)

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ چند عدد ۶ رقمی می توان ساخت که در آن ها هر یک از این ارقام حداقل یک بار ظاهر شوند؟ (p)
۱) ۷۲۹ ۲) ۵۴۰ ۳) ۶۳۰ ۴) ۶۰۴ (جواب: گزینه ۲)

مثال: به چند طریق می توان بین ۶ روستا جاده کشید؟ به شرطی که (حتماً) سه روستا منزوی باشند؟ (p)
۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۹۰ (جواب: گزینه ۲)

* تعداد توابع از مجموعه A به مجموعه B برابر است با $|B|^{|A|}$
(تعداد روش های توزیع n شی متمایز در k جعبه متمایز برابر است با k^n)

مثال: به چند طریق می توان یک سیب، یک پرتقال و یک گلابی را بین ۵ نفر توزیع کرد. (p)
۱) ۱۲۵ ۲) ۲۴۳ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰ (جواب: گزینه ۲)

تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ← تعداد توابع پوشا از یک مجموعه
n عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی — n عضوی به یک مجموعه ۲ عضوی

مثال: به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آن که به هر نفر حداقل یک خودکار برسد؟ (p)
۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰ (جواب: گزینه ۲)

مثال: چند تابع پوشا از مجموعه $\{5,4,3,2,1\}$ به مجموعه $\{a,b,c\}$ می توان تعریف کرد، به طوری که $f(1) = a$ باشد؟ (p)
۱) ۴۹ ۲) ۵۰ ۳) ۴۸ ۴) ۵۱ (جواب: گزینه ۲)

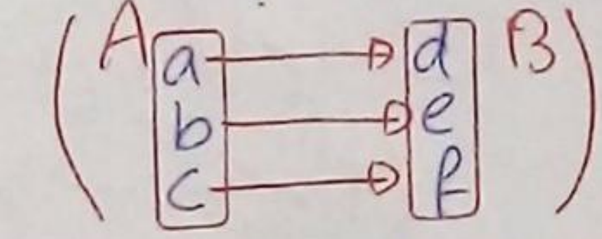
* تابع پوشا = تابع f از A به B پوشا است هرگاه $Rf = B$. یعنی تمام اعضای B در برد تابع شرکت کنند.
* تابع یک به یک = هیچ کدام از سطرهای دوم زوج های مرتب آن، تکراری نباشند.

Scanned by TapScanner

* تعداد توابع پوشا روی یک مجموعه n عضوی برابر است با $n!$ (که همگی یک به یک نیز هستند)
(یکی از توابع پوشا را به دست می آوریم، برای یافتن یک تابع پوشای دیگر جای خانه ها را عوض می کنیم. به عبارت دیگر حالتی n خانه مطرح می شود، که تعداد آن $n!$ است.)

مثال: روی مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ چند تابع پوشا می توان تعریف کرد
۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۳ ۳) ۶۴۳ ۴) ۲۴ (جواب: گزینه ۴)

مثال: ادامه دهید:
① تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B برابر است با: $\frac{|B|!}{(|B|-|A|)!}$ ، $(|A|\leq|B|)$



② هرگاه $|A|<|B|$ باشد آن گاه تعداد توابع پوشا از $A\to B$ برابر صفر است.
③ هرگاه $|A|>|B|$ باشد آن گاه تعداد توابع یک به یک از $A\to B$ برابر صفر است.

مثال: به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد، به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد؟ (هیچ مدرسه ای بیش از یک خودکار دریافت نکند.)
۱) ۱۲۱۰ ۲) ۱۶۸۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۸۰۰ (جواب: گزینه ۲)

* اصل لانه کبوتری
$$\left\lceil \frac{\text{تعداد کبوترها}}{\text{تعداد لانه ها}} \right\rceil = \left[\frac{\text{تعداد کبوترها}}{\text{تعداد لانه ها}} \right] + 1$$

مثال: نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه بزرگ تر از یک، حداقل دو راس با درجه یکسان وجود دارد. (راهنمایی: دو حالت در نظر می گیریم ← گراف راس تنها (ایزوله) نداشته باشد / گراف راس تنها (ایزوله) داشته باشد)

مثال: در هر کلاس بیش از یک دانش آموز، حداقل دو نفر جرد دارند که تعداد دوستان آن ها در کلاس برابر است

مثال: درون یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد، ۱۰ نقطه به تصادف اختیار می کنیم. حداقل ۲ نقطه بین این نقاط یافت می شود که فاصله آن ها از یکدیگر کمتر از (یک) است.

Scanned by TapScanner

مثال: درون یک مستطیل به ابعاد ۶×۸، اگر ۱۳ نقطه به دلخواه انتخاب گردد، آن گاه حداقل دو نقطه از آن ها حداقل به فاصله‌ای کمتر از ..... از یکدیگر دارند.

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) ۱ (جواب: گزینه ۲)

مثال: در صفحه مختصات حداقل چند نقطه با مختصات صحیح در نظر بگیریم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه وجود دارد که مختصات نقطه وسط این دو نقطه اعدادی صحیح اند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ (جواب: گزینه ۲)

مثال: هر زیرمجموعه n عضوی از مجموعه $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۸۴\}$، به طور یقین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو برابر ۸۵ است. حداقل n کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۲ ۳) ۴۳ ۴) ۴۴ (جواب: گزینه ۳)

مثال: هر زیرمجموعه n عضوی از مجموعه اعداد $A=\{۱,۵,۹,۱۳,\ldots,۸۱,۸۵\}$، به طور یقین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو برابر ۹۰ است. کمترین مقدار n کدام است؟ (تردد)

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵ (جواب: گزینه ۲)

مثال: در یک دبیرستان با ۵۰۵ دانش آموز، حداقل چند نفر روز هفته و ماه تولدشان یکسان است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰ (جواب: گزینه ۱)

مثال: در یک زیرمجموعه ۷۰ عضوی از اعداد صحیح، حداقل چند عضو با باقی‌مانده یکسان در تقسیم بر عدد ۱۵ وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸ (جواب: گزینه ۱)

مثال: در کیسه‌ای ۵ گوی سفید، ۴ گوی قرمز و ۳ گوی سبز وجود دارد. حداقل چند گوی از کیسه خارج کنیم تا مطمئن باشیم بیش از ۳ گوی سفید یا بیش از ۲ گوی قرمز خارج شده است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ (جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

* سیر تکاملی مدل اتمی:

دالتون ← تامسون ← رادرفورد ← بور
(مدل توپ بیلیارد) (مدل کیک کشمشی) (مدل هسته ای) (مدل سیاره ای)

← شرودینگر
(مدل ابر الکترونی)

کمیت { نرده ای (عددی - اسکالر): تنها با یک عدد و یکا بیان می شود.
(جرم، تندی، شدت جریان الکتریکی و ...)
بردار: علاوه بر عدد و یکا، جهت نیز برای آن بیان می شود / دارای قواعد جمع برداری پیروی می کند. (سرعت، جابجایی، شتاب، وزن و ...)
(|$\vec{V}$| یا (مقدار سرعت) V * (بردار سرعت) $\vec{V}$ *)

مثال: شخصی ۳۰ متر به سمت شمال و سپس ۴۰ متر به سمت غرب می رود. مسافت طی شده / جابجایی شخص به ترتیب از راست به چپ چه قدر است؟
کمیت نرده ای / کمیت برداری
(جواب: گزینه ۴)
۱) ۷۰، ۷۰ ۲) ۱۰، ۱۰ ۳) ۵۰، ۵۰ ۴) ۷۰، ۵۰

---

* کمیت اصلی: کمیت هایی که به طور مستقل انتخاب شده اند و برای آن ها یکای مستقل مشخص شده است را کمیت اصلی و یکای آن ها، یکاهای اصلی می گویند.
① طول (m)، متر ② جرم (kg)، کیلوگرم ③ زمان (s)، ثانیه ④ مقدار ماده (mol) مول
⑤ دما (K)، کلوین ⑥ شدت روشنایی (cd) کندلا (شمع) ⑦ جریان الکتریکی (A) آمپر

---

* کمیت فرعی: کمیت هایی که بر حسب کمیت های اصلی و به کمک روابط، تعیین می شوند، کمیت فرعی و یکای آن ها، یکای فرعی می گویند

مثال: یکای نیرو و انرژی در SI به ترتیب نیوتون و ژول می باشد. این دو یکا را بر حسب یکاهای اصلی به دست آورید. (وزن $W=mg$)
($F=ma$ ، کار = جابجایی × نیرو)
* یکای انرژی از روابط دیگری نظیر رابطه انرژی جنبش ($K=\frac{1}{2}mV^2$) نیز قابل محاسبه است.

Scanned by TapScanner

* تعریف یکاهای اصلی پرکاربرد * متر (طول) * (جرم) کیلوگرم و ثانیه (زمان)

* پیشوندهای یکاها

10^{12}	ترا	T	10^{-12}	پیکو	p
10^{9}	گیگا	G	10^{-9}	نانو	n
10^{6}	مگا	M	10^{-6}	میکرو	μ
10^{3}	کیلو	k	10^{-3}	میلی	m
10^{2}	هکتو	h	10^{-2}	سانتی	c
10	دکا	da	10^{-1}	دسی	d

$x(m/s) = 3{,}6 \times x(km/h)$

* تبدیل متر بر ثانیه به کیلومتر بر ساعت

(m/s) (km/h)

*(1cal = 4,2J)

مثال: هر $\frac{m}{(\mu s)^3}$ برابر چند $\frac{m}{(Gs)^3}$ است؟ $\left(1\left(m/(\mu s)^3\right) = 10^{45}\left(m/(Gs)^3\right)\right)$ جواب:

مثال: در رابطه $A = BC^2$ اگر A برحسب ژول، B برحسب کیلوگرم باشد، یکای C چیست؟

*$(K = \frac{1}{2}mv^2)$ (جواب: C یکای = m/s)

* نمادگذاری علمی: $a \times 10^n$ ، $(1 \le a < 10)$ ، n عددی صحیح با علامت (+) مثبت یا (-) منفی است

* کمیت های مختلف با یکاهای مختلف، می توانند در یکدیگر ضرب شوند $(W = mg)$

* در جمع و تفریق، حتماً باید یکاها یکسان باشد.

* دقت هر وسیله کم ترین مقداری است که می تواند اندازه گیری کند

* در وسایل درجه بندی شده مانند خط کش، خطای اندازه گیری برابر است با $\pm \frac{1}{2}$ کمینه تقسیم بندی وسیله و برای وسایل دیجیتال (رقمی) یک واحد از آخرین رقمی که روی صفحه نشان می دهد

* در هنگام گزارش دادن نتیجه اندازه گیری، باید رقم غیرقطعی نیز بیان شود.

* در هنگام تبدیل یکای بزرگ به کوچک مانند سانتی متر به میلی متر به دو برابر رقم غیرقطعی ترجمه کنید.

* تعداد رقم های اعشاری خطا باید با تعداد رقم های اعشاری عدد گزارش شده یکسان باشد.

تعداد رقم های با معنا	رقم غیرقطعی	کمینه تقسیم بندی
۳	۱	۰٫۱
۲	۰	۱

* $12{,}1 \pm 2$
* $10 \pm 0{,}5$

مثال: دقت خط کش 1cm است. درستی گزارش های زیر را بررسی کنید.

۱) $2{,}1\,cm \pm 0{,}5\,cm$ ✓

۲) $2{,}1cm \pm 1cm$ ✗

۳) $2cm \pm 0{,}5\,cm$ ✗

Scanned by TapScanner

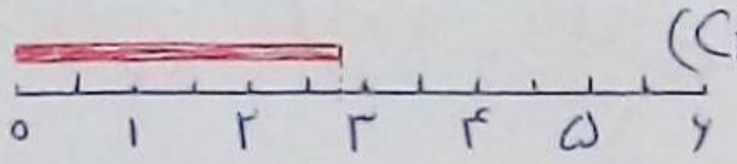
مثال: با ترجم ؛ دقت هر وسیله، درستی یا نادرستی عدد گزارش شده را بیان کنید.

	دقت	عدد گزارش شده
۱)	۰/۱ s	۲/۱۳۵۰ ks
۲)	۱g	۱۲ kg

(X) باید بصورت ۲۱۳۵/۰۰ s گزارش می شد.
(۲/۱۳۵۰ ks = ۲۱۳۵/۰ s)

(X) باید بصورت ۱۲۰۰۰/۰ g گزارش می شد.
(۱۲ kg = ۱۲۰۰۰ g)

مثال: طول جسم در شکل مقابل برحسب سانتی متر باید به چه صورت گزارش شود؟



بین ۲/۵ تا ۳ سانتی متر

$۲/۶ \pm ۰/۲۵ = ۲/۶\,cm \pm ۰/۳\,cm$

(عدد غیر قطعی)

(دقت خط کش ۰/۱ cm)

مرتبه خطا و مرتبه عدد گزارش شده باید یکسان باشد، بنابراین خطا را به بالا گرد می کنیم.

مثال: طول کاغذی را با خط کش میلی متری اندازه گیری کرده ایم. کدام گزینه درست بیان شده است؟

۱) ۳۲/۵ cm ۲) ۳۲ cm ۳) ۳۲/۵۴ cm ۴) ۳۲/۵۴۸ cm (جواب: گزینه ۳)

مثال: دقت یک کولیس $\frac{۱}{۱۰}$ میلی متر است. قطر سیمی توسط کولیس اندازه گیری شده است.
کدام گزارش برحسب سانتی متر درست می باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۲۴ ۴) ۱/۲۴۰ (جواب: گزینه ۳)

---

* در ابزارهای رقمی (دیجیتال) نیز آخرین رقم سمت راست، غیر قطعی و شکوک است.
یعنی اگر زمان سنج رقمی، عدد ۱۲/۳۸ s را نشان دهد، رقم ۸، غیر قطعی است و یک واحد از آخرین رقم نیز نشان دهنده خطای وسیله می باشد. بنابراین خطای اندازه گیری وسیله، ۰/۰۱ s است.

مثال: یک دماسنج رقمی (دیجیتال) دمای درون اتاقی را ۲۲/۳°C نشان داده است. این عدد به چه صورت باید گزارش داده شود؟

جواب: ۲۲/۳°C ± ۰/۱°C

خطای وسیله دیجیتال که برابر دقت آن وسیله است.

رقم غیر قطعی

Scanned by TapScanner

$(\text{چگالی})\rho = \frac{m}{V} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} \longrightarrow \left(\frac{kg}{m^3}\right) SI$ ، $\rho_{\text{آب}} = 1\,g/cm^3 = 1000\,\frac{kg}{m^3}$

$1m^3 = 1000L$ ، $1L = 1000\,cm^3\,(cc)$ ، $1m^3 = 10^6\,cm^3$ ، $1m = 1000\,mm$

$1kg = 1000\,g$

مثال: چگالی نقره نسبت به طلا حدود ۰٫۵ می باشد، اگر قطر گلوله توپر طلایی ۲ برابر قطر گلوله توپر نقره‌ای باشد، نسبت جرم نقره به طلا چقدر است؟

$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ (جواب: گزینه ۱)

۱) $\frac{1}{40}$ ۲) ۴۰ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) ۲۰

(ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه*) (سطح کره = $4\pi R^2$)

$\left(\frac{\text{کل جرم}}{\text{کل حجم}} = \frac{\text{چگالی مخلوط}}{\text{مخلوط حبه ساده}}\right)$ * (ارتفاع × مساحت قاعده × $\frac{1}{3}$ = حجم مخروط *)

مثال: آلیاژی از دو فلز A و B تشکیل شده است، به طوری که ۵۰٪ درصد حجم آلیاژ از فلز A $(\rho_A = 2\,g/cm^3)$ و بقیه از فلز B $(\rho_B = 8\,g/cm^3)$ تشکیل شده است.
چگالی آلیاژ چند گرم بر سانتی متر مکعب است؟

۱) ۲٫۴ ۲) ۲٫۵ ۳) ۴٫۴ ۴) ۴٫۵ (جواب: گزینه ۳)

مثال: آلیاژی از دو فلز A و B تشکیل شده است، به طوری که ۶۰٪ درصد جرم آن از فلز A $(\rho_A = 2\,g/cm^3)$ و بقیه از فلز B تشکیل شده است. $(\rho_B = 8\,g/cm^3)$
چگالی آلیاژ چند گرم بر سانتی متر مکعب است؟

۱) ۲٫۲ ۲) ۲٫۸ ۳) ۴٫۲ ۴) ۴٫۸ (جواب: گزینه ۲)

* آن که چگالی بیشتری دارد، سنگین تر است و پایین تر قرار می گیرد (و اگر چگالی جسم با چگالی مایع برابر باشد، جسم درون مایع بصورت معلق است.

کار، انرژی و توان

* انرژی جنبشی کمیتی نرده‌ای و همیشه مثبت است و به جهت حرکت جسم بستگی ندارد.

$K = \frac{1}{2}mV^2$ ، $m(kg)$ ، $V(m/s)$

K: انرژی جنبشی (J)

Scanned by TapScanner

مثال: کامیونی به جرم 6 ton ابتدا با تندی 72 km/h در حرکت است. محرک‌ها روی از تندی با تندی 36 km/h در حرکت منتی محرک‌ها حرکت می‌کند تغییر انرژی جنبشی کامیون چند ژول است؟

جواب: $\Delta K = K_2 - K_1 = \underbrace{-9\times10^{5}}_{\text{کاهش یافته است}}\ J$

مثال: اتومبیلی به جرم 800 kg در حالت سکون قرار دارد. با سوزاندن 10g بنزین تندی اتومبیل به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟ انرژی بنزین را 40 kJ/g در نظر بگیرید و فرض کنید 20 درصد انرژی حاصل از سوخت به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود.

(جواب: $V = \sqrt{200}$)

مثال: اگر تندی اتومبیلی $\frac{1}{2}$ برابر شود و جرم آن 20 درصد افزایش یابد، انرژی جنبشی چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

1) 20 ـ کاهش 2) 20 ـ افزایش 3) 70 ـ کاهش 4) 70 ـ افزایش (جواب: گزینه 3)

---

* کار کمیت نرده‌ای (اسکالر) است. $W = Fx\,dx\cos\theta$ ، $1\,N.m = 1\,J$ (SI)

θ: زاویه بین F و d

$W = \vec{F}\cdot\vec{d}$ (ضرب داخلی)

$(\Sigma F = ma)$

مثال: نیروی ثابت افقی F، جسمی به جرم 4kg را با شتاب $2/5\ m/s^2$ به حرکت درمی‌آورد. پس از جابجایی d کار نیرو 60J می‌شود. d چند متر است؟ (از اصطکاک صرف نظر کنید)

1) 6 2) 10 3) 15 4) 25 (جواب: گزینه 1)

$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\text{تغییرات سرعت}}{\text{زمان}}$ ، (شتاب متوسط)

نیروی وزن mg

حرکت رو به بالا به اندازه h ⟵ کار نیروی وزن $= -mgh$ (نیرو و جابجایی مخالف جهت هستند)

حرکت رو به پایین به اندازه h ⟵ کار نیروی وزن $= mgh$ (نیرو و جابجایی هم جهت هستند)

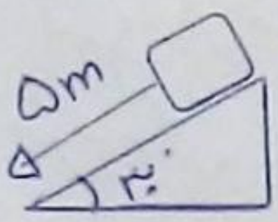
Scanned by TapScanner

$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ (ضرب داخلی) $= |\vec{F}| \times |\vec{d}| \times \cos\theta = f_x \times d_x + f_y \times d_y$

$\vec{F} = (f_x, f_y)$, $\vec{d} = (d_x, d_y)$

* در جاهایی روی سطح افقی، کار نیروی وزن و نیروی عمودی سطح صفر است زیرا این دو نیرو بر جابجایی عمود هستند.

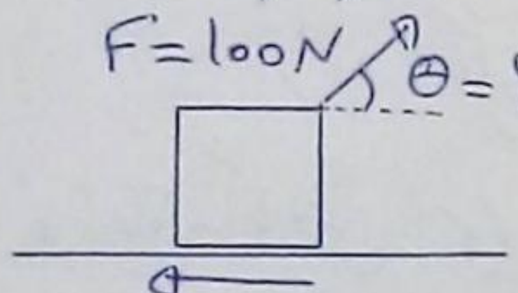
مثال: جسمی به جرم 4kg روی سطح شیبداری که با افق زاویه 30° می‌سازد رو به پایین حرکت می‌کند. کار نیروی وزن در 5m جابجایی چند ژول است؟ ($g = 10\ N/kg$)



۱) ۲۰۰ ۲) $200\sqrt{3}$ ۳) ۱۰۰ ۴) $100\sqrt{3}$ (جواب: گزینه ۳)

* در این سوال وجود اصطکاک تأثیری در مقدار $mg\cos\theta . d$ ندارد بنابراین کار نیروی وزن تغییر نمی‌کند.

مثال: شخصی جعبه‌ای را روی زمین با نیروی ثابت F می‌کشد. کار کل انجام شده را در 10m جابجایی محاسبه کنید.



(جواب $= 3 \times 10^2\ J$)

(* کار کل انجام شده روی یک جسم برابر با تغییر انرژی جنبشی جسم است.)

مثال: کتابی به جرم 1/5 kg از ارتفاع 20m سطح زمین رها می‌شود و با تندی 12 m/s به زمین می‌رسد. اگر نیروی مقاومت هوا ثابت باشد، کار و مقدار نیروی مقاومت هوا به ترتیب از راست به چپ چند ژول و چند نیوتون است؟ ($g = 10\ N/kg$)

۱) ۳۰۰ ، ۱۵ ۲) ۳۰۰- ، ۱۵ ۳) ۱۹۲- ، ۹/۶ ۴) ۱۹۲ ، ۹/۶-

(جواب: گزینه ۳)

مثال: کودک و شخص بزرگسالی روی دو سورتمه نشسته‌اند. جرم افراد با سورتمه‌ها به ترتیب m و 3m می‌باشد. این دو را با نیروی ثابت دو یکسان F می‌کشیم. پس از جابجایی یکسان d، انرژی جنبشی و تندی این دو در مقایسه با هم چگونه است؟ (1: کودک 2: بزرگسال)

(در ابتدا هر دو در حالت سکون بوده‌اند، اصطکاک ناچیز است.) (جواب: گزینه ۳)

۱) $K_1 < K_2 , V_1 < V_2$ ۲) $K_1 < K_2 , V_1 > V_2$ ۳) $K_1 = K_2 , V_1 < V_2$ ۴) $K_1 < K_2 , V_1 < V_2$

Scanned by TapScanner

کار، انرژی و توان

مثال: اتومبیلی با تندی ثابت ۷ در حال حرکت است. موتور، کار W_{t1} را انجام می‌دهد تا تندی از ۷ به ۲۷ برسد و سپس کار W_{t2} را انجام می‌دهد تا تندی از ۲۷ به ۳۷ برسد.

نسبت $\frac{W_{t2}}{W_{t1}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$ (جواب: گزینه ۴)

---

* جسم بالا رود ⟵ انرژی پتانسیل گرانشی افزایش می‌یابد ($\Delta U = mg\Delta h$) (کار نیروی وزن منفی است)

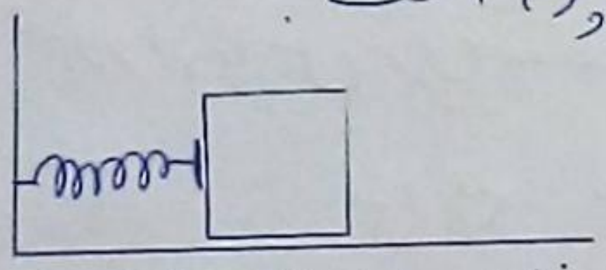
* جسم پایین رود ⟵ انرژی پتانسیل گرانشی کاهش می‌یابد (کار نیروی وزن مثبت است)

* کار نیروی وزن برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی سامانه جسم - زمین است.

---

* اگر فنر را بکشید یا فشرده کنید، نیروی فنر خلاف جهت جابجایی به دست شخص وارد می‌شود و کار نیروی فنر در این جابجایی‌ها منفی می‌شود و انرژی پتانسیل سامانه جسم - فنر افزایش می‌یابد.

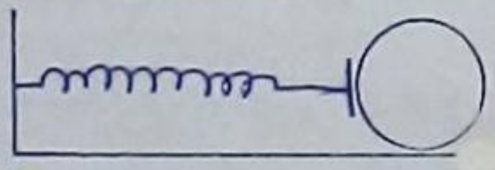
مثال: جسمی مقابل فنر فشرده‌ای قرار دارد. از لحظه رها شدن جسم تا جدا شدن جسم از فنر، علامت کار نیروی فنر و نحوه تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی فنر چگونه است؟



فنر در حالت فشرده قرار دارد.

۱) منفی - افزایش ۲) مثبت - افزایش
۳) منفی - کاهش ۴) مثبت - کاهش (جواب: گزینه ۴)

مثال: مطابق شکل تری به جرم 1kg با تندی 6 m/s به فنر برخورد می‌کند و آن را 2cm فشرده می‌سازد. (در مدت فشرده سازی تا توقف کامل جسم، فنر مقدار 12J کار روی ترولی انجام می‌دهد. کار نیروی اصطکاک و مقدار نیروی اصطکاک به ترتیب از راست به چپ بر حسب یکاهای SI کدام است؟



۱) ۳۰- و ۳۰۰ ۲) ۳۰ و ۳ ۳) ۶- و ۳۰۰ ۴) ۶ و ۳ (جواب: گزینه ۳)

---

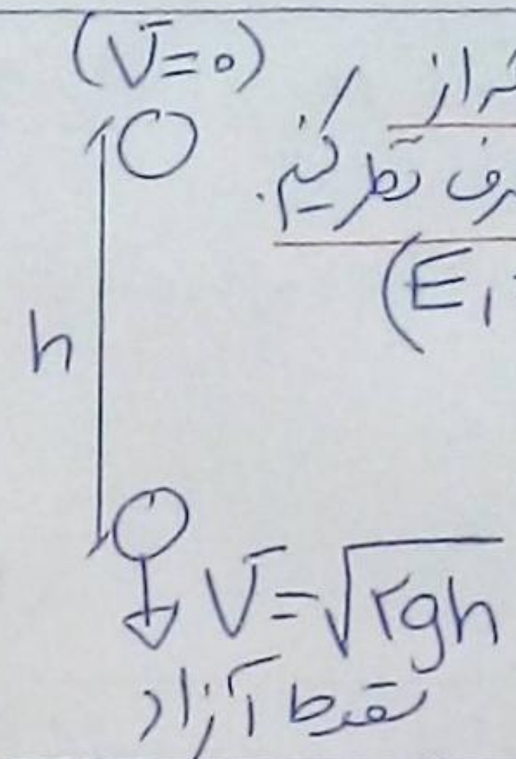
* در حدی که اصطکاک نداشته باشیم ($E_1 = E_2$)
* در حدی که اصطکاک داشته باشیم، باید در نظر گرفته شود.

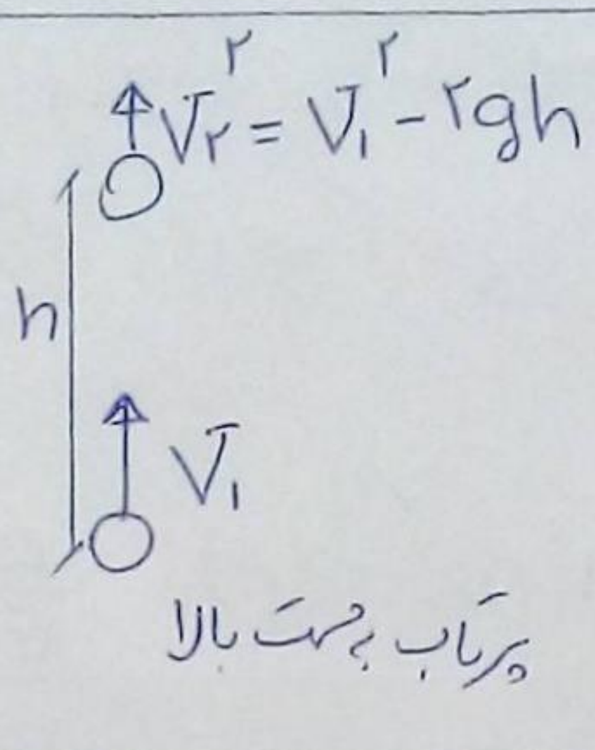
$E = U + K$

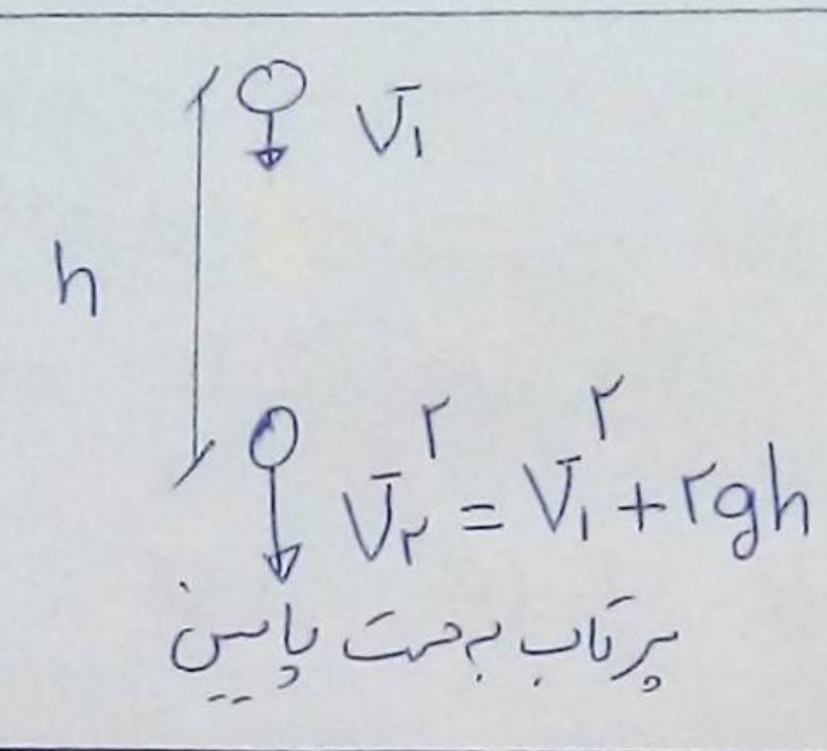
انرژی مکانیکی = انرژی جنبشی + انرژی پتانسیل

Scanned by TapScanner

* در حرکتی که از اصطکاک صرف نظر کنیم:
$(E_1 = E_2)$

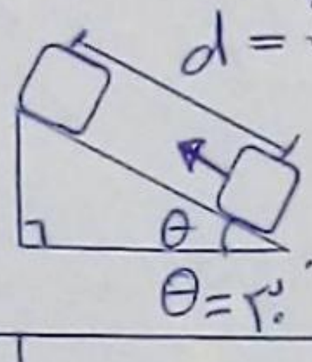






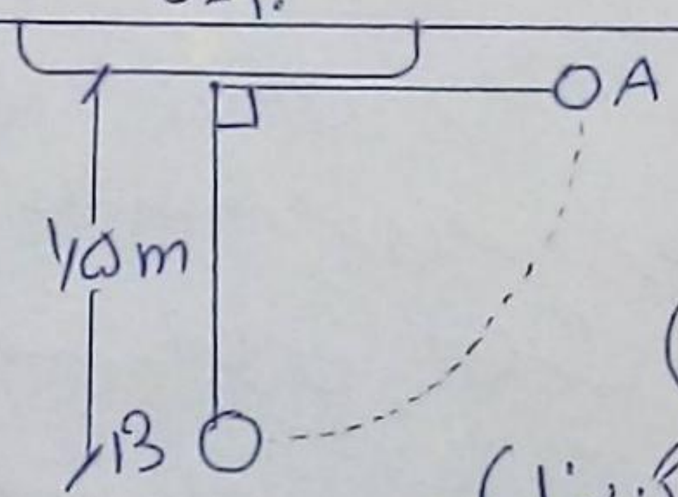
* با توجه به اینکه انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی جنبش متقل از مسیر هستند، در مسائل سطح شیدار و آونگ کافی است پس از انتخاب مبدا پتانسیل، با استفاده از روابط هندسی ارتفاع را محاسبه کنید.

مثال: جسمی به جرم m با تندی اولیه 8 m/s به طرف بالای سطح شیدار پرتاب می شود. با صرف نظر از نیروی اصطکاک، جسم حداکثر چند متر روی سطح شیدار بالا می رود؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۳٫۲ ۲) ۱٫۶ ۳) ۶٫۴ ۴) ۱۸٫۴ (جواب: گزینه ۳)

مثال: گلوله ای به جرم 100g را در وضعیت A نگه داشته و رها می کنیم. با صرف نظر از اصطکاک، سرعت گلوله در هنگام عبور از پایین ترین نقطه چند m/s است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) $\sqrt{30}$ ۲) ۳۰ ۳) $\sqrt{7/5\pi}$ ۴) $7/5\pi$ (جواب: گزینه ۱)

* نشان دهید در سوال بالا سرعت گلوله به جرم گلوله بستگی ندارد. $(V = \sqrt{2gh})$

* هنگامی که تندی را روی زمین افقی شروع می کنیم پس از طی مسافتی متوقف می شود، انرژی جنبشی جسم به صورت دیگر انرژی با نام انرژی درونی تبدیل می شود.

* انرژی درونی: مجموع انرژی های ذره های تشکیل دهنده جسم، انرژی درونی می گویند.

* افزایش انرژی درونی معمولا با گرم تر شدن جسم نمایان می شود.

$W_f = E_2 - E_1$ (محاسبه انرژی تلف شده) (* کار نیروهای اتلافی منفی می شود)

* اگر بر جسم نیروهای اتلافی وارد نشود، انرژی مکانیکی پایسته می ماند.

Scanned by TapScanner

مثال: برگی از درخت سقوط می‌کند و انرژی پتانسیل گرانشی آن ۰/۴ J تغییر می‌کند و انرژی جنبشی آن ۰/۳ J افزایش می‌یابد. کار نیروهای اتلافی چند ژول است؟

۱) ۰/۳- ۲) ۰/۴- ۳) ۰/۷- ۴) ۰/۱- (جواب: گزینه ۴)

مثال: توپی را با تندی اولیه $V_1 = 20 m/s$ به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. اگر تا رسیدن توپ به بالاترین نقطه (نقطه اوج) ۱۰ درصد انرژی جنبشی اولیه تلف شود. توپ پس از جدا شدن از دست، حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ $(g = 10 N/kg)$ (جواب: 18m)

مثال: یک لگری فلزی به جرم 1kg را از سطح آب رها می‌کنیم. اگر نیروی مقاوم که آب به گلوله وارد می‌کند برابر 4N و ثابت باشد، پس از ۱۰ متر سقوط، تندی لگری چند متر بر ثانیه می‌شود؟ $(g = 10 N/kg)$ (جواب $\Rightarrow V = 2\sqrt{30}\ m/s$)

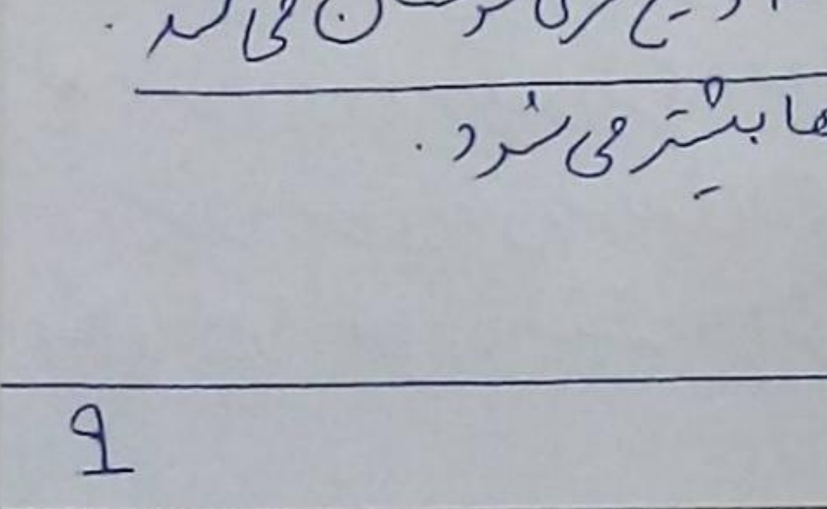
$(* \Sigma F = ma \quad * V_2^2 - V_1^2 = 2a\Delta x \quad * \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t)$

---

* توان: آهنگ انجام کار $(1W = 1 J/s)$ $\bar{P}$ (توان) $= \frac{W(\text{کار})}{\Delta t}$

(کار انجام شده در واحد زمان) کمیتی نرده‌ای است.

Ra (درصد بازده) $= \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times 100$



* بازده کمیتی بدون یکا است.

ویژگی های فیزیکی مواد

* ابعاد ذرات سازنده مواد از مرتبه آنگستروم $(1 \mathring{A} = 10^{-10} m)$ می‌باشند.

* ذره های مواد جامد به دلیل نیروی بین مولکولی قوی، فقط در محل خود دارای ارتعاش و نوسان هستند و به همین دلیل شکل معینی دارند و تراکم ناپذیر هستند. نیروی بین مولکولی در جامدها عمدتا الکتریکی می‌باشد. * اگر جسم را گرم کنیم، ذره ها در دامنه وسیع‌تری نوسان می‌کنند.

* جامد بلور این: جامدی شکل (اکسید فلز) — مایع را به آهستگی سرد می‌کند (شیشه، عسل)

مایع با سرعت سرد شود

ارتعاش ذره ها بیشتر می‌شود.

نمک، فلزات، الماس، مواد معدنی، طعام

Scanned by TapScanner

ویژگی های خمیرنگی مواد

* نیروی بین مولکولی در مایع ها کم تر از جامد ها است ولی نه به قدری که ذره ها از یکدیگر جدا شوند فاصله ی ذره های سازنده مایع و جامد تقریبا یکسان و در حدود یک آنگستروم است.
به دلیل کاهش نیروی بین مولکولی، مولکول های مایع به راحتی روی یکدیگر می لغزند و می توانند شکل ظرف را به خود بگیرند
* تراکم ناپذیری: در هنگام متراکم کردن، با نزدیک کردن مولکول ها به یکدیگر، نیروی (آب) دافعه بسیار قوی بین آن ها ایجاد می شود و مانع از تراکم پذیری آن می شود
* پخش: حرکات نامنظم و کاتوره ای مولکول های آب پس از برخورد با ذرات رنگ یا شکر باعث پخش آن ها می شود.

---

* گازها شکل مشخصی ندارند و نیروی بین مولکولی آن ها به قدری ضعیف است که مولکول ها آزادانه و با تندی بسیار زیاد می توانند حرکت کنند و با یکدیگر و با دیواره های ظرف برخورد کنند
فاصله میانگین بین مولکول های گازی مانند هوا در شرایط عادی تا حدود ۳۵Å می شود که بسیار بیش تر از اندازه مولکول های هوا (۱ تا ۳ آنگستروم) است.
* تراکم پذیری: به دلیل فاصله بسیار زیاد بین مولکول های گازها، به راحتی می توان گازها را متراکم کرد.
* حرکت براونی: به حرکت تصادفی و نامنظم ذرات غبار در شاره حرکت براونی می گویند.
* دیدن پخش در گازها بسیار سریع تر از مایع ها رخ می دهد، زیرا سرعت حرکت ذره های گازها بسیار بیش تر از مایع ها است.

---

* نانو * نقطه ذوب * رسانندگی الکتریکی * نانو ذره * نانو لایه

---

* نیروی هم چسبی: نیروهای بین مولکول های همسان مانند نیروهای بین مولکول های آب را نیروی هم چسبی می گویند. این نیروی جاذبه باعث می شود مولکول های مایع از هم جدا نشوند، البته اگر مولکول های مایع را به یکدیگر نزدیک کنیم تا متراکم شوند، نیروی دافعه بزرگی ایجاد می شود و مانع از متراکم شدن مایع می شود.
* نیروی بین مولکولی کوتاه برد است، یعنی وقتی فاصله بین مولکول ها چند برابر فاصله بین مولکولی شود، نیروی بین مولکولی در عمل صفر می شود.
مثال: چرا قطعات شیشه، در اثر گرم کردن به یکدیگر می چسبند؟

Scanned by TapScanner

ویژگی های فیزیکی مواد

* کشش سطحی: نیروی هم چسبی بین مولکول های سطح مایع باعث می شود سطح مایع مانند پرده ای عمل کند که می تواند اجسام سبک مانند حشرات را علیرغم چگالی بالاتر فلز نسبت به مایع، شناور نگه دارد.

* کروی بودن قطرات مایع: به دلیل کشش سطحی، مایع ها تمایل دارند کوچک ترین سطح ممکن را داشته باشند و از نظر هندسی در کره سبت سطح به حجم کم ترین مقدار ممکن است، بنابراین قطرات در حال سقوط تقریبا کروی شکل هستند و قطرات مایع روی سطح نیز تا حد ممکن به شکل کره باقی می مانند، هرچند هرچه مایع، جرم بیشتری داشته باشد به دلیل نیروی گرانش (وزن) سطح تماس مایع با سطح اندکی تخت تر می شود.

* عوامل موثر در کشش سطحی:
  - ناخالصی: موادی مانند صابون در مایع ظرفشویی باعث کاهش کشش سطحی می شوند
  - دمای مایع: افزایش دما، کشش سطحی را کاهش می دهد
  - جنس مایع: در شرایط یکسان مایعی مانند روغن در مقایسه با آب کشش سطحی بیشتری دارد.

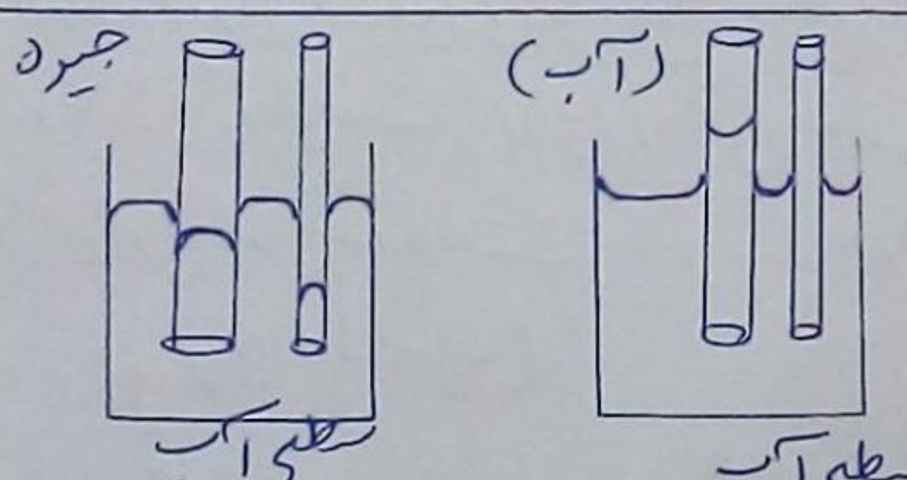
* نیروی دگرچسبی: نیروی جاذبه بین مولکول های دو ماده مختلف را دگرچسبی می گویند. دگرچسبی باعث ایجاد پدیده هایی مانند ترشوندگی و اثر مویینگی می شود.

* ترشوندگی: اگر نیروی دگرچسبی بین مولکول های مایع و جامد، بیش تر از نیروی هم چسبی بین مولکول های مایع باشد، مایع روی جسم جامد پخش می شود و اصطلاحا می گوید مایع، جسم جامد را تر یا خیس کرده.

* آب شیشه تمیز را تر می کند ولی جیوه به صورت کروی روی سطح شیشه ای می ماند
* آب شیشه چرب شده را تر نمی کند

آب: هرچه لوله مویین نازک تر باشد، آب تا ارتفاع بالاتری می آید.
جیوه: هرچه لوله مویین نازک تر باشد، آب تا ارتفاع بیشتری پایین می رود.

* مقایسه نیروهای دگرچسبی و هم چسبی
* شیشه به میزانی آب را به بالا جذب می کند تا نیروی دگرچسبی بتواند وزن آب بالا آمده را تعمل کند.



Scanned by TapScanner

* فشار کمیتی نرده‌ای است
* شاره‌های ساکن (مایع‌ها و گازها) به هر سطحی که با آن در تماس باشند، نیروی عمودی وارد می‌کند. علت این نیرو، حرکت نامنظم مولکول‌های شاره‌ها می‌باشد.

$$P = \frac{F}{A} \quad , \quad F = P \times A$$

$(1Pa = 1N/m^2)$

نسبت اندازه نیروی عمودی وارد بر یکای سطح (فشار)

* فشار در شاره‌ها به جنس دارنده مایع بستگی ندارد.

$$\Delta P = \rho g h$$

$(Pa) \quad (\frac{kg}{m^3}) \times (\frac{N}{kg}) \times m$

$\downarrow$

N/m^2

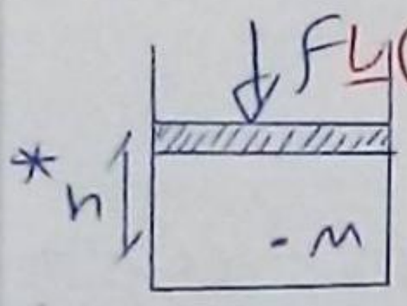
$$P = P_0 + \rho g h$$

P: فشار کل در عمق h
P_0: فشار هوا (روی سطح مایع)
$\rho g h$: فشار ناشی از مایع در عمق h

* به دلیل کم بودن چگالی گازها (ρ)، در ظرف‌های کوچک مقدار $\rho g h$ کم می‌باشد، بنابراین، اختلاف فشار در نقاط بالا و پایین ظرف حاوی گاز، بسیار کم است و عملا صرف نظر می‌شود.

* تقریبا هر ۱۰ متر آب، فشاری معادل $1atm$ ایجاد می‌کند.

* $1atm = 10^5 pa$



$(A = \text{مساحت پیستون})$

$(F+mg)$: در جهتی که هردو وجود داشته باشند

$$P_M = P_0 + \rho g h + \frac{F(F+mg)}{A}$$

P_0: فشار هوا

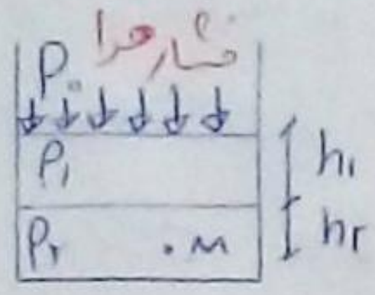
مثال: درون دو ظرف استوانه‌ای شکل با مساحت‌های قاعده A و $2A$، آب با جرم یکسان ریخته شده است. فشار ناشی از مایع در کف ظرف کوچک چند برابر کف ظرف بزرگ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۲)

مثال: درون سیلندری با سطح مقطع $400 cm^2$ تا ارتفاع $20 cm$ روغن با چگالی $0/9 g/cm^3$ ریخته شده است. روی روغن پیستونی با جرم $1kg$ و روی پیستون وزنه‌ای با جرم $9kg$ قرار داده شده است. اگر فشار هوا $100kpa$ باشد، فشار در کف ظرف چند کیلوپاسکال است؟ $(g = 10 N/kg)$

۱) ۴/۳ ۲) ۴۳۰ ۳) ۱۰۴ ۴) ۱۰۴/۳ (جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner



$$P_{\text{کل}} = \underbrace{P_0}_{\text{فشار هوا}} + \underbrace{\rho_1 g h_1}_{\text{فشار ناشی از مایع ۱}} + \underbrace{\rho_2 g h_2}_{\text{فشار ناشی از مایع ۲}} + \cdots$$

فشار ناشی از چند مایع مخلوط نشدنی

* اگر چند مایع مخلوط نشدنی را روی یکدیگر بریزیم، پس از تعادل مایع ها، فشار در هر نقطه برابر با مجموع فشارهای بالای نقطه مورد نظر است

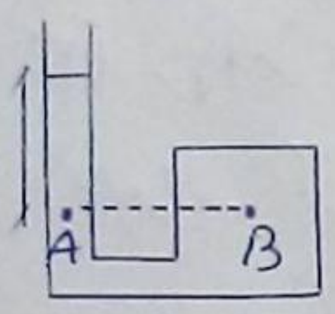
مثال: درون ظرفی استوانه‌ای شکل به جرم یکسان آب، نفت و نخ ریخته‌ایم، مجموع ارتفاع های (در) مایع مخلوط نشدنی ۳۶ cm است. فشار ناشی از مایع‌ها در کف ظرف چند کیلوپاسکال است؟

$(g = 10\ N/kg ,\ \rho_{\text{نفت}} = 0.8\ g/cm^3 ,\ \rho_{\text{آب}} = 1\ g/cm^3)$

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴ (جواب: گزینه ۲)

---

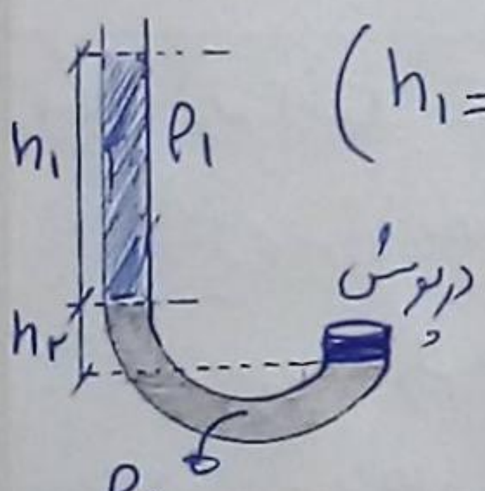
* در ظرف های متصل به هم که حاوی یک نوع مایع باشند، فشار در نقاط هم تراز یکسان است.



$$P_B = P_A = P_0 + \rho g h$$

* در نقاطی مانند B که مایع بالای آن‌ها با سطح آزاد در تماس نیست، از نقاط هم تراز (مانند A) که مایع بالای آن‌ها با سطح آزاد در تماس است استفاده می‌کنیم.

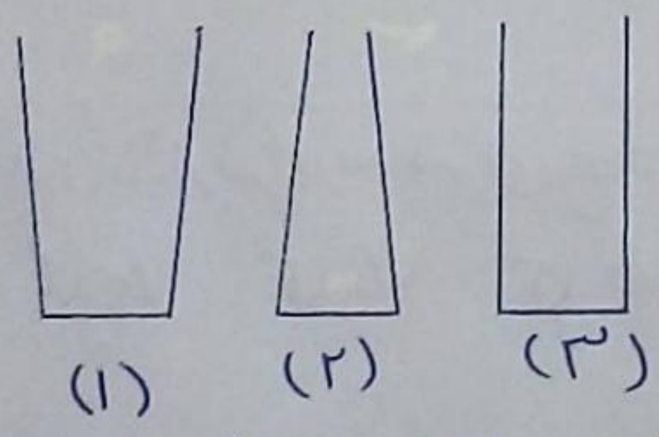
مثال: انتهای لوله‌ای را بسته و مطابق شکل دو مایع مخلوط نشدنی را درون لوله می‌ریزیم. فشار ناشی از مایع ها، زیر دریوش چند پاسکال است؟



$(h_1 = 30\ cm ,\ h_2 = 15\ cm ,\ g = 10\ N/kg ,\ \rho_1 = 4\ g/cm^3 ,\ \rho_2 = 2\ g/cm^3)$

۱) ۶۰۰۰ ۲) ۶ ۳) ۱۲۰۰۰ ۴) ۱۲ (جواب: گزینه ۳)

مثال: درون سه ظرف با مساحت کف یکسان، به جرم یکسان آب ریخته شده است. نیروی وارد بر کف ظرف ها از طرف آب را F_1، F_2 و F_3 می‌نامیم. کدام مقایسه صحیح است؟



۱) $F_1 < F_2 < F_3$ ۲) $F_1 > F_2 > F_3$ (جواب: گزینه ۴)

۳) $F_1 = F_2 = F_3$ ۴) $F_2 > F_3 > F_1$

$(F = \rho g h \times A)$

* اگر در سوال گفته بود تا ارتفاع یکسان آب ریخته شده است آن‌گاه گزینه ۳ درست می‌بود.

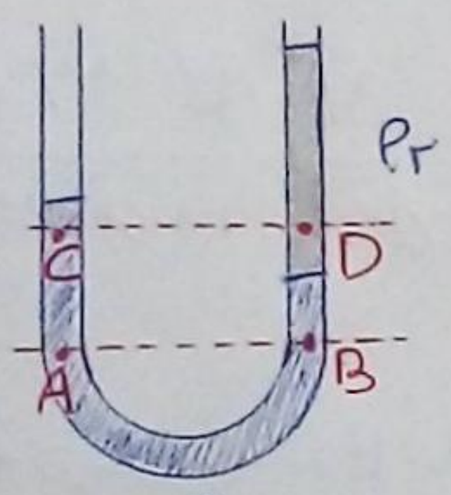
Scanned by TapScanner

* لوله های U شکل: تماط هم تراز داخل یک نوع مایع، هم فشار هستند.
* هرگاه در لوله U شکل، بالای هر دو لوله باز باشد، فشار هوا تاثیری در نحوه قرارگرفتن مایع ها ندارد
* در رابطه $P_1 gh_1 = P_2 gh_2$، نیروی ندارد کمیا ها برحسب کمیا های SI باشند، فقط کافی است که کمیا ها در طرفین، یکسان باشند

مثال: درون لوله U شکل یکنواختی مقداری جیوه با چگالی $13/6\ g/cm^3$ ریخته شده است. اگر در یکی از شاخه ها به ارتفاع $54/4\ cm$ آب ریخته شود، سطح جیوه در شاخه دیگر نسبت به حالت قبل چند سانتی متر بالا می رود؟ ($\rho_{آب} = 1\ g/cm^3$)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۲۷/۲ (جواب: گزینه ۱) (*اگر سطح مقطع ها یکسان نباشد...)

مثال: در شکل روبرو، مایع ها در تعادل هستند. کدام رابطه، بین فشار در نقاط نشان داده شده برقرار است؟

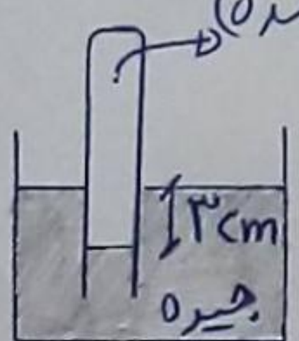


۱) $P_A = P_B > P_D > P_C$ ۲) $P_A > P_B > P_D > P_C$
۳) $P_A = P_B > P_C > P_D$ ۴) $P_B > P_A > P_C > P_D$

(جواب: گزینه ۱)

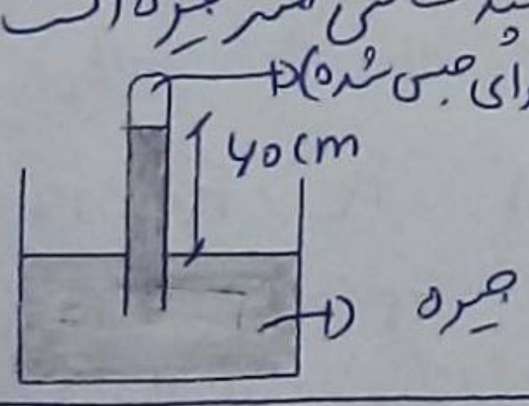
* فشار سنج هوا (بارومتر) $P_0 = 76\ cm_{Hg}$ * اگر لوله آزمایشی مایل باشد باید ارتفاع قائم جیوه از سطح جیوه داخل ظرف را اندازه گیری کنیم.

مثال: لوله انتها بسته ای را وارونه در ظرف جیوه ظروفی بریم. سطح جیوه در درون لوله ۳ سانتی متر پایین تر از سطح آزاد جیوه قرار می گیرد. اگر فشار هوا ۷۶ سانتی متر جیوه باشد، فشار هوای محبوس در لوله چند سانتی متر جیوه است؟



۱) ۷۳ ۲) ۷۹ ۳) ۷۴/۵ ۴) ۷۷/۵ (جواب: گزینه ۲)

مثال: فشار هوا در منطقه ای ۷۵ cmHg است. فشار هوای محبوس در بالای لوله چند سانتی متر جیوه است؟



۱) ۶۰ ۲) ۷۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱۳۵ (جواب: گزینه ۳)

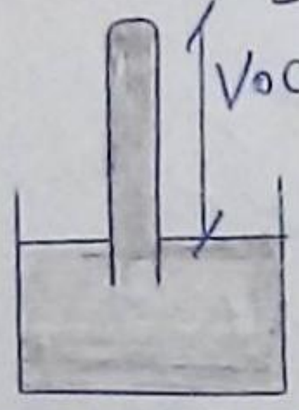
Scanned by TapScanner

* تبدیل ستون های مایع به یکدیگر ⟵ $P_1gh_1 = P_2gh_2$
* یکای P و h در طرفین باید یکسان باشد ولی لزومی ندارد یکاها حتما SI باشد

مثال: مایعی به چگالی $2\ g/cm^3$ تا ارتفاع ۲٫۷۲ متر در ظرفی ریخته ایم. اگر فشار هوا ۷۶ سانتی متر جیوه و چگالی جیوه $13.6\ g/cm^3$ باشد، فشار کلی وارد بر کف ظرف محتوی مایع بر حسب سانتی متر جیوه چقدر است؟

۱) ۱۲۵٫۴ ۲) ۱۱۶ ۳) ۹۶ ۴) ۸۰ (جواب: گزینه ۲)

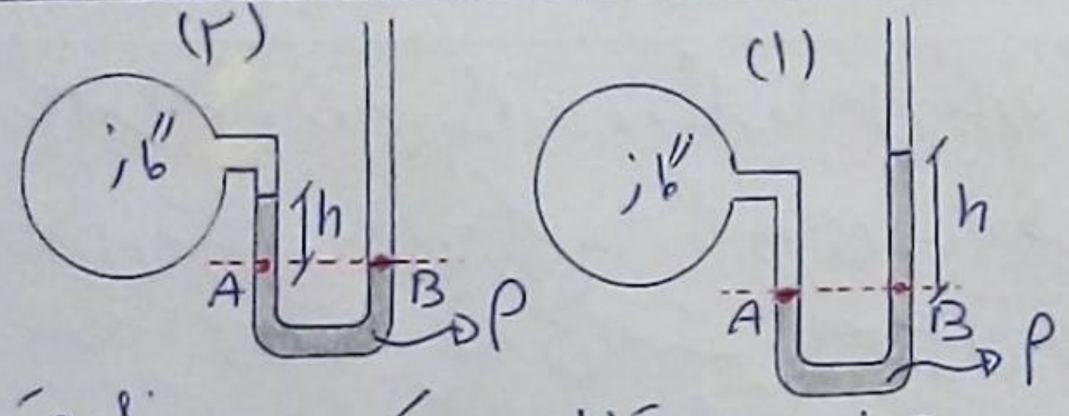
مثال: مطابق شکل، اگر فشار هوا ۷۵ cm(Hg) و سطح لوله $5\ cm^2$ باشد، چه نیروی بر انتهای لوله وارد خواهد شد؟ ($g = 10\ N/kg$ ، $\rho_{Hg} = 13.6\ g/cm^3$)



۱) ۲٫۵N ۲) ۵N ۳) ۱۷N ۴) ۳۴N (جواب: گزینه ۴)

* به اختلاف فشار گاز و فشار هوا، فشار پیمانه ای می گویند ($P_{گاز} - P_{هوا}$، می تواند مثبت یا منفی باشد)
* فشارسنج های پزشکی و صنعتی فشار پیمانه ای را نشان می دهند

(۱ پوند-نیرو بر اینچ مربع $\approx 6900\ Pa$ ((1psi))



$P_A = P_B$، نقاط هم تراز درون یک مایع، هم فشارند

(۱): فشار گاز محزن، $\Delta P = \rho gh$ بیشتر از فشار هوا است

(۲): فشار هوا، $\Delta P = \rho gh$ بیشتر از فشار گاز محزن است.

فشار پیمانه ای

* علت نیروی ارشمیدس: نیروی ناشی از فشار شاره، در نقاط پایین تر بزرگ تر است، بنابراین برآیند نیروهایی که شاره به جسم درون شاره وارد می کند، در راستای قائم رو به بالا می شود.
* برآیند نیروهای ناشی از فشار، در راستای افق صفر است و در راستای افق حرکت نمی کند.

مثال: نشان دهید: $F_b = \rho_{شاره} \times V_g$

V_g: حجم قسمتی از جسم که درون شاره قرار دارد.

$F_b < W$ (وزن جسم) ← ته نشینی جسم درون شاره (نیروی شناوری)

$F_b = W$ ← غوطه ور شدن جسم درون شاره

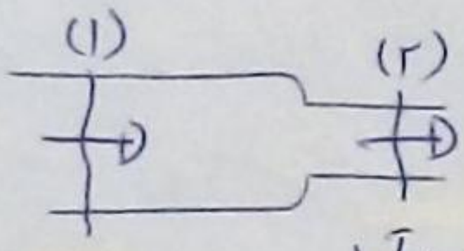
$F_b > W$ ← بالا آمدن جسم درون شاره و خروج قسمتی از جسم از شاره و در نهایت شناوری

* اگر جسمی را درون مایعی فرو ببریم، مقدار سبک شدن جسم، داخل مایع برابر با وزن مایع جابه جا شده می باشد.

Scanned by TapScanner

* آهنگ جریان شاره: حجمی از شاره که در واحد زمان از یک مقطع عبور می کند (m^3/s)

آهنگ جریان شاره (m^3/s) = تندی شاره (V) (m/s) × ساحت مقطع (A) (m^2)



$V_1 \times A_1 = V_2 \times A_2$

آهنگ جریان شاره ثابت

$(A \downarrow \rightarrow V \uparrow)$

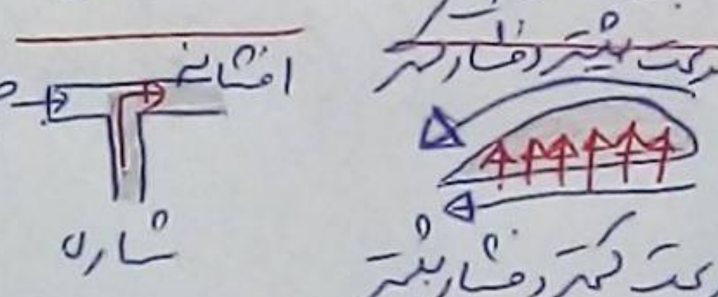
* مقدار جرم عبوری از لوله باید یکسان باشد
* معادله پیوستگی
* تندی مایع در قسمت تنگ تر بیشتر است.

مثال: دو لوله با قطرهای $D_1 = 12cm$ ، $D_2 = 4cm$ به یکدیگر متصل شده اند و جریان لایه ای آب در آن ها برقرار است. اگر تندی آب در لوله بزرگ $2m/s$ باشد، تندی آب در لوله کوچک چند m/s است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) ۶ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) ۱۸ (جواب: گزینه ۴)

* با افزایش تندی شاره، فشار داخل شاره کاهش می یابد (* اصل برنولی)
* اصل برنولی برای مایع ها و گازهایی که به طور لایه ای، غیرآشفته و در امتداد افق حرکت می کنند، صادق است. هم چنین فرض می شود که شاره، تراکم ناپذیر است و اصطکاک داخلی (گران روی) ندارد. * بال هواپیما * عطر پاشی

مثال های از کاربرد اصل برنولی:



دما و گرما

* دما با میانگین انرژی جنبشی ذرات جسم، متناسب است.
* مقیاس سلسیوس * دمای تعادل آب و یخ خالص در فشار 1atm (دمای صفر)
* دمای جوش آب خالص در فشار 1atm (دمای صد)

* مقیاس کلوین * فضای دما در SI کلوین می باشد * $T = 273 + \theta$ * تغییر دما در مقیاس های سلسیوس و کلوین برابر هستند * در صفر کلوین ($0K$)، ذرات جسم هیچ جنبش و حرکتی ندارند.

* مقیاس فارنهایت * نقطه انجماد آب $(0^\circ C) = 32^\circ F = 273K$
* نقطه جوش آب $(100^\circ C) = 212^\circ F = 373K$

$(*F = \frac{9}{5}\theta + 32)*$

Scanned by TapScanner

مثال: رابطه بین تغییر دما در مقیاس سلسیوس ($\Delta\theta$) و مقیاس فارنهایت (ΔF) کدام است؟

۱) $\Delta F = \Delta\theta$ ۲) $\Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta + 32$ ۳) $\Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta$ ۴) $\Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta - 32$

$\Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta$ (جواب: گزینه ۳)

* رابطه دماسنج ها با دماسنج نامشخص ← روابط خطی است را از تناسب استفاده می کنیم

مثال: دماسنجی دماهای صفر درجه سلسیوس و $40^\circ C$ را به ترتیب ۵ و ۸۵ نشان می دهد. این دماسنج دمای آب در حال جوش ($100^\circ C$) را چه عددی نشان می دهد؟

(جواب = ۲۰۵)

$\Delta L = \alpha L \Delta T \rightarrow L_2 = L_1(1 + \alpha \Delta T)$

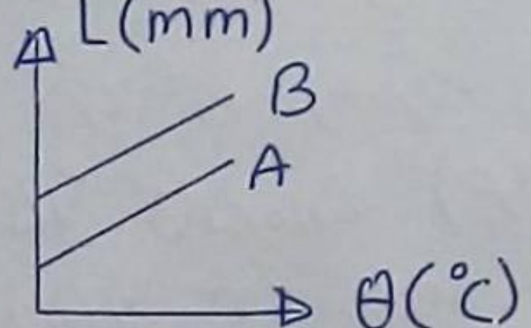
* نگای ΔL و L در طرفین باید یکسان باشد می تواند بر حسب هر نگای مانند mm، cm، ... باشد ولی نباید بر حسب m باشد. نگای ΔT کلوین است. بنابراین نگای α برابر $\frac{1}{K}$ یا K^{-1} می باشد. * با توجه به این که $\Delta\theta = \Delta T$ است بنابراین α می تواند بر حسب $\frac{1}{^\circ C}$ یا $^\circ C^{-1}$ نیز باشد.

* ضریب انبساط طولی علاوه بر جنس ماده به دما نیز بستگی دارد (اما این وابستگی کم و قابل صرف نظر است).

مثال: اگر دمای میله‌ای از $20^\circ C$ به $30^\circ C$ برسانیم، طول میله ۱/۵mm افزایش می یابد. اگر دمای میله را از $20^\circ C$ به $90^\circ C$ برسانیم، طول میله چند میلی متر افزایش می یابد؟

۱) ۳ ۲) ۴/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۱۰/۵ (جواب: گزینه ۴)

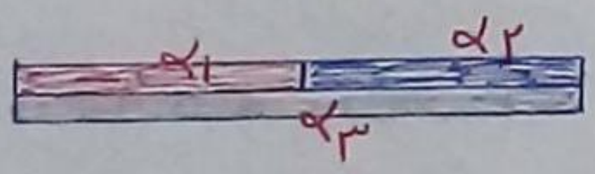
مثال: نمودار تغییرات طول بر حسب دما برای دو میله، مطابق شکل با یکدیگر موازی هستند. کدام گزینه در مورد ضریب انبساط طولی میله ها درست است؟



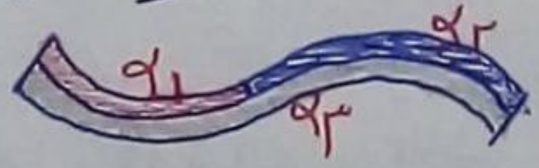
۱) $\alpha_B > \alpha_A$ ۲) $\alpha_B = \alpha_A$ ۳) $\alpha_B < \alpha_A$ ۴) هر سه حالت ممکن است

(جواب: گزینه ۳)

مثال: مطابق شکل سه میله با جنس های متفاوت را به هم جوش می دهیم. اگر $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$ باشد، در اثر افزایش دما شکل نهایی به چه صورت است؟



(جواب:



)

(* دما سنج * ترموستات)

Scanned by TapScanner

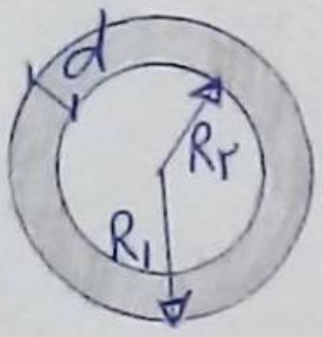
* انبساط سطحی $\Delta A = 2\alpha A \Delta T$ * ۲α ضریب انبساط سطحی می‌گویند
$(*A_2 = A_1(1+2\alpha\Delta T))$

اثبات به عنوان تمرین

* دما و ΔA و A در طرفین تساوی باید یکسان باشد (در SI بر حسب m^2 است). یکای α بر حسب k (کلوین) یا $^\circ C$ (درجه سلسیوس) است و یکای α برحسب $\frac{1}{k}$ یا $\frac{1}{^\circ C}$ است.

* هنگامی که جسمی را سرد و یا گرم می‌کنیم، تمامی ابعاد جسم به یک نسبت کوچک و یا بزرگ می‌شوند.

مثال: درون صفحه‌ای دایره‌ای شکل و فلزی به شعاع R_1، دایره‌ای به شعاع R_2 بریده‌ایم و ضخامت قسمت باقی‌مانده برابر d است. اگر صفحه را به طور یکنواخت گرم کنیم، اندازه R_1، R_2 و d به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند.



۱) افزایش - افزایش - افزایش ۲) افزایش - افزایش - کاهش
۳) افزایش - کاهش - افزایش ۴) کاهش - کاهش - کاهش

(جواب: گزینه ۱)

انبساط حجمی

* یکاهای ΔV، V_2 و V_1 در طرفین تساوی باید یکسان باشد. ضریب انبساط حجمی برحسب $\frac{1}{^\circ C}$ یا $\frac{1}{k}$ بدست می‌آید.

مایعات → $\Delta V = \beta V \Delta T$ ، $V_2 = V_1(1+\beta\Delta T)$

β = ضریب انبساط حجمی مایعات

جامدات → $\Delta V = 3\alpha V \Delta T$ ، $V_2 = V_1(1+3\alpha\Delta T)$

اثبات به عنوان تمرین

3α = ضریب انبساط حجمی در جامدات

---

* ضریب انبساط حجمی جامدها معمولاً کمتر از ضریب انبساط حجمی مایع‌ها است بنابراین اگر ظرف، پر از مایع باشد، در اثر انبساط، مایع از ظرف بیرون می‌ریزد.

مثال: لیوانی از جنس شیشه در دمای $20^\circ C$ گنجایش برابر $300\,cm^3$ دارد و در این دما با یخ پر می‌شود. اگر دمای مجموعه را به $70^\circ C$ برسانیم، چند سانتی‌متر مکعب یخ بیرون می‌ریزد؟

$\alpha_{شیشه} = 10^{-5}(k^{-1})$ ، $\beta_{یخ} = 7\times10^{-4}(k^{-1})$

۱) ۲/۵ ۲) ۵/۰۵ (جواب: گزینه ۴)
۳) ۷/۵ ۴) ۱۰/۰۵

مثال: دو استوانه فلزی از جنس آهن را با ابعاد ظاهری یکسان یکی توخالی و دیگری توپر در اختیار داریم. اگر دمای آن‌ها را به مقدار یکسان افزایش دهیم، تغییر حجم استوانه‌های توخالی و توپر به ترتیب ΔV_1 و ΔV_2 می‌شود. کدام مقایسه درست است؟

۱) $\Delta V_1 > \Delta V_2$ ۲) $\Delta V_1 = \Delta V_2$ ۳) $\Delta V_1 < \Delta V_2$ ۴) به جرم آن‌ها بستگی دارد.

(جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

$\Delta V_{\text{ظاهری مایع}} = \Delta V_{\text{واقعی مایع}} + \Delta V_{\text{ظرف}}$ (*انبساط ظاهری)

مثال: نشان دهید اثر دما بر چگالی به صورت زیر است.

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{1+\beta\Delta T} = 1-\beta\Delta T$$

* α و β بسیار کوچک هستند را از توان های بزرگتر یک آن ها می توان صرف نظر کرد.

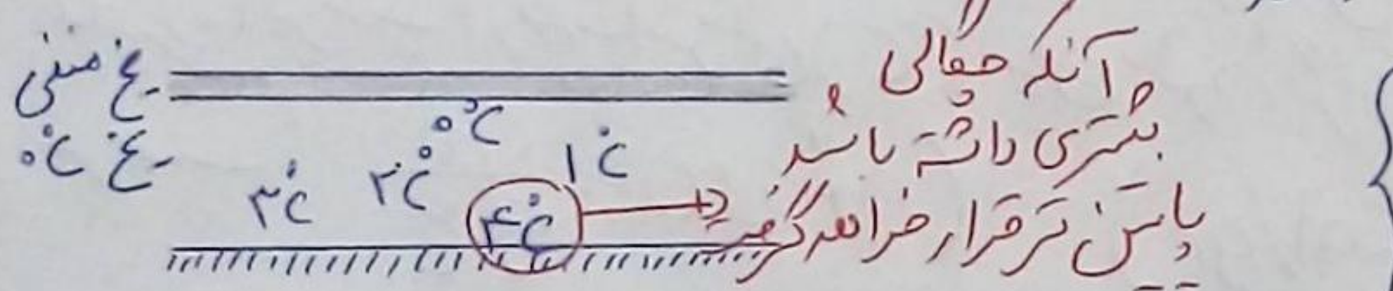
(چگالی ↓ ← حجم ↑ ← دما ↑) *به غیر از آب

* اگر دمای آب تا $4^\circ C$ کاهش یابد، حجم کاهش می یابد ولی از $4^\circ C$ تا $0^\circ C$ با کاهش دما، حجم افزایش می یابد. یعنی کمترین حجم در دمای $4^\circ C$ است. (بیشترین چگالی)

* تغییرات چگالی آب نسبت به دما بسیار کم است ولی همین مقدار تغییر نا چیز باعث می شود تا در زمستان وقتی سطح دریاچه یخ زده است در لایه های پایینی آب، جرد داشته باشد و موجودات زنده به حیات خود ادامه دهند

* آب در حالت مایع شکل شبکه بلوری نمی دهد

* مولکول های آب در یخ شکل یک شبکه بلوری می دهند.



(علت رفتار غیر عادی آب)

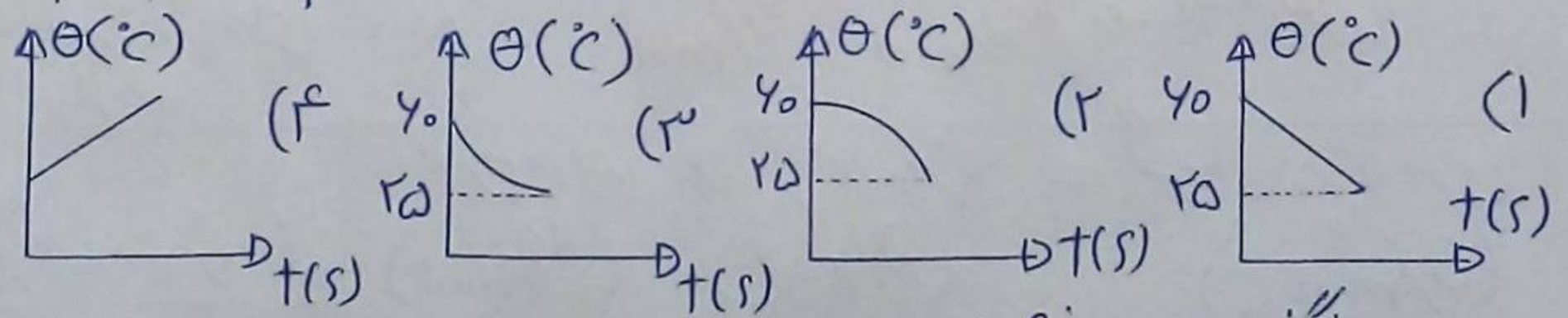
* هنگام ذوب شدن یخ، آرایش بلوری کم کم از بین می رود و برخی از فضاهای خالی از بین می روند و حجم کاهش می یابد به دلیل این که در بازه دمایی $0^\circ C$ تا $4^\circ C$ هنوز بقایای ساختار مولکولی وجود دارد، حجم به طور مداوم کاهش می یابد. ولی پس از دمای $4^\circ C$ دیگر ساختار مولکولی یخ باقی نمانده و حجم افزایش می یابد

گرما (Q): از جسم با دمای بیشتر به جسم با دمای کمتر منتقل می شود و یکای آن (J) ژول است.

* هرچه اختلاف دمای جسم گرم و سرد بیشتر باشد، آهنگ انتقال گرما بیشتر است.

مثال: لیوان آب $60^\circ C$ را در اتاق با دمای $25^\circ C$ قرار می دهیم. نمودار دما بر حسب زمان چگونه است.

(جواب گزینه ۳)



* دما با میانگین انرژی جنبشی ذرات جسم متناسب است.

Scanned by TapScanner

* ظرفیت گرمایی به جنس و جرم جسم بستگی دارد.

$Q = mC\Delta\theta = C\Delta\theta$ ، $\Delta\theta = \Delta T$

(J) — (kg)

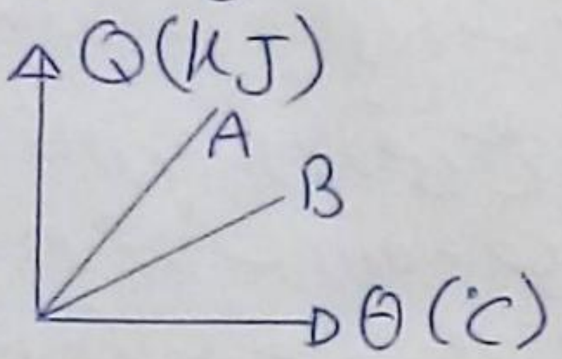
ظرفیت گرمایی ویژه: $\frac{J}{kg.^\circ C}$ — ظرفیت گرمایی: $\frac{J}{^\circ C}$

* گرمای ویژه یک جسم فقط به جنس ماده تشکیل دهنده آن و دما بستگی دارد و به جرم جسم بستگی ندارد.

(در بازه دمایی کم می‌توان از تغییرات گرمای ویژه چشم‌پوشی کرد)

مثال: نمودار گرمای داده شده به دو جسم برحسب تغییرات دما به صورت مقابل است. کدام گزینه در مورد ظرفیت گرمایی جسم‌ها درست است؟

۱) $C_A > C_B$ ۲) $C_A = C_B$ ۳) $C_A < C_B$ ۴) هر سه حالت ممکن است



(جواب: گزینه ۱)

(* اگر گرما برحسب کالری (cal)، جرم برحسب گرم (g) و تغییر دما برحسب درجه سلسیوس (°C) بیان شود، گرمای ویژه برحسب $\frac{cal}{g^\circ C}$ بیان می‌شود.)

* $C_{آب} = 4200 J/kg^\circ C = 1 cal/g^\circ C$

مثال: به دو جسم A و B به یک اندازه گرما می‌دهیم. نسبت جرم‌ها به صورت $\frac{m_A}{m_B} = \frac{3}{2}$ و نسبت گرمای ویژه به صورت $\frac{C_A}{C_B} = \frac{4}{5}$ می‌باشد. اگر دمای جسم B به اندازه $60^\circ C$ افزایش یابد، دمای جسم A چند درجه سانتی‌گراد افزایش می‌یابد؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۸۰ (جواب: گزینه ۳)

---

* آب مایع مناسب برای سیستم‌های سرمایشی و گرمایشی ← به دلیل بالا بودن گرمای ویژه

---

* یک مول از هر ماده برابر $6/022 \times 10^{23}$ از اجزای سازنده آن است که این تعداد را عدد آوگادرو می‌گویند (N_A). ($N = n \times N_A$)

(تعداد مول) $n = \frac{m}{M}$ (جرم) $\rightarrow kg$ یا g

(جرم مولی) $\rightarrow kg/mol$ یا g/mol

(عدد آوگادرو = N_A، تعداد ذره‌های سازنده = N)

---

* قاعده دولن و پتی:

برای بیشتر فلزها مقدار گرمای ویژه مولی تقریباً ثابت و برابر $25 J/mol.K$ است و به جنس فلز بستگی ندارد.

گرمای ویژه مولی	=	جرم مولی	×	گرمای ویژه
$(J/mol^\circ C)$		(kg/mol)		$(J/kg^\circ C)$

Scanned by TapScanner

مثال: چند کیلوژول به ۲/۸ kg آهن داده شود تا دمای آن ۲۰°C افزایش یابد.
(M آهن = ۵۶ g/mol)
۱) ۱۲ ۲) ۲۵ ۳) ۵۰ ۴) ۱۲۵ (جواب: گزینه ۲)

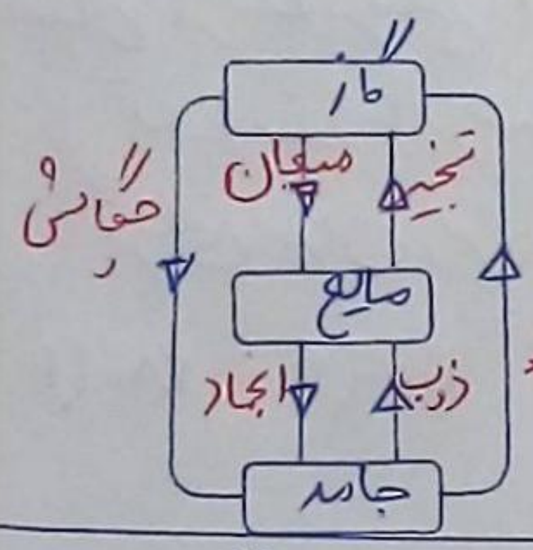
دمای تعادل: طبق پایستگی انرژی، مقدار گرمای که اجسام گرم از دست می دهند، برابر با مقدار گرمای است که اجسام سرد دریافت می کنند.

مثال: قطعه ای مسی با دمای ۹۴°C را داخل ۴۰۰g آب ۲۰°C می اندازیم. دمای تعادل ۲۴°C می شود. جرم مس چند گرم است؟
(c مس = ۴۰۰ J/kg°C ، c آب = ۴۲۰۰ J/kg°C)
۱) ۸۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۴۰ (جواب: گزینه ۴)

مثال: m_1 گرم آب ۲۰°C را با m_2 گرم آب ۶۰°C مخلوط می کنیم تا در نهایت ۲۸۰g آب ۵۰°C حاصل شود. m_1 و m_2 به ترتیب از راست به چپ برحسب گرم کدام است؟
۱) ۷۰ و ۲۱۰ ۲) ۷۰ و ۱۴۰ ۳) ۸۰ و ۱۶۰ ۴) ۸۰ و ۲۴۰ (جواب: گزینه ۱)

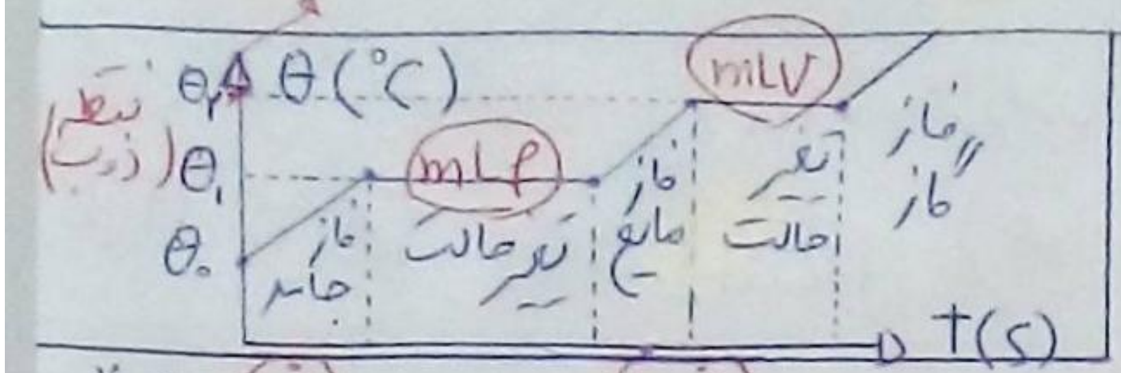
مثال: درون گرماسنجی ۶۰۰g آب ۱۰°C وجود دارد. ۲۰۰g آب ۵۰°C را درون گرماسنج می ریزیم. دمای تعادل ۱۸°C می شود. ظرفیت گرمایی گرماسنج چند واحد SI است؟
(c آب = ۴/۲ J/g°C)
۱) ۲۱۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۴۲۰ ۴) ۸۴۰
(جواب: گزینه ۴)

* دمای ذوب جسم به جنس و فشار وارد بر آن بستگی دارد. هرچه فشار وارد بر جسم بیشتر باشد، نقطه ذوب بالاتر می رود. و جود ناخالصی باعث تغییر نقطه ذوب می شود.
* ع استثنایی باشد که کاهش فشار باعث بالا رفتن نقطه ی ذوب می شود. (بر خلاف روی که همه این تر ذوب می شود)



* در اکثر مواد، در هنگام ذوب شدن جامدهای بلورین، حجم افزایش می یابد. زیرا در هنگام ذوب شدن، حجم آرایش منظم مولکولی را از دست می دهد و حجم بی نظمی را اشغال می کند
* جامدهای بی شکل، مانند شیشه و جامدهای ناخالص مانند قیر، نقطه ذوب مشخصی ندارند و پیش از ذوب شدن، خمیری شکل می شوند و در حقیقت در گستره ای از دما به تدریج ذوب می شوند.

Scanned by TapScanner

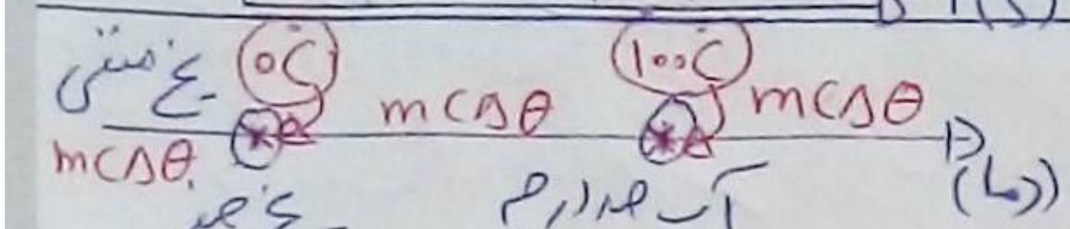


$Q = mL_f$ ، $Q = mL_V$

گرمای نهان ذوب — گرمای نهان تبخیر

گرما گیرنده ⟵ ذوب — گرما گیرنده ⟵ تبخیر

گرما داده ⟵ انجماد — گرما داده ⟵ میعان



یخ صفر (یا آب یخ صفر درجه) — آب صفر درجه (آب در حال تبخیر)

$Q = mL_f$ گرمای نهان ذوب — $Q = mL_V$ گرمای نهان تبخیر

* اگر مقدار مایع یا جامد در مقایسه با دیگری بسیار زیاد باشد، دمای نهایی همان دمای جسمی است که مقدار آن زیاد است. به عنوان مثال اگر مقداری آب گرم روی تکه یخ بزرگی با دمای ۰°C بریزیم، دمای نهایی همان ۰°C است.

