آزمون‌های تشریحی خیلی‌سبز

۵ مرحله در طول سال

شبیه‌سازی کامل امتحان نهایی

- منطبق بر بارم‌بندی آموزش و پرورش
- تشابه کامل فرم برگه سوال، پاسخبرگ، کلید، پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها با امتحان نهایی
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- ارائه یک یا دو تست عینا مشابه امتحان نهایی
- هم‌سطح با دشواری سوالات امتحان نهایی



پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- ارائه پاسخ کامل و مرحله به مرحله
- محتوای یاددهنده شامل درسنامه
- ارائه نکات کلیدی هر سوال

تصحیح کاملا مکانیزه

- تصحیح کاملا حرفه‌ای توسط دو مصحّح
- تصحیح سوم در صورت اختلاف نظر دو مصحّح قبل
- تصحیح به صورت بررسی یک سوال برای گروهی از دانش‌آموزان
- امکان کامنت‌گذاری مصحّح در فرایند تصحیح
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پنل ثبت اعتراض

کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله ششم
۰۶ - ۱۴۰۵	۱۵/آبان/۱۴۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی مصطفی کرمی ـ محمد گودرزی ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ سید محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی کیوان صارمی ـ سعید قندچی ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	آرین تفضلی‌زاده ـ سعید قندچی ـ رسول محسنی‌منش ـ سروش موئینی
فیزیک	مهران اسماعیلی ـ هادی حمزه‌پور ـ علیرضا جباری ـ علیرضا جعفری‌آثار رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی ـ محمدرضا غضنفری ـ احسان محمدی
شیمی	روح‌الله حاجی‌سلیمانی ـ یلدا رزاق‌زاده ـ وحید فارسیان ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ علی فرزادتبار ـ هادی عبادی ـ یاسر عبداللهی ـ علیرضا عبداللهی ـ محمد عظیمیان زواره ـ محسن مجنونی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی مازیار احمدی‌ناو	منصور زرکش‌اصفهانی هلیا سیدی ابوالفضل ناصری
هندسه	سعید قندچی	سعید قندچی	سعید قندچی	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهک کناره ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	عباس حسینی	مریم نظری منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری ماهان فنی‌فر
فیزیک	رضا سبزمیدانی	هادی حمزه‌پور نوید شاهی	علیرضا جباری	علیرضا جباری هادی نجفی	امیر محمودی انزابی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	پارسا فراهانی مرتضی نصیرزاده محمدمهدی کریمیان	هادی عبادی علیرضا فرضعلی‌زاده مهدیس محبت‌پناه محمد نوروزی‌مال

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجان‌پور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۶

Azmoonkheilisabz.com

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد ساناز فلاحی ـ نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخائی ـ الهام سهرابی طاهره صادق‌نژاد ـ مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند ـ مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

ایران تستنه
توشه ای برای موفقیت

۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=2x^3-kx^2-1$ بر $x-2$ برابر k است. مقدار k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای $x-a$ برابر $p(a)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کافی است $x=2$ را در چندجمله‌ای $p(x)$ جای‌گذاری کنیم:

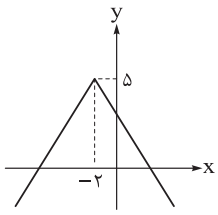
$$p(2)=2(2)^3-k(2)^2-1=15-4k$$

گام دوم: حاصل را برابر k قرار دهیم:

$$15-4k=k \Rightarrow k=3$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲ شکل زیر، نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = -|x-a| - b$ را نمایش می‌دهد. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) -۷

۲) ۷

۳) -۳

۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی رأس نمودار تابع، نقطهٔ $(a,-b)$ است که براساس شکل صورت سؤال، نقطهٔ $(-۲,۵)$ است:

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ -b=۵ \Rightarrow b=-۵ \end{cases} \Rightarrow a+b=-۷$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^2|x|$ روی بازهٔ $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. کم‌ترین مقدار a کدام است؟

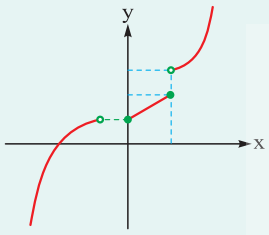
۱) صفر
۲) -1
۳) ۱
۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

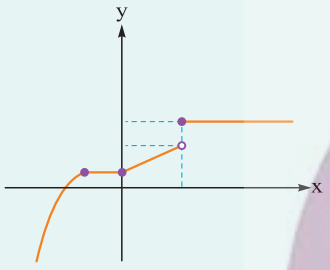
Hint نمودار تابع رو رسم کنین.

درس Box

تابع اکیداً صعودی: در نمودار تابع f، اگر با افزایش طول نقاط روی آن (حرکت از چپ به راست روی نمودار)، عرض نقاط همواره افزایش یابد، تابع f را یک تابع اکیداً صعودی می‌نامیم:



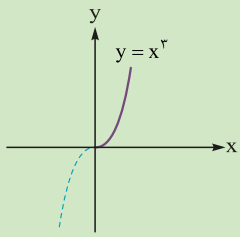
تابع صعودی: در نمودار تابع f، اگر با افزایش طول نقاط روی آن (حرکت از چپ به راست روی نمودار) عرض نقاط کاهش نیابد، تابع f را یک تابع صعودی می‌نامیم:

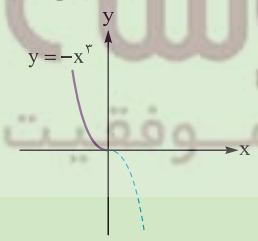


پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول**: ابتدا تابع f را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

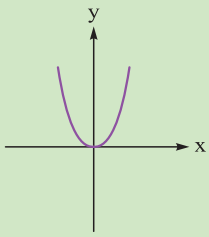
$$|x| = \begin{cases} -x & ; \quad x \le 0 \\ x & ; \quad x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^3 & ; \quad x \le 0 \\ x^3 & ; \quad x \ge 0 \end{cases}$$

گام دوم: حالا براساس نمودارهای دو تابع $y = x^3$ و $y = -x^3$، نمودار f را رسم می‌کنیم:





پس نمودار تابع f مطابق شکل زیر است.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام سوم: بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً صعودی است، بازهٔ $[0,+\infty)$ است؛ بنابراین کم‌ترین مقدار a برابر صفر است.

کتاب درسی

تابع $y = x^2 \mid x \mid$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چه‌قدر است؟

(ریاضی (۳) ـ تمرین ۵ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-a^{۲}x+۲ & ; \quad x<۱\\ (a+۱)x-۵ & ; \quad x\geq ۱\end{cases}$ نزولی است. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a، شامل چند عدد صحیح است؟

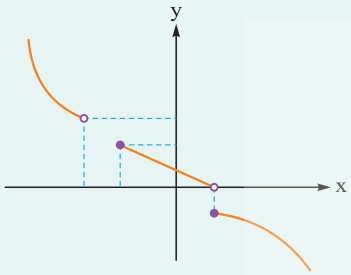
۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

مشاوره در مبحث یکنوایی تابع، اگر بر «اکیداً» صعودی یا نزولی بودن توابع تأکید نشود، حتماً شرط ثابت‌بودن توابع را بررسی کنید.

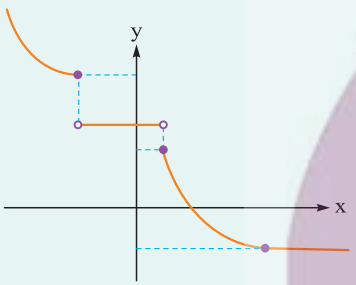
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تابع اکیداً نزولی: در نمودار تابع f، اگر با افزایش طول نقاط روی آن (حرکت از چپ به راست روی نمودار)، عرض نقاط همواره کاهش یابد، تابع f را یک تابع اکیداً نزولی می‌نامیم:



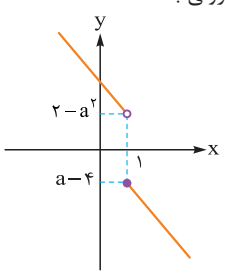
تابع نزولی: در نمودار تابع f، اگر با افزایش طول نقاط روی آن (حرکت از چپ به راست روی نمودار)، عرض نقاط افزایش نیابد، تابع f را یک تابع نزولی می‌نامیم.



تابعی را که اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشد، اکیداً یکنوا می‌نامند، اگر تابع صعودی (نزولی) باشد، یکنواست؛ در غیر این صورت غیریکنواست.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا یک نمودار تخمینی برای تابع f رسم می‌کنیم؛ توجه کنید که این تابع باید روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد:



گام دوم: با توجه به نمودار بالا، برای این‌که تابع نزولی باشد، لازم است که در ابتدا هر دو ضابطه، نزولی باشند:

$$\begin{cases}-a^{۲}\leq ۰ \Rightarrow a^{۲}\geq ۰ \Rightarrow a\in\mathbb{R}\\ a+۱\leq ۰ \Rightarrow a\leq -۱\end{cases}$$

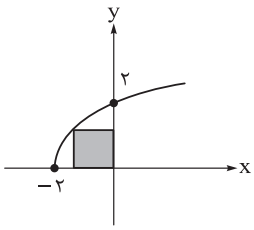
گام سوم: از طرفی $۲-a^{۲}$ از $a-۴$ نباید کم‌تر باشد:

$$۲-a^{۲}\geq a-۴ \Rightarrow a^{۲}+a-۶=(a+۳)(a-۲)\leq ۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -۳\leq a\leq ۲$$

گام چهارم: از اشتراک محدودهٔ بالا و محدودهٔ به‌دست‌آمده در گام دوم، مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a، بازهٔ $[-۳,-۱]$ به دست می‌آید که شامل ۳ عدد صحیح است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{ax+b}$ در شکل زیر رسم شده است. مساحت مربع مشخص‌شده در شکل کدام است؟



۱) ۲
۲) $\frac{۹}{۴}$
۳) $۶-۲\sqrt{۵}$
۴) $۷-۲\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

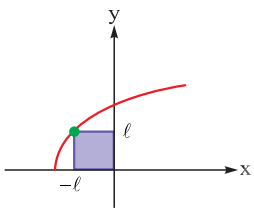
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا به کمک نقاط $(-۲,۰)$ و $(۰,۲)$ که نمودار تابع از آن‌ها می‌گذرد، ضابطهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(۰)=\sqrt{b}=۲ \Rightarrow b=۴ \\ f(-۲)=\sqrt{-۲a+b}=۰ \xrightarrow{b=۴} a=۲ \end{cases}$$

پس $f(x)=\sqrt{۲x+۴}$ است.

