

فصل ششم - تناسب و درصد

درس اول : کسر، نسبت و تناسب

نسبت، مقایسه ی بین دو چیز مختلف است. برای مثال اگر نسبت نیمکت ها به دانش آموزان در یک کلاس ۱ به ۲ باشد، یعنی روی یک نیمکت ۲ نفر می نشینند. این نسبت را به صورت زیر در جدول قرار می دهیم و به صورت های « ۱ به ۲ » یا « ۱ و ۲ » یا « ۲ : ۱ » یا $\frac{1}{2}$ نمایش می دهیم.

نیمکت	۱
دانش آموز	۲

مثال: با توجه به شکل های زیر، هر یک از جدول نسبت ها را کامل کنید.

نکته: همان طور که صورت و مخرج کسری را در عددی ضرب می کنیم و کسری مساوی کسر اولیه به دست می آید، اگر نسبت ها را نیز در عددی ضرب کنیم، تغییر نمی کنند و نسبت های حاصل با نسبت های اولیه برابرند؛ یعنی نسبت ۲ به ۳ با نسبت ۴ به ۶ برابر است.

مثال: نسبت پول رضا، احمد و پرهام، مانند $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{6}$ است. نسبت ها را به صورت عدد صحیح بیان کنید.

پاسخ: هر سه عدد را در کوچک ترین مخرج مشترک آن ها (عدد ۶) ضرب می کنیم.

$$\text{پرهام: } \frac{5}{6} \times \frac{6}{6} = 5 \qquad \text{احمد: } \frac{2}{3} \times \frac{6}{6} = 4 \qquad \text{رضا: } \frac{1}{3} \times \frac{6}{6} = 2$$

یعنی نسبت پول رضا، احمد و پرهام مانند ۲ به ۴ به ۵ است.

نکته: در مسئله های مربوط به نسبت، ترتیب مهم است؛ یعنی وقتی که می گوییم نسبت سن آرش به روزمهر ۳ به ۵ است، یعنی عدد ۳ مربوط به سن آرش و عدد ۵ مربوط به سن روزمهر است.

گاهی نسبت های بین چند مقدار به طور واضح بیان نمی شود که در این صورت باید نسبت بین عامل مشترک ان ها را یکسان کنیم تا بتوانیم نسبت هر یک از عامل های داده شده را تشخیص دهیم.

مثال: نسبت سن پرهام به سعید ۳ به ۵ و نسبت سن سعید به سارا ۲ به ۷ است. نسبت سن پرهام به سارا را بیابید.

پاسخ: دقت کنید که در این مسئله، نسبت سن پرهام به سارا واضح نیست و سعید در هر دو نسبت مشترک است؛ پس باید نسبت سن سعید در هر دو حالت به یک عدد تبدیل شود، یعنی نسبت سن پرهام به سارا، مانند ۶ به ۳۵ است.

پرهام	3×2		۶
سعید	5×2	2×5	۱۰
سارا		7×5	۳۵

هرگاه تغییرات دو مقدار به صورتی باشد که نسبت (حاصل تقسیم) آن ها مقدار ثابتی باشد، به آن دو مقدار، مقدارهای متناسب می گوییم.

مثال: نسبت طول یک ضلع مربع به محیط آن، همواره ثابت و مساوی $\frac{1}{4}$ است؛ پس می گوییم طول ضلع یک مربع با محیط آن متناسب است. به جدول زیر دقت کنید.

ضلع مربع	۳	۵	۷	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{3}$	۱۷
محیط مربع	۱۲	۲۰	۲۸	۲	$\frac{1}{2}$	۶۸
مساحت مربع	۹	۲۵	۴۹	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{0.9}$	۲۸۹

همان طور که در جدول می بینید، اندازه ی ضلع مربع با مساحت آن متناسب نیست؛ یعنی نسبت آن ثابت نیست.

تناسب

دو نسبت مساوی، یک تناسب را تشکیل می دهند. حاصل تناسب، یعنی یافتن مقدار مجهول در دو نسبت مساوی؛ یعنی اگر یکی از عددها در تناسب مشخص نباشد، مقدار آن را بیابیم.

جدولی که تناسب را نمایش می دهد، جدول تناسب نامیده می شود.

مثال: در تساوی مقابل، در جای خالی چه عددی را باید قرار داد؟

۳	□
۵	۲۵

پاسخ:

روش ۱

۳	□
۵	۲۵

$$\square = \frac{25 \times 3}{5} = 15$$

روش ۲

۳	۱۵
۵	۲۵

تناسب را به صورت دو کسر مساوی نیز نشان می دهند. برای مثال جدول تناسب

۳	۹
۴	۱۲

را به صورت $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ نیز نشان می دهند.

تسهیم به نسبت یعنی تقسیم کردن به نسبت سهم هر چیزی یا هر کسی از کل سهم. برای مثال وقتی که می گوییم می خواهیم ۵۰ تومان را نسبت ۲ به ۳ بین علی و رضا تقسیم کنیم، یعنی می خواهیم این پول را طوری تقسیم کنیم که از ۵ قسمت کل پول، ۲ قسمت به علی و ۳ قسمت به رضا برسد. این طوری:

$$(2 + 3 = 5)$$

نسبت سهم رضا نسبت سهم علی

مثال: احمد ۲۸ عدد پیچ و مهره دارد. نسبت پیچ ها به مهره های او $\frac{۲}{۵}$ است؛ او چند پیچ و چند مهره دارد؟
 پاسخ: عدد ۲۸، نه تعداد پیچ ها است و نه تعداد مهره ها، بلکه مجموع تعداد پیچ ها و مهره ها است، بنابراین باید مجموع نسبت ها را حساب کنیم.

پیچ	۲	۸
مهره	۵	۲۰
کل (مجموع)	۷	۲۸

×۴

یعنی احمد ۸ پیچ و ۲۰ مهره دارد.

کسر، نسبت و تناسب ۲

نسبت

اگر بخواهیم در ریاضیات رابطه ی بین دو چیز یا دو عدد را نشان دهیم از نسبت استفاده می کنیم. به طور مثال هر موتورسیکلت دارای دو چرخ است، بنابراین دو موتورسیکلت دارای چهار چرخ است و سه موتورسیکلت دارای شش چرخ می باشند به این ترتیب می توان گفت که نسبت تعداد موتورسیکلت ها به تعداد چرخ ها ۱ به ۲ است که این نسبت را به صورت کسر با $\frac{1}{2}$ و به صورت اعشاری با 0.5 هم نمایش می دهند. البته در بعضی از کتاب ها نسبت ۱ به ۲ را به صورت های (۱ و ۲) و همچنین (۲:۱) هم نمایش می دهند. دقت داشته باشید که نسبت $\frac{1}{2}$ را به صورت کسری نخوانید، بلکه آن را به صورت (۱ به ۲) و یا (۲ و ۱) بخوانید.

$$\frac{\text{تعداد موتورسیکلت}}{\text{تعداد چرخ}} = \frac{1}{2} \quad \text{نسبت تعداد موتورسیکلت ها به تعداد چرخ ها}$$

نکته:

۱- نسبت واحد ندارد اما باید دقت کنیم که در هر نسبت، صورت و مخرج را بر حسب یک واحد معین بنویسیم.