* در هنگام تغییر حالت، دمای جسم تغییر نمی‌کند ولی انرژی درونی تغییر می‌کند

مثال: درون گرماسنجی با ظرفیت گرمایی ۲۰۰J/°C مقدار ۱۰۰g آب با ۵۰g یخ در حال تعادل است. چند کیلوژول گرما باید به مجموعه داده شود تا در نهایت آب ۱۰°C داشته باشیم؟

۱) ۲۳/۳ ۲) ۲۵/۳ ۳) ۲۱/۲ ۴) ۲۳/۲

($c_{آب} = 4/2\ J/g°C$ و $L_f = 340\ J/g$)

(جواب: گزینه ۲)

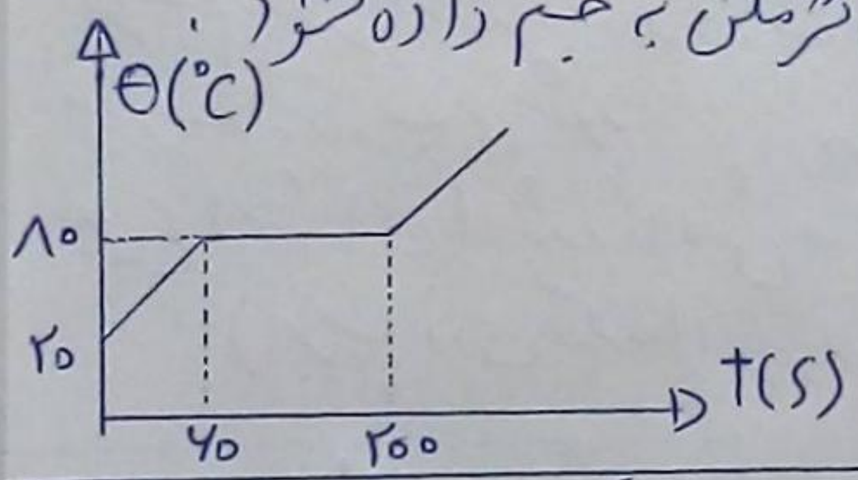
مثال: به ۵/۵kg یخ ۰°C مقدار ۱۰۰kJ گرما می‌دهیم، دمای نهایی چند درجه سانتی‌گراد می‌شود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳/۵ ۴) ۶/۵

($c_{آب} = 4200\ J/kg.k$ ، $L_f = 336\ kJ/kg$)

(جواب: گزینه ۱)

مثال: توسط گرمکنی با توان ثابت ۲kW به جسم جامدی به جرم ۱kg گرما می‌دهیم. اگر نمودار تغییرات دما بر حسب زمان مطابق شکل باشد و تمام گرمای گرمکن به جسم داده شود، گرمای نهان ویژه ذوب جسم چند kJ/kg است؟



۱) ۲۸۰ ۲) ۱۴۰ ۳) ۲۲۰ ۴) ۱۱۰

(جواب: گزینه ۱)

مثال: ۳۰g یخ ۰°C را داخل ۵۰۰g آب قرار می‌دهیم. پس از رسیدن به تعادل، ۱۰g یخ ذوب نشده باقی می‌ماند. دمای اولیه آب چند درجه سلسیوس بوده است؟

($c_{آب} = 4/2\ J/g°C$ ، $L_f = 336\ J/g$)

۱) ۳/۲ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

(جواب: گزینه ۱)

Scanned by TapScanner

مثال: ۲۵۰g یخ ۱۰°C- را داخل استخری حاوی آب ۰°C می اندازیم. پس از تعادل گرمایی:

($c_{یخ}$ = ۲٫۱ J/g°C ، $c_{آب}$ = ۴٫۲ J/g°C و L_F = ۳۳۶ J/g)

۱) ۱٫۲۵g یخ ذوب می شود. ۲) ۱٫۲۵g بر جرم یخ افزوده می شود. (جواب: گزینه ۲)
۳) تمام یخ ذوب می شود. ۴) جرم یخ ثابت می ماند.

مثال: ۱۰۰g یخ ۰°C را داخل ۴۰۰g آب ۱۰°C می اندازیم. دمای تعادل چند درجه سانتی گراد می شود؟ تبادل گرما فقط بین آب و یخ انجام می شود. ($c_{آب}$ = ۴٫۲ J/g°C ، L_F = ۳۳۶ J/g)

۱) صفر ۲) ۱٫۵ ۳) ۴٫۵ ۴) ۵ (جواب: گزینه ۱)

مثال: قطعه یخی به جرم m و دمای ۰°C را داخل مقداری آب با جرم ۴m و دمای ۴۰°C قرار می دهیم. اگر تبادل گرما فقط بین آب و یخ رخ دهد، دمای تعادل چند درجه سانتی گراد می شود؟ ($c_{آب}$ = ۴٫۲ J/g°C ، L_F = ۳۳۶ J/g)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

(جواب: گزینه ۴)

---

* آهنگ تبخیر سطحی به عواملی نظیر جنس مایع، دما، سطح مایع، فشار وارد بر مایع، وزش باد و رطوبت محیط بستگی دارد. آهنگ تبخیر سطحی با دما و سطح مایع رابطه مستقیم دارد، یعنی هرچه دما و یا سطح مایع بیشتر باشد، تبخیر سطحی بیشتر می شود. آهنگ تبخیر سطحی با فشار وارد بر مایع و رطوبت هوا رابطه عکس دارد، یعنی هرچه فشار وارد بر مایع و رطوبت بیشتر باشد، آهنگ تبخیر سطحی کاهش می یابد.

* تبخیر سطحی: تندی مولکول های سطحی مایع می تواند به حدی برسد که از مایع جدا شده و وارد هوا شوند.

---

* نقطه جوش هر مایع به جنس مایع، ناخالصی مایع و فشار وارد بر آن بستگی دارد. افزایش فشار باعث بالا رفتن نقطه جوش می شود. بنابراین نقطه جوش آب در بالای کوه کم تر از نقطه جوش در پایین کوه است.

Scanned by TapScanner

مثال: حداقل چند گرم آب ۲۰°C را با ۱۰g بخار آب ۱۰۰°C مخلوط کنیم تا تمام بخار آب به آب تبدیل شود؟ ($c_{آب} = 4/2\ J/g°C$, $L_V = 2268\ J/g$)

۱) ۱/۲۵ ۲) ۲/۱۵ ۳) ۶۷/۵ ۴) ۱۵ (جواب: گزینه ۳)

مثال: ۵g بخار آب ۱۰۰°C، حداکثر چند گرم یخ ۰°C را ذوب می‌کند؟ ($L_F = 336\ J/g$, $c_{آب} = 4/2\ J/g°C$, $L_V = 2268\ J/g$)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰ (جواب: گزینه ۲)

مثال: ۱g بخار آب ۱۰۰°C را با ۲۰g آب ۴۰°C مخلوط می‌کنیم. اگر تبادل گرمایی فقط بین بخار و آب صورت بگیرد، شرایط نهایی چگونه است؟ ($L_V = 2268\ J/g$, $c_{آب} = 4/2\ J/g°C$)

۱) ۲۱g آب ۱۰۰°C ۲) ۲g بخار ۱۰۰°C و ۱۹g آب ۱۰۰°C

۳) ۲۱g آب با دمای تقریبی ۶۸°C ۴) ۲۱g آب با دمای تقریبی ۹۰°C (جواب: گزینه ۳)

---

* اختلاف دما باعث شارش گرما از جسم با دمای بالاتر به جسم با دمای پایین‌تر می‌شود. این انتقال گرما تا هنگامی ادامه می‌یابد که دو جسم هم‌دما شده و به تعادل گرمایی برسند. شارش گرما به سه طریق رخ می‌دهد که عبارتند از: رسانش گرمایی، همرفت و تابش گرمایی.

---

* مقدار گرمایی که در مدت زمان یک ثانیه، از طریق رسانش منتقل می‌شود، آهنگ رسانش گرمایی می‌گویند (H): $H \overset{(J/s)}{=} \frac{Q}{t} = k\frac{A\Delta\theta}{L}$ ، A: مساحت مقطع (m^2)، $\Delta\theta$: اختلاف دما ($°C$ یا K)، L: طول میله (m)، k = رسانندگی گرمایی (جنس میله)

(Q: مقدار گرما، t: در مدت زمان)

مثال: نشان دهید یکای رسانندگی گرمایی در SI برابر J/msK یا W/mK (وات بر متر کلوین) است.

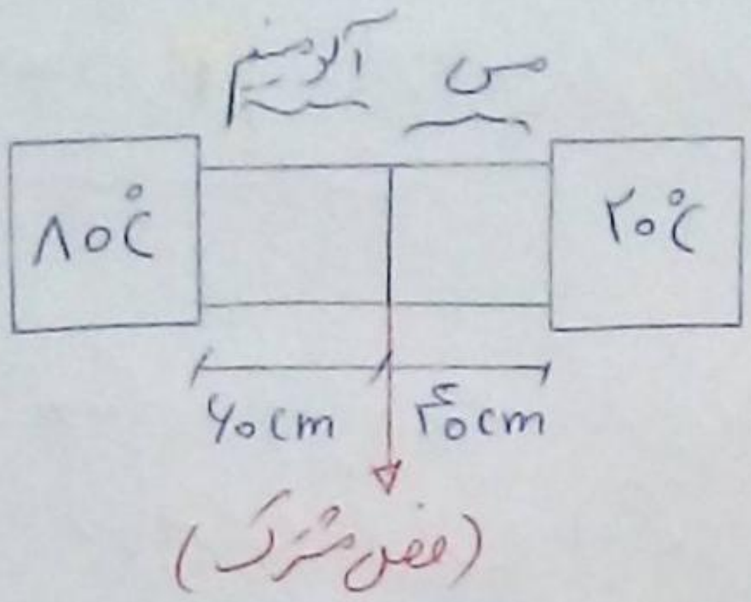
مثال: یک سر میله‌ای از جنس مس درون مخلوط آب و یخ و سر دیگر بالای بخار آب ۱۰۰°C است. طول میله ۲۰cm و مساحت مقطع آن ۵۰cm² است. چه مدت طول می‌کشد تا ۱۰g یخ ذوب شود؟ از تبادل گرما با محیط صرف نظر کنید. ($k_{مس} = 400\ W/m.K$ و $L_F = 336\ kJ/kg$)

۱) ۲/۱۵ ۲) ۳/۳۶۵ ۳) ۷/۲۵ ۴) ۱۲/۱۵ (جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

مثال: با توجه به شکل مقابل اگر از اتلاف گرما به محیط صرف نظر شود، دمای مقطع مشترک چند درجه سلسیوس است؟

(۳۷°C = جواب)



* هرفت * هرفت طبیعی * هرفت واداشته * تابش گرمایی (در پدیده‌های زیستی)
* تف سنجی (روشی تقریبی دمای اجسام با استفاده از تابش گرمایی) (کلمه انگلیسی) (شکار)

* در روش هرفت، ستاره بادهای بالاتر به دلیل چگالی کم‌تر بالاتر رفته و ستاره بادهای کم‌تر جایگزین آن می‌شود. (اصل ارشمیدس)

هرفت طبیعی: شوفاژ و بخاری، جریان بادهای ساحلی، گرم شدن آب داخل لگن و انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح.

هرفت واداشته: سیستم خنک کننده موتور اتومبیل و گرم و سرد شدن بخش‌های مختلف بدن بر اثر گردش جریان خون.

* انتقال گرما از خورشید به زمین با روش‌های رسانش و هرفت امکان پذیر نیست، زیرا این روش‌ها نیاز به محیط مادی دارند و فضای بین خورشید و زمین خالی از ماده است.
* در روش تابش، گرما از طریق امواج الکترومغناطیسی منتقل می‌شود.
* آهنگ انتقال گرما به روش تابش به ۳ عامل مهم بستگی دارد که عبارتند از: دما، سطح مقطع، رنگ و سطح جسم

* در فشار ثابت برای مقدار معینی گاز، حجم گاز با دمای مطلق گاز متناسب است.

$\frac{V}{T} = \text{ثابت}$ (کلوین)

* آنا باید برحسب کلوین باشد ولی t می‌تواند هرنمایی داشته باشد، البته فضای t باید در طرفین یکسان باشد.

$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ (فشار ثابت)

$(T = 273 + \theta)$

Scanned by TapScanner

* اگر حجم مقدار معینی گاز ثابت نگه داشته شود، فشار گاز با دمای مطلق (دما بر حسب کلوین) مناسب است.

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad (\text{حجم ثابت}) \qquad \frac{P}{T} = \text{ثابت}$$

* نگاهی آیا باید بر حسب کلوین باشد دی P می‌تواند هر نگاهی داشته باشد، البته نگاهی P باید در طرفین یکسان باشد.

* در دمای ثابت، فشار گاز با حجم گاز رابطه‌ی عکس دارد (اندازه حاصل ضرب فشار و حجم ثابت است)

$$P_1V_1 = P_2V_2 \quad (\text{در دما ثابت}) \qquad PV = \text{ثابت}$$

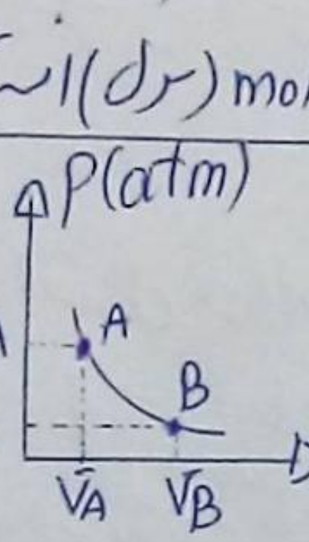
* نگاهای P و V در طرفین تساوی باید یکسان باشند ولی لزومی ندارد بر حسب نگاهای SI باشند

$$\left(n = \frac{N}{N_A} \rightarrow 6/022 \times 10^{23}\right)$$

* در دما و فشار ثابت، نسبت حجم گاز به تعداد مولکول‌های آن (تعداد مول‌های آن) ثابت است.

$$\frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2} \quad (\text{در دما و فشار ثابت}) \qquad \frac{V}{n} = \text{ثابت}$$

* نگاهای V و n در طرفین یکسان باشند ولی نگاهای n، mol (مول) است.



مثال: مقداری گاز کامل ضمن فرآیندهم دمایی را مطابق شکل طی کرده است. حجم گاز در حالت B سه برابر حجم گاز در حالت A است. اگر فشار گاز در حالت A برابر ۴/۲atm ($P_A = 4/2atm$) باشد، فشار در حالت B چند atm است.

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۲/۴ ۴) ۲/۶ (جواب: گزینه ۲)

* قانون گازهای آرمانی (کامل)

$$\frac{PV}{nT} = \text{ثابت} \quad \left(\frac{P_1V_1}{n_1T_1} = \frac{P_2V_2}{n_2T_2}\right)$$

گازهای رقیق و یا کم چگالی تا حدود زیادی از گازهای کامل پیروی می‌کنند. نگاهای (و طرف یکسان) نباشند

$$\frac{PV}{nT} = R \quad (\text{ثابت جهانی گازها})$$

$$PV = nRT \quad (n \text{ ثابت باشد}) \rightarrow \frac{P_1V_1}{T_1 k} = \frac{P_2V_2}{k T_2} \quad (SI) \begin{cases} P(Pa), V(m^3) \\ n(mol), T(k) \end{cases}$$

مثال: دمای مقداری گاز آرمانی را از ۲۷°C به ۲۲۷°C رسانده و هم‌زمان حجم را نصف می‌کنیم، فشار گاز چند برابر می‌شود؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{3}{10}$ ۴) $\frac{10}{3}$ (جواب: گزینه ۴)

نگاها باید بر حسب SI باشند (بر اساس نگای R)

Scanned by TapScanner

* گاز کامل (آرمانی) : گازی است که ذرات آن به یکدیگر نیروی جاذبه وارد نمی کند.
گاز سیار رقیق را می توان گاز کامل در نظر گرفت

* $1atm = 10^5 pa$ * $1L = 10^{-3} m^3 = 10^3 cm^3$ * (دیدگاه ماکروسکوپی و دیدگاه میکروسکوپی)

* معادله حالت (در گازها به طور کلی پیچیده می باشد ولی برای گاز کامل، معادله حالت ساده و مستقل از نوع گاز می باشد.

$$n = \frac{m}{M} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{g \text{ یا } kg}{g/mol \text{ یا } kg/mol}$$

* اگر داخل ظرف چند نوع گاز باشد، باید تعداد مول گازها را با هم جمع کرده و عدد مجموع را به جای کمیت n در معادله حالت قرار دهیم.

مثال: در ظرفی به حجم 30L و دمای 27°C مقدار 8g هیدروژن و 32g اکسیژن وجود دارد. فشار گاز تقریبا چند اتمسفر می باشد؟
$(R = 8 J/mol.K, M_{H_2} = 2 g/mol, M_{O_2} = 32 g/mol)$

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۲/۲ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۴)

* مقایسه شرایط گاز با حالت استاندارد: یک مول از هر گازی در دمای صفر درجه سلسیوس (0°C) و فشار یک اتمسفر ($P = 1atm$) حجمی برابر با 22/4 لیتر را اشغال می کند.
* اعداد بالا از رابطه $PV = nRT$ به دست آمده اند.

مثال: داخل ظرفی با حجم 5/6L مقدار 0/5 مول گاز تک اتمی آرگون با دمای 273°C وجود دارد. فشار گاز چند اتمسفر است؟

۱) 0/5 ۲) 1/5 ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۴)

* مسائل جرم متغیر: در مسائلی که جرم گاز ثابت نیست و مقداری گاز به ظرف اضافه می شود و یا از آن خارج می شود و یا در مسائلی که چند ظرف به یکدیگر متصل می شوند: $(n = \frac{PV}{RT})$

$$n_T = n_1 + n_2 + \cdots \Rightarrow \frac{P_T V_T}{T_T} = \frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2} + \cdots$$

مثال: اگر شیر کپسولی را باز کنیم تا نصف جرم گاز خارج شود و دمای مطلق گاز را نصف کنیم، فشار گاز داخل کپسول چند برابر می شود؟ (کپسول حجم ثابتی دارد)

۱) 2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$ (جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner

مثال: با استفاده از روابط $\rho=\frac{m}{V}$ (چگالی، جرم، حجم)، $pV=nRT$ (معادله حالت جرم مولی)، $m=nM$ (جرم، تعداد مول)، نشان دهید چگالی گاز از رابطه $\rho=\frac{PM}{RT}$ بدست می‌آید. $P(Pa)$، $M(kg/mol)$، $T(K)$، $\rho(kg/m^3)$

$R(J/mol.k)$ ⟵ (یکاها باید براساس SI باشند)

مثال: حباب هوایی از عمق ۲۰ متری به سطح آب می‌آید. چگالی هوای درون حباب در سطح آب چند برابر می‌شود؟ ($\rho_{آب}=1000 kg/m^3$ ، $P_0=10^5 Pa$ ، دما ثابت)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$ (جواب: گزینه ۴)

---

* اگر گاز از شرایط اولیه T_1، V_1 و P_1 (با حرکت پیستون یا گرم کردن گاز) به شرایط ثانویه T_2، V_2، P_2 تغییر کند، می‌گوییم یک فرآیند ترمودینامیکی رخ داده است.
* محاسبات کار، یا گرمای مبادله شده با گاز به مسیر فرآیند وابسته است.

---

* گاز (دستگاه) با محیط اطراف خود از دو طریق گرما و کار تبادل انرژی می‌کند.

گرما: نوعی انرژی می‌باشد که به دلیل اختلاف دما بین دو جسم مبادله می‌شود. (Q)

* اگر گاز گرما بگیرد، گرما با علامت مثبت و اگر گاز گرما از دست بدهد گرما با علامت منفی لحاظ می‌شود.

منبع گرما: جسمی است که به دلیل جرم بسیار زیاد، با تبادل گرما، دمای آن به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر نمی‌کند.

کار: با تغییر حجم گاز در یک فرآیند، محیط روی دستگاه یا دستگاه روی محیط کار انجام می‌دهد.

منظور از کار (W)، کار محیط روی دستگاه است.

W (منفی) (مثبت) ⟵ انبساط حجم

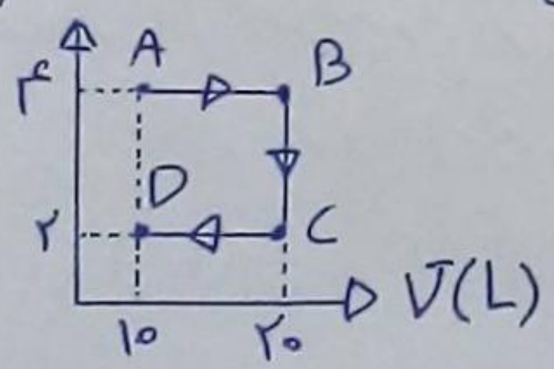
W (مثبت) (منفی) ⟵ کاهش حجم

---

* مساحت زیر نمودار $P-V$ (فشار برحسب حجم) برابر مقدار کار می‌باشد، علامت کار با توجه به تراکمی بودن یا انبساطی بودن فرآیند تعیین می‌شود. $P(Pa)$ و $V(m^3)$ ، $W(J)$:(SI)

$1atm=10^5 Pa$ ، $1L=10^{-3} m^3$

مثال: تغییرات فشار برحسب حجم برای مقدار معینی گاز اکسیژن مطابق شکل مقابل است. کار انجام شده توسط گاز در کل فرآیند چند ژول است؟



(جواب: $+4000 J$)

Scanned by TapScanner

ترمودینامیک

* مجموع انرژی ذرات یک جسم را انرژی درونی جسم می گویند و به صورت دقیق تر، به مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل ذره های یک جسم، انرژی درونی می گویند (U)

* در مورد گازهای کامل، انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل فقط تابع دمای مطلق گاز می باشد ($U \propto T$)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

(تعداد مول ها) n ثابت باشد

* اگر مقدار گاز نیز از n_1 مول به n_2 مول تغییر کند، انرژی درونی گاز به صورت مقابل تغییر می کند.

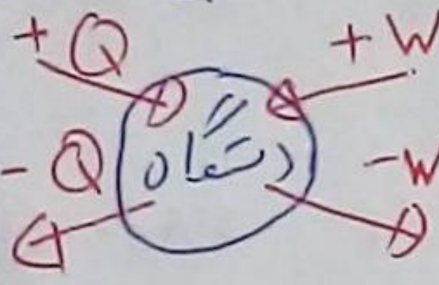
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} \times \frac{T_2}{T_1}$$

مثال: دمای مقداری گاز کامل را از ۱۸۲ °C به صفر درجه سانتی گراد می رسانیم. انرژی درونی گاز چند برابر شده است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۳}{۱۸۲}$ ۳) ۱۸۲ ۴) $\frac{۱}{۱۸۲}$ (جواب: گزینه ۲)

* قانون اول ترمودینامیک: این قانون در واقع همان پایستگی انرژی می باشد که رابطه بین انرژی درونی، گرما و کار را بیان می کند

$$\Delta U = Q + W$$

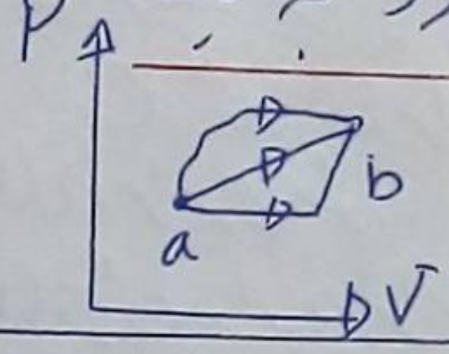


ΔU: دمای گاز افزایش ⊕ / دمای گاز کاهش ⊖

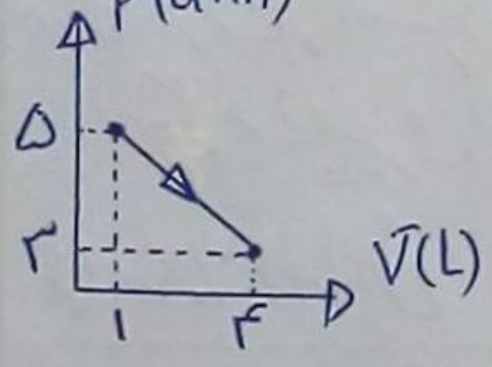
W: گاز منبسط شود ⊖ / گاز متراکم شود ⊕

Q: گرما بگیرد ⊕ / گرما بدهد ⊖

* تغییر انرژی درونی مقدار معینی گاز فقط به تغییر دمای گاز بستگی دارد و به مسیر رابطه ندارد ولی کار و گرما به مسیر فرآیند رابطه دارد. نقاط ابتدایی و انتهایی



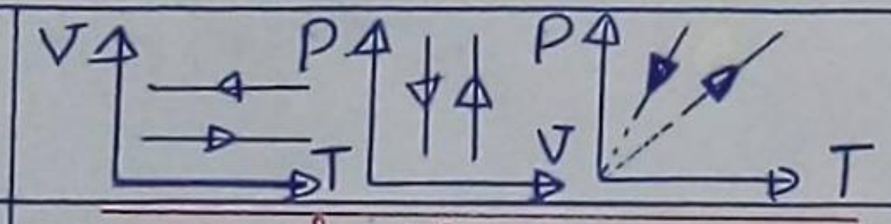
مثال: مقداری گاز اکسیژن فرآیندی مطابق شکل روبرو طی کرده است؛



۱) کار انجام شده چند ژول است؟ ($W = -۱۲۰۰ J$) جواب:

۲) اگر گرمای که گاز دریافت می کند برابر با ۲۹۵۰ ژول باشد، انرژی درونی چقدر تغییر کرده است؟ ($\Delta U = ۱۷۵۰ J$) جواب:

* فرآیند هم حجم * فرآیند هم فشار * فرآیند هم دما * فرآیندی دررو

نمودارهای هم حجم	$PV = nRT \rightarrow P = \frac{nR}{V} T$ (شیب خط در نمودار P-T)	
$W = ۰$ (حجم ثابت)		

تغییرات P, V, T، مشخص شود (تمرین)

Scanned by TapScanner

* گرمای مبادله شده در فرآیند هم حجم ($n = \frac{m}{M}$) (گرمای ویژه مولی در حجم ثابت = C_V)

$$Q = mc\Delta\theta = nMc\Delta\theta = nC_V\Delta\theta$$

C_V (گرمای ویژه مولی در حجم ثابت): مقدار گرمایی است که در حجم ثابت به یک مول از گازی دهند تا دمای آن یک کلوین افزایش یابد ($J/mol.k$)

* گرمای ویژه مولی در حجم ثابت با تقریب خوبی فقط به چندا تمی بودن گاز بستگی دارد و به جنس گاز بستگی ندارد

گاز تک اتمی: $C_V = \frac{3}{2}R$ ، گاز دواتمی: $C_V = \frac{5}{2}R$

(ما) گاز تک اتمی: $Q = \frac{3}{2}nR\Delta\theta$ ، گاز دواتمی: $Q = \frac{5}{2}nR\Delta\theta$ (ما)

روابط براساس تغییرات دما و تغییرات فشار

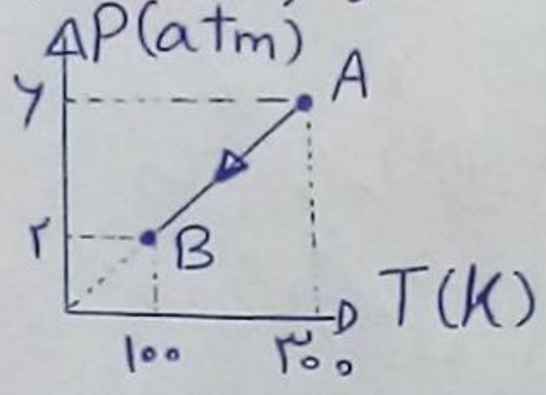
تک اتمی: $Q = \frac{3}{2}V\Delta P$ (فشار)

دواتمی: $Q = \frac{5}{2}V\Delta P$ (فشار)

$(PV = nRT) \rightarrow Q = C_V \times \frac{V\Delta P}{R}$

$\Delta U = W + Q \xrightarrow[(W=0)]{\text{فرآیند هم حجم}} (\Delta U = Q)$

مثال: مقدار دو مول گاز هلیم فرآیند AB را طی کرده است، تغییر انرژی درونی گاز چند ژول است؟ ($R = 8\ J/mol.k$)



تک اتمی

۱) ۴۸۰۰ ۲) ۴۸۰۰-

۳) ۸۰۰۰ ۴) ۸۰۰۰-

(جواب: گزینه ۲)

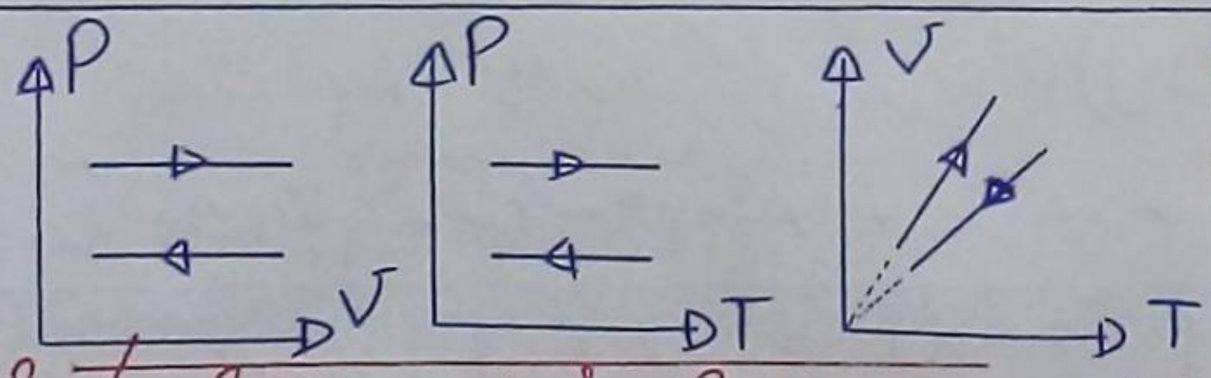
مثال: در یک فرآیند هم حجم اگر دمای گاز را برحسب درجه سلسیوس ($\theta > 0$) دو برابر کنیم، فشار گاز چند برابر می‌شود؟

۱) دو برابر می‌شود. ۲) افزایش یافته ولی کمتر از دو برابر می‌شود. (جواب: گزینه ۲)

۳) بیش تر از دو برابر می‌شود ۴) کم تر از نصف می‌شود.

مثال: در فشار ثابت دمای مطلق مقدار معینی گاز کامل را به اندازه ۲۰٪ افزایش می‌دهیم، حجم گاز چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۲۰٪ افزایش ۲) ۲۰٪ کاهش ۳) ۸۰٪ افزایش ۴) ۸۰٪ کاهش (جواب: گزینه ۱)



تغییرات P و V و T مشخص شود (بصورت افزایش یا کاهش)

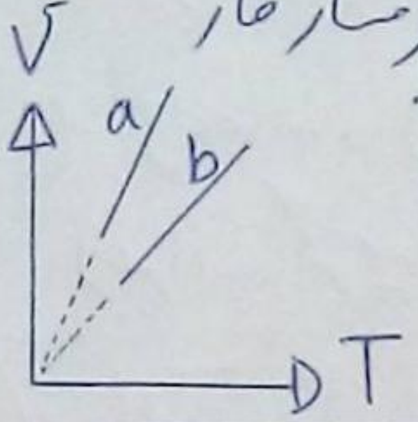
$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nR}{P}T$

(شیب خط در نمودار V-T)

* نمودارهای هم فشار

Scanned by TapScanner

مثال: نمودار فرآیند a مربوط به ۸ گرم اکسیژن و نمودار فرآیند b مربوط به ۴ گرم هیدروژن است. اگر شیب نمودار a دو برابر شیب نمودار b باشد، فشار گاز هیدروژن چند برابر فشار گاز اکسیژن است؟ $(M_{H_2}=2\ g/mol, M_{O_2}=32\ g/mol)$



۱) ۱ ۲) ۴
۳) ۸ ۴) ۱۶

(جواب: گزینه ۴)

* مساحت سطح زیر نمودار $P-V$ برابر قدر مطلق کار است.

* $W=-P\Delta V$ کار در فرآیند هم فشار
$W<0 \longrightarrow$ افزایش حجم $(\Delta V>0)$
$W>0 \longrightarrow$ کاهش حجم $(\Delta V<0)$

$Q=mc\Delta\theta=n\underbrace{M}\underbrace{c}\Delta\theta=nC_p\Delta\theta$

$(n=\frac{m}{M})$ (C_p: گرمای ویژه مولی در فشار ثابت)

* C_p (گرمای ویژه مولی در فشار ثابت): مقدار گرمایی است که در فشار ثابت به یک مول از گاز داده می‌شود تا دمای آن یک کلوین بالا رود. * به جنس گاز بستگی ندارد و فقط به چند اتمی بودن گاز بستگی دارد و با ترتیب خوبی دارای مقادیر مقابل است:

گاز تک اتمی: $C_p=\frac{5}{2}R$
گاز دو اتمی: $C_p=\frac{7}{2}R$
$\Big\}\xrightarrow{(PV=nRT)} Q=\frac{C_p}{R}P\Delta V, W=-nR\Delta\theta$

$\Longrightarrow Q=-\frac{C_p}{R}W$

* طی فرسل های بالا مقدار گرمای داده شده به گاز در فرآیند هم فشار از مقدار کار انجام شده توسط گاز بیشتر است زیرا مقدار $\frac{C_p}{R}$ از یک بیشتر است و هم چنین علامت گرما و کار در فرآیند هم فشار مخالف هم هستند

* در فرآیند هم فشار، علامت ΔU (تغییر انرژی درونی)، Q (گرما) یکسان می‌باشد، W (کار) از نظر علامت، قرینه علامت ΔU و Q است.

مثال: درون سیلندری ۱۰ لیتر گاز نیتروژن تحت فشار ۲atm وجود دارد. در فشار ثابت دمای گاز را از ۲۷°C به ۷۷°C می‌رسانیم.

۱) گرمای مبادله شده در این فرآیند چند ژول است؟
۲) کار انجام شده چند ژول است؟

$Q=\frac{35}{3}\times10^2\ J$

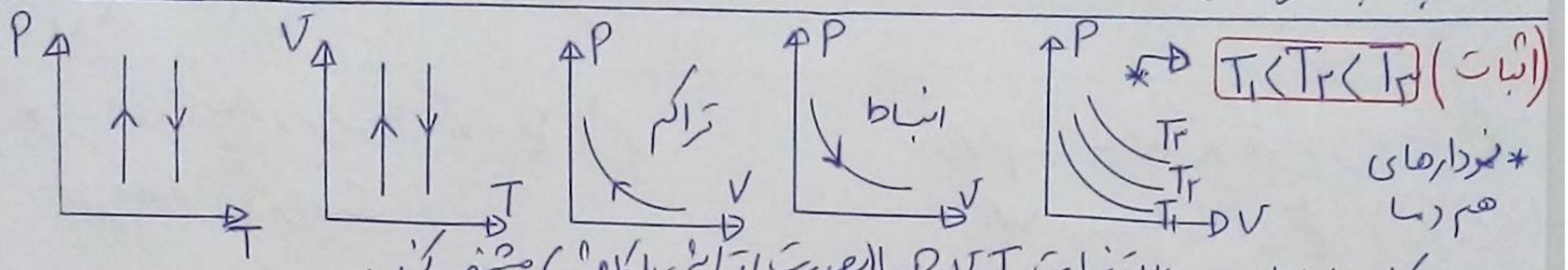
$W=-\frac{1000}{3}\ J$

Scanned by TapScanner

مثال: مقداری گاز کامل دوا‌تمی طی یک فرآیند هم‌فشار ۷۰۰ ژول گرما از دست می‌دهد. تغییر انرژی درونی گاز و کار انجام شده روی گاز به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $-900J$ و $-200J$ ۲) $+900J$ و $+200J$ ۳) $-500J$ و $+200J$ ۴) $+500J$ و $-200J$

(جواب: گزینه ۳)



(اثبات) $T_1 < T_2 < T_3$

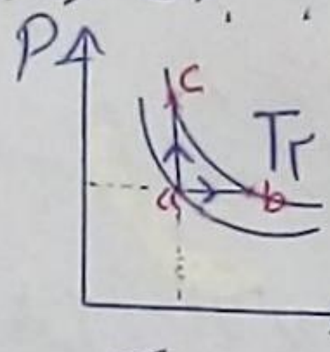
* نمودارهای هم‌دما

* در هرکدام از نمودارهای بالا تغییرات T، V، P را (صعودی، نزولی یا ثابت) مشخص کنید.

* نشان دهید:

۱) اختلاف گرماهای ویژه مولی در فشار ثابت و حجم ثابت برای هر گازی برابر است با ثابت گازها:

$*(C_P - C_V = R)$

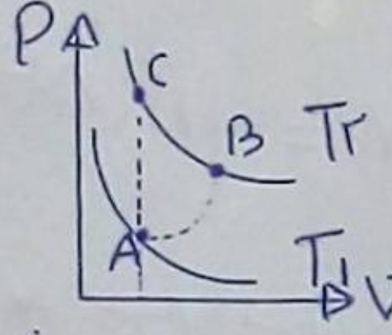


$*\Delta U_{ab} = \underbrace{\Delta U_{ac}}_{\text{حجم ثابت}}$

$\underbrace{\quad}_{\text{فشار ثابت}}$

$\Delta U = nC_V\Delta\theta$

۲) تغییر انرژی درونی هر فرآیندی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:



$*\Delta U_{AB} = \underbrace{\Delta U_{AC}}_{\text{فرآیند حجم ثابت}}$ ، $\Delta U = nC_V\Delta\theta$

$\begin{cases} \text{تک‌اتمی } \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta\theta = \frac{3}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) \\ \text{دوا‌تمی } \Delta U = \frac{5}{2}nR\Delta\theta = \frac{5}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) \end{cases}$

$*$(فرآیند دما ثابت) $\Delta U = 0 \Longrightarrow (Q = -W)$

$W < 0$ انبساط، $W > 0$ تراکم

$Q_P = nC_P\Delta\theta$ (گرمای فرآیند هم‌فشار) ، $Q_V = nC_V\Delta\theta$ (گرمای فرآیند هم‌حجم)

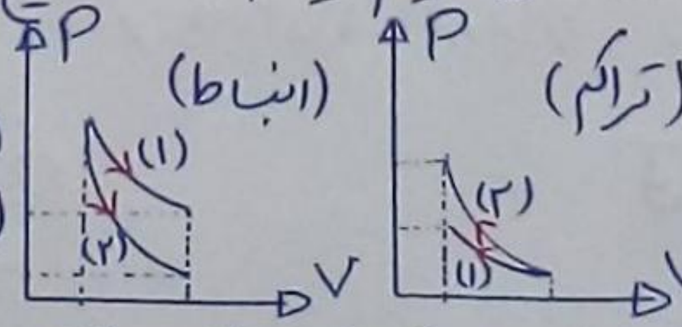
* فرآیندی درروو: فرآیندی که طی آن گاز با محیط اطراف خود گرما مبادله نمی‌کند. $(Q = 0)$

$\Delta U = W + \cancel{Q}^{0} \Longrightarrow \underbrace{\Delta U}_{nC_V\Delta\theta} = W = nC_V\Delta\theta$

* عایق‌بندی ظرف یا عمل تراکم یا انبساط سریع

شیب نمودار بیدررو بیشتر است

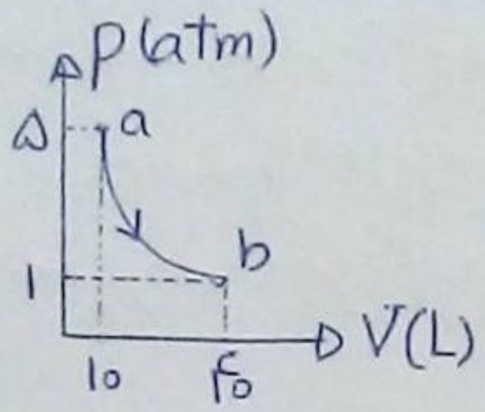
$|\Delta P|_{\text{بیدررو}} > |\Delta P|_{\text{هم‌دما}}$



* در هر دو حالت تراکم و انبساط، مقدار تغییر فشار فرآیند بیدررو بیش‌تر از تغییر فشار فرآیند هم‌دما می‌باشد.

Scanned by TapScanner

مثال: مقدار ۲ مول گاز ایده‌آل طی یک فرآیند سریع از حالت a به b می‌رسد.



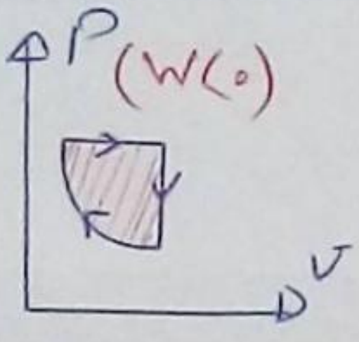
۱) کار انجام شده در این فرآیند چند ژول است؟ (جواب: -۲۵۰۰J)

۲) تغییر دمای گاز چند کلوین می‌باشد؟ ($R=8\ J/mol.k$) (جواب: -۶۲/۵)

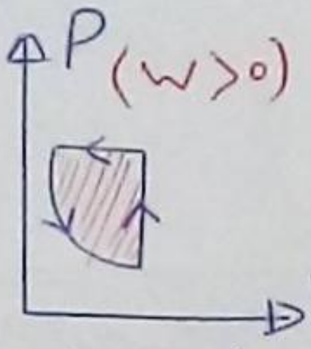
---

* چرخه ترمودینامیکی (دستگاه در حالت اولیه باز می‌گردد) * تغییر انرژی درونی در کل چرخه برابر صفر است

$\Delta U=0 \rightarrow Q=-W$ (کل) چرخه

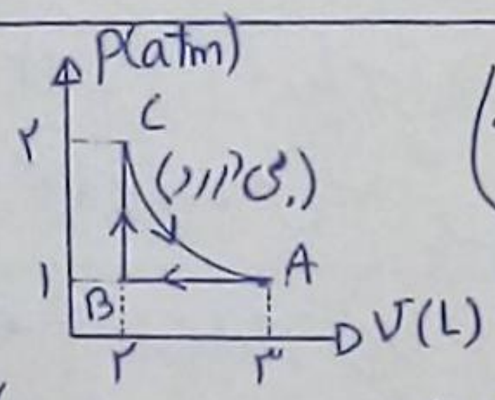


$\Delta U=0 \rightarrow Q=-W$ (کل) چرخه



* مساحت داخل چرخه (P-V) برابر است با مقدار کار انجام شده در کل چرخه و در چرخه ساعتگرد، کار مثبت و در چرخه پادساعتگرد کار منفی است.

مثال: نیم مول گاز تک اتمی چرخه زیر را طی می‌کند.



۱) دما را در حالت‌های A، B و C به دست آورید. (جواب: $T_A=V5k$, $T_B=50k$, $T_C=100k$)

۲) گرمای خالص مبادله شده در این چرخه چند ژول است؟ (جواب: $W_{کل}=-50J$)

۳) کار انجام شده روی گاز در فرآیند بی‌دررو چند ژول است؟ ($R=8\ J/mol.k$) (جواب: $W_{CA}=-150J$)

---

* ماشین گرمایی (گرما را به کار تبدیل می‌کند) $Q_H=|W|+|Q_L|$, $\eta=\frac{|W|}{Q_H}$ (بازده)

گرمای دریافتی از منبع (دما بالا) T_H Q_H → ماشین گرمایی → $|W|$ کار انجام شده روی محیط

ماشین گرمایی → $|Q_L|$ گرمای داده شده به منبع دما پایین (گرمای تلف شده) T_C

{ ماشین بنزینی ← ماشین درونسوز ← (۱) ضربه سلکشن (۲) ضربه قدرت (۳) ضربه تراکم (۴) تخلیه (۵) آتش گرفتن (۶) ضربه خروج } مراحل ۶،۵

{ ماشین دیزلی ← ماشین درونسوز ← (ماشین تخار ...) }

* چرخه آرمانی: چرخه‌ای که فرآیند آن استاوار و بدون اتلاف انرژی صورت می‌پذیرد.

(استاوار: میرفرآیند مشخص است، غیراستاوار: میرفرآیند مشخص نیست)

---

* قانون اول ترمودینامیک در ماشین گرمایی

$\eta=\frac{|W|}{Q_H}$ (بازده ماشین گرمایی) (برای تمام ماشین‌های گرمایی)

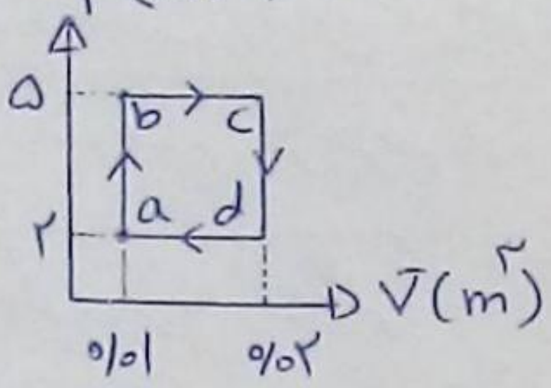
برای ماشین‌های آرمانی $\eta=1-\frac{|Q_L|}{Q_H}$ ← $Q_H=|W|+|Q_L|$، برای یک ماشین ایده‌آل در هر چرخه $\Delta U=0$

* هرچه نسبت تراکم (r) در ماشین درونسوز بیشتر باشد، بازده ماشین نیز بیشتر می‌شود.

Scanned by TapScanner

* در یک چرخه ماشین گرمایی، مجموع گرماهای مثبت برابر Q_H، مجموع گرماهای منفی برابر Q_L، مساحت داخل چرخه $(P-V)$ برابر W می باشد.
* چرخه ماشین گرمایی ساعتگرد است، زیرا علامت کار در ماشین گرمایی منفی است.
* یادآوری $\left(Q=C_P\frac{P\Delta V}{R} \text{ مزدوج فشار}\ ،\ Q=C_V\frac{V\Delta P}{R} \text{ مزدوج حجم} \right)$

مثال: گاز استفاده شده در یک ماشین گرمایی تک اتمی می باشد. با توجه به نمودار $(P-V)$ این ماشین:
۱) کار انجام شده در هر چرخه چند ژول است؟ $(|W|=3000\,J$:جواب$)$
۲) گرمای دریافتی در هر چرخه چند ژول است؟ $(Q_H=17000\,J$:جواب$)$
۳) بازده این ماشین چه قدر است؟ $(\eta=\frac{3}{17}$:جواب$)$



* قانون دوم ترمودینامیک: هیچ سنت دستگاه چرخه‌ای را بیابید که در طی آن مقداری گرما را از منبع دما بالا دریافت کند و تمام آن را به کار تبدیل کند. $(|W|<Q_H,\ \eta<1,\ |Q_L|\neq 0)$
* طبق قانون دوم ترمودینامیک بازده ماشین گرمایی همواره کمتر از ۱۰۰ درصد است.
* قانون اول و دوم ترمودینامیک مستقل از یکدیگرند یعنی اگر قانون دوم نقض شود لزوما قانون اول نقض نمی شود.

* ماشین کارنو

$$\eta_{max}=1-\frac{T_L}{T_H}\ ،\ \underbrace{\frac{T_L}{T_H}=\frac{|Q_L|}{Q_H}}$$

فقط در ماشین کارنو این رابطه برقرار است.

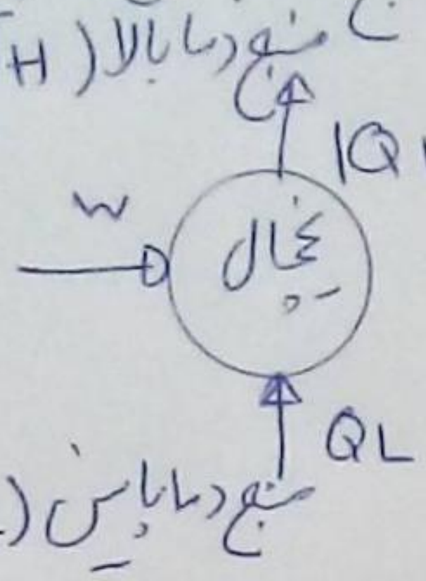
* بازده یک ماشین گرمایی کربن در منبع با دماهای T_H و T_L کار می کند، هرگز نمی تواند بیشتر از بازده چرخه ماشین کارنوی باشد که بین همین دو منبع کار می کند. $(\eta<\eta_{کارنو})$
* در ماشین گرمایی باید قانون اول و دوم ترمودینامیک برقرار باشد. هم چنین بازده ماشین باید از بازده ماشین کارنو کمتر باشد.

مثال: دمای منبع سرد و گرم یک ماشین کارنو ۲۷°C و ۱۲۷°C می باشد. اگر این ماشین در هر چرخه ۲kJ گرما از منبع دما بالا دریافت کند، در هر چرخه چند کیلوژول کار انجام می دهد؟
۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲ (جواب: گزینه ۱)

Scanned by TapScanner

* یخچال وسیله‌ای است که با استفاده از کار، گرما را از منبع دما پایین می‌گیرد و به منبع دما بالا می‌دهد.

* قانون اول ترمودینامیک در یخچال‌ها $|Q_H| = W + Q_L$



* در هر چرخه تغییر انرژی درونی برابر صفر است.

* ضریب عملکرد یخچال $k = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_L}{|Q_H| - Q_L}$

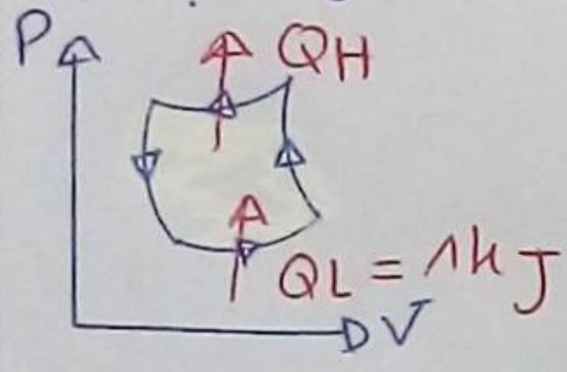
* در چرخه یخچال، Q_L برابر است با مجموع گرماهایی که دستگاه دریافت می‌کند.

Q_H برابر است با مجموع گرماهایی که دستگاه از دست می‌دهد، W مساحت داخل چرخه (P-V) است.

مثال: چه مدت طول می‌کشد تا در یخچالی با ضریب عملکرد ۴، توان ۲۰۰W، مقدار 1kg آب ۲۰°C به آب ۰°C تبدیل شود ($C = 4200 J/kg.°C$)

۱) ۵۵s ۲) ۱۰۵s ۳) ۴۲۰s ۴) ۵۰۲/۵s (جواب: گزینه ۲)

مثال: فرض کنید نمودار (P-V) چرخه‌ای که دستگاه در یک یخچال فرضی طی می‌کند، به صورت شکل زیر است. اگر دستگاه در هر چرخه 8kJ گرما از منبع دما پایین بگیرد و مساحت داخل چرخه 2kJ باشد؛



۱) این یخچال در هر چرخه چه مقدار گرما به محیط می‌دهد؟

۲) با فرض اینکه فضای که یخچال در آن قرار دارد، یک اتاق در به حجم $24m^3$ باشد، در هر چرخه، دمای اتاق چند کلوین افزایش می‌یابد؟ (دمای اتاق ۲۷°C، فشار هوا یک اتمسفر و گرمای ویژه مولی هوا در حجم ثابت $20 J/mol.k$ است، ثابت گازها را $R = 8 J/mol.k$ فرض کنید.)

(جواب: $|Q_H| = 10kJ$) (جواب: $\Delta T = \frac{1}{2} k$)

---

* قانون دوم ترمودینامیک: گرما خود بخود از جسم سرد به جسم گرم منتقل نمی‌شود. ($W \neq 0$)

خود به خود

* قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی و یخچالی هم ارز هستند. یعنی اگر یکی نقض شود، دیگری نیز حتما نقض می‌شود.

* بالاترین ضریب عملکرد مربوط به یخچال کارنو است.

$$k'_{\text{کارنو}} = \frac{T_L}{T_H - T_L}$$

مثال: یخچال کارنویی بین دو منبع با دماهای ۳°C- و ۲۷°C کار می‌کند. بالاترین ضریب عملکرد این یخچال چقدر است؟

($k'_{\text{کارنو}} = 9$:جواب)

Scanned by TapScanner

* اتم ها در حالت خنثی، تعداد الکترون و پروتون یکسان دارند و اصطلاحا بار خالص جسم صفر است.
اگر تعداد الکترون ها بیشتر از تعداد پروتون ها باشد، بار خالص جسم منفی و اگر تعداد الکترون ها کمتر از تعداد پروتون ها باشد، بار خالص جسم مثبت است.

* یکای بار الکتریکی در SI برحسب کولن است و با نماد C نشان داده می شود.
* بارهای هم نام یکدیگر را دفع و بارهای ناهم نام یکدیگر را جذب می کنند.
* جسم باردار علاوه بر جسم با بار مخالف، جسم خنثی را نیز جذب می کند.

مثال: دو جسم A و B یکدیگر را جذب می کنند و دو جسم A و C یکدیگر را دفع می کنند. کدام گزینه درست است؟
۱) جسم A و B لزوما ناهم نام هستند ۲) جسم A و B لزوما ناهم نام و A و C لزوما هم نام هستند
۳) جسم A و C لزوما باردار هستند و جسم B ممکن است باردار باشد
۴) جسم B لزوما باردار است (جواب: گزینه ۳)

* روش های باردار کردن اجسام: ① روش مالش ② روش تماس ③ روش القا
* روش مالش: اگر دو جسم با جنس های مختلف را به یکدیگر مالش دهیم، الکترون از یک جسم به جسم دیگر منتقل می شود و هر دو جسم باردار می شوند.
* در روش مالش یکی از جسم ها مثبت و جسم دیگر منفی می شود و اندازه بار آن ها نیز یکسان است.
* اگر پارچه پشمی و میله پلاستیکی را به یکدیگر مالش دهیم، پارچه پشمی، الکترون از دست داده و مثبت می شود و میله پلاستیکی، الکترون دریافت کرده و منفی می شود و اگر میله شیشه ای را با پارچه ابریشمی مالش دهیم، شیشه الکترون از دست داده و مثبت می شود و ابریشم الکترون دریافت کرده و منفی می شود. * سری الکتریسیته مالشی (ترتیب الکترون)
پارچه پشمی

* روش تماس: اگر جسم رسانا یا نارسانای خنثی را به جسم باردار تماس دهیم، جسم خنثی به طور هم نام با جسم باردار، دارای بار الکتریکی می شود * این روش بیشتر برای باردار نمودن جسم رسانا کاربرد دارد. * اگر جسم خنثی، رسانا باشد، بار گرفته شده از سطح خارجی بخش می شود، ولی اگر جسم خنثی نارسانا باشد، بار گرفته شده از محل باقی می ماند.
* اگر دو کره فلزی هم اندازه دارای بارهای q_1 و q_2 باشند، پس از تماس، بار کره ها برابر یکدیگر می شود و مقدار آن از رابطه ی روبرو به دست می آید

$$q' = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

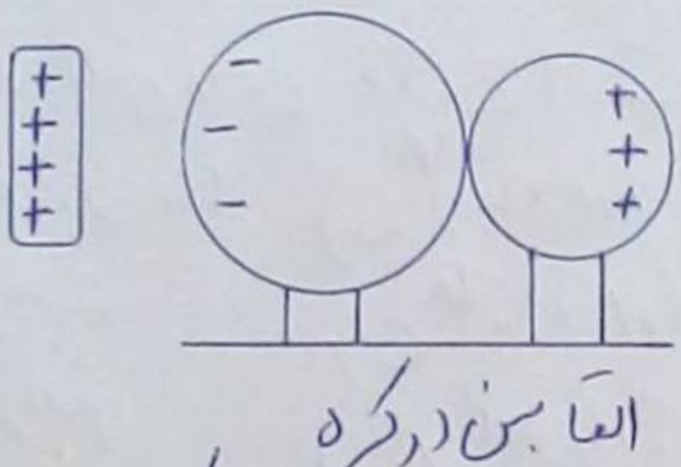
* در این رابطه q_1 و q_2 با علامت قرار داده می شوند.

(* در صورتی که شعاع کره ها متفاوت باشد بار به نسبت شعاع کره ها تقسیم می شود.)

Scanned by TapScanner

* روش القا: این روش در رسانا ها بسیار بهتر انجام می گیرد و تقریبا در نارسانا ها القا رخ نمی دهد.

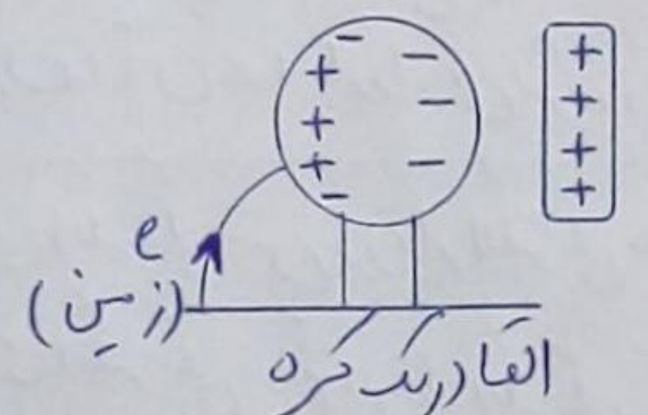
* پس از القای بار، کره را از هم دور می کنیم (اتصال کره را قطع می کنیم) سپس جسم باردار را دور می کنیم



القا بین دو کره

* بارهای ایجاد شده در این روش در کره، هم اندازه هستند و به اندازه و شکل اجسام رسانا بستگی ندارند

* پس از القای بار در کره، اتصال به زمین را قطع می کنیم و سپس جسم باردار را دور می کنیم.

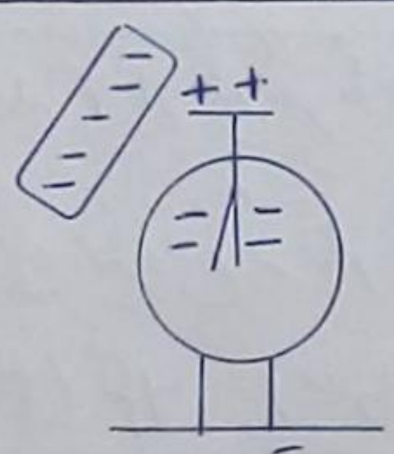


القا در یک کره

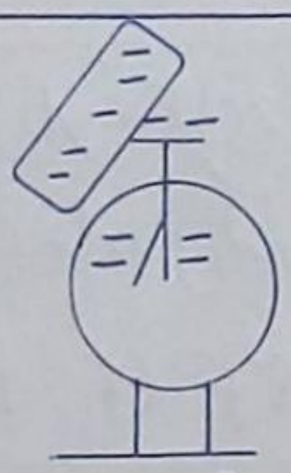
* بار ایجاد شده در کره، مخالف بار میله است و زمین مانند جسم بزرگی است که در صورت نزدیم می تواند الکترون بگیرد و یا از دست بدهد.

---

* طبق مدل های اتمی، بار مثبت (پروتون) جابجا نمی شود و در حقیقت بار مثبتی جابجا می شود ولی از نظر نتیجه، اگر فرض کنیم بار مثبت جابجا می شود، القای ایجاد نمی شود.



القا



تماس

مثال: میله‌ای با بار مثبتی را به آرامی به کلاهک یک الکتروسکوپ باردار تر دیک می کنیم. مشاهده می کنیم ابتدا فاصله بین ورقه ها کاهش یافته و ورقه ها بسته می شوند و سپس ورقه ها مجددا از هم فاصله می گیرند، کدام عبارت درست است؟

۱) بار الکتروسکوپ منفی است. ۲) بار الکتروسکوپ مثبت و مقدار آن در مقایسه با بار میله، بسیار زیاد است.
۳) بار الکتروسکوپ مثبت و مقدار آن در مقایسه با بار میله، کم است. ۴) الکتروسکوپ خنثی است

(جواب: گزینه ۳)

مثال: رسانای خنثی را به کلاهک الکتروسکوپ باردار تر دیک می کنیم. فاصله بین تیغه های الکتروسکوپ چگونه تغییر می کند

۱) کاهش می یابد ۲) ابتدا کاهش، سپس افزایش می یابد
۳) افزایش می یابد ۴) ابتدا افزایش، سپس کاهش می یابد

(جواب: گزینه ۱)

Scanned by TapScanner

الکتریسیته ساکن

* اصل پایستگی بار الکتریکی * اصل کوانتیده بودن بار الکتریکی $q = \pm ne$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$

مثال: عدد اتمی اردی $Z = 20$ است. بار الکتریکی خنثی شده در هر هسته را محاسبه کنید، $(e = 1,6 \times 10^{-19} C)$

۱) بار الکترون ها ($q_e = -3,18 \times 10^{-18} C$:جواب)

۲) بار هسته ($q_p = 3,18 \times 10^{-18} C$:جواب)

۳) بار اتم (بار خالص اتم در حالت خنثی صفر است : جواب)

* القای بار الکتریکی در سنجش سرا (عذای) * هنگامی که سلفون را باز می کنیم، در اثر تماس در لایه مختلف از سلفون، آن ها بار دار می شوند و به هم می چسبند * بار دار کردن توسط برف

* نیروی الکتریکی بین دو بار الکتریکی هم نام، رانشی است.

* نیروی الکتریکی بین دو بار الکتریکی نا هم نام، ربایشی است.

$$F = k \frac{|q_1| \times |q_2|}{r^2}, \quad (SI)$$

راستای نیرو در راستای خطی است که دو ذره را به هم متصل می کند

مثال: دو بار نقطه ای q , $5q$ در فاصله r از یکدیگر ثابت شده اند. اگر بزرگی نیروی که بار q به بار $5q$ وارد می کند F باشد، بزرگی نیروی که بار $5q$ به q وارد می کند چقدر است؟

۱) F ۲) $3F$ ۳) $5F$ ۴) $6F$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: دو ذره باردار q_1 و q_2 در محل خود ثابت شده اند. اگر $\vec{F}_{12} = 6\vec{i} - 7\vec{j}$ باشد، $\vec{F}_{21}$ کدام است؟

۱) $6\vec{i} - 7\vec{j}$ ۲) $-6\vec{i} + 7\vec{j}$ ۳) $-6\vec{i} - 7\vec{j}$ ۴) $6\vec{i} + 7\vec{j}$

(جواب: گزینه ۲)

مثال: دو بار الکتریکی نقطه ای در فاصله معین بر هم نیرو وارد می کنند. اگر اندازه یکی از بارها دو برابر شود، فاصله بین دو بار را چند برابر کنیم تا نیروی کولنی بین آن ها تغییر نکند؟

۱) $\sqrt{2}$ برابر ۲) $\frac{1}{2}$ برابر ۳) ۲ برابر ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر (جواب: گزینه ۱)

مثال: دو کره فلزی یکسان که روی دو پایه عایق قرار دارند، دارای بار الکتریکی $q_1 = +12\mu C$ و $q_2 = -2\mu C$ می باشند. اگر این دو کره را با هم تماس داده پس از هم جدا کنیم و در همان فاصله قبل قرار دهیم، نیروی بین آن ها چند برابر می شود؟

۱) $\frac{25}{24}$ ۲) $\frac{25}{12}$ ۳) $\frac{1}{25}$ ۴) $\frac{24}{25}$

(جواب: گزینه ۲ $(\frac{25}{24})$)

Scanned by TapScanner

* اگر مجموع بار دو کره هم نام، ثابت باشد، نیروی دافعه بین دو کره هنگامی بیشینه است که اندازه بار کره ها یکسان باشند

* اگر بارها برحسب μC و فاصله برحسب cm باشد، می توان توان ها را با هم ساده کرد:

$$F_{(N)} = 9_0 \frac{|q_1|_{(\mu C)} |q_2|_{(\mu C)}}{r^2_{(cm)^2}} \quad , \quad \left(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}\right)$$

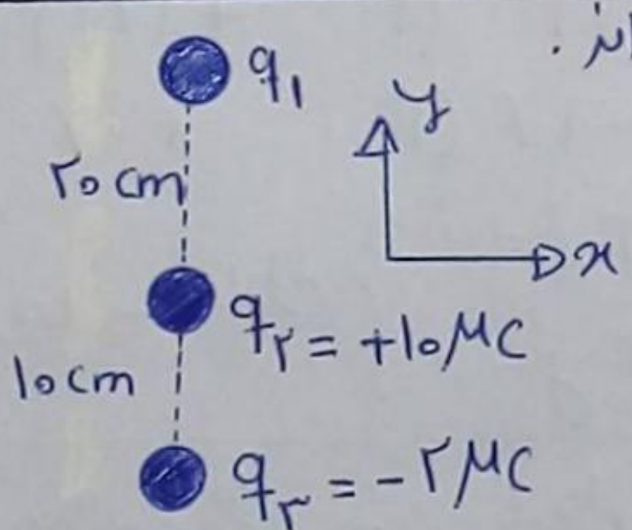
مثال: دو جسم باردار با بارهای $q_2 = 4q_1$ و جرم های $m_2 = 4m_1$ در فاصله کمی از یکدیگر نگه داشته شده اند. اگر تنها نیروی وارد بر این دو جسم نیروی الکتریکی آن ها به یکدیگر باشد، شتاب جسم دوم چند برابر شتاب جسم اول است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۳)

* دو ذره باردار و کوچک را در فاصله معینی از یکدیگر رها می کنیم. اگر تنها نیروی وارد بر آن ها، نیروی الکتریکی باشد:

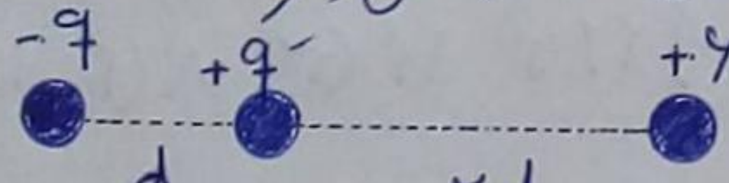
⊛ اگر دو ذره نام باشند، با گذشت زمان فاصله بین دو ذره کاهش و اندازه نیرو افزایش می یابد و شتاب بطور پیوسته افزایش می یابد ⊛ اگر دو ذره هم نام باشند...

مثال: مطابق شکل سه ذره باردار در محل خود روی محورها ثابت شده اند. بار q_1 چند میکروکولن باشد تا برآیند نیروهای وارد بر بار q_3 برابر $-6\vec{j}$ (در SI باشد؟ $\left(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}\right)$



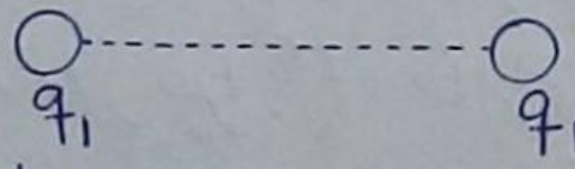
۱) $+60$ ۲) -60
۳) $+120$ ۴) -120

مثال: بارهای مشابه q در فاصله d به یکدیگر نیروی به بزرگی F وارد می کنند. در شکل زیر بزرگی برآیند نیروهای وارد بر بار q کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}F$ ۲) $2F$ ۳) $\frac{5}{2}F$ ۴) $\frac{5}{2}F$ (جواب: گزینه ۴)

* می توان بار q_3 را در محلی قرار داد که برآیند نیروهای وارد بر q_3 از طرف q_1 و q_2 صفر شود (بار q_3 در حالت تعادل قرار گیرد)



* q_1 و q_2 هم نام ← q_3 بین دو بار q_1 و q_2 قرار می گیرد. * بار q_3 حتما روی خط واصل بارهای q_1 و q_2 است

* q_3 همواره نزدیک تر به باری است که اندازه کمتری دارد. * مقدار و علامت q_3 اهمیتی ندارد.

Scanned by TapScanner

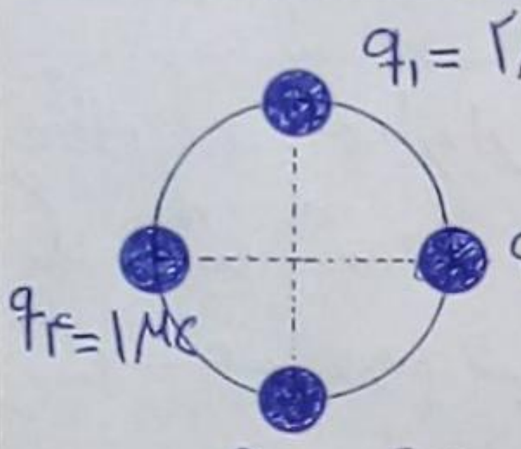
مثال: سه بار الکتریکی $q_1 = 1\mu C$ ، $q_2 = 4\mu C$ و q_3 روی یک خط قرار دارند. مقدار q_3 و مکان آن را طوری تعیین کنید تا هر سه بار به حال تعادل ساکن بمانند.
(فاصله q_1 تا q_2 برابر $6cm$ است.)

(جواب: گزینه ۲)

۱) $\frac{4}{9}\mu C$ ، $+$ ، $2cm$ از بار q_1 ۲) $-\frac{4}{9}\mu C$ ، $-$ ، $2cm$ از بار q_1

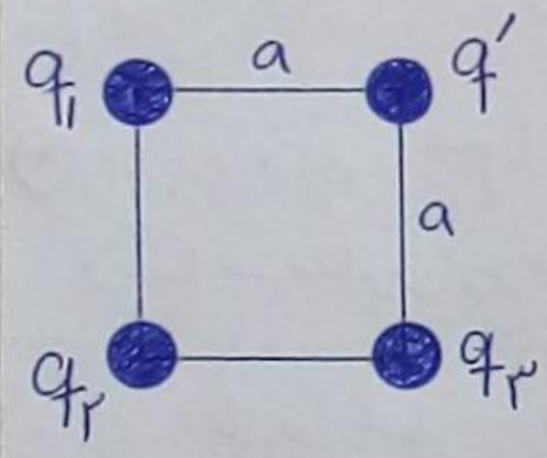
۳) $\frac{9}{4}\mu C$ ، $+$ ، $2cm$ از بار q_2 ۴) $-\frac{9}{4}\mu C$ ، $-$ ، $2cm$ از بار q_2

مثال: مطابق شکل زیر، ۴ ذره باردار در مراحل مساوی بر روی محیط دایره‌ای به شعاع $3cm$ قرار گرفته‌اند. اگر بار $q_5 = 2\mu C$ را در مرکز دایره قرار دهیم، اندازه برآیند نیروهای وارد شده به آن چند نیوتن است؟ $\left(K = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2}\right)$



۱) $40\sqrt{3}$ ۲) $40\sqrt{5}$ ۳) $80\sqrt{5}$ ۴) $80\sqrt{3}$ (جواب: گزینه ۴)

مثال: مطابق شکل چهار ذره باردار در چهار راس مربعی ثابت شده‌اند. $q_1 = q_2 = +8nC$ است. بار q_2 چند نانوکولن باشد تا بار q' در حال تعادل باشد؟



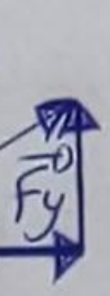
(جواب گزینه ۲)

۱) $+16\sqrt{2}$ ۲) $-16\sqrt{2}$

۳) $+16$ ۴) -16

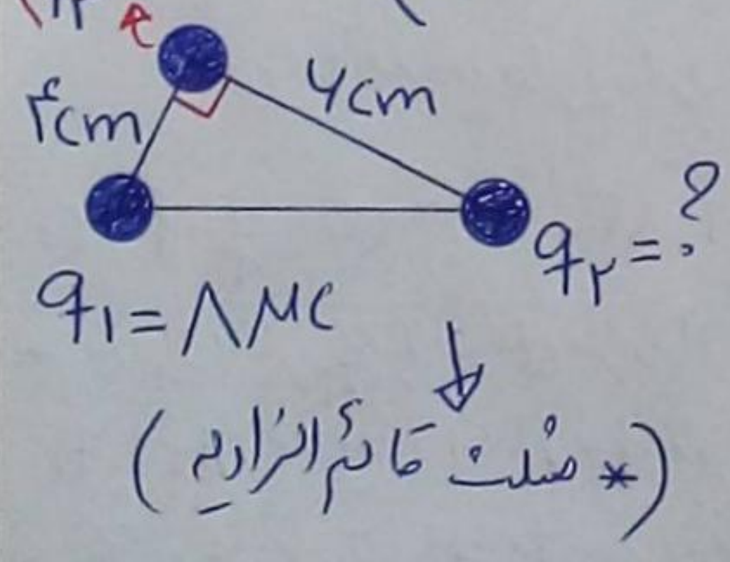
* در حالت تعادل: $\left.\begin{matrix}\Sigma f_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0\end{matrix}\right\}$ * تجزیه نیروها: $\vec{F} = \vec{f_x} + \vec{f_y}$ ، $\vec{i}$ ، $\vec{j}$

$\begin{cases}|\vec{f_x}| = |\vec{F}|\times\cos\theta \\ |\vec{f_y}| = |\vec{F}|\times\sin\theta\end{cases}$ (رابطه مثلثاتی غیر سر)



مثال: مطابق شکل سه ذره باردار در سه راس مثلثی ثابت شده‌اند. اگر نیروی برآیند وارد بر بار q_3 برابر $90\sqrt{2}N$ باشد، اندازه بار q_3 کدام است؟ $\left(K = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2}\right)$ $(q_3 = -2\mu C)$

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶ (جواب: گزینه ۲)

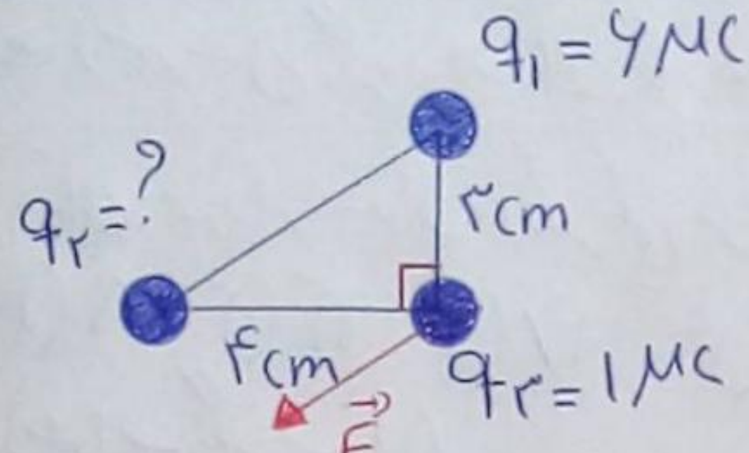


(* مثلث قائم‌الزاویه)

* مثبت یا منفی بودن بار q_2 تاثیری بر اندازه نیروی برآیند ندارد (چرا؟)، بنابراین علامت q_2 را مثبت در نظر گرفتیم.

Scanned by TapScanner

مثال: مطابق شکل سه ذره باردار در سه راس مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. بار q_2 کدام باشد تا نیروی برآیند وارد بر بار q_3، موازی وتر شود؟



۱) $-\frac{128}{9}\mu C$ ۲) $+\frac{128}{9}\mu C$

۳) $-8\mu C$ ۴) $+8\mu C$

(جواب: گزینه ۱)

---

* هر بار الکتریکی در فضای اطراف خود خاصیتی ایجاد می‌کند که به آن میدان الکتریکی می‌گویند که به موجب همین خاصیت، می‌تواند از راه دور به ذرات دیگر نیرو وارد کند.

* میدان الکتریکی (E)، کمیتی برداری است (دارای جهت و اندازه می‌باشد)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \left(\frac{N}{C}\right) \quad (N) \quad (C)$$

$$\vec{F} = q_0 \times \vec{E}$$

* به بار مثبت در جهت و به بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی، نیروی الکتریکی وارد می‌شود.

مثال: ذره‌ای به جرم $2mg$ در نقطه‌ای از فضا معلق است. اگر میدان در این نقطه $10^4 N/C$ و در راستای قائم و به سمت پایین باشد، بزرگی و علامت بار کدام است؟

۱) $2\times10^{-6}C$، مثبت ۲) $2\times10^{-6}C$، منفی ۳) $2\times10^{-9}C$، مثبت ۴) $2\times10^{-9}C$، منفی

(جواب: گزینه ۴)

جهت میدان الکتریکی ↓ (بردار E و F هم‌سو هستند)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \longrightarrow E = k\frac{|q||q_0|}{r^2}, \quad F = k\frac{|q|}{r^2}$$

* میدان الکتریکی، از بار مثبت خارج می‌شود و به بار منفی داخل می‌شود.

مثال: میدان الکتریکی در فاصله $20cm$ از بار نقطه‌ای q_1 برابر E و در فاصله $30cm$ از بار نقطه‌ای q_2، برابر $\frac{3}{2}E$ می‌باشد. نسبت $\left|\frac{q_1}{q_2}\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{8}{27}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{27}{8}$

(جواب: گزینه ۲)

مثال: بار $q = -2\mu C$ را در ناحیه‌ای قرار می‌دهیم که میدان برابر $\vec{E} = (6\vec{i} - 8\vec{j})\times10^5$ نیوتون بر کولن است. اندازه نیروی وارد بر ذره چند نیوتون است؟

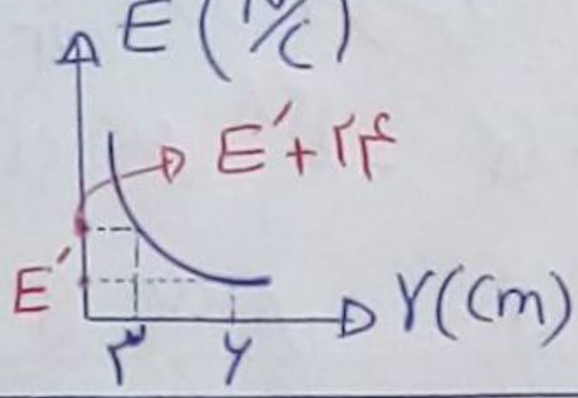
۱) ۰٫۴ ۲) ۲٫۸ ۳) ۱٫۶ ۴) ۲

(جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner

* زنبور عسل برگرده انسان گل ها (الف) * اندازه میدان با مجذور فاصله از بار، رابطه عکسی دارد.

مثال: نمودار میدان الکتریکی برحسب فاصله به صورت شکل است. اندازه E' چقدر است؟

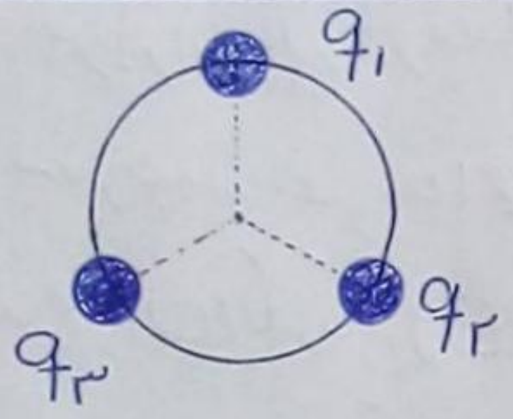


۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

(جواب: گزینه ۱)

(۳, E'+۲۴) نقاط (۶, E')

مثال: مطابق شکل سه ذره باردار در فاصله مساوی روی محیط دایره‌ای ثابت شده‌اند. شعاع دایره برابر ۱۰cm و $q_1 = q_2 = +2\mu C$ و $q_3 = -2\mu C$ است. اندازه میدان در مرکز دایره چند نیوتون بر کولن و در کدام جهت است؟ ($K = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$)



۱) 5.4×10^5، به سمت q_3 ۲) 5.4×10^5، به سمت q_2

۳) 3.6×10^5، به سمت q_3 ۴) 3.6×10^5، به سمت q_1

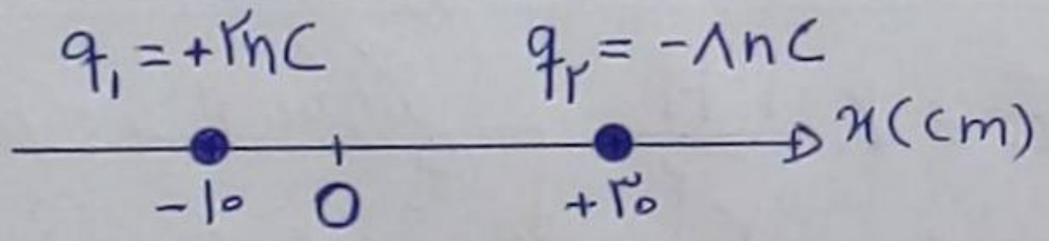
(جواب: گزینه ۳)

مثال: هشت بار نقطه‌ای با بار مساوی روی دایره‌ای به شعاع ۱۰cm در فاصله‌های مساوی از یکدیگر ثابت شده‌اند. اندازه هر بار $5\mu C$ است. اگر فقط یکی از بارها منفی برده و بقیه مثبت باشند، میدان برآیند در مرکز دایره چند نیوتون بر کولن است؟ ($k = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$)

۱) 4.5×10^6 ۲) 9×10^6 ۳) 27×10^6 ۴) 36×10^6

(جواب: گزینه ۲)

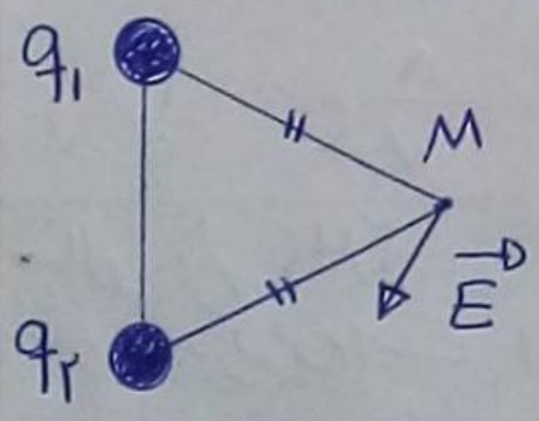
مثال: مطابق شکل دو ذره باردار روی محور x ها ثابت شده‌اند. در کدام نقطه میدان الکتریکی برآیند صفر است؟



۱) +10 ۲) +20 ۳) -40 ۴) -50 (جواب: گزینه ۴)

* بارها هم نام باشند ← بین دو بار (تر دیک بار کوچکتر)
* بارها نا هم نام باشند ← خارج دو بار (تر دیک بار کوچکتر)

مثال: میدان حاصل از بارهای q_1 و q_2 در نقطه M به صورت زیر می‌باشد، علامت بارها و اندازه آن‌ها در مقایسه با هم چگونه است؟



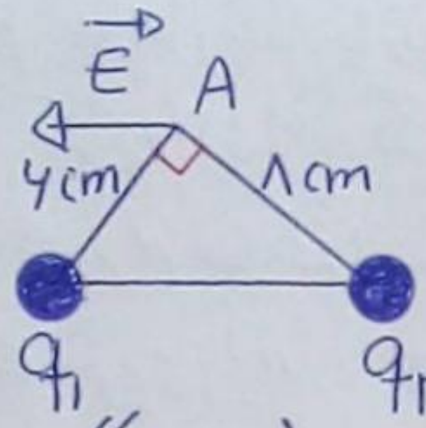
۱) $q_1>0$ ، $q_2>0$ ، $|q_1|>|q_2|$ ۲) $q_1>0$ ، $q_2<0$ ، $|q_1|<|q_2|$

۳) $q_1<0$ ، $q_2>0$ ، $|q_1|>|q_2|$ ۴) $q_1<0$ ، $q_2<0$ ، $|q_1|<|q_2|$

(جواب: گزینه ۲)

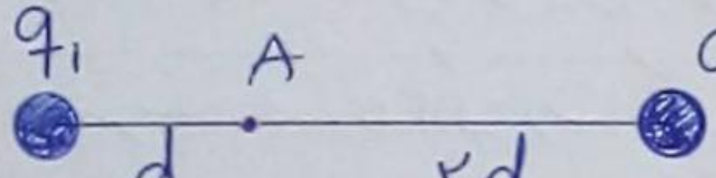
Scanned by TapScanner

مثال: مطابق شکل دو ذره باردار در دو راس مثلث قائم الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. اندازه میدان الکتریکی برآیند در راس A برابر $10^8\ N/C$ و موازی وتری می‌باشد. بار q_1 بر حسب میکروکولن کدام است؟ $(K=9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$



۱) -40 ۲) $+40$ ۳) -24 ۴) $+24$ (جواب: گزینه ۳)

مثال: در شکل زیر میدان حاصل از بارهای q_1 و q_2 در نقطه A برابر E است. اگر بار q_2 را خنثی کنیم، میدان در نقطه A یک سوم برابر می‌شود و جهت آن عوض می‌شود. $\frac{q_2}{q_1}$ کدام گزینه است؟

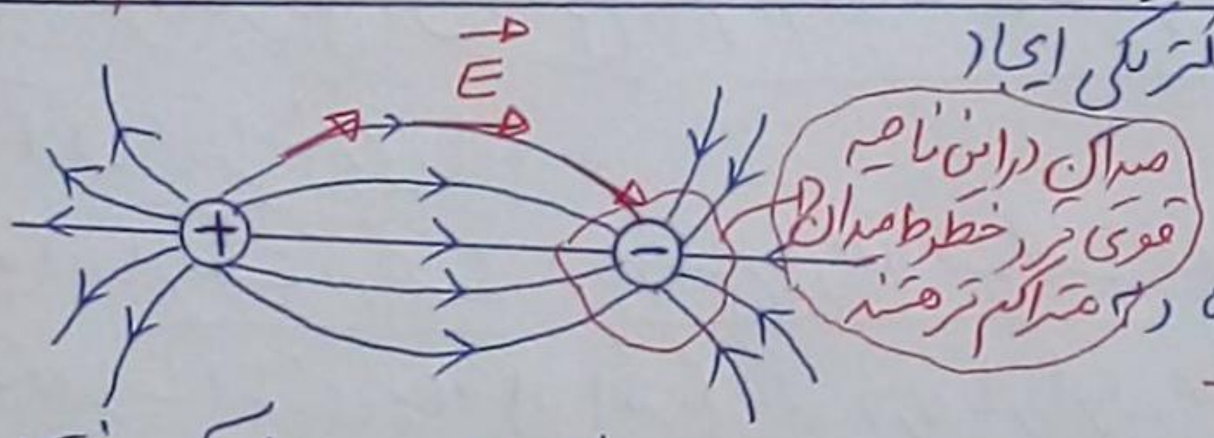


۱) $+2$ ۲) -2 ۳) $+16$ ۴) -16 (جواب: گزینه ۳)

*(در این گونه سوالات می‌توانیم q_1 (مخرج نسبت خواسته شده (در صورت سوال)) را برابر یک قرار دهیم و در نظر بگیریم، حاصل q_2 را بدست بیاوریم.)

*(چون در صورت سوال مقادیر q_1 و q_2 داده نشده است می‌توانیم به جای آن‌ها مقدار جایگذاری کنیم)

* بارهای الکتریکی در فضای اطراف خود میدان الکتریکی ایجاد می‌کنند (خطوط میدان الکتریکی)



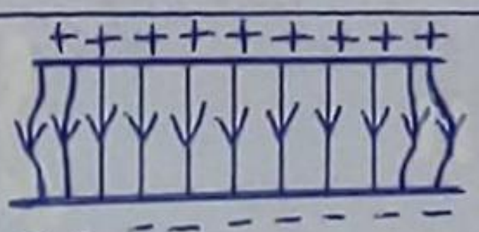
* خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج شده و به بار منفی داخل می‌شوند.

* میدان کمیت برداری است و میدان در هر نقطه برداری مماس بر خط میدان عبوری از آن نقطه و هم جهت با خط میدان است.

* هرچه میدان در یک ناحیه قوی‌تر باشد، باید خطوط میدان را در آن ناحیه به یکدیگر نزدیک‌تر و به هم فشرده‌تر رسم کرد و برعکس. (تجمع خطوط میدان الکتریکی نشان دهنده بزرگی میدان الکتریکی است.)

* خطوط میدان یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ یعنی از هر نقطه از فضا فقط یک خط میدان می‌گذرد که همان میدان الکتریکی برآیند است.

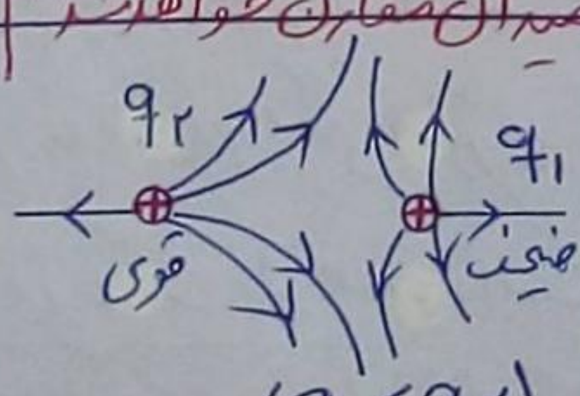
* میدان الکتریکی یکنواخت: میدان در لبه‌ها غیر یکنواخت است.



دو صفحه رسانا با بارهای هم اندازه و ناهم نام

* خطوط میدان حاصل، موازی و هم فاصله می‌شوند.

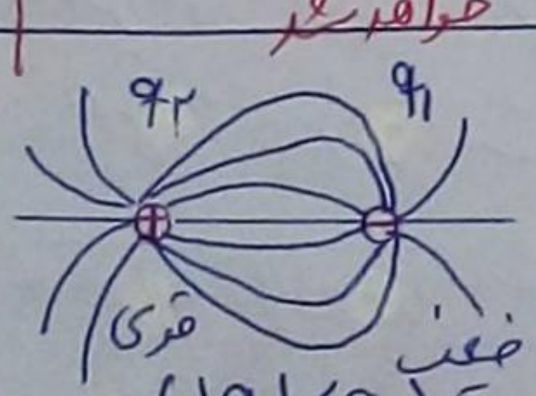
* در صورتی که $q_1=q_2$، خطوط میدان متقارن خواهد شد.



$(q_1<q_2)$

بارهای هم نام

* در صورتی که $|q_1|=|q_2|$ (اندازه)، خطوط میدان متقارن خواهد شد.