گام دوم: طول ضلع مربع داده‌شده را ℓ می‌گیریم، بنابراین مطابق شکل زیر، نمودار تابع f از نقطهٔ $(-\ell,\ell)$ می‌گذرد:



پس داریم:

$$f(-\ell)=\sqrt{-۲\ell+۴}=\ell \xrightarrow{\text{توان ۲}} -۲\ell+۴=\ell^۲$$

$$\Rightarrow \ell^۲+۲\ell-۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۴-۴(۱)(-۴)=۲۰} \ell=\frac{-۲\pm\sqrt{۲۰}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۵} \xrightarrow{\ell>۰} \ell=\sqrt{۵}-۱$$

گام سوم: مساحت مربع را حساب می‌کنیم:

$$S=\ell^۲=(\sqrt{۵}-۱)^۲=۶-۲\sqrt{۵}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲^x$ را یک واحد به راست می‌بریم، سپس طول نقاط روی نمودار حاصل را بر ۲ تقسیم و عرض آن‌ها را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. ضابطهٔ تابع g کدام است؟

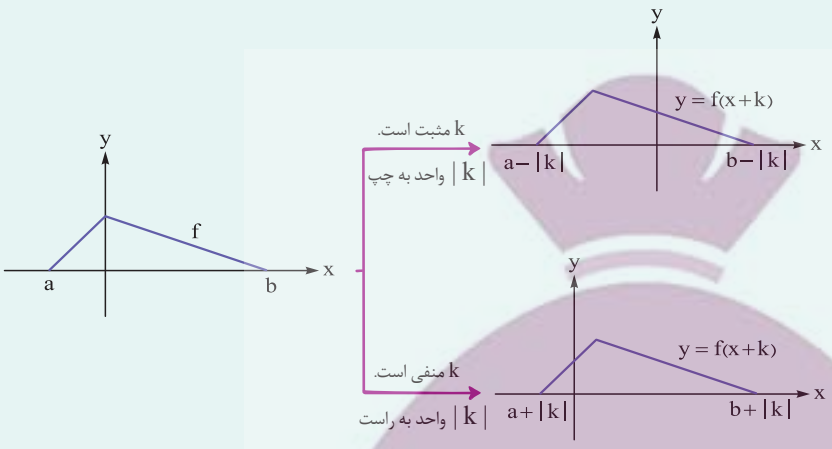
۱) $۴^{x-۱}$ ۲) $۴^{x+۱}$ ۳) ۴^x ۴) $۴^{x+۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

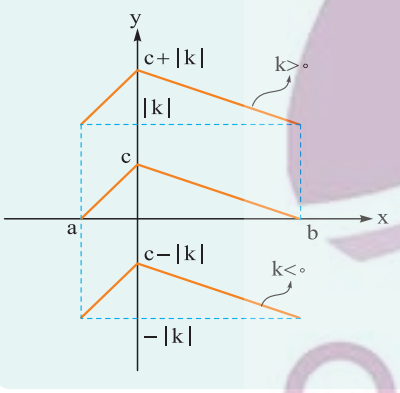
درس Box

انتقال نمودار:

انتقال افقی: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$، کافی است نمودار تابع f را a به اندازهٔ $|k|$ واحد در راستای افقی جابه‌جا کنیم:



انتقال عمودی: برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$، کافی است نمودار تابع f را به اندازهٔ $|k|$ واحد در راستای محور y جابه‌جا کنیم:



پاسخ خیلی تشریحی ✔ تبدیل‌های گفته‌شده را به ترتیب روی تابع f اعمال می‌کنیم:

$$y=f(x)=۲^x$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y=f(x-۱)=۲^{x-۱}$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب عرض نقاط در ۲}]{\text{طول نقاط تقسیم بر ۲ } (x \to ۲x)} g(x)=۲f(۲x-۱)=۲\times ۲^{۲x-۱}=۲^{۲x}=۴^x$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷ نمودار تابع f، محور طول را در نقاطی به طول ۱ و ۳ قطع می‌کند. اختلاف صفرهای تابع g با ضابطهٔ $g(x) = 2f(-1-3x)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

پیداکردن نقاط متناظر:

اگر نقطهٔ (x_0, y_0) روی نمودار تابع f باشد، نقطهٔ متناظر آن روی نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x) = af(bx+c)+d$ نقطهٔ $(\frac{x_0-c}{b}, ay_0+d)$ است؛ در واقع $bx+c$ را برابر x_0 و $f(bx+c)$ را برابر y_0 قرار داده‌ایم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نمودار تابع f از نقاط $(0,1)$ و $(0,3)$ می‌گذرد؛ طبق درس‌باکس داریم:

$$\begin{cases} -1-3x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \\ -1-3x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

گام دوم: بنابراین صفرهای تابع g، برابر $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}$ هستند که اختلاف آن‌ها $-\frac{2}{3} - (-\frac{4}{3}) = \frac{2}{3}$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(a+1)x^4+2ax^3+ax+b$ یک‌به‌یک است. اگر $f(-2)=0$ باشد، $f(0)$ کدام است؟

همان b است.

۱) -36
۲) -18
۳) 18
۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ضریب x^4 رو صفر کنین.

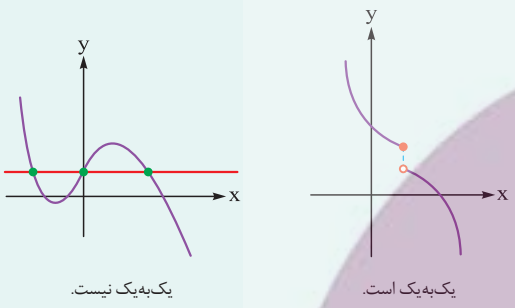
درس Box

تابع یک‌به‌یک: تابعی است که تعداد اعضای دامنه و تعداد اعضای برد آن برابرند؛ به بیان دیگر، بین هر ورودی (x) و هر خروجی (y) آن، تناظر یک‌به‌یک برقرار است؛ در واقع، در تابع یک‌به‌یک داریم:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f ; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

یعنی هیچ دو x متمایزی پیدا نمی‌شود که y یکسان داشته باشند.

نمودار تابع یک‌به‌یک، به گونه‌ای است که هر خط افقی دلخواه، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



وارون یک تابع یک‌به‌یک، خود تابع است.

نکته

توابع چندجمله‌ای از درجهٔ زوج، مثلاً $f(x)=2x^2+x-1$، $g(x)=x^4+x^3$ و ... روی $\mathbb{R}$ قطعاً غیریک‌به‌یک هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق نکتهٔ بالا، برای یک‌به‌یک‌بودن، تابع f نمی‌تواند از درجهٔ ۴ باشد:

$$\Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

پس $f(x)=-2x^3-x+b$ است.

گام دوم: حالا $f(-2)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f(-2)=-2(-2)^3-(-2)+b=18+b=0 \Rightarrow b=-18$$

خواسته سؤال $f(0)=b=-18$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹ نمودار تابع خطی f، محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ و نمودار وارون آن، این محور را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد نمودارهای دو تابع f و f^{-1} از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{15\sqrt{2}}{8}$ ۳) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box ضابطهٔ وارون تابع خطی f با ضابطهٔ $f(x)=mx+h$، به صورت $f^{-1}(x)=\frac{x-h}{m}$ است. یعنی طول از مبدأ و عرض از مبدأ نمودار تابع f به ترتیب به عرض از مبدأ و طول از مبدأ نمودار تابع f^{-1} تبدیل می‌شود.

نکته فاصلهٔ نقطهٔ (x_0,y_0) از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

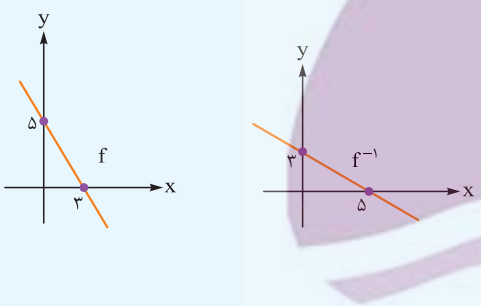
گام اول: نمودار تابع f، محور x را در نقطهٔ (۳،۰) قطع می‌کند، پس ضابطهٔ آن $f(x)=m(x-3)$ است. از آن‌جا که نمودار تابع f^{-1} محور x را در نقطهٔ (۵،۰) قطع می‌کند، ضابطهٔ آن $f^{-1}(x)=\frac{1}{m}(x-5)$ است.

گام دوم: حالا براساس روابط درس‌باکس، داریم:

$$f(x)=m(x-3) \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+3m}{m}$$

که در گام اول ضابطهٔ تابع f^{-1} را $f^{-1}(x)=\frac{x-5}{m}$ به دست آورده بودیم؛ یعنی $3m=-5$ و در نتیجه $m=-\frac{5}{3}$ است.

یه‌جور دیگه نمودارها را رسم می‌کنیم:



پس $f(x)=-\frac{5}{3}(x-3)$ و $f^{-1}(x)=-\frac{3}{5}(x-5)$ است.

گام سوم: حالا نقطهٔ تقاطع نمودارهای دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=-\frac{5}{3}x+5 \\ f^{-1}(x)=-\frac{3}{5}x+3 \end{cases} \xrightarrow{f(x)=f^{-1}(x)} -\frac{5}{3}x+5=-\frac{3}{5}x+3 \Rightarrow \frac{16}{15}x=2 \Rightarrow x=\frac{15}{8}$$

پس عرض نقطهٔ تقاطع نیز، $y=\frac{15}{8}$ است.