۲- صورت و مخرج هر نسبت را می توان ساده کرد.

مثال ۱: قد علی ۱۷۵ سانتی متر است و قد مهدی $\frac{1}{5}$ متر است. نسبت قد علی به قد مهدی چه قدر است؟
با توجه به این که قد مهدی بر حسب متر بیان شده است، ابتدا قد او را بر حسب سانتی متر بیان می کنیم، چون هر متر معادل صد سانتی متر است، پس قد مهدی $150 = 100 \times \frac{1}{5}$ سانتی متر می شود. بنابراین؛ در برخی از مسائل صورت یا مخرج و یا هر دوی آن ها را به صورت کسری می دهند که برای ساده تر شدن نسبت باید صورت نسبت را بر مخرج آن تقسیم کنیم.

$$\frac{\text{قد علی}}{\text{قد مهدی}} = \frac{175}{1/5 \times 100} = \frac{175}{150} = \frac{7}{6}$$

+۲۵ +۲۵

مثال ۲: نسبت سن سارا به سن مینا مثل $\frac{14}{15}$ به $\frac{7}{10}$ است. نسبت سن این دو نفر را به ساده ترین شکل بیان کنید.

$$\frac{\text{سن سارا}}{\text{سن مینا}} = \frac{14}{15} \div \frac{7}{10} = \frac{14}{15} \times \frac{10}{7} = \frac{4}{3}$$

نسبت $\frac{4}{3}$ ساده ترین شکل بیان نسبت سن این دو نفر است.

مقدارهای متناسب و جدول تناسب

هرگاه دو نسبت با هم مساوی باشند، می‌گوییم که این دو نسبت با هم دیگر متناسب هستند. به طور مثال با توجه به جدول زیر نسبت طول ضلع هر مربع به محیط آن $\frac{1}{4}$ است و با کم تر یا بیش تر شدن ضلع مربع، محیط هم به همان نسبت تغییر می‌کند، یعنی اگر طول ضلع را دو برابر کنیم، محیط هم دو برابر می‌شود و یا اگر محیط را ۲۰ برابر کنیم، طول ضلع هم ۲۰ برابر می‌شود. پس محیط مربع با طول ضلع آن متناسب است و یا به عبارت دیگر طول ضلع مربع با محیط آن متناسب دارد. به این جدول که تناسب را نشان می‌دهد، جدول تناسب می‌گوییم.

طول مربع	۱	۲	۳	۴	۱۵	۲۰	۸۰
محیط مربع	۴	۸	۱۲	۱۶	۶۰	۸۰	۳۲۰

در حل برخی مسائل می‌توانیم از جدول تناسب استفاده کنیم و جواب مسئله را به دست آوریم.

مثال ۳: اگر نسبت ۷ به ۱۱ مانند نسبی \bigcirc به ۷۷ باشد، داخل دایره چه عددی باید بنویسیم؟

برای حل سؤال از جدول تناسب مقابل استفاده می‌کنیم، چون ۱۱ را هفت برابر کردیم تا حاصل ۷۷ شود پس باید ۷ را هم هفت برابر کنیم، بنابراین؛

۷	\bigcirc
۱۱	۷۷

$\times 7$

$$\bigcirc = 7 \times 7 = 49$$

حل جدول تناسب

اگر مانند مثال قبل نتوانیم، چند برابر شدن عددها را تشخیص دهیم، بهتر است که از روش زیر که به روش طرفین وسطین معروف می‌باشد کمک بگیریم. در جدول مقابل به عددهای ۷ و ۷۷، طرفین و به ۱۱ و هم وسطین گفته می‌شود. در هر جدول تناسب همواره حاصل ضرب طرفین با حاصل ضرب وسطین برابر است. بنابراین برای پیدا کردن عدد داخل کافی است که حاصل ضرب طرفین را بر عدد ۱۱ تقسیم کنیم:

۷	\bigcirc
۱۱	۷۷

$\times 7$

$$\Rightarrow \bigcirc = \frac{7 \times \cancel{77}^7}{\cancel{11}_1} = 49$$

تسهیم به نسبت

تسهیم به نسبت یعنی سهیم بودن در نسبت، به عبارت دیگر تسهیم به نسبت یعنی مشخص کردن سهم هر چیزی به نسبت معین از کل سهم ها. به طور مثال در یک کلاس نسبت دانش آموزانی که به فوتبال علاقه مند هستند به دانش آموزانی که به والیبال علاقه مندند $\frac{5}{8}$ است، پس نسبت دانش آموزانی که به فوتبال علاقه مندند به کل دانش آموزان $\frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$ است. همچنین نسبت دانش آموزانی که به والیبال علاقه مندند به کل دانش آموزان $\frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$ است. البته به شرط این که این نسبت مربوط به کل دانش آموزان باشد و هر دانش آموز حتما به یکی از این دو ورزش علاقه مند باشد.

مثال ۴: حاج رحیم و مشهدی سلیمان زمینی را به نسبت ۳ به ۷ شخم زدند. اگر کدخدا رجب (صاحب زمین) بخواهد ۵۰۰۰۰۰ تومان را بین آن ها تقسیم کند، سهم هر یک چه قدر می شود؟ ابتدا جمع نسبت ها را حساب کرده و سپس با کمک جدول تناسب زیر، سهم هر کدام را از مبلغ ۵۰۰۰۰۰ تومان مشخص می کنیم.

سهم حاج رحیم	۳	○	$\Rightarrow \text{○} = 3 \times 50000 = 150000$
سهم مشهدی سلیمان	۷	□	$\Rightarrow \text{□} = 7 \times 50000 = 350000$
سهم کل	۱۰	۵۰۰۰۰	

$\times 50000$

$$جمع\ نسبت\ ها = 3 + 7 = 10$$

مثال ۵: یک نقاش ساختمان، برای تهیه ی رنگ سبز، هر ۵ کیلوگرم رنگ زرد را با ۳ کیلوگرم رنگ آبی مخلوط می کند. او برای تهیه ۳۲ کیلوگرم رنگ سبز، به چند کیلوگرم از هر رنگ نیاز دارد؟

$$مجموع\ نسبت\ ها = 5 + 3 = 8$$

رنگ زرد	۵	○	$\Rightarrow \text{○} = 5 \times 4 = 20$
رنگ آبی	۳	□	$\Rightarrow \text{□} = 3 \times 4 = 12$
رنگ سبز	۸	۳۲	

$\times 4$

یعنی اگر ۵ کیلوگرم رنگ زرد را با ۳ کیلوگرم رنگ آبی مخلوط کنیم، ۸ کیلوگرم رنگ سبز به دست می آید.