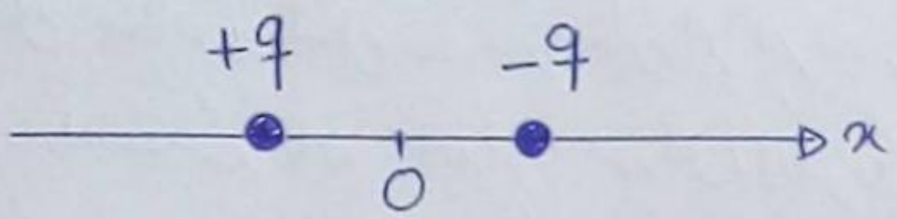


$(|q_1|<|q_2|)$

بارهای ناهم نام

Scanned by TapScanner

مثال: مطابق شکل بارهای $+q$ و $-q$ را روی محور xها قرار داده‌ایم. اگر از مکان $-\infty$ تا $+\infty$ روی محور xها حرکت کنیم، میدان برآیند چگونه تغییر می‌کند؟



(جواب: گزینه ۳)

۱) کاهش می‌یابد ۲) افزایش می‌یابد
۳) ابتدا افزایش، سپس کاهش، مجدداً افزایش و سپس کاهش می‌یابد
۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد

---

* رسوب دهنده الکتروستاتیکی

---

* اگر دو بار هم‌نام را کنار یکدیگر رها کنیم، در اثر نیروی دافعه، سرعت و انرژی جنبشی ذره‌ها افزایش می‌یابد و با توجه به قانون پایستگی انرژی، این انرژی جنبشی نمی‌تواند خود به خود به وجود آمده باشد، بنابراین افزایش انرژی جنبشی را به کاهش انرژی پتانسیل نسبت می‌دهیم

(انرژی پتانسیل الکتریکی)

* اگر ذره باردار در حیطه نیروی وارد شده بر آن از طرف میدان الکتریکی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش و اگر در خلاف جهت نیروی وارده حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد

⊛ به بار ساکت در حیطه، به بار متحرکی در خلاف جهت میدان الکتریکی نیرو وارد می‌شود.

* تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذره باردار در میدان الکتریکی یکنواخت

$$\Delta U = -|q|Ed\cos\theta$$

(J) (C) ($\frac{N}{C}$) (m)

(E ($\frac{N}{C}$): میدان الکتریکی ، θ: زاویه بین نیروی ناشی از میدان الکتریکی و جابه‌جایی)

($d\cos\theta$: جابه‌جایی هم‌راستا یا موازی با میدان الکتریکی)

* در جابه‌جایی عمود بر میدان الکتریکی، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی صفر است ($\cos 90 = 0$)

* اگر تنها نیروی وارد بر جسم نیروی الکتریکی باشد، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره با تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر است (قانون پایستگی انرژی)

$$\frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2)$$

* همواره تمایل خود به خودی حرکت بار طوری است که سبب کاهش انرژی پتانسیل الکتریکی می‌شود.

حرکت در جهت نیروی وارد شده بر ذره از طرف میدان الکتریکی

Scanned by TapScanner

* انرژی پتانسیل الکتریکی به بار الکتریکی و میدان الکتریکی وابسته است ،

* پتانسیل الکتریکی فقط به میدان الکتریکی وابسته است .

$$* \Delta V = \frac{\Delta U^{(J)}}{q(C)}$$

$* \Delta V$ = (J/C) یا ولت

* اختلاف پتانسیل الکتریکی، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی به ازای بار یک کولن است .

* پتانسیل الکتریکی زمین را صفر در نظر می‌گیرند $(\frac{1}{\equiv})$، $(V_E = 0)$

* هنگامی که می‌گوییم باتری ۱۲ ولت است، یعنی اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه مثبت (V_+) به اندازه ۱۲ ولت از پتانسیل الکتریکی پایانه منفی (V_-) بیش‌تر است

* اگر در جهت میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد

* اگر در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد

* اگر در جهت عمود بر میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی تغییر نمی‌کند

$$\Delta V = -E d \cos\alpha$$

(N/C)(m)

ΔV = (J/C) یا ولت

α: زاویه بین میدان (E) و جابجایی (d)

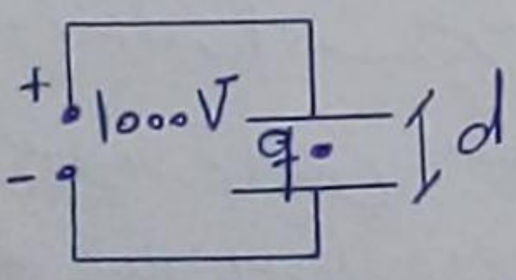
$d\cos\alpha$: جابجایی در راستای میدان الکتریکی

مثال: بار الکتریکی $-5nC$ از نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی $V_1 = -50V$ تا نقطه‌ای با پتانسیل $V_2 = +10V$ جابه‌جا می‌شود. انرژی پتانسیل بار چه مقدار و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) $3\times10^{-7}J$، کاهش ۲) $3\times10^{-7}J$، افزایش (جواب: گزینه ۱)

۳) $2\times10^{-7}J$، کاهش ۴) $2\times10^{-7}J$، افزایش

مثال: ذره‌ای به جرم 10g و مقدار بار $2\mu C$ مطابق شکل بین دو صفحه رسانا معلق است. علامت بار ذره و فاصله d کدام است؟

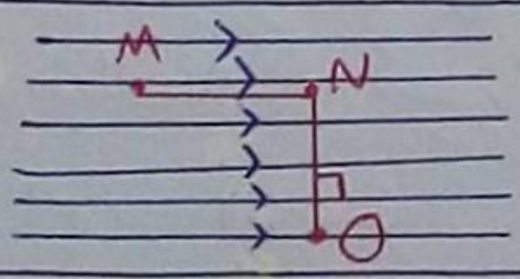


۱) مثبت، 25cm ۲) منفی، 25cm

۳) مثبت، 2cm ۴) منفی، 2cm (جواب: گزینه ۴)

$(* \Delta V = Ed \rightarrow E = \frac{V}{d})$

مثال: حداقل کار لازم برای جابه‌جا کردن بار $+6mC$ از نقطه M تا N در مسیر نشان داده شده، چند میلی‌ژول است؟



$E = 10^5 \frac{N}{C}$

$MN = NO = 1/5m$

(جواب = $-9\times10^5 mJ$)

Scanned by TapScanner

* رنگ بارش الکتروستاتیکی

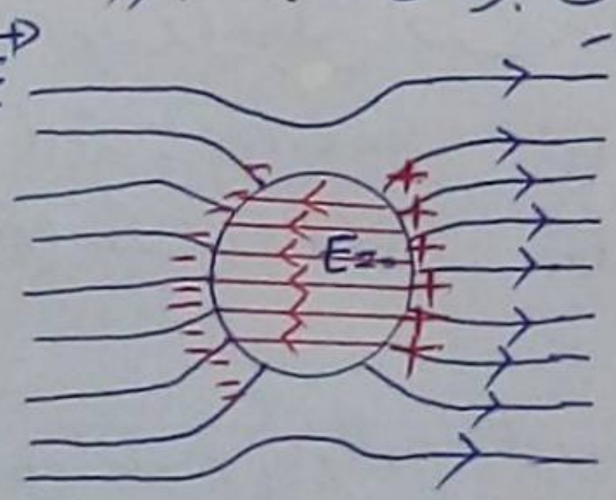
* بار اضافی داده شده به جسم رسانای متخلی در حالت تعادل الکتروستاتیکی فقط روی سطح خارجی رسانا پخش می شود. (میدان الکتریکی داخل رسانا صفر می شود)

* قفس فارادی: اگر شخصی داخل قفس رسانا قرار بگیرد و جرقه دان در گراف بزرگ مقدار زیادی بار به قفس منتقل شود، به شخص داخل قفس آسیبی نمی رسد. به همین دلیل است که در هنگام آذرخش بهترین مکان داخل اتومبیل است.

* اگر به جسم نارسانا بار الکتریکی داده شود، بار در همان محل باقی می ماند؛ زیرا جسم نارسانا الکترون آزاد ندارد و نمی تواند بار را منتقل کند.

* اگر یک رسانای خنثی را در یک میدان الکتریکی خارجی قرار دهیم، میدان الکتریکی به الکترون های آزاد رسانا نیرو وارد می کند و آن ها را جابه جا می کند، به طوری که اثر میدان الکتریکی خارجی در درون رسانا خنثی می شود و میدان الکتریکی خالص درون رسانا صفر می شود.

* اگر به رسانای خنثی بار داده شود و یا رسانای خنثی را درون میدان الکتریکی قرار دهیم، میدان الکتریکی داخل رسانا برابر صفر می شود. اگر میدان الکتریکی داخل رسانا صفر نباشد، در این صورت این میدان الکتریکی بر الکترون های آزاد نیرو وارد می کند و در نتیجه جریانی در رسانا ایجاد می شود، ولی چنین جریانی داخل رسانا وجود ندارد و می گوییم بارها در حال تعادل الکترواستاتیکی قرار دارند. هم چنین، خطوط میدان الکتریکی بر سطح رسانا همیشه عمود است، زیرا اگر میدان الکتریکی بر سطح رسانا عمود نباشد، میدان الکتریکی، مولفه ای مماس بر سطح رسانا خواهد داشت و این مولفه باعث حرکت الکترون های آزاد بر سطح رسانا می گردد و چنین جریانی وجود ندارد، چون در تناقض با تعادل الکترواستاتیکی است.



* میدان الکتریکی خارجی باعث جدا شدن بارهای مثبت و منفی در دو وجه رسانا شده است، به طوری که میدان الکتریکی خارجی در داخل رسانا را خنثی می کند.

* میدان الکتریکی یک رسانای باردار در همه جا عمود بر سطح این رسانا است.

Scanned by TapScanner

مثال: کره‌ای رسانا و خنثی را داخل میدان الکتریکی یکنواخت با بزرگی $10^3\ N/C$ قرار می‌دهیم. میدان الکتریکی ناشی از بارهای القاشده در رسانا و میدان برآیند داخل رسانا به ترتیب از راست به چپ چند نیوتون بر کولن هستند؟

۱) صفر، صفر ۲) صفر، 10^3 ۳) 10^3، صفر ۴) $10^3 \times \frac{1}{2}$، صفر (جواب: گزینه ۳)

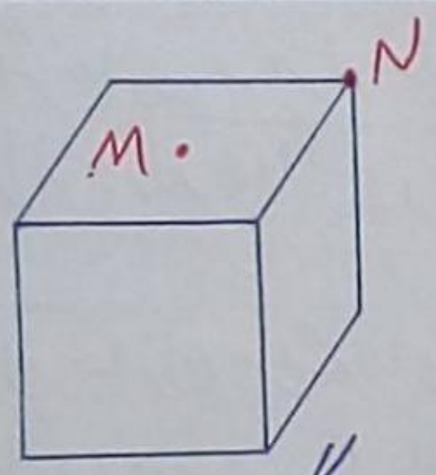
* همه نقاط داخل و روی سطح رسانا، پتانسیل الکتریکی یکسانی دارند.

* چگالی سطحی بار در نقاط نوک تیز رسانای متروی بیشتر از سایر نقاط است.

$\sigma = \frac{q(C)}{A(m^2)}$ (σ: چگالی سطحی بار الکتریکی) $\left(\frac{C}{m^2}\right)$

مثال: هشت قطره جیوه هم اندازه هریک دارای چگالی سطحی بار σ می‌باشند. اگر این قطرات به هم بپیوندند تا یک قطره کروی بزرگ تشکیل شود، چگالی سطحی آن σ' می‌شود. $\frac{\sigma'}{\sigma}$ کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸ (جواب: گزینه ۲)

مثال: به یک مکعب رسانا و متروی، بار مثبت می‌دهیم. اگر چگالی سطحی بار الکتریکی را با σ و پتانسیل الکتریکی را با V نمایش دهیم، کدام گزینه در مورد نقاط M و N درست است؟



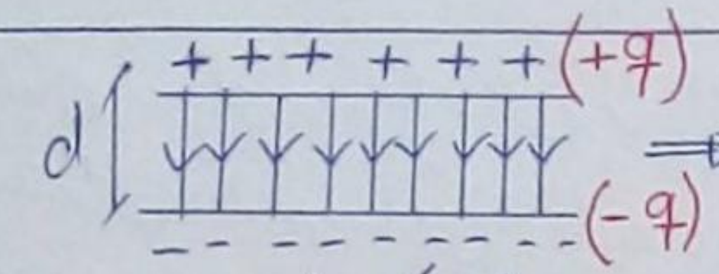
۱) $V_M = V_N$ ، $\sigma_M = \sigma_N$ ۲) $V_M = V_N$ ، $\sigma_M < \sigma_N$
۳) $V_M > V_N$ ، $\sigma_M > \sigma_N$ ۴) $V_M < V_N$ ، $\sigma_M < \sigma_N$ (جواب: گزینه ۲)

* خازن قطعه‌ای الکتریکی می‌باشد که می‌تواند بار الکتریکی و انرژی الکتریکی را در خود ذخیره کند و در مواقع لزوم در مدار تخلیه کند.

* باتری‌ها انرژی را با آهنگ نسبتاً کمی در مدار تخلیه می‌کند، ولی خازن بار دار می‌تواند انرژی را با آهنگ نسبتاً زیادی در مدار تخلیه کند (خلاصی درس)

* وقتی خازن شارژ می‌شود، هر کدام از صفحات دارای بار q است و منظور این است که روی یک صفحه، بار $+q$ و روی صفحه دیگر، بار $-q$ قرار دارد. می‌توان گفت باتری از یک صفحه خازن بار $-q$ را برداشته و به روی صفحه دیگر خازن برده است و در مدار فقط یک جابه‌جای تفکیک بار صورت گرفته و بار خالص صفحات یا ایده نشده است. * شارش بار آن قدر ادامه پیدا می‌کند تا اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات با اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری یکسان شود. میدان الکتریکی که بین دو صفحه خازن ایجاد می‌شود از صفحه مثبت به طرف صفحه منفی می‌باشد.

Scanned by TapScanner



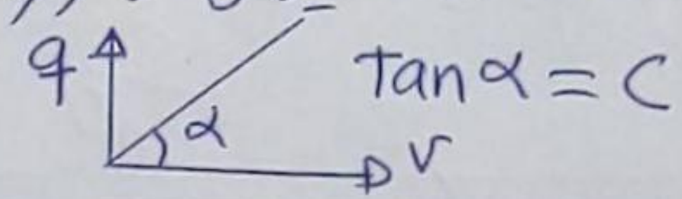
میدان یکنواخت
(از بار مثبت خارج می‌شود و به بار منفی وارد می‌شود)

میدان الکتریکی بین دو صفحه خازن = اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن / فاصله بین صفحه‌های خازن $\Rightarrow E = \frac{V}{d}$

* اگر خازن باردار را به یک مصرف کننده (مثل لامپ) متصل کنید یا دو صفحه خازن را با سیم به یکدیگر متصل کنید، الکترون‌ها از صفحه منفی به طرف صفحه مثبت (از طریق سیم یا مصرف کننده) منتقل می‌شوند تا هر دو صفحه خنثی شوند.

* هرچه باتری با اختلاف پتانسیل بیشتری را به صفحات خازن متصل کنید، بار بیشتری نیز روی صفحات خازن ذخیره می‌شود. (رابطه‌ی خطی) $\left(\begin{matrix}p=10^{-12}\\ \mu=10^{-6}\\ m=10^{-3}\end{matrix}\right)$

$C = \frac{q(C)}{V(\text{ولت})} \Rightarrow q = C \times V$ (F) (میکرو فاراد یکای بزرگی است و معمولا از pF یا μF استفاده می‌شود) (میکرو فاراد یا پیکو فاراد)



$C = k\varepsilon_0 \frac{A}{d}$ (ثابت دی الکتریک) (مساحت مشترک صفحات)

ظرفیت خازن

(ε_0: ضریب گذردهی الکتریکی خلا)

* k ضریبی بدون یکا است.
* ظرفیت خازن به اختلاف پتانسیل (V) و بار ذخیره شده (q) بستگی ندارد: (C)
* ضریب دی الکتریک هوا در خلا یک می‌باشد. (البته ضریب دی الکتریک هوا تقریبا یک است)

* اگر خازن به مولد متصل باشد، اختلاف پتانسیل (V) دو سر خازن ثابت می‌ماند و اگر خازن پر شده را از مولد جدا کنیم و به جای متصل نباشد، بار الکتریکی ذخیره شده (q) ثابت می‌ماند.

مثال: خازن پر شده‌ای را از مولد جدا می‌کنیم. اگر دی الکتریک بین صفحات را خارج کنیم، بار و اختلاف پتانسیل خازن به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند؟
۱) کاهش، کاهش ۲) کاهش، افزایش ۳) ثابت، افزایش ۴) ثابت، کاهش (جواب: گزینه ۳)

چند کاربرد خازن: میکروفن خازنی، صفحه کلید خازنی، کیسه هوای الکتریکی

* اثر دی الکتریک (افزایش ظرفیت خازن): می‌توان فرض کرد، خازن پر شده از مولد جدا است و بین صفحات، دی الکتریک وارد می‌کنیم. * دی الکتریک‌ها دو نوع می‌باشند: قطبی و غیر قطبی
(نتیجه: q ثابت می‌ماند و میدان و ولتاژ کاهش می‌یابد) ... و NH_3 یا HCl، آب

* وقتی یک دی الکتریک قطبی در میدان الکتریکی بین صفحات خازن قرار می‌گیرد، سر مثبت آن‌ها به طرف صفحه منفی خازن و سر منفی آن‌ها به طرف صفحه مثبت خازن کشیده می‌شوند و مولکول‌های ساده دو قطبی در جهت میدان الکتریکی خازن هم راستا می‌شوند. هم راستا شدن مولکول‌های دو قطبی، باعث ایجاد میدان الکتریکی مانند E' می‌شود که برآیند آن با E در خلاف جهت میدان اولیه بین صفحات خازن می‌باشد.

Scanned by TapScanner

* اگر یک دی الکتریک غیرقطبی در میدان الکتریکی بین صفحات خازن قرار گیرد ( ) مولکول ها براثر القا قطبیده می شوند ؛ یعنی ابر الکترونی این مولکول ها در خلاف جهت میدان جابه جا می شود و به این ترتیب

(دارای بار منفی)

مرکز بارهای مثبت و منفی از هم جدا می شوند بنابراین اثر دی الکتریک باعث تضعیف میدان الکتریکی بین دو صفحه خازن می شود و با توجه به جدا بودن خازن از مولد، اختلاف پتانسیل خازن کاهش می یابد ولی بار خازن (q) ثابت می ماند.

$E = \frac{V}{d}$ ⟵ V کاهش ⟵ E کاهش ⟵ d ثابت

$C = \frac{q}{V}$ ⟵ V کاهش ⟵ C افزایش ⟵ q ثابت

---

* اگر اختلاف پتانسیل دو سر خازن را افزایش دهیم، میدان بین صفحات به قدری قوی می شود که دی الکتریک می شود، دی الکتریک به طور لحظه ای رسانا شده و باعث می شود با ایجاد جرقه، خازن تخلیه شود. جرقه می تواند باعث سوختن دی الکتریک شود که به این پدیده اصطلاحا ضرورپذیری الکتریکی می گویند.

* به لحاظ میکروسکوپی، ضرورپذیری الکتریکی ناشی از کنده شدن الکترون های اتم های ماده دی الکتریک توسط میدان الکتریکی و پس رانده شدن این الکترون ها توسط میدان الکتریکی و ایجاد یک میدان رسانا بین دو صفحه خازن است که با ایجاد جرقه همراه است و معمولا خازن را می سوزاند.

---

* انرژی ذخیره شده در خازن ⟵ $U = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ ⟵ $(q = CV)$

* مساحت زیر نمودار q برحسب V برابر انرژی ذخیره شده در خازن است.

---

* فرض کنید بار q در خازن ذخیره شود. در این صورت بار q توسط باتری جابه جا شده است. انرژی پتانسیلی که توسط باتری مصرف شده است، از رابطه $U = qV$ به دست می آید و انرژی ذخیره شده توسط خازن از رابطه $U = \frac{1}{2}qV$ به دست می آید. بنابراین انرژی ذخیره شده در خازن نصف انرژی مصرفی باتری است.

مثال: خازن پرشده ای را از مولد جدا کرده و فاصله بین صفحات خازن را با یک دی الکتریک با ثابت ۴ پر می کنیم. انرژی ذخیره شده در خازن چند برابر می شود؟ ۱) ۱ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۸

(جواب: گزینه ۳)

---

* کاربرد خازن در دستگاه ضبط لرزش نامنظم قلب (ضبط پلاتور)

Scanned by TapScanner

جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم

* اجسام رسانا به دلیل داشتن الکترون های آزاد، می توانند بار الکتریکی را از خود عبور دهند.
* بار خالص عبوری از هر مقطع عرضی دلخواه AA' صفر است.

* اگر به دو سر رسانا اختلاف پتانسیل اعمال شود، در داخل رسانا میدان الکتریکی برقرار می شود. این میدان به الکترون های آزاد در خلاف جهت میدان نیرو وارد می کند و الکترون ها حرکت کاتوره‌ای خود را قدری تغییر می دهند و به آرامی با سرعتی که به آن سرعت سوق گفته می شود، در خلاف جهت میدان حرکت می کنند.
* مرتبه سرعت حرکت کاتوره‌ای الکترون های آزاد از مرتبه 10^6 متر بر ثانیه است.
* مرتبه سرعت سوق کمتر از $1\ \frac{mm}{s}$ است.

* به طور قراردادی جهت جریان، خلاف جهت شارش الکترون ها در نظر گرفته می شود. یعنی جریان در جهت میدان الکتریکی و از پتانسیل زیاد به کم است.

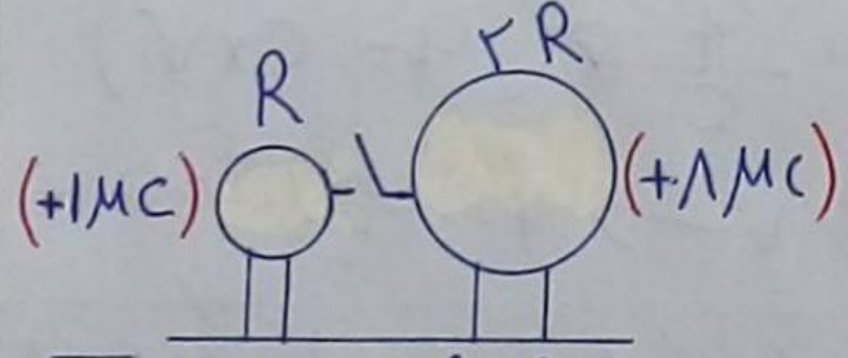
* بار شارش شده در واحد زمان را شدت جریان الکتریکی متوسط می گویند.
$$(A)\ \bar{I} = \frac{\Delta q(C)}{\Delta t(s)} \qquad (*\ q = \pm ne)$$

مثال: بار عبوری از مقطع رسانایی برحسب زمان در SI به صورت $q = t^2 + 3t - 1$ می باشد. جریان الکتریکی متوسط در ثانیه سوم چند برابر جریان الکتریکی متوسط در ثانیه اول است؟

ثانیه سوم: $t=2$ تا $t=3$ — ثانیه اول: $t=0$ تا $t=1$

1) 1 2) 2 3) 4 4) 5 (جواب: گزینه ۲) (* جریان الکتریکی لحظه‌ای: مشتق q برحسب t)

مثال: مطابق شکل دو کره رسانا با شعاع های R و $2R$ روی پایه عایق قرار دارند. اگر کلید بسته شود، در مدت $2ns$ کره ها به تعادل می رسند. جریان در سیم چند آمپر است؟



1) $2/25 \times 10^3$ 2) $2/25$ 3) 10^3 4) 1 (جواب: گزینه ۳)

* در حالتی که شعاع ها متفاوت باشند، بار به نسبت شعاع ها تقسیم می شود.

* جریان مستقیم: جریانی می باشد که جهت آن با گذشت زمان تغییر نمی کند و مقدار آن نیز ثابت است.

* آمپر - ساعت یکای بار الکتریکی است (باتری)
$q = I \times t$ ($A.h$ = A × h)
* شیب خط مماس بر نمودار $(q-t)$: شدت جریان لحظه‌ای (I)

* شیب خطی که دو نقطه از نمودار $(q-t)$ را به هم وصل می کند: شدت جریان متوسط $(\bar{I})$

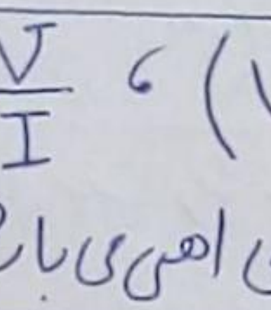
Scanned by TapScanner

مثال: روی یک باتری موبایل عدد ۲۵۰۰ mAh نوشته شده است. اگر در حالت مکالمه جریان ۵٪ A نیاز باشد، حداکثر چند ساعت با موبایل می‌توانید مکالمه داشته باشید؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) ۵۰ ۴) ۵ (جواب: گزینه ۴)

شیب خط $= \tan\alpha = \frac{1}{R}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{I}{V} = \frac{I}{IR} = \frac{1}{R}$



$V = IR$ ، $R = \frac{V}{I}$ (مقاومت الکتریکی)

(اهم (Ω))

(* خطزات رسانای اهمی باشند)

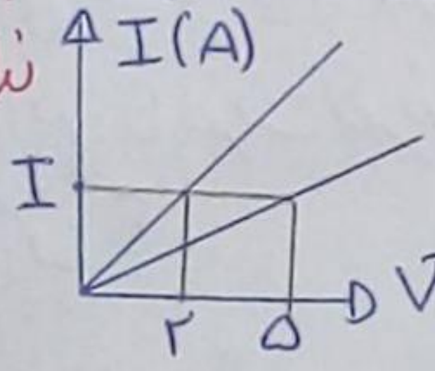
* در دمای ثابت، مقاومت الکتریکی رسانا به سه عامل جنس، طول و سطح مقطع رسانا بستگی دارد.

* ρ فقط به جنس و دمای رسانا بستگی دارد.

$R = \rho \frac{L}{A}$ (Ω) $(\Omega.m)$ (m) (m^2)

مقاومت ویژه

مثال: نمودار شدت جریان الکتریکی برحسب اختلاف پتانسیل دو رسانای اهمی مطابق شکل است. نسبت $\frac{R_1}{R_2}$ کدام است؟



۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۵ (جواب: گزینه ۱)

مثال: مکعبی از جنس آهن با ابعاد ۱cm × ۵cm × ۱۰cm در اختیار داریم. با توجه به این که ولتاژ خارجی به کدام دو وجه مرازی آن وصل شود، نسبت بیشترین مقاومت الکتریکی این قطعه به کم‌ترین مقاومت الکتریکی آن چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰ (جواب: گزینه ۴)

* با توجه به مقدار مقاومت ویژه، اجسام را به ۳ دسته تقسیم می‌کنند: رسانا، نیم‌رسانا، نارسانا

* تغییر مقاومت با دما

$\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta\theta)$

$\Delta\rho = \rho_0 \alpha \Delta\theta$

$(\frac{1}{K}$ یا $\frac{1}{^\circ C})$

اگر طرفین را در $\frac{L}{A}$ ضرب کنیم

$R_2 = R_1(1 + \alpha\Delta\theta)$

$\Delta R = R_1 \alpha \Delta\theta$

* از تغییرات L و A در اثر تغیر دما صرف نظر شده است، L و A را ثابت فرض کردیم.

* در نیم‌رساناها افزایش دما، مقاومت ویژه الکتریکی و مقاومت را کاهش می‌دهد. ضریب دمای مقاومت ویژه برای نیم‌رساناها (کربن - ژرمانیم - سیلیسیم خالص) منفی است.

Scanned by TapScanner

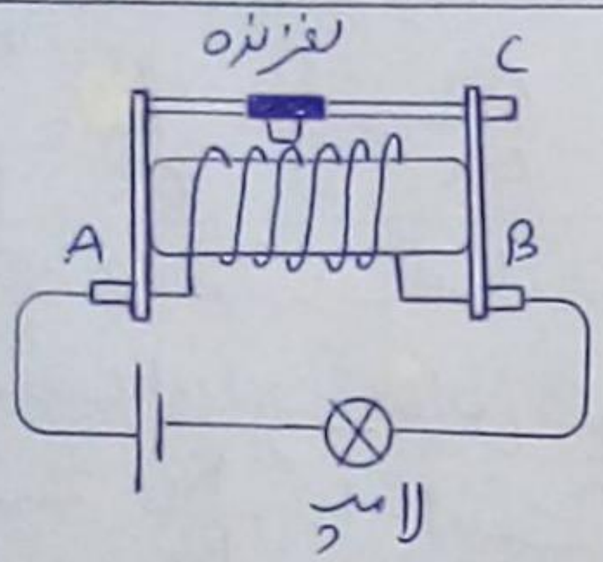
مثال: مقاومت یک دماسنج مقاومت پلاتینی در دمای $+10^\circ C$، برابر $100\,\Omega$ و درون یک کوره برابر $492\,\Omega$ است. دمای کوره چند درجه سلسیوس است؟ ($\alpha = 3/92 \times 10^{-3}\,\frac{1}{K}$)

$492\,\Omega$

1) 990 2) 1000 3) 1010 4) 1020 (جواب: گزینه ۳)

---

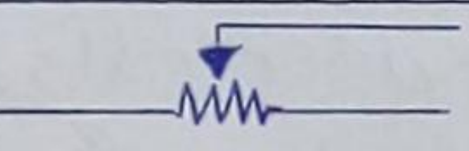
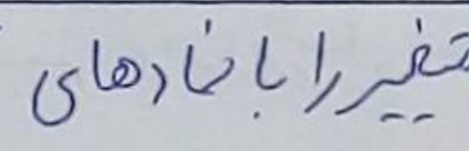
* مقاومت حلزونی * مقاومت رئوستا



مثال: مطابق شکل یک لامپ و رئوستا را به باتری با ولتاژ ثابت V متصل کرده‌ایم. با حرکت لغزنده به سمت چپ، نور لامپ چگونه تغییر می‌کند؟ (جواب: گزینه ۳)

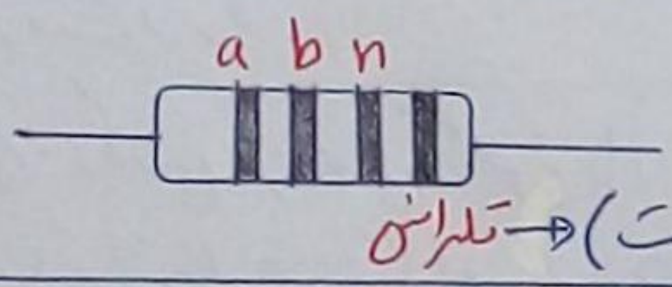
1) کاهش می‌یابد 2) افزایش می‌یابد 3) ثابت می‌ماند 4) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد

---

* پتانسیومتر * مقاومت متغیر را با نمادهای  یا  نمایش می‌دهند

---

* مقاومت‌های ترکیبی

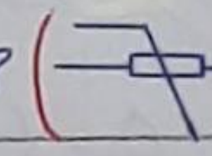


$R = \overline{ab} \times 10^n$ ($\overline{ab} = 10a+b$)

(* اگر حلقه چهارم (تلرانس) نباشد، تلرانس ۲۰ درصد است.)

(جهت راست)

---

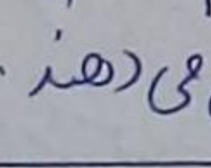
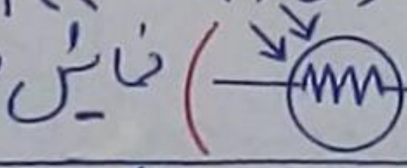
* ترمیستور: نوعی از مقاومت‌ها هستند که حساسیت آن‌ها نسبت به تغییر دما بیش‌تر از سایر مقاومت‌ها است. نماد ترمیستور در مدار به صورت  می‌باشد

---

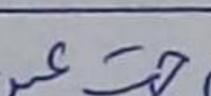
* ترمیستورها به دو نوع NTC و PTC تقسیم می‌شوند. در ترمیستورهای NTC با افزایش دما، مقاومت الکتریکی کاهش می‌یابد. در ترمیستورهای PTC با افزایش دما، مقاومت الکتریکی افزایش می‌یابد (البته به جز موارد خاص)

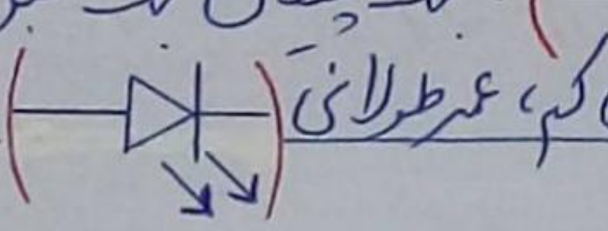
---

* مقاومت‌های نوری (LDR): این نوع مقاومت‌ها از مواد نیم‌رسانا تهیه شده‌اند که در اثر تابش نور، بر تعداد حامل‌های بار الکتریکی آن‌ها افزوده می‌شود و در نتیجه مقاومت آن‌ها کم می‌شود (* شدت روشنایی (بر حسب یکای لوکس (LUX)) ↑ ← مقاومت ↓)

* مقاومت‌های نوری را با نمادهای  یا  نمایش می‌دهند.

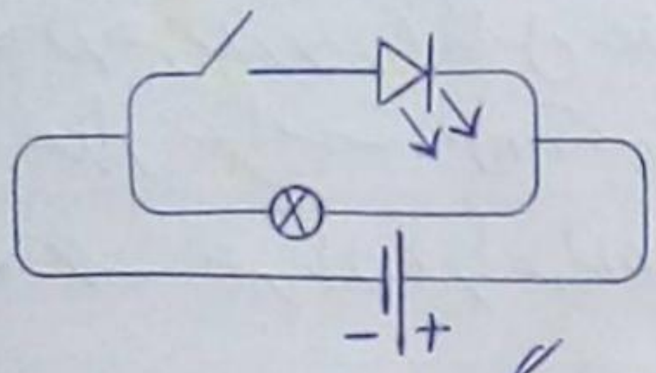
---

* دیودها: جریان را فقط از یک سو عبور می‌دهد  ، جهت پیکان جهت عبور جریان را نشان می‌دهد.

* دیودهای نور دهنده (LED)، نور زیاد، مصرف انرژی کم، عمر طولانی 

Scanned by TapScanner

مثال: مطابق شکل یک لامپ دیود را به باتری متصل کرده‌ایم و لامپ روشن است. با اتصال کلید نور لامپ چه تغییری می‌کند؟



۱) کاهش می‌یابد ۲) ثابت می‌ماند
۳) افزایش می‌یابد ۴) ممکن است کاهش یا افزایش یابد (جواب: گزینه ۲)

---

* نیروی محرکه الکتریکی: کاری که منبع روی واحد بار الکتریکی مثبت (یک کولن) انجام می‌دهد تا در مدار شارش کند، نیروی محرکه الکتریکی (emf) نامیده می‌شود.

ΔW: کاری که منبع روی بار Δq انجام می‌دهد

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta W}{\Delta q} \quad \begin{matrix} (J) \\ (C) \end{matrix} \quad \begin{matrix} (V) \\ (emf) \end{matrix}$$

---

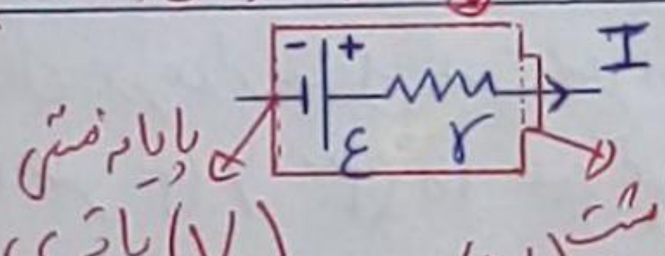
* انرژی که مولد به بار q می‌دهد، برابر $\mathcal{E}q$ است. یعنی هنگامی که بار $+q$ از پایانه منفی به پایانه مثبت مولد منتقل می‌شود، انرژی آن به اندازه $\mathcal{E}q$ افزایش می‌یابد.

---

* بار $+q$ از پایانه مثبت خارج می‌شود * r (مقاومت درونی)

* منبع آرمانی ← مقاومت درونی (r) صفر است.

($\mathcal{E} = (V_+) - (V_-)$)، ($\Delta V_{\text{باتری}} = \mathcal{E} - Ir$)

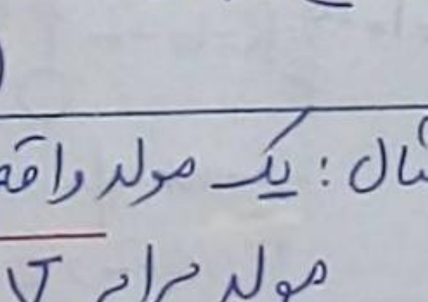


مثال: یک مولد واقعی، جریان ۲A را در مداری برقرار کرده است. اگر نیروی محرکه الکتریکی این مولد برابر ۳۰V = $\mathcal{E}$ باشد، به ترتیب از راست به چپ کار انجام شده توسط مولد در مدت ۱ دقیقه و اختلاف پتانسیل دو سر مولد در SI کدام است؟

۱) ۳۶۰۰، ۳۰ ۲) ۶۰، کمتر از ۳۰ ۳) ۶۰، ۳۰ ۴) ۳۶۰۰، کمتر از ۳۰ (جواب: گزینه ۴)

---

* اگر در حال جریان از مقاومت R (یا مقاومت درونی r) عبور کنیم، پتانسیل الکتریکی به اندازه IR (یا Ir) کاهش می‌یابد (در جهت عکس) ($V = IR$)

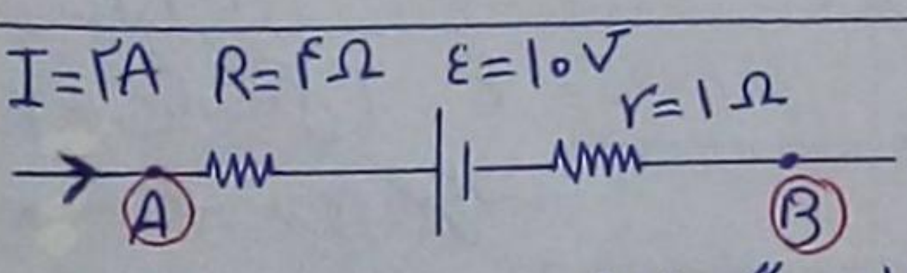


* جهت جریان همواره از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر است. (در حالت کلی)

* اگر دو نقطه از مدار توسط سیم بدون مقاومت به هم وصل شوند، آن دو نقطه پتانسیل الکتریکی یکسانی دارند. (*مقاومت معادل، تحلیل مدار)

* Ir را افت پتانسیل مولد می‌نامند * مقدار جریان با عبور از مولد یا مقاومت تغییر نمی‌کند.

مثال: قسمتی از یک مدار مطابق شکل است. در مدت ۱s چه مقدار بار از سطح مقطع مدار عبور می‌کند و انرژی بار در این مدت چند ژول تغییر می‌کند؟



۱) ۲C، ۴۰J ۲) ۲C، ۴۰J-
۳) $\frac{1}{2}$C، ۰ ۴) $\frac{1}{2}$C، ۴۰J- (جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم

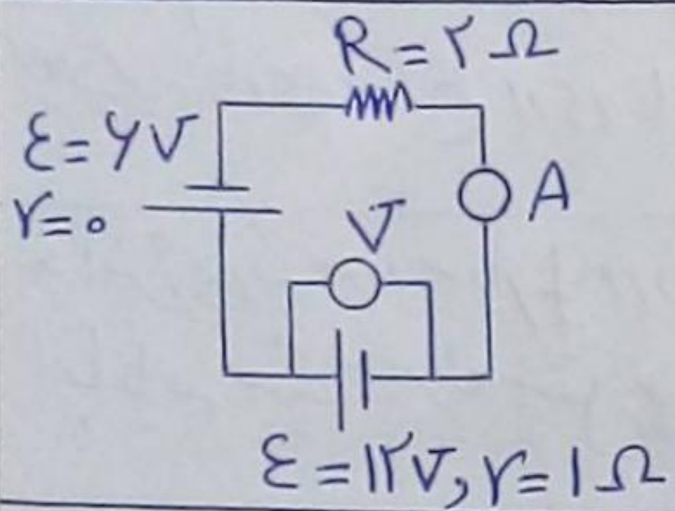
* در هر دور زدن کامل حلقه‌ای از مدار، جمع جبری اختلاف پتانسیل‌های اجزای مدار صفر است. (* آمپرسنج ایده‌آل: مقاومت آن صفر است.)

* جهت جریان را مولدهای تعیین می‌کند که مجموع نیروهای محرکه آن‌ها بزرگتر باشد.

* ولت‌سنج ایده‌آل: مقاومت آن بی‌نهایت است و جریانی از آن عبور نمی‌کند

$$\text{جریان الکتریکی (I)} = \frac{\left(\text{مجموع نیروی محرکه‌های که در جهت جریان هستند}\right) - \left(\text{مجموع نیروی محرکه‌های که در جهت جریان هستند}\right)}{\text{برآیند مقاومت‌ها (برآیند مقاومت‌های درونی و بیرونی)}}$$

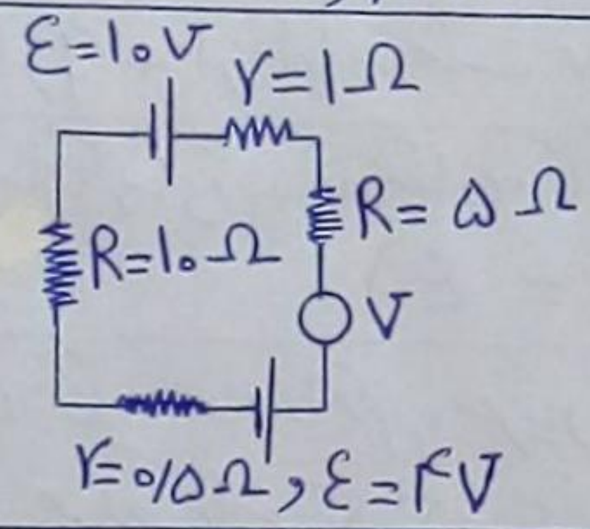
مثال: در مدار شکل مقابل، آمپرسنج و ولت‌سنج چه اعدادی را نشان می‌دهند؟



۱) ۱۴V، ۲A ۲) ۱۰V، ۲A
۳) ۱۰V، ۶A ۴) ۱۴V، ۶A

(جواب: گزینه ۲)

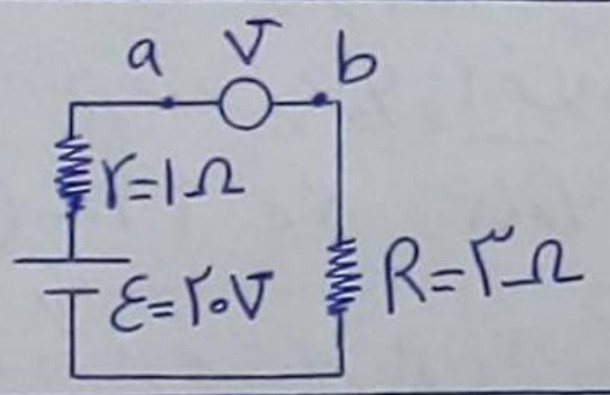
مثال: در مدار مقابل ولت‌سنج ایده‌آل چه عددی را نشان می‌دهد؟



۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

(جواب: گزینه ۲)

مثال: مقاومت الکتریکی ولت‌سنج ایده‌آل برابر ۳۶Ω است. ولت‌سنج چه عددی را نشان می‌دهد؟



۱) ۶V ۲) ۱۲V ۳) ۱۸V ۴) ۲۴V (جواب: گزینه ۳)

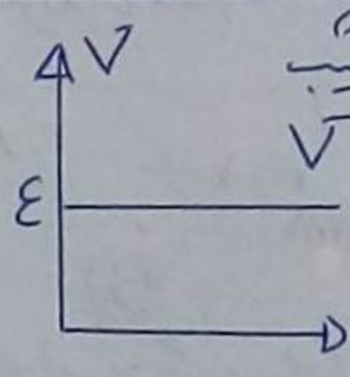
* اگر جریان عبوری از مولد، هم‌جهت با نیروی محرکه مولد باشد (باتری افزاینده در مدار)

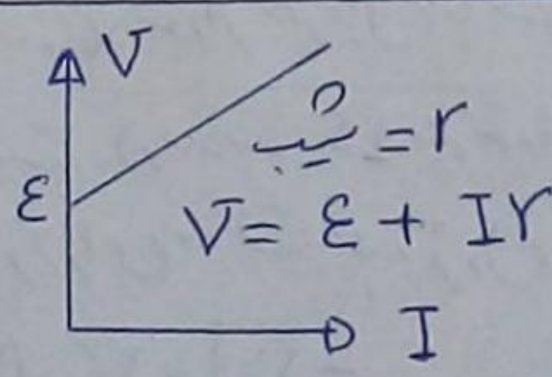
$$\Delta V = \varepsilon - Ir$$ (اختلاف پتانسیل دو سر منبع)

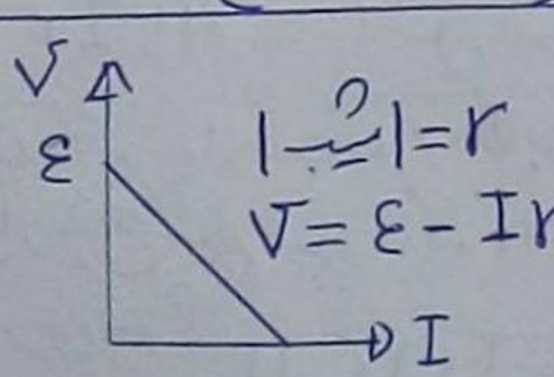
* اگر جریان عبوری از مولد، خلاف جهت نیروی محرکه مولد باشد (باتری شارژ شونده)

$$\Delta V = \varepsilon + Ir$$ (اختلاف پتانسیل دو سر منبع)

* مولد آرمانی (باتری ایده‌آل)
* مقاومت درونی صفر است







* با فرسوده شدن باتری، مقاومت درونی آن افزایش می‌یابد.

Scanned by TapScanner

$$P(\text{توان الکتریکی}) = \frac{W}{t} = \frac{(\Delta V)\times(\Delta q)}{\Delta t} \xrightarrow[I]{} (\Delta V)I \xrightarrow[(V=IR)]{} RI^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

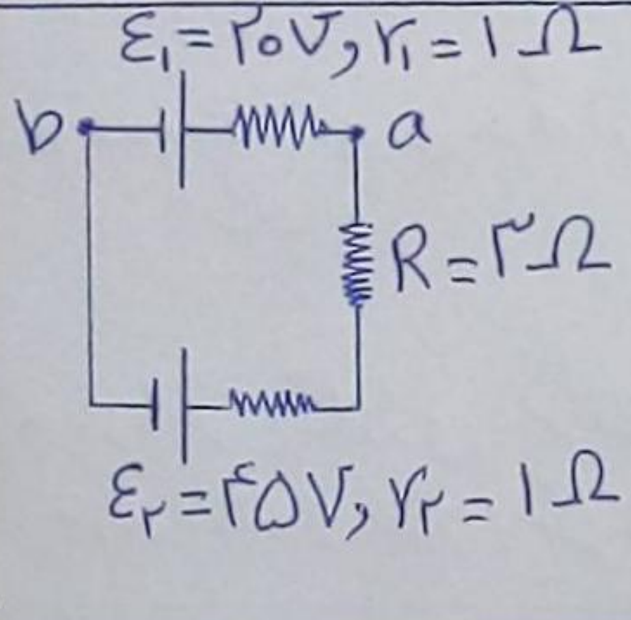
* کیلووات ساعت یکای مرعی انرژی مصرفی می باشد.
مثال: هر کیلووات ساعت معادل چند ژول است؟ $(1kwh = 3/6\times10^6 J$:جواب)

$$\underbrace{P}_{kw}\times\underbrace{t}_{h} = W(kwh)$$
کیلووات

* مفهوم توان مثبت این است که قطعه به مدار انرژی می دهد.
* مفهوم توان منفی این است که قطعه از مدار انرژی می گیرد.

$$|P| = |\Delta V\, I|$$

مثال: در مدار مقابل مولد (۱) با چه آهنگی به مدار انرژی می دهد و یا از آن انرژی می گیرد؟



۱) ۷۵W، انرژی می گیرد.
۲) ۱۲۵W، انرژی می گیرد. (جواب: گزینه ۲)
۳) ۷۵W، انرژی می دهد.
۴) ۱۲۵W، انرژی می دهد.

$(\sqrt{2}\simeq 1/4,\ \sqrt{3}\simeq 1/7,\ \sqrt{5}\simeq 2/2)$

* اختلاف پتانسیل دو سر وسایل خانگی یکسان است. (سشوار، ماشین لباسشویی و ...)

مثال: مخلوط آب و یخ حاوی 200g یخ صفر درجه سانتی گراد است. مخلوط را درون گرماسنجی با ظرفیت گرمایی ناچیز می ریزیم و گرماسنج را به اختلاف پتانسیل 80V متصل می کنیم. جریان عبوری از سیم گرمازا 5A می شود. چه مدت طول می کشد تا تمام یخ ذوب شود؟
۱) 168 ۲) 84 ۳) 42 ۴) 21 (جواب: گزینه ۱) $(L_f = 336\ kJ/kg)$

مثال: اگر ولتاژ دو سر یک لامپ رشته‌ای ۲۰ درصد کاهش یابد، توان مصرفی لامپ چند برابر شده و چند درصد کاهش می یابد؟ (مقاومت رشته سیم لامپ را ثابت فرض کنید)
۱) $\frac{64}{100}$، ۳۶ درصد ۲) $\frac{36}{100}$، ۳۶ درصد ۳) $\frac{64}{100}$، ۶۴ درصد
۴) $\frac{36}{100}$، ۶۴ درصد (جواب: گزینه ۱)

مثال: روی لامپی اعداد (100W, 200V) نوشته شده است. اهم سنج مقاومت لامپ خاموش را 40Ω نشان می دهد. اگر این لامپ را به اختلاف پتانسیل 200V متصل کنیم، دمای رشته سیم چند درجه سانتی گراد افزایش می یابد؟ $(\alpha_{\text{تنگستن}} = 4/5\times10^{-3}K^{-1})$ (جواب = 2000)

Scanned by TapScanner

مثال: ولتاژ باتری در دو سر مقاومت ۲۰ اهمی برقرار است و در اثر عبور ۲۰ کولن الکتریسیته، ۸۰۰ ژول گرما در مقاومت تولید می‌شود. زمان عبور الکتریسیته چند ثانیه بوده است؟
۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵ (جواب: گزینه ۲)

توان خروجی مولد (توان مفید)

$P = \Delta V I = (\mathcal{E} - Ir)I = \mathcal{E}I - rI^2$

$\mathcal{E}I$: توان تولیدی داخل مولد (توان کل)
rI^2: توان اتلافی یا مصرفی داخل مولد (مولد آرمانی $r=0$)

* توان (در مولد واقعی) P انرژی (دهنده به مدار) / $r \neq 0$ / در جهت جریان
(P: معادله درجه دوم بر حسب I) ($\mathcal{E} - Ir$)

$P = \Delta V I = (-\mathcal{E} - Ir)I = -(\mathcal{E}I + rI^2)$

* توان مولد واقعی و انرژی گیرنده از مدار / $r \neq 0$ / در خلاف جهت جریان
(P: معادله درجه دوم بر حسب I)

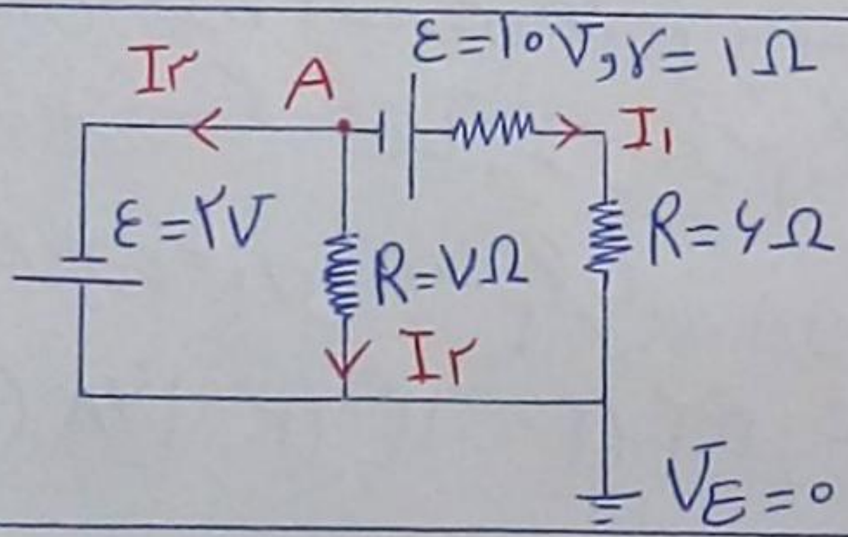
* علامت منفی ← مولد از مدار انرژی می‌گیرد

$|P_{ورودی}| = \mathcal{E}I + rI^2$

* در باتری شارژی، توان $\mathcal{E}I + rI^2$ توسط باتری از مدار گرفته می‌شود که به اندازه rI^2 در مقاومت درونی مولد، تلف می‌شود و به گرما تبدیل می‌شود و مابقی به صورت انرژی شیمیایی در مولد ذخیره می‌شود.

* اگر نقطه‌ای از مدار به زمین متصل شود، تاثیری در جریان مدار نخواهد داشت، فقط پتانسیل الکتریکی نقطه مورد نظر طبق قرارداد، صفر است. ($V_E = 0$)

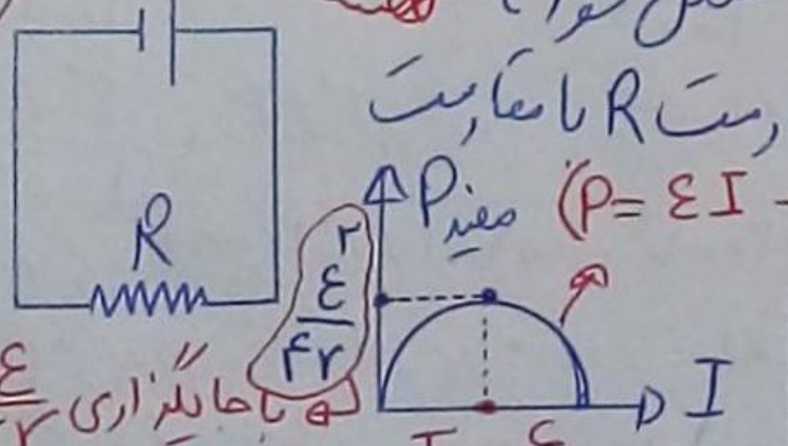
مثال: در مدار مقابل پتانسیل الکتریکی نقطه A چند ولت است؟



۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۲+ ۴) مانند حداقل یکی از جریان‌های I_1 یا I_2 یا I_3 مشخص شود.
(جواب: گزینه ۲)

* در سوال بالا نقاط مانند A، نقاط گره محسوب می‌شوند و در این نقاط باید مجموع جریان‌های ورودی و جریان‌های خروجی با هم برابر باشد. ($\sum \mathcal{E}I_{in} = \sum \mathcal{E}I_{out}$)

* اگر منبع باتری محرکه $\mathcal{E}$ و مقاومت درونی r به یک مقاومت R متصل شود، توان مفید منبع ($P = \mathcal{E}I - rI^2$) هنگامی بیشینه است که مقاومت R با مقاومت درونی منبع برابر باشد ($R = r$)



* اگر به ازای دو مقاومت R_1 و R_2، توان خروجی مولد (مصرفی در مقاومت R) یکسان باشد: ($\sqrt{R_1 R_2} = r$)

توان خروجی مولد = توان مصرفی در مقاومت R / $\mathcal{E}I - rI^2$ / RI^2

* در معادله درجه دوم ← * مجموع ریشه‌ها $= -\frac{b}{a}$ * ضرب ریشه‌ها $= \frac{c}{a}$

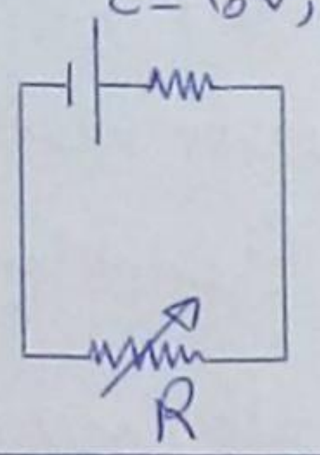
معادله P بدست می‌آید

Scanned by TapScanner

مثال: در مدار مقابل مقاومت رئوستا برابر Ω ۵٪ توان مصرفی در آن برابر P_1 است. مقاومت رئوستا را چند اهم افزایش دهیم تا مجددا توان مصرفی در رئوستا برابر P_1 شود؟

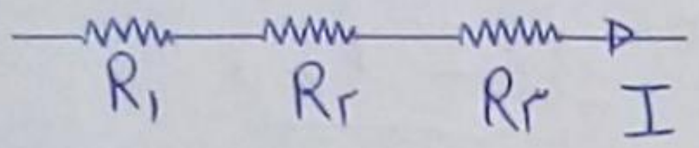
۱) ۲ ۲) ۴/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۸

(جواب: گزینه ۲)



---

* اتصال متوالی یا سری مقاومت ها



شدت جریان (I) در مقاومت ها یکسان است.

اختلاف پتانسیل کل از مجموع اختلاف پتانسیل مقاومت ها بدست می آید ($R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots$)

* مقاومت معادل از بزرگترین مقاومت نیز بزرگتر است. (* n مقاومت مشابه R بصورت سری $\leftarrow R_{eq} = nR$)

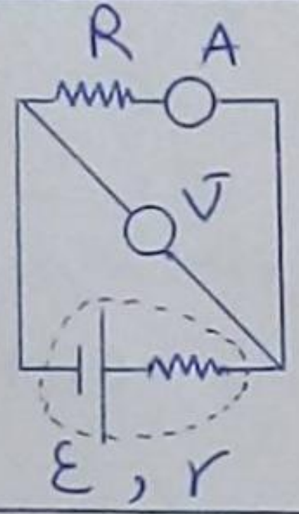
---

* اگر دو نقطه از مدار توسط سیم بدون مقاومت به هم وصل شده باشند، آن دو نقطه هم پتانسیل هستند، می توانیم آن دو نقطه را به هم وصل کنیم (مقاومت معادل، تحلیل مدار) (و برعکس)

مثال: آمپرسنج ایده آلی مطابق شکل به مدار متصل است. ولت سنج عدد ۸۰V، آمپرسنج عدد ۰/۲A را نشان می دهد. اگر $R = 250\Omega$ باشد، مقاومت آمپرسنج چند اهم است؟

۱) صفر ۲) ۵۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۴۰۰

(جواب: گزینه ۲)

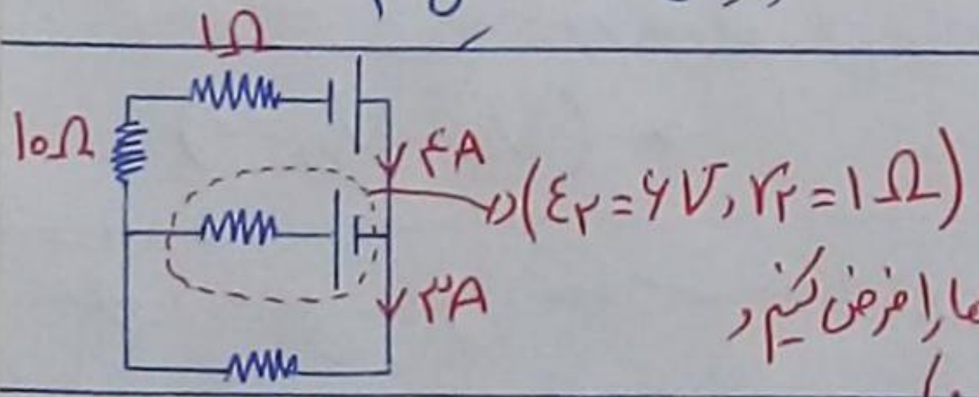


---

* نقطه ای از مدار که بیش از دو سیم به یکدیگر متصل هستند را گره می نامند. در هر گره مجموع جریان های ورودی به گره برابر است با مجموع جریان های خروجی از گره. (قانون پایستگی بار الکتریکی)

مثال: در مدار مقابل توان خروجی مولد ε_2 چند وات است؟

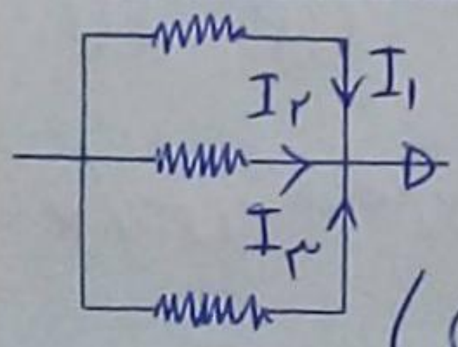
۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۲۰ (جواب: گزینه ۲)



(* در نقاط گره، اگر جهت جریان ها مشخص نبود، می توانیم جهت اولیه آن ها را فرض کنیم، اگر در انتها جواب I منفی بدست آمد متوجه میشویم جهت I را باید عوض کنیم.)

---

* اتصال موازی مقاومت ها



($I = I_1 + I_2 + I_3$) جریان کل برابر است با مجموع جریان های عبوری از مقاومت ها (گره)

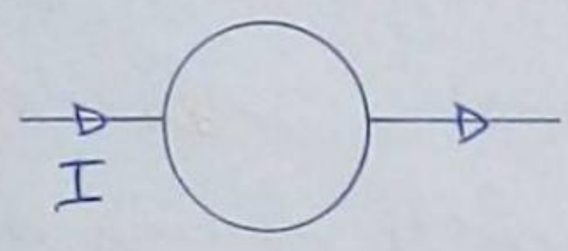
تمام مقاومت ها از اختلاف پتانسیل برابری در دو سر خود خواهند داشت. (اختلاف پتانسیل کل)

* مقاومت معادل از کوچکترین مقاومت نیز کوچکتر است. ($\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots$)

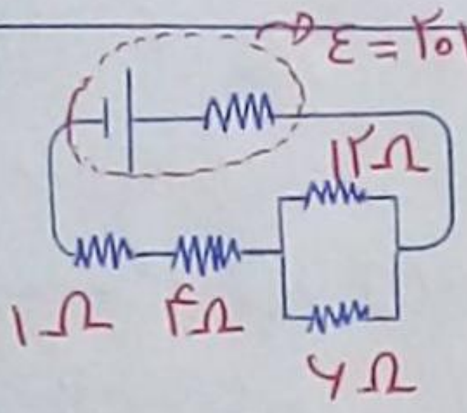
* اگر در مقاومت ها هم موازی باشد: ضرب شون ⊗ / جمع شون ⊕ = مقاومت معادل * پرکاربرد

* n مقاومت مشابه R به صورت موازی: $\leftarrow R_{eq} = \frac{R}{n}$

Scanned by TapScanner



مثال: سیمی با مقاومت الکتریکی ۴۰ اهم را به شکل حلقه درآورده، سپس آن را از دو نقطه‌ی مقابل، در مدار قرار می‌دهیم. مقاومت بین این دو نقطه چند اهم است؟ ۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۸۰ (جواب: گزینه ۲)



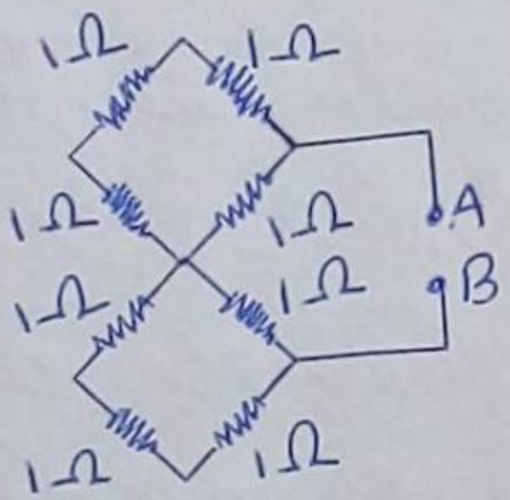
مثال: در مدار مقابل توان مصرفی کل چند وات است؟

$(\varepsilon I - rI^2)$ با εRI^2 (مقاومت درونی باتری (۲) را در نظر نمی‌گیریم)

εRI^2: مقاومت‌های خارجی — $(\varepsilon I - rI^2)$: باتری

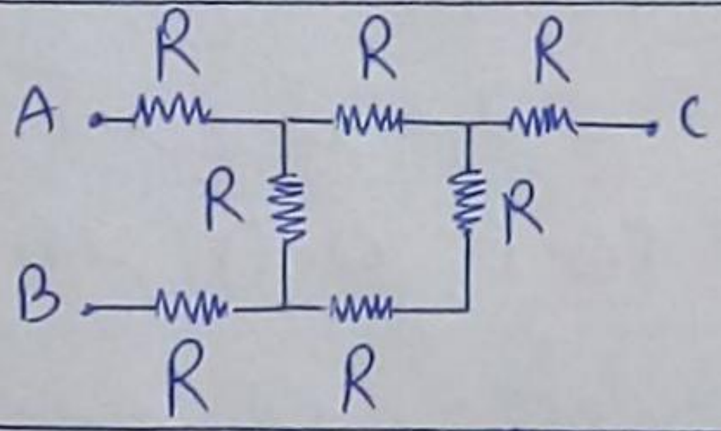
۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶ (جواب: گزینه ۴)

مثال: در شکل مقابل مقاومت معادل بین دو نقطه A و B چند اهم است؟



۱) ۸ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$ (جواب: گزینه ۳)

مثال: در مدار مقابل، مقاومت معادل بین نقاط A و B را بین نقاط A و C را به دست آورید.

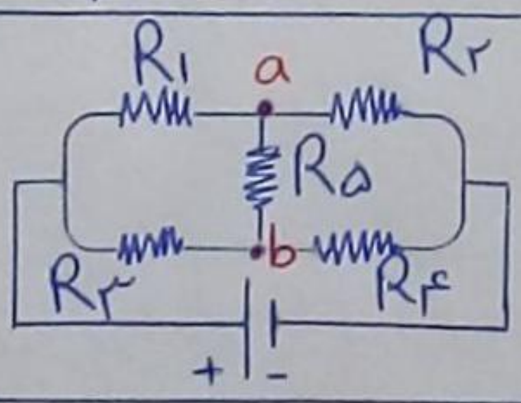


$R_{eq(AB)} = \frac{۱۱}{۴}R$

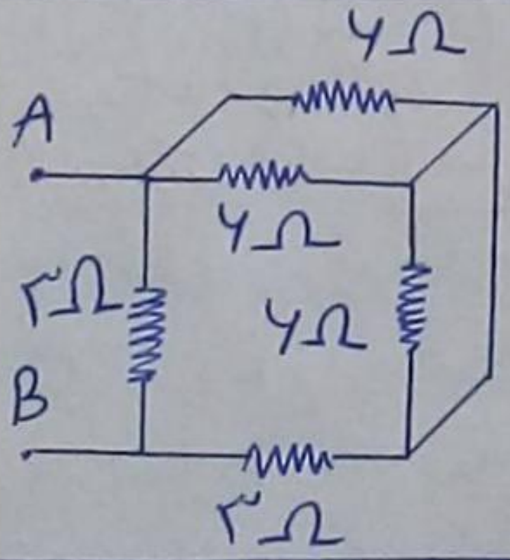
$R_{eq(Ac)} = \frac{۱۱}{۴}R$

* اگر در مدار روبرو $R_۱ \times R_۴ = R_۲ \times R_۳$ باشد، آن‌گاه هیچ جریانی از مقاومت $R_۵$ عبور نمی‌کند و می‌توانیم $R_۵$ را از مدار حذف کنیم.

* $(V_a - V_b = ۰)$



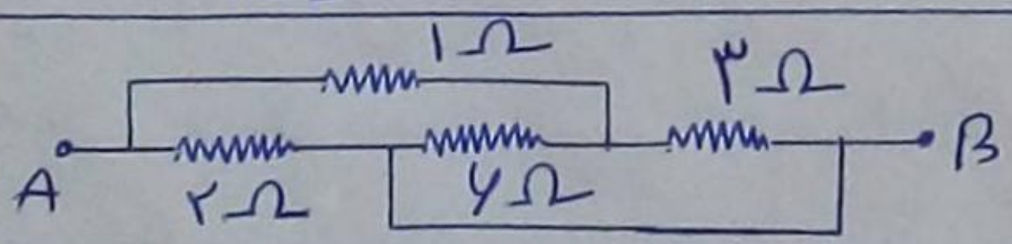
مثال: در شکل مقابل، مقاومت معادل بین نقاط A و B چند اهم است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۲)

* روش تقارن

مثال: در شکل روبرو مقاومت معادل بین نقاط A و B را بیابید.

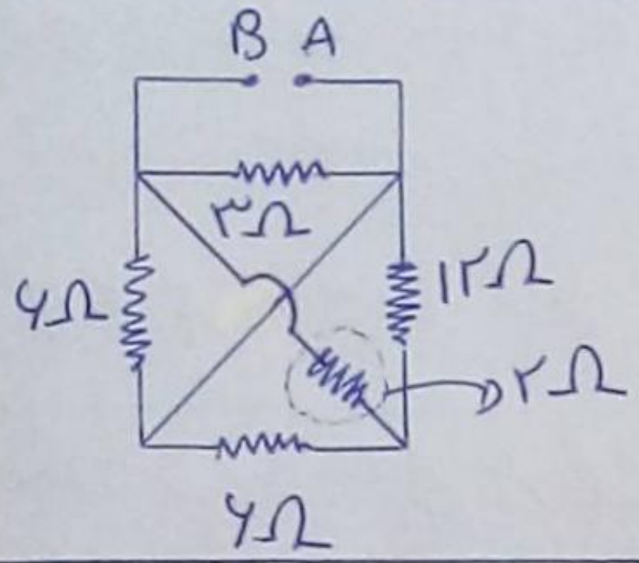


* جواب: $(R_{eq} = ۱/۲\Omega)$

* روش تقارن

Scanned by TapScanner

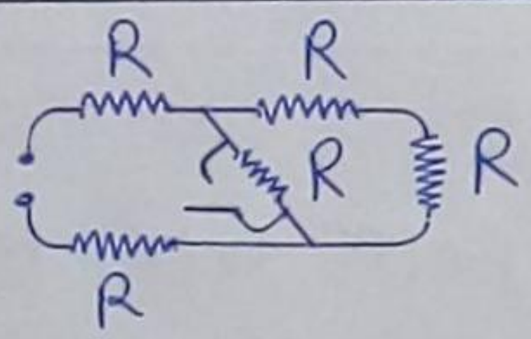
مثال: در شکل روبرو، مقاومت معادل بین دو نقطه B, A چند اهم است؟



۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۴/۵ ۴) ۶ (جواب: گزینه ۱)

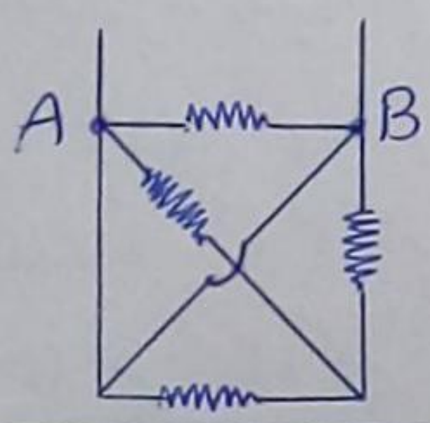
* اگر دو نقطه از مدار توسط سیم بدون مقاومت به هم وصل شوند، آن دو نقطه هم پتانسیل می‌شوند و اتصال کوتاه رخ می‌دهد.
* اگر یک سیم بدون مقاومت با یک مقاومت به طور موازی بسته شود، تمام جریان از سیم بدون مقاومت می‌گذرد و می‌توان مقاومت را از مدار حذف کرد.
* قطعه اتصال کوتاه شده، آسیب نمی‌بیند و فقط از مدار حذف می‌شود.
* در اتصال موازی مقاومت‌ها باید دقت کرد، زیرا چندین مقاومت با هم حذف می‌شوند

مثال: در شکل مقابل اگر کلید بسته شود، مقاومت معادل چند برابر R می‌شود؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۲)

مثال: در شکل روبرو مقاومت معادل بین دو نقطه A و B چند اهم است؟
(تمام مقاومت‌ها ۱۲۰ اهم هستند)



۱) ۴۸۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۲۰ ۴) صفر (جواب: گزینه ۴)

* پریز سه شاخه: پریزهای سه شاخه، دارای سیمی هستند که به زمین وصل می‌شود که اصطلاحاً به آن «سیم ارت» می‌گویند. (شخص دچار برق‌گرفتگی نمی‌شود)

مثال: دو مقاومت $R_1=3\Omega$ و $R_2=6\Omega$ به طور متوالی به یکدیگر متصل شده‌اند و در مدار قرار گرفته‌اند. به ترتیب از راست به چپ نسبت اختلاف پتانسیل‌ها $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ و توان مصرفی $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ کدام است؟

۱) ۲، ۲ ۲) ۲، ۴ ۳) ۴، ۴ ۴) ۲، $\frac{1}{4}$ (جواب: گزینه ۱)

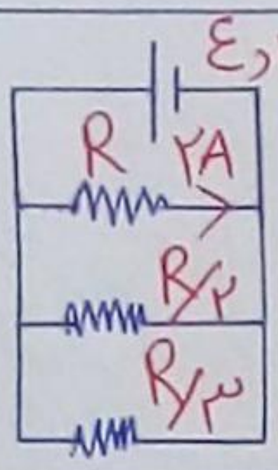
* توان دانرژی مصرفی کل برابر است با مجموع توان دانرژی مصرفی هریک از مقاومت‌ها
$(P=RI^2=VI=V^2/R \text{ ، } V=IR)$

Scanned by TapScanner

مثال: دو مقاومت $R_1=3\Omega$ و $R_2=6\Omega$ به طور متوالی به یکدیگر متصل شده و در مدار قرار گرفته اند. از راست به چپ نسبت جریان‌های عبوری $\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$ و توان مصرفی $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ کدام است؟

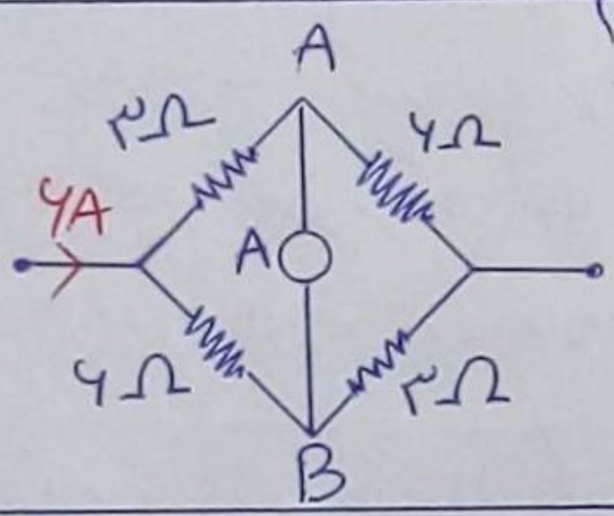
۱) ۲،۲ ۲) $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$ ۳) ۴،۲ ۴) $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$ (جواب: گزینه ۴)

مثال: در مدار مقابل جریان عبوری از مولد چند آمپر است؟



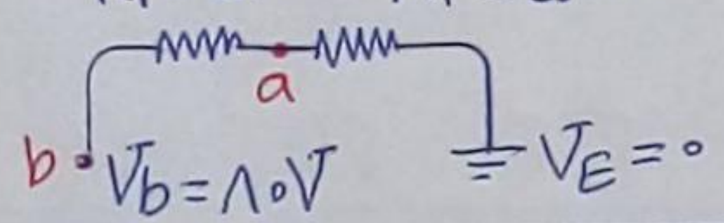
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲ (جواب: گزینه ۴)

مثال: در مدار مقابل جریان عبوری از آمپرسنج چند آمپر و در کدام جهت است؟



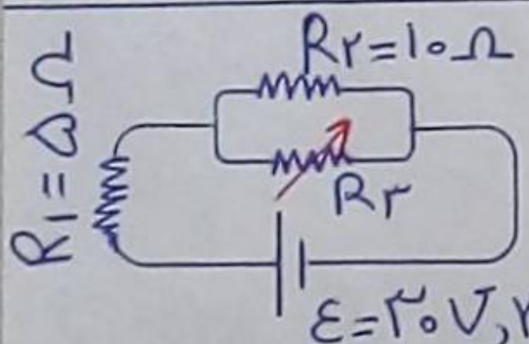
۱) ۱ آمپر از A به B ۲) ۲ آمپر از A به B (جواب: گزینه ۲)
۳) ۱ آمپر از B به A ۴) ۲ آمپر از B به A

مثال: در مدار مقابل پتانسیل نقطه a چند ولت است؟



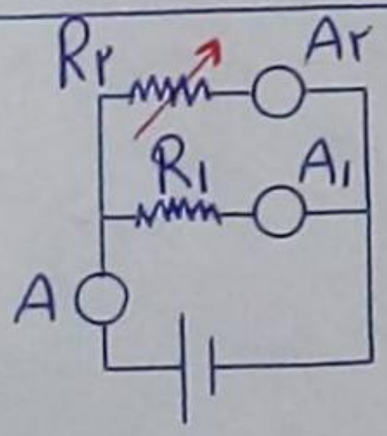
۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰ (جواب: گزینه ۲)

مثال: در مدار شکل مقابل R_2 را از صفر تای نهایت افزایش می دهیم. جریان الکتریکی عبوری از R_2 از ..... تغییر می کند.



۱) ۲ آمپر تا ۴ آمپر ۲) ۴ آمپر تا صفر (جواب: گزینه ۳)
۳) صفر تا ۲ آمپر ۴) صفر تا ۴ آمپر

مثال: در مدار مقابل، مولد آرمانی است. اگر R_2 افزایش یابد، اعداد آمپرسنج های A، A_1 و A_2 به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می کند؟

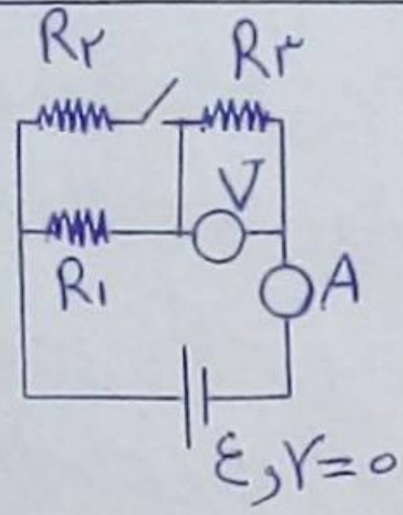


۱) کاهش، ثابت، کاهش ۲) کاهش، افزایش، کاهش (جواب: گزینه ۱)
۳) کاهش، ثابت، افزایش ۴) کاهش، کاهش، افزایش

مثال: در تست قبل، اگر مولد آرمانی نباشد، اعداد آمپرسنج های A_1، A_2 به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می کند؟ (جواب: گزینه ۴)

۱) کاهش، ثابت ۲) کاهش، کاهش ۳) کاهش، افزایش ۴) افزایش، کاهش

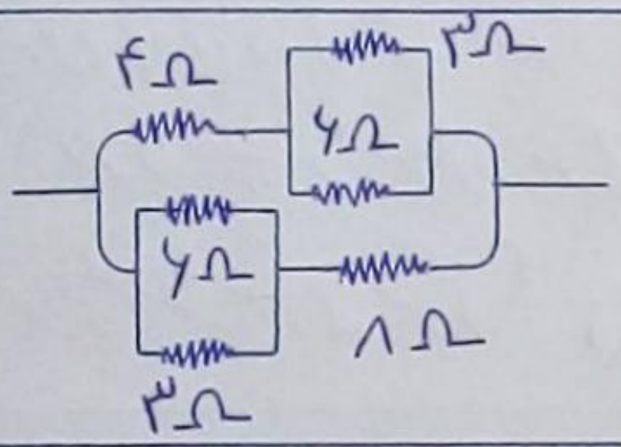
Scanned by TapScanner



مثال: در مدار زیر همه مقاومت ها مشابه هستند. با بستن کلید، اعدادی که ولت سنج و آمپرسنج نشان می دهند، از راست به چپ چند برابر می شوند؟

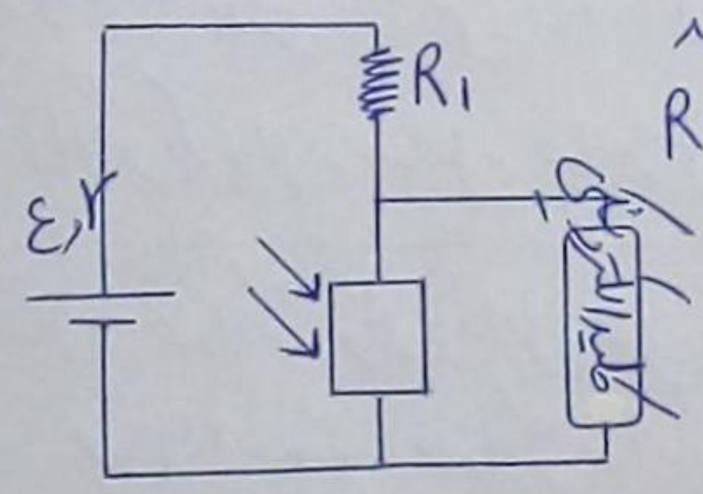
۱) $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۳}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$ ، $\frac{۴}{۳}$

(جواب: گزینه ۴)

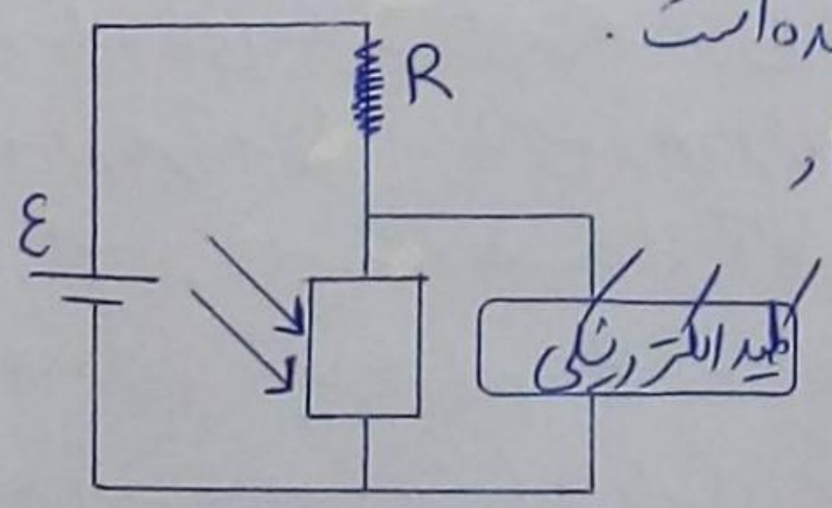


مثال: در شکل زیر اگر جریانی به شدت ۰/۴ آمپر از مقاومت ۴ اهمی بگذرد، از مقاومت ۸ اهمی جریان چند آمپر می گذرد؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۶۶ (جواب: گزینه ۳)

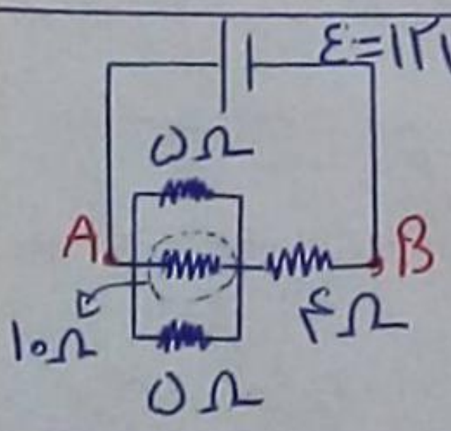


*کلید هوشمند * کلیدهای هوشمند که با تاریک شدن محیط عمل می کنند، می توانند مداری مطابق شکل روبرو داشته باشند. یک LDR را با مقاومتی مانند R_1 متوالی کرده و به منبع نیروی محرکه متصل می کنند. با تاریک شدن محیط، اندازه مقاومت LDR افزایش می یابد. LDR با R_1 متوالی است بنابراین با افزایش اندازه مقاومت LDR، ولتاژ دو سر LDR نیز افزایش می یابد که به آن ولتاژ خروجی می گویند. کلیدهای الکترونیکی با مقاومت بسیار زیاد تحت ولتاژ خاصی عمل می کنند بنابراین با افزایش ولتاژ خروجی، کلید عمل کرده و یک جریان در مدار خارجی برقرار می کند



مثال: مولد آرمانی با $\varepsilon = ۱۲۷V$ به مقاومت R و یک LDR متصل شده است. در حالت عمل کردن کلید الکترونیکی، مقاومت LDR برابر $۱۰۰k\Omega$، ولتاژ عمل کلید الکترونیکی برابر ۸V است. مقاومت R چند کیلو اهم است؟

۱) ۱۲/۷ ۲) ۲۵ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰ (جواب: گزینه ۳)



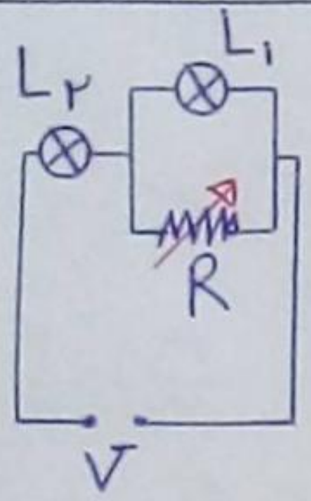
مثال: در شکل مقابل، بین دو نقطه A و B در هر دقیقه چند ژول گرما تولید می شود؟

۱) ۷۲۵ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴۴۵

(جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner

مثال: در مدار شکل زیر، آ مقدار ثابتی است. اگر به تدریج R را افزایش دهیم، نور لامپ‌های ۱ و ۲ به تدریج از راست، چپ چگونه تغییر می‌کند؟



۱) کاهش، کاهش ۲) کاهش، افزایش
۳) افزایش، افزایش ۴) افزایش، کاهش (جواب: گزینه ۴)

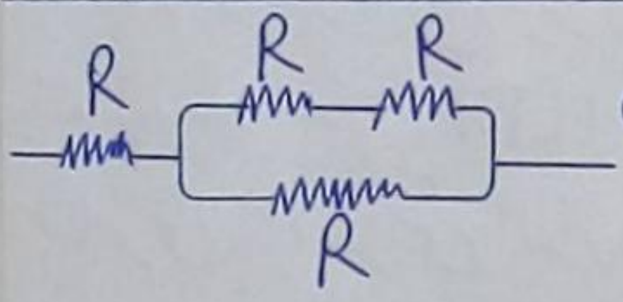
مثال: روی دو لامپ اعداد (۱۰۰W ، ۲۲۰V) و (۴۰۰W ، ۲۲۰V) نوشته شده است. اگر این دو لامپ را به طور متوالی به اختلاف پتانسیل ۲۲۰ ولت وصل کنیم، توان مصرفی مجموعه چند وات می‌شود؟

۱) ۵۰۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۸۰ (جواب: گزینه ۴)

---

* لامپ‌های تزئینی، وسایل خانه و وسایل برقی اتومبیل به صورت موازی به یکدیگر متصل هستند. تا اگر یکی از وسایل خاموش شد و یا سوخت، تأثیری بر بقیه نداشته باشد.

مثال: حداکثر توان قابل تحمل هریک از مقاومت‌های یکسان در مدار شکل مقابل ۹W است. حداکثر توانی را که می‌توان از مجموعه گرفت تا هیچ کدام از مقاومت‌ها آسیب نبیند، چند وات است؟



۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۵ (جواب: گزینه ۴)

مغناطیس

---

* ماده‌های مگنتیت می‌توانند برخی فلزات نظیر آهن، نیکل و کبالت را جذب کنند.
* در هر آهنربا، دو ناحیه وجود دارد که خاصیت آهنربایی در آن‌ها بیشتر از قسمت‌های دیگر است. این دو ناحیه را قطب‌های آهنربا می‌گویند.
* خاصیت آهنربایی در وسط آهنربای میله‌ای کمتر از قطب‌ها می‌باشد.
* آهنربا همیشه تقریبا در راستای شمال - جنوب جغرافیایی قرار می‌گیرد. شمال N ، جنوب S
* اگر آهنربا چندین بار در یک جهت روی میله فولادی مانند سوزن کشیده شود، میله خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کند.
* تک قطبی الکتریکی وجود دارد (بارهای مثبت یا منفی)، ولی تک قطبی مغناطیسی (N یا S) به صورت مجزا وجود ندارد.