تیزبازی می‌توانستیم نمودار $y=f(x)$ را با خط $y=x$ قطع دهیم:

$$\xrightarrow{f(x)=x} -\frac{5}{3}x+5=x \Rightarrow \frac{8}{3}x=5 \Rightarrow x=\frac{15}{8}$$

گام چهارم: فاصلهٔ نقطهٔ $(\frac{15}{8},\frac{15}{8})$ از مبدأ مختصات، برابر $\frac{15}{8}\sqrt{2}$ است:

$$\sqrt{(\frac{15}{8})^2+(\frac{15}{8})^2}=\sqrt{2\times(\frac{15}{8})^2}=\frac{15}{8}\sqrt{2}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

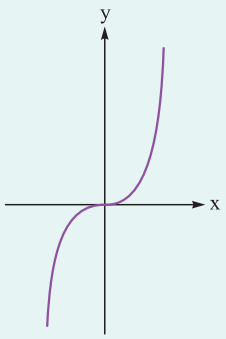
۱۰ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(۲-a)x^۳+(a+۲)x^۲+g(x)$ از انتقال افقی نمودار تابع $y=x^۳$ به دست می‌آید. عرض از مبدأ نمودار تابع خطی g کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) $-\frac{۱}{۳}$　　۴) ۳

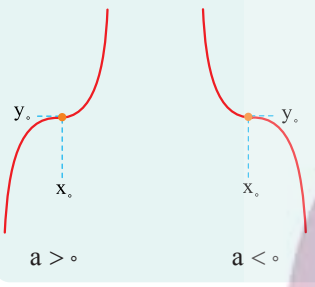
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

نمودار تابع $y=x^۳$ به صورت زیر است:



نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=a(x-x_۰)^۳+y_۰$ به یکی از صورت‌های زیر است:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نمودار تابع f صرفاً از انتقال نمودار تابع $y=x^۳$ به دست آمده است (یعنی انبساط یا انقباض عمودی نداریم)، بنابراین ضریب $x^۳$ در ضابطهٔ تابع f باید برابر ۱ باشد:

$$۲-a=۱ \Rightarrow a=۱$$

پس با فرض $g(x)=mx+h$ داریم:

$$f(x)=x^۳+۳x^۲+mx+h$$

گام دوم: چون طبق فرض، نمودار تابع f از انتقال نمودار تابع $y=x^۳$ به دست آمده است، ضابطهٔ آن باید به صورت $f(x)=(x-\alpha)^۳$ باشد:

$$x^۳+۳x^۲+mx+h=x^۳-۳\alpha x^۲+۳\alpha^۲x-\alpha^۳ \Rightarrow \begin{cases} -۳\alpha=۳ \Rightarrow \alpha=-۱ \\ m=۳\alpha^۲=۳ \\ h=-\alpha^۳=۱ \end{cases}$$

گام سوم: در نتیجه $g(x)=۳x+۱$ است. عرض از مبدأ نمودار این تابع، برابر $g(۰)=۱$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

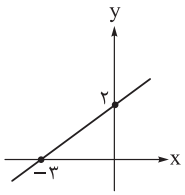
۱۱ نمودار تابع خطی f در شکل زیر رسم شده است. اگر $(f.g)(x) = -2x^2 + ax + 2$ باشد، مقدار $g(a)$ کدام است؟

۱) ۱۵

۲) −۱۵

۳) ۱۷

۴) −۱۷



پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$(-3,0),(0,2) \Rightarrow m = \frac{2}{3} \xrightarrow{y-y_0=m(x-x_0)} f(x) = \frac{2}{3}(x+3) = \frac{2}{3}x + 2$$

گام دوم: قطعاً تابع g نیز خطی است، پس ضابطهٔ آن را $g(x) = \alpha x + \beta$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (\frac{2}{3}x + 2)(\alpha x + \beta) = \frac{2\alpha}{3}x^2 + (2\alpha + \frac{2\beta}{3})x + 2\beta$$

گام سوم: ضابطهٔ بالا را با ضابطهٔ مفروض صورت سؤال متحد می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{2\alpha}{3} = -2 \Rightarrow \alpha = -3 \\ 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1 \\ a = 2\alpha + \frac{2\beta}{3} = -6 + \frac{2}{3} = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

گام چهارم: بنابراین $g(x) = -3x + 1$ است و داریم:

$$g(a) = g(-\frac{16}{3}) = 16 + 1 = 17$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\frac{bx+a}{x+b}$ و $g(x)=\sqrt{x+a}$ مفروض‌اند. اگر دامنهٔ تابع fog برابر $[1,+\infty)-\{5\}$ باشد، $(fog)(\frac{5}{4})$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

ترکیب دو تابع f و g را به صورت زیر، تابع fog می‌نامیم:

$$x \longrightarrow \boxed{g} \xrightarrow{g(x)} \boxed{f} \longrightarrow f(g(x))=(fog)(x)$$

دامنهٔ تابع fog به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دامنهٔ تابع f برابر $D_f=\mathbb{R}-\{-b\}$ و دامنهٔ تابع g نیز بازهٔ $D_g=[-a,+\infty)$ است.

گام دوم: حالا دامنهٔ تابع fog را حساب می‌کنیم:

$$D_{fog}=\{x\geq -a \mid \sqrt{x+a}\neq -b\}=\{x\geq -a \mid x\neq b^2-a\} \Rightarrow D_{fog}=[-a,+\infty)-\{b^2-a\}$$

گام سوم: با مقایسهٔ مجموعهٔ بالا و مجموعهٔ مفروض صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} -a=1 \Rightarrow a=-1 \\ b^2-a=5 \xrightarrow{a=-1} b^2+1=5 \Rightarrow b^2=4 \xrightarrow{b<0} b=-2 \end{cases}$$

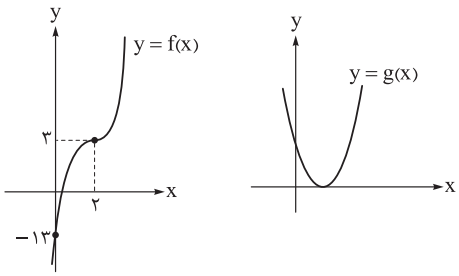
دقت کنید که اگر b مثبت باشد، آن‌گاه $-b$ منفی است و نامعادلهٔ $\sqrt{x+a}\neq -b$ همواره برقرار است، بنابراین عضوی پیدا نمی‌شود که آن را در بازهٔ $[-1,+\infty)$ حذف کنیم تا دامنهٔ تابع fog برابر $[1,+\infty)-\{5\}$ شود.

گام چهارم: بنابراین $f(x)=\frac{-2x-1}{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ است. خواستهٔ سؤال نیز برابر می‌شود با:

$$(fog)(\frac{5}{4})=f(g(\frac{5}{4}))=f(\frac{1}{2})=\frac{-2}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ نمودار تابع درجه‌سوم f و تابع درجه‌دوم g در شکل‌های زیر رسم شده‌اند. اگر $f(x)=x(g(x)+a)+b$ باشد، حاصل $g(a)$ کدام است؟



۱) ۳۶

۲) ۳۲

۳) ۱۶

۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را پیدا می‌کنیم. نقطهٔ $(۲,۳)$ مرکز تقارن نمودار این تابع است:

$$\Rightarrow f(x)=a(x-۲)^۳+۳$$

چون $f(۰)=-۱۳$ است، داریم:

$$f(۰)=-۸a+۳=-۱۳ \Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow f(x)=۲(x-۲)^۳+۳=۲x^۳-۱۲x^۲+۲۴x-۱۳$$

گام دوم: حالا باید ضابطهٔ تابع f را به فرم مفروض صورت سؤال بازنویسی کنیم تا ضابطهٔ تابع g و همچنین پارامترهای a و b به دست آید:

$$f(x)=x(۲x^۲-۱۲x+۲۴)-۱۳=x(۲(x-۳)^۲+۶)-۱۳$$

دقت کنید که نمودار تابع g بر محور x مماس است، پس ضابطهٔ آن $g(x)=\alpha(x-h)^۲$ است. با مقایسهٔ ضابطهٔ بالا و آن‌چه که در صورت سؤال آمده است، داریم:

$$\begin{cases} g(x)=۲(x-۳)^۲ \\ a=۶,\ b=-۱۳ \end{cases}$$

گام سوم: در نهایت، خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$g(a)=g(۶)=۱۸$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ چندجمله‌ای $x^{7n+1} - a^{10}$ بر چندجمله‌ای $x^3 - a^n$ بخش‌پذیر است. مقدار n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

تجزیهٔ چندجمله‌ای‌های $x^n + a^n$ و $x^n - a^n$:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1});\ n \in \mathbb{N}$$

اگر n زوج باشد، $x^n - a^n$ بر $x+a$ نیز بخش‌پذیر است:

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1});\ n \text{ فرد است}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای این‌که $x^{7n+1} - a^{10}$ بر چندجمله‌ای $x^3 - a^n$ بخش‌پذیر باشد، لازم است که تناسب $\frac{7n+1}{3} = \frac{10}{n}$ برقرار باشد:

$$7n^2 + n = 30 \Rightarrow 7n^2 + n - 30 = 0$$

گام دوم: معادلهٔ بالا را به کمک روش روسی حل می‌کنیم:

$$r^2 + r - 210 = 0 \Rightarrow (r+15)(r-14) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = -15,\ r_2 = 14 \xrightarrow{\div 7} n_1 = -\frac{15}{7},\ n_2 = 2$$

پس $n = 2$ است:

$$x^{15} - a^{10} = (x^3)^5 - (a^2)^5 = (x^3 - a^2)(x^{12} + a^2x^9 + a^4x^6 + a^6x^3 + a^8)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵ **تابع f روی بازهٔ $[2,5]$ اکیداً صعودی است. در این صورت کدام گزاره در مورد تابع g با ضابطهٔ $g(x)=1-2f(x+1)$ الزاماً درست است؟**

۱) روی بازهٔ $[1,4]$، اکیداً صعودی است.

۲) روی بازهٔ $[1,4]$، اکیداً نزولی است.

۳) روی بازهٔ $[3,6]$، اکیداً صعودی است.

۴) روی بازهٔ $[3,6]$، اکیداً نزولی است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته قرینه‌کردن نسبت به محور x یا نسبت به محور y، وضعیت یکنوایی تابع را تغییر می‌دهد؛ یعنی تابع صعودی را به نزولی تبدیل می‌کند و بالعکس.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ابتدا باید ببینیم بازهٔ $[2,5]$ در دامنهٔ تابع f به چه بازه‌ای در دامنهٔ تابع g تبدیل می‌شود:

$$2 \le x+1 \le 5 \Rightarrow 1 \le x \le 4$$

دقت کنید که تبدیلات روی محور عمودی، روی دامنهٔ تابع اثری ندارند، پس بازهٔ $[1,4]$ در دامنهٔ تابع g مورد بحث است (یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲)).