مقایسه ی نسبت ها

برای مقایسه چند نسبت ابتدا هر نسبت را به صورت یک کسر می نویسیم و سپس آن ها را مانند مقایسه ی کسرها، از روش مخرج مشترک گیری و یا روش های دیگر مقایسه می کنیم.

مثال ۶: در ۲ کیلوگرم از یک نوع شیرینی، ۵۰۰ گرم شکر و در ۳ کیلوگرم از نوع دیگری شیرینی، ۷۰۰ گرم شکر به کار رفته است. کدام نوع شیرینی، شکر بیش تری دارد؟ ابتدا نسبت شکر به شیرینی را در هر دو نوع شیرینی مشخص می کنیم، سپس کسرهای حاصل را با هم مقایسه می کنیم.

$$\begin{aligned} \text{شیرینی نوع اول:} \quad \frac{\text{مقدار شکر}}{\text{کل شیرینی}} &= \frac{500 \text{ گرم}}{2 \times 1000 \text{ گرم}} = \frac{500}{2000} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج} \times 15} \frac{15}{60} \\ \text{شیرینی نوع دوم:} \quad \frac{\text{مقدار شکر}}{\text{کل شیرینی}} &= \frac{700 \text{ گرم}}{3 \times 1000 \text{ گرم}} = \frac{700}{3000} = \frac{7}{30} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج} \times 2} \frac{14}{60} \end{aligned}$$

با مقایسه $\frac{15}{60}$ و $\frac{14}{60}$ نتیجه می شود که شیرینی نوع اول دارای شکر بیش تری است.

درس دوم – درصد

نسبت یا کسری که مخرج آن ۱۰۰ باشد، نشان دهنده ی درصد است. برای مثال، کسری $\frac{57}{100}$ را به صورت ۵۷٪ نشان می دهیم و می خوانیم: پنجاه و هفت درصد

وقتی که می گوئیم شیر با چربی ۴٪، یعنی در هر ۱۰۰ گرم از این شیر، ۴ گرم چربی است یا در ۱۰۰ کیلوگرم از این شیر، ۴ کیلوگرم چربی است.

اگر بخواهیم کسری را به صورت درصد بنویسیم، باید کسری مساوی با آن و با مخرج ۱۰۰ پیدا کنیم.

مثال: کسرهای مقابل را به صورت درصد بنویسید.

$$\frac{3}{5} \text{ و } \frac{1}{4} \text{ و } \frac{14}{25}$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{60}{100} = 60\% \\ \frac{1}{4} &= \frac{25}{100} = 25\% \\ \frac{14}{25} &= \frac{56}{100} = 56\% \end{aligned}$$

اگر بخواهیم کسری را به صورت درصد بنویسیم، اما نتوانیم مخرج آن را به سادگی با ضرب کردن در یک عدد به ۱۰۰ تبدیل کنیم، ابتدا صورت کسر را بر مخرجش تقسیم کرده و به صورت عدد اعشاری و سپس به شکل درصد می نویسیم.

دقت کنید: ۰/۲۶ یعنی ۲۶٪، ۰/۷ یعنی ۷۰٪، ۰/۷۰ یعنی ۷۰٪.

خیلی دقت کنید: ۰/۱۲۵ یعنی ۱۲/۵٪، ۰/۸۷۵ یعنی ۸۷/۵٪.

مثال: کسر $\frac{۳}{۸}$ را به صورت درصد بنویسید.

پاسخ: مخرج کسر باید ۱۰۰ باشد تا بتوانیم به صورت درصد بنویسیم.

$$\frac{۳}{۸} = ۳ \div ۸ = ۰/۳۷۵ = \frac{۳۷۵}{۱۰۰۰} = \frac{۳۷/۵}{۱۰۰} = ۳۷/۵\% .$$

مثال: کسر $\frac{۱۴۷}{۵۰۰}$ را به صورت درصد بنویسید.

پاسخ: توجه کنید که مخرج کسر باید ۱۰۰ باشد تا بتوانیم به صورت درصد بنویسیم.

$$\frac{۱۴۷}{۵۰۰} = \frac{۲۹۴}{۱۰۰۰} = \frac{۲۹/۴}{۱۰۰} = ۲۹/۴\% .$$

کسرهای یا عددهای بزرگ تر از واحد را نیز می توان به صورت درصد نوشت. به مثال های زیر دقت کنید.

مثال: عددهای مقابل را به صورت درصد بنویسید.

پاسخ: $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۷}{۵}$

$$\frac{۷}{۵} = \frac{۱۴۰}{۱۰۰} = ۱۴۰\% \quad \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴۰} = ۳۴\% .$$

دقت کنید: ۵/۷۶ یعنی ۵۷۶٪، ۲/۳ یعنی ۲/۳۰ یعنی ۲۳۰٪.

دقت کنید: دو برابر یعنی ۲۰۰٪، سه برابر یعنی ۳۰۰٪، هفت برابر یعنی ۷۰۰٪.

کل هر چیزی را ۱۰۰٪ در نظر می گیریم، یعنی وقتی می گوییم کل دانش آموزان یک کلاس به اردو می روند، یعنی ۱۰۰٪ دانش آموزان یک کلاس به اردو می روند یا وقتی می گوییم مبلغ کالایی ۷۰۰۰ تومان است، یعنی ۱۰۰٪ مبلغ کالا ۷۰۰۰ تومان است.

مثال: ۳۰٪ دانش آموزان کلاسی به مسابقه ی فوتبال رفته اند، چند درصد به مسابقه ی فوتبال نرفته اند؟
پاسخ: کل دانش آموزان کلاس ۱۰۰٪ است.

$$۱۰۰\% - ۳۰\% = ۷۰\%$$

به مسابقه ی فوتبال نرفته اند ۷۰٪.

مثال: فروشنده ای، برای فروش کالایش ۲۰٪ تخفیف می دهد، یعنی چند درصد آن را باید بپردازیم؟
پاسخ: کل مبلغ کالا ۱۰۰٪ است.