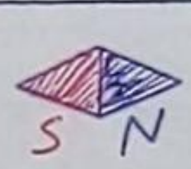
Scanned by TapScanner

* اگر یک تکه آهن مانند میخ آهنی را تر دیک آهربا نگه داریم، خاصیت مغناطیسی (میخ طوری القا می شود که در جهت تر دیگر میخ به آهربا، قطب مخالف القا شده (میخ جذب آهربا می شود.
(القای خاصیت مغناطیسی) * القای خاصیت مغناطیسی تنها در آهن، نیکل، کبالت و آلیاژهای از این عناصر اتفاق می افتد * در القای مغناطیسی همیشه جاذبه صورت می پذیرد و دافعه رخ نمی دهد.

* کاربرد مواد مغناطیسی (پزشکی): برای خارج کردن پاره های سرطانی

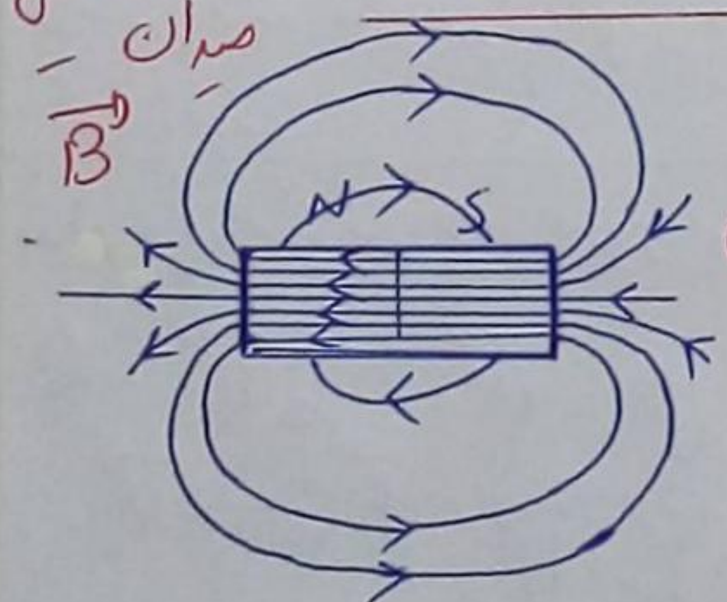
* هر جسم باردار در فضای اطراف خود خاصیتی ایجاد می کند که به آن میدان الکتریکی می گویند.
آهربا نیز در فضای اطراف خود خاصیتی ایجاد می کند که به موجب آن در قطعه های آهنی خاصیت آهربایی القا می شود و بر قطب های آهربا های دیگر نیرو وارد می شود. (میدان مغناطیسی)
* میدان مغناطیسی کمیتی برداری است و با بردار $\vec{B}$ نشان داده می شود.

* جهت میدان مغناطیسی را با استفاده از عقربه مغناطیسی تعیین می کنند

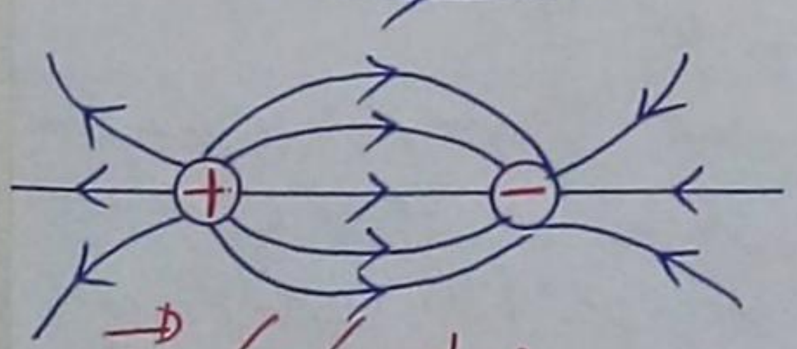


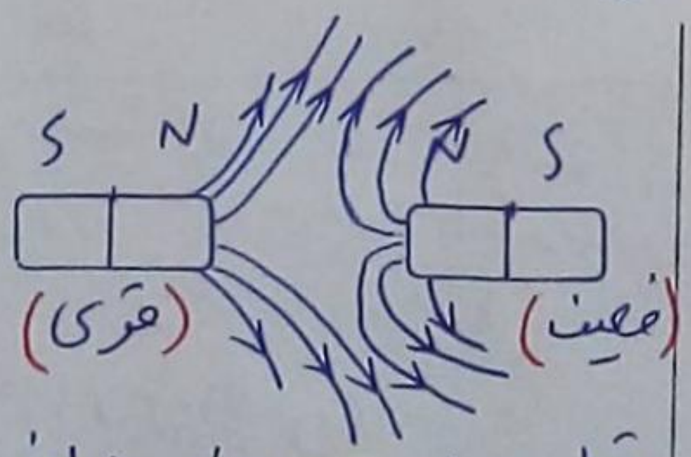
* میدان مغناطیسی (در هر نقطه) هم راستا با عقربه مغناطیسی است و قطب N عقربه، سوی میدان مغناطیسی را مشخص می کند.

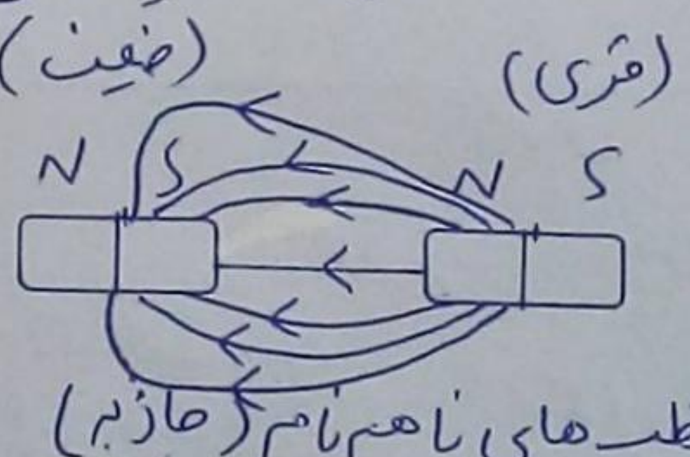
* خط های میدان مغناطیسی * بردار میدان (در هر نقطه، مماس بر خط میدان عبوری از آن نقطه و هم جهت با آن است. * تراکم خطوط نشان دهنده بزرگی میدان در آن نقطه است.
* خطوط میدان در داخل آهربا از S به N و در خارج آهربا از N به S است.



* میدان مغناطیسی: از N خارج می شود و به S وارد می شود. ($\vec{B}$)
* میدان الکتریکی: از بار مثبت خارج شده و به بار منفی وارد می شود ($\vec{E}$)
* میدان مغناطیسی خطوط بسته و میدان الکتریکی خطوط باز هستند.
* خط های میدان یکدیگر را قطع نمی کنند





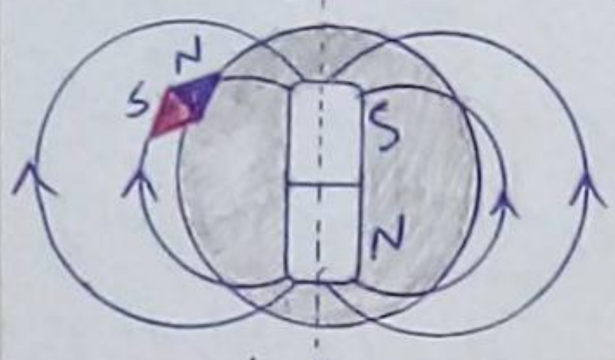


* (هر چه قدرت آهربا ها یکسان باشد، خطوط میدان متقارن خواهند شد.

Scanned by TapScanner

قطب جنوب مغناطیسی

قطب شمال جغرافیایی



قطب جنوب جغرافیایی
(قطب شمال مغناطیسی)

* به طور کلی جهت میدان مغناطیسی زمین (در هر نقطه از سطح زمین) به طرف قطب شمال جغرافیایی است.

(* قطب S دقیقاً در شمال جغرافیایی نیست و کمی زاویه دارد که به آن میل مغناطیسی می‌گویند)

* اگر یک آهربای میله‌ای را از وسط آن آویزان کنیم، امتداد آهربا با سطح زمین زاویه می‌سازد. به زاویه امتداد آهربا با سطح زمین (سطح افق)، شیب مغناطیسی می‌گویند. * (در هر جایی از نقاط زمین، شیب مغناطیسی صفر است.

---

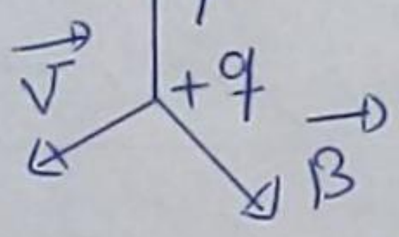
* میدان مغناطیسی یکنواخت: میدانی که اندازه و جهت آن در تمام نقاط، ثابت و یکسان است.

* آهربای نعلی شکل * آهربای C شکل * اگر مقطع سیمی را به شکل قرص درآورده و به باتری متصل کنید سیملوله ساخته می‌شود. میدان مغناطیسی داخل سیملوله یکنواخت است.

---

* نیروهای مغناطیسی * اگر ذره به مرزات خطوط میدان مغناطیسی پرتاب شود، به آن نیروی وارد می‌شود.

جهت نیروی مغناطیسی * چهار انگشت در جهت حرکت بار مثبت ($\vec{V}$)، خم کردن انگشتان در جهت میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) ← جهت شصت نیروی وارد بر بار مثبت را نشان می‌دهد.



* در صورتی که بار منفی باشد، جهت نیروی بدست آمده را قرینه می‌کنیم

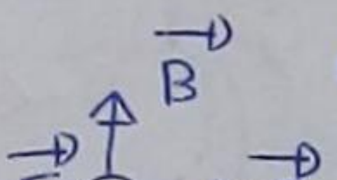
⊗ : درسو (به طرف داخل کاغذ)، ⊙ : برون‌سو (به طرف بیرون از کاغذ)

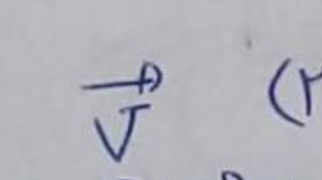
---

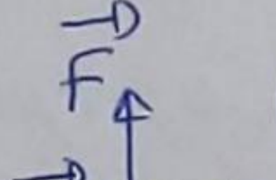
* نیروی F بر بردارهای ($\vec{V}$) و ($\vec{B}$) عمود است (بردارهای $\vec{B}$ ، $\vec{V}$ هر زاویه‌ای می‌توانند باهم داشته باشند، ولی بردار $\vec{F}$ بر صفحه‌ای که توسط بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی ساخته می‌شود، عمود است.

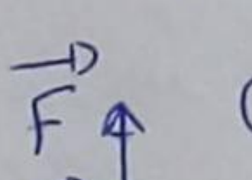
ضرب خارجی

مثال: در کدام گزینه جهت نیروی وارد بر بار مثبت به درستی رسم شده است؟

۱) 

۲) 

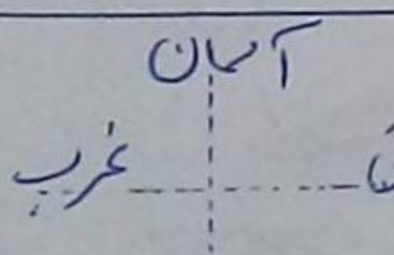
۳) 

۴) 

(جواب: گزینه ۳)

مثال: ذره‌ای با بار مثبتی را به صورت افقی به جهت غرب پرتاب می‌کنیم. جهت میدان مغناطیسی عمود بر راستای حرکت ذره، به کدام جهت باشد تا ذره به جهت آسمان (بالا) منحرف شود؟ (جواب: گزینه ۱)

۱) شمال ۲) غرب ۳) آسمان (بالا) ۴) زمین (پایین)

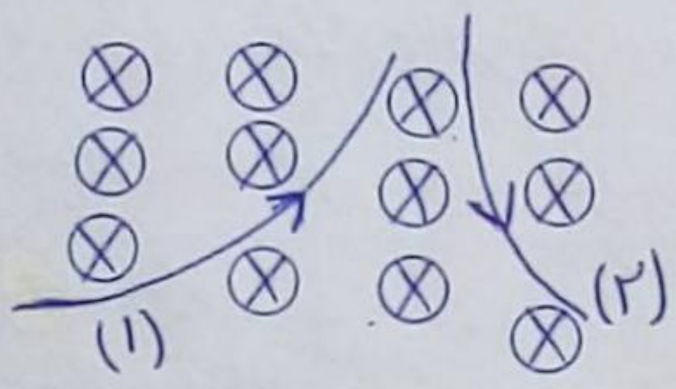


(* دید روبرو دید از بالا)

Scanned by TapScanner

* در صورتی که جهت حرکت بار، هم راستا بر میدان مغناطیسی نباشد، نیروی مغناطیسی بابت می‌شود ذره باردار مسیر منحنی را طی کند. (ذره باردار از جهت نیروی مغناطیسی، منحرف می‌شود.)

مثال: دو ذره باردار مطابق شکل در یک میدان مغناطیسی پرتاب شده‌اند. با توجه به مسیر حرکت ذره‌ها، نوع بار دو ذره چگونه است؟



۱) q_1 مثبت، q_2 مثبت ۲) q_1 مثبت، q_2 منفی (جواب: گزینه ۱)
۳) q_1 منفی، q_2 مثبت ۴) q_1 منفی، q_2 منفی

* میدان الکتریکی می‌تواند سرعت ذره را افزایش یا کاهش دهد و یا جهت حرکت بار را تغییر دهد، ولی میدان مغناطیسی فقط می‌تواند جهت حرکت ذره ($\vec{V}$ جهت) را تغییر دهد و میدان مغناطیسی نمی‌تواند تندی ذره را تغییر دهد زیرا بردار نیرو بر بردار سرعت عمود است. ($\vec{F} \perp \vec{V}$)

اندازه نیروی مغناطیسی: $F = |q|\,V\,B\,\sin\theta = |q|\,|\vec{V} \times \vec{B}|$

(V: سرعت ذره، B: میدان مغناطیسی، q: بار، θ: زاویه بین بردار سرعت ($\vec{V}$) و بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$))

جهت نیرو با استفاده از قاعده دست راست به دست می‌آید

$\vec{F}$ بر $\vec{B}$ و $\vec{V}$ عمود است

(ضرب خارجی)

(در صورتی که $\vec{B}$ و $\vec{V}$ هم راستا باشند $\Rightarrow \vec{F}=0$ ($\sin\theta = 0$))

نیرو صفر است

* اگر راستای حرکت ذره ($\vec{V}$)، عمود بر راستای میدان ($\vec{B}$) باشد، اندازه نیرو بیشینه می‌شود. ($\sin 90 = 1$)

* ممکن است ذره ساکن بوده باشد.
* ممکن است ذره به موازات خطوط میدان پرتاب شده باشد.

* ذره باردار در یک مغناطیس قرار دارد و بر آن نیروی مغناطیسی وارد نمی‌شود

* یکای میدان مغناطیسی در SI تسلا (T) نام دارد. تسلا یکای بزرگی است و می‌توان از یکای گاوس (G) استفاده کرد ($1T = 10^4 G$) * نکته: $1T = 1\ \frac{N(\text{نیوتون})}{A.m(\text{متر})(\text{آمپر})(\text{تسلا})}$ ($\frac{C}{S} = A$ آمپر)

* اگر با ثابت ماندن q، V، B، زاویه بین بردار سرعت و میدان از α به $180-\alpha$ تغییر کند، نیروی وارد بر ذره باردار تغییر نمی‌کند ($\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$).

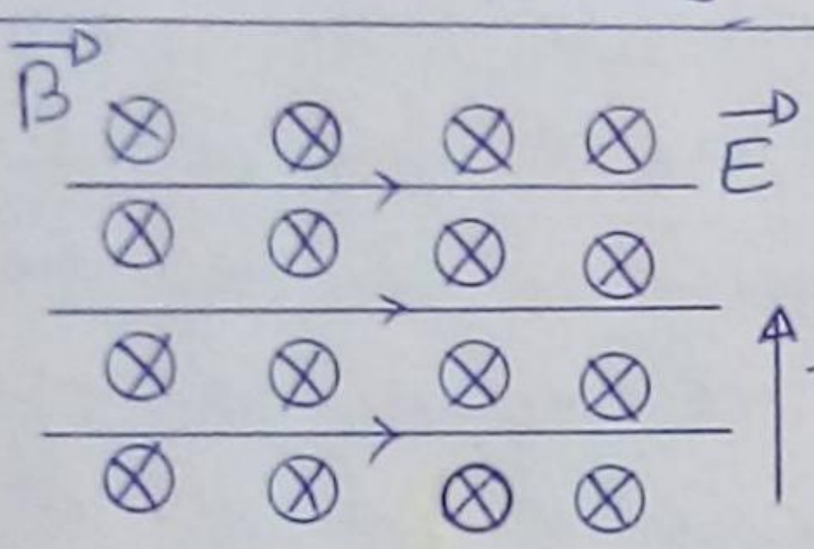
مثال: ذره‌ای با بار مثبت را به صورت افقی و به سمت شمال پرتاب می‌کنیم. میدان مغناطیسی که عمود بر راستای حرکت ذره است، در کدام جهت باشد تا ذره در اثر نیروی وزن، از مسیر خود منحرف نشود؟

۱) شرق ۲) غرب ۳) آسمان ۴) زمین (جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

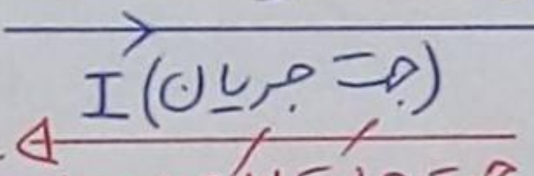
* میدان های الکتریکی و مغناطیسی برهم اثر نمی گذارند ولی نیروهای ناشی از آن ها برهم اثر می گذارند و می توان نیروها را برآیند گیری کرد.
* نیروی که میدان الکتریکی به ذره باردار وارد می کند، هم راستا با میدان الکتریکی است، ولی نیروی که میدان مغناطیسی به ذره باردار وارد می کند، عمود بر راستای میدان مغناطیسی است.

مثال: مطابق شکل میدان الکتریکی دیگر اخت $\vec{E}$ به سمت راست و میدان مغناطیسی دیگر اخت $\vec{B}$ به صورت درون سو می باشد.
اگر بار $q=+1\mu C$ را مطابق شکل با سرعت $10^6 m/s$ پرتاب کنیم، نیروی وارد بر بار چند نیوتون است؟ $(B=0/1T, E=10^5 N/C)$



۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) $0/1\sqrt{2}$ ۴) صفر (جواب: گزینه ۴)

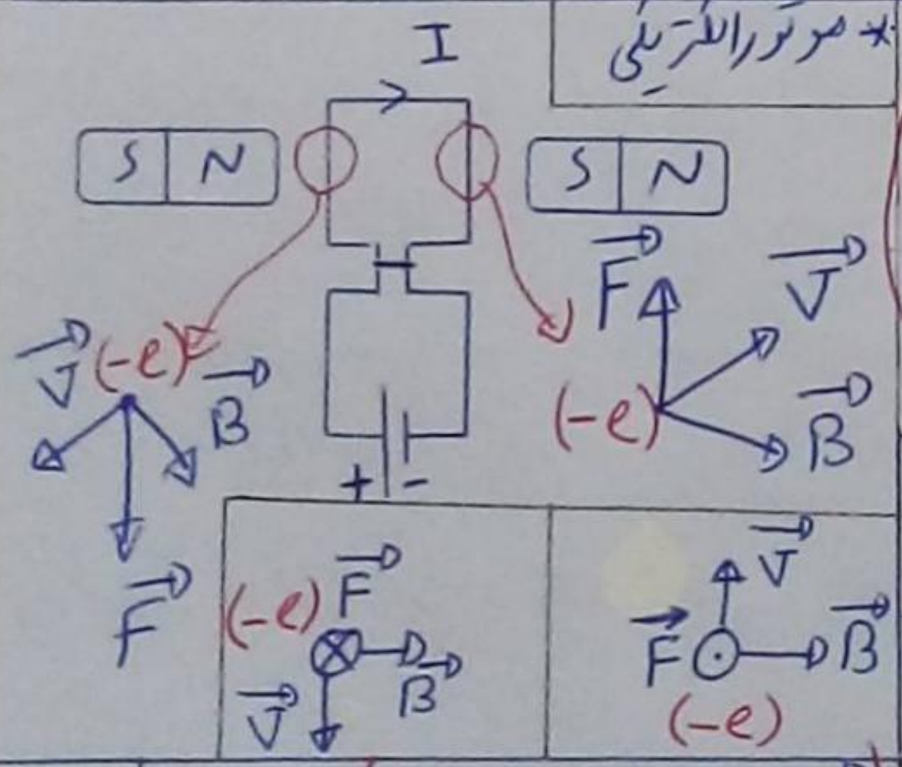
* نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان * نیروی مغناطیسی وارد بر ذرات باردار (الکترون ها) در حال حرکت درون سیم حامل جریان



می توان فرض کرد که بارهای مثبت در حال حرکت هستند در حالی که بارهای منفی ثابت هستند و تنها بارهای منفی (الکترون ها) در حال حرکت هستند.

* نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان ← اساس کار موتور الکتریکی (تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی)
* جهت نیرو وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی ← قاعده دست راست، چهار انگشت در جهت جریان پس انگشتان را در جهت $\vec{B}$ جمع می کنیم، جهت شصت نیروی وارد بر سیم را نشان می دهد.
جهت $\vec{B}$: از N خارج می شود و به S وارد می شود. (بیرون آهنربا)

* موتور الکتریکی



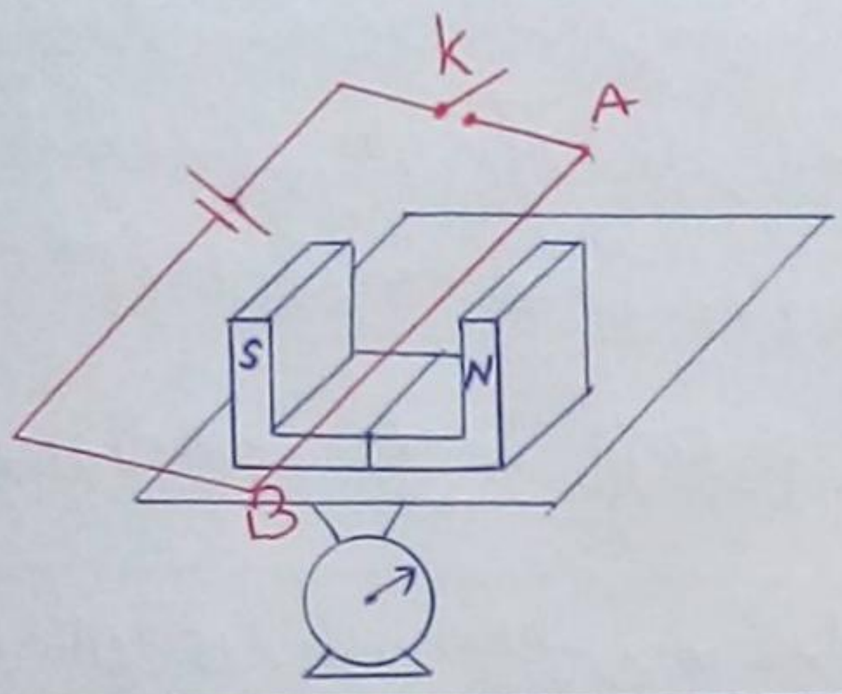
* نیروی مغناطیسی بر راستای سیم و راستای میدان مغناطیسی عمود است ($\vec{F}\perp\vec{B}$, $\vec{F}\perp\vec{I}$) ولی سیم و میدان می توانند با هم زاویه ای داشته باشند.
* اگر راستای سیم و خط های میدان مغناطیسی یکسان باشد، آن گاه به سیم نیروی وارد نمی شود.

$\vec{B}\parallel\vec{I}$ $(\alpha=0)$	$F=BIL\sin\alpha$ (بیل سینا)	
$\rightarrow F=0$	$\vec{B}\times\vec{I}\times L$ ضرب خارجی	
$\vec{B}\perp\vec{I}$ $(\alpha=90)$	(α: زاویه بین $\vec{I}$ و $\vec{B}$)	
$\rightarrow F=max$	(L=طول سیم)	
$(\sin 90=1)$	($\vec{F}$ بر $\vec{B}$ و $\vec{I}$ عمود است)	

(SI، سلا (T) $\vec{B}$)

Scanned by TapScanner

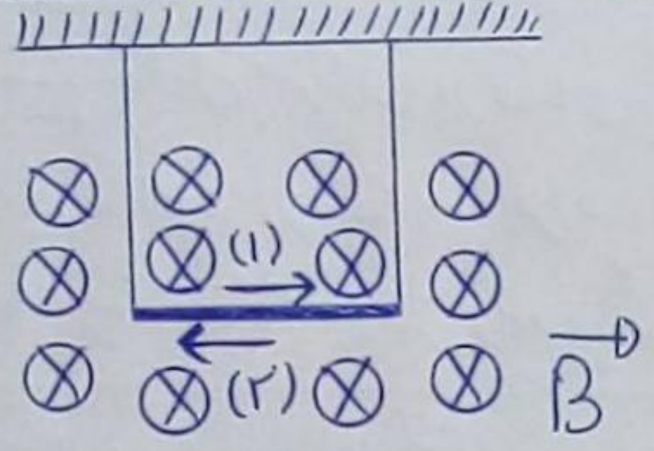
مثال: آهنربایی مطابق شکل روی کفه یک ترازوی حساس قرار دارد. با بستن کلید، عدد ترازو چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ابتدا زیاد می‌شود سپس کم می‌شود
۲) کاهش می‌یابد ۴) در هر حالت ممکن است رخ دهد

(جواب: گزینه ۲ (کاهش می‌یابد))

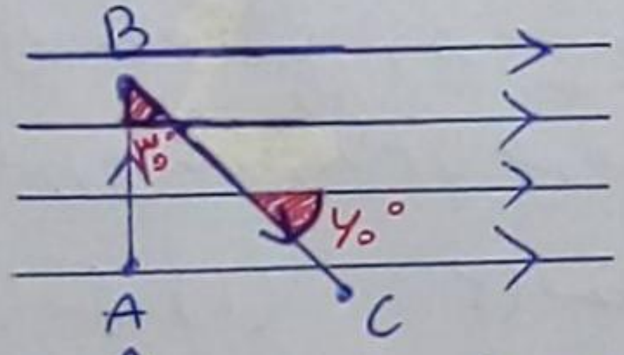
مثال: مطابق شکل، قطعه سیمی توسط دو فنر از سقف آویزان شده است. جهت جریان در سیم به چه صورت باشد تا کشش فنرها کاهش یابد؟



۱) جهت (۱) ۲) جهت (۲) (جواب: گزینه ۱)
۳) در هر دو حالت کشش فنرها کاهش می‌یابد.
۴) در هر دو حالت کشش فنرها افزایش می‌یابد.

$\sin 0 = 0$	$\sin 90 = 1$	$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$	$F = BIL\sin\alpha$ (بین سیم)
$\vec{B}, \vec{I}$ هم راستا $F=0$	$\vec{B}, \vec{I}$ عمود $F = max$	اگر $\vec{B}, \vec{I}$ با هم زاویه α و $180-\alpha$ داشته باشند نیروی آن برابر با حالتی که زاویه بین آن‌ها α باشد است.	* تصویر L بر راستای عمود بر $\vec{B}$

مثال: نیروی وارد بر قطعه سیم ABC (شکل مقابل) چند نیوتن است؟ $(\sqrt{3} = 1/7)$



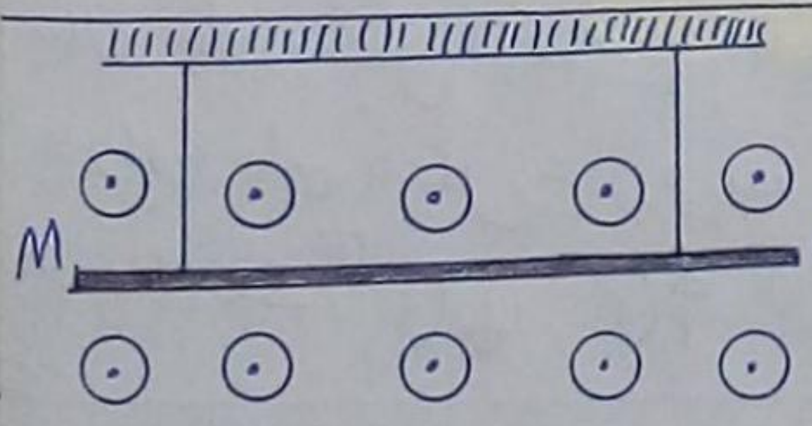
$B = 10G$
$AB = 20\,cm$
$BC = 30\,cm$
$I = 2A$

($A\hat{B}C = 30°$، زاویه BC با میدان $= 60°$)

۱) صفر ۲) $1/1 \times 10^{-4}$
۳) $9/1 \times 10^{-4}$ ۴) $5/1 \times 10^{-4}$

(جواب: گزینه ۲)

مثال: مطابق شکل، میله‌ای به طول 20cm و جرم 40g توسط دو فنر آویزان شده است و در میدان مغناطیسی با بزرگی 0/5T در دستگاه تراز گرفته است. جهت و اندازه جریان به چه صورت باشد تا کشش فنرها صفر شود؟ $(g = 10\,N/kg)$



۱) 1A، M به N ۲) 4A، M به N
۳) 1A، N به M ۴) 4A، N به M

(جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

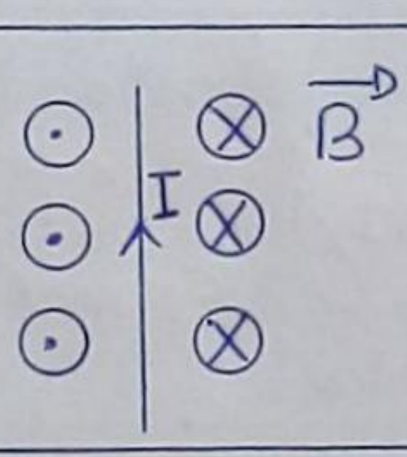
* می‌توان نشان داد که اگر سیمی به صورت منحنی در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار داشته باشد، نیروی وارد بر آن برابر با نیروی وارد بر سیم راستی است که ابتدا و انتهای سیم منحنی را به هم وصل می‌کند. * برآیند نیروهای وارد بر حلقه بسته (میدان حاصل جریان) صفر است.

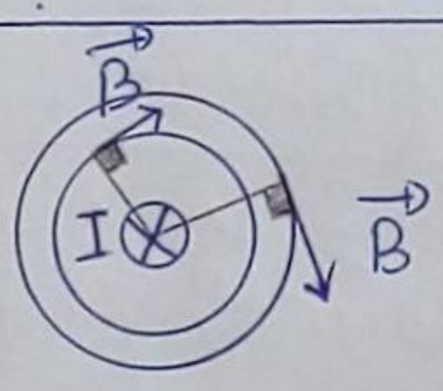
* در رابطه‌ی $F=BIL\sin\alpha$ ، $L\sin\alpha$ ، تصویر سیم روی محور عمود بر میدان مغناطیسی است.

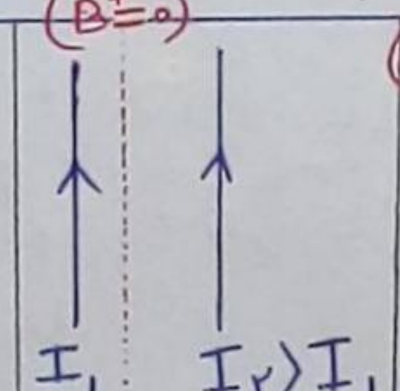
* مثال‌هایی از کاربرد مغناطیس * گالوانومتر: برای اندازه‌گیری جریان استفاده می‌شود * بلندگو

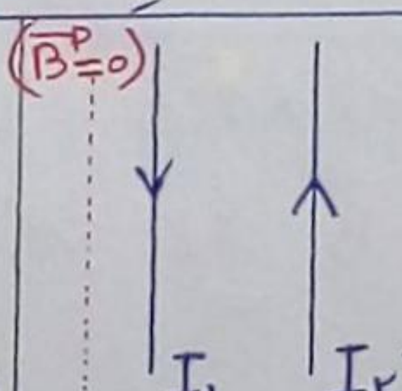
* سیم حامل جریان در فضای اطراف خود خاصیت مغناطیسی ایجاد می‌کند.
* بار ساکن در فضای اطراف خود فقط خاصیت الکتریکی دارد، ولی بار متحرک علاوه بر خاصیت الکتریکی، خاصیت مغناطیسی نیز تولید می‌کند.

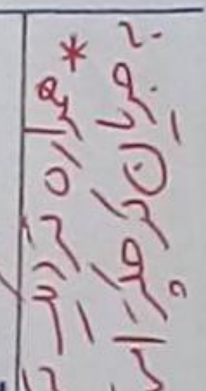
* فرض: سیم دراز مستقیم و بلند * جهت میدان مغناطیسی اطراف سیم حاصل: انگشت شصت در جهت جریان الکتریکی، جهت خم شدن انگشتان (بست)، جهت خط‌های میدان را نشان می‌دهد.





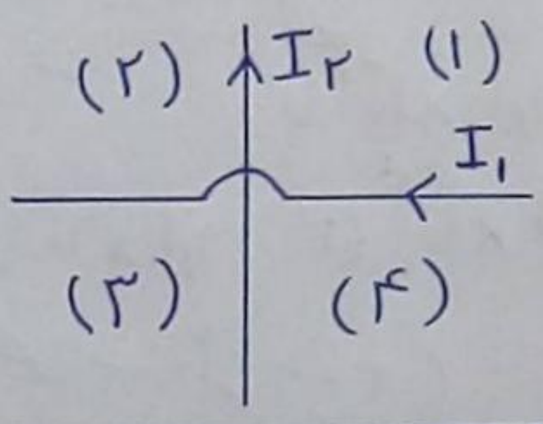






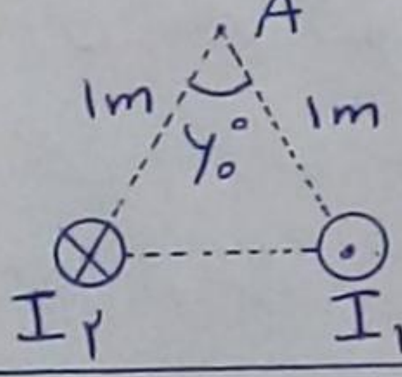
* هرچه از جریان دور شویم، میدان کاهش می‌یابد.

مثال: مطابق شکل از دو سیم صاف و بلند، جریان‌های I_1 و I_2 عبور می‌کند. در کدام ناحیه میدان مغناطیسی برآیند می‌تواند صفر باشد؟



۱) فقط (۱) ۲) فقط (۲)
۳) (۲) و (۴) ۴) (۲) و (۳) (جواب: گزینه ۳)

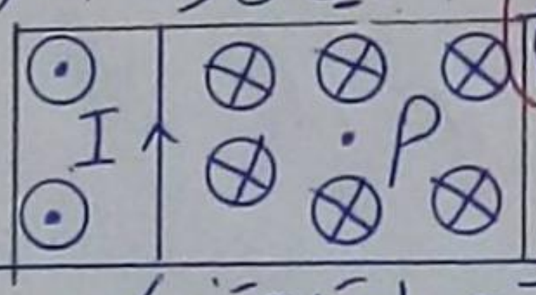
مثال: مطابق شکل از دو سیم مستقیم و بسیار بلند که عمود بر صفحه هستند و در خلا قرار دارند، جریان‌های یکسان عبور می‌کند. میدان مغناطیسی برآیند در نقطه A در کدام جهت است؟



۱) ↓ ۲) ↑ ۳) ← ۴) → (جواب: گزینه ۱)

* سیم حامل جریان در فضای اطراف خود، میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند. بنابراین می‌تواند به ذره باردار متحرک نیرو وارد کند.

مثال: اگر ذره باردار را در نقطه P به صورت عمود بر صفحه پرتاب



کنیم، در لحظه پرتاب، به ذره نیرو وارد نمی‌شود ($\vec{B}$ و $\vec{v}$ هم راستا هستند)

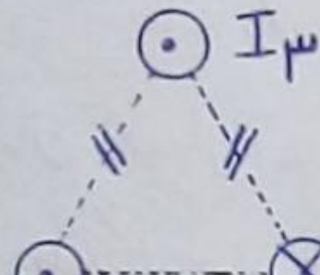
Scanned by TapScanner

* با استفاده از قاعده دست راست رمیدان مغناطیسی ایجادشده در اطراف سیم حامل جریان نشان دهید: * نیروی بین دو سیم موازی حامل جریان:

* اگر جریان عبوری از سیم ها هم جهت باشند، سیم ها یکدیگر را جذب می کنند

* اگر جریان عبوری از سیم ها در خلاف جهت هم باشند، سیم ها یکدیگر را دفع می کنند.

مثال: مطابق شکل از سه سیم مستقیم و بلند که عمود بر صفحه هستند، جریان های یکسان عبور می کند. برآیند نیروهای وارد بر سیم سوم در کدام جهت است؟



۱) ⟶ ۲) ⇩ ۳) ⟵ ۴) ⇧ (جواب: گزینه ۳)

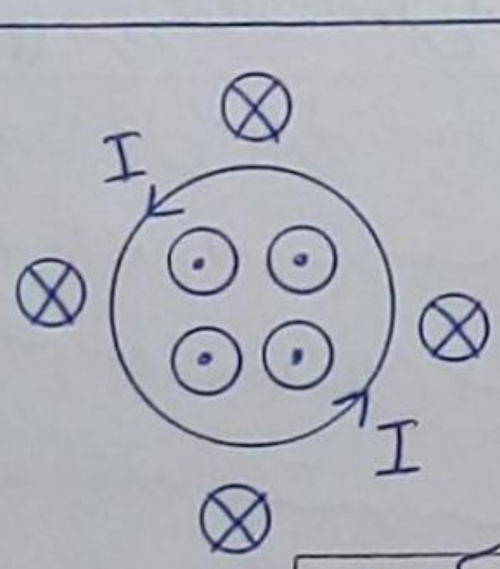
---

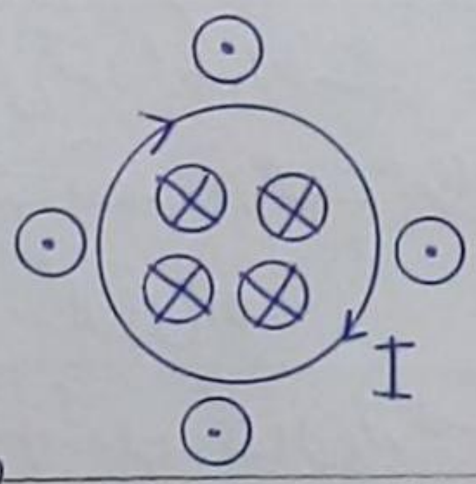
* پیچه مسطح (حلقه دایره‌ای) * اندازه میدان مغناطیسی در نقاط درون حلقه، نسبت به سیم صاف به طور قابل توجهی افزایش می یابد. * جهت میدان مغناطیسی با استفاده از قاعده دست راست.

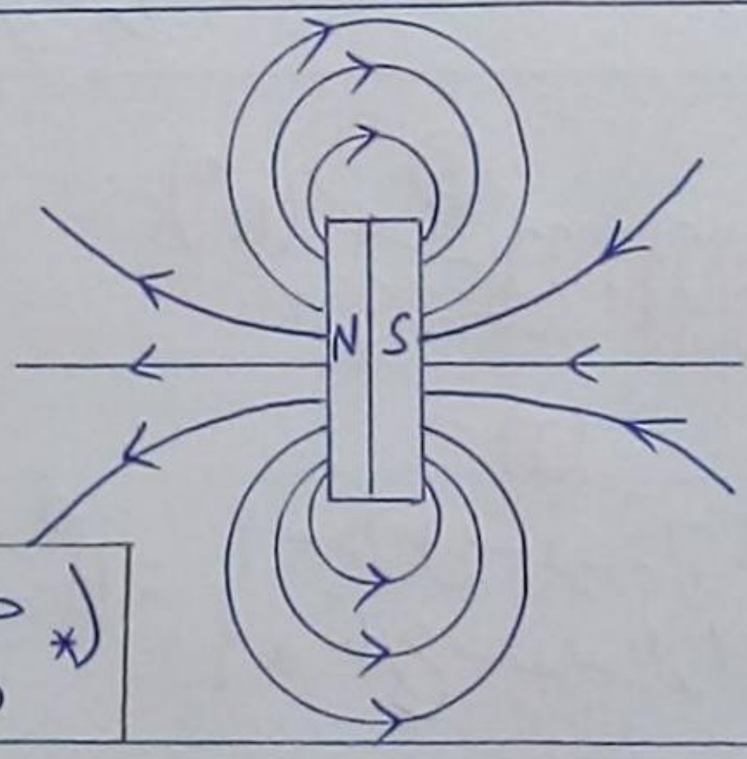
---

* قاعده دست راست ۱: خم شدن انگشتان در جهت جریان را انگشت شصت، جهت میدان مغناطیسی داخل حلقه را نشان می دهد.

قاعده دست راست ۲: انگشت شصت در جهت جریان، سبته شدن چهار انگشت جهت میدان را نشان می دهد.







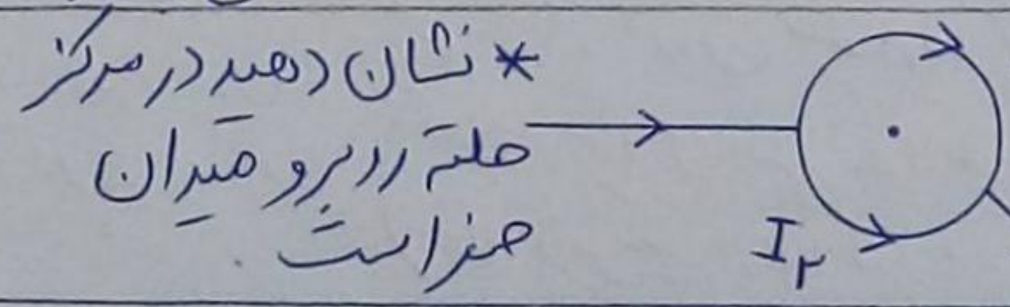
* حلقه حامل جریان را می توان مشابه یک آهربا در نظر گرفت (ثابت)

N: تعداد حلقه های پیچه

* اندازه میدان مغناطیسی در مرکز پیچه مسطح $B = \frac{\mu_0 N I}{2R}$ (T) (A) (m)

* برآیندگیری میدان ها * در صورتی که حلقه ناقص باشد، نسبت آن را به دایره کامل به دست می آوریم. $\left(N = \frac{\text{طول سیم}}{\text{محیط دایره} \; 2\pi R}\right)$

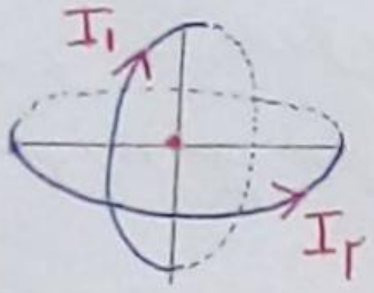
* نشان دهید در مرکز حلقه رو برو میدان صفر است.

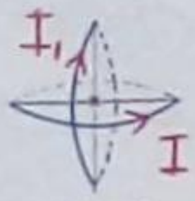


* حاصل ضرب NI در هر دو جهت یکسان است.

Scanned by TapScanner

مثال: مطابق شکل در حلقه به شعاع ۲۰cm به طور عمود بر هم حلقه گرفته اند. اگر جریان عبوری از هر حلقه ۱۰A باشد، میدان برآیند در مرکز مشترک در حلقه چند تسلا است؟ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A})$

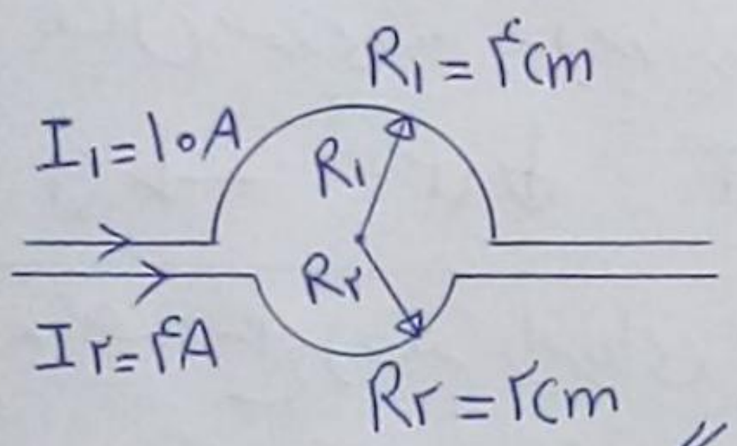




(* دو حلقه بر یکدیگر عمود هستند)

۱) $\pi \times 10^{-5}$ ۲) $2\pi \times 10^{-5}$ ۳) $\sqrt{2}\pi \times 10^{-5}$ ۴) صفر (جواب: گزینه ۳)

مثال: میدان مغناطیسی برآیند حاصل از دو سیم حلقه در مرکز مشترک، چند گاوس و در کدام جهت است؟ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A})$



۱) $5\pi \times 10^{-6}$، درون سو ۲) $5\pi \times 10^{-6}$، برون سو
۳) 5π ٪۵، درون سو ۴) 5π ٪۵، برون سو (جواب: گزینه ۲)

مثال: سیم صاف و بلند و حلقه حامل جریان در یک صفحه، مطابق شکل قرار دارند. جهت جریان در حلقه چگونه باشد تا میدان مغناطیسی برآیند، در مرکز حلقه برابر صفر شود؟ (جواب: گزینه ۳)

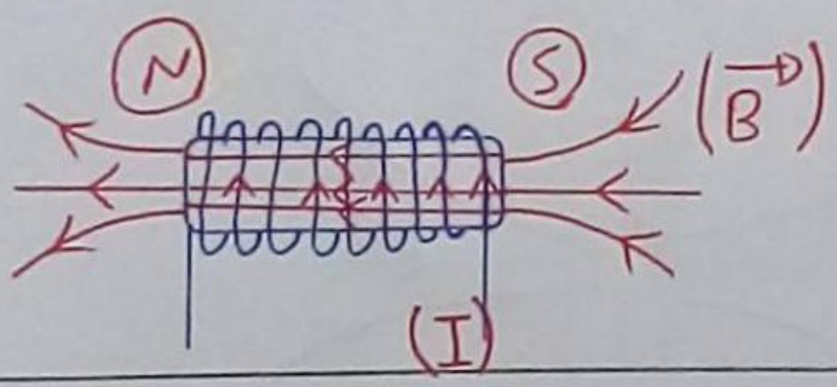
۱) ساعتگرد ۲) پادساعتگرد
۳) هر دو حالت ممکن است. ۴) میدان در مرکز حلقه صفر نمی شود.

---

* داخل سیملوله: میدان مغناطیسی تقریبا یکنواخت

* قاعده دست راست ۱: انگشت شصت در جهت جریان خم شدن انگشتان جهت $\vec{B}$ را نشان می دهد.

* قاعده دست راست ۲: خم شدن انگشتان در جهت جریان، انگشت شصت جهت میدان داخل سیملوله را نشان می دهد. (شصت N)



جهت $\vec{B}$:
* داخل سیملوله: از S به N
* خارج سیملوله: از N به S

* خطوط میدان در داخل سیملوله متراکم تر از بیرون سیملوله است (میدان قوی تر)

* اگر میله آهنی را در میدان مغناطیسی قرار دهیم، خاصیت مغناطیسی در میله القا می شود * به مجموعه سیملوله حامل جریان و هسته آهنی، آهنربای الکتریکی می گویند.

$B^{(T)} = k\mu_0 \left(\frac{N}{L}\right) I_{(A)}$ (اندازه میدان مغناطیسی یکنواخت درون سیملوله)

k: ضریب تراوایی نسبی مغناطیسی هسته (خلا برابر یک، هوا تقریبا برابر یک است.)

$\frac{N}{L}$: تعداد دورها در واحد طول

Scanned by TapScanner

مثال: سیملوله‌ای که در هر سانتی متر طول آن ۲۰ حلقه رجرد دارد، به مولد متصل است و جریان 1A از آن عبور می‌کند. اگر الکترونی را با سرعت $10^4 m/s$ به صورت داخل سیملوله و در جهت محور آن پرتاب کنیم، چه نیروی برحسب نیوتن بر الکترون وارد می‌شود؟ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}, e = 1/6 \times 10^{-19} C)$

۱) صفر ۲) $12/8\pi \times 10^{-19}$ ۳) $8\pi \times 10^{-19}$ ۴) $5\pi \times 10^{-19}$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: مطابق شکل، سیملوله‌ای به طول 50 cm و شامل ۱۰۰ حلقه، در مدار قرار گرفته است. اگر توان مصرفی مقاومت R_2 برابر 8W باشد، میدان مغناطیسی داخل سیملوله چند تسلا است؟ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A})$

$R_2 = 8\Omega$

$R_1 = 4\Omega$ سیملوله

۱) $10^{-4} \times 24\pi$ ۲) $16\pi \times 10^{-4}$ ۳) $12\pi \times 10^{-4}$ ۴) $8\pi \times 10^{-4}$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: سیملوله‌ای به طول 20 cm با ۱۰۰ حلقه به طور هم محور درون پیچه‌ای با ۲۰۰ حلقه با شعاع 10 cm قرار دارد. اگر جریان یکسان و هم جهت 10A از آن‌ها عبور کند، میدان برآیند در مرکز پیچه چند گاوس است؟ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A})$

۱) صفر ۲) 20π ۳) 60π ۴) 80π (جواب: گزینه ۳)

---

* مواد مغناطیسی: موادی هستند که اتم‌ها یا مولکول‌های سازنده آن‌ها دارای خاصیت مغناطیسی هستند. مانند آهن. * دوقطبی مغناطیسی: به کوچکترین ذره‌های تشکیل دهنده مواد مغناطیسی، که مانند آهنربای کوچکی هستند، دوقطبی مغناطیسی می‌گویند (⟵)

* یکی از کاربردهای امروزی مواد مغناطیسی: دیسک رایانه‌ای، کارت بانکی

---

* چرخش الکترون به دور هسته و چرخش الکترون به دور خودش، باعث ایجاد خاصیت مغناطیسی می‌شود بنابراین می‌توان نتیجه گرفت هر اتم مانند یک آهنربای کوچک و میکرو سکوپی است.

* حرکت الکترون به دور هسته مانند یک حلقه میکرو سکوپی جریان است.

* اگر زوج الکترون‌های اتم در یک جهت به دور هسته بچرخند، آهنربای قوی‌تری به وجود می‌آورند اما اگر زوج الکترون‌ها دارای چرخش در خلاف هم باشند، خاصیت مغناطیسی یکدیگر را خنثی کرده و اتم خاصیت مغناطیسی نخواهد داشت. با توجه به جهت‌گیری دوقطبی‌های مغناطیسی، مواد مغناطیسی را به سه دسته پارامغناطیسی، فرومغناطیسی و دیامغناطیسی تقسیم می‌کنند.

Scanned by TapScanner

*اتم های مواد پارامغناطیس، فرومغناطیسی به طور ذاتی خاصیت مغناطیسی دارند ولی اتم های مواد دیامغناطیسی به طور ذاتی خاصیت مغناطیسی ندارند.

*مواد پارامغناطیسی: هرچند اتم های مواد پارامغناطیسی، دارای خاصیت مغناطیسی هستند، ولی به دلیل این که دو قطبی های مغناطیسی به طور نامنظم و کاتوره ای جهت گیری کرده اند، این مواد در حالت عادی خاصیت مغناطیسی ندارند (پلاتین، آلومینیم، اکسیژن (...) * اگر ماده پارامغناطیس را در میدان مغناطیسی قرار دهیم، دو قطبی ها در راستای میدان مغناطیسی شروع به هم خط شدن می نمایند و هرچه میدان خارجی قوی تر باشد، تعداد دو قطبی های هم جهت شده بیشتر می شود و خاصیت مغناطیسی نیز قوی تر می شود. با دور کردن ماده پارامغناطیسی از میدان مغناطیسی، دو قطبی ها به حالت کاتوره ای بازگشته و خاصیت مغناطیسی خود را از دست می دهند. * هر ذره سازنده مواد پارامغناطیسی به طور ذاتی یک آهنربای میکرو سکوپی است.

*مواد فرومغناطیس: موادی مانند آهن، نیکل و کبالت و آلیاژهای آن ها جزء مواد فرومغناطیسی هستند. در این مواد، دو قطبی های مجاور در سرتاسر میدان خارجی نیز، هم خط می شوند. به ناحیه هایی که دو قطبی ها، هم جهت هستند، حوزه مغناطیسی می گویند. * در هر حوزه مغناطیسی، تقریبا تمام دو قطبی ها، هم جهت و موازی هستند. * اگر ماده فرومغناطیسی را در یک میدان مغناطیسی قرار دهیم، جهت دو قطبی ها متمایل به جهت میدان خارجی می شود و اصطلاحا حجم حوزه های هم جهت افزایش می یابد و ماده خاصیت مغناطیسی پیدا می کند. هرچه میدان مغناطیسی خارجی قوی تر باشد، حجم حوزه های هم جهت افزایش یافته و خاصیت مغناطیسی ماده قوی تر می شود. *مواد فرومغناطیسی به دو دسته فرومغناطیسی نرم و سخت تقسیم می شوند.

*فرومغناطیسی نرم: دو قطبی های آهن، نیکل و کبالت خالص در حضور میدان مغناطیسی خارجی، به راحتی تغییر جهت داده و باعث می شوند این مواد به راحتی تبدیل به آهنربا شوند. اگر این مواد را از میدان مغناطیسی خارج کنیم، خاصیت مغناطیسی خود را از دست می دهند. * از مواد فرومغناطیسی نرم در همه سیملوله ها و رسم پیچ ها و آهنربای الکتریکی استفاده می شود.

*فرومغناطیسی سخت: موادی مانند آلیاژهای آهن، نیکل، کبالت و فولاد (آهن با اضافه ۲ درصد کربن) در حضور میدان مغناطیسی خارجی به سختی، خاصیت مغناطیسی پیدا می کنند. ولی پس از حذف میدان خارجی، لجاجتی در دو قطبی های مغناطیسی به آسانی تغییر نمی کنند (خاصیت مغناطیسی کند شده به سختی از دست می رود) * هنگامی خاصیت مغناطیسی مواد فرومغناطیسی بیشینه است که تمام حوزه های مغناطیسی هم جهت باشند.

Scanned by TapScanner

* مواد دیامغناطیسی: اتم‌های این مواد به طور ذاتی خاصیت مغناطیسی ندارند (مانند مس، نقره و ...) یعنی اتم‌های این مواد، دارای دوقطبی مغناطیسی نیستند. * در حضور میدان مغناطیسی خارجی، مواد دیامغناطیسی طوری خاصیت پیدا می‌کنند که میدان داخلی خلاف جهت میدان خارجی شود.

مواد مغناطیسی

- اتم‌هایی که دوقطبی مغناطیسی ذاتی دارند
  - پارامغناطیسی: آلومینیم، پلاتین، اکسیژن و ...
  - فرومغناطیسی
    - نرم: آهن، نیکل، کبالت خالص
    - سخت: فولاد و آلیاژهای آهن، نیکل و کبالت
- اتم‌هایی که دوقطبی مغناطیسی ذاتی ندارند
  - دیامغناطیسی: مس، نقره

مثال: برای ساخت آهنربای دائمی و آهنربای الکتریکی به ترتیب از راست به چپ از چه نوع موادی باید استفاده کرد؟ (جواب: گزینه ۳)

۱) پارامغناطیس - فرومغناطیس نرم ۲) فرومغناطیس سخت - پارامغناطیس

۳) فرومغناطیس سخت - فرومغناطیس نرم ۴) پارامغناطیس - فرومغناطیس سخت

اتمام فصل مغناطیس، شروع فصل القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب

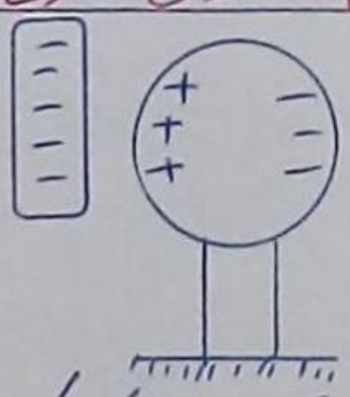
* القای الکترومغناطیسی (جریان القایی):

۱) تغییر اندازه میدان (در محل مداری که آهنربا را به حلقه نزدیک یا از آن دور کند)

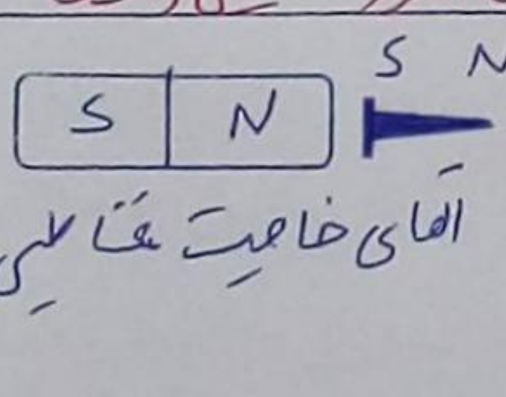
۲) تغییر مساحت حلقه

۳) تغییر زاویه بین حلقه و راستای میدان

(هر نوع چرخشی باعث تولید جریان نمی‌شود)



القای بار الکتریکی



القای خاصیت مغناطیسی

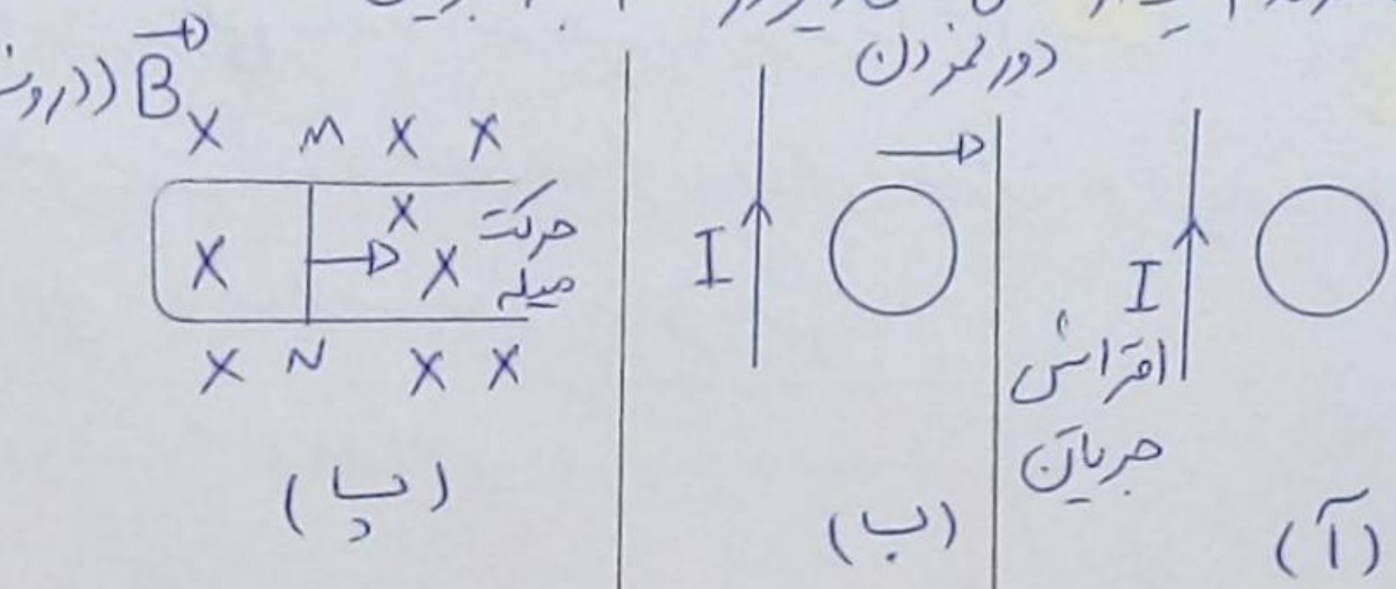
* تغییر کمیت مهم است و زیاد شدن کمیت مهم نیست

* هرچه تغییر مساحت، حرکت آهنربا و یا تغییر مناسب زاویه، سریع‌تر رخ دهد همین طور تعداد حلقه‌های پیچه بیشتر باشد؛ جریان القا شده در آن بیشتر است.

* منبع تولید میدان مغناطیسی، می‌تواند سیم دراز و مستقیم حامل جریان، حلقه یا سیملوله حامل جریان باشد.

Scanned by TapScanner

مثال: در کدام یک از شکل های زیر در حلقه سیم جریان القائی شروع می شود؟



۱) (آ) و (ت) ۲) (ب) و (پ) ۳) (پ) ۴) (ت) (جواب: گزینه ۴)

$\Phi = BA\cos\theta$ ، (Φ: شار مغناطیسی کمیتی نرده‌ای است)

θ: زاویه بین بردار مغناطیسی (یا خط عمود بر سطح حلقه) و سطح حلقه بامیدان مغناطیسی است)

(T)(m²)

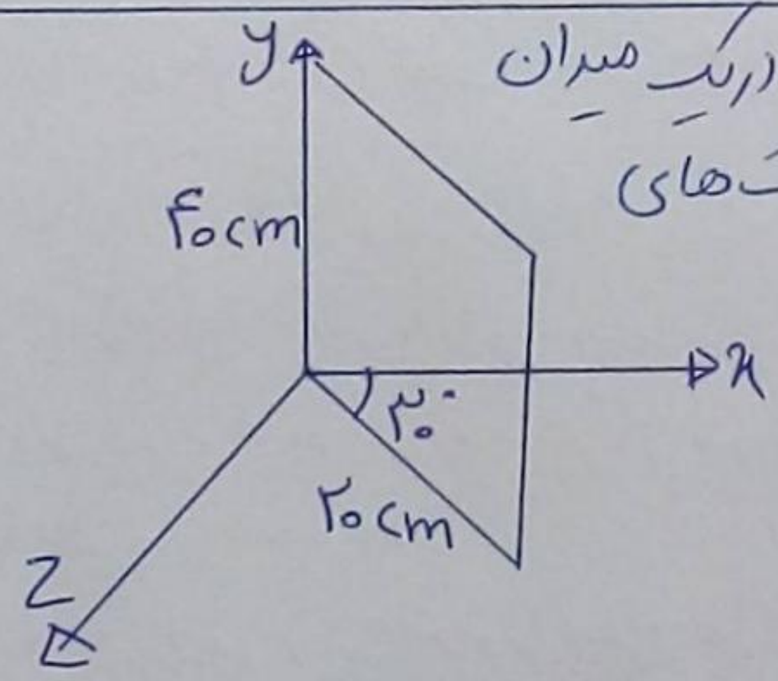
* واحد شار مغناطیسی $T.m^2$ است که به آن وبر (wb) می گویند

* هرگاه شار مغناطیسی عبوری از حلقه تغییر کند، جریان الکتریکی در حلقه القا می شود.

مثال: خطوط میدان مغناطیسی بر سطح حلقه‌ای عمود است و بیشینه شار مغناطیسی از داخل حلقه عبور می کند، حلقه را چند درجه بچرخانیم تا شار مغناطیسی عبوری از حلقه نصف شار مغناطیسی بیشینه شود؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 180° (جواب: گزینه ۳)

مثال: تخت مستطیل شکلی به ابعاد $20cm \times 40cm$ مطابق شکل در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی $1T$ قرار دارد. در هریک از حالت های زیر، شار مغناطیسی عبوری از تخت به ترتیب از راست به چپ چند وبر می شود؟



آ) میدان مغناطیسی در جهت محور z ها باشد

ب) میدان مغناطیسی در جهت محور y ها باشد

۱) 4×10^{-4}، صفر ۲) $4\sqrt{3}\times10^{-4}$، صفر

۳) 4×10^{-4}، $4\sqrt{3}\times10^{-4}$ ۴) $4\sqrt{3}\times10^{-4}$، 4×10^{-4}

(جواب: گزینه ۱)

---

* هرگاه شار مغناطیسی که از مداری بسته‌ای می گذرد تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در آن القا می شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی متناسب است.

* نیروی محرکه القایی متوسط $\overline{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (V) (wb) (s) (تعداد حلقه‌ها)

(* خاطرنشان می شود) $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = A_2B_2\cos\theta_2 - A_1B_1\cos\theta_1$

Scanned by TapScanner

مثال: شار مغناطیسی عبوری از پیچه‌ای شامل ۱۰۰ حلقه در SI به صورت $\Phi = 10^{-2}\sin(\pi t)$ است. نیروی محرکه القایی متوسط در بازه زمانی ۰/۵s تا ۲s چند ولت است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$ (جواب گزینه ۳)

مثال: خطوط میدان مغناطیسی با سطح حلقه زاویه ۹۰° می‌سازند، مساحت حلقه $400\,cm^2$ است. در مدت زمان ۵ ثانیه بزرگی میدان مغناطیسی بدون تغییر جهت از ۰/۲T به ۰/۸T افزایش می‌یابد. بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط چند ولت است؟

۱) 24×10^{-3} ۲) 4×10^{-2} ۳) ۲۴ ۴) ۴۰ (جواب گزینه ۳)

مثال: پیچه‌ای شامل ۲۰ حلقه به مساحت $300\,cm^2$ را عمود بر میدان مغناطیسی زمین نگه داشته‌ایم. اگر در مدت ۰/۱ ثانیه پیچه را بچرخانیم تا سطح پیچه با خطوط میدان مغناطیسی زمین موازی شود، نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه چند ولت می‌شود؟ ($B = 0/05G$)

۱) $\frac{1}{3}\times10^{-3}$ ۲) $-\frac{1}{3}\times10^{-3}$ ۳) -6×10^{-2} ۴) 6×10^{-2} (جواب گزینه ۴)

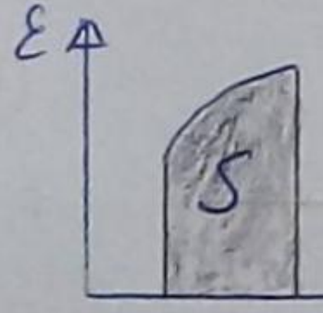
(حلقه، N=1) (پیچه، N>1)

---

* طبق رابطه‌ی $\bar{\varepsilon} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ می‌توان نتیجه گرفت،

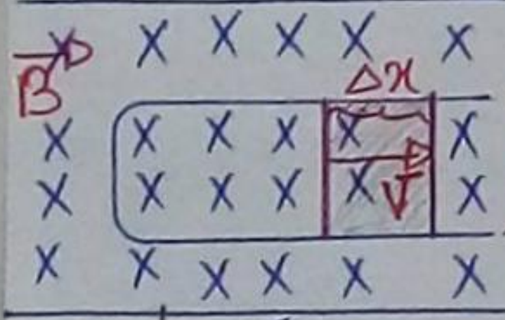
نیروی محرکه القایی متوسط برابر با قرینه شیب نمودار $\Phi - t$ است

(* اگر شیب نمودار $\Phi - t$ ثابت باشد، نیروی محرکه القایی در تمام لحظه‌ها برابر نیروی محرکه القایی متوسط است.) (* شیب خط‌های بر نمودار $\Phi - t$ نشان دهنده نیروی محرکه در آن لحظه است.) (* ساحت زیر نمودار نیروی محرکه برحسب زمان برابر است با حاصل ضرب تعداد حلقه‌ها در تغییرات شار مغناطیسی.) $\left(\frac{\varepsilon\times\Delta t}{\text{ساحت}} = -N\Delta\Phi\right)$، $(S = |N\Delta\Phi|)$



* بنابر جمله‌ی قبل $\bar{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$، اگر نمودار بالای محور t باشد، تغییرات شار مغناطیسی منفی است، اگر نمودار پایین محور t باشد، تغییرات شار مغناطیسی مثبت است.

$\bar{I} = \frac{|\bar{\varepsilon}|}{R}$ (V, Ω, A) جریان القایی



$\Delta A = \Delta x \times L$

$N = 1$

$\frac{\Delta x}{\Delta t} = V$

$|\bar{\varepsilon}| = |-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}| \rightarrow (\bar{\varepsilon} = BLV)$ $(\Delta\Phi = B\times\Delta A)$

* اگر میله به طول L را با تندی V

۴۵ عمود بر میدان مغناطیسی B حرکت دهیم، اختلاف پتانسیل دو سر میله از رابطه‌ی $\varepsilon = BLV$ به دست می‌آید

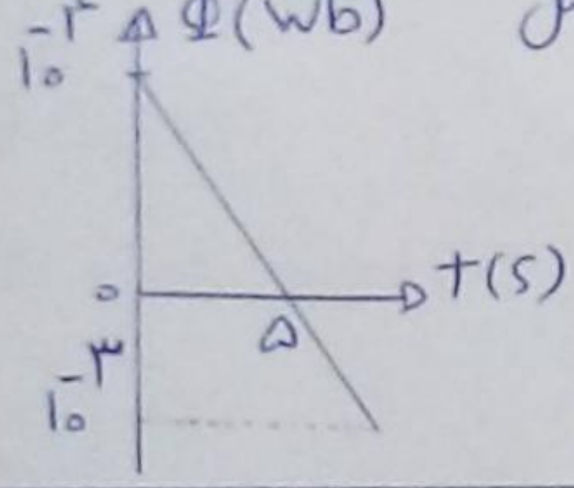
Scanned by TapScanner

مثال: پیچه‌ای شامل ۱۰۰ حلقه، مقاومت الکتریکی 5Ω عمود بر خطوط میدان مغناطیسی با بزرگی $2mT$ قرار دارد. مساحت هر حلقه $50(cm^2)$ است. اگر پیچه طوری بچرخد که زاویه بین خطوط میدان و سطح حلقه 30° شود. مقدار بار شارش شده در پیچه چند کولن است؟

$$\left(\Delta q = I\Delta t \rightarrow |\Delta q| = \left|N\frac{\Delta\Phi}{R}\right|\right)$$

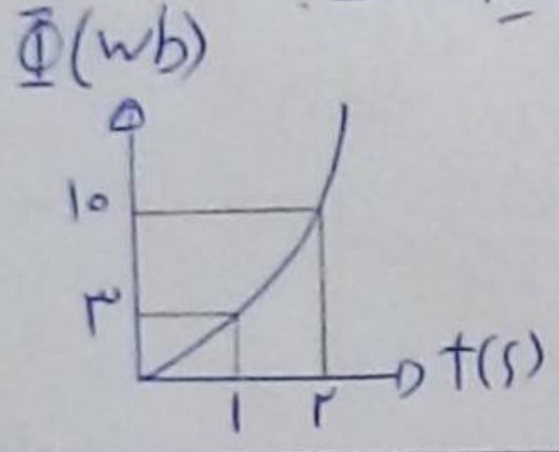
۱) 10^{-4} ۲) $\frac{1}{2}\times10^{-4}$ ۳) 10^{-5} ۴) $\frac{1}{2}\times10^{-5}$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: نمودار تغییرات شار مغناطیسی عبوری از حلقه‌ای برحسب زمان مطابق شکل روبه‌رو است. نیروی محرکه القایی در لحظه ۵ ثانیه چند ولت است؟



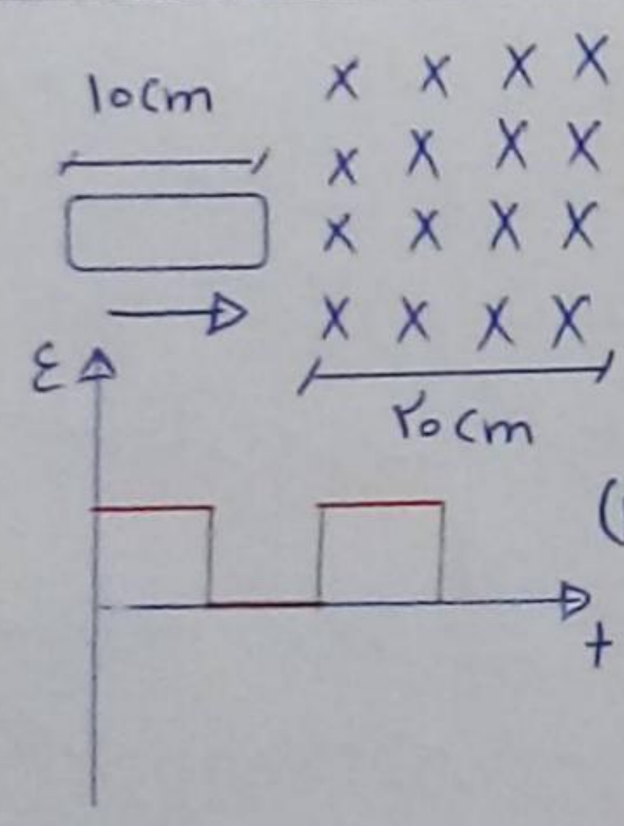
۱) صفر ۲) -2×10^{-5}
۳) $+2\times10^{-5}$ ۴) $+2\times10^{-4}$ (جواب: گزینه ۳)

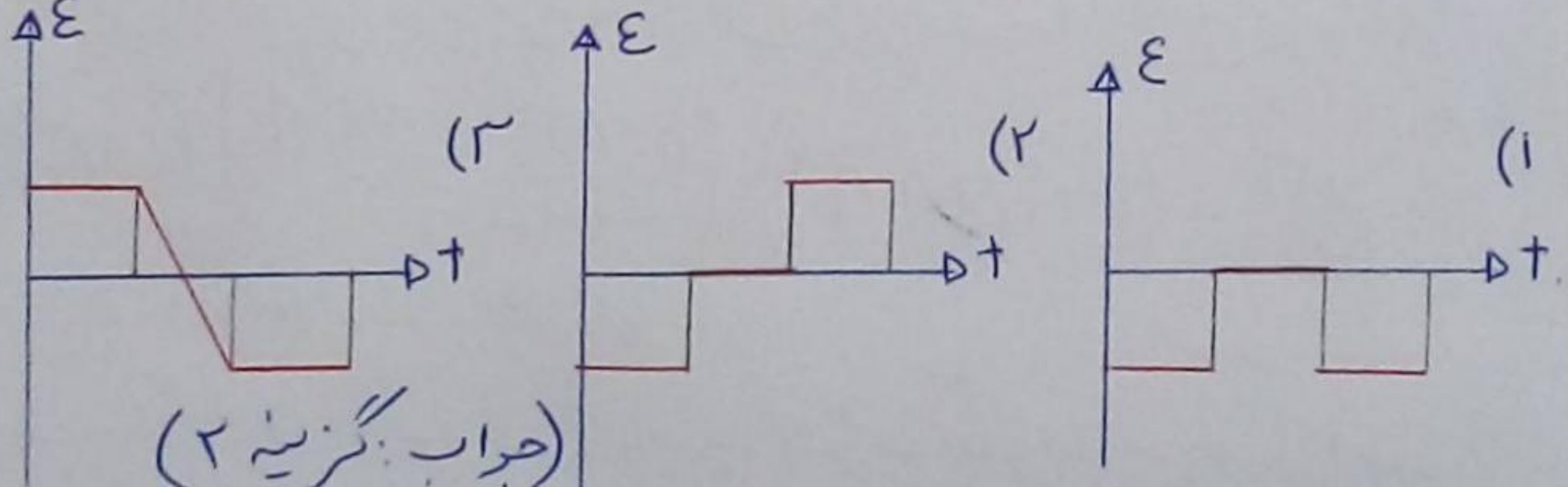
مثال: نمودار شار مغناطیسی عبوری از حلقه‌ای مطابق شکل است. نیروی محرکه القایی متوسط در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه چند برابر نیروی محرکه القایی متوسط در بازه زمانی صفر تا ۲ ثانیه است؟



۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $\frac{10}{7}$ ۴) $\frac{5}{7}$ (جواب: گزینه ۴)

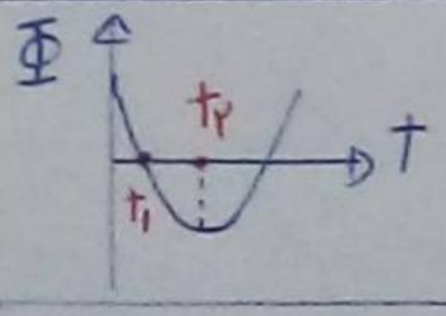
مثال: تاب رسانای مستطیل شکلی مطابق شکل با سرعت ثابت وارد میدان یکنواخت می‌شود و از آن عبور می‌کند. نمودار نیروی محرکه برحسب زمان کدام گزینه است؟





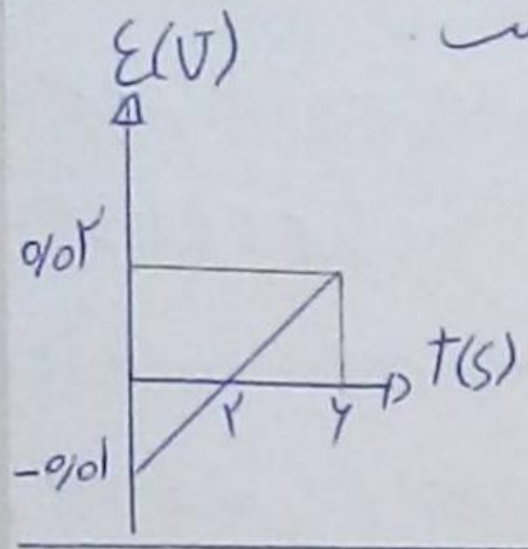
(جواب: گزینه ۲)

مثال: نمودار شار مغناطیسی عبوری از حلقه‌ای مطابق شکل است. اندازه نیروی محرکه القایی از لحظه صفر تا t_2 چگونه تغییر می‌کند؟ (جواب: کاهش می‌یابد)



Scanned by TapScanner

مثال: نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه ای شامل ۱۰۰۰ حلقه، مطابق شکل است. اندازه تغییر شار مغناطیسی در بازه زمانی صفر تا ۶ ثانیه چند wb است؟

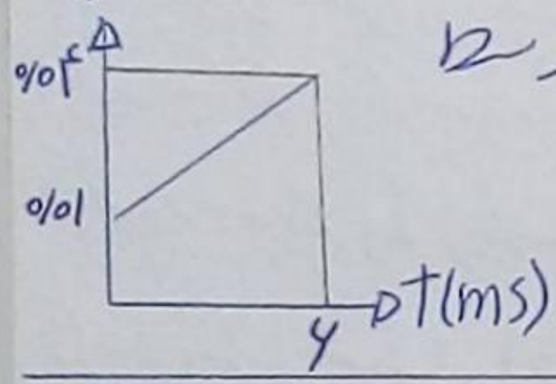


۱) 5×10^{-5} ۲) 2×10^{-5} ۳) 10×10^{-5} ۴) 6×10^{-5}

(جواب: گزینه ۲)

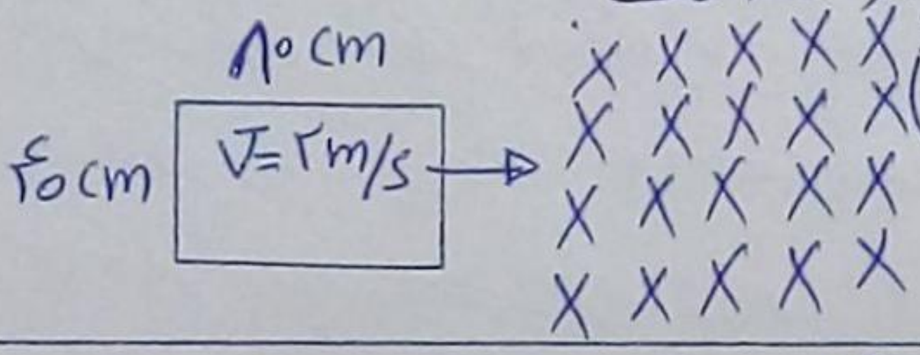
* ثانیه سوم همان بازه زمانی ۲ تا ۳ ثانیه است.

مثال: حلقه ای با مساحت ۵۰۰cm² و مقاومت الکتریکی ۲Ω عمود بر میدان مغناطیسی است که تغییرات آن برحسب زمان مطابق شکل روبه رو است. جریان القایی متوسط در بازه زمانی صفر تا ۳ میلی ثانیه چند میلی آمپر است؟



۱) ۱۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱/۵ (جواب: گزینه ۱)

مثال: مطابق شکل، پیچه ای مستطیل شکل شامل ۵۰۰ دور سیم، با تندی ثابت ۲ m/s در حال وارد شدن به میدان مغناطیسی یکنواخت B است. هنگامی که $\frac{1}{4}$ پیچه وارد میدان شده است، اندازه نیروی محرکه القایی در پیچه چند ولت است؟



۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۸ ۴) ۱/۶

(جواب: گزینه ۳)

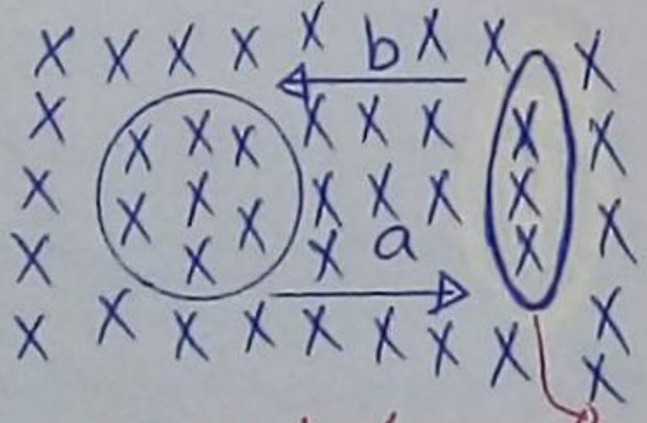
---

* القای جریان الکتریکی کاربردهای فراوانی دارد که مهم ترین آن، تولید جریان است. سه کاربرد دیگر در کارت های اعتباری، سامانه تنظیم تندی خودرو و سرعت سنج دوچرخه می باشد.

---

* جریان القایی در مداری جهتی است که آثار مغناطیسی ناشی از جریان القایی با عامل به وجود آورنده جریان القایی یعنی تغییر شار مغناطیسی مخالفت می کند. (* قانون لنز) (* قانون دست راست)

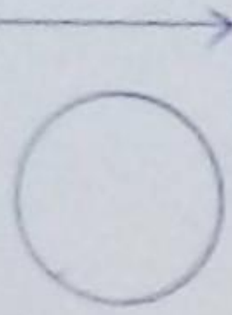
مثال: حلقه ای در یک میدان مغناطیسی یکنواخت و درون سو قرار دارد. ابتدا حلقه را جمع می کنیم تا مساحت حلقه کاهش یابد (a) و پس حلقه را باز می کنیم و به شکل اولیه باز می گردانیم (b) در هر مرحله از راست به چپ جهت جریان چگونه است؟



(جواب: ساعتگرد، پادساعتگرد)

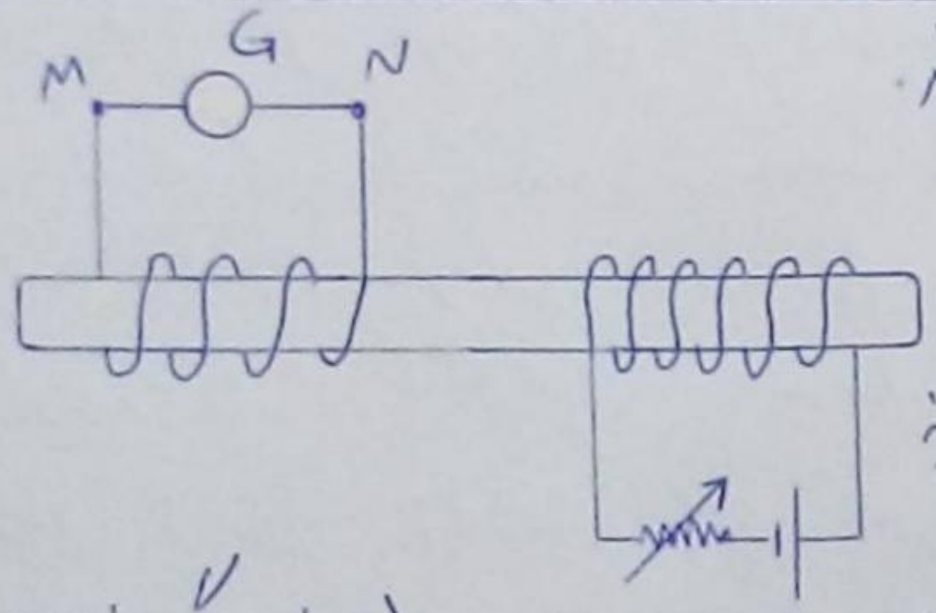
Scanned by TapScanner

مثال: مطابق شکل، سیم صاف و حلقه رسانا در یک صفحه قرار دارند. برای این که جریان القایی در حلقه رسانا، پادساعتگرد شود، می توانیم جریان سیم را ..... (هیم و یا حلقه را .....



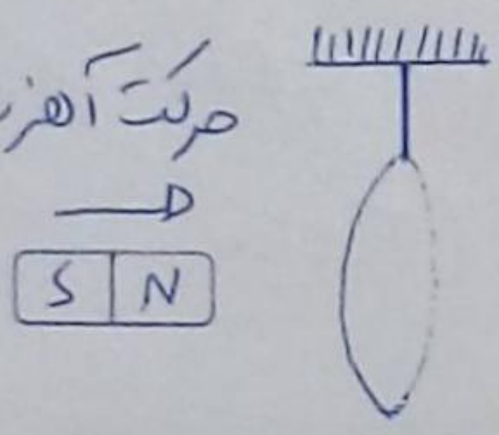
۱) کاهش، به سیم نزدیک کنیم ۲) افزایش، به سیم نزدیک کنیم (جواب: گزینه ۲)
۳) کاهش، از سیم دور کنم ۴) افزایش، از سیم دور کنم

مثال: مطابق شکل در سیملوله روی هسته آهنی پیچیده شده ایم. مقاومت رئوستا را کاهش می دهیم. جریان القایی در سیملوله سمت چپ قبل از تغییر مقاومت رئوستا، برابر I_1 و در مدت تغییر مقاومت رئوستا، برابر I_2 می باشد. کدام گزینه در مورد مقدار I_1 و جهت I_2 درست است؟



۱) $I_1=0$ ، I_2 از M به N ۲) I_1 مقداری ثابت است، I_2 از M به N (جواب: گزینه ۳)
۳) $I_1=0$ ، I_2 از N به M ۴) I_1 مقداری ثابت است، I_2 از N به M

مثال: مطابق شکل یک حلقه رسانا را به کمک یک نارسانا آویزان کرده ایم. با نزدیک کردن قطب N آهنربا به حلقه، چه اتفاقی رخ می دهد؟



۱) حلقه ثابت می ماند ۲) حلقه به طرف راست منحرف می شود
۳) حلقه به طرف چپ منحرف می شود ۴) گزینه های (۲) یا (۳)
(جواب: گزینه ۲) (ناهم نام: جاذبه، هم نام: دافعه) * اگر قطب S را نزدیک می کردیم نیز اتفاقی مشابه می افتاد.

---

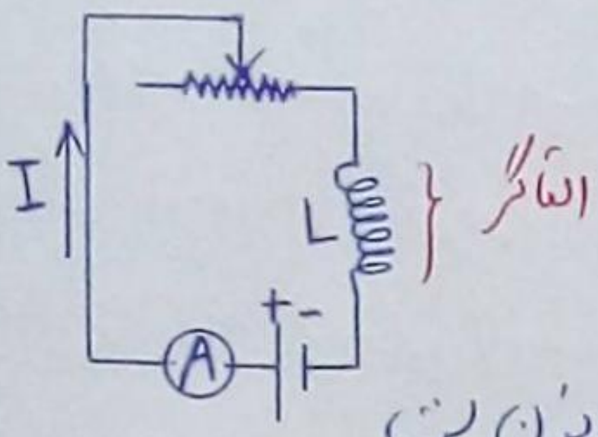
* اگر جریان عبوری از سیملوله (یا پیچه) متغیر باشد، به آن القاگر می گویند. (____)
* کاربرد القاگرها: ① تولید میدان مغناطیسی، ② ذخیره انرژی در میدان مغناطیسی القاگر
③ در مدار جریان مستقیم (dc) برای ثابت (یا بابا نگه داشتن) جریان در برابر امت (خیزهای نیروی محرکه الکتریکی (emf) اعمال شده، از القاگر استفاده می شود. ④ در مدار جریان متناوب (ac) مانند برق شهری، القاگر از تغییراتی که سریع تر از مقدار تعیین شده این گونه جریان ها است، جلوگیری می کند

---

* اگر جریان عبوری از القاگر افزایش (یا کاهش یابد)، شار مغناطیسی عبوری از حلقه های القاگر تغییر می کند، بنابراین طبق تعاون القای الکترومغناطیسی نیروی محرکه ای در القاگر ایجاد می شود.