گام دوم: چون برای رسم نمودار تابع g، باید یک بار نمودار تابع f را نسبت به محور x قرینه کنیم (ضریب ۲−)، مطابق نکتهٔ بالا، وضعیت یکنوایی تابع g روی بازهٔ به‌دست‌آمده اکیداً نزولی خواهد بود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ کدام تابع اکیداً یکنواست؟

۱) $f(x)=(|x-۱|-|x+۱|)x^۲$

۲) $g(x)=(|x-۱|+|x+۱|)x^۲$

۳) $h(x)=(|x-۱|-|x+۱|)x$

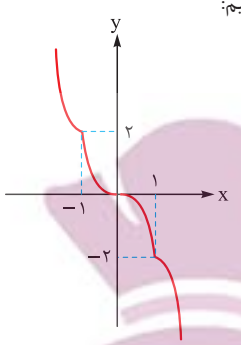
۴) $k(x)=(x+|x+۱|)x$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint نمودار رسم کنین.

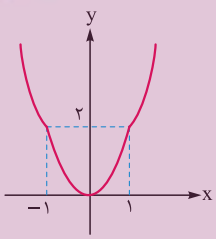
پاسخ خیلی تشریحی نمودارهای هر تابع را جداگانه رسم می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $f(x)=\begin{cases}۲x^۲ & ; \ x<-۱\\ -۲x^۳ & ; \ -۱\le x<۱\\ -۲x^۲ & ; \ x\ge ۱\end{cases}$

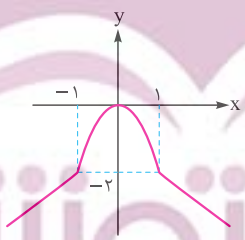


همان‌طور که پیداست، تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا (نزولی) است.

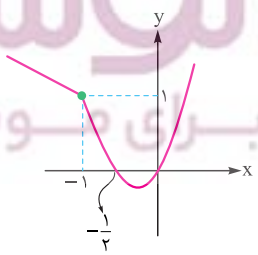
گزینهٔ (۲): $g(x)=\begin{cases}-۲x^۳ & ; \ x<-۱\\ ۲x^۲ & ; \ -۱\le x<۱\\ ۲x^۳ & ; \ x\ge ۱\end{cases}$



گزینهٔ (۳): $h(x)=\begin{cases}۲x & ; \ x<-۱\\ -۲x^۲ & ; \ -۱\le x<۱\\ -۲x & ; \ x\ge ۱\end{cases}$



گزینهٔ (۴): $k(x)=\begin{cases}-x & ; \ x<-۱\\ x(۲x+۱) & ; \ x\ge -۱\end{cases}$



مشخص است که توابع گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) غیریکنوا است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷ دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-\log_۲(x-a^۲)}}$، بازهٔ I است. اگر به‌ازای عدد طبیعی a، تابع g با ضابطهٔ $g(x)=x^۲-۴ax$ روی بازهٔ I غیریکنوا باشد، $(gof)(۲a)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

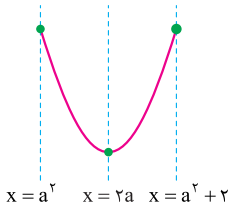
گام اول: ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\log_۲(x-a^۲): x-a^۲>۰ \Rightarrow x>a^۲\\ \sqrt{۱-\log_۲(x-a^۲)}: ۱-\log_۲(x-a^۲)>۰ \Rightarrow \log_۲(x-a^۲)<۱\end{cases} \Rightarrow x-a^۲<۲ \Rightarrow x<a^۲+۲$$

از اشتراک این دو داریم:

$$I=(a^۲, a^۲+۲)$$

گام دوم: برای این‌که تابع درجه‌دوم g روی بازهٔ I غیریکنوا باشد، مطابق شکل زیر، لازم است که این بازه شامل طول رأس باشد:



$$a<۲a<a^۲+۲ \Rightarrow \begin{cases}a^۲<۲a \Rightarrow a^۲-۲a=a(a-۲)<۰ \Rightarrow ۰<a<۲\\ ۲a<a^۲+۲ \Rightarrow a^۲-۲a+۲>۰ \Rightarrow a\in\mathbb{R}\end{cases}$$

پس مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a، بازهٔ $(۰,۲)$ است. تنها عدد طبیعی این بازه $a=۱$ است.

گام سوم:

پس:

$$g(x)=x^۲-۴x \quad , \quad f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-\log_۲(x-۱)}}$$

و داریم:

$$(gof)(۲a)=g(f(۲))=g(۱)=-۳$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ ضابطهٔ تابع وارون تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+x\sqrt{x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{\sqrt{x+۱}}$

۲) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{\sqrt{۲x+۱}}$

۳) $f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x+۱}}$

۴) $f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{۲x+۱}}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint از نقاط کمک بگیرین.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نمودار تابع f از نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرد؛ بنابراین نمودار تابع $f^{-۱}$ نیز باید از این نقطه عبور کند؛ در نتیجه یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) پاسخ درست سؤال است.

گام دوم: نقطهٔ دیگر را امتحان می‌کنیم:

$$f(-۱)=۱-\sqrt{۲} \Rightarrow f^{-۱}(۱-\sqrt{۲})=-۱$$

حالا در یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) امتحان می‌کنیم:

گزینهٔ (۲): $f^{-۱}(۱-\sqrt{۲})=\frac{۱-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}}=\frac{۱-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}-۱}=-۱$

یه‌جور دیگه به روش درس‌باکس پاسخ سؤال قبل، گزینهٔ درست را پیدا می‌کنیم:

$$y=x^۲+x\sqrt{x^۲+۱}=x(x+\sqrt{x^۲+۱})$$

اگر $x+\sqrt{x^۲+۱}$ را عبارت t بگیریم، از آن‌جا که $x-\sqrt{x^۲+۱}=-\frac{۱}{t}$ است، از دستگاه معادلات زیر، $x=\frac{t-\frac{۱}{t}}{۲}$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^۲+۱}=t \\ x-\sqrt{x^۲+۱}=-\frac{۱}{t} \end{cases}$$

پس داریم:

$$y=\frac{t-\frac{۱}{t}}{۲}\times t=\frac{t^۲-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow t^۲=۲y+۱ \xrightarrow{t>۰} t=\sqrt{۲y+۱} \;;\; y>-\frac{۱}{۲}$$

حالا در رابطهٔ بالا $x=\frac{t-\frac{۱}{t}}{۲}$ داریم:

$$x=\frac{\sqrt{۲y+۱}-\frac{۱}{\sqrt{۲y+۱}}}{۲}=\frac{۲y}{۲\sqrt{۲y+۱}}=\frac{y}{\sqrt{۲y+۱}}$$

در نتیجه $f^{-۱}(x)=\frac{x}{\sqrt{۲x+۱}} \;;\; x>-\frac{۱}{۲}$ است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۹ اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد، به طوری که $|A^{۳}|=\sqrt{۳}$، آن‌گاه حاصل $\frac{|\sqrt{۳}A^{-۱}|}{|A^{۵}|}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

مشاوره سؤال‌های نظیر این سؤال، از تیپ‌های پرتکرار در آزمون‌های تستی و تشریحی هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) اگر A ماتریسی $n\times n$ و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA|=k^{n}|A|$.

۲) اگر A یک ماتریس مربعی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $|A^{n}|=|A|^{n}$.

۳) اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از $|A^{۳}|=\sqrt{۳}$ نتیجه می‌گیریم $|A|^{۳}=\sqrt{۳}$.

گام دوم: بنا به ویژگی‌های دترمینان‌ها، از آن‌جا که A ماتریسی ۳×۳ است، داریم:

$$\frac{|\sqrt{۳}A^{-۱}|}{|A^{۵}|}=\frac{(\sqrt{۳})^{۳}|A^{-۱}|}{|A|^{۵}}=\frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{|A|}}{|A|^{۵}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{|A|^{۶}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{(|A|^{۳})^{۲}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۳}=\sqrt{۳}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰ اگر A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ و I ماتریس همانی باشد، به طوری که $I + A^۳ = ۲A$، آن‌گاه ماتریس $(A^۲ - I)^۲$ با کدام ماتریس برابر است؟

۱) $I + A$ ۲) $۲I + A$

۳) $۲I - A$ ۴) $I - A$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) ماتریس همانی (I)، عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها است؛ یعنی اگر ماتریسی در I قابل ضرب باشد، حاصل‌ضرب آن در I، با خودِ آن ماتریس برابر است.

۲) اگر n عددی طبیعی و I ماتریسی همانی باشد، آن‌گاه $I^n = I$.

۳) اگر A یک ماتریس مربعی و I ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن باشد، آن‌گاه $IA = AI = A$.

یعنی I با تمام ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه‌اش، تعویض‌پذیر است.

۴) از ویژگی قبلی نتیجه می‌شود که اتحادهای جبری برای ماتریس همانی و ماتریس‌های هم‌مرتبه با آن برقرار است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: چون A و I تعویض‌پذیرند، پس اتحادهای جبری در این دو ماتریس برقرار هستند و داریم:

$$(A^۲ - I)^۲ = A^۴ - ۲A^۲ + I^۲ \quad (*)$$

گام دوم: از فرض سؤال، یعنی $I + A^۳ = ۲A$ نتیجه می‌شود $\underbrace{A^۳ = ۲A - I}_{(**)}$، ضمن آن‌که از تساوی (*) نتیجه می‌شود:

$$(A^۲ - I)^۲ = A.A^۳ - ۲A^۲ + I \overset{(**)}{=\!=} A(۲A - I) - ۲A^۲ + I = ۲A^۲ - AI - ۲A^۲ + I = I - A$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -\sqrt{۲}\\ ۲\sqrt{۲} & -۴\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{۲}-A^{-۱}=\alpha A+\beta I$. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۵
۴) ۱/۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

رابطهٔ کیلی ـ همیلتون: اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه همواره:

$$A^{۲}=(a+d)A-|A|I$$

که در آن $|A|=ad-bc$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به درس‌باکس، برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & -\sqrt{۲}\\ ۲\sqrt{۲} & -۴\end{bmatrix}$، داریم:

$$A^{۲}=(۲-۴)A-(-۸+۴)I \Rightarrow A^{۲}=-۲A+۴I$$

گام دوم: طرفین تساوی اخیر را در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A^{۲}.A^{-۱}=-۲A.A^{-۱}+۴I.A^{-۱} \Rightarrow A=-۲I+۴A^{-۱} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۴}A+\frac{۲}{۴}I$$

گام سوم: بنا به آن‌چه به دست آوردیم، داریم:

$$A^{۲}-A^{-۱}=(-۲A+۴I)-(\frac{۱}{۴}A+\frac{۲}{۴}I)=\underbrace{-\frac{۹}{۴}A+\frac{۱۴}{۴}I}_{\alpha A+\beta I} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-\frac{۹}{۴}\\ \beta=\frac{۱۴}{۴}\end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

کنکور ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۴ & -۳\end{bmatrix}$، I ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی هستند که $\alpha A+\beta I=A^{-۱}$، مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟ (سؤال ۱۳۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۱ (خارج از کشور))

۱) ۴-
۲) ۴
۳) ۲-
۴) ۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، دستگاه $\begin{cases}(m-1)x+2y=m+1\\ 3x-y=\frac{1-m}{3}\end{cases}$ فاقد جواب است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{-5\}$ ۳) $\{5\}$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

در دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$، ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب نامیده می‌شود:

اگر $|A|\neq 0$، آن‌گاه دستگاه، جواب منحصربه‌فرد دارد.