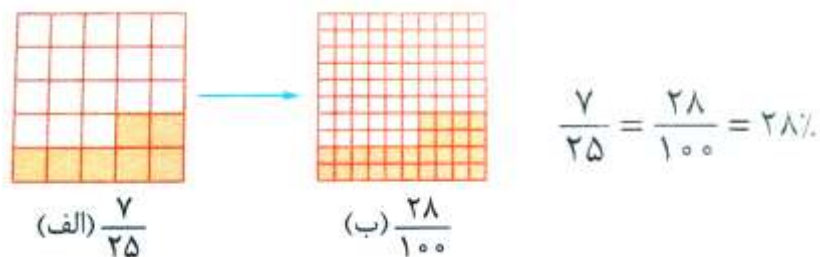
$$۱۰۰\% - ۲۰\% = ۸۰\%$$

باید بپردازیم ۸۰٪.

توجه کنید که ۲۰٪ مبلغ کالا را تخفیف می دهد، یعنی ۲۰٪ قیمت کالا گرفته نمی شود.

درصد ۲

به شکل (الف) که به ۲۵ قسمت مساوی تقسیم شده است دقت کنید. در این شکل ۷ قسمت رنگ شده است، پس $\frac{7}{25}$ شکل (الف) رنگی است. حال اگر همان شکل را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم و به همان اندازه مانند شکل (الف) رنگ کنیم، ملاحظه می کنید که $\frac{28}{100}$ شکل (ب) رنگ شده است. این دو کسر نمایش مختلفی از یک چیز هستند در ضمن می توانیم $\frac{28}{100}$ را به صورت ۲۸٪ (می خوانیم ۲۸ درصد) هم نمایش دهیم.



درصد

نسبتهی که مخرج آن عدد ۱۰۰ باشد، درصد نامیده می شود. به طور مثال اگر در نوعی گز (سوغاتی اصفهان) ۳۵ گرم از هر ۱۰۰ گرم پسته باشد در اصطلاح به آن گز ۳۵ درصد و یا ۳۵٪ گفته می شود.

نکته:

۱- در صورتی که کسری بزرگ تر از واحد باشد، درصد آن بیش تر از ۱۰۰ خواهد شد.

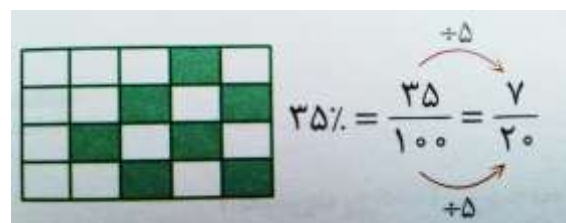
۲- مقایسه ی درصد از مقایسه ی کسرها ساده تر است.

از درصد برای درک بهتر از نسبت ها و یا کسرها استفاده می کنیم. به این ترتیب که آن نسبت و یا کسر را به صورت کسری با مخرج ۱۰۰ تبدیل می کنیم و سپس آن را به صورت درصد می نویسیم. به طور مثال کسر $\frac{۳}{۲}$ را می توان به صورت $\frac{۱۵}{۲۰} = \frac{۳ \times ۵}{۲ \times ۵}$ یعنی ۱۵٪ نشان دهیم. بنابراین برای تبدیل و نمایش هر عدد کسری به شکل درصد کافی است که کسری مساوی با آن کسر، با مخرج ۱۰۰ پیدا کنیم. حال اگر در یک کسر نتوانیم کسر مساوی با مخرج ۱۰۰ پیدا کنیم. حال اگر در یک کسر نتوانیم کسر مساوی با مخرج ۱۰۰ پیدا کنیم بهتر است که تقسیم صورت بر مخرج کسر را تا دو رقم اعشار حساب کنیم و درصد آن عدد را به صورت تقریبی به دست بیاوریم. مثلاً در کسر $\frac{۵}{۷}$:

$$\frac{۵}{۷} = ۵ \div ۷ \xrightarrow[\text{ماشین حساب}]{\text{استفاده از}} ۰.۷۱۴۲۸۵۷۱۴ \approx ۰.۷۱ = \frac{۷۱}{۱۰۰} = ۷۱\%$$

نمایش درصد روی یک شکل

برای نمایش هر درصدی روی یک شکل ابتدا درصد را به شکل کسری نوشته و آن را تا جای ممکن ساده می کنیم به این ترتیب به کسری می رسیم که با نمایش آن روی شکل داده شده، درصد آن نیز مشخص می شود. به طور مثال اگر بخواهیم ۳۵ درصد یک مستطیل را نشان دهیم، ابتدا ۳۵٪ را به صورت $\frac{۳۵}{۱۰۰}$ می نویسیم و آن را ساده می کنیم تا به کسر $\frac{۷}{۲۰}$ برسیم، حالا این کسر را روی یک مستطیل نشان می دهیم.



برای حل مسئله های درصد می توانیم از جدول تناسب استفاده کنیم. به مثال های زیر دقت کنید.

مثال ۱: در یک کارگاه تولید قطعات اتومبیل، ۴ درصد از محصولات معیوب هستند. اگر در این کارگاه و در یک روز ۵۵۰ قطعه تولید شود، چند تا از قطعات معیوب هستند؟

کل قطعات تولید شده (یعنی ۵۵۰) را به عنوان ۱۰۰٪ در نظر گرفته و با کمک جدول تناسب، جواب را به دست می آوریم.

۵۵۰	۱۰۰	$\Rightarrow ? = \frac{۵۵۰ \times ۴}{۱۰۰} = ۲۲$
?	۴	

مثال ۲: برای تهیه ی نوعی دارو سه ماده ی شیمیایی را به نسبت ۵، ۴ و ۱ مخلوط می کنند. در داروی به دست آمده چند درصد از هر نوع ماده وجود دارد؟ در هر ۸۰ گرم از این دارو چند گرم از هر ماده وجود دارد؟ برای حل سؤال از جدول تناسب زیر استفاده می کنیم؛

مقدار در ۸۰ گرم درصد

ماده ی نوع ۱	۵	$۵ \times ۱۰ = ۵۰$	$۵ \times ۸ = ۴۰$
ماده ی نوع ۲	۴	$۴ \times ۱۰ = ۴۰$	$۴ \times ۸ = ۳۲$
ماده ی نوع ۳	۱	$۱ \times ۱۰ = ۱۰$	$۱ \times ۸ = ۸$
دارو	۱۰	۱۰۰	۸۰

$\xrightarrow{\times ۱۰}$ $\xrightarrow{\times ۸}$

مثال ۳: عددی را هفت برابر کرده ایم.

الف) عدد جدید چند درصد عدد اولیه است؟

عدد	۱۰۰	$\Rightarrow ? = ۱۰۰ \times ۷ = ۷۰۰\%$
۷ برابر عدد	?	