(* نیروی محرکه خود القاوری، * اثر خود القاوری)

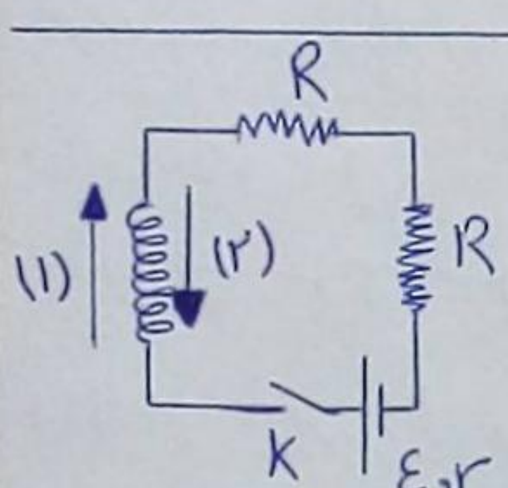
Scanned by TapScanner



* اگر مقاومت رئوستا را کاهش دهیم، جریان مدار افزایش می‌یابد و شار مغناطیسی عبوری از القاگر نیز افزایش می‌یابد. طبق قانون لنز، نیروی محرکه خودالقاوری با افزایش جریان مخالفت می‌کند، بنابراین نیروی محرکه خودالقاوری خلاف جهت نیروی محرکه مولد، ایجاد می‌شود.

* اگر مقاومت رئوستا افزایش یابد، جریان مدار کاهش می‌یابد، بنابراین طبق قانون لنز، نیروی محرکه خودالقاوری با کاهش جریان مخالفت می‌کند یعنی جهت نیروی محرکه خودالقاوری، هم جهت با نیروی محرکه مولد می‌شود. (* نیروی محرکه خودالقاوری، $-\varepsilon_L$)

مثال: مطابق شکل القاگری به طور متوالی به مدار متصل شده است. در هنگام وصل و قطع کلید به ترتیب از راست به چپ جهت نیروی محرکه خودالقاوری به کدام صورت است؟ (جواب: گزینه ۳)



۱) (۱)، (۱) ۲) (۱)، (۲) ۳) (۲)، (۱) ۴) (۲)، (۲)

* ضریب القاوری:

$$L = K\mu_0 \frac{AN^2}{l}$$

A: مساحت هر حلقه
N: تعداد حلقه‌ها
l: طول سیملوله

در SI برحسب اهم. ثانیه ($\Omega \cdot s$) است که برحسب هانری بیان می‌کند (H)

* ضریب القاوری به جریان عبوری از القاگر بستگی ندارد.
* اگر هسته مغناطیسی دارد القاگر شود ضریب القاوری k برابری می‌شود ($L = k\mu_0 \frac{AN^2}{l}$)

مثال: ۳۱۴ متر سیم نازک دورشته دار را به دور استوانه‌ای با شعاع 10cm می‌پیچیم. به طوری که بین حلقه‌های سیملوله فاصله نباشد. اگر ضخامت سیم (قطر مقطع سیم) یک میلی‌متر باشد، ضریب القاوری این القاگر چند هانری است؟ ($\pi^2 = 10$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$)

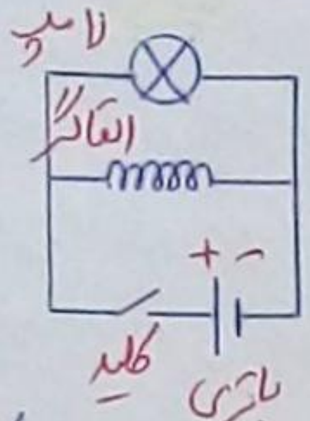
۱) 2×10^{-5} ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۰۶ ۴) 6×10^{-5} (جواب: گزینه ۲)

* با ثابت ماندن نحوه تغییر جریان، هر چه ضریب القاوری بیشتر باشد، نیروی محرکه خودالقاوری نیز بیشتر می‌شود.

* در لحظه وصل کلید، به علت بسیار کوتاه بودن مدت زمان وصل کلید، اثر خودالقاوری بسیار زیاد است و هیچ جریانی از القاگر عبور نمی‌کند و در هنگام قطع کلید نیز، به علت بسیار کوتاه بودن مدت زمان قطع کلید، اثر خودالقاوری بسیار زیاد است و نیروی محرکه خودالقاوری قابل توجهی تولید می‌شود.

* برای القاگری می‌توانیم از القاگرا مدهای استفاده کنیم.

Scanned by TapScanner

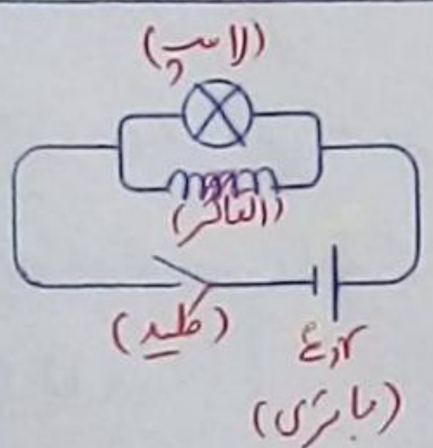


* در لحظه وصل کلید، لامپ با نور زیاد روشن شده و سپس نور عادی پیدا می کند.
* در لحظه قطع کلید، لامپ پرنور شده و سپس خاموش می شود.
* اگر مقاومت الکتریکی القاگر ناچیز باشد (القاگر آرمانی)، مدتی بعد، القاگر باعث می شود لامپ اتصال کوتاه شده و خاموش شود.

* اتصال موازی القاگر

* با قطع کلید، جریان در مدت زمان بسیار کوتاه کاهش می یابد و نیروی محرکه خود القاوری قابل توجهی ایجاد شده که فقط از لامپ عبور می کند، بنابراین لامپ به جای این که خاموش شود، از القاگر انرژی گرفته و با نور زیاد روشن شده و سپس خاموش می شود.

مثال: مطابق شکل، القاگری با مقاومت الکتریکی ناچیز ($R \simeq 0$) را به طور موازی به لامپ نئونی متصل کرده ایم. اگر کلید را وصل کنیم، چه مشاهده خواهیم کرد؟



۱) لامپ با نور زیاد روشن شده و به همان صورت، پرنور می ماند.
۲) لامپ با نور زیاد روشن شده و سپس با نور عادی روشن می ماند.
۳) لامپ با نور زیاد روشن شده و سپس خاموش می شود. (جواب: گزینه ۳)
۴) لامپ با نور کم روشن شده و کم کم به نور عادی می رسد.

---

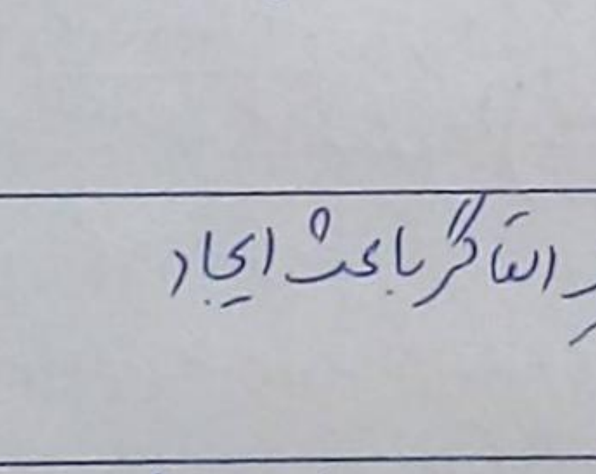
* القای متقابل: اگر دو القاگر را مقابل یکدیگر قرار دهیم، تغییر جریان در یک القاگر باعث ایجاد نیروی محرکه القایی در القاگر دیگر می شود.

---

* اگر جریان عبوری از القاگر آرمانی افزایش یابد، انرژی دار القاگر شده و این انرژی ذخیره می شود. حال اگر جریان کاهش یابد، انرژی ذخیره شده، آزاد شده و از القاگر خارج شده و وارد مدار می شود.

* انرژی ذخیره شده (در القاگر): $U = \frac{1}{2} L I^2$ (J) (H) (A)

مثال: در مدار مقابل، توان مصرفی از ۳۶W به ۴W می رسد.



مقاومت
انرژی ذخیره شده در القاگر چند ژول تغییر می کند؟
۱) ۰/۱۲ ژول افزایش می یابد ۲) ۰/۲۴ ژول افزایش می یابد
۳) ۰/۱۲ ژول کاهش می یابد ۴) ۰/۲۴ ژول کاهش می یابد (جواب: گزینه ۴)

---

* برای ایجاد جرقه در شمع که باعث احتراق مخلوط سوخت و هوا می شود از القاوری متقابل استفاده می شود.

Scanned by TapScanner

* در جریان مستقیم، جهت جریان در مدار مشخص است و اگر تغییری در مدار ایجاد نشود، اندازه جریان نیز ثابت می ماند

* در جریان متناوب، جهت جریان به طور مداوم تغییر می کند و نمی توان جهت مشخصی را برای جریان تعیین کرد.
* جریان متناوب را با نماد ⊖ نمایش می دهند و نسبت به زمان به صورت سینوسی تغییر می کند.

* برای تولید جریان باید شار مغناطیسی عبوری از حلقه تغییر کند. در نیروگاه های تولید برق، ساده ترین و رایج ترین روش، تغییر زاویه بین خطوط میدان و سطح عمود بر حلقه است که با چرخاندن مناسب حلقه در یک میدان مغناطیسی، رخ می دهد.

* مدت زمان یک چرخش کامل را دوره یا زمان تناوب می گویند و با نماد T نمایش می دهند (SI، ثانیه)

* شار مغناطیسی برحسب زمان $\Phi = \underbrace{\Phi_m}_{*} \cos\left(\underbrace{\frac{2\pi}{T}t}_{\theta}\right) = \underbrace{AB}_{*}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

* بیشینه شار مغناطیسی عبوری برابر AB است، هنگامی رخ می دهد که $\underline{\cos\theta = 1}$ باشد یعنی خطوط میدان بر سطح حلقه عمود باشد.

$\left(\theta = 0\text{، }(\theta = \frac{2\pi}{T}t)\right)$ یکی از جواب ها

$\cos\theta = 1$ بی شمار جواب دارد

$\left(\Phi_m = AB\right)$

یادآوری * مثلثاتی:
$\theta = 2k\pi \rightarrow \cos\theta = 1$
$\theta = (2k+1)\pi \rightarrow \cos\theta = -1$

$$\varepsilon = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N \times AB \times \frac{-2\pi}{T} \times \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

* نیروی محرکه القایی برحسب زمان
* جریان القایی برحسب زمان

* مشتق Φ برحسب t

$$= \underbrace{NAB\left(\frac{2\pi}{T}\right)}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \varepsilon_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

(ε_m) بیشینه نیروی محرکه القایی

$\left(\varepsilon_m = NAB\left(\frac{2\pi}{T}\right)\right)$

$$\rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}\text{، }\left(I_m = \frac{\varepsilon_m}{R}\right) \rightarrow I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

* شار مغناطیسی برحسب زمان $(\Phi - t)$: نمودار کسینوسی $(\cos\theta)$
* نیروی محرکه القایی برحسب زمان $(\varepsilon - t)$: نمودار سینوسی $(\sin\theta)$
* جریان القایی برحسب زمان $(I - t)$: نمودار سینوسی $(\sin\theta)$

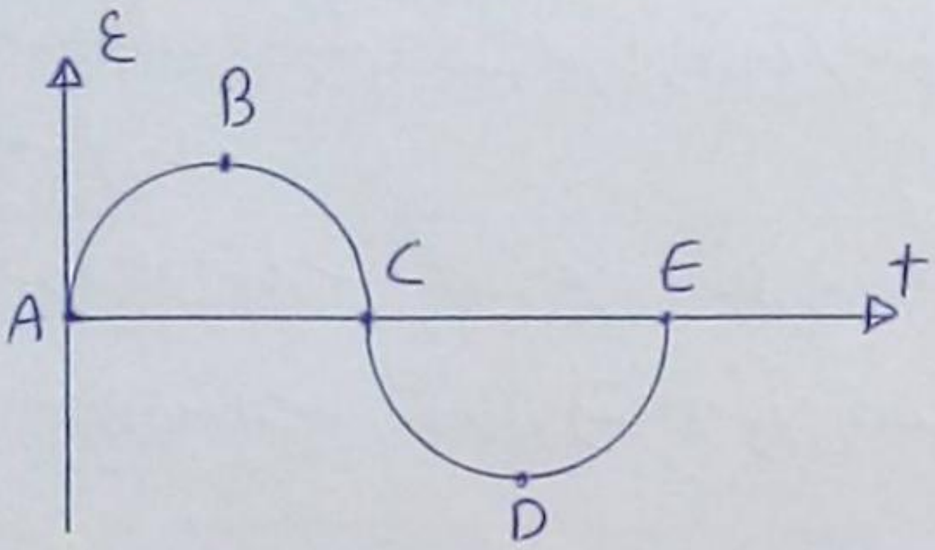
هم فاز / خارج فاز (برعکس)

* هم فاز: max، min هم زمان اتفاق می افتد * خارج فاز: هنگامی که یکی max باشد، دیگری min است،

* نمودارهای sin، cos، به اندازه ی $\frac{T}{2}$، با یکدیگر اختلاف فاز دارند. $(T \equiv 2\pi)$

Scanned by TapScanner

مثال: نمودار نیروی محرکه القای دریک مولد برحسب زمان مطابق شکل است. در کدام یک از نقطه‌ها، شار مغناطیسی عبوری از حلقه‌ها صفر است؟



۱) A، C، E ۲) B، D
۳) C ۴) E، D (جواب: گزینه ۲)

مثال: نیروی محرکه القایی یک مولد جریان متناوب در SI به صورت $\varepsilon = 200\sqrt{2}\sin(200\pi t)$ است. بزرگی نیروی محرکه در لحظه‌های $\frac{T}{4}$ و $\frac{T}{2}$ کدام است؟ (از راست به چپ برحسب ولت)

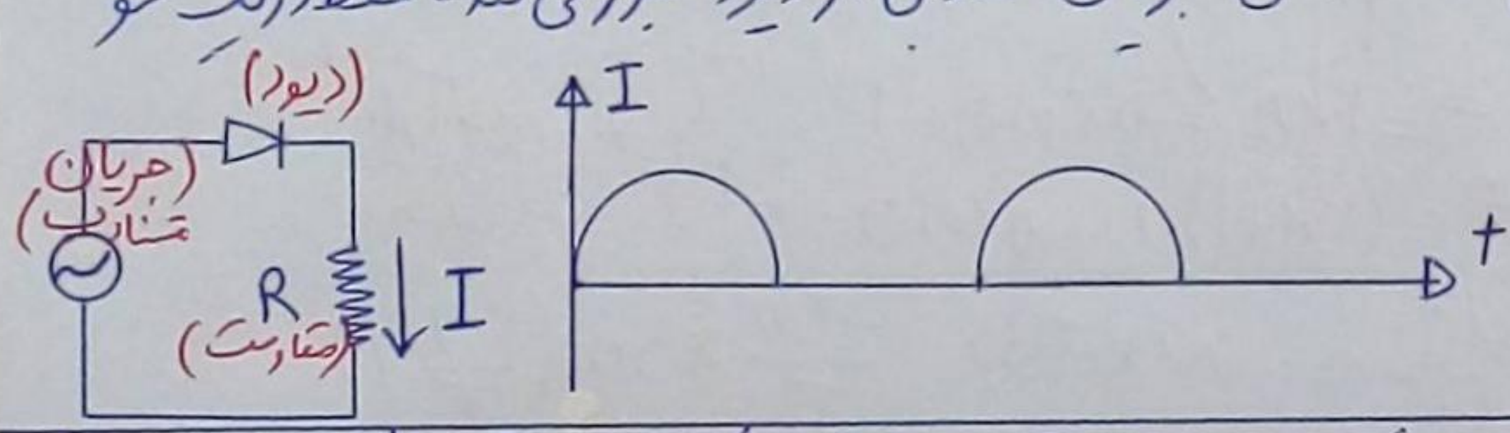
۱) صفر، صفر ۲) صفر، $200\sqrt{2}$ ۳) $200\sqrt{2}$، $400\sqrt{2}$ ۴) $200\sqrt{2}$، صفر (جواب: گزینه ۴)

مثال: در لحظه‌ای که شار مغناطیسی عبوری از مولد جریان متناوب $\frac{1}{2}$ برابر مقدار بیشینه شار مغناطیسی باشد، بزرگی نیروی محرکه القایی چند برابر مقدار نیروی محرکه القایی بیشینه است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (جواب: گزینه ۴)

---

* دیود یکسو کننده جریان است، یعنی جریان را در یک جهت از خود عبور می‌دهد و در یک جهت دیگر مانع عبور جریان می‌شود. به همین علت وقتی جریان متناوبی از دیود عبور می‌کند، فقط از یک سو جریان از آن عبور خواهد کرد.



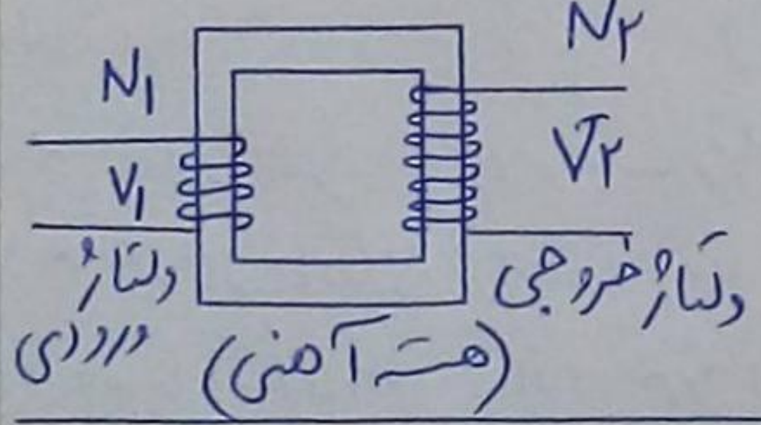
---

* مهمترین مزیت جریان متناوب (AC) به جریان مستقیم (DC)، امکان انتقال و یا کاهش ولتاژ است. در انتقال برق از ولتاژهای بسیار بالا استفاده می‌کنند تا جریان در کابل‌های انتقال کاهش یابد و اتلاف انرژی در هنگام انتقال برق به کمترین مقدار ممکن برسد. هنگام انتقال برق به منازل سکونی ولتاژ را به حدود 220V می‌رسانند. برای تغییر ولتاژ برق از مبدل‌ها استفاده می‌کنند.

مبدل از دو سیم‌پیچ با تعداد دورهای متفاوت تشکیل شده است. هسته سیم‌پیچ‌ها از جنس آهن (فرومغناطیس نرم) می‌باشد و سیم‌ها دارای پوشش عایق هستند.

V_1 و V_2: بیشینه نیروی محرکه القایی (یا حالت‌های ولتاژ ورودی و خروجی)

$$\left(\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}\right)$$



Scanned by TapScanner

حرکت بر خط راست

⊛ بردار مکان مشخص کننده مکان جسم در یک لحظه است و در مورد حرکت جسم اطلاعاتی مشخص نمی کند

* بردار مکان: برداری که ابتدای آن مبدا محور ($x=0$) و انتهای آن مکان جسم است

~~⊛ می تواند یک بعدی، دو بعدی یا سه بعدی باشد~~ ~~⊛ حرکت پرتابه‌ای نیز است~~

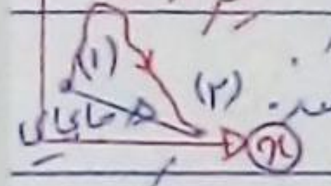
* بردار جابه‌جایی: پاره خط جهت داری است که مکان آغازین جسم را به مکان پایانی آن وصل می کند

بردار مکان آغازین: $\vec{d_1}$، بردار مکان پایانی $\vec{d_2}$، بردار جابجایی: $\vec{d}$ ، $(*\ \vec{d} = \vec{d_2} - \vec{d_1})$

* اگر مبدا محور تغییر کند، بردار مکان جسم تغییر می کند اما بردار جابجایی تغییر نمی کند

* جابجایی کمیتی برداری است و مقدار آن فقط به مکان آغازین و پایانی جسم بستگی دارد. اما مسافت پیموده شده کمیتی عددی است و به شکل مسیر پیموده شده بستگی دارد. * مقدار جابه‌جایی همواره کوچکتر یا مساوی با مسافت پیموده شده است.

* اگر متحرک بر مسیر مستقیم حرکت کند و جهت آن تغییر نکند، جابجایی و مسافت پیموده شده توسط آن با هم برابر است. (* اگر متحرک در انتها به نقطه اولیه بازگردد جابجایی آن صفر است)



* حرکت پدیده‌ای نسبی است، در این صورت اگر مبدا محور تغییر کند، مسیر حرکت نیز تغییر می کند.

مثال: متحرکی روی محیط دایره‌ای به شعاع R به اندازه 90° می چرخد. مسافت پیموده شده توسط متحرک چند برابر جابجایی است؟

۱) $\frac{\pi R}{2}$ ۲) $R\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ (جواب: گزینه ۴)

* منظور از ثانیه سوم: $2s \le t \le 3s$ * منظور از دو ثانیه سوم: $4s \le t \le 6s$

~~(* اما می توان برای دو t متفاوت xهای یکسان داشت)~~

* در معادله حرکت $(t-x)$، مکان تابعی از زمان است. یعنی در این رابطه می توان لحظه‌ای را مشخص کرد که در آن جسم در دو مکان متفاوت باشد. اما مسیر حرکت جسم الزاما یک تابع نیست. $(x-y)$

~~* رسم خط موازی محور yها $(x=k)$~~

* با استفاده از معادله مکان - زمان در هر لحظه می توان مکان جسم را مشخص کرد، $(\text{جابجایی} = x(t_2) - x(t_1))$

مثال: معادله مکان - زمان حرکت جسمی در SI به صورت $x(t) = 3t^3 - 21t + 36$ است. این جسم دوبار از مبدا محور عبور می کند. مدت زمان بین این دو عبور چند ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷ (جواب: گزینه ۱)

مثال: معادله مکان - زمان دو متحرک A و B که در لحظه $t=0$ شروع به حرکت کرده‌اند، به صورت $x_A = 10t + 2$ ، $x_B = 4t + 8$ است. این دو متحرک .....

۱) یک بار به هم می رسند ۲) دو بار به هم می رسند ۳) از یک محل شروع به حرکت می کنند

۴) به هم نمی رسند (جواب: گزینه ۱)

* برای آن که دو متحرک به هم برسند، باید در یک زمان (t) در یک مکان (x) قرار داشته باشند.

Scanned by TapScanner

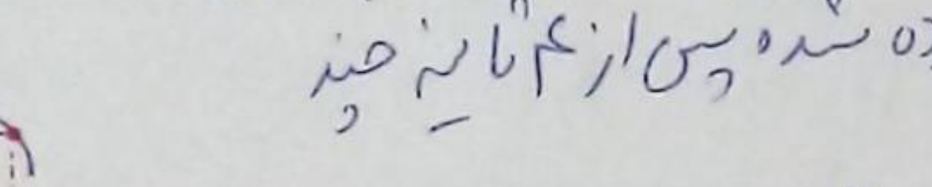
حرکت بر خط راست

* سنت جابه‌جایی انجام شده به مدت زمان انجام جابه‌جایی را سرعت متوسط می‌گوییم. (کمیت برداری)

~~(سرعت متوسط)~~ (* سرعت لحظه‌ای، شیب خط مماس) $\Delta t \to 0$

$1(km/h) = 3/6 (m/s)$ *

* اگر جسم طوری حرکت کند که نقطه شروع و پایان حرکت یکسان باشد، سرعت متوسط جسم در این حرکت صفر است.



(* نمودار مکان - زمان، شکل مسیر را مشخص نمی‌کند)

* سنت مسافت پیموده شده به مدت زمان انجام آن را تندی متوسط می‌گوییم. (کمیت نرده‌ای)

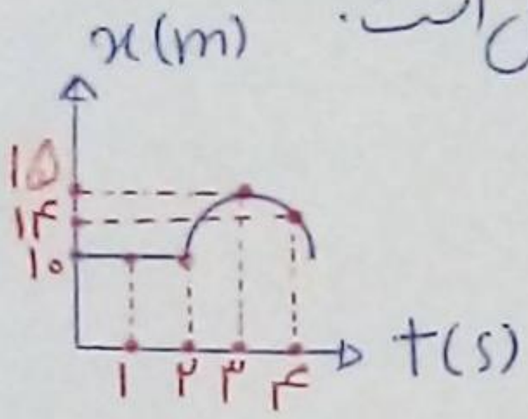
(تندی لحظه‌ای) $\Delta t \to 0$ * ~~سرعت~~ سرعت سنج خودرو

* هنگامی اندازه سرعت متوسط با تندی متوسط آن برابر است که جهت حرکت جسم تغییر نکند

مثال: جسمی روی دایره‌ای به شعاع ۲ در حال حرکت است. اگر جسم زاویه‌ای را به اندازه‌ی 300° طی کند، تندی متوسط آن در این مسیر چند برابر سرعت متوسط است؟ ($\pi = 3$)

۱) $2/4$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $2/5$ ۴) ۵ (جواب: گزینه ۴)

مثال: نمودار مکان - زمان متحرکی که در حال حرکت بر محور افقی می‌باشد، مطابق شکل است. جابه‌جایی انجام شده در ثانیه سوم و مسافت پیموده شده پس از ۴ ثانیه چند متر است؟



(جواب: گزینه ۱) $(2s < t < 3s)$

۱) $+5, +6$ ۲) $+6, +4$

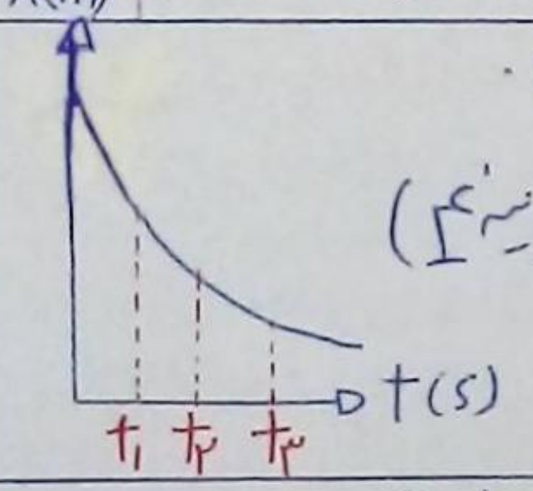
۳) $-5, -6$ ۴) $-6, -4$

---

* شیب خط واصل بین دو نقطه روی نمودار مکان - زمان با سرعت متوسط برابر است. $(\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$

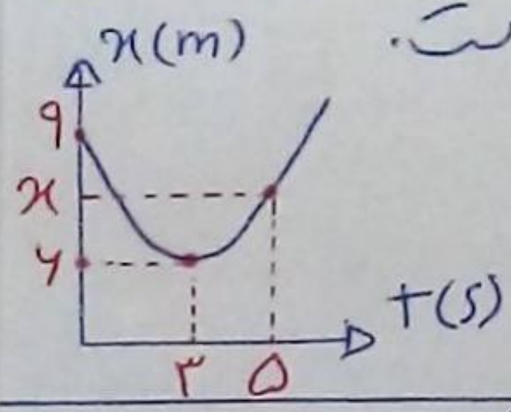
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$، تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور ایجاد می‌کند (واحد روی محورها یکسان باشد)

مثال: نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی محور افقی حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اندازه سرعت متوسط متحرک در کدام بازه زمانی بیشتر است؟ (جواب: گزینه ۴)



۱) $t_3 - t_2$ ۲) $0 - t_3$ ۳) $t_2 - t_1$ ۴) $0 - t_1$

مثال: نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی محور افقی حرکت می‌کند، مطابق شکل است. سرعت متوسط متحرک در مدت زمانی که در جهت منفی محور حرکت می‌کند چند متر بر ثانیه است؟



۱) $+1$ ۲) -2 ۳) $+2$ ۴) -1 (جواب: گزینه ۴)

---

* به تعداد برخوردهای انجام شده متحرک با محور زمان، جسم از مبدا محور ($x=0$) عبور کرده است. * شیب خط بین دو نقطه مثبت ← جابه‌جایی در جهت مثبت محور x (در نمودار $t - x$)

* شیب خط بین دو نقطه منفی ← جابه‌جایی در جهت منفی محور x (در نمودار $t - x$)

Scanned by TapScanner

* سرعت لحظه‌ای همواره بر مسیر حرکت جسم مماس و در جهت حرکت آن است.
* در جهتی که علامت سرعت همیشه مثبت باشد، جسم در جهت مثبت محور حرکت می‌کند و در جهتی که علامت سرعت همیشه منفی باشد، جسم در جهت منفی محور حرکت می‌کند. بنابراین اگر علامت سرعت متحرکی تغییر کند الزاماً در یک لحظه بایستد سرعت آن صفر شود.

* شیب خط مماس بر یک نقطه روی منحنی مکان - زمان با سرعت لحظه‌ای برابر است.

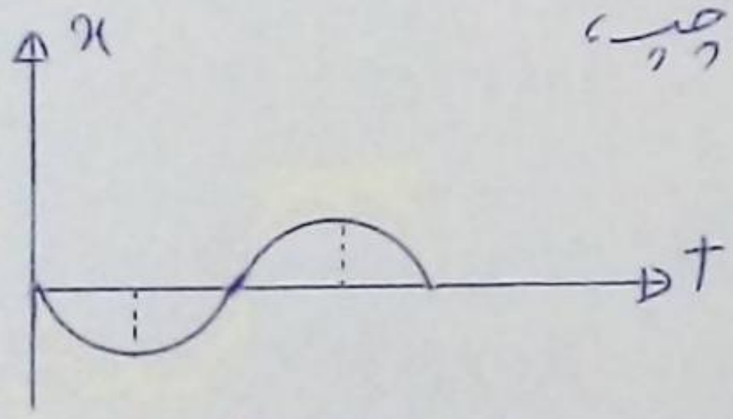
* اگر مقدار شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در حال افزایش باشد، حرکت را تندشونده می‌گویند ($a>0$ ، $a<0$ ⊛) ($a \times v > 0$) سرعت و شتاب هم علامت هستند
* اگر مقدار شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در حال کاهش باشد، حرکت را کندشونده می‌گویند ($a>0$)
(* علامت a: جهت تغییر (نمودار $x-t$)) ($a \times v < 0$) سرعت و شتاب مخالف علامت هستند

* برای تغییر جهت حرکت جسم، علامت سرعت آن باید الزاماً تغییر کند ← الزاماً در یک لحظه باید سرعت آن صفر شود. (شیب نمودار مکان - زمان)

* اگر نمودار مکان - زمان به صورت خط راست باشد (شیب ثابت باشد)، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط برابر است.

* در لحظه‌ای که متحرک بر مسیر مستقیم در بیشترین فاصله‌ست به مبدا محور قرار می‌گیرد، سرعت جسم برابر صفر است. (مثال: پرتاب گوی به بالا)

مثال: نمودار مکان - زمان جسمی مطابق شکل است. به ترتیب از راست به چپ، چند بار تندی صفر شده و چند بار سرعت حرکت جسم تغییر کرده است؟

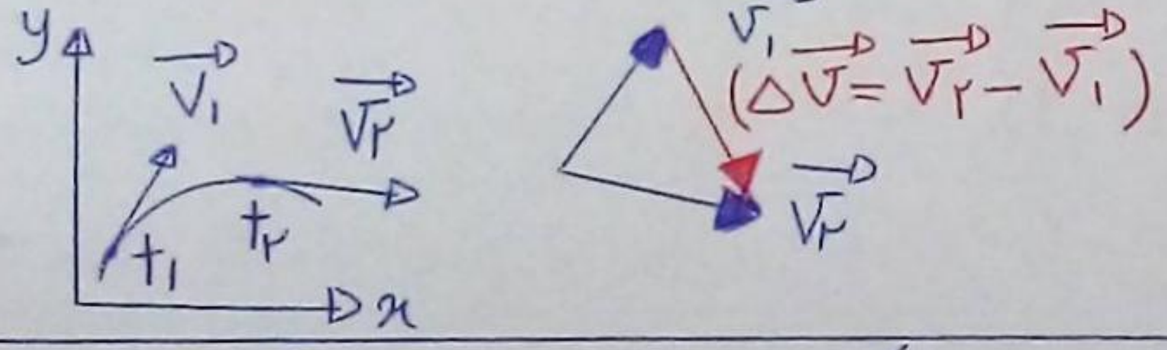


۱) ۱، ۱ ۲) ۲، ۲ ۳) ۱، ۲ ۴) ۱، ۲

(جواب: گزینه ۲)

* سنت تغییر بردار سرعت به مدت زمان انجام تغییرات را شتاب متوسط می‌گویند $\left(\vec{a}=\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right)$، (m/s^2)

* تغییرات بردار سرعت می‌تواند به صورت تغییر در اندازه و یا جهت بردار سرعت باشد.



مثال: خودرویی بر مسیر مستقیم و با سرعت $72 km/h$ در حال حرکت است. در مدت ۵ ثانیه، سرعت اتومبیل به $5 m/s$ در خلاف جهت اولیه می‌رسد؛ شتاب متوسط خودرو در این مدت چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) $+5$ ۲) -3 ۳) -5 ۴) $+3$ (جواب: گزینه ۳)

Scanned by TapScanner

مثال: معادله سرعت - زمان جسمی در SI به صورت $v = t^2 - 16t + 16$ است. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد حرکت جسم درست است؟

۱) جهت حرکت جسم تغییر می‌کند. ۲) جسم همواره در جهت مثبت محور حرکت کرده است.

۳) جسم همواره در جهت منفی محور حرکت کرده است. ۴) مسیر حرکت جسم سهمی است.

(جواب گزینه ۲)

مثال: معادله سرعت - زمان حرکت جسمی در SI به صورت $v = t^2 + t$ است. در ثانیه دوم حرکت، شتاب متوسط جسم چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۴)

---

* شتاب متوسط کمیتی برداری بوده و همواره در جهت بردار تغییرات سرعت است.
* اگر جسم از حالت سکون شروع به حرکت کند، شتاب متوسط در جهت بردار سرعت جسم یا همان جهت حرکت جسم قرار می‌گیرد.

مثال: توپی را با تندی $10\ m/s$ به طور قائم به سطح زمین می‌زنیم، به طوری که با همان تندی در همان راستا برمی‌گردد. اگر مدت زمان تماس توپ با زمین ۰/۲ ثانیه باشد، شتاب متوسط چه مقدار و در چه جهتی است؟ (نیروهای مقاوم ناچیز است.)

۱) ۱۰۰، رو به پایین ۲) ۱۰، رو به پایین ۳) ۱۰۰، رو به بالا ۴) صفر (جواب: گزینه ۳)

مثال: معادله سرعت - زمان اتومبیلی روی خط مستقیم در SI به صورت $v = -t^2 - 4t$ است. نوع حرکت اتومبیل پس از شروع حرکت چگونه است؟

۱) تندشونده ۲) کندشونده ۳) ابتدا تندشونده، پس کندشونده ۴) ابتدا کندشونده، پس تندشونده

(جواب: گزینه ۱)

---

* اگر حرکت به صورت کندشونده انجام شود، الزاماً جسم باید دارای سرعت اولیه باشد ولی حرکت تندشونده می‌تواند بدون سرعت اولیه (از حالت سکون) نیز انجام شود.

---

* شیب خط واصل بین دو نقطه روی نمودار سرعت - زمان مشخص‌کننده شتاب متوسط است $\left(\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$

---

* شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان مشخص‌کننده شتاب لحظه‌ای است.

---

* به تعداد برخورد‌های نمودار سرعت - زمان با محور زمان، سرعت متحرک برابر صفر می‌شود.

---

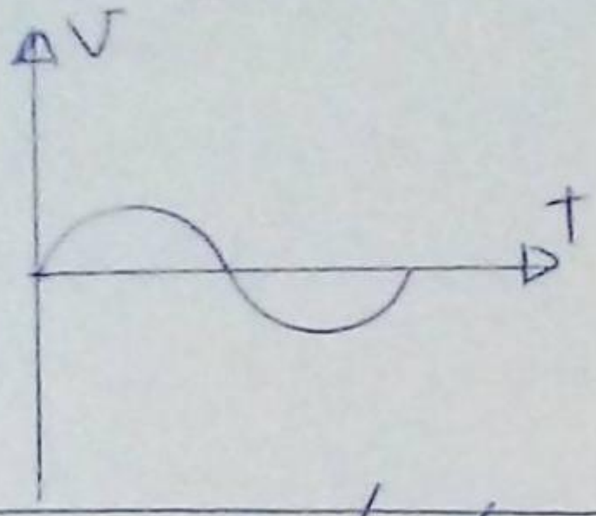
* مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان در صورتی که با علامت در نظر گرفته شود، مشخص‌کننده جابه‌جایی و بدون علامت، مشخص‌کننده مسافت پیموده شده است. $(\Delta x = \bar{v} \times \Delta t)$

(* بالای نمودار مثبت و پایین نمودار منفی)

Scanned by TapScanner

حرکت بر خط راست

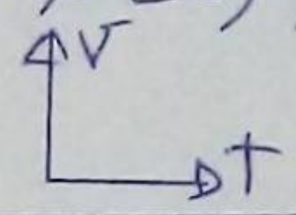
مثال: نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند مطابق شکل است. در این بازه زمانی شتاب حرکت جسم ..... بار صفر شده است و جهت حرکت جسم .... بار تغییر می‌کند



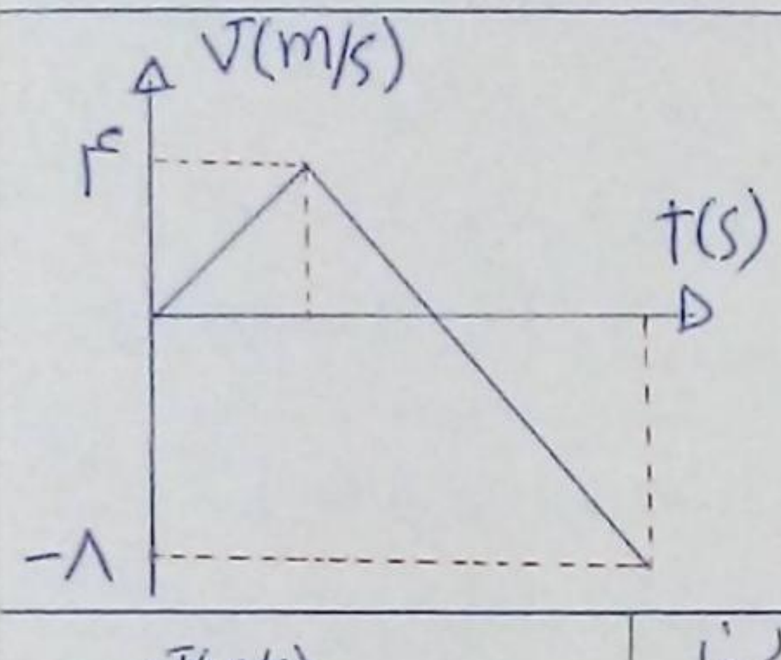
۱) ۳، ۲ ۲) ۲، ۲ ۳) ۱، ۲ ۴) ۱، ۱ (جواب: گزینه ۳)

* اندازه سرعت افزایش ← حرکت تند شونده * اندازه سرعت کاهش ← حرکت کند شونده

* در نمودار سرعت - زمان ← اگر از محور زمان فاصله بگیریم ← تند شونده
← اگر به محور زمان نزدیک شویم ← حرکت کند شونده

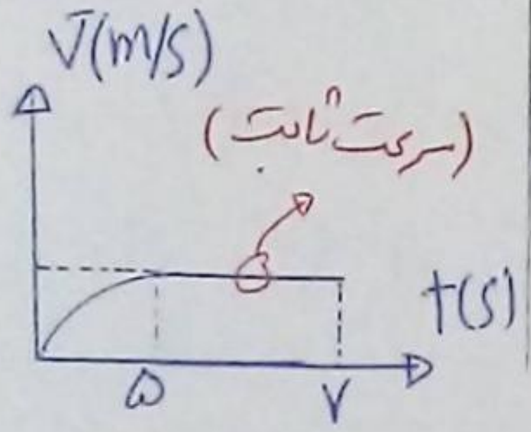


مثال: با توجه به نمودار سرعت - زمان مقابل، مدت زمان حرکت کند شونده چند برابر مدت زمانی است که متحرک در جهت منفی محور حرکت می‌کند؟



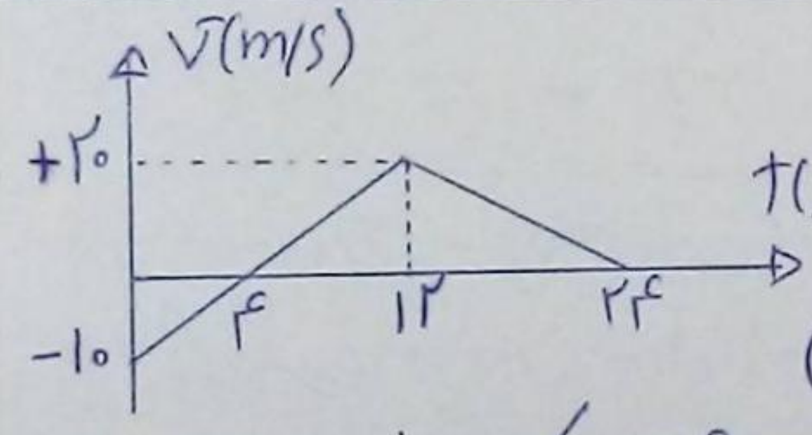
۱) ۲ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$ (جواب: گزینه ۴)

مثال: نمودار سرعت - زمان متحرکی مطابق شکل است. اگر متحرک بین دو لحظه $t_1 = ۵s$, $t_2 = ۷s$ مسافت ۱۸ متر را پیموده باشد، شتاب متوسط آن پس از ۵ ثانیه چند m/s^2 است؟



۱) ۱٫۱۸ ۲) ۴٫۵ ۳) ۳٫۶ ۴) ۰٫۷۲ (جواب: گزینه ۱)

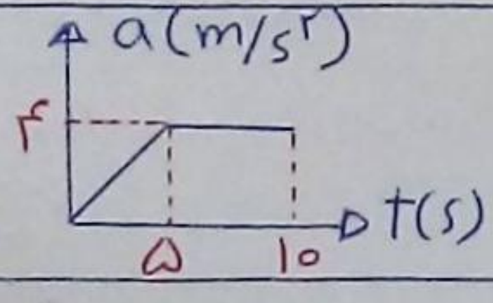
مثال: نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل است. سرعت متوسط متحرک در مدت ۲۴ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۹٫۱۶ ۲) ۱۸٫۲ ۳) ۱۵ ۴) ۷٫۵ (جواب: گزینه ۴)

* مساحت سطح زیر نمودار شتاب - زمان با در نظر گرفتن علامت، مشخص کننده تغییرات سرعت است. ($\bar{a} \times \Delta t = \Delta \vec{V}$) (* بالای نمودار مثبت و پایین نمودار منفی است)

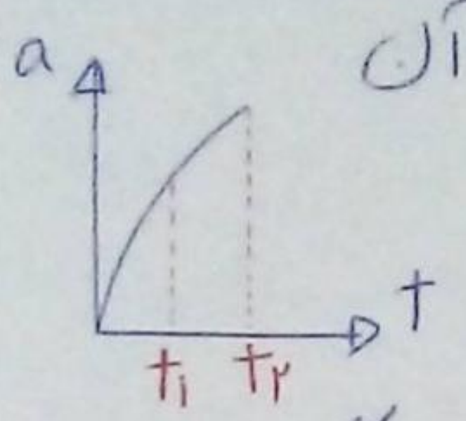
مثال: نمودار شتاب - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط متحرک در مدت ۱۰ ثانیه چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۲ ۲) ۲٫۵ ۳) ۳ ۴) ۶ (جواب: گزینه ۳)

Scanned by TapScanner

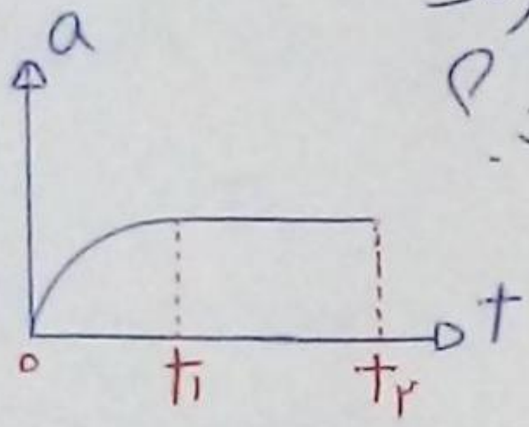
مثال: نمودار شتاب - زمان متحرکی بر مسیر مستقیم مطابق شکل است. در مورد حرکت آن در بازه زمانی t_1 تا t_2 کدام گزینه درست است؟



۱) حرکت التزام کند شونده است.
۲) حرکت التزام کند شونده است
۳) حرکت ممکن است ابتدا تند شونده و سپس کند شونده باشد.
۴) حرکت ممکن است ابتدا کند شونده و سپس تند شونده باشد.

(جواب: گزینه ۴)

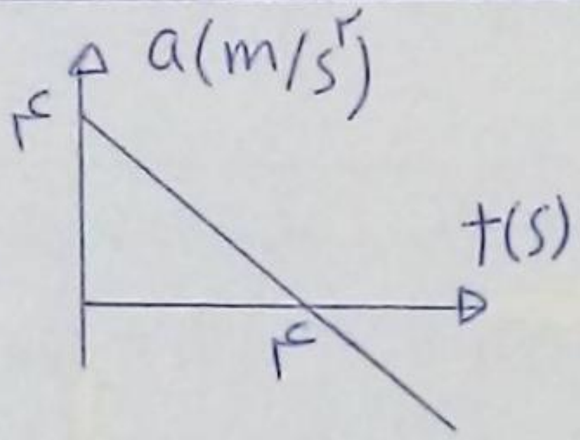
مثال: نمودار شتاب - زمان متحرکی که از حالت سکون روی محور x شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل است. در مورد حرکت متحرک کدام گزینه درست است؟



۱) حرکت روی محور x و همواره در جهت مثبت بوده است.
۲) حرکت ابتدا تند شونده و سپس کند شونده است.
۳) حرکت ابتدا در جهت مثبت محور و سپس در جهت منفی محور است.
۴) حرکت ابتدا کند شونده و سپس تند شونده است.

(جواب: گزینه ۱)

مثال: شکل مقابل نمودار شتاب - زمان متحرکی را که از حالت سکون بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. سرعت متحرک در لحظه $t=6s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۱۰ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۶

(جواب: گزینه ۴)

---

* حرکت با سرعت ثابت * شتاب حرکت برابر صفر است * مقدار جابه‌جایی و مسافت با هم برابرند

حرکت در جهت مثبت ← علامت سرعت مثبت
حرکت در جهت منفی ← علامت سرعت منفی

$\Delta x = V\Delta t$ ، $x_2 = V\Delta t + x_1$

$\underbrace{\Delta x}_{x_2 - x_1}$

مثال: خودروی در جاده مستقیمی با سرعت $80\ km/h$ شروع به حرکت می‌کند. یک ساعت پس از آن خودروی دیگری از همان نقطه با سرعت $100\ km/h$ به دنبال خودروی اول به راه می‌افتد. اگر خودروها دارای حرکت با سرعت ثابت باشند، خودروی دوم چه مدت زمانی پس از آغاز حرکت خودروی اول به آن می‌رسد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۴

(جواب: گزینه ۲)

---

* چند مرحله حرکت با سرعت ثابت

$$\text{سرعت متوسط در کل حرکت} = \frac{\text{جابه‌جایی کل}}{\text{کل زمان}}$$

Scanned by TapScanner

مثال: دو خودرو بر مسیر مستقیم از نقاط B, A به ترتیب با سرعت های 8m/s و 12m/s به سمت هم حرکت می کنند و مقصد هریک مبدا دیگری است. پس از این که دو خودرو از کنار هم عبور می کنند، خودروی اول پس از 15s به نقطه B و خودروی دوم پس از 5s به نقطه A می رسد. طول پاره خط AB چند متر است؟

1) 60 2) 120 3) 180 4) 90 (جواب: گزینه 3)

مثال: خودرویی $\frac{2}{5}$ مدت زمان کل حرکت خود را با سرعت 20 m/s و بقیه مدت را با سرعت 40m/s در خلاف جهت اولیه مسیر خود می پیماید. سرعت متوسط خودرو در کل مسیر چند m/s است؟

1) 16+ 2) 32+ 3) 32- 4) 16- (جواب: گزینه 4)

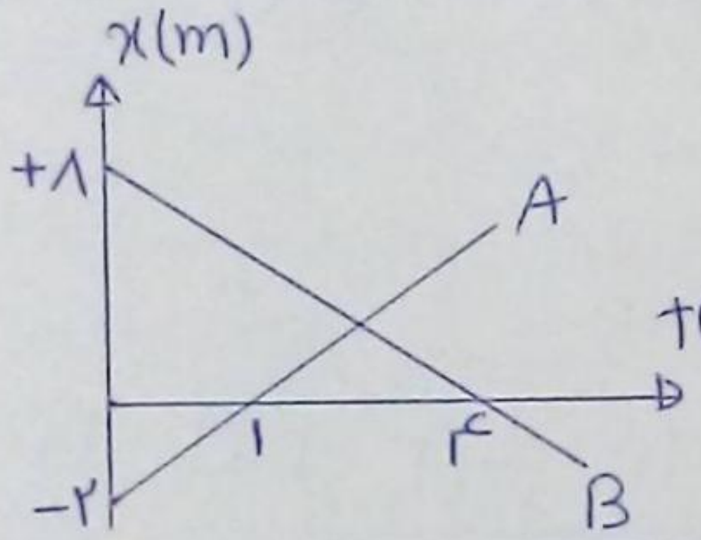
---

* در حرکت با سرعت ثابت، نمودار مکان - زمان به صورت خط راستی با شیب ثابت است.

(* شیب مثبت = سرعت مثبت، شیب منفی = سرعت منفی)

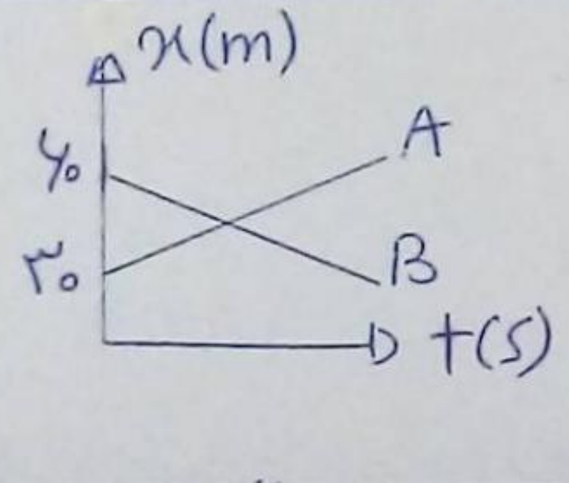
* در حرکت با سرعت ثابت، نمودار سرعت - زمان به صورت خط راستی موازی محور زمان رسم می شود (نمودار ثابت)

مثال: نمودار مکان - زمان دو ذره A و B مطابق شکل است. دو ذره در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه به هم می رسند؟



1) 2/5 2) 2 3) 3 4) 3/5 (جواب: گزینه 1)

مثال: نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در یک لحظه شروع به حرکت کرده اند، مطابق شکل است. چند ثانیه پس از شروع حرکت برای بار دوم، فاصله دو متحرک از یکدیگر 20 متر می شود؟



1) 25 2) 55/3 3) 65/3 4) 20 (جواب: گزینه 1)

---

* برای تعیین سرعت نسبی فرض می کنیم یکی از جسم ها ساکن است و سرعت آن را به دیگری می دهیم.

دو متحرک از یک جهت باشند $\rightarrow V_{نسبی} = |V_1 - V_2|$

دو متحرک خلاف جهت هم باشند $\rightarrow V_{نسبی} = |V_1 + V_2|$

(زمان (Δt) × سرعت نسبی ($V_1 \pm V_2$) = جابه جایی نسبی)

Scanned by TapScanner

مثال: دو قطار به طول های ۲۰۰ متر و ۱۰۰ متر با سرعت های ۱۰m/s و ۵m/s روی دو ریل موازی در حال حرکت هستند. هنگامی که در خلاف جهت یکدیگر حرکت می کنند، در مدت زمان Δt_1 از مقابل هم عبور می کنند و هنگامی که در جهت یکدیگر حرکت می کنند در مدت زمان Δt_2 از مقابل یکدیگر می گذرند. نسبت $\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$ کدام است؟ (ابتدای قطارها در یک نقطه قرار دارند)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) $\frac{1}{8}$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: اتوبوسی دارای حرکت با سرعت ثابت ۲۰m/s است. اگر مسافر درون اتوبوس هم جهت با حرکت آن با سرعت ثابت ۲m/s حرکت کند، تندی مسافر از نظر شخصی که کنار جاده ایستاده چند m/s است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۲ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶ (جواب: گزینه ۳)

مثال: قایقی هنگام حرکت در جهت آب رودخانه مسیر ۱/۵km را در مدت ۲/۵ دقیقه و هنگام برگشت در خلاف جهت آب در مدت ۵ دقیقه می پیماید. سرعت جریان آب رودخانه نسبت به ساحل چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۷ ۲) ۲/۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۷/۵ (جواب: گزینه ۲)

مثال: شخصی روی یک پله برقی ساکن، فاصله بین دو نقطه را در مدت ۱۵ ثانیه طی می کند. اگر پله برقی متحرک باشد، این فاصله را در مدت ۸ ثانیه طی می کند. سرعت پله برقی چند برابر سرعت شخص است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$ (جواب: گزینه ۴)

* حرکت با شتاب ثابت: شتاب متوسط و شتاب لحظه ای یکسان است. $\Delta V = a\Delta t$ ، $V_2 = at + V_1$ ، $\overbrace{V_2 - V_1}^{\Delta V}$

(* سرعت متوسط $\overline{V} = \frac{V_1 + V_2}{2}$) ،

$\Delta x = \overbrace{\left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right)}^{\text{سرعت متوسط}} \times \Delta t$ ، $\overbrace{\Delta x}^{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$ ، $V_2^2 - V_1^2 = 2a\Delta x$

* حرکت تند شونده و کند شونده * صاعد * سقوط آزاد

* جابه جایی انجام شده در ثانیه های متوالی (شتاب ثابت)

* حرکت در جهت ثابت هم (شتاب ثابت)

* تمامی خواص معادله درجه دوم در نمودار $(t - x)$ حرکت با شتاب ثابت برقرار است.

$x_2 = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_1$

* نمودار $t - x$، معادله درجه دوم بر

حب +: $a > 0$ ، حب تقعر: $a < 0$

Scanned by TapScanner

مثال: معادله سرعت - زمان خودرویی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند در SI به صورت $v=2t-10$ است. سرعت متوسط خودرو در دو ثانیه دوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۴- ۴) ۸- (جواب: گزینه ۳)

مثال: گلوله‌ای با سرعت $54\,km/h$ به تنه درختی به ضخامت $40\,cm$ برخورد می‌کند و با سرعت $5\,m/s$ خارج می‌شود. اگر شتاب حرکت گلوله درون درخت ثابت فرض شود، مدت زمان عبور گلوله از درون درخت چند ثانیه است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۰۸ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۴ (جواب: گزینه ۴)

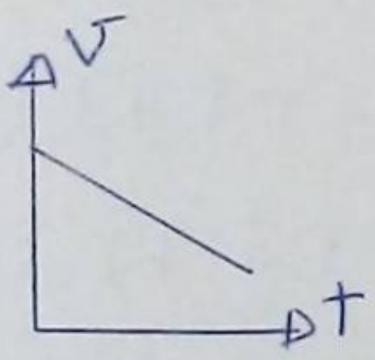
مثال: اتومبیلی با سرعت ثابت $36\,\frac{km}{h}$ در حال حرکت است. اتومبیل دیگری با سرعت ثابت $72\,\frac{km}{h}$ از آن سبقت می‌گیرد. اگر در این لحظه اتومبیل اول با شتاب ثابت بر سرعت خود بیفزاید تا دوباره به اتومبیل دوم برسد، در این هنگام تندی اتومبیل اول چند متر بر ثانیه است؟

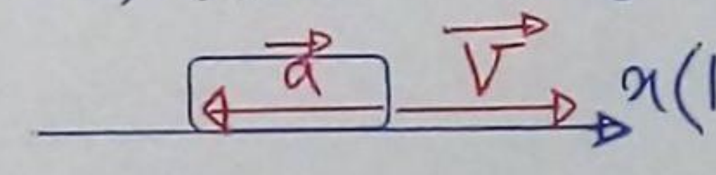
۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰ (جواب: گزینه ۳)

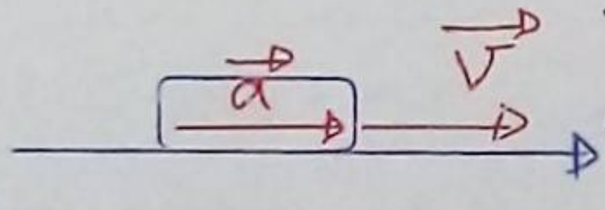
مثال: معادله سرعت زمان در حرکت با شتاب ثابت در SI برای خودرویی به صورت $v=-2t+4$ است. برای چه مدت زمانی حرکت آن کندشونده است؟

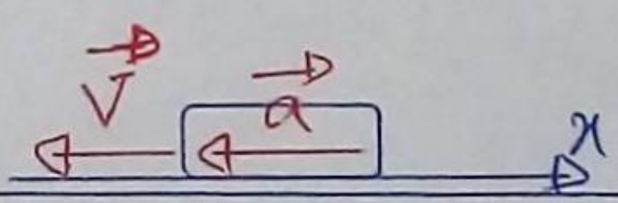
۱) $1\,s$ ۲) $2\,s$ ۳) $3\,s<t<5\,s$ ۴) $2\,s<t<5\,s$ (جواب: گزینه ۲)

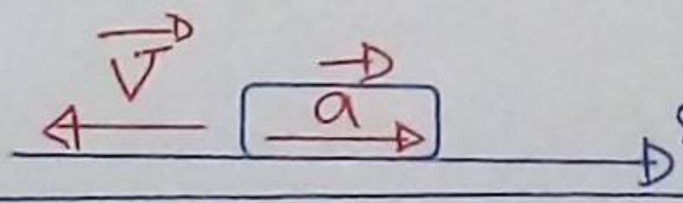
مثال: خودروی در امتداد محور x با شتاب ثابت در حرکت است. اگر نمودار سرعت - زمان خودرو مطابق شکل باشد کدام یک از گزینه‌های زیر شکل حرکت خودرو را درست نشان می‌دهد؟



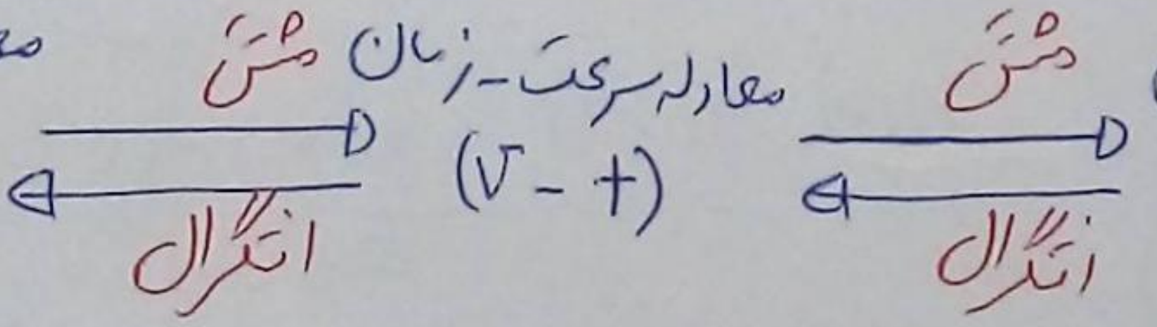
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

(جواب: گزینه ۱)



Scanned by TapScanner

مثال: متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت به حرکت درمی‌آید. اگر سرعت متوسط آن در دو ثانیه اول حرکت ۸ m/s باشد، جابه‌جایی انجام شده در ثانیه اول چند متر است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۴)

مثال: خودروی در حال حرکت روی خط راست با شتاب ثابت $2\,m/s^2$ ترمز کرده و می‌ایستد. این متحرک در دو ثانیه آخر حرکتش چند متر جابه‌جا می‌شود؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۴)

مثال: معادله حرکت جسمی در SI به صورت $x = -t^2 + 5t - 8$ است. مکان جسم در لحظه‌ای که تندی آن به $2\,m/s$ می‌رسد، کدام است؟ (جواب: گزینه ۲)

۱) $x = +2/75\,m$ ۲) $x = -2/75\,m$ ۳) $x = -5\,m$ ۴) $x = +5\,m$

مثال: متحرکی با شتاب ثابت a روی خط راست در حرکت است و در جابه‌جایی Δx تندی حرکت از ۷ به ۲۷ می‌رسد. پس از جابه‌جایی $2\Delta x$ (دیگر) تندی حرکت آن از ۲۷ به چند ۷ می‌رسد؟ (جواب: گزینه ۳)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $2\sqrt{10}$

مثال: جسمی با شتاب ثابت، با سرعت اولیه $4\,m/s$ از مکان $x_0 = +3\,m$ در جهت مثبت محور به حرکت درمی‌آید. اگر تندی آن در مکان $x = +12\,m$ برابر $5\,m/s$ باشد، معادله حرکت آن در SI کدام است؟ (جواب: گزینه ۱)

۱) $x = \frac{1}{4}t^2 + 4t + 3$ ۲) $x = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 3$ ۳) $x = t^2 + 4t + 3$ ۴) $2t^2 + 4t + 3$

مثال: خودروی با سرعت ثابت $15\,m/s$ در حال حرکت بر جاده مستقیمی است. در یک لحظه راننده مانعی را مشاهده کرده و تصمیم به ترمز می‌گیرد. اگر خودرو پس از مدت $0/25$ ثانیه از لحظه مشاهده مانع متوقف شود و شتاب ترمز خودرو ثابت و برابر $2\,m/s^2$ باشد، زمان واکنش راننده چند ثانیه است؟ (جواب: گزینه ۳)

۱) ۷/۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱/۵

مثال: نشان دهید در حرکت با شتاب ثابت $\Delta x = \frac{1}{2}a(2n-1) + v_0$

Δx: جابه‌جایی انجام شده در ثانیه n ام (a: شتاب ثابت و v_0: سرعت اولیه)

Scanned by TapScanner

* در حرکت با شتاب ثابت، در صورتی که جسم از حال سکون ($V_0 = 0$) شروع به حرکت کند، جابه جایی های انجام شده در ثانیه های متوالی حرکت، مضرب فردی از نصف شتاب است.

* در حرکت با شتاب ثابت اختلاف مسافت های پیموده شده در ثانیه های متوالی با شتاب حرکت برابر است. $\left(\Delta x_{(n)} - \Delta x_{(n-1)} = a\right)$ * سقوط آزاد

مثال: متحرکی با شتاب ثابت و سرعت اولیه V_0 در دو ثانیه اول حرکت خود، ۲۶ متر و در دو ثانیه سوم حرکت خود ۵۰ متر جابه جا می شود، شتاب حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟

(جواب: گزینه ۳)

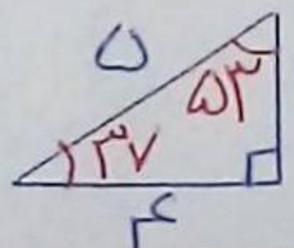
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

مثال: دو خودروی A و B از فاصله ۸۴ متری یکدیگر در یک لحظه یکی با سرعت اولیه ۶ m/s، شتاب ۶ m/s² تند شونده و دیگری با سرعت اولیه ۱۰ m/s و شتاب ۲ m/s² تند شونده به سمت هم شروع به حرکت می کنند. تندی خودروی A در لحظه عبور از کنار خودروی B چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۹- ۲) ۸+ ۳) ۱۶+ ۴) ۹/۵- (جواب: گزینه ۳)

مثال: خودروی با شتاب ثابت ۰/۸ m/s² در مسیر مستقیم شروع به حرکت می کند. ۳۰ ثانیه بعد مرتکب سواری با شتاب ثابت a از همان محل شروع به حرکت کرده و بعد از پیمودن مسافت ۱km به خودرو می رسد. شتاب a چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ (جواب: گزینه ۳)

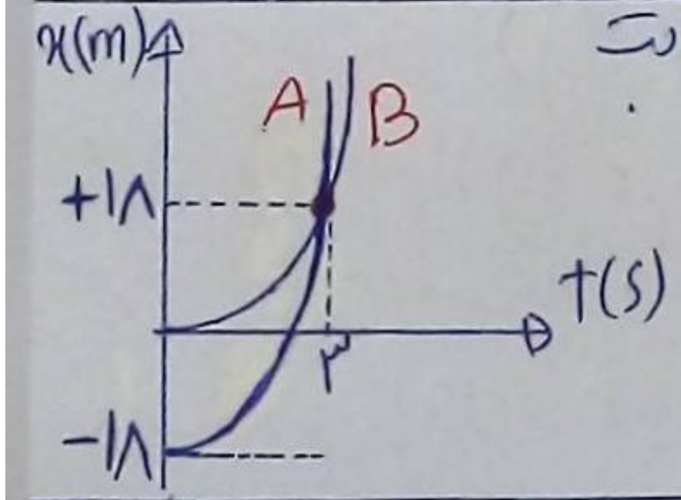


$\sin ۳۷^\circ = \frac{۳}{۵}$ ، $\tan ۳۷^\circ = \frac{۳}{۴}$

$\sin ۵۳^\circ = \frac{۴}{۵}$ ، $\tan ۵۳^\circ = \frac{۴}{۳}$

$۳۷ + ۵۳ = ۹۰$ ، ... متمم یکدیگرند

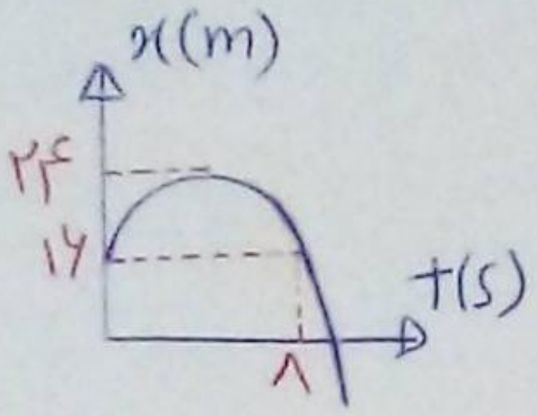
مثال: نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که از حالت سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می کنند، مطابق شکل است. در لحظه $t = ۱۰\,s$ متحرک A چند متر جلوتر از متحرک B قرار دارد؟



۱) ۲۰۰ ۲) ۱۸۲ ۳) ۳۸۲ ۴) ۵۸۲ (جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

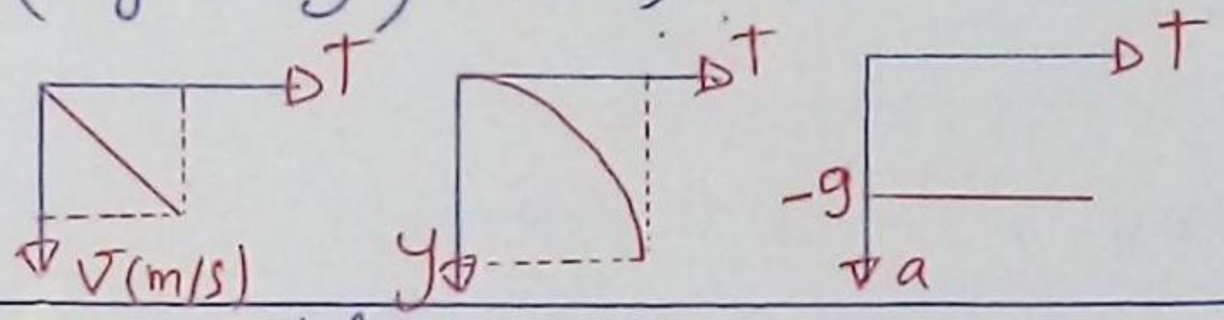
مثال: نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. در لحظه‌ای که متحرک از مبدا محور عبور می‌کند، تندی آن چند متر بر ثانیه است؟



۱) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۱۶\sqrt{۳}$ (جواب گزینه ۲)

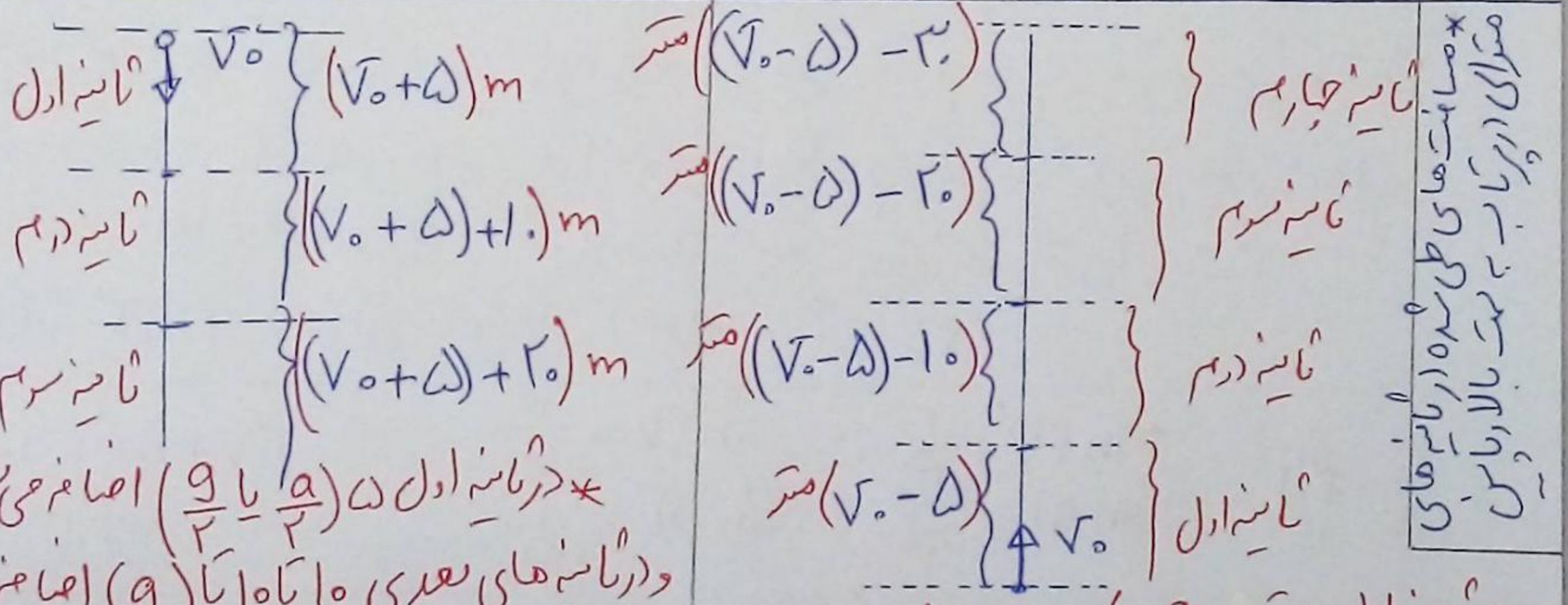
(حرکت با شتاب ثابت ۱ بعدی)

* سقوط آزاد * اگر جسمی فقط تحت تاثیر نیروی وزن خود حرکت کند نیروی مقاومت هوا بر آن اثر نکند، جرم، حجم، اندازه و شکل جسم تاثیری در حرکت آن ندارد. شتاب حرکت با شتاب گرانش برابر است. ($a_y = -g$) * جهت قراردادی مثبت به جهت بالا (می‌توان جهت قراردادی مثبت را به جهت پایین در نظر گرفت)



مثال: جسمی از بالای یک ساختمان و در شرایط خلا رها می‌شود تا به سطح زمین برخورد کند. اگر در دو ثانیه آخر حرکت خود ۸۰ متر جابه‌جا شده باشد، ارتفاع محل رها شدن چند متر است؟ ($g = ۱۰ m/s^۲$)

۱) ۲۵ ۲) ۱۲۵ ۳) ۴۵ ۴) ۲۰۵ (جواب: گزینه ۲)



* مثال قبل را با استفاده از نکته فوق حل کنید.

Scanned by TapScanner

مثال: از ارتفاع H بالای سطح زمین و در شرایط خلا قطعه سنگ های کوچکی با فاصله زمانی یکسان رها می شوند. هنگامی که سنگ اول به سطح زمین می رسد، سنگ پنجم رها می شود. فاصله میان سنگ چهارم و سوم کدام است؟ ($g=10 m/s^2$)

۱) $\frac{H}{4}$ ۲) $\frac{5H}{16}$ ۳) $\frac{3H}{16}$ ۴) $\frac{3H}{4}$ (جواب: گزینه ۳)

مثال: سنگ کوچکی از لبه یک پشت بام در شرایط خلا رها شده و به سمت پایین حرکت می کند. این سنگ در مدت 0/5 s از بالای پنجره ای به ارتفاع 2/75 متر به پایین آن می رسد. فاصله بالای پنجره از لبه پشت بام چند متر است؟ ($g=10 m/s^2$)

۱) 5 ۲) 2/5 ۳) 10 ۴) 1/25 (جواب: گزینه ۴)

مثال: در شرایط خلا گلوله ای از بالای پل روی سطح آب (دریاچه ای ساکن) رها می شود. ۴ ثانیه پس از برخورد گلوله به سطح آب، به عمق ۴ متری آب می رسد. اگر سرعت گلوله از لحظه برخورد به سطح آب تا عمق ۴ متری ثابت باشد، سرعت متوسط گلوله از لحظه رها شدن تا رسیدن به عمق ۴ متری چند متر بر ثانیه است؟ ($g=10 m/s^2$)

۱) 0/6 ۲) 6/1 ۳) 5/5 ۴) 9/4 (جواب: گزینه ۳)

دینامیک و حرکت دایره ای

($F=ma$ ⊛ $kg.m/s^2 = (N)$)

---

* اثر (برهم کنش) دو جسم از راه دور یا تردیک بر یکدیگر را نیرو می نامند، که یک بردار (SI) نیوتن است.

---

* نیروهای تماسی: از راه تردیک (تماس مستقیم) بین دو جسم اثر می کنند.
نیروی اصطکاک، نیروی کشش طناب، نیروی فنر

---

* نیروهای میدانی: از راه دور (بدون تماس مستقیم) بین دو جسم اثر می کنند.
نیروی الکتریکی بین دو ذره باردار، نیروی مغناطیسی بین دو آهنربا یا نیروی گرانشی بین دو سیاره

---

* پس از پرتاب اجسام و با فرض ناچیز بودن نیروی مقاومت هوا، تنها نیروی موثر بر حرکت جسم، نیروی وزن است. (mg)

---

* اثرهای نیرو: تبدیل سکون به حرکت، تبدیل حرکت به سکون، تغییر سیر حرکت جسم، تغییر شکل جسم

* فرض می کنیم تمام جرم جسم در مرکز جرم (مرکز ثقل) جسم متمرکز شده است.

---

* جسم در حالت تعادل: $\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$، برآیند نیروها برابر صفر باشد.

Scanned by TapScanner

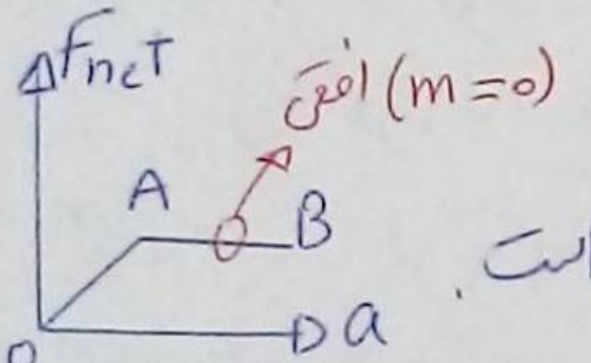
* قانون اول نیوتون (لختی) : یک جسم حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را بر روی خط راست حفظ می‌کند ، مگر آن که نیروی خالص غیر صفری بر آن وارد شود .
* اگر جسمی در حالت سکون لحظه‌ای باشد قانون اول نیوتون در مورد حرکت آن برقرار نیست .
* با افزایش (کاهش) جرم ، تمایل جسم به حفظ حالت اولیه (خود افزایش (کاهش) می‌یابد .

* در حرکت یکنواخت بر مسیر صخی ، قانون اول نیوتون برقرار نیست .
* هنگام بررسی خاصیت لختی در اجسام ، هیچ نیروی خالصی بر آن‌ها اثر نمی‌کند .

* قانون دوم نیوتون : هرگاه بر جسم ، نیروی خالصی وارد شود ، جسم تحت تاثیر آن نیرو شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در جهت نیروی خالص است و با جرم نسبت وارون دارد .

$$* \vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \rightarrow (\sum \vec{F} = m\vec{a})$$

مثال : نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی بر حسب شتاب آن مطابق شکل است . تغییر جرم جسم از O تا B چگونه است ؟



جواب : جرم جسم در مرحله OA ثابت و در مرحله AB در حال کاهش است .

* بردار سرعت اولیه جسمی به جرم ۲ کیلوگرم $\vec{V_0} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ است . در اثر اعمال نیروی خالص $\vec{F_{net}}$ بردار سرعت آن به صورت $\vec{V} = 8\vec{i} + 2\vec{j}$ می‌شود . جهت نیروی وارد بر جسم با محور افقی چه زاویه‌ای تشکیل می‌دهد ؟

۱) صفر ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰° (جواب : گزینه ۲)

مثال : نیروی $\vec{F_{net}} = 20\vec{i} + 20\sqrt{3}\vec{j}$ بر جسم ساکنی به جرم ۲۰kg اثر می‌کند . جسم پس از ۲ ثانیه چند متر و در چه راستایی جابه‌جا می‌شود ؟ (جواب : گزینه ۳)

۱) 4m در راستای ۶۰° نسبت به محور قائم ۲) 2m در راستای ۳۰° نسبت به محور افقی
۳) 4m در راستای ۶۰° نسبت به محور افقی ۴) 2m در راستای ۳۰° نسبت به محور قائم

مثال : چهار نیروی ۳ ، ۵ ، ۷ و ۹ نیوتونی بر جسمی به جرم ۱۰ کیلوگرم اثر کرده و جسم ساکن است . اگر نیروی ۵ نیوتونی حذف شود ، برآیند نیروهای باقی مانده ، چه شتابی به جسم بر حسب m/s^2 می‌دهد ؟ ۱) ۵ ۲) ۵/۰ ۳) ۲/۰ ۴) ۲ (جواب : گزینه ۲)

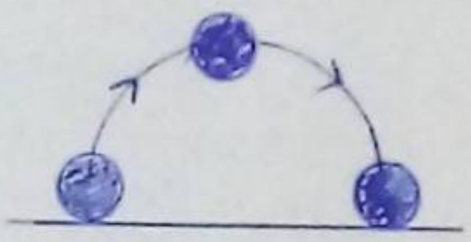
Scanned by TapScanner

* در یک مسیر منحنی (خمیده) اگر تندی حرکت جسم ثابت باشد، بردارهای سرعت و نیرو برهم عمود هستند. مانند حرکت ذره باردار متحرک هنگام عبور از میدان مغناطیسی

مثال: کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (جواب: گزینه ۲)

۱) جسم همواره در جهت نیروی وارد بر آن حرکت می‌کند.
۲) راستای حرکت جسم به شرایط اولیه حرکت بستگی دارد.
۳) اگر نیرو بر راستای حرکت جسم به طور عمود اثر کند، حرکت آن بر مسیر مستقیم است.
۴) گزینه‌های (۱) و (۳) درست است.

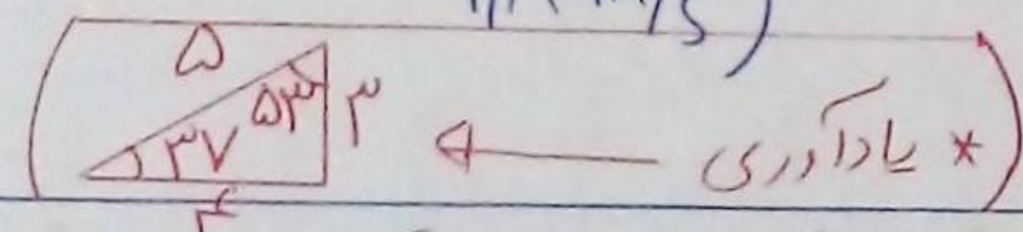
* در نمودار سرعت - زمان، در نقاطی که خط مماس بر نمودار افقی است شتاب حرکت صفر می‌باشد و اگر علامت شیب خط مماس تغییر کند، شتاب تغییر علامت داده و علامت نیروی وارد بر جسم نیز تغییر می‌کند. ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$)



مثال: توپی به جرم ۵۰۰ گرم مطابق شکل از سطح زمین رو به بالا پرتاب می‌شود. در بالاترین نقطه از مسیر حرکت نیروی مقاومت هوا ۶/۵۲ N است. در این لحظه بردار شتاب حرکت توپ چه جهت و مقدار است؟ ($\sin 53^\circ = 0/8$, $g = 9/8\ m/s^2$)

۱) ۳۷ ۲) ۵۳ ۳) ۲۱۷ ۴) ۲۳۳

(جواب: گزینه ۳)



* نیروی اثر متقابل در جسم بر یکدیگر اثر است. یعنی نیروها در طبیعت همواره به صورت زوج نیرو وجود دارند. (* کنش * واکنش)
* قانون سوم نیوتون: اگر نیروی بر جسمی اثر کند، آن جسم بر عامل ایجاد کننده نیرو، نیروی وارد می‌کند که هم اندازه و هم راستا اما در خلاف جهت با نیروی اولیه است.

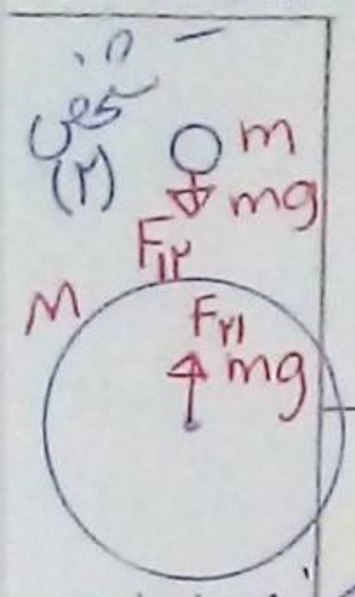
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow |F_{12}| = |F_{21}|$$

* در قانون سوم نیوتون، ماهیت نیروی کنش و واکنش یکسان است. یعنی اگر نیروی کنش میدانی باشد، نیروی واکنش نیز میدانی است.
* نیروهای کنش و واکنش هرگز با هم به وجود می‌آیند و بر دو جسم اثر می‌کنند، به همین علت دارای برآیند نیستند * برآیند نیروها زمانی تعریف می‌شود که نیروها بر یک جسم اثر کنند * عامل ایجاد کننده نیروی وزن، مرکز زمین است.

Scanned by TapScanner

مثال: شخصی روی صندلی خودرو نشسته است. نیروی واکنش وزن این شخص نیروی است که.....

۱) از شخص بر صندلی وارد می‌شود. ۲) از صندلی بر شخص وارد می‌شود.
۳) از شخص بر زمین وارد می‌شود. ۴) از زمین بر شخص وارد می‌شود.
(جواب: گزینه ۳)



* وزن یک جسم برابر با نیروی گرانش است که از طرف زمین بر جسم وارد می‌شود. * جهت نیروی وزن (شتاب گرانش) همواره به طرف مرکز زمین است.

g $\quad$ mg

* بیشترین مقدار شتاب گرانش در سطح زمین و در قطب‌ها است. اگر از سطح زمین رو به بالا و یا رو به پایین (مرکز زمین) حرکت کنیم، این مقدار کاهش می‌یابد.

* وزن یک جسم با تغییر مکان آن (چار تغییرات می‌شود. اما جسم در هر نقطه‌ای مقاومت یکسانی در برابر افزایش یا کاهش سرعت از خود نشان می‌دهد.

نکته: جرم جسم رابطه مستقیم با لختی دارد یعنی در تمامی نقاط جرم جسم یکسان است.

(وزن * جرم * شتاب گرانش) $\quad$ $(mg \quad m \quad g)$

مثال: توپی به شعاع ۱۰ سانتی‌متر و حجمی $29/cm^3$ در سطح ماه قرار دارد. اگر شتاب گرانش در سطح ماه $\frac{1}{6}$ سطح زمین باشد، وزن توپ در سطح ماه تقریباً چند نیوتون است؟ ۱) ۷/۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱/۳ ۴) ۷۸ (جواب: گزینه ۳)

(مساحت دایره: πR^2 | محیط دایره: $2\pi R$)

* (حجم کره $= \frac{4}{3}\pi R^3$ * مساحت کره $= 4\pi R^2$) *

* اگر جسمی درون شاره (مایع یا گاز) حرکت کند، علاوه بر وزن جسم، نیروی دیگری نیز بر آن اثر می‌کند که به آن نیروی مقاومت شاره می‌گوییم. منشا این نیرو برخورد مولکول‌های شاره با جسم است. همواره نیروی مقاومت شاره در خلاف جهت حرکت جسم بر آن اثر می‌کند (نیروی مقاومت هوا)

* عوامل موثر بر نیروی مقاومت شاره: مقاومت شاره با تندی حرکت جسم رابطه مستقیم دارد * با افزایش مساحت سطح جلوی جسم، نیروی مقاومت شاره افزایش می‌یابد

* تندی حدی: در هنگام سقوط آزاد با افزایش تندی حرکت جسم نیروی مقاومت شاره افزایش می‌یابد و با نیروی وزن جسم برابر می‌شود. (نیروی وزن ثابت) (سرعت یکنواخت)

Scanned by TapScanner

* در حرکت برخی اجسام مانند حرکت پر، نیروی مقاومت شاره تاثیر زیادی دارد. چون سطح پر در مقایسه با جرم آن بسیار زیاد است. (پر با تندی زیادی حرکت نمی‌کند تا زمانی که به تندی حدی برسد)

* زمان رسیدن به زمین برای اجسامی که در هوا سقوط می‌کنند، رابطه معکوس با تندی حدی آن‌ها دارد

(* تندی حدی بیشتر ← زمان سقوط کمتر)

جهت (+) قرارداد: جهت مثبت ← جهت بالا

* حرکت رو به بالا ↑ fD نیروی مقاومت شاره

* حرکت رو به پایین ↓ mg نیروی وزن

جسم: جرم m

$a_y = \frac{\Sigma f_y}{m} = \frac{mg - f_D}{m}$ ، $a_y = \frac{-(mg + f_D)}{m}$

$*(a_y = g - \frac{f_D}{m})$

* با در نظر گرفتن نیروی مقاومت هوا (f_D)، با افزایش جرم، شتاب حرکت رو به پایین افزایش می‌یابد.

t_1: لحظه‌ای که جسم به تندی حدی رسیده است.