اگر $|A|=0$، آن‌گاه
- با شرط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.
- با شرط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ دستگاه فاقد جواب است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ماتریس ضرایب دستگاه مورد نظر سؤال، به صورت $A=\begin{bmatrix}m-1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ است.

گام دوم: از این‌که دستگاه فاقد جواب است، نتیجه می‌گیریم $|A|=0$، پس داریم:

$$-(m-1)-6=0 \Rightarrow -m-5=0 \Rightarrow m=-5$$

گام سوم: به ازای $m=-5$، دستگاه به صورت $\begin{cases}-6x+2y=-4\\ 3x-y=2\end{cases}$ خواهد بود، از آن‌جا که $\frac{-6}{3}=\frac{2}{-1}=\frac{-4}{2}$، دستگاه در این حالت بی‌شمار جواب دارد و در نتیجه مجموعهٔ مقادیر m، برای آن‌که دستگاه فاقد جواب باشد، تهی است.

کتاب درسی

مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases}mx+9y=m+1\\ 4x+my=-4\end{cases}$ جواب نداشته باشد.

(سؤال ۵ ـ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۲)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & x\\ ۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\\ x & -۲\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر C ماتریسی با دترمینان برابر با ۲ باشد، به طوری که $ABC=۶I$، آن‌گاه مجموع مقادیر قابل قبول برای x کدام است؟

۱) $-۳/۲$
۲) $۳/۲$
۳) $۲/۲$
۴) $-۲/۲$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) برای محاسبهٔ درایهٔ سطر iأم و ستون jأم، ماتریس AB، سطر iأم ماتریس A را در ستون jأم ماتریس B ضرب می‌کنیم.

۲) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|A.B|=|A|.|B|$.

۳) دترمینان هر ماتریس قطری، برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، پس $|I|=۱$.

۴) اگر معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد، مجموع این دو ریشه برابر است با $\frac{-b}{a}$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ماتریس $D=AB$ را به دست می‌آوریم:

$$D=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & x\\ ۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\\ x & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵+x^۲ & ۴-۲x\\ ۴-۲x & ۹\end{bmatrix}$$

گام دوم: با توجه به این‌که D یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ است، پس ماتریس C و در نتیجه ماتریس I نیز ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ ۲ هستند، حال از طرفین تساوی $DC=۶I$ دترمینان می‌گیریم:

$$|DC|=|۶I| \Rightarrow |D||C|=۶^۲|I| \Rightarrow (۹(۵+x^۲)-(۴-۲x)^۲)\times ۲=۳۶\times ۱ \Rightarrow ۹(۵+x^۲)-(۴-۲x)^۲=۱۸ \quad (*)$$

گام سوم: از تساوی (*)، داریم:

$$(۴۵+۹x^۲)-(۱۶-۱۶x+۴x^۲)=۱۸ \Rightarrow ۵x^۲+۱۶x+۱۱=۰$$

که مجموع مقادیر قابل قبول x، از این معادلهٔ درجه‌دوم، برابر است با $\frac{-۱۶}{۵}=-۳/۲$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$، به طوری که $a_{ij}=\begin{cases} i+j & ; i+j\neq ۴ \\ \frac{ij}{j-۲i} & ; i+j=۴ \end{cases}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A-۳I$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

مشاوره نحوهٔ محاسبهٔ دترمینان ۳×۳، یکی از مهم‌ترین مباحث فصل اول کتاب درسی هندسهٔ (۳) است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

برای محاسبهٔ دترمینان هر ماتریس ۳×۳، می‌توان آن را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که حاصل، در همهٔ حالت‌ها یکسان خواهد بود. مثلاً اگر بخواهیم دترمینان را برحسب سطر اول محاسبه کنیم، داریم:

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix} = (-۱)^{\overbrace{۱+۱}^{\text{مجموع شمارهٔ سطر و ستون } a_{۱۱}}} a_{۱۱} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}}_{\text{دترمینان حاصل از حذف سطر و ستونی که } a_{۱۱} \text{ در آن قرار دارد.}} + (-۱)^{۱+۲} a_{۱۲} \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} + (-۱)^{۱+۳} a_{۱۳} \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}$$

نکته اگر در بین درایه‌های یک ماتریس ۳×۳ عدد صفر وجود داشته باشد، بهتر است برای ساده‌شدن محاسبات، دترمینان را برحسب سطر یا ستونی که بیشترین صفر در آن وجود دارد، محاسبه کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: درایه‌های ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{۱۱}=۱+۱=۲, a_{۱۲}=۱+۲=۳, a_{۱۳}=\frac{۱\times ۳}{۳-۲\times ۱}=۳$$

$$a_{۲۱}=۲+۱=۳, a_{۲۲}=\frac{۲\times ۲}{۲-۲\times ۲}=-۲, a_{۲۳}=۳+۲=۵$$

$$a_{۳۱}=\frac{۳\times ۱}{۱-۲\times ۳}=\frac{-۳}{۵}=-۰/۶, a_{۳۲}=۳+۲=۵, a_{۳۳}=۳+۳=۶$$

گام دوم: ماتریس $A-۳I$ را به دست می‌آوریم:

$$A-۳I=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۳ \\ ۳ & -۲ & ۵ \\ -۰/۶ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۳ \\ ۳ & -۵ & ۵ \\ -۰/۶ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

گام سوم: با بسط دترمینان نسبت به سطر سوم، داریم:

$$|A-۳I|=-۰/۶\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ -۵ & ۵ \end{vmatrix}-۵\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix}+۳\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۳ & -۵ \end{vmatrix}=-۰/۶\times ۳۰+۵\times ۱۴-۳\times ۴=-۱۸+۷۰-۱۲=۴۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵ نقاط M و N روی پاره‌خط AB چنان قرار دارند که $\frac{AM}{MB}=۵$ و $\frac{BN}{AN}=۳$ است. اندازهٔ پاره‌خط MN چه کسری از اندازهٔ پاره‌خط AB است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

مشاوره این سؤال از مبحث «نسبت و تناسب» در هندسه و مشابه سؤال ۱۳۷ کنکور تجربی داخل نوبت اول ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint نسبت اندازهٔ هر یک از دو پاره‌خط AM و AN به اندازهٔ پاره‌خط AB را به دست آورید.

درس Box

دو ویژگی کاربردی از ویژگی‌های تناسب عبارت‌اند از:

۱) ترکیب نسبت در صورت یا مخرج:

اگر a، b، c و d، چهار عدد حقیقی و $b\,,\,d\neq ۰$ باشند، آن‌گاه:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ \text{یا}\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

۲) تفضیل نسبت در صورت یا مخرج:

اگر a، b، c و d، چهار عدد حقیقی و $b\neq ۰$، $d\neq ۰$، $a\neq b$ و $c\neq d$ باشند، آن‌گاه:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\ \text{یا}\ \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$$

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: مطابق فرض $\frac{AM}{MB}=۵$ است، پس داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۵}{۱}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{AM}{AM+MB}=\frac{۵}{۵+۱}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{۵}{۶}$$

گام دوم: مشابه گام اول از رابطهٔ $\frac{BN}{AN}=۳$ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{BN}{AN}=\frac{۳}{۱}\Rightarrow\frac{AN}{BN}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{AN}{AN+BN}=\frac{۱}{۱+۳}\Rightarrow\frac{AN}{AB}=\frac{۱}{۴}$$

گام سوم: با توجه به نتایج گام‌های اول و دوم می‌توان نوشت:

$$\frac{AM}{AB}-\frac{AN}{AB}=\frac{۵}{۶}-\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{AM-AN}{AB}=\frac{۱۰-۳}{۱۲}\Rightarrow\frac{MN}{AB}=\frac{۷}{۱۲}$$

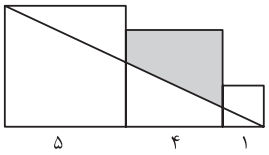
کنکور

نقاط M و N روی پاره‌خط AB قرار دارند. نقطهٔ M پاره‌خط AB را به نسبت ۱ به ۵ و نقطهٔ N این پاره‌خط را به نسبت ۳ به ۴ تقسیم می‌کند. اگر $MN=۲۲$ و هر دو نقطه به یک سر پاره‌خط نزدیک‌تر باشند، مجموع ارقام طول پاره‌خط AB چه‌قدر است؟ (سؤال ۱۳۷ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶ در شکل زیر سه مربع به اضلاع ۱، ۴ و ۵ در کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیهٔ رنگ‌شده کدام است؟

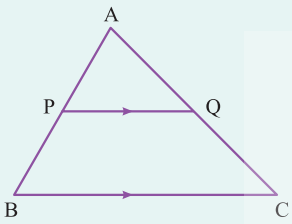


۱) ۸/۵
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

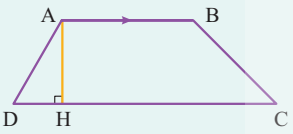
۱) در شکل زیر، PQ با BC موازی است، داریم:



الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$ (قضیهٔ تالس در مثلث ABC)

ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ (تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC)