$\times ۷$

ب) عدد اولیه چند درصد افزایش پیدا کرده است؟

افزایش $۷۰۰\% - ۱۰۰\% = ۶۰۰\%$

درس سوم - کاربرد درصد در محاسبات مالی

در محاسبات مالی همیشه درصد قیمت اصلی کالا یا قیمت اولیه 100% در نظر گرفته می شود
درصد مالیات و درصد سود، همیشه به درصد قیمت اصلی کالا اضافه می شوند و قیمت کالا را افزایش می دهند.

مثال: قیمت کالایی 20000 تومان است. اگر 5% مالیات بر این کالا تعلق بگیرد، خریدار برای خرید این کالا چند تومان باید بپردازد؟

پاسخ:

درصد خرید کالا با مالیات $100\% + 5\% = 105\%$

قیمت با مالیات	۱۰۵	۲۱۰۰۰	تومان
قیمت اولیه	۱۰۰	۲۰۰۰۰	

قیمت کالا با مالیات 21000 تومان است.

مثال: فروشنده ای کالایی را به قیمت 5000 تومان خرید. اگر او کالا را با 30% سود قیمت گذاری کند، قیمت فروش کالا چند تومان است؟

پاسخ:

درصد مبلغ فروش کالا $100\% + 30\% = 130\%$

قیمت با سود	۱۳۰	۶۵۰۰	
قیمت اولیه	۱۰۰	۵۰۰۰	

قیمت فروش کالا 6500 تومان است.

درصد تخفیف، همواره از درصد قیمت اصلی (یعنی 100%) کم می شود و قیمت کالا را کاهش می دهد.

مثال: فروشنده ای، کتابی را با 10% تخفیف می فروشد. اگر قیمت اولیه ی کالا 4800 تومان باشد، خریدار برای خرید این کالا چند تومان باید بپردازد؟

پاسخ:

درصد بعد از تخفیف یا درصد پرداخت $100\% - 10\% = 90\%$

قیمت با تخفیف	۹۰	۴۳۲۰
قیمت اصلی	۱۰۰	۴۸۰۰

تومان

قیمت کالا پس از تخفیف ۴۳۲۰ تومان است.

مثال: سال گذشته قیمت کالایی ۴۰۰۰ تومان بوده و امسال همان کالا ۱۰۰۰۰ تومان شده است. قیمت این کالا چند درصد افزایش داشته است؟

پاسخ:

قیمت امسال	۱۰۰۰۰	۲۵۰
قیمت سال گذشته	۴۰۰۰	۱۰۰

درصد قیمت کالا نسبت به پارامتر ۲۵۰ است

$250\% - 100\% = 150\%$

درصد افزایش قیمت $250\% - 100\% = 150\%$

کاربرد درصد در محاسبات مالی ۲

تخفیف

منظور از تخفیف روی یک کالا این است که مبلغی از کل قیمت کالا را پرداخت نکنیم. به طور مثال اگر قیمت کالایی ۵۰۰۰ تومان باشد و آن را با ۱۵٪ تخفیف خریداری کنیم، آن گاه باید مبلغ ۴۲۵۰ تومان را جهت خرید این کالا پرداخت کنیم. به روش های زیر برای محاسبه ی این مبلغ دقت کنید.

روش اول: با استفاده از جدول تناسب ۱۵٪ قیمت کالا را حساب کنیم و عدد حاصل را از قیمت اصلی کم کنیم.

قیمت فروش	۱۰۰	۵۰۰۰	$\Rightarrow \text{مبلغ پرداختی} = ۵۰۰۰ - ۷۵۰ = ۴۲۵۰$ $\Rightarrow \text{مبلغ تخفیف} = ۷۵۰ = \frac{۱۵ \times ۵۰۰۰}{۱۰۰}$
مقدار تخفیف	۱۵	?	

روش دوم: ۱۵٪ از ۱۰۰٪ را تخفیف می گیریم پس $۱۰۰\% - ۱۵\% = ۸۵\%$ از قیمت این کالا را پرداخت می کنیم. از طرفی ۸۵٪ همان $۰/۸۵$ است، بنابراین:

$$\text{مبلغ پرداختی} = ۵۰۰۰ \times ۰/۸۵ = ۴۲۵۰ \quad \text{یا} \quad ۵۰۰۰ \times \frac{۸۵}{۱۰۰} = ۴۲۵۰$$

در بعضی از مسئله ها مقدار تخفیف و مبلغ پرداختی مشخص است و می خواهند قیمت اولیه را مشخص کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱: قیمت کالایی پس از تخفیف ۲۰ درصدی، ۵۶۰۰ تومان شده است. قیمت اولیه این کالا چه قدر بوده است؟

روش اول: وقتی ۲۰٪ از قیمت کالا را تخفیف گرفته ایم یعنی $۱۰۰\% - ۲۰\% = ۸۰\%$ قیمت آن را پرداخت کرده ایم، پس ۵۶۰۰ تومان همان ۸۰٪ قیمت کل است. بنابراین برای تعیین قیمت اولیه یا کل از جدول تناسب زیر کمک می گیریم:

مبلغ پرداختی	۸۰	۵۶۰۰	$\Rightarrow \text{قیمت اولیه کالا} = ۷۰۰۰$ $\Rightarrow \text{قیمت اولیه} = \frac{۱۰۰ \times ۵۶۰۰}{۸۰}$
قیمت اصلی	۱۰۰	?	

روش دوم: همان طور که گفتیم ۸۰٪ همان ۵۶۰۰ تومان است، از طرفی ۸۰٪ همان ۰/۸ می باشد، بنابراین:

$$\text{قیمت کل (اولیه)} = 5600 \div 0.8 = 5600 \times \frac{10}{8} = 7000$$

در بعضی از مسئله ها قیمت اولیه و مبلغ پرداختی مشخص است و می خواهند تا مقدار تخفیف را مشخص کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۲: قیمت کالایی ۸۰۰۰ تومان بود، اما فروشنده آن را به مبلغ ۷۲۰۰ تومان فروخت. او چند درصد تخفیف داده است؟ فروشنده ۷۲۰۰ - ۸۰۰۰ یعنی مبلغ ۸۰۰ تومان تخفیف داده است. لذا با استفاده از جدول تناسب زیر، درصد تخفیف را مشخص می کنیم:

قیمت اصلی	۸۰۰۰	۱۰۰	⇒ ? = $\frac{800 \times 100}{8000} = 10\%$
مقدار تخفیف	۸۰۰	?	