$mg = f_D$

$a = 0$ (سرعت یکنواخت)

a ثابت

تندی حدی ($a_y = \frac{mg - f_D}{m}$: رو به پایین)

* نمودار تندی - زمان برای جسمی که در هوا سقوط می‌کند به شرط ثابت بودن مقاومت هوا به صورت بالا رسم می‌شود

ثابت $= mg - f_D$ ، (شتاب ثابت)

مثال: توپی به جرم ۲۰۰ گرم از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین رها می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوا در مقابل حرکت توپ ثابت و برابر ۰/۹۶ نیوتون باشد، تندی برخورد توپ با سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 9/8 m/s^2$) ۱) ۱۰ ۲) $10\sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) $5\sqrt{2}$ (جواب: گزینه ۲)

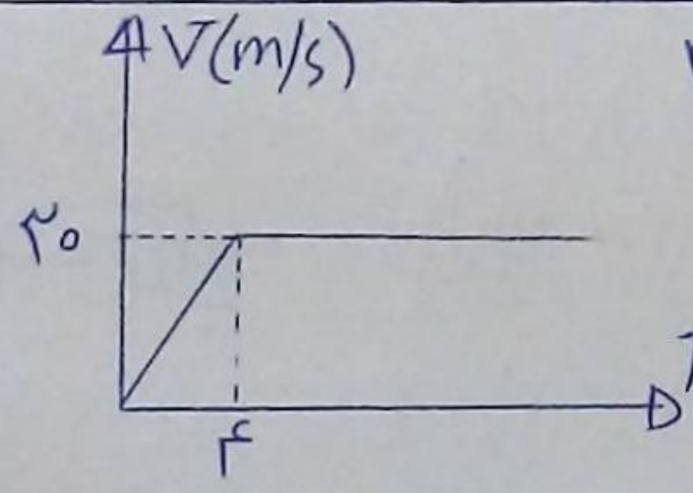
مثال: توپی به جرم ۴۰۰ گرم از سطح زمین با تندی ۲۰ m/s رو به بالا در هوا پرتاب می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوا در مقابل حرکت توپ ثابت و برابر ۰/۸۸ نیوتون باشد، در چه ارتفاعی از سطح زمین بر حسب متر حرکت توپ تغییر جهت می‌کند؟ ($g = 9/8 m/s^2$)

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) $\frac{50}{3}$ ۴) $\frac{100}{3}$ (جواب: گزینه ۳)

مثال: نمودار تندی حرکت برحسب زمان برای جسمی به جرم 2kg هنگام سقوط در هوا مطابق شکل است. اگر نیروی مقاومت هوا بر جسم ثابت باشد، مقدار این نیرو چند نیوتون است؟ ($g = 10 m/s^2$)

۱) ۳۵ ۲) ۴۰ (جواب: گزینه ۴)

۳) ۳۰ ۴) ۵

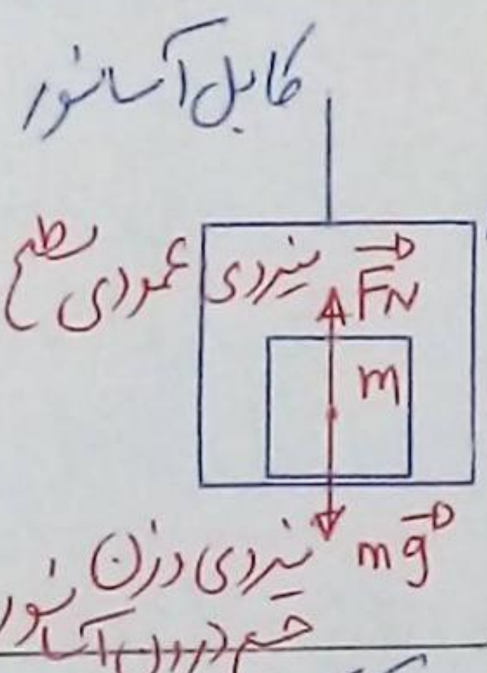


Scanned by TapScanner

* اگر جسمی روی سطح تکیه‌گاهی قرار گیرد، نیروی گرانش بر آن اثر می‌کند. در این حالت از طرف سطح تکیه‌گاه بر جسم نیروی اثر می‌کند که از فرو رفتن جسم در سطح تکیه‌گاه جلوگیری می‌کند. این نیرو را نیروی عمودی سطح (تکیه‌گاه) می‌گویند. نیروی عمودی سطح ناشی از تغییر شکل سطح تماس دو جسم است. عامل این نیرو، نیروی الکتریکی بین اتم‌های جسم و اتم‌های سطح تکیه‌گاه است.

* نیروی عمودی سطح، وا‌کنش نیروی وزن نیست. بلکه وا‌کنش نیروی است که جسم به واسطه نیروی وزن بر سطح تکیه‌گاه وارد می‌کند

* برای بررسی نیروی عمودی سطح به شرط آن که جسم دارای حرکت (در راستای عمود بر سطح تکیه‌گاه نباشد، نیروی خالص وارد بر جسم در راستای عمود بر سطح را برابر صفر در نظر می‌گیریم. * نیروی عمودی تکیه‌گاه زمانی تعریف می‌شود که جسم از سطح تکیه‌گاه جدا نشود. * اگر جسمی روی یک ترازو قرار گیرد، عددی که ترازو نشان می‌دهد همان نیروی عمودی تکیه‌گاه است. (درون آسانسور نیز برقرار است، FN)



* اگر حرکت آسانسور با سرعت ثابت باشد (حرکت رو به بالا یا رو به پایین)
$a=0 \rightarrow \sum F_y=0 \rightarrow F_N=mg$
حرکت یکنواخت، $F_N=mg$

* اگر آسانسور شتاب ثابت رو به بالا داشته باشد ($a\uparrow$)
اگر جهت سرعت رو به بالا باشد ($V\uparrow$): حرکت تند شونده $(a\times V>0)$
اگر جهت سرعت رو به پایین باشد ($V\downarrow$): حرکت کند شونده $(a\times V<0)$

$\sum F_y=ma \rightarrow |a|=\frac{F_N-mg}{m}$ (به سمت بالا) $\xrightarrow{(F_N>mg)}$ $F_N=m(g+a)$

* اگر آسانسور شتاب ثابت رو به پایین داشته باشد ($a\downarrow$)
اگر جهت سرعت رو به بالا ($V\uparrow$) باشد: حرکت کند شونده $(a\times V<0)$
اگر جهت سرعت رو به پایین ($V\downarrow$) باشد: حرکت تند شونده $(a\times V>0)$

$\sum F_y=ma \rightarrow |a|=\frac{mg-F_N}{m}$ (به سمت پایین) $\xrightarrow{(F_N<mg)}$ $F_N=m(g-a)$

* هنگامی که درون آسانسور هستیم انگاری شتاب گرانش را تغییر می‌دهیم: (F_N)
$g \rightarrow g\oplus a$ شتاب رو به بالا
$g \rightarrow g\ominus a$ شتاب رو به پایین

* اگر آسانسور سقوط آزاد کند $(a=g) \rightarrow F_N=0$

* شتاب رو به بالا: $F_N>mg$ * شتاب رو به پایین: $F_N<mg$

Scanned by TapScanner

مثال: جرم اتاقک آسانسوری برابر ۴۰۰ کیلوگرم (kg) است و آسانسور با شتاب ثابت $1 m/s^2$ با حرکت تند شونده رو به پایین در حال حرکت است. نیروی کشش کابل آسانسور چند نیوتن است؟ ۱) ۳۶۰۰ ۲) ۴۴۰۰ ۳) ۸۰۰ ۴) صفر

(جواب: گزینه ۱)

$(F_N = m(g \pm a))$ *

مثال: شخصی به جرم 70kg روی باسکولی درون آسانسور ایستاده و آسانسور با شتاب ثابت $2 m/s^2$ حرکت تند شونده رو به بالا دارد. باسکول وزن شخص را چند نیوتن نشان می دهد؟ $(g = 10 N/kg)$

۱) ۵۶۰ ۲) ۸۴۰ ۳) ۱۴۰۰ ۴) ۷۲۰ (جواب: گزینه ۲)

---

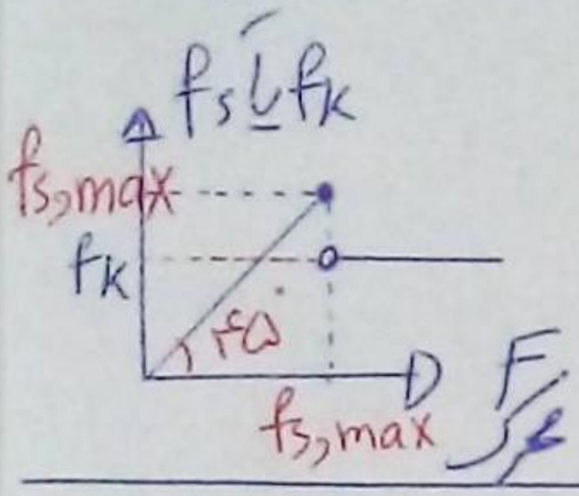
* هرگاه دو جسم که در تماس با یکدیگر قرار دارند بخواهند نسبت به هم بلغزند، در سطح تماس هر جسم به دیگری نیروی وارد می کند که این نیرو مرازی سطح تماس دو جسم است و تمایل دارد از حرکت دو جسم نسبت به هم جلوگیری کند. این نیروی مرازی سطح را نیروی اصطکاک می نامیم. * نیروی اصطکاک در اثر نیروی ربایشی بین مولکول های جسم و سطح به وجود می آید. هنگامی که جسم به طور ساکن روی سطح تکیه گاه قرار دارد، در سطح تماس (همه های از دو جسم که در حد امکان فاصله با مولکول های سطح قرار دارند) بین سطح و جسم پیوندهای دائمی برقرار می شود. در حالی که نیروی بین در جسم به عوامل ① جنس سطح دو جسم ② زبری و نرمی آن ها بستگی دارد.

* نیروی اصطکاک به دلیل وجود ناهمواری های محل تماس در جسم ایجاد می شود. این نیرو عمدتا به عنوان نیروی اتلافی شناخته می شود، اما در زندگی روزمره به آن احتیاج داریم. (قدم زدن، دویدن، حرکت خودرو و ...)

* اگر جسمی در آستانه حرکت قرار داشته باشد، نیروی اصطکاک ایستایی با نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه برابر است.	$f_{s,max} = \mu_s F_N$ * نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه: ضریب اصطکاک ایستایی، نیروی عمودی تکیه گاه
(دو سطح تماس نسبت به هم لغزش ندارند)	جسم در حالت سکون قرار دارد.

Scanned by TapScanner

* ضریب اصطکاک ایستایی به عوامل ① جنس سطح تماس دو جسم ② میزان صافی و زبری سطح تماس بستگی دارد. * در مدت زمانی که جسم ساکن است، همواره با افزایش نیروی محرک، نیروی اصطکاک ایستایی افزایش می یابد.

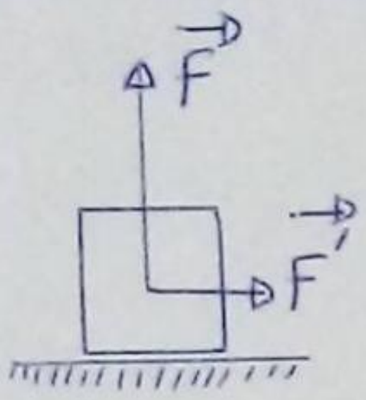


$f_k = \mu_k F_N < f_{s,max} = \mu_s F_N \longrightarrow \mu_k < \mu_s$

(نیروی اصطکاک جنبشی) (نیروی اصطکاک ایستایی)

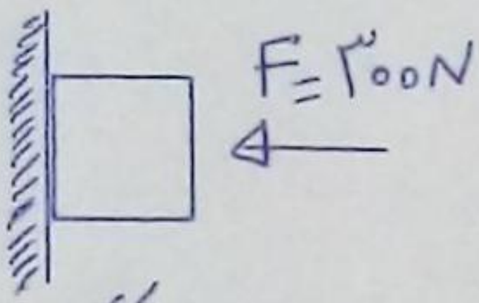
(* نیروی اصطکاک به سطح واقعی تماس بستگی داشته و سطح ظاهری تماس تاثیری در آن ندارد.)

مثال: در نیروی $F=10N$ و $F'=4N$ مطابق شکل، جسمی به وزن ۲۶ نیوتون وارد می شوند. اگر ضریب اصطکاک بین جسم و سطح افقی برابر ۰/۵ باشد، نیروی اصطکاک چند نیوتون است؟



۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۴ ۴) ۸ (جواب: گزینه ۳)

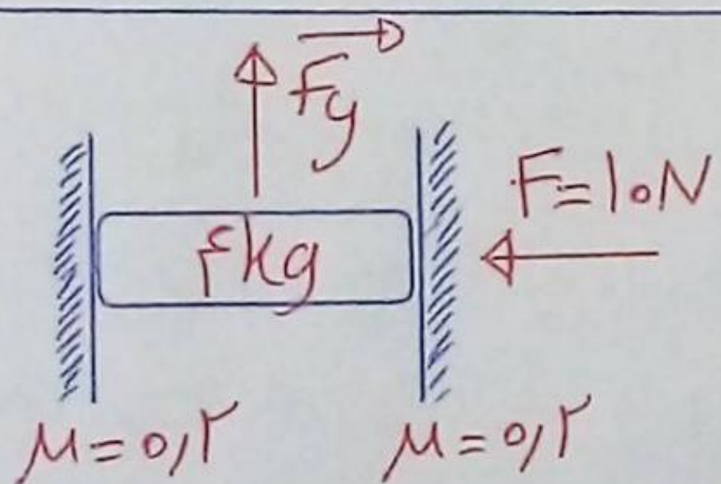
مثال: در شکل مقابل، جسمی به جرم 5kg روی سطح دیوار ساکن است. نیروی اصطکاک و ضریب اصطکاک (μ) کدام گزینه می تواند باشد؟ ($g=10 N/kg$)



۱) $f_s=100N$ ، $\mu=\frac{1}{6}$ ۲) $f_s>100N$ ، μ مشخص نیست. (جواب: گزینه ۲)

۳) $f_s=50N$ ، μ مشخص نیست ۴) $f_s<100N$ ، $\mu=0/4$

مثال: در شکل مقابل اگر جسم در آستانه حرکت باشد، مقدار نیروی F_y برحسب نیوتون کدام است؟ ($g=10 N/kg$)



۱) ۳۶ ۲) ۴۴

۳) ۴۴ یا ۳۶ ۴) ۴۲ یا ۳۶ (جواب: گزینه ۳)

---

* نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) * پس از آن که جسم شروع به حرکت کند مقداری از سطح تماس بین جسم و سطح تکیه‌گاه کاهش یافته و به همین علت نیروی اصطکاک جنبشی از نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه کمتر است. (پیوندهای بین سطح جسم و سطح تکیه‌گاه شکسته شده و نیروهای بین مولکولی موقت در برابر حرکت مقاومت می کنند که مقدار آن‌ها در صدد با افزایش سرعت حرکت ثابت است)

Scanned by TapScanner

* ضریب اصطکاک، عددی بدون واحد است که هر مقدار مثبت حقیقی می تواند باشد و الزامی برای کوچکتر از یک بودن آن وجود ندارد. (* اگر ضریب اصطکاک بزرگتر از یک باشد، راحت تر است به جای آن که جسم را روی سطح حرکت دهیم، آن را بلند کنیم و به نقطه ای دیگر ببریم.)

* اگر یک ملحفه مستطیل را از دو جسم مختلف روی سطح تکیه گاه قرار دهیم، F_N تغییری نکرده (mg)، بنابراین نیروی اصطکاک در همه ی حالت ها یکسان است.

(* μ_s و μ_k به جنس و زبری سطح تماس دارند و به جرم جسم بستگی ندارند.)

ایستایی بیشینه و جنبشی

($f_k = \mu_k F_N$ $\quad f_{s,max} = \mu_s F_N$)

(* مساحت سطح تماس تاثیری در محاسبه نیروی اصطکاک ندارد (تنها F_N برای نیروی اصطکاک اهمیت دارد))

مثال: جسمی به جرم 4kg روی یک سطح افقی قرار دارد. اگر به جسم نیروی افقی ۲۵ نیوتونی وارد شود و $\mu_k = 0/2$، $\mu_s = 0/3$ باشد، شتاب حرکت جسم چند متر بر مربع ثانیه است؟ ($g = 10 N/kg$)

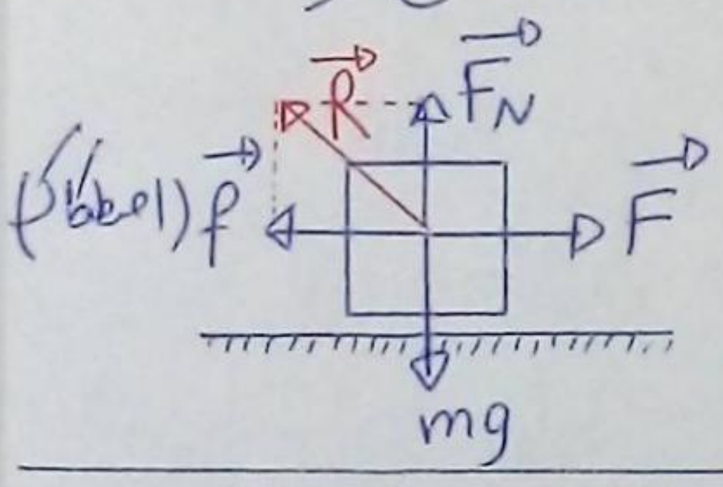
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر (جواب: گزینه ۳)

* نیروی واکنش سطح تکیه گاه ($\vec{R}$): نیرویی است که سطح تکیه گاه بر جسم وارد می کند. نیروهای عمودی سطح و نیروی اصطکاک، مولفه های نیروی واکنش سطح تکیه گاه هستند.

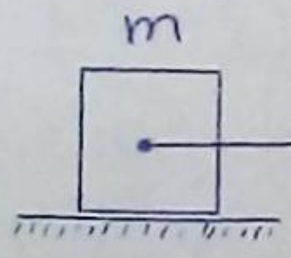
F_N

* اگر جسم ساکن باشد f_s * اگر جسم حرکت کند $f_k = \mu_k F_N$

$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2}$ $\quad R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2}$



مثال: در شکل زیر ضرایب اصطکاک جسم با سطح تکیه گاه برابر ۰/۷ و ۰/۶ است. اگر جرم جسم ۱۰ کیلوگرم باشد، اندازه نیروی که سطح تکیه گاه بر جسم وارد می کند چند نیوتون است؟



۱) $100\sqrt{5}$ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰۰ ۴) $200\sqrt{5}$ (جواب: گزینه ۱)

* نیروی کشش طناب * در راستای طناب * زمانی ایجاد می شود که طناب به طور کامل از دو طرف کشیده باشد * در طنابی که جرم آن ناچیز است، نیروی کشش طناب در همه نقاط یکسان است. * تفاوت فنر و طناب این است که فنر در حالت عمودی نیز می تواند

Scanned by TapScanner

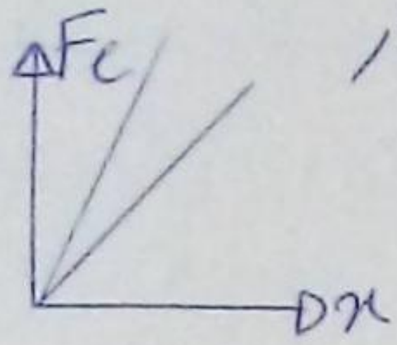
* نیروی کشسانی فنر (قانون هوک) : $F_e = k\,\Delta x$

Δx (تغییر طول فنر) * کاهش طول فنر ← نیروی فشاری * افزایش طول فنر ← نیروی کشش

k (ثابت فنر) * ثابت فنر از مشخصات فنر است و به اندازه، شکل و ساختار ماده‌ای که فنر از آن ساخته شده بستگی دارد (به تغییر طول و نیروی وارده بر آن بستگی ندارد)

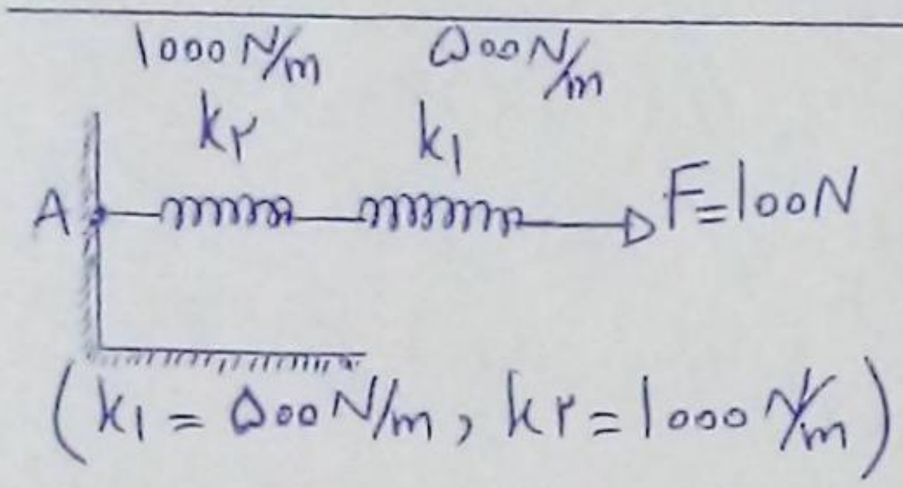
* هرچه فنر سخت‌تر باشد، شیب نمودار بیشتر است یعنی ثابت فنر بیش‌تر است

$$\text{شیب نمودار} = \frac{\Delta F_e}{\Delta x} = k$$



* همانند طناب، فنر بدون جرم را نیز می‌توان با دو نیروی متفاوت از دو طرف کشید (اگر فنر کشیده یا فشرده نشود، نیروی آن صفر است)

مثال: مطابق شکل، نیروی افقی ۱۰۰ نیوتونی به دو فنر با جرم ناچیز k_1 و k_2 اثر می‌کند. در این صورت کشیدگی فنر k_2 و نیروی وارد بر نقطه A چه مقدار است؟



۱) ۱۰۰N - ۵cm ۲) ۵۰N - ۱۰cm
۳) ۱۰۰N - ۱۰cm ۴) ۵۰N - ۵cm

(جواب: گزینه ۳)

---

* نیروی کشش فنر، نیروی واکنش است و همواره در خلاف جهت نیروی وارد بر فنر ظاهر می‌شود (* عامل ایجاد کننده نیروی کشش فنر، نیروی است که به ابتدای آن در جهت کشیدگی (فشردگی) اثر می‌کند.)

---

* (شتاب گرانش × جرم = وزن) ، (چگالی × حجم = جرم) *

مثال: به انتهای فنری با جرم ناچیز وزنه ۴۰۰ گرمی آویزان و طول فنر در این حالت ۲۴ سانتی‌متر است. اگر ۱۰۰ گرم دیگر به وزنه‌ها اضافه کنیم، طول فنر ۲۵ سانتی‌متر می‌شود. طول فنر بدون وزنه چند سانتی‌متر است؟ ($g = 10\ N/kg$)

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

(جواب: گزینه ۱)

---

* اگر وزنه‌ای را به جرم m درون یک آسانسور به انتهای نیروسنجی آویزان کنیم، عددی که نیروسنج نشان می‌دهد برابر $F = m(g \pm a)$

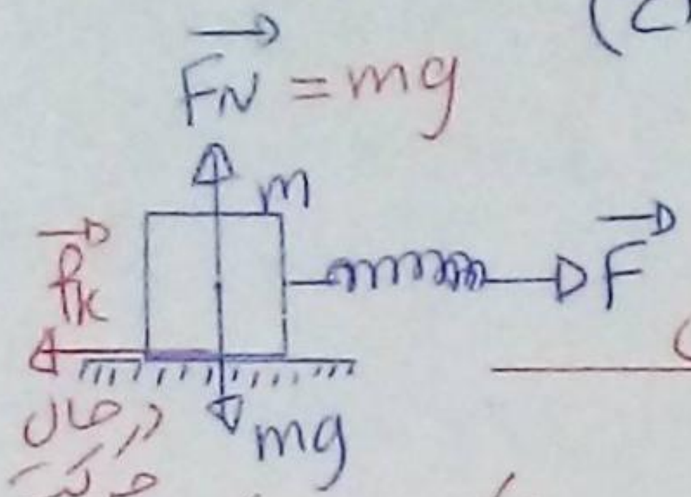
⊕ شتاب حرکت رو به بالا ($\uparrow a$)

⊖ شتاب حرکت رو به پایین ($\downarrow a$)

$m(g \pm a)$ = وزن ظاهری | $(g \to g \pm a)$ * شتاب گرانش را تغییر می‌دهیم.

Scanned by TapScanner

* برآیند نیروها یا برآیند نیروهای وارد بر جسم همان ma است ($\Sigma F = ma$)



* اگر جسم در حال حرکت باشد $\vec{F} - \vec{f_k} = m\vec{a}$

$\vec{F}$: نیروی محرکه

$\vec{f_k}$: نیروی اصطکاک جنبشی

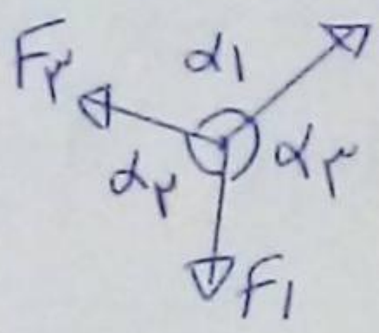
* جهت مثبت قراردادی

* اگر جسم ساکن یا دارای حرکت با سرعت ثابت باشد، آن گاه برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

* در صورتی که در حال حرکت نباشد (ساکن باشد) نیروی اصطکاک ایستایی با $\vec{F}$ (نیروی محرکه) برابر است

* تعیین نیروها



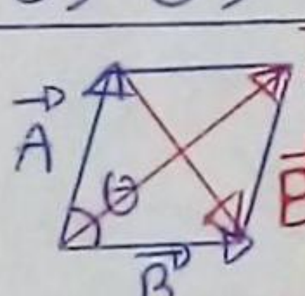
$$\frac{\text{نیرو}}{\text{سینوس زاویه روبروی آن}} = \frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3}$$

* جهت نیروها باید به گونه ای باشد که هیچ گاه از یک نقطه خارج شوند یا به یک نقطه داخل شوند (* اثبات به عنوان تمرین)

* پرتاب یک جسم روی سطح افقی: تنها نیروی مؤثر وارد بر آن، نیروی اصطکاک جنبشی است

* برآیند ($\vec{A}+\vec{B}$)

* اختلاف ($\vec{B}-\vec{A}$)

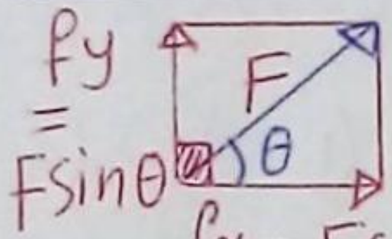


$$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

$$|\vec{B}-\vec{A}| = \sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}$$

(* قضیه کسینوس ها)

تجزیه نیروها:



$$F = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

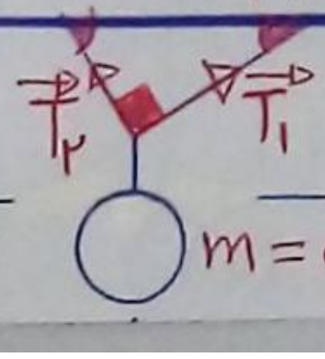
* مثال: نشان دهید ① در پرتاب جسم روی سطح افقی، شتاب حرکت جسم از رابطه ی $a = -\mu_k g$ محاسبه می شود (متقل از جرم جسم در سرعت اولیه پرتاب است)

② در حرکت پرتابی جسم روی سطح افقی، زمان توقف و مسافت پیموده شده تا توقف متقل از جرم جسم است.

* اگر جسمی را با طناب (فنر) در راستای قائم حرکت دهیم (در این حالت نیروهای مؤثر وارد بر حرکت جسم، نیروی وزن، نیروی فنر یا نیروی طناب است.

(برآیند این نیروها شتاب حرکت جسم را مشخص می کند.)

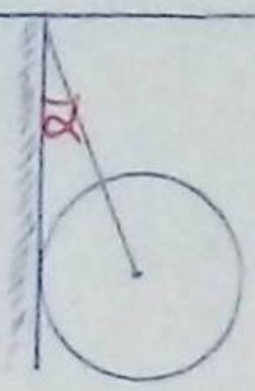
(* تجزیه نیروها * قضیه سینوس ها * قضیه کسینوس ها)



مثال: در شکل مقابل، وزنه در حال تعادل است. اگر نیروی کشش طناب T_1 برابر ۳۰ نیوتون باشد، نیروی کشش طناب T_2 چند نیوتون است؟

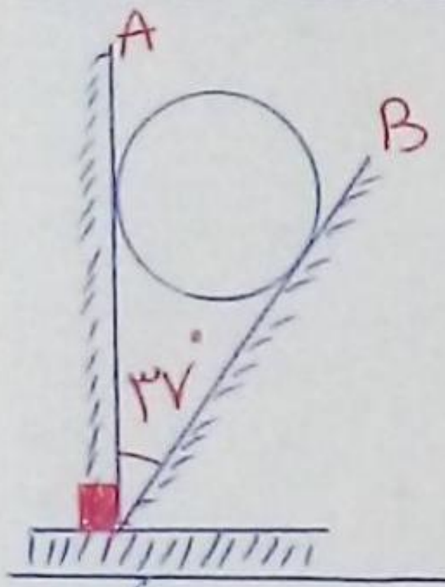
(طناب ها بدون جرم، $g = 10\,N/kg$) (جواب: $T_2 = 40\,N$)

Scanned by TapScanner



مثال: در شکل مقابل جسمی به جرم 80kg توسط طنابی با جرم ناچیز به دیوار بسته شده است. اگر نیروی کشش طناب 1000 نیوتون باشد وزن کلیه نیروهای اصطکاک حرف نظر کنیم، اندازه نیروی عمودی سطح وارد بر جسم چند نیوتون است؟ ($g=10\frac{N}{kg}$)

1) $600\sqrt{3}$ 2) $300\sqrt{3}$ 3) 600 4) 300 (جواب: گزینه 3)



مثال: در شکل مقابل وزن کره برابر 120 نیوتون و اصطکاک ها ناچیز است. نیروی وارد از طرف تکیه‌گاه A برابر 160 نیوتون است. نیروی عمودی وارد از طرف سطح B بر کره چند نیوتون است؟

1) 200 2) 160 3) 250 4) 450 (جواب: گزینه 1)

مثال: جسمی به جرم 5kg را با سرعت اولیه 10m/s روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی 0/2 پرتاب می‌کنیم، جسم پس از پیمودن چه مسافتی بر حسب متر، متوقف می‌شود؟ ($g=10\frac{N}{kg}$)

1) 2/5 2) 50 3) 5 4) 25 (جواب: گزینه 4)

مثال: جسمی به جرم m را یک بار با سرعت اولیه 70 و بار دیگر با سرعت اولیه 370 روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی μ_k پرتاب می‌کنیم. زمان توقف و مسافت پیموده شده تا توقف به ترتیب چند برابر حالت اولیه خواهد شد؟

1) $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{9}$ 2) 3، 9 3) 3، 3 4) 9، 9 (جواب: گزینه 2)

مثال: جسمی به انتهای نخی با جرم ناچیز آویزان است. اگر جسم با شتاب ثابت به سمت بالا کشیده شود، نیروی کشش نخ 30 نیوتون و اگر با همان شتاب پایین بیاید، نیروی کشش نخ 10 نیوتون است. جرم این جسم چند کیلوگرم است؟ ($g=10\frac{N}{kg}$)

1) 1 2) 2 3) 0/5 4) 1/5 (جواب: گزینه 2)

---

* در صورتی که از فنر به جای طناب در سوالات استفاده شود، نیروی کشش فنر (نیروی کشش طناب) را به صورت $F_e=kx$ می‌نویسیم.

---

* حرکت شتابدار در راستای قائم ($g \rightarrow g \pm a$)

Scanned by TapScanner

* لختی درجه‌ی جسم ساکن است. اما در صورتی که جسم شروع به حرکت کند، کمیتی به نام تکانه را می‌توان برای بررسی حرکت جسم در نظر گرفت (* تکانه را می‌توان همان لختی در حال حرکت فرض کرد.)

* حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن را تکانه می‌گویند. این کمیت برداری و هم‌جهت آن در SI، $kg.m/s$ می‌باشد. $\vec{P}=m\times\vec{V}$ (* تغییرات سرعت باید به صورت برداری باشد و حتی‌های مثبت و منفی باید لحاظ شود)

* اگر تکانه تغییر کند و جرم جسم ثابت بماند، باید سرعت آن تغییر کند

* رابطه‌ی نیروی متوسط وارد بر جسم و تغییرات تکانه

$$\vec{F}_{net}=m\vec{a}=m\frac{\vec{V}_2-\vec{V}_1}{\Delta t}=\frac{m\vec{V}_2-m\vec{V}_1}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

$(\vec{\Delta P}=m\vec{\Delta V})$ * تغییرات تکانه جسم همواره در جهت بردار تغییرات سرعت است

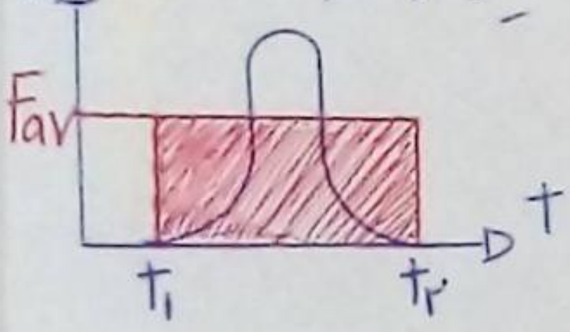
* آهنگ تغییر تکانه جسم، هم‌جهت و متناسب با نیروی است که بر جسم وارد می‌شود.

* اگر بر جسمی نیروی در جهت حرکتش اثر کند، تکانه جسم افزایش می‌یابد.

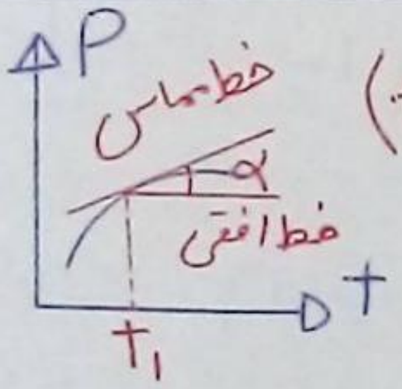
(* بالای نمودار مثبت و پایین آن منفی است.)

* تغییرات تکانه جسم را می‌توان از مساحت سطح زیر نمودار نیرو - زمان به دست آورد.

* F_{av} طوری انتخاب شده است که مساحت مستطیل (قرمز) با مساحت زیر نمودار برابر باشد. (* نمودار متقابل می‌تواند مربوط به برخورد بین دو جسم باشد که در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 اتفاق افتاده است (دو جسم با یکدیگر در تماس بوده‌اند) و F_{av} نیروی متوسط در برخورد بین این دو جسم است.)



* شیب خط مماس بر نمودار تکانه - زمان در هر لحظه، مشخص کننده نیروی خالص وارد بر جسم در آن لحظه است. (* $\tan\alpha=m=$ شیب خط $=F_{net}$)



* رابطه‌ی تکانه با انرژی جنبشی: $k=\frac{P^2}{2m}$ $(P=mv)$ $(k=\frac{1}{2}mv^2)$ (انرژی جنبشی به عنوان ترین *)

* هنگامی که جسمی را در شرایط خلا پرتاب می‌کنیم، تغییرات سرعت آن در یک ثانیه همواره (* متقل از راستایی که جسم را پرتاب می‌کنیم) (مقاومت هوا صفر است.) به اندازه‌ی 9 و به سمت پایین است.

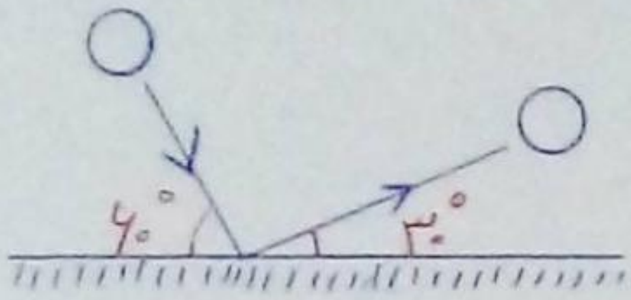
* یادآوری: $(\frac{km}{h})\div 3/6=(\frac{m}{s})$

* در صورتی که به مجموعه‌ای از اجسام، نیروی خارجی وارد نشود، مجموع تکانه‌های اجسام در حالت‌های اولیه و نهایی یکسان است.

Scanned by TapScanner

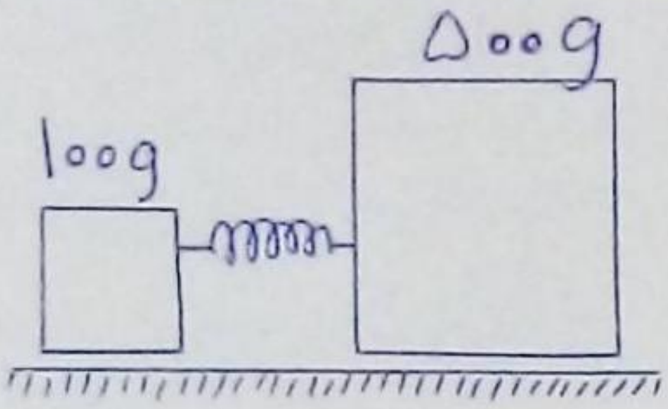
مثال: توپی به جرم ۵۰۰ گرم با سرعت $4\,m/s$ با زاویه 60° نسبت به سطح افقی به آن برخورد می‌کند و با سرعت $3\,m/s$ در راستای که با سطح افق زاویه 30° ایجاد می‌کند برمی‌گردد. اگر مدت زمان تماس توپ با سطح افق $0/4$ ثانیه باشد، اندازه نیروی خالص وارد بر توپ چند نیوتون است؟

۱) $3/75$ ۲) $1/875$ ۳) $6/25$ ۴) $12/5$ (جواب: گزینه ۳)



مثال: در شکل زیر، فنر را فشرده کرده و وزنه‌ها را روی سطح افقی بدون اصطکاک از حال سکون رها می‌کنیم. اگر در لحظه‌ای که فنر به طول عادی خود می‌رسد، تندی وزنه ۱۰۰ گرمی $2\,m/s$ باشد، تندی وزنه ۵۰۰ گرمی چند متر بر ثانیه می‌شود؟

۱) $1/0$ ۲) $0/2$ ۳) $0/3$ ۴) $0/4$ (جواب: گزینه ۴)



مثال: توپ پنگ پونگی با تکانه $2\,kg\times m/s$ به توپ گلف ساکنی در راستای افقی برخورد کرده و به آن برخورد می‌کند و با تکانه $0/5\,kg\times \frac{m}{s}$ در راستای افقی به عقب برمی‌گردد. مقدار تکانه توپ گلف چند $kg.m/s$ است؟

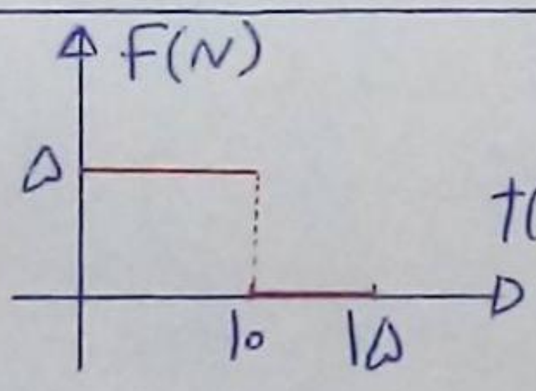
۱) $2/5$ ۲) $1/5$ ۳) $1/25$ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۱)

مثال: بر جسمی به جرم $4\,kg$ که با سرعت $2\,m/s$ خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، نیروی ثابت ۳۲ نیوتون در خلاف جهت حرکت آن اثر می‌کند. پس از چه مدتی بزرگی تکانه جسم با بزرگی تکانه اولیه آن برابر می‌شود؟

۱) ۲ ۲) $0/5$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: نمودار نیرو-زمان برای جسمی به جرم $10\,kg$ که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر تندی اولیه جسم $5\,m/s$ در جهت مثبت محور xها باشد، تندی متحرک پس از ۱۵ ثانیه چند m/s است؟

۱) $7/5$ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) $2/5$ (جواب: گزینه ۳)



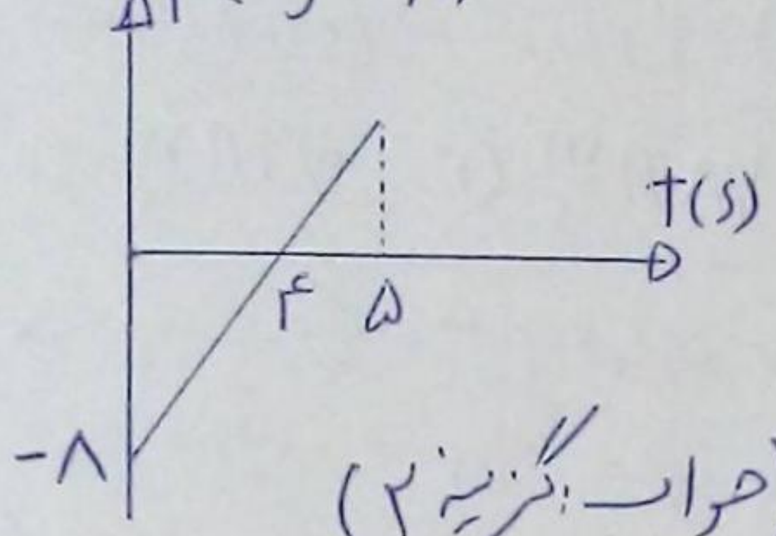
Scanned by TapScanner

مثال: در شرایط خلا، گلوله‌ای در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. بردار تغییر تکانه گلوله در مدت زمان حرکت در کدام جهت است؟ (جواب: گزینه ۲)

۱) به سمت بالا ۲) به سمت پایین

۳) ابتدا به سمت پایین، سپس به سمت بالا ۴) ابتدا به سمت بالا، سپس به سمت پایین

مثال: شکل زیر، نمودار تکانه - زمان جسمی است که بر روی خط راست حرکت می‌کند. کدام یک از گزینه‌های زیر درباره این جسم نادرست است؟



۱) در لحظه $t=4s$ جهت حرکت جسم تغییر می‌کند.

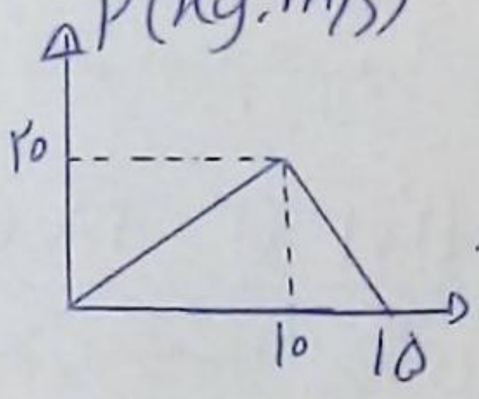
۲) حرکت جسم ابتدا تند شونده و سپس کند شونده است.

۳) اندازه نیروی متوسط وارد بر جسم ۲ نیوتون است.

۴) در لحظه $t=5s$ تکانه جسم برابر $2kg.m/s$ است.

(جواب: گزینه ۲)

مثال: نمودار تکانه - زمان جسمی به جرم ۴kg که بر مسیر مستقیمی حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر نیروی ثابت و افقی $\vec{F_R}$ در ۱۰ ثانیه اول حرکت به جسم وارد شود و سپس این نیرو قطع شده باشد، اندازه این نیرو چند نیوتون است؟



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ (جواب: گزینه ۳)

مثال: نیروی F به مدت $5t$، جسمی به جرم m را از حال سکون و بر روی سطح افقی بدون اصطکاکی به حرکت می‌کند انرژی جنبشی جسم در پایان این مدت، k می‌شود. اگر نیروی $3F$ به مدت $3\Delta t$ بر جسمی به جرم $9m$ که از ابتدا ساکن بوده، اثر کند، انرژی جنبشی آن در پایان این مدت چند برابر k می‌شود؟

۱) ۹ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$ (جواب: گزینه ۱)

مثال: انرژی جنبشی گلوله‌ای از ۹J به ۱۶J می‌رسد، اندازه تکانه آن تقریبا چند درصد افزایش می‌یابد؟ (جواب: ۳۳/۳۳۳)

Scanned by TapScanner

* حرکت دایره‌ای یکنواخت (تندی ثابت) * جهت مثبت مبنای: خلاف جهت عقربه‌های ساعت

* دوره (T): مدت زمان لازم برای آن که جسم محیط دایره مسیر را یک بار بپیماید، دوره نام دارد. یکای دوره، ثانیه است.

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (*)$$

مثال: میل لنگ یک خودرو که قطر محور آن 6cm است، در هر دقیقه 1800 بار می‌چرخد. تندی نقطه‌ای روی لبه محور این میل لنگ چقدر است؟ (جواب: گزینه ۲)

۱) $0/9\pi \frac{m}{s}$ ۲) $1/8\pi \frac{m}{s}$ ۳) $2/5\pi \frac{m}{s}$ ۴) $3/6\pi \frac{m}{s}$

* سرعت حرکت جسم همواره بر مسیر حرکت آن مماس است و جهت بردار سرعت لحظه‌ای، جهت حرکت جسم را مشخص می‌کند. در حرکت دایره‌ای منظور از تندی، مقدار سرعتی است که اگر جسم از دایره مسیر خارج شود، در جهت آن حرکت خود را ادامه می‌دهد.

مثال: جسمی به جرم $2\sqrt{2}$ کیلوگرم روی دایره‌ای به شعاع 40 سانتی‌متر با تندی 12m/s حرکت می‌کند. اگر در مدت $\frac{1}{60}$ ثانیه، مسافتی به اندازه یک چهارم محیط دایره را طی کند، تکانه جسم چند واحد SI تغییر می‌کند؟ (جواب: گزینه ۳)

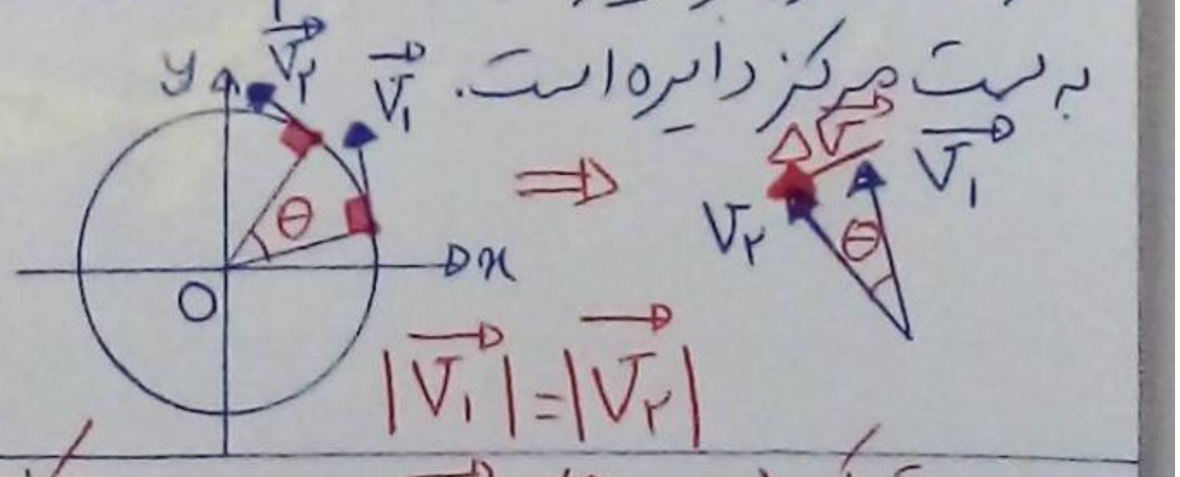
۱) 48 ۲) $12\sqrt{2}$ ۳) 24 ۴) $48\sqrt{2}$

* در حرکت دایره‌ای یکنواخت، تندی تغییر نمی‌کند، اما جهت حرکت جسم در حال تغییر است. بنابراین حرکت دایره‌ای یکنواخت، حرکتی شتابدار است.

* در بازه زمانی سیار یکرچک ($0 \to \Delta t$)، در هر نقطه از مسیر، بردار تغییرات سرعت بر بردار سرعت لحظه‌ای عمود است و با توجه به هم جهت بودن بردار شتاب متوسط و بردار تغییرات سرعت می‌توان نتیجه گرفت: شتاب در حرکت دایره‌ای یکنواخت در هر لحظه عمود بر مسیر حرکت جسم است که در این صورت بر شعاع دایره منطبق شده و به سمت مرکز دایره است.

* شتاب مرکزگرا $\rightarrow \left(a_c = \frac{v^2}{r}\right)$

(* جهت شتاب به سمت مرکز است.)



* در صورتی که $(\theta \to 0)$، $\Delta\vec{V}$ به سمت مرکز دایره است. $(\Delta\vec{V} = \vec{V_2} - \vec{V_1}\ *)$

Scanned by TapScanner

مثال: دو ذره A و B روی مسیرهای دایره‌ای شکل به طور یکنواخت حرکت می‌کنند. دوره حرکت ذره A سه برابر دوره حرکت ذره B است. اگر شعاع حرکت ذره B نصف شعاع حرکت ذره A باشد، شتاب مرکزگرای A چند برابر شتاب مرکزگرای B است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: جسمی روی دایره‌ای با سرعت ثابت حرکت می‌کند و مرکز دایره بر مبدا مختصات $O(۰,۰)$ منطبق است. هنگامی که جسم در مکان $x = +۹m$ قرار دارد، بردار سرعت آن در SI به صورت $\vec{v} = -۳\vec{j}$ است. بردار شتاب ذره در مکان $y = -۹m$ کدام است؟

۱) $a_c = \vec{i}$ ۲) $a_c = +\vec{j}$ ۳) $a_c = -\vec{i}$ ۴) $a_c = -\vec{j}$ (جواب: گزینه ۲)

مثال: جسمی روی محیط دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر به طور یکنواخت در هر ۴ ثانیه ۱۶ دور می‌چرخد. شتاب متوسط حرکت جسم در مدت زمان $\frac{۱}{۱۶}$ ثانیه چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) $۸\sqrt{۲}\pi$ ۲) $۴\sqrt{۲}\pi$ ۳) $۴۰\sqrt{۲}\pi$ ۴) $۱۲۸\sqrt{۲}\pi$ (جواب: گزینه ۴)

* نیروی مرکزگرا در حرکت دایره‌ای یکنواخت $F = ma \rightarrow F = \frac{mv^۲}{r}$ $\left(a_c = \frac{v^۲}{r}\right)$ (نامی دارد نیرو)

* در حرکت دایره‌ای، نیروی خالص (برآیند نیروها)، تأمین کننده نیروی مرکزگرا است.

* در حرکت دایره‌ای جسم متصل به طناب در صفحه افقی، نیروی کشش طناب، تأمین کننده نیروی مرکزگرا در طول طناب با شعاع حرکت جسم برابر است. ($T_{طناب} = \frac{mv^۲}{r}$)

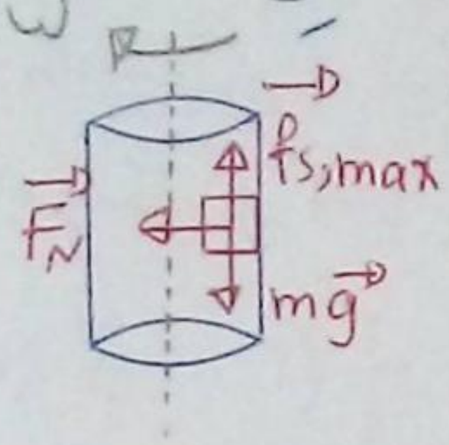
* در حرکت دایره‌ای جسم متصل به فنر در صفحه افقی پس از رسیدن فنر به تعادل، نیروی کشش فنر تأمین کننده نیروی مرکزگرا است. ($F_{e\,فنر} = kx = \frac{mv^۲}{r}$)

* در حرکت خودرو هنگام عبور بدون خطر از یک مسیر دایره‌ای در جاده‌ای افقی، نیروی اصطکاک ایستایی تأمین کننده نیروی مرکزگرا است.
بیشترین سرعتی که خودرو می‌تواند داشته باشد، تا بدون انحراف از روی یخ عبور کند زمانی است که اصطکاک ایستایی با نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه برابر باشد: $\left(\frac{mv^۲}{r} = \mu_s mg\right)$

$$\left(\mu_s mg = \frac{mv^۲}{r}\right) \Rightarrow v = \sqrt{\mu_s rg}$$

Scanned by TapScanner

* در حرکت دایره‌ای جسم درون دیواره استوانه‌ای شکل، نیروی عمودی تکیه‌گاه تأمین کننده نیروی مرکزگرا است.



سرعت زاویه‌ای $= \omega \left(\frac{rad}{s}\right)$

$v = r\omega$ ، $\frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$

در آستانه لغزش $\Rightarrow \mu_s F = mg$ (F: مرکزگرا)

مثال: جسمی به جرم ۲۰۰ گرم به انتهای فنر سبکی بسته شده و روی یک سطح افقی بدون اصطکاک دوران می‌کند. اگر طول فنر در این حالت برابر $\frac{\pi}{2}$ متر بر ثانیه خواهد شد. طول فنر در این حرکت چند سانتی‌متر است؟ ($\pi^2 = 9$)

۱) ۲/۵ ۲) ۲۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴ (جواب: گزینه ۲)

مثال: در یک روز خشک، ضریب اصطکاک بین سطح جاده و لاستیک های اتومبیلی برابر ۰/۴ و در یک روز بارانی این ضریب برابر ۱/۲ است. اگر در روز بارانی بیشترین سرعت عبور از پیچ جاده افقی برابر ۲۰ m/s باشد، در روز خشک این سرعت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۴۰ ۲) $20\sqrt{2}$ ۳) $40\sqrt{2}$ ۴) ۶۰ (جواب: گزینه ۱)

مثال: جسمی درون استوانه‌ای به قطر مقطع ۲m در حال چرخش است. ضریب اصطکاک ایستای بین سطح جسم و استوانه برابر ۰/۴ است. کم‌ترین تندی حرکت جسم چند متر بر ثانیه باشد تا جسم درون استوانه نلغزد؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$) (جواب: گزینه ۳)

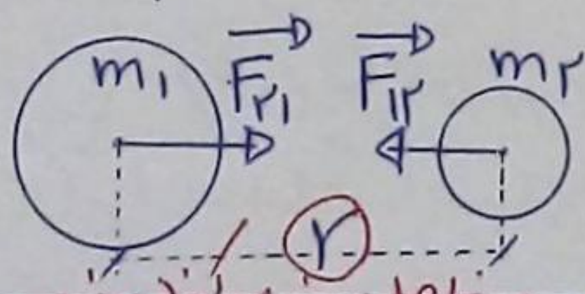
۱) ۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۵ ۴) ۶/۲۵

---

* بنابر قانون گرانش عمومی نیوتون هر دو جسم همواره یکدیگر را می‌ربایند. * نیروی گرانشی بین دو ذره که در راستای خط واصل مرکز آن دو ایجاد می‌شود با حاصل ضرب جرم آن‌ها متناسب و با مربع فاصله آن‌ها رابطه وارون دارد.

G: ثابت گرانش عمومی

$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ، $|\vec{F_{12}}| = |\vec{F_{21}}|$



* فرض می‌کنیم تمام جرم جسم در مرکز جرم آن قرار گرفته است.

Scanned by TapScanner

* نیروی گرانش میان جسم‌های با جرم کوچک قابل چشم‌پوشی است. این نیرو در جسم‌های بسیار بزرگ اثر خود را نشان می‌دهد. (اجسام آسمانی، سیاره‌ها و...)
* به دلیل وجود نیروی گرانش، تمامی اجسام تر دیک به زمین به سمت آن کشیده می‌شوند. این نیرو را در اطراف زمین «نیروی وزن» می‌نامند.

نیروی وزن

$F = G\frac{M_e m}{R_e^2} \Rightarrow g_0 = G\frac{M_e}{R_e^2}$ ← مستقل از جرم جسم (m) است. (*شتاب گرانش در سطح زمین)

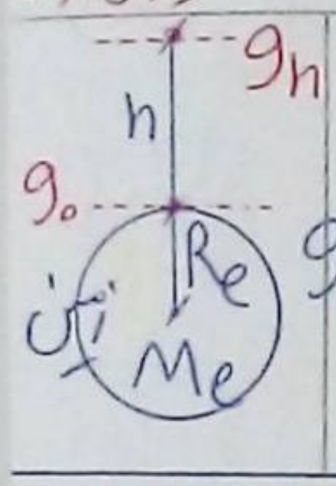
$F = mg$ نیروی وزن

M_e: جرم کره زمین (یا هر سیاره دیگری)

R_e: شعاع کره زمین (یا هر سیاره دیگری)

m: جرم جسم روی سطح زمین (یا هر سیاره دیگری)

مثال: یکای شتاب گرانش را به دست آورید. (جواب: N/kg یا m/s^2)

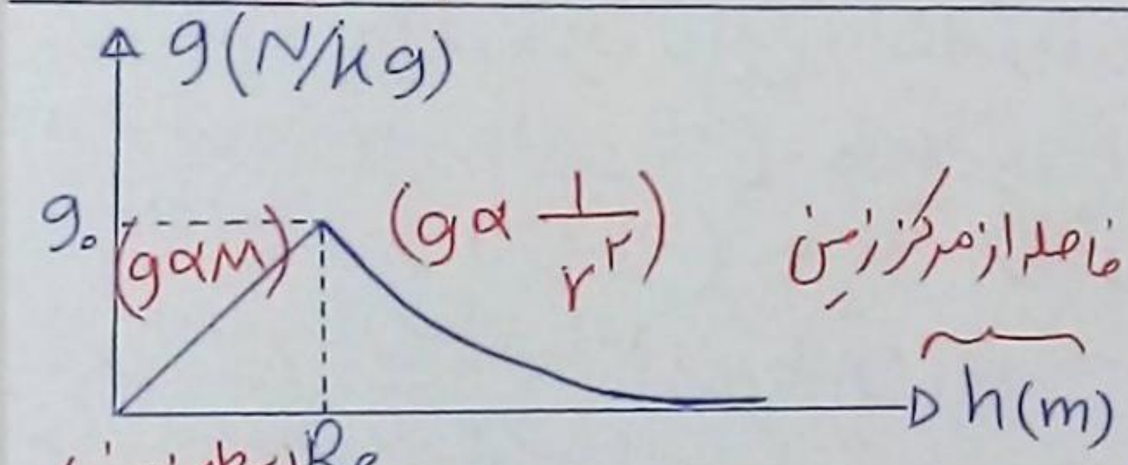


$g_h = G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}$

* شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح زمین (g_h)

* شتاب گرانش در سطح سیاره (یا درون آن) با حاصل ضرب شعاع سیاره و چگالی متوسط آن رابطه مستقیم دارد.

$g = G\frac{M}{R^2}$, $\bar{\rho} = \frac{M}{V} \to \frac{4}{3}\pi R^3$ $\Longrightarrow g = \frac{4}{3}\pi R G \bar{\rho}$



* اگر جنس لایه‌های زمین را تقریبا یکسان در نظر بگیریم، نمودار شتاب گرانش (g) بر حسب فاصله از مرکز زمین به صورت مقابل رسم می‌شود.
* بیش‌ترین مقدار شتاب گرانش در سطح زمین است. (g_0)

* در حرکت ماهواره، نیروی گرانش بین ماهواره و کره زمین تامین کننده نیروی مرکزگرا است.
* جرم ماهواره تاثیری در تندی حرکت آن ندارد.

$G\frac{mM_e}{r^2} = m\frac{V^2}{r} = ma_c \Longrightarrow V = \sqrt{G\frac{M_e}{r}}$

نیروی گرانش mg_h = نیروی مرکزگرا mg_h ← * شتاب گرانش در ارتفاعی که ماهواره در آن قرار دارد.

* فاصله از مرکز کره زمین

$\Longrightarrow g_h = a_c = G\frac{M_e}{r^2}$ (شتاب مرکزگرا)

* $r = R_e + h$ (ارتفاع h از سطح زمین)
* V ← دوره حرکت ماهواره (T)

Scanned by TapScanner

مثال: در چه ارتفاعی از سطح زمین بر حسب شعاع زمین، شتاب گرانش $\frac{9}{16}$ برابر شتاب گرانش در سطح زمین است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$ (جواب، گزینه ۲)

مثال: نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره‌ای $\frac{1}{16}$ وزن آن در سطح زمین است. فاصله ماهواره از سطح زمین چند برابر شعاع زمین است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸ (جواب: گزینه ۲)

مثال: جرم ماهواره‌های A و B به ترتیب m و $4m$ است. اگر فاصله آن‌ها از سطح زمین R_e و $\frac{1}{3}R_e$ و $\frac{2}{3}R_e$ باشد، انرژی جنبش ماهواره A چند برابر ماهواره B است؟

۱) $\frac{16}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (جواب: گزینه ۳)

مثال: اگر شعاع حرکت ماهواره‌ای به دور زمین دو برابر شود، دوره حرکت آن چند برابر می‌شود؟ ۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$ (جواب: گزینه ۴)

نوسان و موج

* نوسان‌هایی را که هر دور آن دقیقاً در دوره‌های بعدی تکرار می‌شود (مانند ضربان قلب انسان)، نوسان‌های دوره‌ای می‌نامیم. * مدت زمان یک چرخه، دوره تناوب یک نوسان (دوره‌ای نامیده می‌شود (SI، ثانیه). * تعداد نوسان‌های کامل (تعداد چرخه‌های) انجام شده در واحد زمان را بسامد (فرکانس) می‌نامیم (f، SI، هرتز (Hz)) * $\left(f=\frac{1}{T}\right)$ * بسامد و دوره تناوب عکس یکدیگرند. * در نمودار مکان - زمان در نوسان‌های دوره‌ای مدت زمانی که الگو تکرار می‌شود، همان دوره حرکت است.

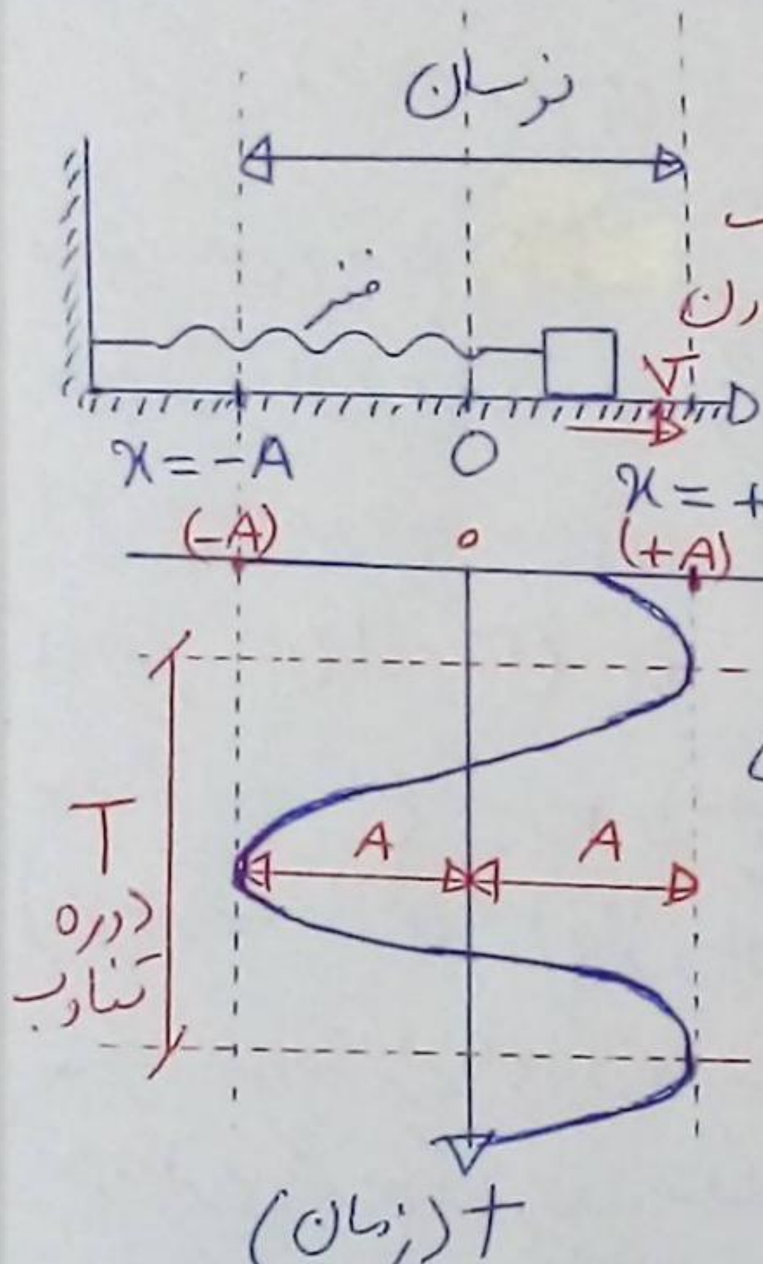
* نوسان‌های سینوسی (تابع‌های سینوسی یا کسینوسی) * از معروف‌ترین حرکت‌های هماهنگ ساده، می‌توان به حرکت جسمی که یک فنر به آن متصل است و یا حرکت آونگ با دامنه کم، اشاره کرد. * اگر روی یک سطح افقی بدون اصطکاک، جسم متصل به فنری را بکشیم و رها کنیم، یک حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. (اگر نمودار مکان - زمان آن را رسم کنیم، یک نمودار سینوسی خواهد شد. * پاره خطی را که جسم، روی آن حرکت نوسانی دارد، محور x‌ها و حالت تعادل جرم و فنر را مبدا می‌گیریم. حال اگر جسم از نقطه $x=A$ رها شود،

Scanned by TapScanner

*بیشینه جابه‌جایی نسبت به نقطه تعادل را دامنه حرکت (A) می‌نامند. (*طول پاره خطی که جسم روی آن حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، دو برابر دامنه حرکت است.)

*زمان یک رفت و برگشت کامل را دوره تناوب می‌گوییم (T). به عبارت دیگر، جسم از $x=A$ شروع به حرکت می‌کند، در $x=-A$ برمی‌گردد و دوباره به $x=A$ می‌رسد. زمان کل این حرکت همان دوره تناوب است. $*(T=\frac{1}{f})$ (*جسم در هر دوره مسافت $4A$ را طی می‌کند.)

*بسامد زاویه‌ای $*\ \omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$ $*(SI\ ،\ rad/s)$ *هرچه ω بزرگتر باشد، مفهوم آن این است که نوسان‌ها سریع‌تر رخ می‌دهند.



رفتار به صورت سینوسی (یا کسینوسی)

*تندی نوسانگر در مکان‌های $x=\pm A$ صفر است؛ به همین علت به این نقطه‌ها، نقطه‌های بازگشت حرکت گفته می‌شود. *تندی جسم هنگام عبور از نقطه تعادل بیشینه است. *اگر جسم در جهت محور x از $-A$ به A برود، سرعت آن مثبت و اگر در خلاف جهت محور x از A به $-A$ برود، سرعت آن منفی است.

*هرگاه نوسانگر در حال نزدیک شدن به نقطه تعادل (نقطه o) باشد، تندی آن رو به افزایش و حرکتش تندشونده $(a\times v>0)$ است و هرگاه نوسانگر در حال دور شدن از این نقطه باشد، تندی آن رو به کاهش و حرکتش کندشونده $(a\times v<0)$ است.

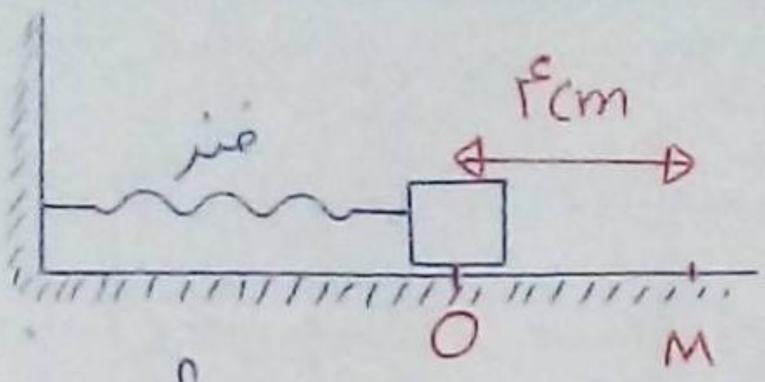
*طبق قانون دوم نیوتون شتاب و نیرو همیشه هم جهت‌اند. $(\Sigma F=ma)$ (برآیند) (m همواره مثبت است)

$(F_e=-kx)$ $*|F_e|=|kx|$ قانون هوک (جابه‌جایی و جهت نیرو مخالف هم‌اند)

*جهت نیرو و شتاب جسم متصل به فنر (نوسانگر) همیشه در خلاف جهت مکان (بعد) جسم است. یعنی در مکان‌های مثبت، نیرو و شتاب در جهت منفی و در مکان‌های منفی، نیرو و شتاب در جهت مثبت است. *با توجه به قانون هوک، اندازه نیرو با اندازه بعد (مکان) رابطه مستقیم دارد. بنابراین نیرو و شتاب در مبدا $(x=0)$ برابر صفر و در دو انتهای مسیر $(x=\pm A)$ بیشینه‌اند.

*در لحظه‌ای که مکان جسم مثبت است، علامت شتاب منفی و علامت سرعت می‌تواند + یا − باشد

مثال: جسمی روی یک سطح افقی بدون اصطکاک به یک فنر با ثابت $k=100\ N/m$ بسته شده و در نقطه O در حال تعادل است. جسم را تا نقطه M کشیده و سپس رها می‌کنیم. این جسم با بسامد $20\ Hz$ شروع به نوسان می‌کند. اگر پس از گذشت ۲ ثانیه از لحظه رها شدن، این جسم دوباره در M باشد، در این مدت نیروی وارد بر این جسم چند بار صفر شده و بیشینه نیروی وارد بر این جسم چند نیوتون است؟ P



۱) ۴۰، ۴ ۲) ۲۰، ۲ ۳) ۸۰، ۴ ۴) ۸۰، ۲ (جواب: گزینه ۳)

---

* معادله حرکت هماهنگ ساده: اگر در لحظه $t=0$ نوسانگر در مکان $x=+A$ باشد:

$x = A\cos(\omega t)$ ، $\omega(rad/s) = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (بسامد زاویه‌ای)

مثال: جرمی متصل به یک فنر با بسامد $0/5\ Hz$ و دامنه $2cm$، به طور هماهنگ در امتداد محور x ها دائم نوسان می‌کند. پس از گذشت $8/25\ s$ از رها شدن جرم از بالای نقطه تعادل، این جسم در چند سانتی‌متری از نقطه تعادل قرار دارد؟

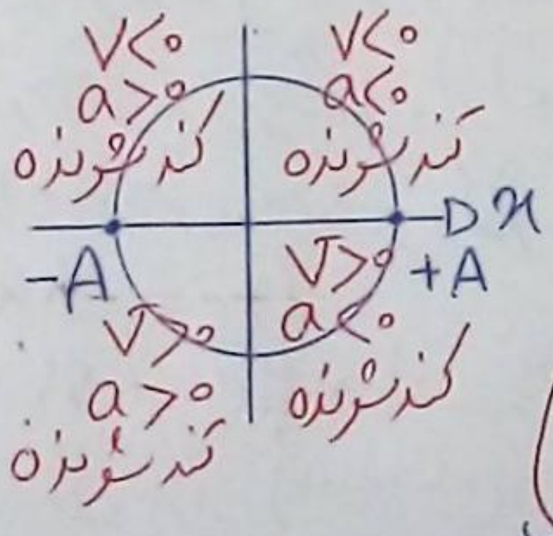
۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲ (جواب: گزینه ۳)

---

* به شناسه تابع کسینوس ($\omega t + \dots$) فاز حرکت گفته می‌شود. $x = A\cos(\omega t)$

(فاز حرکت تابعی خطی از زمان است.)

* یک حرکت دایره‌ای یکنواخت با سرعت زاویه‌ای ω و به شعاع A در نظر می‌گیریم که (رجحت مثلثاتی) انجام می‌شود، تصویر این حرکت روی محور x ها همان حرکت هماهنگ ساده است.



T (زمان) $\equiv 360^\circ$ (تغییر فاز)

دوره تناوب — یک دور کامل

مثال: معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = 0/2\cos(10\pi t)$ است، در بازه زمانی $t_1 = \frac{1}{30}\ s$ تا $t_2 = \frac{1}{10}\ s$، در مدت چند ثانیه حرکت نوسانگر کندشونده است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{20}$ ۳) $\frac{1}{60}$ ۴) $\frac{1}{120}$ (جواب: گزینه ۲)

Scanned by TapScanner

* اگر بخواهیم در یک مدت زمان مشخص، بیش‌ترین مسافت طی شده را به دست آوریم، جابه‌جایی را به صورت متقارن حول مبدا در نظر می‌گیریم. زیرا در اطراف مرکز، تندی نوسانگر از همه نقاط بیشتر است. حال اگر بخواهیم کمترین مسافت طی شده را به دست آوریم، آن مسافت طی شده نسبت به نقطه‌های برگشت حرکت ($x = \pm A$) متقارن هستند.

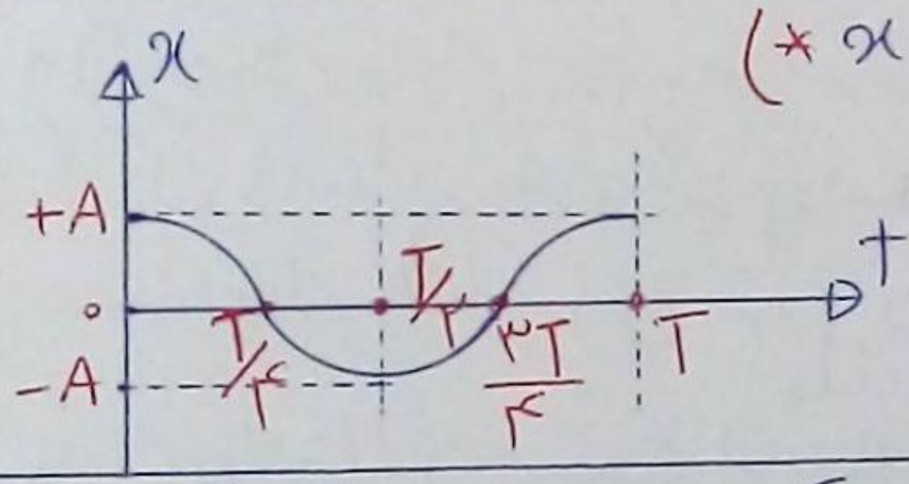
مثال: نوسانگری روی محور xها حرکت هماهنگ ساده با دامنه $4\,cm$ انجام می‌دهد. اگر در لحظه t_1 نوسانگر در مکان $x_1 = 2\sqrt{3}\,cm$ و علامت سرعت آن در این لحظه منفی باشد و پس از $0/8$ ثانیه بعد از t_1 برای اولین بار سرعت این نوسانگر $V = \oplus V_{max}$ شود، دوره حرکت چند ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۶ ۴) ۲/۴ (جواب، گزینه ۲)

مثال: نوسانگری با دوره تناوب $0/6$ ثانیه و دامنه $10\,cm$ حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اندازه سرعت متوسط این نوسانگر، هنگامی که از مکان $x_1 = -5\,cm$ تا $x_2 = +5\,cm$ می‌رود، حداکثر چند متر بر ثانیه است؟

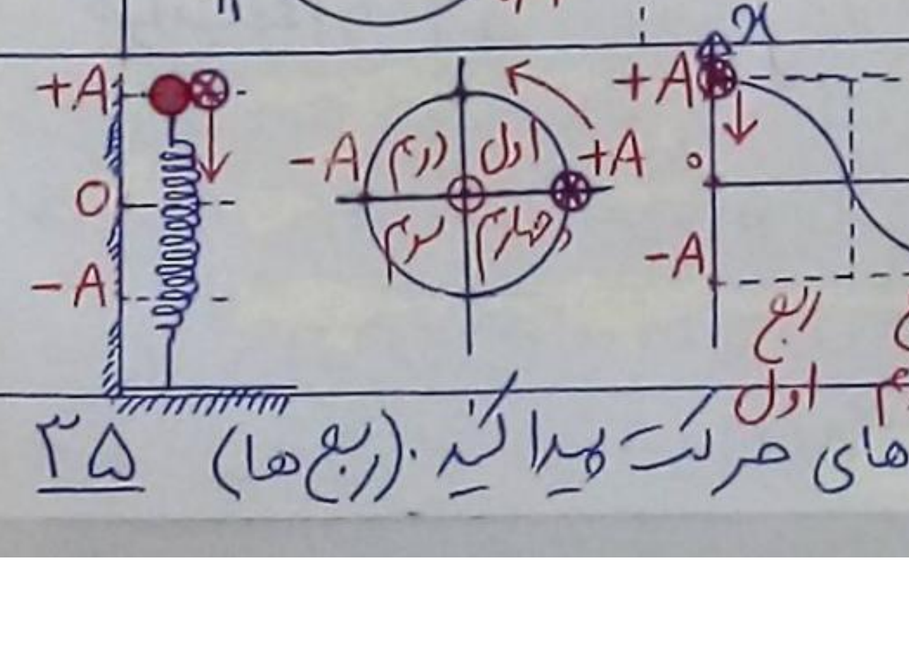
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰ (جواب، گزینه ۱)

* در حرکتی که نوسانگر در لحظه $t=0$ (* $x = A\cos\omega t$)
در مکان $x=+A$ قرار داشته باشد، نمودار مکان-زمان آن مطابق شکل روبرو است:



مثال: نمودار مکان-زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده مطابق شکل است. t_1 چند ثانیه است؟ (جواب، گزینه ۱)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳



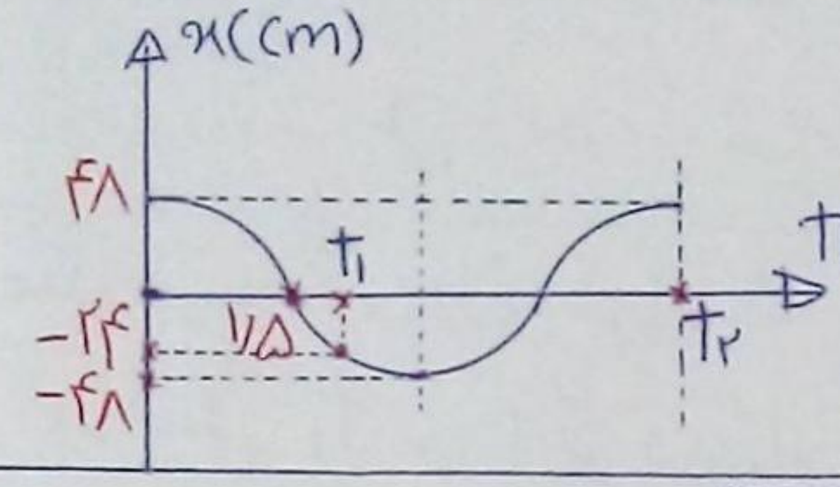
* در لحظه $t=0$ نوسانگر در مکان $x=+A$ قرار دارد در بازه زمانی ۰ تا T (یک دوره تناوب) نقاط متناظر روی نمودارهای روبرو چگونه حرکت می‌کنند؟

* علامت‌های شتاب و سرعت (a و v) را در هر کدام از بازه‌های حرکت پیدا کنید. (ربع‌ها) ۲۵

Scanned by TapScanner

* شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان، سرعت نوسانگر را نشان می دهد. $\left(\overline{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$
* در مکان های مثبت، شتاب نوسانگر منفی و در مکان های منفی شتاب نوسانگر مثبت است. * جهت تقعر در نمودار مکان - زمان، علامت شتاب را نشان می دهد. (بالا +) (پایین −)

مثال: نمودار مکان - زمان نوسانگری که حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد، مطابق شکل است. سرعت متوسط این نوسانگر، در بازه زمانی t_1 تا t_2 چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۰/۶ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۳ (جواب: گزینه ۳)

* دامنه نوسان روی دوره حرکت آن بی تاثیر است.

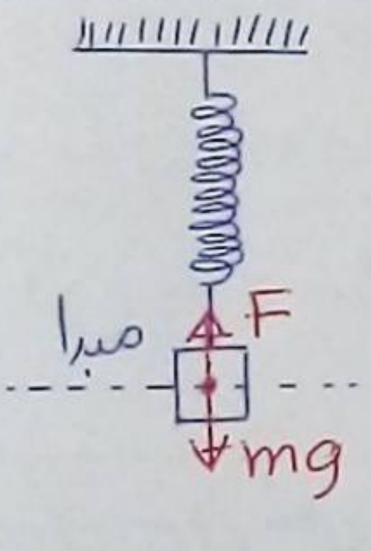
$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ← ثابت فنر $\left(\frac{N}{m}\right)$

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ← جرم متصل به فنر (kg)

$\left(\omega=\frac{2\pi}{T}\right)$ بسامد زاویه ای (rad/s)

مثال: یک دستگاه جرم - فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد. در لحظه ای که جسم متصل به فنر به انتهای مسیر حرکت خود می رسد، به اندازه $\frac{8}{9}$ از جرم اولیه آن کنده می شود، در ادامه حرکت این نوسانگر، دامنه و دوره تناوب آن نسبت به قبل، به ترتیب از راست به چپ، چند برابر می شود؟

۱) ۱، ۱ ۲) ۱، $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$، $\frac{1}{9}$ (جواب: گزینه ۲)



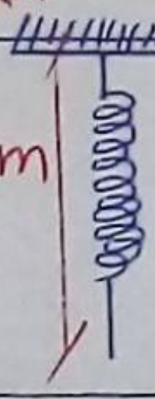
* اگر نوسان سامانه جرم - فنر در راستای قائم انجام شود، باز هم مرکز نوسان، که آن را مبدا در نظر می گیریم، نقطه تعادل سامانه است. (* وزنه را از حالت تعادل بالا یا پایین می بریم و بدون تندی اولیه رها می کنیم)
* تمام روابط این حرکت از همان رابطه های قبلی بدست می آید.

* دامنه نوسان روی دوره حرکت آن بی تاثیر است

$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ، $F_e=mg$ ← (*) $(k\Delta L=mg)$ ← در حالت تعادل

$\Rightarrow$ (*) $\left(\frac{m}{k}=\frac{\Delta L}{g}\right)$

و $(g=\pi^2 N/kg)$ ← جواب (ثانیه) $\Rightarrow T=0/4$



مثال: یک فنر سبک مطابق شکل از سقف آویزان است. بدون این که طول فنر تغییر کند، جسم کوچکی به جرم m به انتهای آن می بندیم و بدون تندی اولیه آن را رها می کنیم، جسم پایین رفته، دوباره برمی گردد و شروع به حرکت هماهنگ ساده می کند، اگر بیشینه طول فنر در این نوسان ۲۸ cm باشد، دوره تناوب حرکت چند ثانیه است؟

Scanned by TapScanner

$ma = \underbrace{-kx}_{\text{نیروی برگرداننده}} \longrightarrow a = -\frac{k}{m}x \longrightarrow a = -\omega^2 x$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ → بسامد زاویه‌ای (rad/s)

(t=0, x=A) و (*x = A cos ωt)

* علامت مبنای نشان دهنده این است که در مکان‌های مثبت، جهت نیرو در جهت مبنا و در مکان‌های منفی جهت نیرو در جهت مثبت است.

* با این که این رابطه برای سامانه جرم ـ فنر اثبات شد، ولی برای تمام نوسانگرهای هماهنگ ساده معتبر است.

مثال: نوسانگری حرکت هماهنگ ساده با دوره تناوب T انجام می‌دهد. از لحظه‌ای که بزرگی شتاب آن نصف شتاب بیشینه است، حداقل چه مدت طول می‌کشد تا شتاب آن صفر شود؟

۱) $\frac{T}{12}$ ۲) $\frac{T}{6}$ ۳) $\frac{T}{8}$ ۴) $\frac{T}{4}$ (جواب: گزینه ۱)

$x = A\cos\omega t \xrightarrow{\text{مشتق}} v = -A\omega\sin\omega t \xrightarrow{\text{مشتق}} -A\omega^2\cos\omega t = a$

$(t=0, x=+A)$ ، $-A\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x$

$\Rightarrow a = -\omega^2 x$ ، $|a_{max}| = A\omega^2$ ، $|v_{max}| = A\omega$

$(x = \pm A)$

$\Rightarrow \left|\frac{a_{max}}{v_{max}}\right| = \omega$

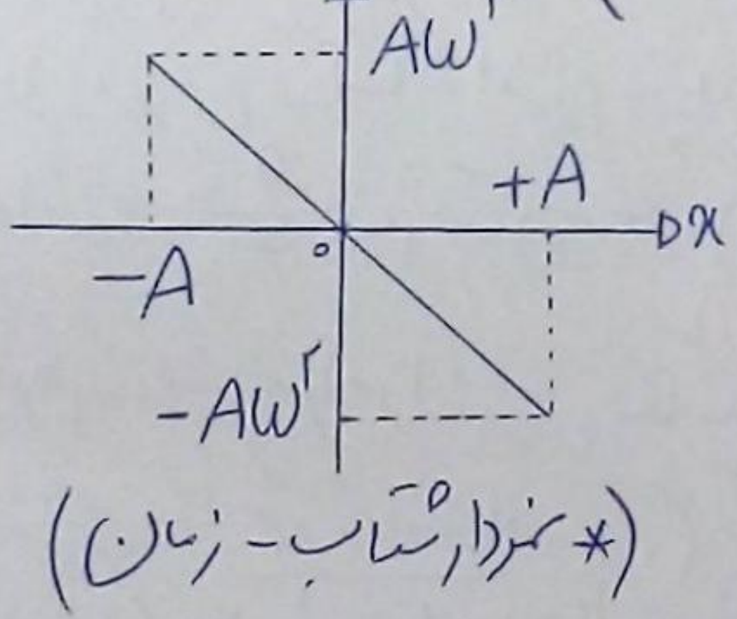
$-1 \le \sin\theta, \cos\theta \le 1$

مثال: در سامانه جرم ـ فنر، دامنه نوسان را دو برابر می‌کنیم. به ترتیب از راست به چپ، بیشینه تندی و بیشینه شتاب نوسانگر چند برابر می‌شوند؟

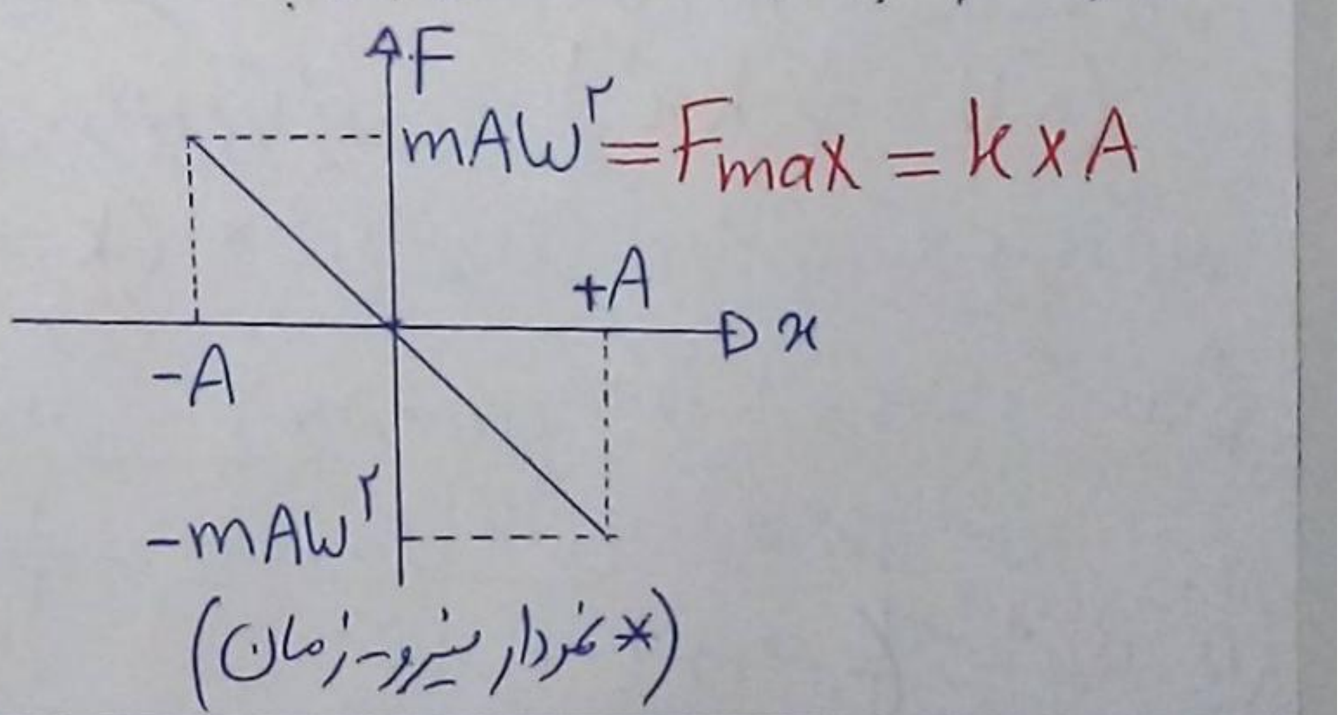
۱) ۱، ۱ ۲) ۲، ۲ ۳) ۱، ۲ ۴) ۲، ۴ (جواب: گزینه ۲)

---

* نمودار شتاب برحسب مکان، خطی با شیب $-\omega^2$ است. $(a = -\omega^2 x)$



(* نمودار شتاب ـ زمان)



(* نمودار نیرو ـ زمان)

Scanned by TapScanner

* اگر در نمودار $x-t$، یک چهارم دوره ($\frac{T}{4}$) را از ابتدای آن پاک کنیم، شکل نمودار سرعت - زمان را اگر به اندازه $\frac{T}{2}$ از ابتدای آن پاک کنم، شکل نمودار شتاب - زمان را پیدا کردیم (شکل کلی نمودار را پیدا کردیم ولی نمودار دقیق نیست)

(محور ع ها) * به عبارت دیگر، اگر در نمودار مکان - زمان، محور t ها را به اندازه $\frac{T}{4}$ جلو ببریم، شکل کلی نمودار $v-t$ را، اگر این محور را $\frac{T}{4}$ دیگر (یا $\frac{T}{2}$ از حالت اولیه) جلو ببریم شکل کلی نمودار $a-t$ را پیدا کرده ایم.