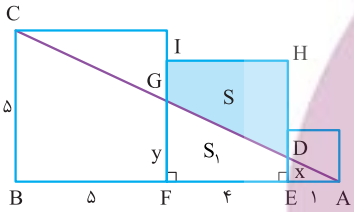
۲) در شکل زیر ABCD یک ذوزنقه است، داریم:



$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD).AH$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک تعمیم قضیهٔ تالس، اندازه‌های x و y را به دست می‌آوریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}\xrightarrow{DE\parallel BC}\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}\Rightarrow\frac{x}{۵}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}\xrightarrow{FG\parallel BC}\frac{FG}{BC}=\frac{AF}{AB}\Rightarrow\frac{y}{۵}=\frac{۵}{۱۰}\Rightarrow y=\frac{۵}{۲}$$

با معلوم‌بودن مقادیر x و y می‌توانیم مساحت ذوزنقهٔ EFGD را به دست آوریم:

$$\Rightarrow S_1=\frac{(\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۲})\times ۴}{۲}=۶$$

گام دوم: اگر مساحت ذوزنقهٔ EFGD را از مساحت مربع EFIH کم کنیم، مساحت ناحیهٔ مورد نظر، به دست می‌آید:

$$S=S_{EFIH}-S_{EFGD}=۴^۲-۶=۱۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۷ به ازای چند مقدار y، مثلث با اضلاع ۲، ۷ و x با مثلثی با اضلاع ۳، ۵ و y متشابه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

گام اول: برای نوشتن تشابه باید اضلاع یکی از مثلث‌ها را در صورتِ نسبت‌ها بنویسیم؛ ما این‌جا اضلاع ۲، ۷ و x را در صورت‌ها می‌نویسیم:

$$\frac{x}{\square}=\frac{7}{\square}=\frac{2}{\square}$$

گام دوم: با توجه به این‌که $\frac{2}{3}\neq\frac{7}{5}$ و $\frac{7}{3}\neq\frac{2}{5}$ است، نمی‌توانیم y را زیر x بنویسیم، پس کلاً ۴ حالت زیر را داریم:

$$\frac{x}{5}=\frac{7}{y}=\frac{2}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{10}{3}=3/\ldots\\ y=\frac{21}{2}=10/5\end{cases}$$

$$\frac{x}{3}=\frac{7}{y}=\frac{2}{5}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{6}{5}\\ y=\frac{35}{2}=17/5\end{cases}$$

$$\frac{x}{5}=\frac{7}{3}=\frac{2}{y}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{35}{3}=11/\ldots\\ y=\frac{6}{7}<1\end{cases}$$

$$\frac{x}{3}=\frac{7}{5}=\frac{2}{y}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{21}{5}=4/2\\ y=\frac{10}{7}=1/\ldots\end{cases}$$

گام سوم: به نظر می‌رسد که ۴ مقدار برای y داریم، ولی باید حواسمان باشد که در هر مثلث، طول هر ضلع بین جمع و قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر است؛ پس برای x و y شرط‌های زیر را داریم:

$$x,2,7\Rightarrow|7-2|<x<7+2\Rightarrow 5<x<9\quad(*)$$

$$y,5,3\Rightarrow|5-3|<y<5+3\Rightarrow 2<y<8\quad(**)$$

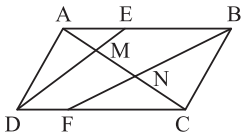
در هیچ‌کدام از حالت‌های گام دوم، شرط‌های (*) و (**) هم‌زمان برقرار نیستند، پس هیچ مقداری برای y نداریم.

کنکور

مثلثی با اضلاع ۴، ۵ و x با مثلثی با اضلاع ۳، ۷ و y متشابه است. **اختلاف کم‌ترین و بیشترین مقادیر ممکن برای y کدام است؟** *(سؤال ۱۳۷ کنکور تجربی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)*

۱) ۷/۲ ۲) ۶/۳۵ ۳) ۳/۱۵ ۴) ۲/۸

۲۸ در متوازی‌الاضلاع $2AE = EB$ و $3DF = FC$. نسبت $\frac{MN}{AC}$ برابر با کدام است؟



۱) $\frac{۱۲}{۳۵}$

۲) $\frac{۵}{۱۴}$

۳) $\frac{۸}{۲۱}$

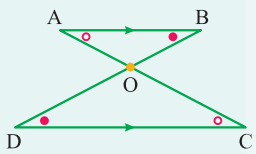
۴) $\frac{۹}{۲۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، آن دو مثلث با هم متشابه‌اند.

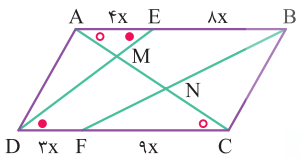
مثلاً در شکل مقابل که AB با CD موازی است، دو مثلث OAB و OCD با هم متشابه‌اند.



پاسخ خیلی تشریحی

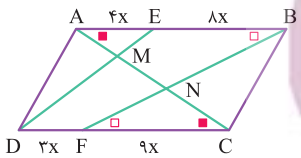
گام اول: از متوازی‌الاضلاع‌بودن ABCD نتیجه می‌گیریم $AB = CD$ و در نظر می‌گیریم $AB = CD = ۱۲x$.

گام دوم: دو مثلث AME و CDM، بنا به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند، پس:



$$\frac{AM}{MC} = \frac{AE}{CD} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{۱}{۴}$$

گام سوم: دو مثلث ABN و CNF نیز بنا به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و داریم:



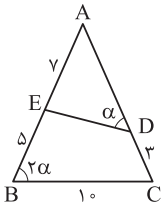
$$\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{CF} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{۴}{۷}$$

در نهایت داریم:

$$\frac{MN}{AC} = \frac{AN}{AC} - \frac{AM}{AC} = \frac{۴}{۷} - \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۲۸}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۹ در شکل مقابل طول پاره‌خط **AD** کدام است؟



۱) ۱۰

۲) ۱۱

۳) ۱۲

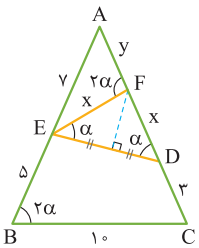
۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دو مثلث ADE و ABC متشابه نیستند. اما با یک تغییر کوچک می‌توان مثلثی ایجاد کرد که با مثلث ABC متشابه باشد، برای این کار، عمودمنصف DE را رسم می‌کنیم تا AD را در F قطع کند، در این صورت مثلث DEF متساوی‌الساقین خواهد بود.

گام دوم: در شکل مقابل، داریم:



$$\overset{\Delta}{DEF}\text{ زاویهٔ خارجی } A\hat{F}E \Rightarrow A\hat{F}E = F\hat{E}D + E\hat{D}F = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

$$(A\hat{F}E = \hat{B} = 2\alpha\ ,\ E\hat{A}F = \hat{A}) \xrightarrow{(zz)} \overset{\Delta}{AFE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

گام سوم: نسبت اضلاع متناظر دو مثلث را می‌نویسیم:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{y}{5+7} = \frac{7}{x+y+3} = \frac{x}{10} \Rightarrow y = \frac{6}{5}x\ ,\ \frac{7}{x+y+3} = \frac{x}{10}$$

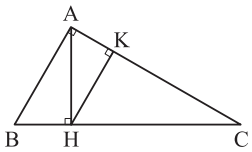
$$\Rightarrow x^2 + x(\frac{6}{5}x) + 3x = 70 \Rightarrow 11x^2 + 15x - 350 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 + 44 \times 350}}{22} \xrightarrow{x>0} x = \frac{-15 + 5\sqrt{625}}{22} = \frac{-15 + 5 \times 25}{22} = \frac{5 \times 22}{22} = 5$$

$$y = \frac{6}{5}x = \frac{6}{5} \times 5 = 6, AD = x + y = 5 + 6 = 11$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۰ در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه و AH، ارتفاع وارد بر وتر آن است. اگر $BC = ۳AB$، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث AHK کدام است؟



۱) ۹

۲) $۹\frac{۱}{۸}$

۳) ۱۰

۴) $۱۰\frac{۱}{۸}$

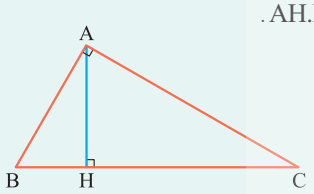
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHK}$

درس Box

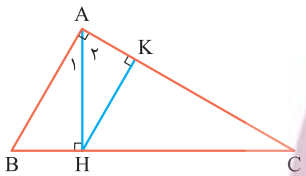
۱) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، آن‌گاه $AH.BC = AB.AC$.



۲) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر است با مجذور نسبت تشابه (نسبت اضلاع متناظر) آن‌ها.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر فرض کنیم $AB = x$، آن‌گاه، بنا به فرض $BC = ۳x$ و طبق قضیهٔ فیثاغورس، $AC = \sqrt{BC^۲ - AB^۲} = ۲\sqrt{۲}x$.



گام دوم: دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHK و ABC، دارای یک زاویهٔ حادهٔ برابر هستند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AHB}: \hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{B} = ۹۰^\circ \\ \overset{\Delta}{ABC}: \hat{A} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B}$$

پس با هم متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AHK}} = \left(\frac{BC}{AH}\right)^۲ \quad (*)$$

گام سوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، AH ارتفاع وارد بر وتر است، پس داریم:

$$AB.AC = AH.BC \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} \Rightarrow AH = \frac{(x)(۲\sqrt{۲}x)}{۳x} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}x$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{S_{ABC}}{S_{AHK}} = \left(\frac{۳x}{\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}x}\right)^۲ = \left(\frac{۹}{۲\sqrt{۲}}\right)^۲ = \frac{۸۱}{۸} = ۱۰\frac{۱}{۸}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

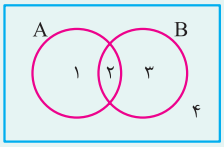
۳۱ برای سه مجموعهٔ ناتهی A، B و C از مجموعهٔ مرجع U، حاصل $(A\cup(B'-C'))\cap B$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $A-B$ ۳) $B\cap C$ ۴) $A\cap C$

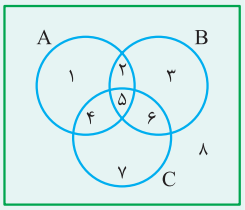
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

برای دو مجموعه، نمودار به شکل روبه‌رو بکشید:



و برای سه مجموعه شکل روبه‌رو را رسم کنید:



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به نمودار ون، برای سه مجموعه داریم:

$$(A\cup(B'-C'))\cap B = ۲,۵$$

۱ ۱ ۱ ۲
۲ ۴ ۲ ۳
۴ ۷ ۳ ۵
۵ ۸ ۸ ۶
۴,۷

گام دوم: ۵ و ۲ همان $A\cap B$ است.