سود

منظور از سود در فروش یک کالا این است که مبلغی بیش تر از قیمت خریداری شده توسط خودمان دریافت کنیم. به طور مثال اگر کالایی را به قیمت ۵۰۰۰ تومان خریداری کنیم و بخواهیم آن را با ۱۵ درصد سود بفروشیم، آن گاه باید قیمت این کالا را ۵۷۵۰ تومان اعلام کنیم. به روش های زیر برای محاسبه ی مقدار سود دقت کنید.

روش اول: باید ۱۵ درصد به قیمت کل (یعنی ۱۰۰ درصد) اضافه کنیم بنابراین باید $100 + 15 = 115$ درصد قیمت کالا را دریافت کنیم.

		$\times 50\%$	
قیمت خرید کالا	۱۰۰	۵۰۰۰	
سود	۱۵	?	⇒ ? = $15 \times 50 = 750$
قیمت فروش کالا	۱۱۵	?	⇒ ? = $115 \times 50 = 5750$
		$\times 50\%$	

البته می توانیم قیمت فروش کالا را با جمع مقدار سود و مبلغ خریداری شده هم مشخص کنیم:

$$۵۰۰۰ + ۷۵۰ = ۵۷۵۰$$

روش دوم: ۱۵٪ سود روی ۱۰۰٪ قیمت خریداری شده توسط خودمان گرفته ایم پس باید ۱۱۵٪ = ۱۵٪ + ۱۰۰٪ یا همان ۱/۱۵ قیمت خریداری شده را دریافت کنیم، بنابراین:

$$۵۰۰۰ \times \frac{۱۱۵}{۱۰۰} = ۵۷۵۰ \quad \text{یا} \quad ۵۰۰۰ \times \frac{۱}{۱۵} = ۵۷۵۰ = \text{قیمت فروش کالا}$$

در بعضی از مسئله ها مقدار سود و مبلغ فروش مشخص است و می خواهند مبلغ خرید کالا را مشخص کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۳: قیمت کالایی پس از افزودن ۲۰٪ به قیمت آن، مبلغ ۵۷۰۰ تومان اعلام شده است. قیمت خرید این کالا چه قدر بوده است؟

روش اول: وقتی ۲۰٪ به قیمت کالایی اضافه کرده ایم یعنی ۱۲۰٪ = ۲۰٪ + ۱۰۰٪ قیمت خریداری شده را برای فروش کالا اعلام کرده ایم پس ۵۷۰۰ تومان همان ۱۲۰٪ قیمت کالا است، بنابراین برای تعیین قیمت خرید کالا از جدول تناسب زیر استفاده می کنیم:

قیمت فروش	۱۲۰	۵۷۰۰	$\Rightarrow ? = \frac{۱}{۱۲۰} \times ۵۷۰۰ = ۹۵۰$ مبلغ سود
سود	۲۰	?	
قیمت خرید	۱۰۰	?	$\Rightarrow ? = \frac{۱۰۰}{۱۲۰} \times ۵۷۰۰ = ۴۷۵۰$ قیمت خرید

البته برای حل این مسئله نیازی به رسم جدول تناسب سه طبقه نیست و بهتر است طبقه ی سود را در این جدول حذف کنیم اما این روش را با توجه به کتاب درسی بیان کرده ایم.

روش دوم: همان طور که گفتیم، ۵۷۰۰ تومان یعنی ۱۲۰٪ قیمت خریداری شده از طرفی ۱۲۰٪ برابر $\frac{۱۲۰}{۱۰۰}$ یا $\frac{۱۲}{۱۰}$ است. با تقسیم ۵۷۰۰ بر $\frac{۱۲}{۱۰}$ یا $\frac{۱}{۱۲}$ ، قیمت خرید مشخص می شود.

$$۵۷۰۰ \div \frac{۱۲۰}{۱۰۰} = ۵۷۰۰ \times \frac{۱۰۰}{۱۲۰} = ۴۷۵۰ = \text{قیمت خرید}$$

در بعضی از مسئله ها قیمت خرید و قیمت فروش کالا را اعلام می کنند و می خواهند تا درصد سود را مشخص کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۴: علی کالایی را به قیمت ۵۰۰۰ تومان خرید و آن را به قیمت ۶۰۰۰ تومان فروخت، او چند درصد سود کرده است؟

۵۰۰۰ تومان همان ۱۰۰ درصد قیمت خرید است، از طرفی علی ۶۰۰۰ - ۵۰۰۰ یعنی مبلغ ۱۰۰۰ تومان سود کرده است، لذا با استفاده از جدول تناسب زیر، درصد سود او را مشخص می کنیم:

قیمت خرید	۱۰۰	۵۰۰۰
مقدار سود	?	۱۰۰۰

$\Rightarrow ? = 1000 \div 50 = 20$ یا $? = \frac{100 \times 1000}{5000} = 20 = \text{درصد سود}$

مالیات

در کشور عزیزمان، به بیش تر کالاها و خدماتی که ارائه می شود مالیات بر ارزش افزوده تعلق می گیرد. در واقع مالیات پولی است که باید به قیمت کالا اضافه شود و از مشتریان دریافت گردد و فروشنده باید این مبلغ اضافه را به خزانه ی دولت واریز نماید و حق ندارد آن را برای خودش بردارد. به طور مثال اگر قیمت کالایی ۱۵۰۰۰ تومان باشد و به این کالا ۹٪ مالیات بر ارزش افزوده تعلق بگیرد باید مبلغ ۱۶۳۵۰ تومان به فروشنده پرداخت کنیم. مسئله های مالیات را همانند مسئله های سود حل می کنیم. به روش های محاسبه ی مقدار مالیات و مبلغ پرداختی در مثال بالا دقت کنید.

قیمت کالا	۱۰۰	۱۵۰۰۰
مالیات	۹	?

$\Rightarrow ? = 9 \times 1500 = 13500 \Rightarrow$ ۱۳۵۰۰ تومان مقدار مالیات بر ارزش افزوده این کالا است

روش اول: $\text{مبلغ پرداختی} = 15000 + 1350 = 16350$

روش دوم: ۹٪ مقدار مالیات بر ارزش افزوده این کالا است پس فروشنده باید ۱۰۹٪ = ۱۰۰٪ + ۹٪ یا همان $\frac{109}{100}$ قیمت کالا را دریافت کند، بنابراین:

$\text{مبلغ پرداختی توسط مشتری} = 15000 \times \frac{109}{100} = 16350$

مثال ۵: فروشنده ای قیمت کالایی را پس از محاسبه ی ۸٪ مالیات بر ارزش افزوده، مبلغ ۷۵۶۰ تومان اعلام کرد. قیمت اصلی این کالا قبل از مالیات چه قدر بوده است؟

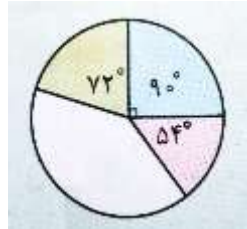
۷۵۶۰ تومان همان ۱۰۸ درصد قیمت اصلی می باشد، بنابراین:

$\text{قیمت کالا بدون مالیات} = 7560 \div \frac{108}{100} = 7560 \times \frac{100}{108} = 7000$

درس چهارم - کاربرد درصد در آمار و احتمال

یک دایره کامل زاویه ی ۳۶۰ درجه را نشان می دهد.