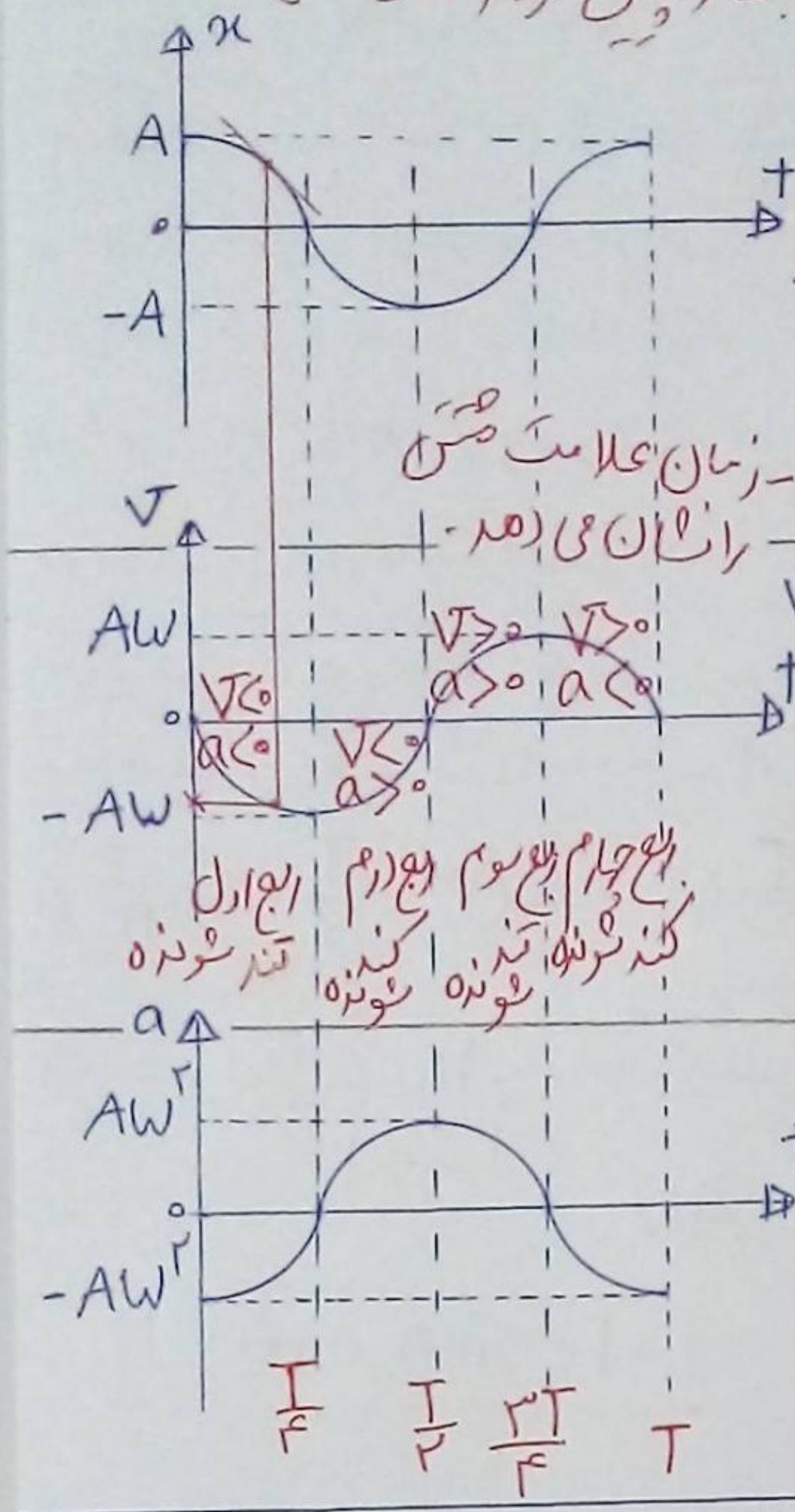
* بالای نمودار مکان مثبت و پایین نمودار مکان منفی است.

$x = A\cos\omega t$

$(t=0 \Rightarrow x=+A)$

* شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، سرعت در آن لحظه است

* جهت تغییر در نمودار مکان - زمان علامت Δx را آن می دهد.



$v = -A\omega\sin\omega t$

* شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه، شتاب در آن لحظه است.

$a = -A\omega^2\cos\omega t$

* بالای نمودار a مثبت و پایین نمودار a منفی است.

---

* در نمودار سرعت - زمان، در آن جهت از نمودار که بالای محور t است، علامت v مثبت و در آن جهت که پایین محور t است، علامت v منفی است. ($a \times v < 0$) مخالف علامت

* هرگاه نمودار سرعت - زمان در حال نزدیک شدن به محور t باشد، حرکت کند شونده و هرگاه در حال دور شدن از محور t (زمان) باشد، حرکت تند شونده است.

($a \times v > 0$) هم علامت

---

* انرژی پتانسیل فنر: در سامانه جرم - فنر، هرگاه فنر نسبت به حالت عادی خود، کشیده یا فشرده شود، در این سامانه انرژی پتانسیل کشسانی به وجود می آید. ($U = \frac{1}{2}kx^2$)

* انرژی جنبشی جسم متصل به فنر ($K = \frac{1}{2}mv^2$) (J) (kg)(m/s)

* مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل دستگاه جرم - فنر برابر انرژی مکانیکی این دستگاه است. (* در صورتی که اتلاف انرژی نداشته باشیم انرژی مکانیکی ثابت است.)

* انرژی مکانیکی (دستگاه جرم - فنر) = بیشینه انرژی پتانسیل فنر یا بیشینه انرژی جنبشی

$E = \frac{1}{2}kA^2$ (J) $(\frac{N}{m})(m)$

$E = K_{max} = \frac{1}{2}m(A\omega)^2$

* بیشینه انرژی جنبشی $\Leftarrow (x = \pm A, v = 0)$ یا $(x = 0, v = v_{max} = A\omega)$

Scanned by TapScanner

* در سامانه جرم - فنر، هرچه جرم از مبدا دورتر باشد، کشیدگی یا فشردگی فنر بیشتر و در نتیجه انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر بیشتر است.

* دوره تناوب به دامنه حرکت بستگی ندارد $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$ *

مثال: در یک سامانه جرم - فنر، اگر جرم متصل به فنر m و دامنه حرکت A و سامانه نوسان f باشد، کدام رابطه انرژی مکانیکی این نوسانگر است؟ (جواب: گزینه ۴)

۱) $\pi^2 m A^2 f^2$ ۲) $2\pi^2 m A^2 f^2$ ۳) $2\pi^2 m A f^2$ ۴) $2\pi^2 m A^2 f^2$

* نتیجه تست بالا برای تمام حرکت های هماهنگ ساده قابل استفاده است. یعنی در تمام حرکت های هماهنگ ساده، انرژی مکانیکی با مربع دامنه و مربع بسامد رابطه مستقیم دارد.

* هنگامی که نوسانگر در حال عبور از مبدا (نقطه تعادل) است، تمام انرژی مکانیکی آن از نوع انرژی جنبشی است و انرژی پتانسیل کشسانی آن صفر است. در این لحظه، نوسانگر بیشینه تندی خود را دارا است.

(انرژی مکانیکی E = انرژی جنبشی K + انرژی پتانسیل U) $\longrightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m V_{max}^2 \Rightarrow V_{max} = A\omega$ $(V = V_{max})$

ω: بسامد زاویه‌ای، $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$: سختی فنر، m: جرم

* انرژی مکانیکی $E = K + U \longrightarrow E = \frac{1}{2}m V_{max}^2 \Rightarrow V_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ (انرژی پتانسیل کشسانی = انرژی جنبشی)

مثال: در یک سامانه جرم - فنر که حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد، رابطه انرژی جنبشی نوسانگر برحسب مکان در SI به صورت $K = 2 - 50x^2$ است. دامنه حرکت چند سانتی متر است؟ ۱) ۴ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰ (جواب: گزینه ۳)

$\frac{K}{E}$ (انرژی جنبشی / انرژی مکانیکی) $= \left(\frac{V}{V_{max}}\right)^2$ ، $\frac{U}{E}$ (انرژی پتانسیل / انرژی مکانیکی) $= 1 - \frac{K}{E} = 1 - \left(\frac{V}{V_{max}}\right)^2 = \left(\frac{x}{A}\right)^2$

مثال: در یک حرکت هماهنگ ساده هنگامی که انرژی پتانسیل نوسانگر ۳ برابر انرژی جنبشی آن است، تندی نوسانگر ۳ m/s است. بیشینه تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵ (جواب: گزینه ۱)

* در $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$، $K = U$ ($= \frac{E}{2}$) است و هرچه از این دو نقطه به مرکز نوسان نزدیک شویم، تندی و در نتیجه انرژی جنبشی نوسانگر افزایش می یابد. ($|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}A$ ، $K \geq U$ ، $|x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}A$ ، $K \leq U$)

($x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A \longleftrightarrow U = K = \frac{E}{2}$ نصف انرژی مکانیکی کل)

Scanned by TapScanner

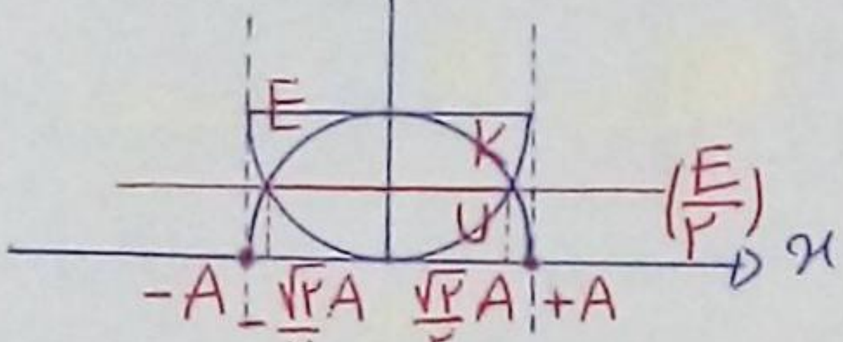
مثال: معادله یک حرکت هماهنگ ساده در SI، به صورت $x = A\cos(25\pi t)$ است. چند ثانیه پس از لحظه $t=0$، برای دومین بار انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر با هم برابر می‌شوند؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴ (جواب: گزینه ۳)

* در نقطه‌های $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$، $U = K = \frac{E}{2}$ است.

* در نقطه‌های $x = \pm A$، $U = E$ $(U = U_{max})$
در نقطه‌ی $x = 0$، $U = 0$ است.

* در نقطه‌های $x = \pm A$، $K = 0$،
در نقطه‌ی $x = 0$، $K = E$ $(K = K_{max})$ است.



* سه نمودار $U-x$، $K-x$، $E-x$ در یک دستگاه رسم شده‌اند.

$E-x$: خط موازی محور xها (ثابت)
$K-x$: سهمی به سمت پایین
$U-x$: سهمی به سمت بالا

سختی $k = m\omega^2$
$U = \frac{1}{2}kx^2$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ← سختی

$K \propto A^2 - x^2$ است.
$\left(\frac{V}{V_{max}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2$

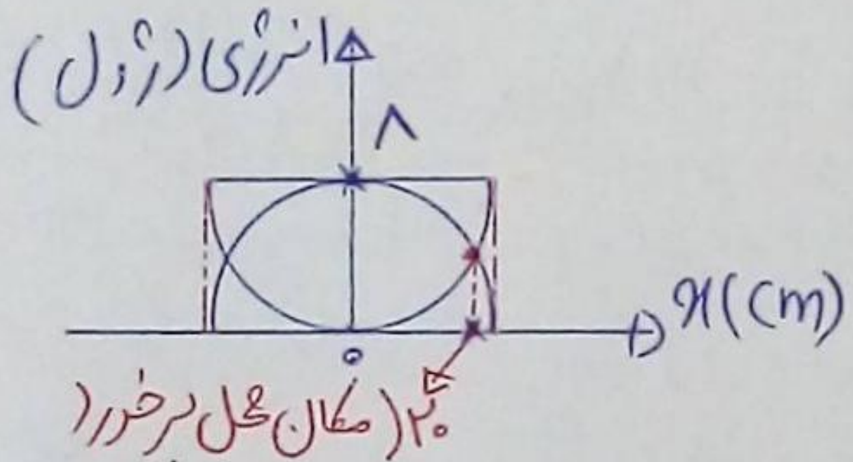
$U \propto x^2$
$\left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 - \left(\frac{V}{V_{max}}\right)^2$

$V_{max} = A\omega$

$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_{max}}\right)^2 = 1$ (U) (K)

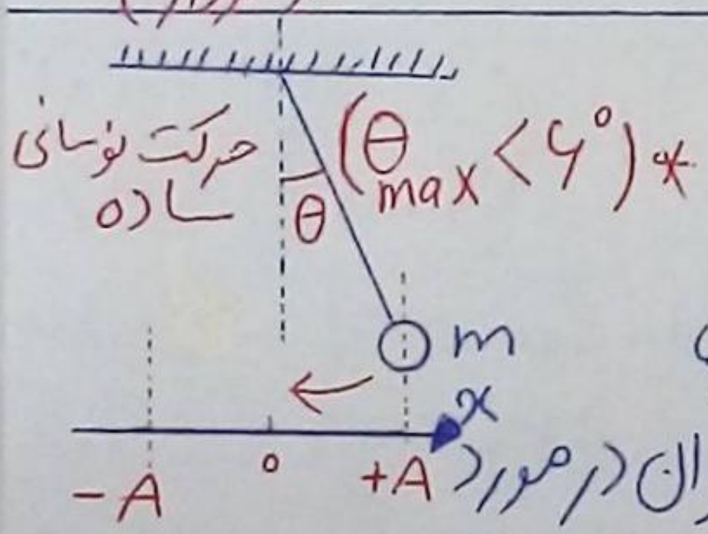
اثبات به عنوان تمرین $(E = U + K)$

مثال: نمودارهای انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل یک دستگاه جرم - فنر که حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، مطابق شکل زیر است. اگر جرم متصل به فنر 2kg باشد، دوره تناوب این حرکت تقریباً چند ثانیه است؟



۱) ۰/۳۱۴ ۲) ۰/۶۲۸
۳) ۳/۱۴ ۴) ۶/۲۸ (جواب: گزینه ۲)

* در صورتی که این مجموعه را با دامنه کم به نوسان درآوریم (به طوری که $\theta_{max} < 6^\circ$ باشد)، به آن آونگ ساده گفته می‌شود، زیرا حرکت آن مانند دستگاه جرم - فنر خواهد بود. به عبارت دیگر، تمام روابط گفته شده در مورد حرکت سامانه جرم - فنر را می‌توان در مورد حرکت آونگ نیز به کار برد. فقط رابطه مربوط به دوره تناوب که به ویژگی‌های ساختمانی نوسانگر وابسته است، در این دو سامانه متفاوت است.



$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (دوره تناوب آونگ ساده)
(s)
L: طول آونگ (m)
g: شتاب گرانش (m/s^2)

* جرم و نیز دامنه نوسان (به شرط این که دامنه کوچک باشد)، روی دوره تناوب بی‌تأثیرند.

Scanned by TapScanner

* حالت هایی که در آن شتاب سقوط آزاد (g) در رابطه دوره تناوب آونگ تغییر می کند:

① شتاب گرانشی از رابطه $g = G\frac{M}{r^2}$ به دست می آید، (M جرم سیاره، r فاصله تا مرکز سیاره) * در صورتی که M یا r تغییر کند، g تغییر کرده و روی دوره تناوب آونگ ساده موثر است. ② اگر آونگ در راستای قائم با شتاب حرکت کند، $g' = g \pm a$ (آسانسور یا ...) در این رابطه، علامت مثبت برای شتاب رو به بالا (تند شونده رو به بالا ($\vec{V} \uparrow \vec{a} \uparrow$) یا کند شونده رو به پایین ($\vec{V} \uparrow \vec{a} \downarrow$)) و علامت منفی برای شتاب رو به پایین (تند شونده رو به پایین ($\vec{V} \downarrow \vec{a} \downarrow$) یا کند شونده رو به بالا ($\vec{V} \downarrow \vec{a} \uparrow$)) است. ③ در صورتی که در راستای قائم، علاوه بر نیروی وزن، نیروی دیگری به وزنه آونگ وارد شود، باز هم به جای g از g' استفاده می کنیم.

$g' = g \pm \frac{F}{m}$ ← نیروی وارد بر وزنه آونگ بر حسب نیوتون
← جرم وزنه آونگ بر حسب کیلوگرم (kg)

* اگر نیرو رو به پایین و هم جهت وزن باشد، از علامت مثبت و اگر نیرو رو به بالا و خلاف وزن باشد از علامت منفی استفاده می کنیم.

مثال: دوره نوسانات کم دامنه یک آونگ ساده ۲ ثانیه است. اگر طول آونگ را ۱۹ درصد کاهش و جرم وزنه آونگ را ۱۰ درصد افزایش دهیم، در همان محل، دوره نوسان آونگ چند ثانیه می شود؟
۱) ۰/۹ ۲) ۱/۱۸ ۳) ۲ ۴) ۲/۶ (جواب: گزینه ۲)

مثال: دوره آونگ ساده ای در سطح زمین و در کنار آب های آزاد T است. اگر همین آونگ را به سیاره دیگری ببریم که جرم آن نصف جرم زمین و شعاع آن نیز نصف شعاع زمین است، دوره تناوب آونگ چند T خواهد شد؟
۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$ (جواب: گزینه ۳)

مثال: دو آونگ ساده A و B با هم شروع به نوسان می کنند. اگر در مدت زمان t، آونگ A، n نوسان کامل از آونگ B جلو بیفتد، t کدام است؟

۱) $t = T_A - T_B$ ۲) $t = \frac{T_A - T_B}{n}$ ۳) $t = \frac{nT_AT_B}{T_A + T_B}$ ۴) $t = \frac{nT_AT_B}{T_B - T_A}$

(جواب: گزینه ۴)

Scanned by TapScanner

نوسان و موج

مثال: دو آونگ ساده دارای دوره های تناوب ۱/۵ ثانیه و ۲ ثانیه هستند. اگر آونگ ها را به گونه ای به هم ببندیم که طول آونگ جدید برابر مجموع طول آونگ های قبلی و جرم وزنه آونگ جدید نیز برابر مجموع جرم آونگ های قبلی شود، دوره آونگ جدید چند ثانیه است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۴/۵ (جواب: گزینه ۳)

* روابط گفته شده در مورد تندی رشتاب دستگاه جرم - فنر در مورد آونگ ساده نیز قابل استفاده است.

مثال: آونگ ساده ای به طول ۹ متر از سقف آسانسور است. وزنه آونگ را نسبت به نقطه تعادلش (m) ۱۰ جابه جا کرده و از حال سکون رها می کنیم. بیشینه تندی وزنه آونگ چند متر بر ثانیه خواهد شد؟ ($g = \pi^2 m/s^2$)

۱) $\frac{\pi}{15}$ ۲) $\frac{\pi}{30}$ ۳) $\frac{\pi}{60}$ ۴) $\frac{\pi}{120}$ (جواب: گزینه ۲)

* در حرکت آونگ ساده بسامد طبیعی عکس دوره تناوب آونگ بوده و از رابطه $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$ به دست می آید. * به علت وجود نیروهای مقاوم، اغلب نوسان های طبیعی پس از مدتی متوقف می شوند. در این حالت می گوییم نوسان میرا است.

* نوسان واداشته: اگر به نوسانگر، نیروی خارجی دوره ای اعمال شود، نوسانگر، بسامدی متفاوت از بسامد طبیعی نیز پیدا می کند که آن را با f_d نمایش می دهیم. به این حرکت نوسان واداشته گفته می شود.

* در چه صورت پدیده تشدید رخ می دهد؟ هرگاه بسامد نوسان واداشته برابر با بسامد طبیعی نوسانگر شود ($f_0 = f_d$)، دامنه نوسان بیشترین مقدار خود را پیدا می کند. به این پدیده تشدید گفته می شود. در چنین وضعیتی نیروی اعمال شده به نوسانگر انرژی می دهد و این انرژی انرژی تلف شده بر اثر نیروهای مقاوم (مثل اصطکاک یا مقاومت هوا) را جبران می کند. به عنوان مثال، اگر شخص سوار بر تاب باشد و در هر بار نوسان به آن نیروی ثانی وارد کنیم، دامنه نوسان بیشترین مقدار خود را پیدا می کند.

* برای آن که پدیده تشدید رخ دهد، باید بسامد نوسان واداشته با بسامد طبیعی نوسانگر برابر شود و با توجه به رابطه ی $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$، باید طول ها (L) یکسان باشد.

($f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$) *

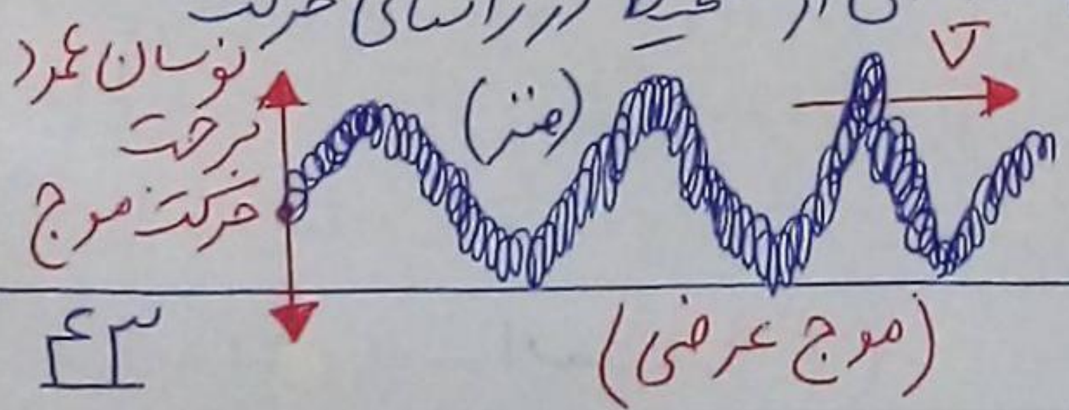
Scanned by TapScanner

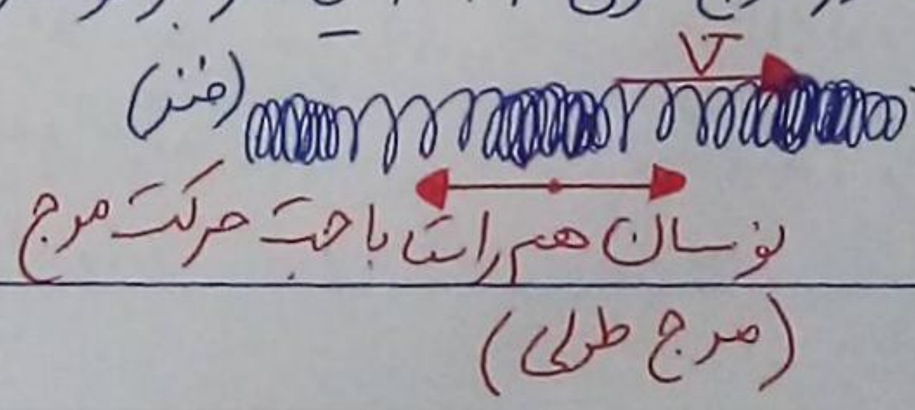
مثال: در یک آزمایش مربوط به آرنگ های بارتون، بسامد زاویه ای واداردنده در گستره ۳۲rad/s تا ۴۲rad/s است. طول آرنگ های سبک به کار رفته در این آزمایش (نسبت به تیر آویز) $L_1 = 10cm$، $L_2 = 45cm$، $L_3 = 100cm$ و $L_4 = 150cm$ است. کدام آرنگ به تشدید در می آید؟ 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 (جواب: گزینه ۳)

* هرگاه ارتعاشی در ناحیه ای از یک محیط کشسان به وجود آید، مرجب پدید آمدن ارتعاش های پی در پی دیگری می شود و انرژی در محیط منتشر می شود، به این ترتیب مرج به وجود می آید.
* انتقال همراه با تاخیر حرکت نوسانی از نقطه ای از محیط به نقطه دیگری در محیط را انتشار موج می نامیم. * تقسیم بندی مرج ها در فیزیک کلاسیک: ① مرج های مکانیکی: این مرج ها برای انتشار نیاز به محیط مادی دارند، مانند مرج های صوتی یا مرج های روی سطح آب. در این نوع مرج، حرکت ارتعاشی ذرات محیط به یکدیگر منتقل می شود؛ زیرا نواحی مختلف محیط به یکدیگر پیوسته اند. ② مرج های الکترومغناطیسی: این مرج ها برای انتشار نیاز به محیط مادی ندارند، مانند نور مرئی، مرج های رادیوی و تلویزیونی، میکرو مرج و پرتوهای X. پیوستگی بین نواحی مجاور در این نوع مرج، ناشی از آن است که هر ارتعاش میدان الکتریکی مرجب پدید آمدن یک میدان مغناطیسی می شود و نیز هر ارتعاش میدان مغناطیسی مرجب پدید آمدن یک میدان الکتریکی می گردد، به این ترتیب مرج الکترومغناطیسی منتشر می شود.

* امواج مکانیکی و الکترومغناطیسی منشا متفاوتی دارند، ولی رفتار آن ها از قاعده های کلی پیروی می کند که خاص هر پدیده مرجی است.

* در مرج های پیش رونده، این مرج است که از نقطه ای به نقطه دیگر حرکت می کند و انرژی را منتقل می کند؛ نه ساده ای که مرج در آن حرکت می کند. مرج های پیش رونده را می توان به دو دسته مرج های عرضی و مرج های طولی تقسیم بندی کرد. ① مرج های عرضی: در مرج های عرضی، جابه جای هر جزء نوسان کننده ای از محیط، عمود بر جهت حرکت (انتشار) مرج است.
② مرج طولی: در مرج طولی جابه جای هر جزء نوسان کننده ای از محیط در راستای حرکت مرج است.





Scanned by TapScanner

* در موج های پیش رونده، نیاز به چشمه موجی داریم که حرکت نوسانی انجام دهد. در هنگام انتشار، موج از این چشمه دور می شود و اجزای محیط حول نقطه تعادل خود با همان بسامد چشمه، نوسان می کند. * موج پیش رونده، در حین انتشار موج، انرژی را از یک نقطه به نقطه دیگر منتقل می کند. * انتشار موج در دو بعد (موج ایجاد شده روی سطح آب) * در مورد موج ایجاد شده روی سطح آب (تخت یا دایره ای) سرآمدگی ها یا فرورفتگی های ایجاد شده روی سطح آب، اصطلاحا یک جبهه ی موج را تشکیل می دهد. جبهه های موج با انتشار موج در سطح آب حرکت می کند. * اگر در یک لحظه از موج ایجاد شده در سطح آب عکس بگیریم، به برآمدگی ها در آن لحظه قله و به فرورفتگی ها دره گفته می شود. * وقتی به سطح آب ضربه می زنیم، علاوه بر ایجاد موج عرضی در سطح آب، درون آب نیز موج طولی ایجاد می کنیم.

---

* فرض کنیم در یک متر موج عرضی سینوسی ایجاد شده است. همان طور که گفته شد، در این حالت تمام اجزای متر حول نقطه تعادل خود حرکت هماهنگ ساده با بسامد یکسان که بسامد چشمه موج است، انجام می دهند. * بیشترین جابه جایی یک ذره از مکان تعادل، دامنه موج (A) نامیده می شود که همان فاصله قله یا دره نسبت به سطح آرام یا ساکن است. * مدت زمانی که هر ذره یک نوسان کامل انجام می دهد، دوره تناوب موج نامیده می شود که برابر با زمانی است که چشمه موج یک نوسان کامل انجام می دهد. * تعداد نوسان های انجام شده توسط هر ذره در ثانیه، بسامد موج نامیده می شود که برابر با بسامد چشمه موج نیز هست. $(f = \frac{1}{T})$
* مسافتی که موج در مدت یک دوره تناوب نوسان چشمه طی می کند را طول موج می نامیم. (λ) در واقع طول موج فاصله بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی مجاور و به طور کلی دو نقطه کاملا مشابه متوالی است. (فاصله بین دو جبهه ی موج متوالی، طول موج (λ) است)
* فاصله ای که یک جبهه ی موج در واحد زمان طی می کند، تندی انتشار موج نامیده می شود. (V)
* تندی انتشار موج، به جنس و ویژگی های محیط انتشار موج بستگی دارد. به عنوان مثال، تندی انتشار موج سطحی روی آب کم عمق با افزایش عمق افزایش می یابد. * وقتی با یک چشمه، موج ایجاد می کنیم، تمام نقاطی که موج به آن ها می رسد، با همان بسامد چشمه، شروع به نوسان می کند * اگر موجی در یک محیط و توسط یک چشمه ایجاد شود، در هنگامی که وارد محیط دیگری شود،

$\left(V = \frac{\lambda}{T} = \lambda f\right)$ $\left(\frac{V}{(m/s)} = \frac{\lambda}{T_{(s)}} \frac{(m)}{(Hz)}\right)$

بسامد آن ثابت می ماند. (f)

Scanned by TapScanner

مثال: دو فنر بلند از یک سر به هم متصل هستند. سر دیگر یکی از آن ها را با بسامد f_1 به نوسان درآورده و در فنر (۱)، موجی با طول موج λ_1 ایجاد می‌کنیم. این موج در محل اتصال، وارد فنر (۲) می‌شود. طول موج و بسامد در این فنر λ_2 و f_2 است. اگر تندی انتشار موج در فنر (۲) بیش‌تر باشد، کدام رابطه درست است؟

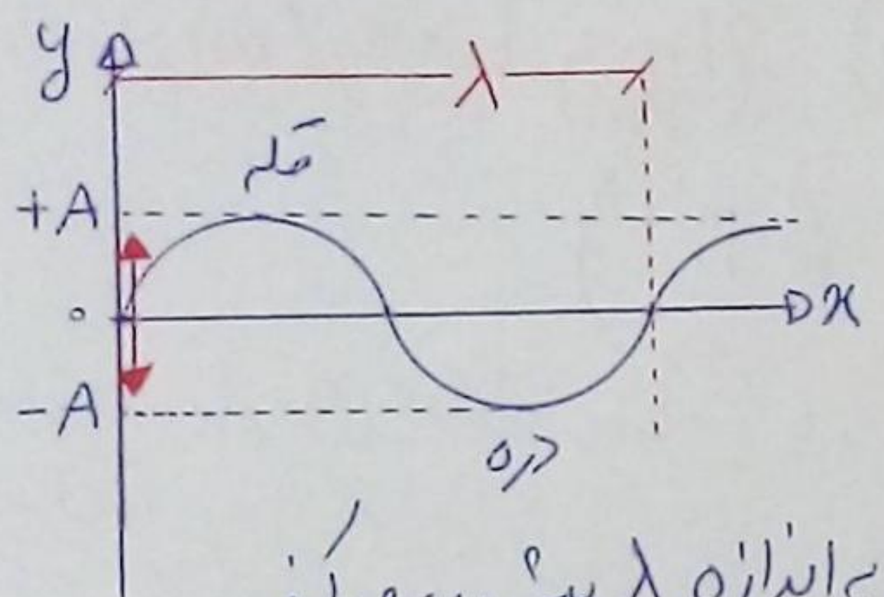
۱) $f_2 > f_1 ، \lambda_2 > \lambda_1$ ۲) $f_2 = f_1 ، \lambda_2 > \lambda_1$

۳) $\lambda_2 < \lambda_1 ، f_2 > f_1$ ۴) $f_2 = f_1 ، \lambda_2 < \lambda_1$

(جواب: گزینه ۲)

* $v = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$
* $T \equiv \lambda \equiv 2\pi$
(تغییرناپذیر) (طول) (زمان)

* در شکل مقابل A دامنه و λ طول موج است.



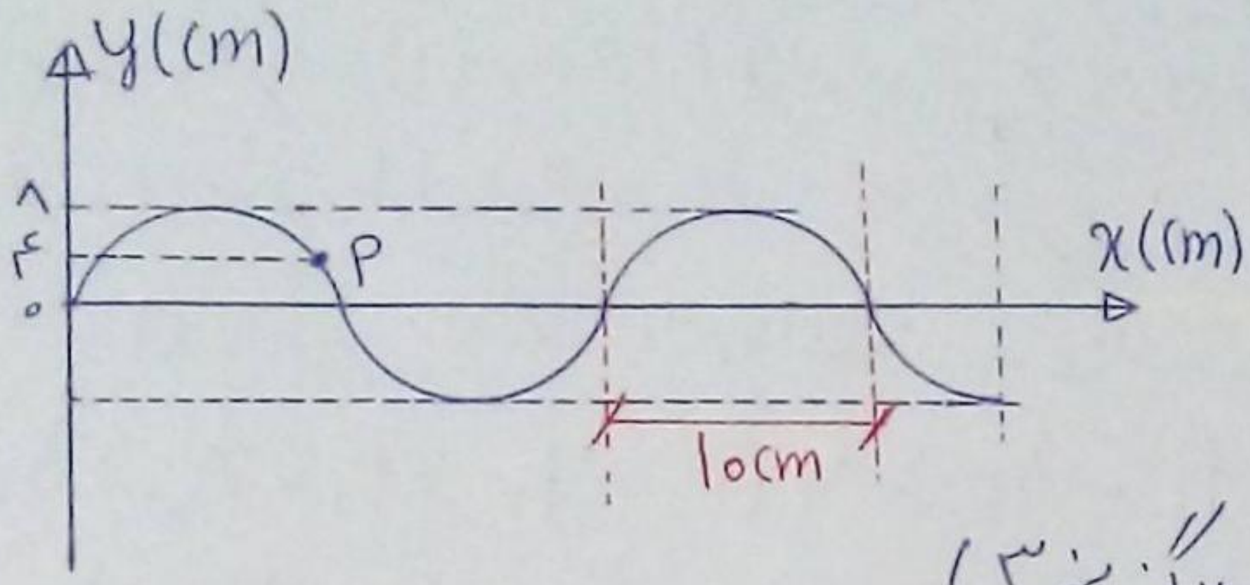
* مواظب باشید تندی انتشار موج را با تندی نوسان ذرات محیط انتشار موج اشتباه نگیرید. ذرات محیط حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهند و تندی آن‌ها بین صفر تا $A\omega$ متغیر است. ولی تندی انتشار موج ثابت و $v = \lambda f$ است. * در مدت یک دوره تناوب، موج به اندازه λ پیشروی می‌کند و در این مدت هر نقطه روی موج عرضی یک نوسان کامل انجام می‌دهد. $(T \equiv \lambda \equiv 2\pi)$
ذرات محیط انتشار موج — یک نوسان کامل

* اگر در یک لحظه، شکل موج را یک نقطه روی آن به ما داده شود و بخواهیم نوسان آن نقطه در آن لحظه مورد سوال باشد، باید به نقاط پشت سر آن نقطه توجه کنیم. زیرا این حرکت نقطه قبلی است که پس از چند لحظه به این نقطه می‌رسد. مثلاً اگر موج در حال انتشار به سمت راست است، نقاط مجاور سمت چپ مهم می‌شوند و اگر موج در حال انتشار به سمت چپ است، نقاط مجاور سمت راست مهم می‌شوند.

* بیشینه تندی هر ذره از محیط انتشار موج برابر $A\omega$ است. * اگر در سوالی شکل تابع یک موج سینوسی با دوره T را در لحظه $t = 0$ به ما داده باشند و شکل این موج را در لحظه $t = \frac{T}{4}$ (یا لحظه‌های دیگر) از ما خواسته باشند ← موج در مدت $\frac{T}{4}$ به اندازه $\frac{\lambda}{4}$ پیشروی می‌کند. بنابراین کافی است، محورها را در شکل سوال، به اندازه $\frac{\lambda}{4}$ در خلاف جهت حرکت موج جابه‌جا کنیم. * فاصله دو نقطه هم فاز (جهت حرکت و سرعت آن‌ها برابر باشد) روی نمودار تابع یک موج عرضی برابر یک طول موج است.
جهت و سرعت نوسان در ذره (نقطه) یکسان باشد — λ

Scanned by TapScanner

مثال: تابع یک موج سینوسی، در لحظه‌ای مطابق شکل زیر است. چند ثانیه پس از این لحظه، نقطه P برای اولین بار متوقف می‌شود؟



۱) $\frac{1}{100}$ ۲) $\frac{1}{200}$ ۳) $\frac{1}{300}$ ۴) $\frac{1}{400}$

(جواب: گزینه ۳)

جرم کل (kg) → $\mu = \frac{m}{L}$ ، $V = \sqrt{\frac{F(N)}{\mu(\frac{kg}{m})}}$ (m/s)

طول کل (m) → $(\frac{kg}{m})$ — چگالی خطی

* تندی انتشار موج عرضی در یک ریسمان یا فنر — چگالی $(\frac{m}{V})$

$*\mu = \rho \times A$ ، ρ: چگالی $(\frac{kg}{m^3})$ ، A: سطح مقطع (m^2) ، $(\frac{kg}{m})$

(* اثبات به عنوان تمرین)

* تندی انتشار موج عرضی در طناب یا ریسمان، به طول آن هاستگی ندارد.

(مساحت دایره $= \pi R^2 = \frac{\pi}{4} D^2$ ، R: شعاع، D: قطر)

* وقتی در یک ریسمان یا فنر کشیده شده موج عرضی ایجاد می‌کنیم، در واقع، انرژی را برای حرکت ریسمان فراهم کرده‌ایم. با دور شدن موج، این انرژی هم به صورت انرژی جنبشی و هم به صورت انرژی پتانسیل کشسانی انتقال می‌یابد. (انتقال انرژی توسط موج عرضی)

* آهنگ متوسط انتقال انرژی برای همه انواع امواج مکانیکی با مربع دامنه و نیز مربع بسامد موج متناسب است.

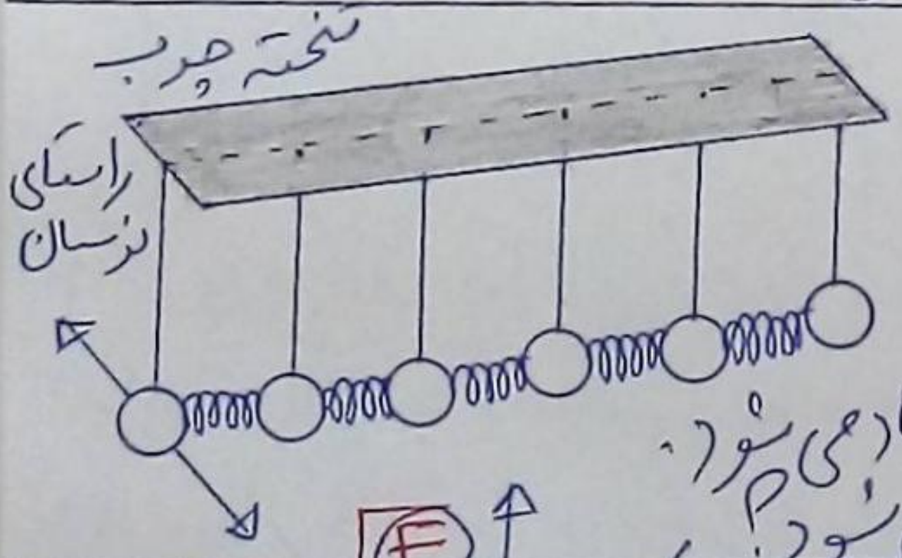
$\overline{P} \propto A^2 f^2$

(آهنگ متوسط انتقال انرژی)

---

* نیروی کشش طناب در دو طرف قرقره (قرقره بدون اصطکاک، جرم طناب متصل به جسم و قرقره ناچیز)، یکسان است و قرقره تنها جهت نیروی کشش طناب را تغییر می‌دهد.

مثال: مطابق شکل، چند آونگ در فاصله یکسان از یک قطعه چوب آویزان شده و توسط فرهای یکسان به هم متصل شده‌اند. اگر اولین آونگ را مطابق شکل به طور افقی و عمود بر راستای فنرها به نوسان درآوریم، موج عرضی (در مجموعه) ایجاد می‌شود. به چه طریق تندی انتشار این موج عرضی در مجموعه بیشتر می‌شود؟



جواب: از فنرهایی با ثابت بزرگتر و وزنه‌هایی با جرم کمتر استفاده کنیم. $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ↓

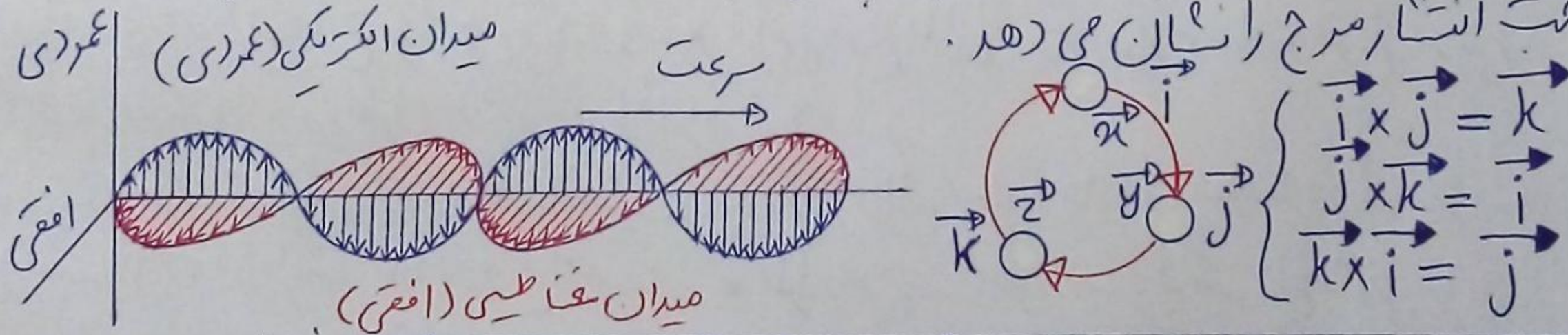
Scanned by TapScanner

مثال: توسط یک چشمه، درون یک ریسمان کشیده شده موج عرضی ایجاد کرده ایم. اگر به جای چشمه قبلی از چشمه دیگری استفاده کنیم که بسامد آن دوبرابر باشد، درهمان ریسمان و درهمان شرایط قبلی به ترتیب از راست به چپ، تندی انتشار موج و آهنگ انتقال انرژی در آن چند برابر می شود؟

۱) ۲، ۴ ۲) ۱، ۲ ۳) ۱، ۴ ۴) ۲، ۲ (جواب: گزینه ۳)

* امواج الکترومغناطیسی نمی توانند ناشی از میدان الکتریکی یا مغناطیسی ثابت باشند. مثلاً میدان الکتریکی اطراف بارهای ثابت یا میدان مغناطیسی اطراف یک حربان ثابت، نمی توانند موج الکترومغناطیسی ایجاد کنند. * تغییر میدان مغناطیسی می تواند میدان الکتریکی تولید کند. * تغییر میدان الکتریکی نیز می تواند میدان مغناطیسی تولید کند * امواج الکترومغناطیسی باید لزوماً ناشی از تغییرات هم زمان میدان الکتریکی و مغناطیسی (اصطلاحاً میدان الکترومغناطیسی) باشند. بنابراین می توان گفت عامل ایجاد امواج الکترومغناطیسی ذرات بارداری هستند که حرکت نوسانی انجام داده و می توانند میدان های الکتریکی و مغناطیسی نوسانی ایجاد کنند.

* مشخصه های امواج الکترومغناطیسی سینوسی: ① میدان های الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ همواره برهم عمودند. ② میدان های الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ همواره برجهت حرکت موج عمود هستند؛ بنابراین موج الکترومغناطیسی یک موج عرضی است. ③ میدان ها همواره با بسامد سینوسی تغییر می کنند. ④ میدان ها با بسامد یکسان و همگام (هم فاز) با یکدیگر تغییر می کنند. ⑤ این امواج برای انتشار نیاز به محیط مادی ندارند. * تشخیص جهت انتشار امواج الکترومغناطیسی: در نقاط دور از چشمه موج الکترومغناطیسی، اگر دست راست خود را به گونه ای بگیریم که چهار انگشت دست راست در جهت $\vec{E}$ و کف دست در جهت $\vec{B}$ باشد، به طوری که بسته شدن چهار انگشت در جهت $\vec{B}$ باشد، انگشت شصت (دست راست) جهت انتشار موج را نشان می دهد.



* ضرب خارجی $\vec{E} \times \vec{B}$ همواره جهت انتشار موج را نشان می دهد. (منتی ضرب شود ← خلاف جهت)

Scanned by TapScanner

مثال: در یک موج الکترومغناطیسی، در یک نقطه دور از چشمه موج، در لحظه‌ای میدان الکتریکی در جهت $-x$ و میدان مغناطیسی مربوط به آن در همان لحظه، در جهت $+z$ است. جهت انتشار موج الکترومغناطیسی کدام است؟ (جواب: گزینه ۱)

۱) $+y$ ۲) $-y$ ۳) $+x$ ۴) $-x$

سرعت انتشار امواج الکترومغناطیسی در خلا = $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3 \times 10^8$ m/s

سرعت نور در خلا

* تندی انتشار تمام امواج الکترومغناطیسی در خلا یکسان است؛ ولی در محیط‌های غیر از خلا، مانند آب، شیشه و ... تندی انتشار آن‌ها یکسان نیست. * نور یک موج الکترومغناطیسی است. $(V = \lambda f)$

* برخلاف موج‌های مکانیکی، موج‌های الکترومغناطیسی برای انتشار نیاز به محیط مادی ندارند. بنابراین امواج الکترومغناطیسی انرژی را نه به صورت انرژی جنبشی و نه به صورت انرژی پتانسیل ذرات محیط، بلکه به صورت انرژی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی منتقل می‌کنند.

* طیف امواج الکترومغناطیسی

امتداد انتشار موج

گاما — x — فرابنفش — مرئی — فروسرخ — میکرو موج — امواج رادیویی

امتداد طول موج

* کاربردهای موج‌های الکترومغناطیسی * طیف فوق هیچ گسستگی‌ای ندارد و پیوسته است.

* در انتشار موج طولی در یک متر بلند، با انتشار موج، ناحیه‌های جمع‌شدگی (تراکم) و باز‌شدگی (انبساط) به طور متناوب در طول متر ظاهر می‌شوند. در این حالت اجزای محیط (حلقه‌های متر) در راستای انتشار موج نوسان می‌کنند. * برای موج طولی نیز می‌توان مانند موج عرضی، مشخصه‌های دامنه، طول موج و ... را تعریف کرد.

* در موج طولی فاصله بین دو نقطه با بیشینه جمع‌شدگی (تراکم) یا فاصله دو نقطه با بیشینه باز‌شدگی (انبساط)، برابر یک طول موج است. * طول موج مسافتی است که یک جمع‌شدگی یا یک باز‌شدگی، آن را در مدت یک دوره تناوب طی می‌کند.

Scanned by TapScanner

* مانند موج عرضی، در موج طولی نیز بیشینه جابه‌جایی اجزای محیط (حلقه‌ها) از مکان تعادلشان را دامنه موج می‌نامیم (A) * مانند تمام امواج، حاصل ضرب طول موج (λ) در بسامد موج (f) برابر تندی انتشار موج (v) است $v = \lambda f$ (تمامی امواج)

* تندی انتشار امواج طولی در یک محیط همواره بیش‌تر از تندی انتشار امواج عرضی در همان محیط است.

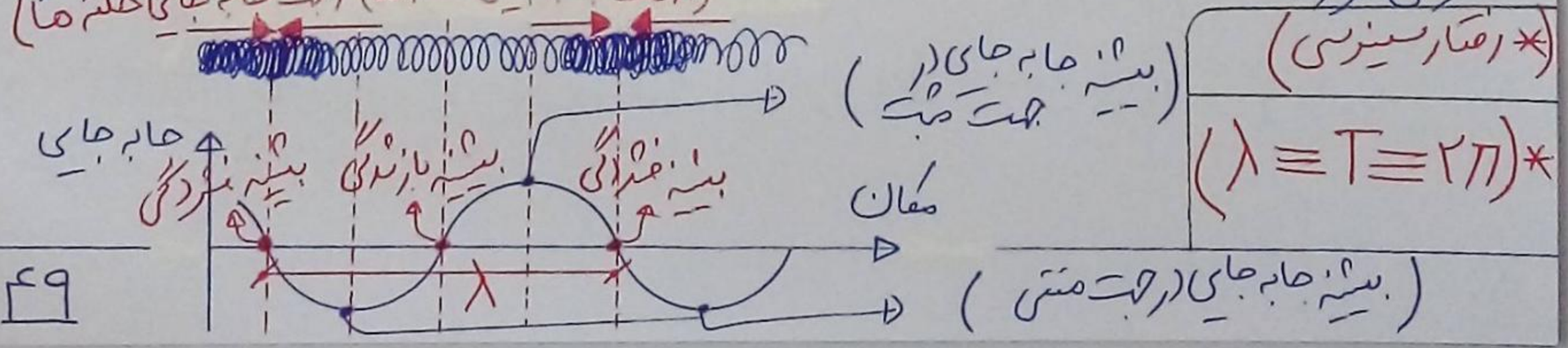
مثال: در یک فنر کشیده شده، موج طولی ایجاد کرده‌ایم که با تندی 2m/s در آن در حال انتشار است. اگر فاصله بین دو نقطه پشت سر هم که بیشترین فشردگی را دارند 10cm باشد، بسامد این موج چند هرتز است؟

۱) 10 ۲) 20 ۳) 0/1 ۴) 0/2 (جواب: گزینه ۲)

* هنگامی که یک موج طولی در حال انتشار در یک فنر است، فشردگی‌ها و بازشدگی‌ها در طول فنر حرکت می‌کنند. اگر در یک لحظه، یک فشردگی به یک حز فنر برسد، در آن لحظه، جابه‌جای حز فنر نسبت به حالت تعادل خودش صفر است و حلقه‌های دو طرف این حز از فنر در حال تردیک شدن به آن هستند. این اتفاق برای حزی از فنر که در آن جا حلقه‌ها بیش‌ترین بازشدگی را دارند نیز مشابه است. به این ترتیب، وقتی یک موج طولی در یک فنر منتشر می‌شود، می‌توان گفت: ① در مکان‌هایی که بیشترین جمع‌شدگی یا بیشترین بازشدگی حلقه‌ها رخ می‌دهد جابه‌جایی هر حز فنر از وضعیت تعادل صفر است. ② در دو طرف این نقاط (نقاط با جابه‌جایی صفر)، در همان لحظه، حلقه‌های فنر در دو جهت خلاف هم جابه‌جا شده‌اند. ③ درست در وسط فاصله بین بیشینه جمع‌شدگی و بیشینه بازشدگی مجاور هم، اندازه جابه‌جایی هر حز فنر از وضعیت تعادل، بیشینه است. * بررسی بالا، برای یک لحظه است، با گذشت زمان، نقطه‌ای که در آن جا، حلقه‌ها بیشترین فشردگی را دارند به محل دیگری رفته و در آن لحظه، آن حز فنر به مرکز تعادل خودش می‌رسد و حز قبلی که قبلا در مرکز تعادل خودش بود، جابه‌جایی پیدا می‌کند. به این ترتیب است که موج طولی در طول فنر منتشر می‌شود.

(* راهکار سینوسی)

($\lambda \equiv T \equiv 2\pi$) *



Scanned by TapScanner

مثال: در هنگام انتشار موج در یک متر، در یک لحظه، کم‌ترین فاصله بین نقطه‌ای که در آن بیشینه فشردگی جلوه‌ها رخ داده تا نقطه‌ای که در آن، جلوه متر بیشترین جابه‌جایی را دارد، ۴cm است. اگر بسامد این موج 5Hz باشد، تندی انتشار موج چند متر بر ثانیه است؟
۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۸ ۴) ۱/۶ (جواب: گزینه ۳)

* امواج لرزه‌ای، موج‌هایی هستند که از لایه‌های زمین عبور کرده و انرژی را منتقل می‌کنند، یکی از منشاهای مهم امواج لرزه‌ای، زمین‌لرزه‌ها هستند. * انواع امواج لرزه‌ای:
① امواج اولیه (P). این نوع امواج، موج‌های طولی هستند که از بین لایه‌های مختلف زمین عبور می‌کنند. ② امواج ثانویه (S): این نوع امواج، موج‌های عرضی هستند که از بین لایه‌های مختلف زمین عبور می‌کنند * در اجسام جامد، تندی انتشار موج‌های طولی بیش‌تر از تندی انتشار موج‌های عرضی است. به همین علت، تندی انتشار موج P بیش‌تر از تندی انتشار موج S بوده، در یک زمین‌لرزه، موج‌های P نسبت به موج‌های S سریع‌تر توسط لرزه‌نگارها دریافت می‌شوند و به آن‌ها امواج اولیه گفته می‌شود.
(P → primary)، (S → secondary)

مثال: اختلاف زمان رسیدن امواج لرزه‌ای P و S به یک لرزه‌نگار ۲/۵ دقیقه است. اگر تندی امواج S و P به ترتیب $V_P = 8\,km/h$ و $V_S = 4\,km/h$ باشد، فاصله محل وقوع زمین‌لرزه تا لرزه‌نگار چند کیلومتر است؟
۱) ۲۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۱۸۰۰ (جواب: گزینه ۳)

* اجسام مرتعش مانند سیم گیتار، دیافراگم یک بلندگو یا تارهای صوتی انسان می‌توانند صوت ایجاد کنند. به این اجسام چشمه صوت گفته می‌شود. * صوت یک موج مکانیکی طولی است و برای انتشار نیاز به یک ماده دارد. صوت می‌تواند در گازها، مایع‌ها و جامدها منتشر شود. * مانند بازشدگی‌ها و جمع‌شدگی‌های فنر هنگام انتشار موج طولی در آن، صوت نیز مجموعه‌ای از تراکم‌ها و انبساط‌ها تشکیل شده است.
(* فاصله بین دو تراکم یا دو انبساط متوالی (یا هر دو نقطه هم‌فاز متوالی دیگر) برابر طول موج (λ) است.)

Scanned by TapScanner

* مولکول های هوا همراه صوت، از چشمه به محل شنیده شدن صوت حرکت نمی کنند، بلکه مانند حلقه های فنری که در آن موج طولی ایجاد شده است، مولکول های هوا در جای خود حرکت نوسانی در راستای انتشار موج انجام می دهند. * صوت در تمام جهت ها منتشر می شود. اگر محیط در تمام جهت ها یکسان باشد، موج صوتی به صورت کروی در فضا پخش می شود. یعنی جبهه های موج صوتی کروی هستند. توجه کنید که مولکول های هوا در جای خود و در راستای انتشار موج نوسان می کنند و همراه صوت حرکت نمی کنند.

* اگر به وسیله دیاپازون در هوا موج صوتی ایجاد کنیم، این موج، یک موج سینوسی خواهد شد. زیرا چشمه صوت (دیاپازون) یک نوسانگر هماهنگ ساده است. * فرض کنیم دیاپازونی در حال نوسان در محیطی است. اگر تیغه دیاپازون را به سمت راست منحرف کنیم، لایه هوای مجاور خود را متراکم می کند و فشار آن نسبت به فشار متعادل محیط (فشار هوا) مقداری افزایش پیدا می کند. به دلیل آن که لایه هوای مقابل تیغه فشرده می شود، در این حالت جگالی لایه هوا نیز افزایش می یابد. این لایه فشرده شده به سمت جلو حرکت کرده و سبب متراکم شدن لایه بعدی می شود و بدین صورت یک «تپ تراکمی» در محیط منتشر می شود. با برگشت تیغه دیاپازون، لایه هوای مقابل آن منبسط شده و فشار (جگالی) آن از مقادیر اندکی کم تر می شود. (در این حالت لایه هوا انبساط پیدا کرده و به صورت یک «تپ انبساطی» در هوا منتشر می شود). * هنگامی که حشرات به سرعت در حال بال زدن هستند، بال آن ها، مانند دیاپازون در هوا تپ های تراکمی و انبساطی تولید کرده و صدای وزوز به گوش ما می رسد.

* تندی انتشار صوت: مانند تمام امواج، حاصل ضرب طول موج (λ) در بسامد موج (f) برابر تندی موج، یعنی $v = \lambda f$ است.

مثال: شخصی در فاصله ۱۶۰ متری از یک چشمه صوت قرار دارد و صوت در مدت ۰/۵ ثانیه از چشمه به گوش این شخص می رسد. اگر بسامد چشمه ۲۰۰۰ هرتز باشد، فاصله بین دو تراکم متوالی چند سانتی متر است؟ ۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

(جواب: گزینه ۲)

* عموما صوت در جامدها سریع تر از مایع ها و در مایع ها سریع تر از گازها حرکت می کند. (البته استثناهایی هم وجود دارد.)

Scanned by TapScanner

* برهم‌کنش بین مولکول‌ها در تندی انتشار صوت نقش مهمی دارد. برهم‌کنش نسبتاً قوی بین مولکول‌های یک جامد بسیار بیش‌تر از برهم‌کنش بین مولکول‌های یک گاز بوده و در نتیجه تندی انتشار صوت در جامدها بسیار بیش‌تر از همین تندی در گازها است. بیش‌تر بودن تندی صوت در آب نسبت به تندی صوت در هوا را نیز، می‌توان به همین مرجع ربط داد.

* مثال: اگر صوتی از آب وارد هوا شود، فاصله بین دو تراکم کاهش و بسامد مرجع ثابت می‌ماند.

$V\downarrow = \lambda\downarrow f_{\text{ثابت}}$ ، $\lambda\downarrow$ ، f (ثابت)

* دما روی تندی صوت در مایع‌ها و گازها اثر قابل توجهی دارد ولی اغلب در جامدات این اثر ناچیز است. * وقتی دمای گاز افزایش پیدا می‌کند، برهم‌کنش بین مولکول‌های گاز افزایش یافته و در نتیجه تندی صوت در آن افزایش می‌یابد.

مثال: اگر در دمای ثابت، مقدار هوای داخل یک ظرف را افزایش دهیم، تندی صوت در هوای داخل این ظرف ثابت می‌ماند زیرا فقط جنس و دمای گاز روی تندی انتشار صوت مؤثر است. (دما ثابت ← تندی صوت نیز ثابت می‌ماند)

مثال: قطاری در حال حرکت است. شخصی در یک ایستگاه گوش خود را روی ریل گذاشته و در لحظه t_1 صدای قطار را از طریق ریل‌ها می‌شنود. پس از ۱/۵ ثانیه صدای قطار از طریق هوا نیز به گوش او می‌رسد. در لحظه t_1، قطار در چه فاصله‌ای از ایستگاه بر حسب متر بوده است؟ (تندی صوت در هوا ۳۵۰ m/s و تندی صوت در فلز ریل ۱۶ برابر سرعت صوت در هوا است)

۱) ۵۲۵ ۲) ۵۶۰ (جواب: گزینه ۲)
۳) ۵۹۵ ۴) ۶۰۰

* هنگامی که چشمه صوت در یک محیط موج صوتی ایجاد می‌کند، به لایه‌های از محیط که در تماس مستقیم با چشمه است، انرژی می‌دهد. این انرژی از لایه‌های نزدیک چشمه به لایه‌های بعدی و بعدی منتقل می‌شود و جریانی از انرژی به وجود می‌آید که در تمام جهت‌ها از چشمه دور می‌شود. * شدت یک موج صوتی در یک سطح برابر آهنگ متوسط انرژی ای است که توسط موج به واحد سطحی، عمود بر راستای انتشار، صوت می‌رسد و یا از آن عبور می‌کند.

$I = \frac{\bar{P}}{A}$ ، شدت صوت $\left(\frac{W}{m^2}\right)$ ، $I = \frac{\bar{P}}{A}$ ، m^2 ، مساحت سطحی که صوت از آن عبور می‌کند، W آهنگ متوسط انتقال انرژی

* $\left(I = \frac{\bar{P}}{A}\right)$

Scanned by TapScanner

* اگر جبهه های موج صوتی در هوا به شکل کره باشند، آن گاه با دور شدن از چشمه صوت، انرژی از یک کره به کره بزرگتری می رسد و شدت صوت کم می شود. ($A = 4\pi R^2$*)

$$I = \frac{\bar{P}}{4\pi R^2}$$

* آهنگ انتقال انرژی برای همه امواج مکانیکی با سطح دامنه و نیز سطح بسامد موج متناسب است. به عبارت دیگر برای یک موج صوتی که جبهه های موج آن کروی هستند می توان گفت:

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{E}{At}$$

$$I \propto \underbrace{A^2}_{\text{دامنه}}, \underbrace{f^2}_{\text{بسامد موج}}, \underbrace{\frac{1}{R^2}}_{\text{فاصله از چشمه موج}}$$

* $A = 4\pi R^2$

* توان = $\frac{\text{کار انجام شده}}{\text{زمان}}$

* مثال: از یک چشمه نقطه‌ای صوت، امواج صوتی به شکل کره در هوا منتشر می شوند. اگر دامنه چشمه صوت را دو برابر و فاصله تا چشمه صوت را نصف کنیم، شدت صوت چند برابر می شود؟ (م ۰)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶ (جواب: گزینه ۴)

I (شدت صوت)

$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ (شدت مرجع)

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

تراز شدت صوت برحسب dB (دسی بل)

* به این دلیل به عنوان شدت مرجع معیار انتخاب شده است که تردیک به حد پایین گستره شنیداری انسان است. به عبارت دیگر اگر در بسامد مناسب، صوتی دارای این شدت باشد، به زحمت شنیده می شود. (* تراز شدت صوت برای شدت صوت معیار صفر دسی بل است.)

($\log 2 \simeq 0/3$ ، $\log 3 \simeq 0/5$ ، $\log 5 \simeq 0/7$)

* از اتلاف انرژی صرف نظر کرده ایم در حالی که در حالت واقعی اتلاف انرژی داریم و در فاصله کم تری صوت شنیده می شود.*

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

* مقایسه دو تراز شدت صوت

مثال: تراز شدت صوت در فاصله ۲۰ متری از یک چشمه صوت نقطه‌ای برابر $20dB$ است. در چه فاصله‌ای از این چشمه، صوت به زحمت شنیده می شود؟ (از اتلاف انرژی صرف نظر کنید و جبهه های موج کروی هستند.) ۱) ۴۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۰۰۰

(جواب: گزینه ۳)

Scanned by TapScanner

مثال: توسط یک چشمه نقطه‌ای صوت با توان ۱۵ میلی وات مرج صوتی به صورت کروی در هوا منتشر می‌شود. اگر در یک فضای باز، شنونده‌ای در فاصله ۱۰ متری از چشمه، صوت حاصل را با بلندی ۷۰ دسی بل احساس کند، در انتشار صوت در این فاصله چند درصد انرژی توسط محیط جذب شده است؟ ($\pi=3$, $I_0=10^{-12}\ W/m^2$)

۱) ۳ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰ (جواب: گزینه ۳)

* هرگاه یک چشمه صوت بازسان هماهنگ داشته باشیم (مانند دیاپازون) به صوت حاصل از آن تن صوتی یا به اختصار تن (tone) گفته می‌شود. بلندی هر تن، دو ویژگی را می‌توان از هم متمایز ساخت: ارتفاع و بلندی * ارتفاع هر تن، بسامدی است که گوش انسان آن را درک می‌کند * بلندی هر تن، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند.

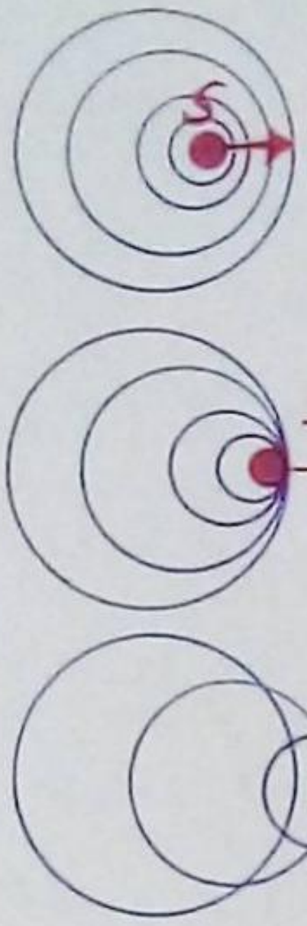
* شدت صوت را می‌توان با یک آشکارساز اندازه گرفت، ولی بلندی چیزی است که انسان حس می‌کند، بنابراین سازه‌کار شنوایی نیز روی آن مؤثر است. از آن جایی که حساسیت گوش انسان به بسامدهای مختلف یکسان نیست، دو صوت با شدت یکسان و بسامدهای متفاوت، با بلندی‌های متفاوتی حس می‌شوند. به عبارت دیگر، بلندی علاوه بر شدت صوت به بسامد صوت نیز بستگی دارد. * گوش انسان قادر به شنیدن تن‌های صدای $20Hz$ تا $20kHz$ است. * بیش‌ترین حساسیت گوش انسان به بسامدهای $2kHz$ تا $5kHz$ است.

مثال: دیاپازونی در اختیار داریم. یک بار آرام به آن ضربه می‌زنیم و بار دوم ضربه‌ای محکم‌تر به آن می‌زنیم، صوت حاصل از ضربه‌ی دوم نسبت به صوت اول دارای ..... است.

۱) ارتفاع و بلندی بیشتر ۲) ارتفاع بیشتر با همان بلندی
۳) بلندی بیشتر با همان ارتفاع ۴) بلندی بیشتر و ارتفاع کمتر (جواب: گزینه ۳)

* اثر دوپلر: ① اگر چشمه و ناظر (شنونده) در حال نزدیک شدن به هم باشند، بسامدی که ناظر دریافت می‌کند از بسامدی که چشمه می‌فرستد، بیش‌تر است. ② اگر چشمه و ناظر (شنونده) در حال دور شدن از هم باشند، بسامدی که ناظر دریافت می‌کند از بسامدی که چشمه می‌فرستد، کم‌تر است. (* دما ثابت ⟹ سرعت مرج ثابت (v))

Scanned by TapScanner



* وقتی چشمه حرکت ساکن باشد، بجمع جبهه های موج در جلو و عقب آن یکسان است، حال اگر چشمه شروع به حرکت کند:

① در جلوی چشمه فاصله جبهه های موج کم تر و در نتیجه طول موج در یافتی توسط ناظر کم می شود و بسامدی که این ناظر دریافت می کند نسبت به حالت قبل افزایش می یابد. ② در پشت چشمه، فاصله جبهه های موج بیشتر و در نتیجه طول موج دریافتی توسط ناظر بیش تر می شود و بسامدی که این ناظر دریافت می کند نسبت به حالت قبل کاهش می یابد.

---

* اگر چشمه صوت با تندی ای کم تر از تندی صوت در حرکت باشد، هر چه تندی چشمه صوت بیش تر باشد، فاصله جبهه های موج در جلوی چشمه کم تر و در پشت آن بیش تر می شود.

* اگر چشمه صوت با تندی ای برابر با تندی صوت در حرکت باشد، جبهه های موج در جلوی چشمه روی هم می افتند و فشار در آن محل بسیار بالا می رود.

---

* هنگامی که چشمه ساکن است، فاصله بین جبهه های موج در جلو و عقب یکسان و برابر λ_s است، هنگام حرکت کردن چشمه موج فاصله بین جبهه های موج به اندازه مسافتی جابه جای چشمه در مدت زمان یک دوره تناوب موج صوتی تغییر می کند. به عبارت دیگر، اگر دوره تناوب موج صوتی T_s و تندی حرکت چشمه موج V_s باشد، در فاصله زمانی بین گسیل دو جبهه موج، چشمه به اندازه $\Delta x = V_s T_s$ جابه جا می شود.

$$\lambda_{\text{جلو}} = \lambda_s - V_s T_s \quad , \quad \lambda_{\text{پشت}} = \lambda_s + V_s T_s$$

افزایش طول موج (کاهش فرکانس) — پشت چشمه — کاهش طول موج (افزایش فرکانس)

* اگر چشمه صوت با تندی ثابتی حرکت کند، میانگین طول موج در جلو و پشت سر چشمه صوت برابر طول موج همان چشمه در حالت ساکن است.

$$\lambda_s = \frac{\lambda_{\text{جلو}} + \lambda_{\text{پشت}}}{2}$$

* فرکانس هایی که ناظرها می شنوند به فاصله آن ها از چشمه صوت بستگی ندارد. (ناظرهای جلوی آمبولانس)

* راننده آمبولانس سنت به آن که آمبولانس ساکن بود و هان بسامد آن را آمبولانس را می شنود، ناظرهایی که در جلوی آمبولانس هستند (فاصله ها متفاوت) فرکانس های یکسانی را می شنوند.

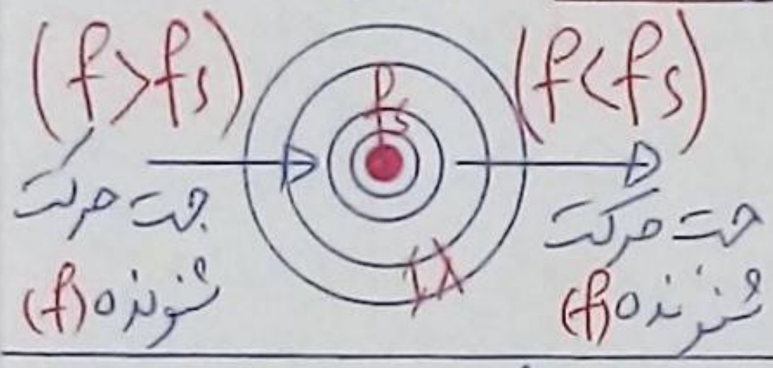
Scanned by TapScanner

مثال: یک آمبولانس صدای با بسامد ۵۰۰ هرتز ایجاد می‌کند. هنگامی که آمبولانس با تندی $72\ km/h$ در حال حرکت است، طول موج در جلوی آن نسبت به طول موج آن هنگامی که ساکن باشد ..... سانتی متر ..... است. (جواب: گزینه ۱)

۱) ۴، کم‌تر ۲) ۴، بیش‌تر ۳) ۲۰، کم‌تر ۴) ۲۰، بیشتر

* چشمه ساکن و ناظر (شنونده) متحرک * در این حالت، تجمع جبهه‌های موج در دو سوی چشمه یکسان و در نتیجه طول موج (λ) در اطراف چشمه موج ثابت است. ① اگر ناظر به طرف چشمه حرکت کند، در مقایسه با ناظر ساکن، در مدت زمان یکسان، با جبهه‌های موج بیش‌تری مواجهه می‌شود و این منجر به افزایش بسامد (f) صدا می‌شود که ناظر می‌شنود.

② اگر ناظر از چشمه دور شود، در مقایسه با ناظر ساکن، در مدت زمان یکسان، با جبهه‌های موج کم‌تری مواجهه می‌شود و این منجر به کاهش بسامد (f) صدا می‌شود که ناظر می‌شنود.



* اگر شنونده در حال نزدیک شدن و یا دور شدن از چشمه صوت ساکن باشد، در هر دو حالت طول موج‌های یکسانی را دریافت می‌کند.

* اگر شخص با تندی ای بیش‌تر از (یا برابر با) تندی صوت از چشمه دور شود، جبهه‌ی موجی از چشمه موج به او نمی‌رسد و صدایی نمی‌شنود.

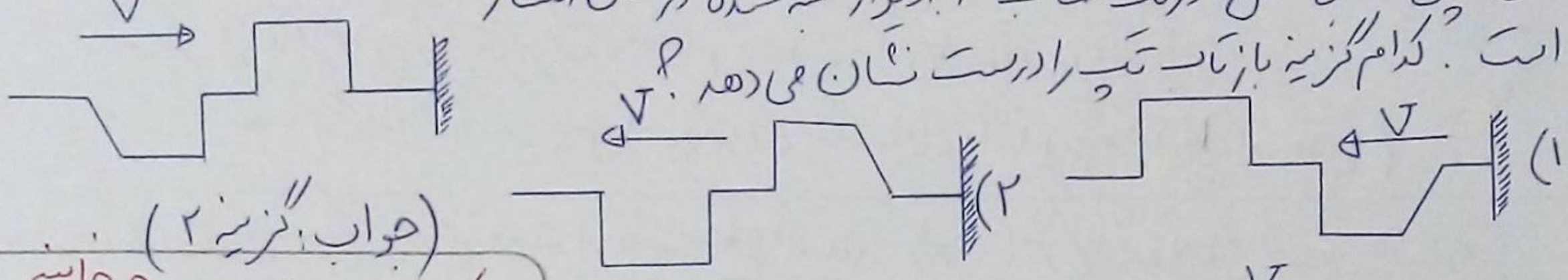
* اثر دوپلر برای امواج الکترومغناطیسی همانند نور یا امواج رادیویی نیز اتفاق می‌افتد. به طوری که ① وقتی چشمه نور از ناظر (آشکارساز) دور می‌شود، طول موج افزایش و بسامد آن کاهش می‌یابد که به آن اصطلاحا انتقال به سرخ (Redshift) می‌گویند. ② وقتی چشمه نور به ناظر (آشکارساز) نزدیک می‌شود، طول موج کاهش و بسامد آن افزایش می‌یابد که به آن اصطلاحا انتقال به آبی (Blueshift) گفته می‌شود.

* اثر دوپلری برای امواج الکترومغناطیسی: اخترشناسی (اطلاعاتی درمورد تندی و چگونگی حرکت ستارگان و سایر چشمه‌های نوری سماوی) * اگر کهکشانی به ما نزدیک یا از ما دور شود، بسامد و طول موج دریافتی از آن تغییر می‌کند * جابه‌جایی دوپلری در مورد امواج الکترومغناطیسی در زندگی روزمره ما محسوس نیست. (مثلا خودروی که چراغ سبزی روشن کرده است، در هنگامی که از ما دور یا به ما نزدیک می‌شود، رنگ چراغ آن همان سبز دیده می‌شود). تندی حرکت خودرو نسبت به تندی انتشار نور ($3\times10^8\ m/s$) بسیار ناچیز است) * اندازه‌گیری تندی حرکت خودروها

Scanned by TapScanner

* وقتی یک سر ریسمان یا یک فنر کشیده شده و بلند، به نقطه ای ثابت شده باشد، در صورتی که یک تپ در آن ایجاد کنیم، تپ به صورت وارانه از انتهای ثابت ریسمان یا فنر باز تاب می شود.
* دلیل: وقتی تپ به یک تکیه گاه ثابت می رسد، نیروی به آن وارد می کند، طبق قانون سوم نیوتون، تکیه گاه ثابت نیز نیروی هم اندازه در خلاف جهت بر فنر یا ریسمان وارد می کند. به همین علت یک تپ به صورت وارانه پشت به تپ تابیده شده، باز تاب شده و در فنر یا ریسمان برمی گردد.
(* در یک لحظه طناب کاملا صاف می شود.)

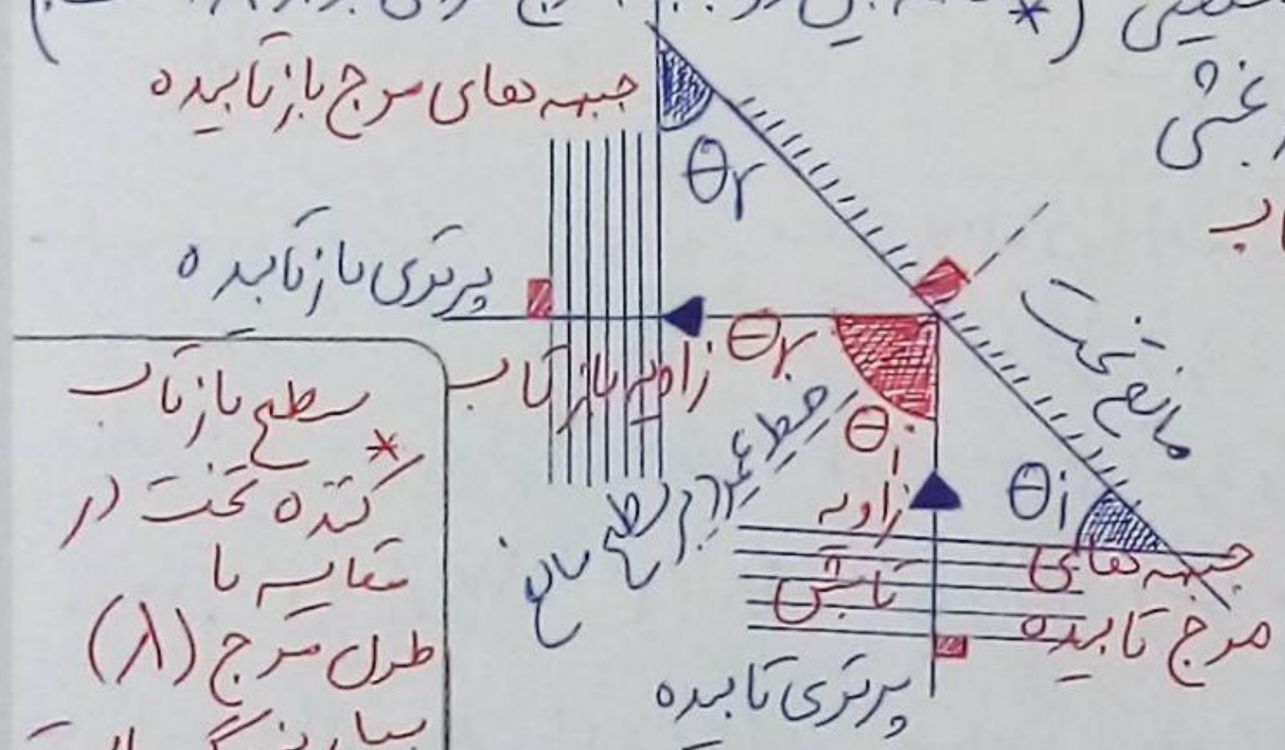
مثال: تپی مطابق شکل، در یک طناب که به دیوار بسته شده در حال انتشار است. کدام گزینه باز تاب تپ را درست نشان می دهد؟



(جواب: گزینه ۲)

⊛ کاغذ را ۱۸۰ درجه می چرخانیم (مرجع را نگاه می کنیم)، شکل حاصل باز تاب مرجع را نشان می دهد.

* نمودار پرتوی: در این حالت یک پرتو، پیکان مستقیمی (عمود بر جبهه های موج) است که جهت انتشار غشی از موج را نشان می دهد. (* فاصله بین دو جبهه موج متوالی برابر λ است.)

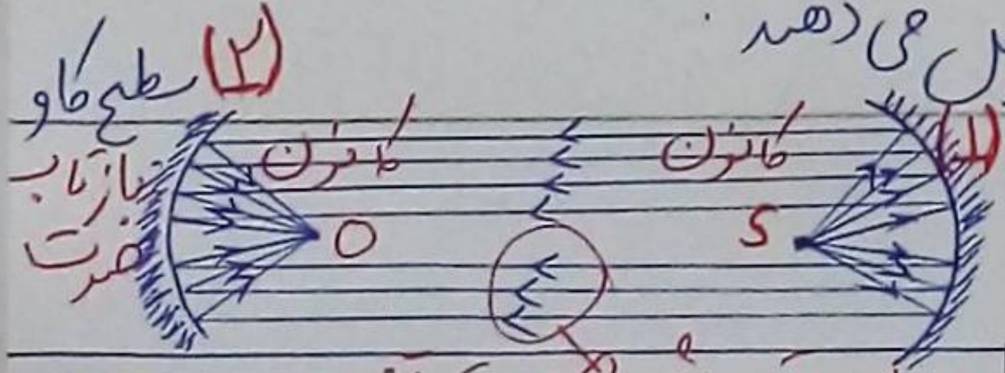


زاویه تابش = زاویه باز تاب

* قانون باز تاب عمومی: $\theta_r = \theta_i$
* پرتوی تابیده و پرتوی باز تابیده و خط عمود بر سطح مانع (در نقطه تابش)، همه در یک صفحه عمود بر سطح مانع قرار دارند. (* این موضوع برای تمام امواج در هر دو حالت مانع برقرار است.)

* سطح باز تاب کننده تخت در مقایسه با طول موج (λ) بسیار بزرگ است.

* باز تاب صورت نیز از قانون باز تاب عمومی پیروی می کند.
* هرگاه موج تخت به یک مانع تخت برخورد کند، موج باز تابیده شده نیز یک موج تخت دیگر است که با هم ترکیب شده و شکل را در جلوی مانع تشکیل می دهند.



* اگر شخصی در نقطه S به آرامی صحبت کند، شخصی که در O ایستاده است، صدای آن را به وضوح می شنود.

* در هر نقطه قانون باز تاب عمومی برقرار است $(\theta_i = \theta_r)$

Scanned by TapScanner

(* شکل صفحه قبل) * امواج صوتی بازتابیده شده از سطح (۱)، به صورت امواج تخت هستند و پس از بازتابش از سطح بازتاب کننده (۲)، در کانون O جمع شده یا اصطلاحا کانونی می شوند به این ترتیب دامنه (A) و در نتیجه شدت (I) موج صوتی که در O دریافت می شود، تقریبا همان شدت صوتی است که در کل تولید شده.

* میکروفون سهموی: میکروفون در کانون آن قرار دارد. (ضبط صدا مای طبیعت، ....)
* سطح سهموی در این نوع میکروفون ها فقط می توانند امواجی با طول موج خیلی کوچک از مقابل سهمی را عبور کنند، به همین علت برای ضبط همه نوع صدا مناسب نیستند. * (دستگاه لیتوتریپسی (خرد کردن سنگ های تشکیل شده در کلیه انسان)

میکروفون

* در هنگام بازتاب یک موج تخت از یک سطح صیقلی، زاویه تابش در نقاط مختلف متفاوت بوده و برابر زاویه بازتاب در آن نقطه است. ($\theta_i = \theta_r$) (* قانون عمومی بازتاب)

* در هنگام صوت پس از بازتاب، مانع تاخیر زمانی به گوش شنونده ای برسد که صوت اولیه را مستقیما می شنود، به چنین بازتابی پژواک گفته می شود. * برای این که گوش انسان بتواند بین صوت مستقیم اولیه و پژواک را تمیز دهد، باید اختلاف زمانی این دو، بیش از ۱۰ ثانیه باشد.

مثال: تندی صوت در هوای یک منطقه ۳۵۰ m/s است. شخص کنار یک چشمه صوت ایستاده است و یک مانع در فاصله ۸ از آن ها قرار دارد. حداقل چند متر باشد تا گوش شخص بتواند بین صوتی که از چشمه به طور مستقیم می شنود و صوت بازتاب شده را تمیز دهد؟
۱) ۱۷ ۲) ۱۷/۵ ۳) ۱۸ ۴) ۳۵ (جواب، گزینه ۲)

* کاربردهای همان یابی پژواکی: خفاش در لحین این گونه اطراف خود را بررسی می کند، دستگاه سونار که در کشتی ها برای همان یابی اعماق زیر آب به کار می رود، در سونوگرافی نیز از همان یابی پژواکی استفاده می شود، در تعیین تندی شارش خون در رگ از همان یابی پژواکی استفاده می شود. * برای تشخیص یک جسم براثر بازتاب صوت توسط آن جسم (همان یابی پژواکی)، باید اندازه آن جسم در حدود طول موج به کار رفته یا بزرگتر از آن باشد. ($V = \lambda f$)

* امواج الکترومغناطیسی می توانند از سطوح تخت و هم سطوح خمیده بازتاب شوند، توجه کنید که در تمام این حالت ها قانون بازتاب عمومی رعایت می شود. ($\theta_i = \theta_r$)

Scanned by TapScanner

* امواج الکترومغناطیسی تخت تابیده شده به یک سطح مانع می توانند پس از بازتابش در یک نقطه کانونی شوند. در این حالت دامنه موج افزایش می یابد. (در یافت امواج رادیویی توسط آنتن های شکاف، متمرکز کردن امواج فرو سرخ برای گرم کردن آب یا مواد غذایی (در آجاق های خورشیدی)
* نور مرئی بخشی از طیف امواج الکترومغناطیسی است و از قانون بازتاب تبعیت می کند
* اثر دوپلر در امواج الکترومغناطیسی (تغییر بسامد خود در ها توسط پلیس، رادارهای دوپلری هواشناسی) ($\overline{V} = \lambda f$)
سرعت
$c = 3 \times 10^8 \ m/s$ (ثابت)

مثال: یک پلیس راهنمایی و رانندگی، با دستگاهی، یک موج الکترومغناطیسی با بسامد f و طول موج λ را به سمت یک خودرو که در حال حرکت به سمت پلیس است، می فرستد. این موج پس از بازتاب توسط دستگاهی که نزد پلیس است با بسامد f' و طول موج λ' دریافت می شود. کدام گزینه درست است؟

(جواب: گزینه ۲)

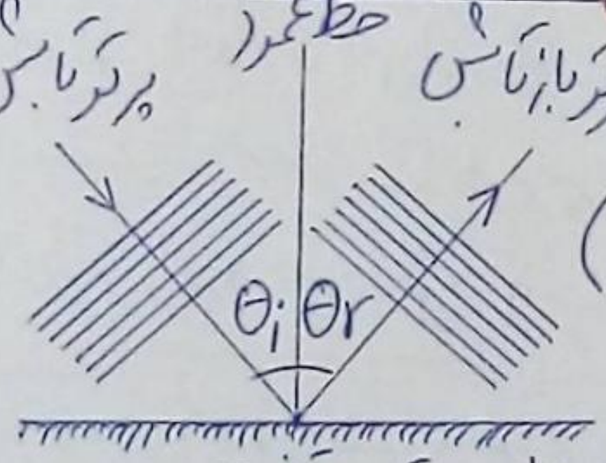
۱) $\lambda' = \lambda$ و $f' = f$ ۲) $f' > f$ و $\lambda' < \lambda$
۳) $\lambda' > \lambda$ و $f' < f$ ۴) $f' > f$ و $\lambda' = \lambda$

---

* پرتوهای تابش و بازتابش در یک صفحه قرار دارند که عمود در سطح بازتاننده است.

* در بازتاب نامنظم برای هر پرتو، باز هم قانون بازتاب هم چنان برقرار است.
* اغلب اجسامی که در اطراف خود مشاهده می کنیم، به علت بازتاب نامنظم دیده می شوند.
* اگر یک دسته پرتو موازی به سطح آینه تخت بتابد، فقط در یک جهت می توانیم بازتاب آن را ببینیم.

* بازتاب امواج



الکترومغناطیسی

$(\theta_i = \theta_r)$

زاویه = زاویه
بازتاب تابش

سطح سیقلی و تخت
(بازتاب منظم)

* در صورتی که سطح ناهموار باشد بازتاب نامنظم (پخشیده) است.

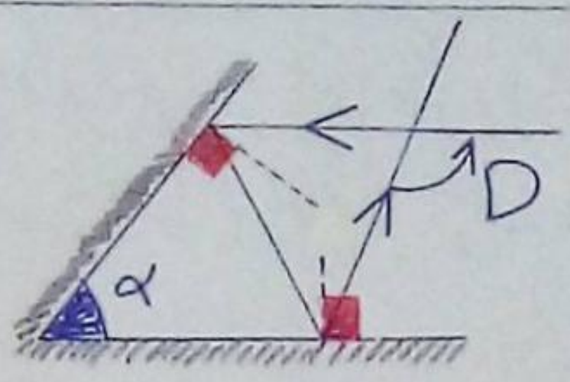
---

* منظور از سطح ناهموار، آن است که سطح در مقایسه با طول موج نور ناهموار است.

---

* اگر یک دسته پرتو، به سطح آینه تخت بتابند، اگر پرتوها موازی باشند، پس از بازتاب نیز موازی می مانند، اگر پرتوها واگرا باشند، پس از بازتاب نیز واگرا هستند، اگر پرتوها همگرا باشند، پس از بازتاب نیز همگرا می مانند و یکدیگر را قطع می کنند.