کنکور

اگر A، B و C، سه مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرجع U باشند، مجموعهٔ $((A-B)'-(B-C))-C$ با کدام مجموعه برابر است؟ (سؤال ۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ ـ نوبت اول)

۱) $A'-(B\cup C)$ ۲) $B-(A\cup C)$
۳) $C-(A\cup B)$ ۴) $(A'\cup B')-C$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

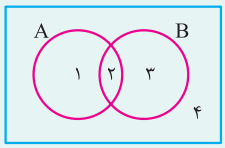
۳۲ اگر $A=\{1,2,3\}$ و $(A-B)\cup(B-A)=\{1,2,6\}$ باشد، آن‌گاه با مجموعهٔ $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ چند جواب برای B وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

- $(A-B)\cup(B-A)$ مجموعهٔ عضوهایی است که فقط در A یا فقط در B هستند (به بیان دیگر فقط در یکی از آن‌ها).
- این اعضا را در قالب $(A\cup B)-(A\cap B)$ هم می‌توان بیان کرد.
- در نمودار ون نواحی شمارهٔ ۱ و ۳ را نشان می‌دهد:

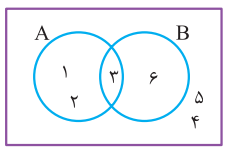


تعداد اعضای $(A-B)\cup(B-A)$ برابر است با:

$$n(A-B)+n(B-A)=n(A)+n(B)-2n(A\cap B)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار روبه‌رو، فقط یک جواب $B=\{3,6\}$ داریم:



گام دوم (بررسی سایر اعضا): ۲ و ۱ در $A-B$ هستند، پس در $B-A$ نمی‌آیند. ۳ در A هست اما در $(A-B)$ نیست، پس در ناحیهٔ مشترک است. ۶ در حاصل $(A-B)\cup(B-A)$ آمده اما در A نیست، پس عضو B است. ۵ و ۴ در A و در $B-A$ نیستند پس در بیرون دو مجموعهٔ A و B قرار دارند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۳ چندتا از تساوی‌های زیر درست است؟

الف) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$

ب) $A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$

پ) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

توزیع‌پذیری تفاضل نسبت به $\cap$ و $\cup$:

با استفاده از جبر مجموعه‌ها یا نمودار ون می‌توان نشان داد که:

۱) تفاضل از چپ نسبت به اجتماع توزیع نمی‌شود:

$$A-(B\cup C)\neq(A-B)\cup(A-C)$$

۲) تفاضل از راست نسبت به اجتماع توزیع می‌شود:

$$(B\cup C)-A=(B-A)\cup(C-A)$$

۳) اجتماع از دو طرف نسبت به تفاضل توزیع نمی‌شود:

$$A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)\ ,\ (B-C)\cup A\neq(B\cup A)-(C\cup A)$$

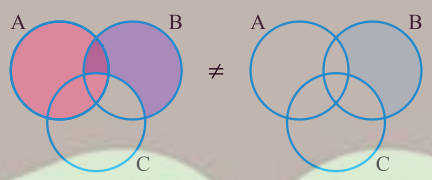
۴) اشتراک، از چپ نسبت به تفاضل پخش می‌شود:

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

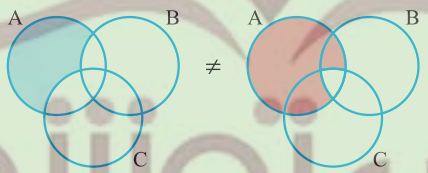
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به توضیحات درس‌باکس، فقط «پ» درست است، نمودار ون را هم ببینید:

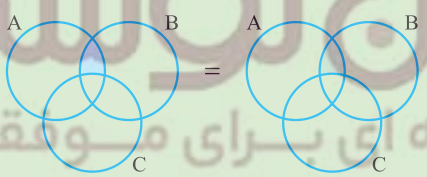
الف) $A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)$



ب) $A-(B\cup C)\neq(A-B)\cup(A-C)$



پ) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

کتاب درسی

با استفاده از جبر مجموعه‌ها، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

(آمار و احتمال ـ مثال صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

الف) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

۳۴ اگر یک عضو از A برداریم و به B اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های A، ۸تا کم می‌شود و به تعداد زیرمجموعه‌های B، ۱۶تا اضافه می‌شود. با مجموعه‌های جدید، $A \times B$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

شمارش تعداد زیرمجموعه‌ها:

- هر مجموعهٔ nعضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد.
- با آمدن یک عضو جدید، ۲^n به $۲^{n+۱}$ تبدیل می‌شود، یعنی تعداد زیرمجموعه‌ها دو برابر می‌شود.
- با حذف یک عضو، از ۲^n به $۲^{n-۱}$ می‌رسد، یعنی تعداد زیرمجموعه‌ها نصف می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای مجموعهٔ A داریم:

$$۲^{n-۱} = ۲^n - ۸ = \frac{۲^n}{۲}$$

پس:

$$n_A = ۴$$

گام دوم: برای مجموعهٔ B داریم:

$$۲^{n+۱} = ۲^n + ۱۶ = ۲ \times ۲^n$$

پس:

$$n_B = ۴$$

گام سوم: حالا A جدید دارای ۳ عضو و B جدید دارای ۵ عضو است و $A \times B$ دارای $۳ \times ۵ = ۱۵$ عضو خواهد بود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۵ با در نظر گرفتن تمام حالت‌ها، می‌توان نشان داد $n^۲ + an + b$ همواره فرد است. a و b به ترتیب کدام می‌توانند باشند؟

۱) ۴ و ۵ ۲) ۴ و ۶ ۳) ۷ و ۵ ۴) ۷ و ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اثبات با بررسی تمام حالت‌ها:

برای زوج یا فرد بودن باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۳ و مواردی که تعداد حالت‌های محدود و مشخصی دارند، از اثبات با بررسی تمام حالت‌ها می‌رویم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: بررسی همهٔ گزینه‌ها:

(۱) گزینهٔ: $n^۲ + ۴n + ۵$

(۲) گزینهٔ: $n^۲ + ۴n + ۶$

(۳) گزینهٔ: $n^۲ + ۷n + ۵$

(۴) گزینهٔ: $n^۲ + ۷n + ۶$

گام دوم:

- حاصل $۴n + ۵$ همیشه فرد است، پس $n^۲ + ۴n + ۵$ همواره فرد نیست (برای n فرد، زوج است).
- حاصل $۴n + ۶$ همیشه زوج است، پس $n^۲ + ۴n + ۶$ همواره فرد نیست (برای n زوج، زوج است).
- حاصل $n^۲ + ۷n$، یعنی $n(n+۷)$ همواره زوج است (بین n و $n+۷$ یکی زوج است).

پس $n^۲ + ۷n + ۵$ همواره فرد و $n^۲ + ۷n + ۶$ همواره زوج است.

تیزبازی

$n = ۱$ و $n = ۰$ را قرار دهیم و امتحان کنیم. برای $n = ۰$ باید b فرد باشد و برای $n = ۱$ باید $b + a + ۱$ فرد باشد، پس a فرد است.
فرد

کتاب درسی

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است. *(ریاضیات گسسته ـ مثال صفحهٔ ۴ کتاب درسی)*

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۶ اگر $۳۰۰ \mid n$ و $n \mid ۱۲$، مجموع مقادیر طبیعی n کدام است؟

۱) ۳۷۲ ۲) ۳۶۰ ۳) ۳۱۲ ۴) ۳۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

عاد کردن:

$a \mid b$ یعنی عدد صحیح b بر عدد صحیح a بخش‌پذیر است؛ به بیان دیگر b مضرب صحیح a است:

$$a \mid b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \; ; \; b = aq$$

خاصیت‌های بدیهی عادکردن:

۱) $\forall a \in \mathbb{Z}: \pm ۱ \mid a \; , \; a \mid ۰ \; , \; a \mid a$

۲) $a \mid b \; , \; b \neq ۰ \Rightarrow |a| \leq |b|$

۳) $a \mid \pm ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$

۴) $m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n \quad ; \quad m, n \in \mathbb{N}$

۵) p عدد اول $\; , \; a \mid p \Rightarrow a = \pm ۱$ یا $\pm p$

۶) $ka \mid kb \underset{k \neq ۰}{\Leftrightarrow} a \mid b$

۷) $a^n \mid b^n \Leftrightarrow a \mid b$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: باید n مضرب ۱۲ و مقسوم‌علیه ۳۰۰ باشد:

$$\xrightarrow{n = ۱۲q} ۱۲q \mid ۳۰۰$$

$$\xrightarrow{\div ۱۲} q \mid ۲۵$$

گام دوم: پس q می‌تواند ۱، ۵ یا ۲۵ باشد و داریم:

$$\xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = ۱۲ \times ۱ \text{ یا } ۱۲ \times ۵ \text{ یا } ۱۲ \times ۲۵$$

$$\text{جمع} = ۱۲(۱ + ۵ + ۲۵) = ۱۲ \times ۳۱ = ۳۷۲$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷ اگر $d \mid 7n-1$ و $d \mid 5n+2$، مجموع اعداد طبیعی d کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

محاسبهٔ ب.م.م با عادکردن: اگر d مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $an+b$ و $a'n+b'$ باشد، داریم:

$$d \mid an+b \ , \ d \mid a'n+b'$$

حالا باید با استفاده از ویژگی ترکیب خطی، n را در طرف راست حذف کرد. اگر ب.م.م a و a'، ۱ باشد، داریم:

$$d \mid \underbrace{ab'-ba'}_{\substack{\text{دترمینان} \\ \text{ضرایب}}}$$

مثلاً از $d \mid 4n-1$ و $d \mid 3n+2$ داریم:

$$d \mid -11$$

یعنی عدد طبیعی d می‌تواند ۱ یا ۱۱ باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: می‌نویسیم:

$$d \mid 7n-1$$
$$d \mid 5n+2$$

گام دوم: با دترمینان داریم:

$$d \mid 14+5=19$$

گام سوم: سؤال گفته، $d \in \mathbb{N}$، پس جواب، ۱۹ یا $d=1$ است و جمع مقادیر می‌شود، ۲۰.