مثال: دایره ی شکل مقابل به چند بخش با رنگ های مختلف تقسیم شده و اندازه ی زاویه ی مربوط به هر بخش نوشته شده است. درصد مساحت هر بخش را به کل دایره بنویسید.



پاسخ:

$$\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} \rightarrow 90^\circ \rightarrow 25\%$$

$$\frac{54^\circ}{360^\circ} = \frac{54^\circ \div 18}{360^\circ \div 18} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} \rightarrow 54^\circ \rightarrow 15\%$$

$$\frac{72^\circ}{360^\circ} = \frac{72^\circ \div 18}{360^\circ \div 18} = \frac{4}{20} = \frac{20}{100} \rightarrow 72^\circ \rightarrow 20\%$$

مثال: ۳۰٪ دانش آموزان کلاسی در رشته ی بسکتبال، ۵۰٪ در رشته ی فوتبال و ۲۰٪ در رشته ی والیبال شرکت دارند. نمودار دایره ای مربوط به این داده ها را رسم کنیم.

پاسخ:

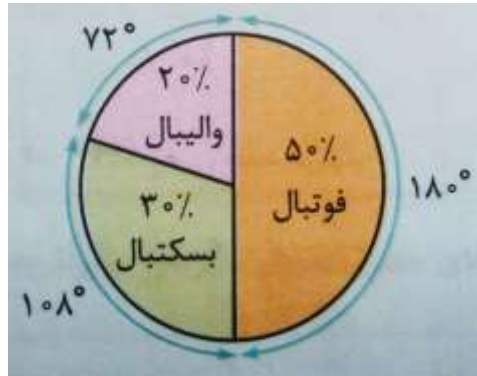
$$\frac{30}{100} = \frac{3}{10} = \frac{3}{36} \rightarrow \text{بسکتبال } 108^\circ$$

روش محاسبه ی دیگر:

$$\frac{۵}{۱۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۵ \times ۳.۶ = ۱۸^\circ \text{ فوتبال}$$

$$\frac{۲}{۱۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۷.۲^\circ \text{ والیبال}$$

اکنون دایره ای را رسم می کنیم و قسمت های مختلف را با استفاده از نقاله معین می کنیم.



مثال: در نمودار دایره ای، ۶۰٪ یعنی چند درجه؟

پاسخ:

$$\frac{۶۰}{۱۰۰} \times ۳۶۰^\circ = ۲۱۶^\circ$$

مثال: در داخل کیسه ای ۱۰ کارت وجود دارد که روی هر یک از آن ها، اعداد از ۱ تا ۱۰ نوشته شده است.

اگر بدون نگاه کردن به داخل کیسه یک کارت را بیرون بیاوریم:

الف: احتمال این که عدد روی کارت بزرگ تر از ۶ باشد، چه قدر است؟

ب: احتمال این که عدد روی کارت کم تر از ۳ باشد، چه قدر است؟

ج: نمودار دایره ای مربوط به موارد بالا را رسم کنید.

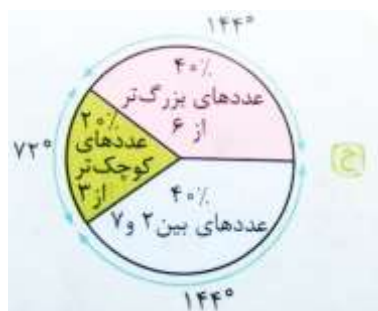
د: باقی مانده ی نمودار دایره ای مربوط به کدام اعداد روی کارت ها است؟

پاسخ: الف) اعداد بزرگ تر از ۶ یعنی ۷، ۸، ۹ یا ۱۰.

ب) یعنی عدد ۱ یا ۲ روی کارت باشد، پس:

$$\frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$$

$$\frac{2}{10} = \frac{72}{360} = 20\%$$



د) باقی مانده ی نمودار مربوط به عددهای بین ۲ و ۷ یعنی (۳، ۴، ۵ یا ۶) می باشد.

کاربرد درصد در آمار و احتمال

نمودار دایره ای

فرض کنید که در یک نظرسنجی از دوستان خود میزان علاقه مندی آن ها به انواع برندهای معروف اتومبیل را پرسیده اید و اطلاعات به دست آمده را در جدول زیر وارد کرده اید.

اسم برند	بنز	BMW	تویوتا	آئودی	پورشه
تعداد علاقه مند	۶	۵	۲	۳	۴

همان طور که ملاحظه می کنید، در مجموع از ۲۰ نفر نظرسنجی شده است. حال اگر نسبت هر یک از عددها به ۲۰ را حساب کنیم و سپس در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم، درصد علاقه مندی به هر برند مشخص می شود.

$$\frac{6}{20} \times 100 = 30\% \text{ و } \frac{5}{20} \times 100 = 25\% \text{ و } \frac{2}{20} \times 100 = 10\% \text{ و } \frac{3}{20} \times 100 = 15\% \text{ و } \frac{4}{20} \times 100 = 20\%$$

حالا مانند شکل مقابل یک دایره را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم می کنیم،



هر قسمت نشان دهنده ی یک درصد است، سپس درصد مربوط به هر کدام از اتومبیل ها را روی شکل مشخص می کنیم. همان طور که ملاحظه می کنید تقسیم یک دایره به ۱۰۰ قسمت مساوی کمی سخت و دشوار است و شاید قسمت ها به طور دقیق تقسیم نشوند، لذا بهتر است روش دیگری را برای رسم چنین نموداری یاد بگیریم، در این روش کافی است که زاویه ی مربوط به هر یک از درصدهای بالا را با استفاده از جدول تناسب زیر مشخص کنیم. دقت داشته باشید که یک دایره ی کامل یک زاویه ی ۳۶۰ درجه را نشان می دهد، از طرفی دایره ی بالا را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم کردیم. پس:

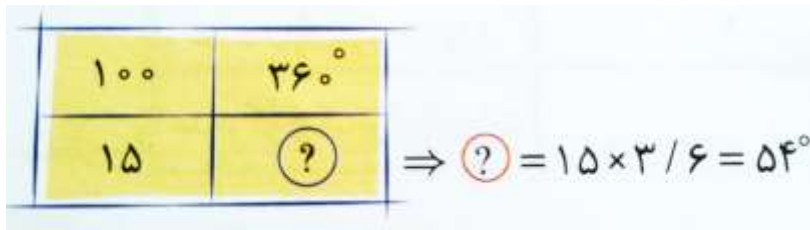
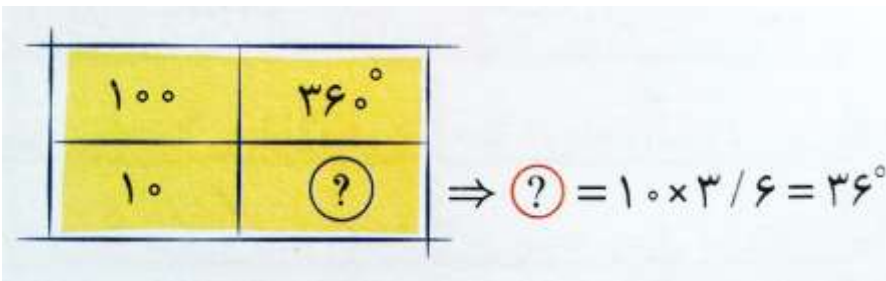
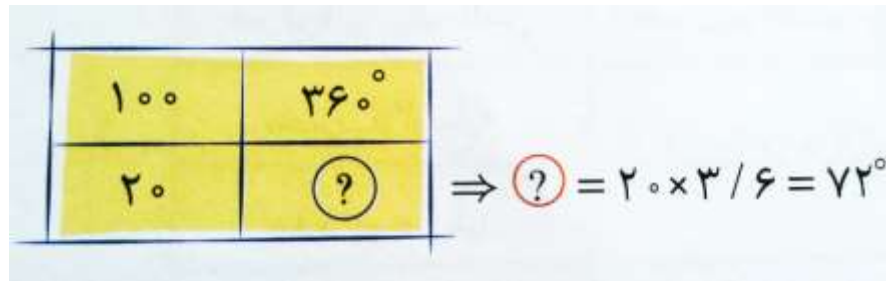
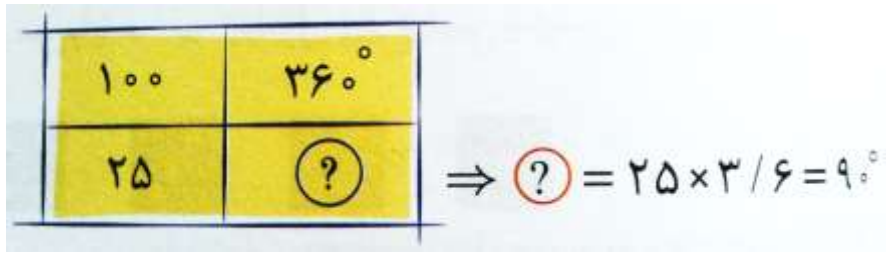
حالا با استفاده از این جدول تناسب، زاویه ها را مشخص می کنیم:

درصد	درجه
۱۰۰	۳۶۰°
درصد مورد نظر	درجه آن

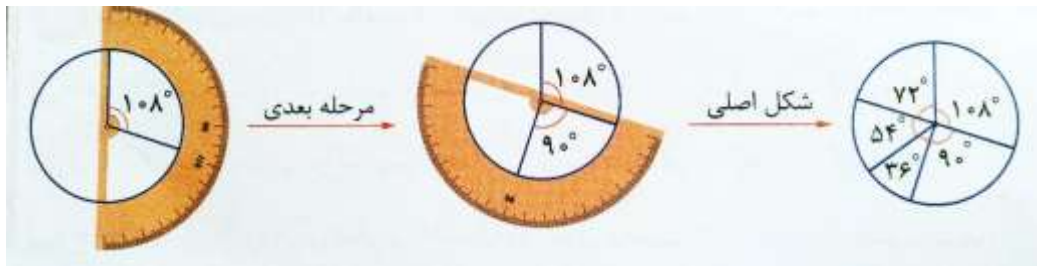
۱۰۰	۳۶۰°
۳۰	?

$$\Rightarrow ? = 30 \times 360 / 100 = 108^\circ$$

$\times 3/6$



اکنون یک دایره رسم کرده و مرکز آن را مشخص می کنیم، سپس با کمک یک نقاله و قرار دادن مرکز نقاله روی مرکز دایره، زاویه ی مربوط به هر قسمت را مشخص می کنیم تا شکل موردنظر به دست آید.



پرتاب سکه

وقتی یک سکه را می اندازیم یا روی سکه بالا قرار می گیرد و یا پشت آن. اما انتظار داریم تقریباً در نصف (یعنی ۵۰ درصد) پرتاب ها، رو و در نصف (۵۰ درصد) دیگر پرتاب ها هم پشت سکه بیاید که در اصطلاح می گوئیم احتمال رو آمدن و پشت آمدن سکه ۵۰ - ۵۰ است.



مثال ۱: یک سکه را ۵۰۰ مرتبه انداخته ایم. نتیجه این آزمایش در جدول زیر دیده می شود. در چند آزمایش سکه رو آمده است؟ برای پیدا کردن جواب کافی است که درصد رو آمدن (یعنی ۴۷/۴) را در عدد ۵۰۰ ضرب کنیم؛

رو	پشت
۴۷/۴	۵۲/۶

$$\text{تعداد رو آمدن سکه در } ۵۰۰ \text{ پرتاب} = ۵۰۰ \times \frac{۴۷/۴}{۱۰۰} = ۲۳۷$$

پرتاب تاس

وقتی که یک تاس را می اندازیم، حتماً یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ در روی تاس ظاهر می شوند. پس در پرتاب ۳۰ مرتبه یک تاس انتظار داریم هر کدام از وجه ها (عددهای ۱ تا ۶) را تقریباً ۵ مرتبه مشاهده کنیم. در این آزمایش احتمال وقوع و یا ظاهر شدن هر یک از عددها از نصف (یعنی ۵۰ درصد) کم تر است. به طور مثال احتمال ظاهر شدن عدد ۵، از نصف کم تر است. اما احتمال ظاهر شدن عدد فرد، ۵۰ - ۵۰ می باشد. به جدول زیر دقت کنید.



احتمال از نصف کم تر	۵۰-۵۰	احتمال از نصف بیش تر	در پرتاب یک تاس
✓			مضرب ۳ بیاید
	✓		عدد زوج بیاید
		✓	عدد بزرگ تر از ۲ بیاید
	✓		عدد کوچک تر از ۴ بیاید

مریم عزیز