Scanned by TapScanner

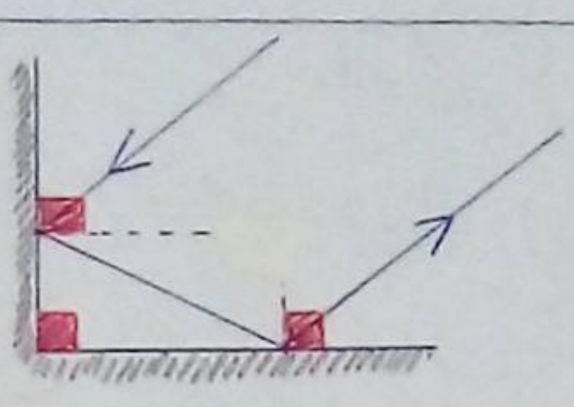


$D = 2\alpha$

D: زاویه انحراف

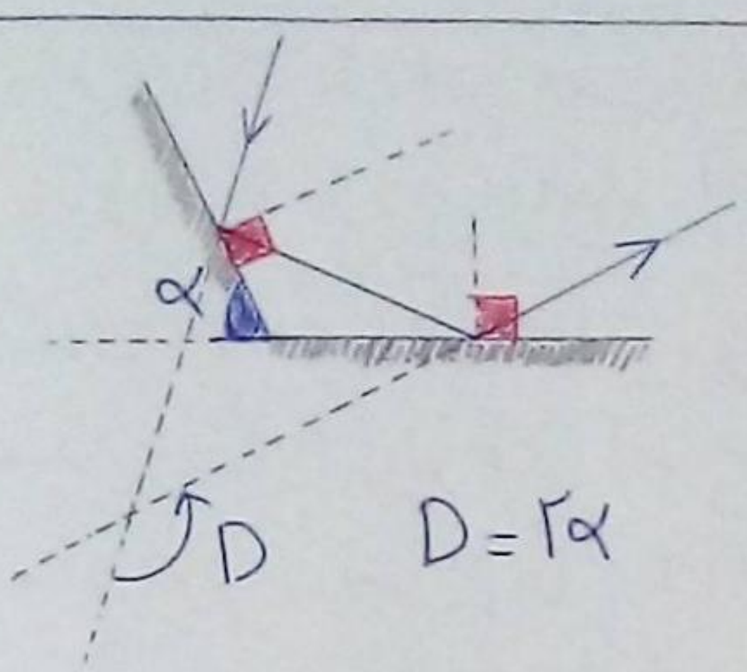
α: زاویه حاده بین دو سطح آینه

(* اثبات ← عنوان تمرین)



$D = 2\alpha = 180^\circ$

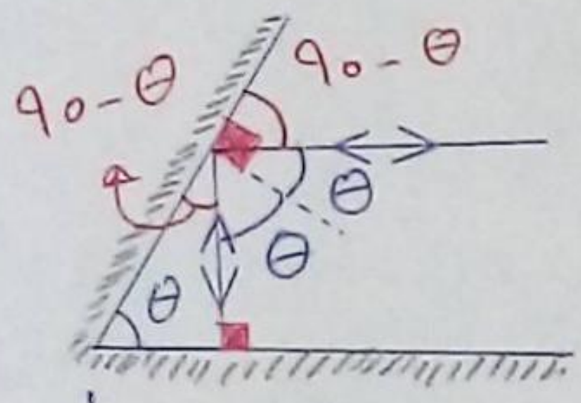
پرتوهای ورودی و خروجی موازی هستند



$D = 2\alpha$

---

* اگر بخواهیم پرتو نور، پس از بازتاب روی خودش برگردد (پرتو نور روی خودش بازتاب شود)، باید پس از بازتاب از آینه اول بر آینه دوم عمود باشد، در این حالت زاویه انحراف 180° درجه است.



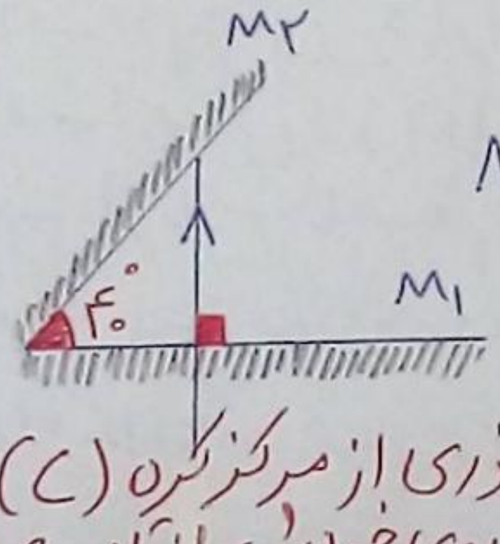
* هرگاه زاویه تابش به یکی از دو آینه تخت متقاطع با زاویه بین دو آینه برابر باشد، پرتوی نور به طور عمود به آینه دوم برخورد می کند و روی خودش بازتاب می شود.

(* اثبات ← عنوان تمرین)

---

* در صورتی که با ثابت ماندن سطح بازتاب کننده، زاویه تابش کم یا زیاد شود، زاویه بازتاب نیز به همان اندازه کم یا زیاد می شود. * اگر پرتوی تابش ثابت باشد و سطح آینه تخت را حول محور عمود بر صفحه شامل پرتوهای تابش و بازتابش بچرخانیم، زاویه بین پرتوی تابش و بازتاب ۲ برابر زاویه چرخش آینه در همان جهت تغییر می کند.

مثال: دو آینه تخت با طول بی نهایت، مطابق شکل مقابل با هم زاویه 40° می سازند. در آینه M_1 روزنه ای ایجاد شده و باریکه نوری به طور عمود بر آینه M_1 از آن می گذرد. این باریکه نور چند بار در برخورد به آینه ها بازتاب خواهد شد؟ 1) 1 2) 2 3) 3 4) بی نهایت

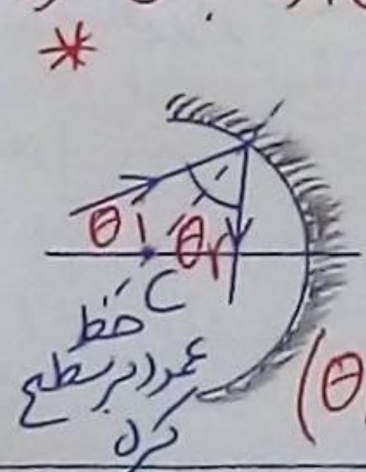


(جواب: گزینه ۲)

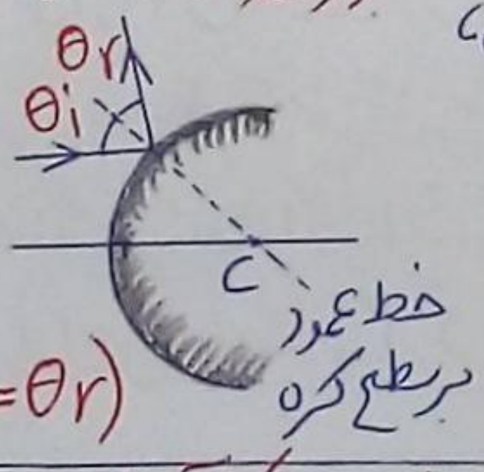
اگر پرتو نوری از مرکز کره (C) عبور کند، روی خودش بازتاب می شود.

---

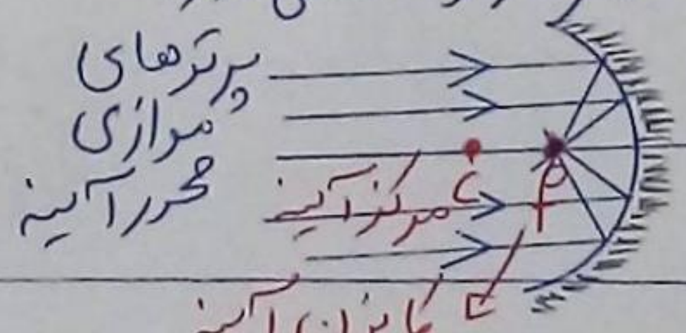
* پرتوهای بازتاب نور از آینه های کروی: خط عمود بر سطح کره، در امتداد شعاع کره است و از مرکز آن می گذرد.



$(\theta_i = \theta_r)$



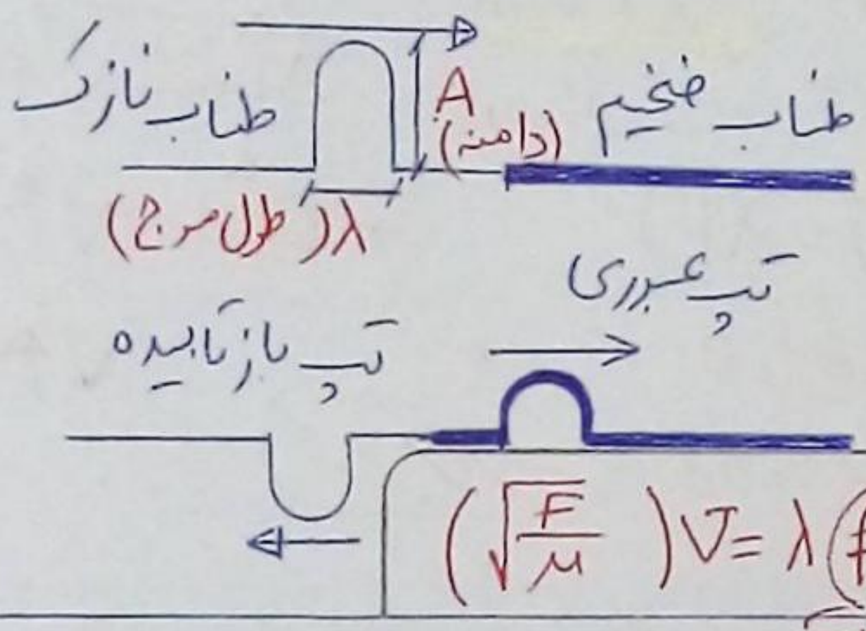
(C: مرکز آینه)

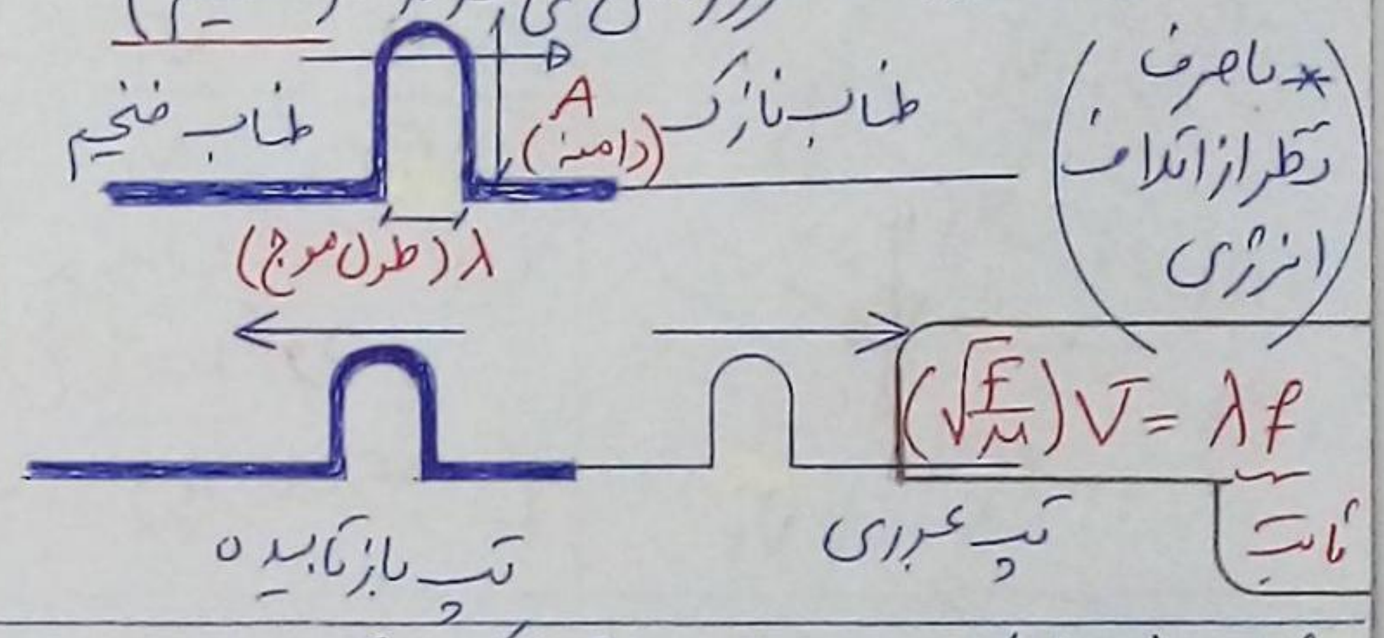


Scanned by TapScanner

* اگر تپ به صورت برآمدگی بخواهد از طناب نازک وارد طناب ضخیم شود، آن گاه:
① تپ بازتابیده با همان بسامد، طول موج (تندی) ولی با دامنه کوچکتر، به صورت فرورفتگی (وارونه) برمی گردد. ② تپ عبوری، با همان بسامد ولی تندی، طول موج و دامنه کوچکتر به صورت برآمدگی (مستقیم) وارد طناب ضخیم می شود. * اگر در این حالت تپ فرودی به صورت فرورفتگی بود، تپ بازتابیده برآمدگی و تپ عبوری به صورت فرورفتگی می شود.

* اگر تپ به صورت برآمدگی بخواهد از طناب ضخیم وارد طناب نازک شود، آن گاه:
① تپ بازتابیده، با همان بسامد، طول موج (تندی) ولی با دامنه کوچکتر به صورت برآمدگی برمی گردد.
② تپ عبوری، با همان بسامد، ولی تندی، طول موج و در نتیجه طول پرش کمتر به صورت برآمدگی وارد طناب نازک می شود * اگر در این حالت تپ فرودی به صورت فرورفتگی بود، تپ بازتابیده و تپ عبوری نیز به صورت فرورفتگی می شوند. (مستقیم)





مثال: طنابی از یک جنس و از دو بخش نازک به قطر 0/5 cm و بخش ضخیم به قطر 2 cm تشکیل شده است. یک موج سینوسی با بسامد f و دامنه λ از قسمت ضخیم وارد قسمت نازک می شود. اگر بسامد، طول موج عبوری در طناب نازک به ترتیب f′ و λ′ باشد، کدام گزینه درست است؟

1) $f' = f$, $\lambda' = 3\lambda$ 2) $f' = f$, $\lambda' = 6\lambda$
3) $f' = 3f$, $\lambda' = \lambda$ 4) $f' = 6f$, $\lambda' = \lambda$

(جواب: گزینه ۲)

* زاویه تابش و زاویه شکست

* شکست موج * هرچه تندی انتشار موج در محیطی بیشتر باشد، زاویه آن با خط عمر (بیشتر) در آن محیطی که تندی موج در آن کمتر است، زاویه کمتری با خط عمر در مرز میان (دو ناحیه) دارد.

ثابت می ماند

$V = \lambda f$

* علت شکسته شدن موج، تغییر تندی موج هنگام عبور از مرز جدایی دو محیط است.

* تمام موج هنگامی که به مرز جدایی دو محیط می رسد، وارد محیط دوم نمی شود و بخشی از آن به محیط اول بازتاب می شود. این بازتاب از تمام طول موج عمود بر سطح مرز جدا می کند.

* حاصل بین دو جبهه موج متوالی

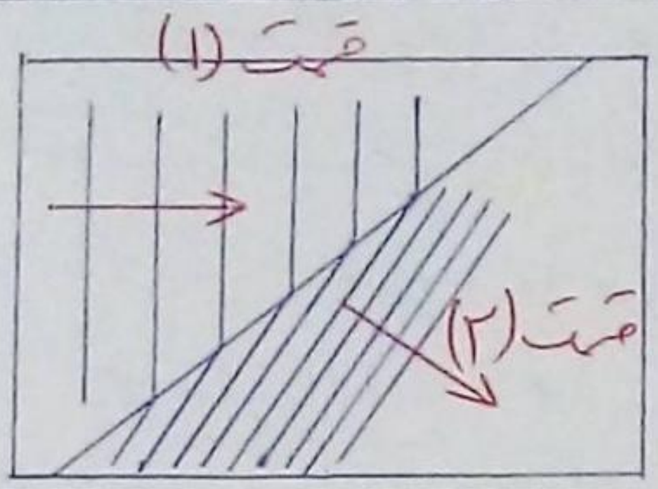
* در محیطی که تندی موج بیشتر است، طول موج نیز بیشتر است.

Scanned by TapScanner

برهم کنش های موج

* اگر پرتوهای موج عمود بر مرز جدای دو محیط به این مرز برسند، دیگر شکسته نمی شوند. البته طول موج در محیط دوم نسبت به محیط اول متفاوت است، ولی چون کل جبهه های موج باهم به این مرز می رسند، شکست رخ نمی دهد.

مثال: در سطح یک ته ته موج که دارای دو عمق متفاوت است، یک موج تخت ایجاد کرده ایم و جبهه های موج آن مطابق شکل است. تندی انتشار موج در سطح آب در قسمت ..... کم تر از قسمت دیگر است و عمق آب در قسمت ..... کم تر از قسمت دیگر است.



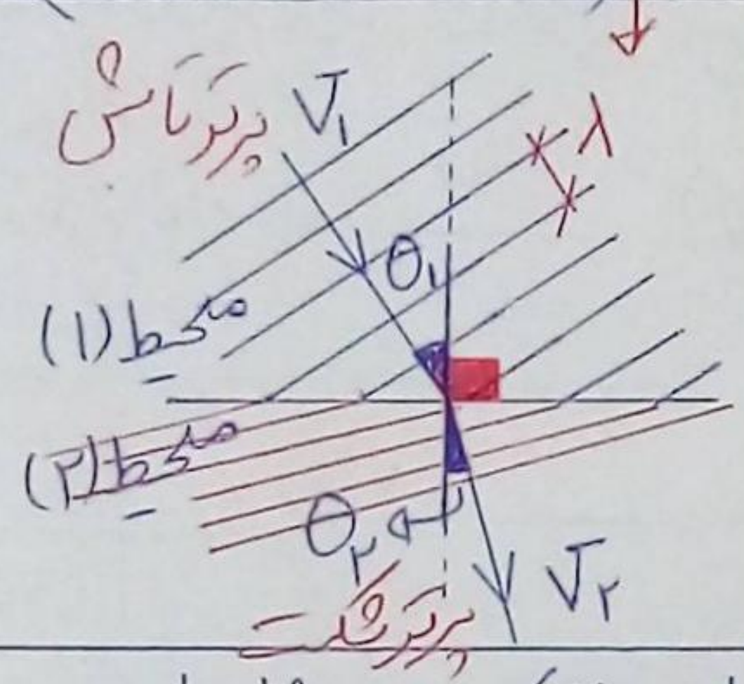
(به ترتیب از راست به چپ)

۱) ۱، ۱ ۲) ۲، ۲ ۳) ۲، ۱ ۴) ۱، ۲ (جواب: گزینه ۲)

* زاویه انحراف = $|\theta_1 - \theta_2|$

* f ثابت
$\lambda \uparrow \leftarrow V \uparrow$
$(* \theta \uparrow \leftarrow V \uparrow)$

زاویه تابش = θ_1
زاویه شکست = θ_2
$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{V_1}{V_2}$
* قانون شکست عمومی
$(V = \lambda f)$



* θ_1 ، θ_2 زاویه پرتو مرجع با خط عمود (زاویه با مرز جدایی) است.

عمود: سر مرز جدایی دو محیط است.

* شکست امواج الکترومغناطیسی * وقتی یک پرتو نور خواهد به طور مایل، از یک محیط شفاف، وارد محیط شفاف دیگری شود، بخشی از آن شکسته شده وارد محیط دیگری می شود و بخش دیگری از آن به محیط اول بازتابیده می شود. * قانون شکست عمومی

* قانون عمومی بازتاب

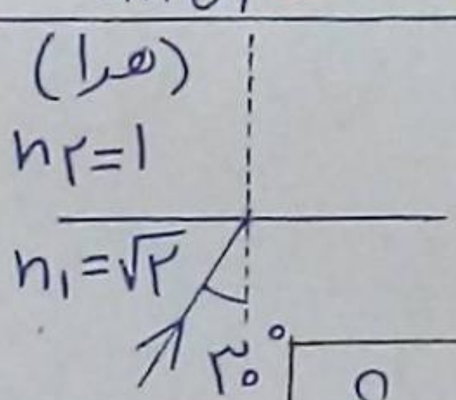
* برای خلاء تقریبا برای هوا $n=1$ و برای محیط های دیگر همواره عددی بزرگ تر از یک است.

$n = \frac{c}{V}$ → تندی نور در خلاء (3×10^8 m/s)
→ تندی نور در محیط

(* ضریب شکست محیط = $\frac{(m/s)}{(m/s)}$ بدون یکا)

(* قانون شکست اسنل) $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow (n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2)$

مثال: در شکل مقابل، بخشی از پرتو نور بازتابیده شده و بخش دیگری از آن وارد هوا می شود. زاویه بین پرتوی بازتابیده شده و پرتو شکسته شده چند درجه است؟



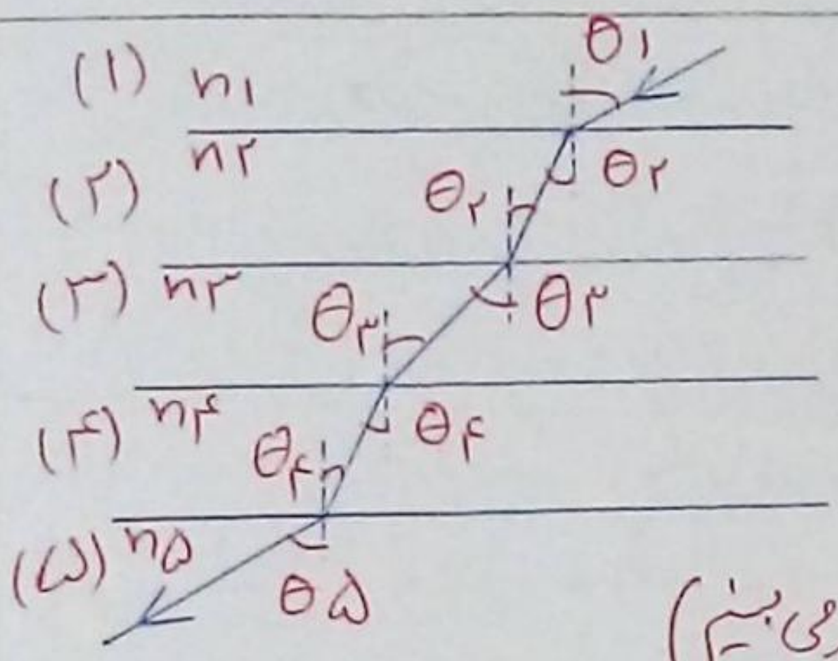
۱) ۴۵ ۲) ۹۵ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۳۵ (جواب: گزینه ۳)

* اگر چند محیط شفاف را داشته باشیم، در محیطی که زاویه پرتو نور با خط عمود (θ) کوچک تر باشد، تندی نور (V) در آن محیط کم تر و ضریب شکست (n) آن محیط بیشتر است $(\theta\downarrow \rightarrow V\downarrow \rightarrow n\uparrow)$

۶۲

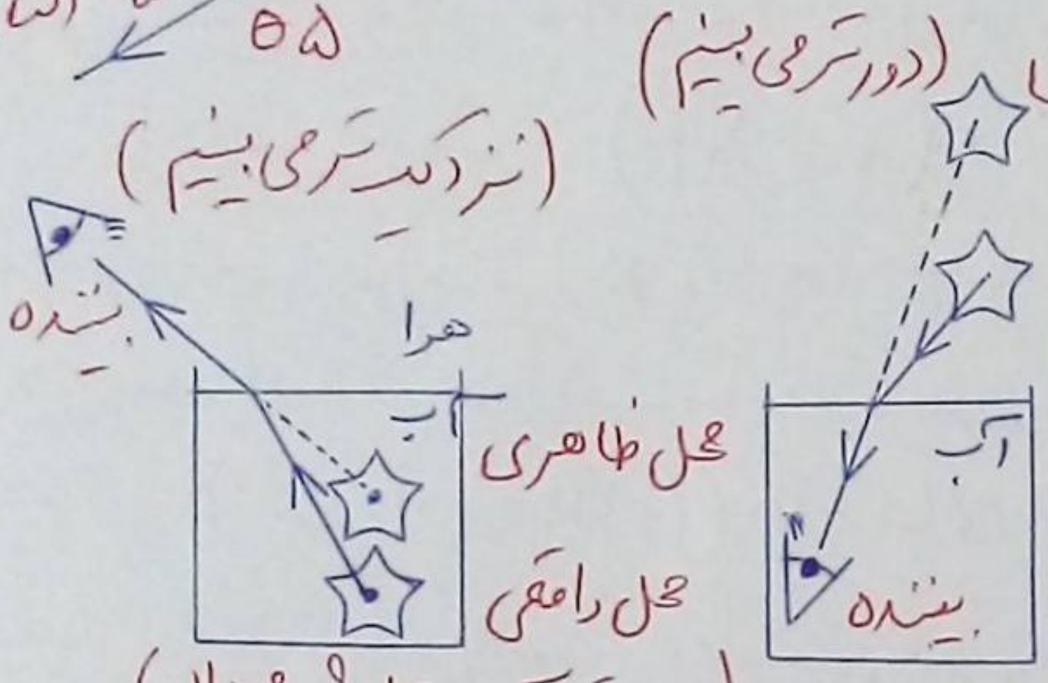
* اگر چند محیط شفاف داشته باشیم که مرزهای جدایی آن ها موازی باشند و یک پرتوی نور از بین آنها عبور کرده باشد، قانون شکست نور را می توانیم علاوه بر دو محیط مجاور هم، برای دو محیطی که مجاور هم نیستند، نیز بدون در حالت محیط های بین آن ها، بنویسیم * محیط هایی که ضریب شکست های یکسانی دارند، پرتو نور در آنها با هم موازی هستند ولی ممکن است، در یک امتداد نباشند.

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 = n_4 \sin\theta_4 = n_5 \sin\theta_5$$



* در صورتی که n ها یکسان باشند، θ های متناظر با آن ها نیز با یکدیگر برابر خواهد شد.

* انسان هنگامی می تواند جسمی را ببیند که از آن جسم به چشم او نور برسد. بنابراین اگر نور در سر راه شکسته شود، دیگر آن جسم در جای اصلی خود دیده نمی شود.



* سراب نه تنها دیده می شود بلکه می توان از آن عکس هم گرفت.

* با افزایش دمای هوا، چگالی آن کاهش و در نتیجه ضریب شکست هوا کم می شود. * در روزهای گرم، لایه های نزدیک سطح زمین بسیار رقیق تر از لایه های بالاتر هستند. * پرتوی نور در نزدیکی سطح زمین شکسته می شود و از خط عمود دور می شود. این کار تا زمانی ادامه می یابد که در نزدیکی سطح زمین پرتوها افقی شده و سپس در ادامه به سمت بالا خم می شوند.

---

* یک پرتو نور که از طول موج های مختلفی تشکیل شده است، وقتی از مرز جدایی دو محیط عبور می کند، طول موج های مختلف آن در لایه های مختلفی شکسته می شوند که به این پخش شدگی نور، پاشندگی نور گفته می شود. * ضریب شکست هر محیطی، به جز خلا، به طول موج نور بستگی دارد. * کمترین ضریب شکست یک محیط معین برای طول موج های کوتاه تر، بیشتر است.

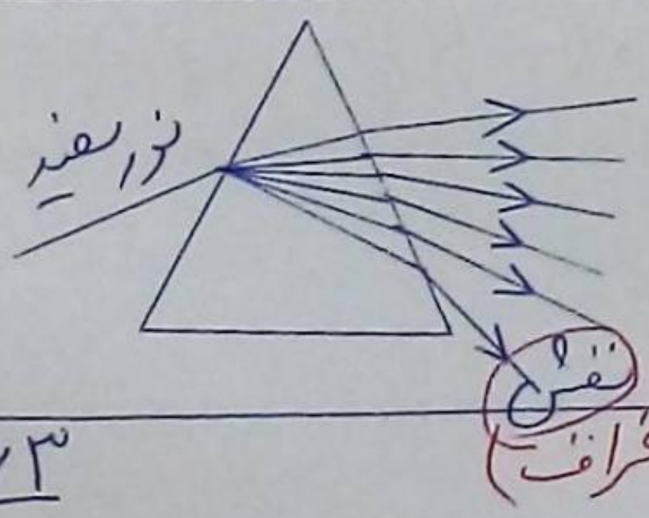
(ضریب شکست شیشه برای نور قرمز کوچک تر از نور آبی است.)

(طول موج بلند) ← (n) کمترین شکست ← (کمترین انحراف)

(طول موج کوتاه) ← (n) بیشترین شکست ← (بیشترین انحراف)

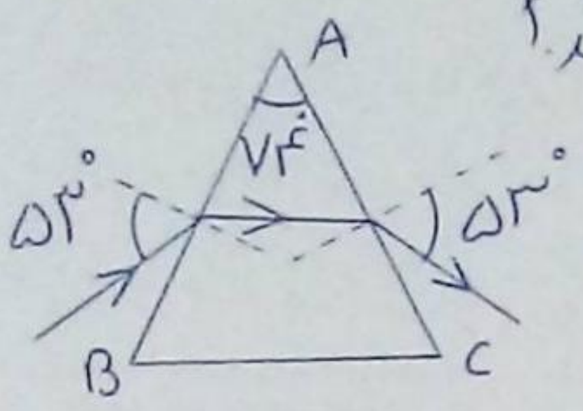
* تفاوت ضریب شکست منشور برای طول موج های مختلف

* $(V = \lambda f)$



Scanned by TapScanner

مثال: پرتو نوری مطابق شکل روبه‌رو، بر یک وجه منشوری می‌تابد و از وجه دوم روی آن خارج می‌شود، ضریب شکست این منشور کدام گزینه می‌باشد؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$ (جواب: گزینه ۳)

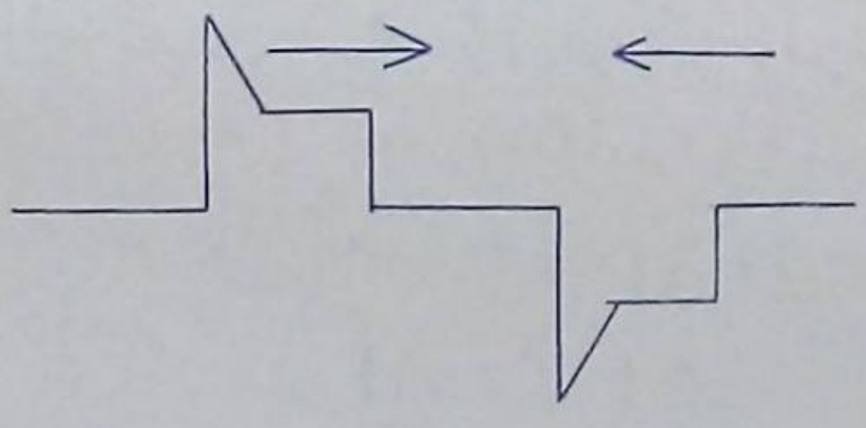
* زاویه بین خط‌های عمود بر دو وجه منشور برابر زاویه راس منشور (۷۴°) است. * میزان انحراف (D)

* پراش موج * درصدی که ابعاد مانع یا شکاف در حدود طول موج باشد، بخشی از موج که از لبه‌ها یا شکاف‌ها عبور می‌کند، به وضوح به اطراف مانع یا شکاف گسترده می‌شود. * هرچه پهنای شکاف به λ نزدیک‌تر باشد، پدیده پراش بارزتر رخ داده و پهنای ناحیه روشن در پدیده شکست شکاف بزرگ‌تر است. * پدیده پراش فقط برای امواج الکترومغناطیسی نیست، بلکه برای تمام موج‌ها رخ می‌دهد. * اگر ابعاد مانع در حدود طول موج باشد، سایه آن چنان محو می‌شود که قابل دیدن نیست. * ($V = \lambda f$)

* (امواج الکترومغناطیسی $c = ۳\times۱۰^۸ m/s$) *

* اگر دو تپ در طول یک ریسمان به سمت هم بیایند، هنگامی که به هم می‌رسند دو اتفاق ممکن است رخ دهد: ① اگر هر دو تپ برآمده یا هر دو فرورفته باشند، آن جزء ریسمان برابر مجموع دو تپ (مجموع دامنه‌ها (A)) جابه‌جا می‌شود. به این نوع برهم‌نهی، برهم‌نهی سازنده گفته می‌شود. در این صورت می‌گوییم دو تپ هم‌فاز هستند. ② اگر یکی از تپ‌ها به صورت برآمده و دیگری فرورفته باشد، آن جزء ریسمان به اندازه تفاضل دامنه دو تپ (A) جابه‌جا می‌شود. به این نوع برهم‌نهی، برهم‌نهی ویرانگر گفته می‌شود. در این حالت می‌گوییم دو تپ در فاز مخالف هستند. * اگر دو تپ هم‌اندازه در فاز مخالف به هم برسند ریسمان در یک لحظه کاملا صاف می‌شود. * وقتی دو تپ همپوشانی (تداخل) می‌کنند، به هیچ وجه حرکت یکدیگر را تغییر نمی‌دهند. بنابراین پس از همپوشانی (تداخل) بودن هرگونه تغییر شکلی به حرکت خود ادامه می‌دهند. (* با صرف نظر از اتلاف انرژی)

* دو تپ در یک لحظه تداخل کاملا ویرانگر ایجاد کرده (هم‌اندازه و در فاز مخالف) و ریسمان به طور لحظه‌ای کاملا صاف می‌شود.



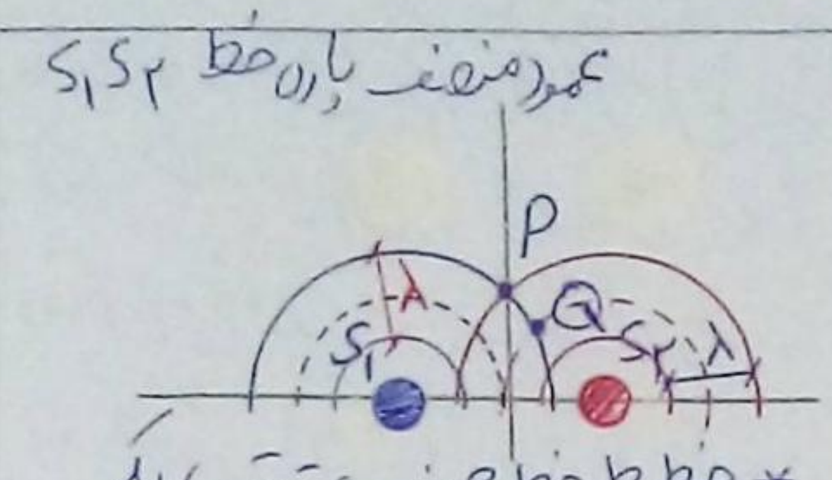
Scanned by TapScanner

* دو چشمه S_1 و S_2 مشابه هستند، یعنی هردو، موج هایی با بسامد و دامنه یکسان در سطح آب ایجاد می کنند

* در نقطه های مانند P، همواره دو موج به صورت هم فاز می رسند. یعنی با برآمدگی دو موج یا فرورفتگی آن ها به طور همزمان به P رسیده و سطح آب در این نقاط به شدت بالا و پایین می رود و دامنه موج برآیند یا در این نقاط بیشینه است. (نقاط روی عمود منصف خط واصل نقاط S_1 و S_2 (چشمه های موج) فاصله یکسانی تا نقاط S_1 و S_2 دارند و امواج به صورت هم فاز به این نقاط می رسند (تداخل سازنده))

* در نقطه هایی مانند Q، همواره دو موج در خلاف فاز به هم می رسند. یعنی برآمدگی یکی از موج ها به ضرورفتگی دیگری رسیده و عملا این نقطه از سطح آب نوسانی ندارد و یا با دامنه بسیار کم نوسان می کند (تداخل ویرانگر)

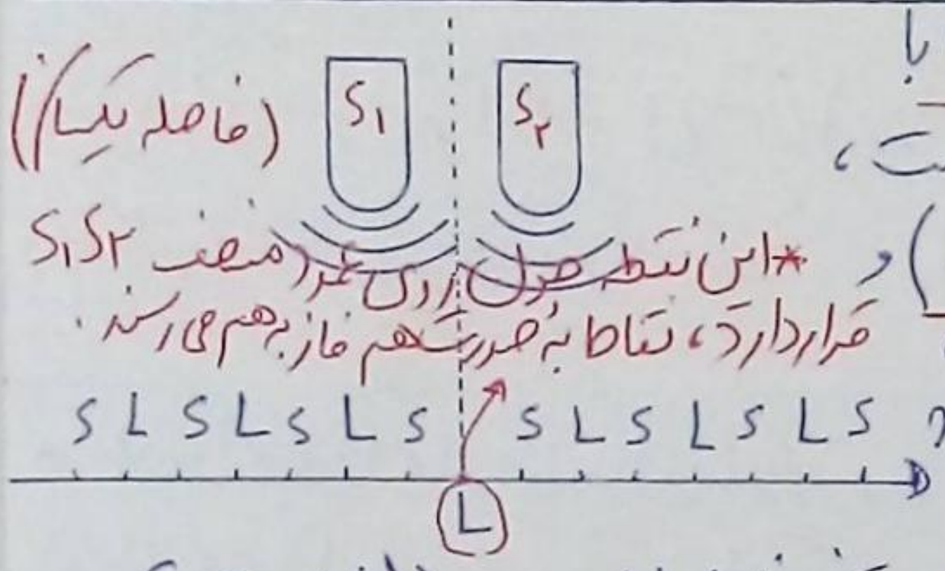
* تداخل امواج سطحی آب ($V=\lambda f$) *



* خط خط چین، مستقیم، یکی در میان نشان برآمدگی و فرورفتگی موج هستند. (با گذشت زمان جاهایشان عوض می شود.)

باید شبیه باشند

مثال: مطابق شکل، دو چشمه صوت S_1 و S_2 در فاصله یکسانی از محور x با بسامد یکسان صوت تولید می کنند و در نقاطی که با L نمایش داده شده است، بالاترین صدا (تداخل سازنده، نقاط به صورت هم فاز به هم می رسند) و در نقاطی که با S مشخص شده است، پایین ترین صدا (تداخل ویرانگر، نقاط به صورت خلاف فاز به هم می رسند) دریافت می شود. اگر بخواهیم فاصله S و S های مجاور (فاصله بین یک S و S متوالی مناظر با طول موج (λ) است) کم شود ($V=\lambda f$)، کدام کار میسر است؟ (در تداخل امواج صوتی موج به صورت طولی (تپ های تراکمی و انبساطی) و در تداخل امواج سطحی آب موج ها به صورت عرضی هستند)

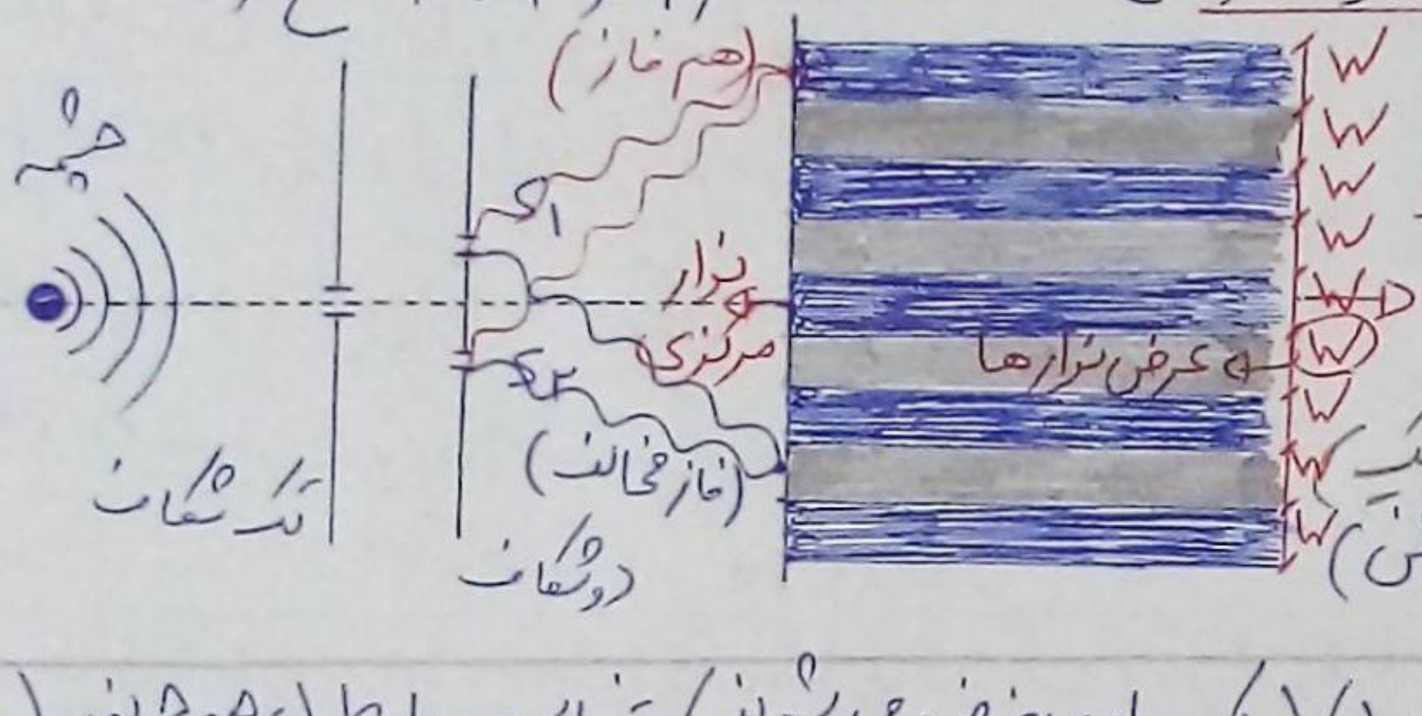


۱) بسامد یکی از چشمه ها را افت کنیم
۲) بسامد هر دو چشمه را افت کنیم (جواب: گزینه ۳)
۳) بسامد هر دو چشمه را دو برابر کنیم
۴) بسامد یکی از چشمه ها را دو برابر کنیم

* سرعت صوت در یک محیط به دما و جنس محیط بستگی دارد ((ما ثابت ← سرعت ثابت)
* هنگامی که یک موج از یک محیط وارد محیط دیگری می شود (← فرکانس ثابت (f ثابت)
* سرعت امواج الکترومغناطیسی در خلا (یا تقریبا در هوا) ← ($V=C=3\times10^8$ m/s)

Scanned by TapScanner

* تداخل امواج نوری (آزمایش یانگ) * نور حاصل از یک چشمه تکفام (تک رنگ) بر تک شکافی می تابد. این نور خروجی پراش یافته پراشش گسترده شده را در شکاف S_1 و S_2 را روشن می کند. این شکاف در صفت دیگر مانند در چشمه شاه عمل می کند. یعنی S_1 و S_2 مانند دو بلندگو یا دو لگری نرسان کننده که به سطح آب ضربه می زنند، دو موج هم بسامد را در فضای پشت پرده شکاف S_1 و S_2 ایجاد می کنند. اگر در مقابل این دو شکاف یک پرده قرار دهیم، نوارهای روشن (فریزهای روشن) و نوارهای تاریک (فریزهای تاریک) به ترتیب حاصل از تداخل سازنده و تداخل ویرانگر موج های نوری که از S_1 و S_2 به سطح پرده رسیده اند، مشاهده می شود.



(* نوار مرکزی)

* نواری که روی عمود منصف S_1 و S_2 قرار دارد نوار روشن است.

* بدست آوردن فاصله بین نوارها

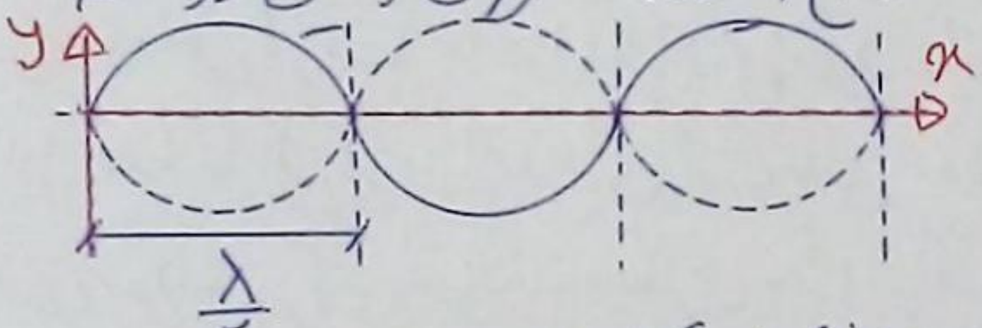
* پهنای هر نوار تاریک یا روشن (W) (که مساوی فرض می شوند) متناسب با طول موج نور (λ) به کار رفته در آزمایش است. ($W \propto \lambda$) * ($V = C = 3 \times 10^8 \ m/s$) ثابت (هوا) * ($V = \lambda f$)، ($V = \frac{C}{n}$)

* علت اصلی ایجاد نوارهای تاریک و روشن، اختلاف راهی است که نور از دو شکاف S_1 و S_2 تا رسیدن به محل نوار مورد نظر طی می کند، ① اگر اختلاف راه دو شکاف تا محل نوار مورد نظر، مضرب فردی از $\frac{\lambda}{2}$ باشد، در محل نوار مورد نظر تداخل ویرانگر رخ داده و آن نوار تاریک است.
② اگر اختلاف راه دو شکاف تا محل نوار مورد نظر، مضرب زوجی از $\frac{\lambda}{2}$ باشد، در محل نوار مورد نظر تداخل سازنده رخ داده و آن نوار روشن است. * ($T \equiv \lambda \equiv 2\pi$)
* اختلاف راه دو شکاف تا نقطه مورد نظر روی پرده مهم است، نه خود فاصله ها.

* امواج ایستاده * نقاط گره: موج های رفت و برگشتی به صورت غیر هم فاز به هم می رسند (تداخل ویرانگر) دامنه نوسان صفر می شود. (نقطه گره: نقطه هایی از محیط انتشار هستند که فاقد نوسان می باشند)
* نقاط شکم: موج های رفت و برگشتی به صورت هم فاز به هم می رسند (تداخل سازنده) دامنه نوسان دو برابر می شود. (نقطه شکم: نقطه هایی از محیط انتشار هستند که بیشترین دامنه نوسان می کنند.
* دامنه نوسان (A) موج های رفت و برگشتی یکسان است.

Scanned by TapScanner

* مکان گره ها و شکم ها ثابت بوده و در طول طناب جابه جا نمی شود. * موج حاصل از برهم نهی دو موج سینوسی هم دامنه، هم بسامد با نوسان های هم راستا که در خلاف جهت یکدیگر در یک ریسمان منتشر می شوند، موج ایستاده نام دارد. * موج های ایستاده در تمامی محیط ها یعنی جامد، مایع و گاز ایجاد می شوند * در گره ها دو موج همواره در خلاف مخالف یکدیگر قرار دارند * در شکم دو موج همواره هم فاز هستند * فاصله بین یک گره از شکم متوالی بعد از آن برابر $\frac{\lambda}{4}$ است. * نقاط قرار گرفته بین دو گره متوالی همگام نوسان می کنند. * دامنه نوسان تمامی نقاط با هم برابر نیست. اما دامنه نوسان یک نقطه مشخص ثابت است. * نقاطی که در دو طرف یک گره یکسان و برابر بسامد دو موج سازنده موج ایستاده است. * شکم ها نقاطی هستند که دامنه آن ها بیشترین مقدار است اما بعد آن ها همواره بیشینه نیست، چون در حال نوسان هستند * بعد هر شکم در هر دوره دو بار می تواند صفر شود. * امواج ایستاده انرژی را بین دو نقطه منتقل نمی کنند.



* $(\lambda \equiv T \equiv 2\pi)$ * هر نقطه روی ریسمان همواره در حال انجام یک حرکت هماهنگ ساده $(y = A\sin(\omega t + \varphi^*))$ در راستای $\vec{l}$ (عمودی) است.

* $v = \lambda f$ * (تندی انتشار موج در طناب)، $\left(v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\right)$، F = نیروی کشش تار)

---

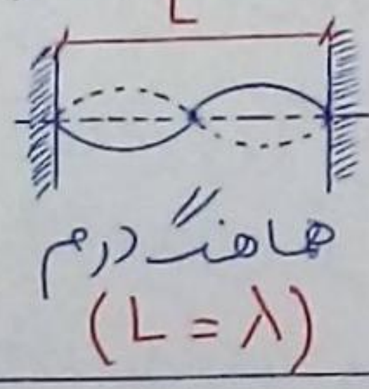
* درباره ای که از دو انتها ثابت شده است، اگر تار طوری مرتعش شود که در طول آن ۳ گره و ۲ شکم ایجاد شود، در این حالت تار هماهنگ دوم خود را تولید می کند و با افزایش تعداد گره ها و شکم ها، هماهنگ های بعدی نیز در تار ایجاد خواهد شد.

* دو گره و یک شکم ← هماهنگ اول

* رسم شکل ← فاصله بین دو نقطه هم فاز متوالی برابر طول موج (λ) است.

هماهنگ اول
هماهنگ اصلی
(بسامد اصلی)
$(L = \frac{\lambda}{2})$

،



هماهنگ دوم
$(L = \lambda)$

، ...

مثال: اختلاف بسامد دو هماهنگ متوالی در یک تار مرتعش برابر ۱۰ هرتز و موج، فاصله بین دو نقطه از تار به اندازه ۴۰ سانتی متر را در مدت ۰/۴ s می پیماید. طول تار چند سانتی متر است؟ ۱) ۲۵ ۲) ۲۰ ۳) ۵۰ ۴) ۴۰

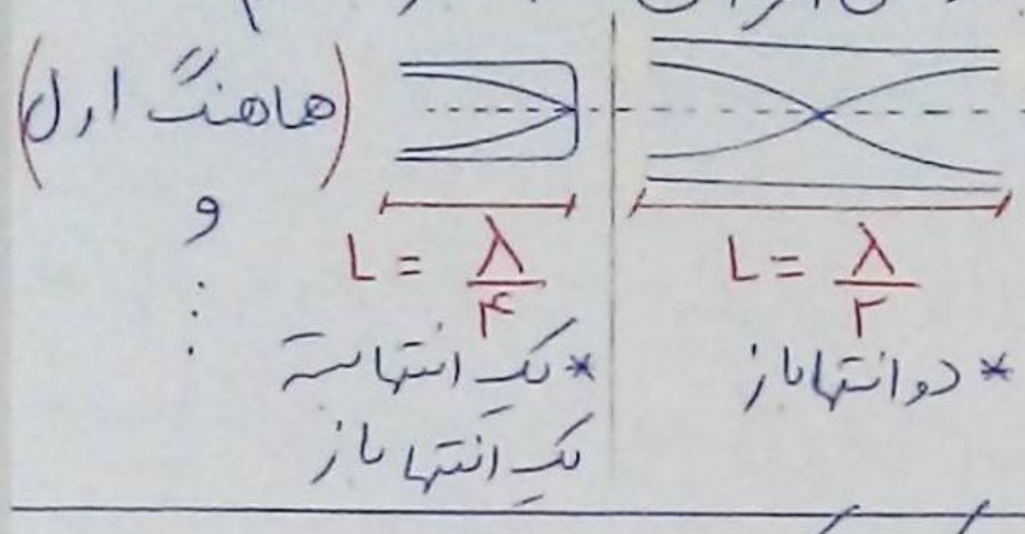
(جواب: گزینه ۳) $(L = \frac{\lambda}{2} + \lambda = \frac{3\lambda}{2})$

* نقطه ای از ریسمان (انتهای ریسمان) که به دیواره یا بازوی متصل است، شکم است و گره نیست.

Scanned by TapScanner

* موج ایستاده و تشدید در لوله های صوتی * در لوله ای پر شده از هر اسیزی توان موج صوتی ایستاده ایجاد کرد. در واقع موج صوتی از انتهای لوله، باز می تابد (حتی اگر آن انتها باز نباشد) بر اثر تداخل، در درون لوله، موج ایستاده ایجاد می شود.

* در انتهای باز ← شکم * در انتهای بسته ← گره



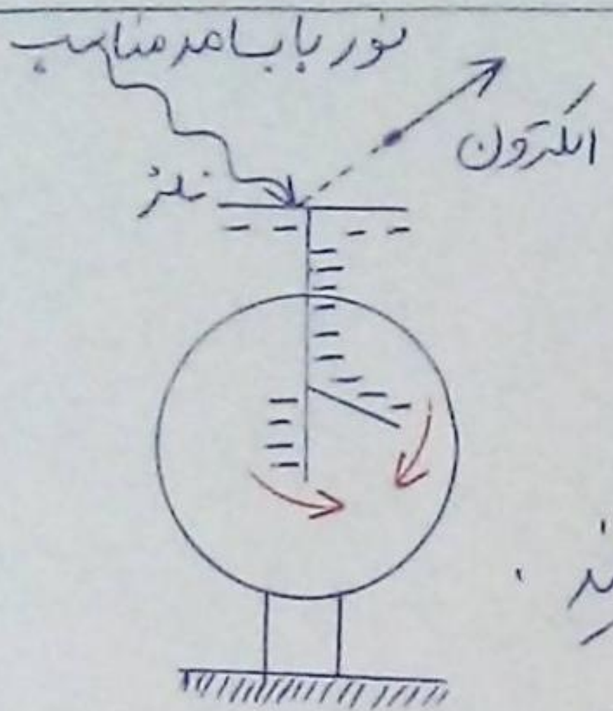
مثال: دیاپازونی در مقابل دهانه یک لوله صوتی دو انتها باز که از یک سر داخل آب است، مرتعش شده و تشدید حاصل می شود. اگر لوله را حداقل 20cm از آب خارج کنیم، (دوباره تشدید اتفاق می افتد. بسامد دیاپازون چند هرتز است؟ ($\overline{V} = 340\ m/s$ سرعت)

1) 1700 2) 850 3) 800 4) 600 (جواب: گزینه ۲)

* تشدید گر هلمهولتز * با دمیدن در دهانه یک بطری، مانند بطری 1/5 لیتری نوشیدنی ها، گستره وسیعی از بسامدها ایجاد می شود. با توجه به مقدار مایع داخل این بطری، یکی از این بسامدها یا یکی از بسامدهای تشدیدی بطری منطبق شده و یک موج صوتی قوی ایجاد می شود، در این حالت بطری مشابه یک تشدید گر هلمهولتز عمل می کند.

* امواج ایستاده در احاق های میکروموج * احاق های میکروموج (مایکروفر) بر اساس تداخل امواج الکترومغناطیسی و تشکیل امواج ایستاده کار می کنند. میکروموج های بازتابیده از دیواره های فلزی احاق با برهم سنهی با موج های تابیده، موج های ایستاده ای را در داخل محفظه احاق ایجاد می کنند که از گره ها و شکم ها تشکیل شده اند. در محل شکم ها دامنه نوسان میدان الکتریکی بیشینه است. مولکول های آب موجود در مواد غذایی در این نقاط به شدت به ارتعاش در می آیند و بیشترین انرژی را جذب می شوند، در حالی که در محل گره ها، دامنه نوسان میدان الکتریکی صفر است و هیچ نوسان میدان الکتریکی ای نداریم که موجب داغ شدن یا گرم شدن مواد غذایی شود و در گره ها اصطلاحا نقاط سرد داریم. بنابراین غذا به طور یکنواخت پخته یا گرم نمی شود. به همین دلیل احاق های میکروموج صفحه های گردانی دارند تا با گرداندن غذا در احاق، هیچ بخشی از غذا در گره (نقطه سردی) باقی نماند.

Scanned by TapScanner



* برهم کنش نور فرودی فرابنفش با فلز ممکن برق نما سبب می شود تا ورقه های آن به سرعت به هم نزدیک شوند * برهم کنش نور مرئی گسیل شده از یک لامپ رشته ای تغییری در انحراف ورقه های برق نما به وجود نمی آورد. * جدا کردن الکترون از سطح یک فلز به کمک تابانیدن نور با بسامد مناسب مانند نور فرابنفش را اثر فوتوالکتریک می گویند.
* الکترون های جدا شده از سطح فلز در پدیده فوتوالکتریک را فوتوالکترون می گویند. (الکترون ها انرژی نور فرودی را جذب می کنند و از سطح فلز خارج می شوند.)

---

* عامل ایجاد جریان الکتریکی در مدار فوتوالکتریک آن دسته از فوتوالکترون هایی هستند که انرژی لازم برای رسیدن به صفحه جمع کننده C را دارند.

---

* انرژی تابشی یک موج الکترومغناطیسی گسیل شده با بسامد f، تنها می تواند مضرب درستی از یک مقدار انرژی (hf) باشد. * هر موج الکترومغناطیسی با بسامد f از بسته های انرژی تشکیل شده است که آن ها را فوتون می نامند. هر فوتون دارای مقدار انرژی $E=hf$ است (h، ثابت پلانک)
* در اثر فوتوالکتریک، یک فوتون با انرژی hf به طور کامل توسط یک الکترون جذب شده و انرژی خود را به الکترون می دهد. بنابراین انرژی الکترون برابر hf خواهد شد. برای نمونه، اگر پرتوی شامل 1700 فوتون باشد و فوتون ها بسامد لازم برای آغاز اثر فوتوالکتریک را داشته باشند، 1700 الکترون از سطح فلز جدا می شود. $(q=ne^*)$ $(I=\frac{q}{t}^*)$

ne*: بار یک الکترون، بار الکتریکی
I: جریان الکتریکی

---

* در آزمایش فوتوالکتریک اگر توان تابشی لامپ را برابر P در نظر بگیریم با توجه به رابطه انرژی هر فوتون، رابطه بین توان تابشی و تعداد فوتون های تابش شده (n):
* انرژی فوتون ها به بسامد بستگی دارد و با تغییر بسامد تغییر می کند.

$$P=\frac{E}{t}=\frac{nhf}{t}\quad ,\quad (V=c=\lambda f\ ^*)\ ,\ (\mathring{A}=10^{-10}m)\ ,\ (hf)=E\ ,\ |\Delta U|=|\Delta V\times q|$$

* یکای ژول برای بیان انرژی فوتون ها بسیار بزرگ است. به همین دلیل از یکای دیگری به نام الکترون ولت (eV) استفاده می شود. * یک الکترون ولت تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی الکترونی است که بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل یک ولت جابه جا شده است.
$(e=-1/6\times10^{-19}C \rightarrow 1eV=1/6\times10^{-19}J)$

Scanned by TapScanner

* در آزمایش فوتوالکتریک اگر بسامد نور فرودی از مقدار مشخصی کم‌تر باشد، اثر فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد. به کم‌ترین بسامدی که به ازای آن پدیده فوتوالکتریک انجام می‌شود، بسامد آستانه (f_0) می‌گویند. * شرط انجام شدن اثر فوتوالکتریک آن است که طول موج نور فرودی کم‌تر از طول موج آستانه باشد. ($\lambda \leq \lambda_0$)

* حداقل کار لازم برای جدا کردن یک الکترون از سطح فلز را تابع کار فلز می‌گویند. تابع کار فلز وابسته به جنس فلز است. * شرط شروع اثر فوتوالکتریک آن است که انرژی فوتون فرودی از تابع کار، مقدار بیشتری داشته باشد یا حداقل با آن برابر باشد. ($hf \geq W_0$) *

* انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل شده از سطح فلز: ($K = hf - W_0$) معادله فوتوالکتریک

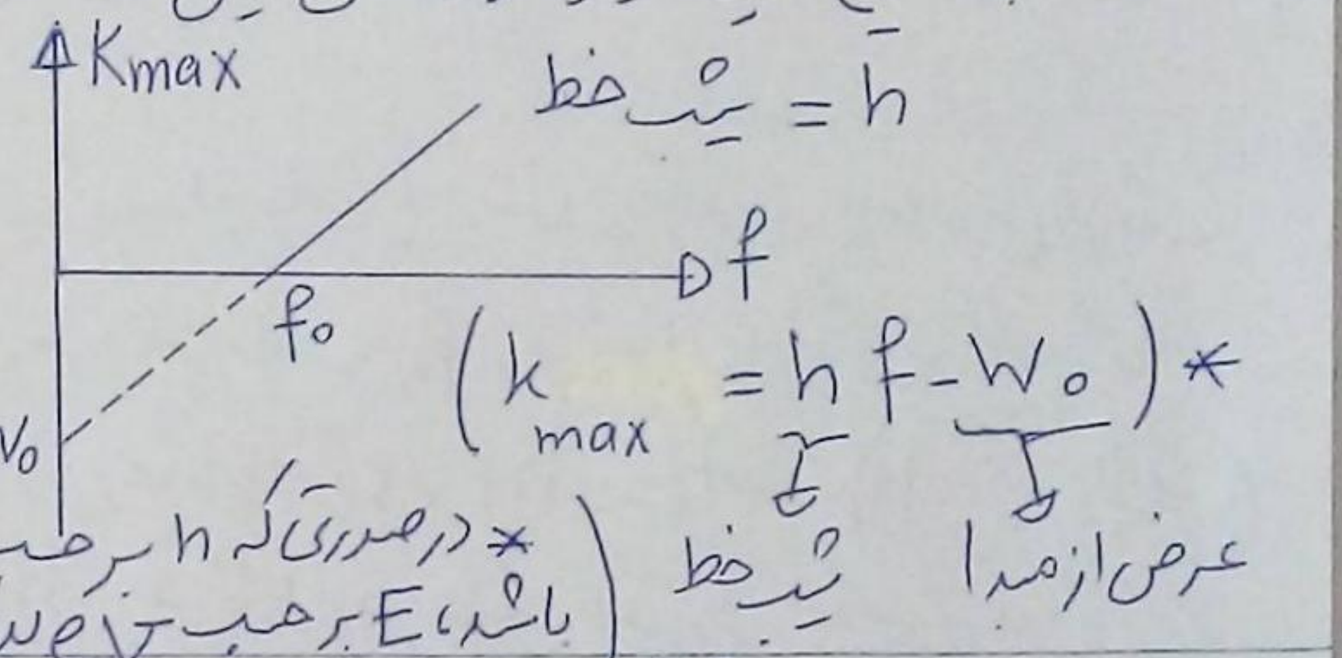
K_{max} ↑ انرژی فوتون تابیده شده ↓ تابع کار فلز

$(W_0 = hf_0)$

$(K_{max} = hf - W_0)$ *

عرض از مبدا ↓ شیب خط ↓

$(*E = hf = \frac{hc}{\lambda}) \rightarrow$ (* در صورتی که h بر حسب eV.s باشد، E بر حسب eV بدست می‌آید)



* طیف ایجاد شده از تابش گرمایی اجسام جامد پیوسته است. (طیف گسیلی پیوسته)

* گازهای رقیق که اتم‌های آن از هم کنش اتم‌های دیگر آزاد هستند به جای طیف پیوسته، طیف گسسته گسیل می‌کنند. طیف نور گسیل شده از بخار هر عنصر را طیف گسیلی خطی آن عنصر می‌نامند (طیف خطی عناصر مختلف با هم تفاوت دارد.)

* برای ایجاد طیف خطی یک عنصر، مانند هیدروژن، هیدروژن رقیق را درون لوله‌ای با فشار کم قرار می‌دهیم و دو سر آن را به یک منبع دیفرانسیل بالا متصل می‌کنیم. در این حالت اتم‌های گاز درون لوله شروع به گسیل نور می‌کنند (طیف گسیلی خطی)

* طول موج خط‌های گسیلی هیدروژن اتمی (معادله بالمر *) $\lambda = (364.56\,nm)\frac{n^2}{n^2-2^2}$

در ناحیه مرئی

$n=3 \rightarrow 2$	خط قرمز	$\lambda_1 = 656.2\,nm$	(بیش‌ترین طول موج *) (کم‌ترین انرژی)
$n=4 \rightarrow 2$	خط آبی	$\lambda_2 = 486.08\,nm$	
$n=5 \rightarrow 2$	خط بنفش	$\lambda_3 = 434\,nm$	
$n=6 \rightarrow 2$	خط بنفش	$\lambda_4 = 416.12\,nm$	(کم‌ترین طول موج *) (بیش‌ترین انرژی)

* (در طیف مرئی اتم هیدروژن همواره $n' = 2$ است)

Scanned by TapScanner

* اتم هیدروژن ساده ترین اتم هاست و طیف آن اولین طیفی بود که مورد بررسی قرار گرفت.

* معادله ریدبرگ $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ، $(n > n')$ $\left(\frac{1}{nm}\right)$ R: ثابت ریدبرگ

$\leftarrow$ (nm) — $\downarrow$ $\left(\frac{1}{nm}\right)$

$(n = 2, 3, 4, \dots)$ ، $n' = 1$ ← لیمان - فرابنفش

$(n = 3, 4, 5, \dots)$ ، $n' = 2$ ← بالمر - فرابنفش، مرئی

$(n = 4, 5, 6, \dots)$ ، $n' = 3$ ← پاشن - فروسرخ

$(n = 5, 6, 7, \dots)$ ، $n' = 4$ ← براکت - فروسرخ

$(n = 6, 7, 8, \dots)$ ، $n' = 5$ ← پفوند - فروسرخ

* رشته لیمان، دارای فوتون های در ناحیه فرابنفش است. بنابراین طبق رابطه $E = hf$ و با توجه به بالاتر بودن بسامد این رشته، نسبت به بقیه رشته ها، پرانرژی ترین فوتون ها را دارد.

* اگر اختلاف بین n و n' کم ترین مقدار ممکن یعنی یک واحد باشد، بلندترین طول موج گسیلی از اتم در آن رشته محاسبه می شود که در این صورت فوتون های تابشی دارای کم ترین مقدار انرژی هستند.

$$\Delta n = 1 \longrightarrow \lambda = \lambda_{max} \xrightarrow{E = \frac{hc}{\lambda}} E = E_{min}$$

* اگر الکترونی در اتم هیدروژن در $n = \infty$ قرار داشته باشد، هنگام حرکت در یک رشته چون بیش ترین اختلاف بین n و n' ایجاد شده است، فوتون گسیلی مربوط به آن دارای بیش ترین انرژی تابشی در آن رشته است. در این صورت طول موج تابشی کم ترین مقدار را دارد.

$$n = \infty \longrightarrow \lambda = \lambda_{min} \xrightarrow{E = \frac{hc}{\lambda}} E = E_{max}$$

* در هیدروژن اتمی، اگر الکترونی در حظ طبقی n قرار داشته باشد، تعداد فوتون های تابشی آن برابر است با: $N = \frac{n(n-1)}{2}$

* مدل اتمی تامسون (مدل کیک کشمشی): اتم کره ای است که بار مثبت به طور همگن در تمامی آن پخش شده است، الکترون ها سهم ناچیزی در جرم اتم دارند (الکترون بار منفی دارد.)، در این مدل، الکترون ها با بسامدهای معینی حول وضع تعادل خود نوسان می کنند این نوسان سبب تابش امواج الکترومغناطیسی از اتم می شود.

Scanned by TapScanner

* مدل اتمی رادرفورد (مدل اتم هسته‌ای): رادرفورد و همکارانش باریکه‌ای از ذره α (ذره آلفا، ذره‌های دارای بار مثبت از جنس هسته اتم هلیم) را بر سطح ورقه‌ای نازک از جنس طلا شلیک کردند. بنابر مدل تامسون انتظار می‌رفت که تمامی این ذره‌ها بدون انحراف یا انحراف کمی از ورقه عبور کرده و در برخورد با صفحه فلورسان در پشت آن، جرقه‌های نورانی تولید کنند. اما برخی از ذره‌های آلفا هنگام خروج از ورقه نازک طلا، با زاویه‌های بزرگ منحرف و پراکنده می‌شدند و حتی تعدادی از آن‌ها به عقب برمی‌گشتند. پس از این آزمایش رادرفورد نتیجه گرفت که ذره‌های آلفا باید با چیزی برخورد کرده باشند

① ذره‌های بدون انحراف، باید از قسمت‌های از ورقه گذشته باشند که تهی است.

② ذره‌های با انحراف زیاد، از مرکزهای سیار چگال و دارای بار مثبت منحرف شده‌اند.

* بیشتر ذره‌های آلفا بدون انحراف از ورقه طلا می‌گذرند. * تعداد کمی از ذره‌های آلفا پراکنده می‌شوند. * رادرفورد با انجام این آزمایش نتیجه گرفت باید هسته‌ای چگال و دارای بار مثبت در مرکز هر اتم باشد که با مدل اتمی تامسون به طور آشکار مغایرت داشت. * آزمایش رادرفورد نشان داد که اتم دارای یک هسته سیار چگال و کوچک با بار مثبت است که در اطراف آن الکترون‌ها با بار منفی در فاصله زیادی آن را در برگرفته‌اند به طوری که می‌توان گفت فضای بین هسته و الکترون‌ها خالی است. (در حالت طبیعی اتم از نظر الکتریکی خنثی است)

---

* مدل اتمی رادرفورد به چگونگی قرار گرفتن الکترون‌ها به دور هسته و یا این که آیا الکترون‌ها ساکن هستند یا متحرک اشاره‌ای نداشت. یعنی این مدل اتمی، در تبیین پایداری اتم ناتوان است.

* اگر فرض کنیم الکترون‌ها ساکن باشند، تحت تاثیر نیروی ربایشی هسته، جذب هسته می‌شوند و در این حالت اتم پایدار نمی‌ماند.

* اگر الکترون‌ها به دور هسته در گردش باشند؛ در این حالت الکترون‌ها پایدار بوده و روی هسته سقوط نمی‌کنند اما به دلیل حرکت شتابدار الکترون‌ها، بنابر نظریه فیزیک کلاسیک، الکترون همیشه موج الکترومغناطیسی بوده و در این حالت هنگام حرکت در هسته، مقداری از انرژی خود را تابش می‌کند و در این صورت انرژی الکترون‌ها کاهش می‌یابد. یعنی شعاع مدار حرکت الکترون کاهش پیدا کرده و در نهایت با حرکت بر مسیر مارپیچی روی هسته سقوط می‌کند. (هرچه الکترون به هسته نزدیک‌تر می‌شود طول موج الکترومغناطیسی گسیل شده کوتاه‌تر می‌شود.)

* طول موج کاهش ⟵ انرژی زیاد

(c = ثابت $= 3\times10^8$ m/s ، $E=\frac{hc}{\lambda}$)

Scanned by TapScanner

* مدل اتمی رادرفورد، قادر به توجیه طیف گسسته اتمی نیست. * با حرکت الکترون به دور هسته به طور پیوسته انرژی الکترون کاهش می یابد. در این صورت با مدد حرکت آن اتراشش می یابد. این تغییر شعاع به طور پیوسته انجام می شود، پس طیف صوح الکترومغناطیسی گسیل شده از اتم باید پیوسته باشد. (این نتیجه افزون بر این که با واقعیت ناسازگار است با طیف خطی گسیل شده توسط اتم ها نیز جور در نمی آید.)

* مدل اتمی بور: ① مسئله ناپایداری اتم در مدل رادرفورد را حل کرد. ② معادله ریدبرگ برای طیف خطی اتم هیدروژن را نتیجه داد. * اصول و فرضیه های مدل اتمی بور:

① مدارها و انرژی های الکترون ها در هر اتم کوانتیده اند، یعنی فقط مدارها و انرژی های گسسته مجازهستند. (* $r_n = a_0 n^2$، شعاع مدارها با n^2 متناسب است)

معنی

* شعاع کوچکترین مدار در اتم هیدروژن (به ازای $n=1$)، برابر a_0 است. (شعاع بور برای اتم هیدروژن)

* انرژی الکترون در اتم هیدروژن: $E_n = -\frac{ER}{n^2} = -\frac{13/6\ eV}{n^2}$ (انرژی الکترون برحسب eV (الکترون ولت))

* انرژی الکترون در مدار $n=1$ را برابر $E_1 = -13/6\ eV$ در نظر می گیرند که اندازه آن را معمولا یک ریدبرگ می گویند و آن را با E_R نشان می دهند.

---

* با توجه به آن که انرژی کل الکترون منفی است، با افزایش شعاع مدار حرکت الکترون، انرژی الکترون افزایش می یابد. یعنی هرچه الکترون در فاصله دورتری از هسته قرار داشته باشد، انرژی بیشتری دارد.

---

* وقتی یک الکترون در یکی از مدارهای مجاز است، هیچ نوع تابش الکترومغناطیسی گسیل نمی کند. در این حالت می گویند الکترون در مدار مانا یا حالت مانا قرار دارد. * الکترون می تواند از یک حالت مانا به حالت مانای دیگر برود. هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) به یک حالت مانا با انرژی کم تر (E_L)، یک فوتون تابش می شود. در این صورت انرژی فوتون تابش شده برابر با اختلاف انرژی بین دو مدار مانای اولیه و مدار مانای نهایی است.

(طرکانس فوتون گسیل شده *) ← $E_U - E_L = hf$ (معادله گسیل فوتون از اتم *)

* برعکس این موضوع نیز برقرار است؛ به طوری که اگر همین انرژی را به الکترون بدهیم، به ترازهای بالاتر می رود.

(* حالت پایه ← $n=1$)

Scanned by TapScanner

* بالاترین تراز انرژی مربوط به $n=\infty$ است (الکترون کاملا از هسته خارج شده و در حال سکون است) و دارای انرژی صفر الکترون ولت است.

* حالت $n=1$، پایین‌ترین تراز انرژی است که حالت پایه نامیده می‌شود (* حالت‌های $n>1$، حالت‌های برانگیخته نام دارند و دارای انرژی بیش‌تری نسبت به حالت پایه هستند. (* با افزایش n، انرژی‌های حالت‌های برانگیخته به هم نزدیک می‌شوند.)
* در دمای اتاق، الکترون بیش‌ترین زمان خود را در حالت پایه است. * برای بالا بردن الکترون از حالت پایه به حالت برانگیخته باید به اتم هیدروژن انرژی بدهیم.

* کم‌ترین انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از حالت پایه و بردن آن به بالاترین حالت برانگیخته ممکن ($n=\infty$) را انرژی یونش الکترون می‌گویند. * با صرف انرژی یونش، الکترون از اتم خارج شده و یون مثبت هیدروژن H^+ ایجاد می‌شود. * در هیدروژن اتمی با افزایش مقدار n، اختلاف ترازهای انرژی کاهش می‌یابد و اختلاف فاصله مدارهای کنار هم بیش‌تر می‌شود.

(* چهارمین حالت برانگیخته اتم هیدروژن $\leftarrow n=5$ $\left(E_R=12/6\,eV\right)$)

* یکی از موفقیت‌های مدل اتمی بور، نتیجه‌گیری معادله ریدبرگ برای طیف خطی گاز هیدروژن اتمی است. اگر فرض کنیم الکترونی از مدار مانای n_U به مدار مانای n_L با انرژی کم‌تر برود و فوتونی را گسیل کند، طول موج فوتون گسیل شده:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n_L^2}-\frac{1}{n_U^2}\right)$$

(R: ثابت ریدبرگ)

* برخی از طول موج‌ها در نوری که از خورشید به زمین می‌رسد وجود ندارد و به جای آن‌ها در طیف پیوسته خورشید خط‌های تاریک دیده می‌شود. خطوط تاریک در طیف خورشید مشخص کننده عناصر موجود در جو خورشید و زمین است. * طیف نور خورشید، طیف جذبی خطی است
* طیف نور سفیدی را که برخی از طول موج‌های آن جذب شده است، طیف جذبی می‌نامند
* طیف جذبی یک طیف روشن است که تعدادی خطوط تاریک در آن قرار دارد. این خطوط مشخص کننده طول موج‌هایی از نور سفید است که توسط بخار عنصرها جذب شده است

Scanned by TapScanner

* اگر نور سفیدی را از گاز عنصری (گاز کم فشار) عبور داده و طیف آن را تشکیل دهیم، در طیف ایجاد شده خط‌های تاریکی ظاهر می‌شوند که این خط‌ها نشان دهنده طول موج‌هایی است که توسط اتم‌های گاز عنصر جذب شده است. اگر طیف گاز همان عنصر را تشکیل دهیم، همان طول موج‌ها تشکیل خواهد شد و در طیف گسیلی عنصر مشاهده می‌شوند.

* طیف‌های گسیلی و جذبی هیچ دو گازی مثل هم نیست. * خطوط روشن در طیف گسیلی همان خطوط تاریک در طیف جذبی است. * اتم‌های هر گاز دقیقاً همان طول موج‌هایی را از نور سفید جذب می‌کند که اگر فوتون‌های آن با اندازه کافی بالا رود (یا به هر صورت دیگر برانگیخته شود) آن را تابش می‌کند. * منظور از طیف خطی همان طیف ناپیوسته (گسسته) است.

* الکترون‌ها می‌توانند از ترازهای انرژی پایین‌تر به ترازهای انرژی بالاتر گذار کنند. در این حالت، اتم فوتونی را جذب می‌کند که دقیقاً انرژی لازم برای گذار را دارد. (جذب فوتون) و برعکس
* اگر انرژی فوتون فرودی دقیقاً اختلاف انرژی بین ترازها را نداشته باشد توسط اتم جذب نمی‌شود. ($E_L + hf = E_U$)

* در طیف جذبی خطی، خط‌های تاریک طول موج‌هایی را مشخص می‌کند که با فرآیند جذب فوتون برداشته شده‌اند.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad , \quad v = c = \lambda f$$

مثال: در اتم هیدروژن، الکترونی از مدار $n_1=2$ به مدار $n_2=4$ منتقل می‌شود. طول موج فوتون تابشی هنگام تابش از مدار $n_2=4$ به مدار $n_1=2$ چند نانومتر است؟
($E_R = 13.6\ eV,\ h = 4 \times 10^{-15}\ eV.s,\ C = 3 \times 10^8\ m/s$)

۱) ۹۴ ۲) ۴۷ ۳) ۴۷۰ ۴) ۹۴۰ (جواب: گزینه ۳)

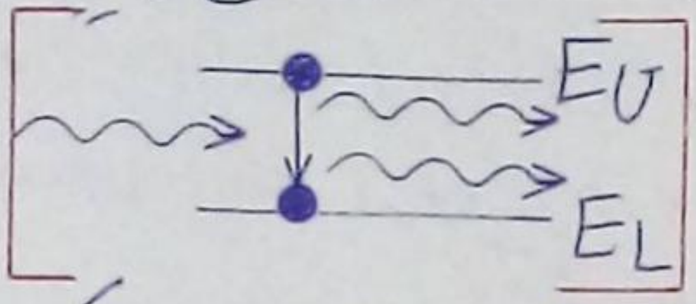
* مدل اتمی بور در پایداری اتم، طیف گسیلی و جذبی گاز هیدروژن اتمی و محاسبه انرژی یونش اتم هیدروژن موفق است. علاوه بر این، مدل بور را برای اتم‌های هیدروژن گونه (تک الکترون) مانند لیتیم دوبار یونیده (Li^{+2}) هم می‌توان به کار برد (برای اتم‌هایی که بیش از یک الکترون دارند به کار نمی‌رود. زیرا در این مدل نیروی الکتریکی هسته بر الکترون در نظر گرفته شده است و نیروی یک الکترون بر الکترون دیگر در نظر گرفته نشده است.) * مدل اتمی بور نمی‌تواند متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی را توضیح دهد.

Scanned by TapScanner

* فرآیند گسیل فوتون می‌تواند به صورت‌های زیر باشد.

① گسیل خود به خود: فوتون (در حین گذار تراز ای) گسیل می‌شود. * $(E_U - E_L = hf = \frac{hc}{\lambda})$

② گسیل القایی: یک فوتون (ورودی)، الکترون برانگیخته را تحریک (القا) می‌کند تا تراز انرژی خود را تغییر دهد و به تراز انرژی پایین‌تر برود. در گسیل القایی، انرژی فوتون ورودی (عیناً با اختلاف انرژی‌های دو تراز یعنی $E_U - E_L$ برابر است.



(* یک فوتون با طیف انرژی $E_U - E_L$ می‌آید و دو فوتون با طیف انرژی $E_U - E_L$ می‌رود (الکترون از تراز انرژی E_U به تراز انرژی E_L می‌رود و یک فوتون گسیل می‌کند))

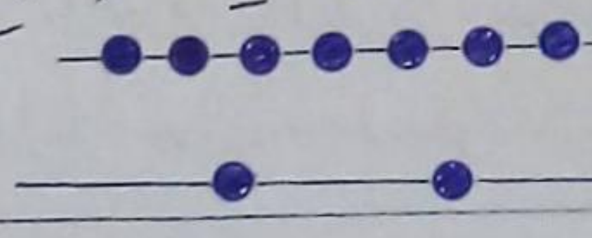
---

* هر فوتون ورودی می‌تواند دو فوتون را خارج کند. در این صورت تعداد فوتون‌ها افزایش پیدا کرده و نور تقویت می‌شود. * فوتون گسیل شده در همان جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند. * فوتون گسیل شده با فوتون ورودی همگام یا دارای همان فاز است. به این ترتیب فوتون‌هایی که باریکه لیزر ایجاد می‌کنند هم بسامد، هم جهت و هم فاز هستند. * در گسیل القایی یک چشمه انرژی خارجی مناسب باید وجود داشته باشد تا الکترون‌ها را به ترازهای انرژی بالاتر برانگیخته کند ← ① در خنثی‌های شدید نور معمولی ② تخلیه دی‌الکتریک بالا

---

* به طور معمول و در دماهای اتاق بیش‌تر الکترون‌ها در ترازهای انرژی پایین‌تر قرار دارند. اگر انرژی کافی به اتم‌ها داده شود، الکترون‌های بیش‌تری به ترازهای انرژی بالاتر برانگیخته خواهند شد، (وارونی جمعیت) وارونی جمعیت در یک محیط لیزری، زمانی ایجاد می‌شود که تعداد الکترون‌ها در ترازهای موسوم به ترازهای شبه پایدار نسبت به ترازهای پایین‌تر بسیار بیش‌تر باشند. * در این ترازها، الکترون‌ها مدت زمان بسیار طولانی‌تری (10^{-3} s) نسبت به حالت برانگیخته معمولی (10^{-8} s) باقی می‌مانند. به همین دلیل، فرصت بیشتری برای ایجاد وارونی جمعیت و در نتیجه تقویت نور لیزر فراهم می‌شود.

$P_{\text{توان (لیزر)}} = \frac{E}{t}$ $\left(\frac{\text{انرژی}}{\text{زمان}}\right)$ $\left(nhf = \frac{nhc}{\lambda}\right)$



Scanned by TapScanner

* اگر مطالب این فصل (آشنایی با فیزیک هسته ای) خواندنی است ← مطالعه از روی کتاب درسی مدرسه

$A = Z + N$ ، $E = mc^2 = (\Delta m)c^2$

شرح پروتون ها و نوترون ها

$_{Z}^{A}X \rightarrow$ نماد عنصر

عدد جرمی

عدد اتمی ← Z — N ← عدد نوترونی

تعداد پروتون ها

تعداد نوترون ها (* معمولا نمایش داده نمی شود)

$_{Z}^{A}X = {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_{2}^{4}He$ واپاشی آلفا (α)

$_{Z}^{A}X = {}_{Z+1}^{A}Y + {}_{-1}^{0}e^{-}$ واپاشی β

$_{Z}^{A}X = {}_{Z-1}^{A}Y + {}_{1}^{0}e^{+}$ واپاشی بتای مثبت (β^+)

$_{Z}^{A}X^{*} = {}_{Z}^{A}X + \gamma$ واپاشی γ

$N = N_0 \times (\frac{1}{2})^n$ ، $n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$ ، $m = m_0 \times (\frac{1}{2})^n$

Scanned by TapScanner

تاریخ ۹۸/۱۱/۲۰
شماره ۸۳۳۲۶

بسمه تعالی

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

گواهی

بدین وسیله گواهی می شود، آقای محمدعلی کاشانی فرزند فرهاد به شماره شناسنامه ۳۳۸۰۷۵۷۷۷۲ در آزمون سراسری سال ۱۳۹۳ در گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی شرکت نموده و رتبه کشوری ۳۰۹ را در بین ۱۹۱۴۶۶ نفر شرکت کننده (حاضر در جلسه) کسب نموده و رتبه ۱۰۴ را در سهمیه منطقه دو در بین ۸۳۱۴۴ نفر شرکت کننده حاضر در جلسه کسب نموده است و در رشته مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی شریف -تهران کدرشته (۱۰۹۰۰) پذیرفته شده است.

شایان ذکر است این نامه به منزله مجوز ثبت نام نمی باشد. این گواهی بنا به درخواست نامبرده صادر گردیده است.

مهدی ناصری
مدیر کل دفتر روابط عمومی و امور بین الملل

https://t.me/khofasenevisikonkoor

تهران: خیابان کریمخان زند- بین خیابان استاد نجات اللهی و سپهبد قرنی- پلاک ۲۰۴
تلفن : ۳-۸۸۹۲۳۹۵۰-۰۲۱
۰۲۱-۸۸۹۲۲۲۵۳
نمابر: ۰۲۱-۸۹۷۸۲۳۶۰
۰۲۶-۳۶۱۸۲۳۴۸
صندوق پستی تهران : ۴۳۷۸-۱۵۸۷۵
صندوق پستی کرج: ۳۱۶۶-۳۱۵۳۵
وب سایت:
www.sanjesh.org
پست الکترونیک:(E-mail)
Dabir@sanjesh.org

تاریخ: ۱۳۹۸/۱۱/۲۰
شماره:
پیوست:

۸۳۵۶۸

بسمه تعالی

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«گواهی»

گواهی می‌شود **محمدعلی کاشانی** فرزند **فرهاد** با کدملی/ شماره شناسنامه **۳۳۸۰۷۵۷۷۷۲** در **بیست و چهارمین** دوره المپیاد دانشجویی کشور درسال **۱۳۹۸** شرکت نموده و در مرحله نهایی رتبه **دوم و مدال نقره** را در المپیاد **مهندسی عمران** کسب کرده است.

احسان جمالی
معاون فنی و آماری
و دبیر شورای [illegible] دانشجویی کشور

https://t.me/khalasenevisikonkoor

تهران: خیابان کریمخان زند- بین خیابان استاد نجات اللهی و سپهبد قرنی- پلاک ۲۰۴
تلفن: ۳-۸۸۹۲۳۹۵۰-۰۲۱
۰۲۱-۸۸۹۲۲۲۵۳
نمابر: ۰۲۱-۸۹۷۸۲۳۶۰
۰۲۶-۳۶۱۸۲۳۴۸
صندوق پستی تهران: ۴۳۷۸-۱۵۸۷۵
صندوق پستی کرج: ۳۱۶۶-۳۱۵۳۵
وب سایت:
www.sanjesh.org
پست الکترونیک:(E-mail)
Dabir@sanjesh.org

تاریخ: ۹۸/۱۱/۲۰
شماره: ۱۳۳۲۶
پیوست:

بسمه تعالی

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

گواهی

بدین وسیله گواهی می شود آقای محمدعلی کاشانی فرزند فرهاد به شماره شناسنامه ۳۳۸۰۷۵۷۷۷۲ درآزمون کارشناسی ارشد سال ۱۳۹۸ شرکت نموده و در رشته امتحانی مجموعه مهندسی عمران کد ۱۲۶۴ در بین ۲۳۷۳۱ نفر شرکت کننده، رتبه کل ۲ را کسب نموده است. در ضمن تعداد پذیرفته شدگان این رشته ۸۴۵۹ نفر می باشد.

شایان ذکر است، نامبرده در کد ضریب ۱ رتبه ۲ را کسب کرده است. ایشان در کد محل ۲۱۲۸۷ دوره روزانه دانشگاه صنعتی شریف -تهران پذیرفته شده اند. این گواهی بنا به درخواست نامبرده صادر گردیده است.

منظور از کدضریب، مجموعه رشته وگرایش های دارای ضرایب یکسان در هر رشته امتحانی مطابق با دفترچه راهنمای انتخاب رشته می باشد.

دکتر ناصری

مدیر کل دفترریاست،روابط عمومی و امور بین الملل

https://t.me/khodasenevisikonkoor

تهران: خیابان کریمخان زند- بین خیابان استاد نجات اللهی و سپهبد قرنی- پلاک ۲۰۴
تلفن : ۳-۸۸۹۲۳۹۵۰-۰۲۱
۰۲۱-۸۸۹۲۲۲۵۳
نمابر: ۰۲۱-۸۹۷۸۲۳۶۰
۰۲۶-۳۶۱۸۲۳۴۸
صندوق پستی تهران : ۴۳۷۸-۱۵۸۷۵
صندوق پستی کرج: ۳۱۶۶-۳۱۵۳۵
وب سایت:
www.sanjesh.org
پست الکترونیک:(E-mail)
Dabir@sanjesh.org