کنکور

اگر عدد طبیعی $a>3$ اعداد $7m+2$ و $11m+4$ را عاد کند، کدام مورد نمی‌تواند عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد؟

(سوال ۳۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $ak+1$ ۲) $ak+3$ ۳) $ak+5$ ۴) $ak+7$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۸ اگر a عددی فرد و $3 \mid a$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ a^2 بر ۲۴ چند مقدار مختلف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

نتایجی از قضیهٔ تقسیم:

۱) مربع هر عدد صحیح فرد، در تقسیم بر ۸ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد.

۲) اگر a مضرب ۳ نباشد، a^2 بر ۳ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: a فرد است و مضرب ۳ نیست، پس طبق نتایج قضیهٔ تقسیم، a^2 بر ۳ و ۸ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد:

$$a^2 = 3q+1 \text{ و } a^2 = 8k+1$$

گام دوم: پس داریم:

$$\begin{cases} 3a^2 = 24k+3 \\ 8a^2 = 24q+8 \end{cases} \xrightarrow{\ominus} 5a^2 = 24(q-k)+5 \xrightarrow{\div 5} a^2 = 24k'+1$$

یعنی باقی‌ماندهٔ a^2 بر ۲۴، فقط یک مقدار دارد: ۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۹ در تقسیم a بر ۷، باقی‌مانده برابر ۱ است. اگر $b-۲ \mid ۷$ باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ $۳a-۲b$ بر ۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

محاسبهٔ باقی‌مانده با استفاده از قضیهٔ تقسیم:

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a و a' را بر عدد c بدانیم، می‌نویسیم:

$$a = cq + r$$
$$a' = cq' + r'$$

حالا با ضرب در m و n و جمع دو رابطه، می‌توانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم $ma + na'$ را بر c پیدا کنیم.

نکته

اگر به باقی‌ماندهٔ استاندارد نرسیدیم (مثلاً به $۱۷q-۱۰$ یا $۷q+۲۰$ رسیدیم) با استفاده از قسمت bq، مضارب b را به عدد ثابت اضافه و کم می‌کنیم تا در فاصلهٔ $(۰, b)$ قرار گیرد. این‌طوری:

$$۱۷q-۱۰ = ۱۷(q-۱)+۱۷-۱۰ = ۱۷q''+۷$$
$$۷q+۲۰ = ۷(q+۲)+۲۰-۱۴ = ۷q'+۶$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: داریم:

$$۷ \mid b-۲ \Rightarrow b-۲ = ۷q' \Rightarrow \begin{matrix} a = ۷q+۱ \\ b = ۷q'+۲ \end{matrix}$$

گام دوم: حالا $۳a-۲b$:

$$۳a-۲b = ۳(۷q+۱)-۲(۷q'+۲)$$
$$= ۷(۳q-۲q')-۱ = ۷q''-۱$$

گام سوم: برای درست‌کردن -۱، از $۷q''$، ۷تا برمی‌داریم:

$$۳a-۲b = ۷q'''+۷-۱ = ۷q'''+۶$$

یعنی باقی‌مانده برابر ۶ است.

کتاب درسی

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲m-۵n)$ بر ۱۷ را به دست آورید.

(ریاضیات گسسته ـ مثال صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۰ چند عدد اول p وجود دارد که p، $p+2$ و $p+10$ هر سه اول باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

افراز اعداد صحیح در تقسیم بر ۶، یک نتیجه دربارهٔ اعداد اول

اگر اعداد صحیح را بر ۶ تقسیم کنیم، داریم: $a = 6q + r \ , \ 0 \le r < 6$

پس: $a = 6q+0$ یا $6q+1$ یا $6q+2$ یا $6q+3$ یا $6q+4$ یا $6q+5$

حالا با توجه به این‌که اعداد اول به‌جز ۱ و خودشان شمارنده‌ای ندارند، ثابت می‌شود هر عدد اول $p > 3$ به صورت $6k+1$ یا $6k+5$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اعداد اول ۲، ۳، $6k+1$ یا $6k+5$ هستند.

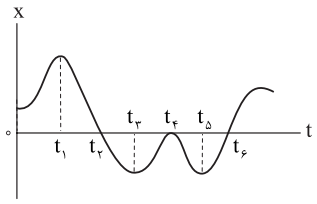
گام دوم: حالا p، $p+2$ و $p+10$ را ببینید:

p	۲	۳	$6k+1$	$6k+5$
$p+2$	~~۴~~	۵	~~$6k+3$~~	$6k+7$
$p+10$	~~۱۲~~	۱۳	$6k+11$	~~$6k+15$~~

اعداد غیراول را خط زده‌ایم، پس فقط یک عدد اول $p = 3$ وجود دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۱ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند به شکل زیر است. کدام موارد زیر دربارهٔ حرکت این جسم الزاماً درست است؟



الف) بردار مکان متحرک ۳ مرتبه تغییر جهت داده است.

ب) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_4، جهت بردار سرعت متوسط، در خلاف جهت محور x است.

پ) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_5، شتاب متوسط متحرک صفر است.

ت) در تمام لحظه‌های بازهٔ زمانی t_4 تا t_6، شتاب متحرک در خلاف جهت محور x است.

۱) الف و ب
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

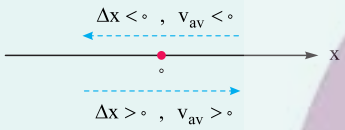
۱) **بردار مکان** $(\vec{r})$: برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، بردار مکان جسم در آن لحظه، نام دارد.

هرگاه متحرک از مبدأ مکان یا مبدأ محور $(x = ۰)$ عبور کند، x تغییر علامت می‌دهد و جهت بردار مکان آن عوض می‌شود.

۲) **در حرکت روی محور x**: متحرک فقط در راستای محور x (در جهت مثبت یا منفی آن) حرکت می‌کند.

اگر علامت جابه‌جایی و سرعت متوسط مثبت باشد، یعنی متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و اگر منفی باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

بنابراین در هر نوع حرکت روی محور x، سرعت متوسط را به صورت زیر به کار می‌بریم:



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱}$$

$x_۱$: مکان متحرک در لحظهٔ $t_۱$ (m)

$x_۲$: مکان متحرک در لحظهٔ $t_۲$ (m)

Δt: بازهٔ زمانی (s)

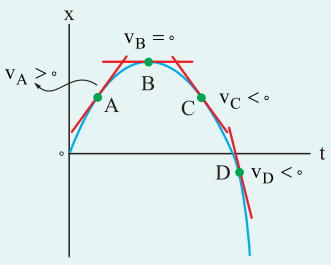
Δx: اندازهٔ جابه‌جایی (m)

۳) در نمودار مکان ـ زمان جسمی که روی محور x حرکت می‌کند، اگر گودی منحنی رو به بالا باشد، یعنی شتاب در جهت مثبت محور است و اگر رو به پایین باشد، یعنی شتاب در جهت منفی محور است.



۴) سرعت در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه است. هر چه شیب این خط بیشتر باشد، یعنی اندازهٔ سرعت بیشتر است.

مثال در شکل زیر داریم: $|v_D| > |v_C|$



در هر بازهٔ زمانی که شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان کاهش یابد، یعنی اندازهٔ سرعت کاهش یافته و می‌گوییم حرکت

کندشونده است، اما اگر اندازهٔ سرعت افزایش یابد، می‌گوییم حرکت تندشونده است.

۵) شتاب متوسط ($\vec{a}_{av}$):

در هر بازهٔ زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازهٔ زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$\vec{a}_{av}$: شتاب متوسط (m/s^2)

$\vec{v}_1$: سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 (m/s)

$\vec{v}_2$: سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 (m/s)

شتاب متوسط کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ است، زیرا Δt همواره مثبت است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

درستی یا نادرستی موارد مطرح‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) نادرست است؛ نمودار مکان ـ زمان داده‌شده، فقط در دو لحظهٔ t_2 و t_6، محور t را قطع می‌کند و علامت مکان عوض می‌شود، بنابراین بردار مکان متحرک، ۲ مرتبه تغییر جهت داده است.

ب) درست است؛ در بازهٔ زمانی t_1 تا t_4، جابه‌جایی متحرک در جهت منفی است، در نتیجه $\Delta x < 0$ و $v_{av} < 0$ هستند، یعنی سرعت متوسط در خلاف جهت محور x است.

پ) درست است؛ زیرا در لحظه‌های t_1 و t_5، شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان، صفر شده و سرعت لحظه‌ای متحرک صفر است، بنابراین داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-0}{t_5 - t_1} = 0$$

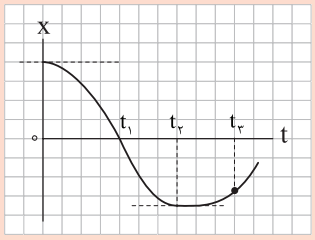
ت) نادرست است؛ در بازهٔ زمانی t_4 تا t_6، گودی نمودار مکان ـ زمان رو به بالا است، یعنی شتاب حرکت در این بازهٔ زمانی، مثبت بوده و در جهت محور x است.

گول نخوری ✘

باید دقت کنید که در لحظهٔ t_4، نمودار مکان ـ زمان بر محور t مماس شده، اما آن را قطع نکرده است، یعنی از مبدأ مکان عبور نکرده و برگشته است؛ بنابراین در این لحظه، جهت بردار مکان نیز تغییری ندارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۲ نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. در کدام بازهٔ زمانی اندازهٔ شتاب متوسط متحرک بیشتر است؟



۱) صفر تا t_1

۲) t_1 تا t_2

۳) صفر تا t_3

۴) t_2 تا t_3

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: هر واحد زمانی روی محور t را با T نشان می دهیم و بر این اساس، اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در مراحل مختلف را به کمک رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ با هم مقایسه می‌کنیم. توجه داشته باشیم که سرعت متحرک در لحظه‌های صفر و t_2 برابر با صفر است.

گام دوم: مقایسهٔ شتاب در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 و t_1 تا t_2:

$$\left.\begin{aligned}|a_{0,t_1}|&=\frac{|v_1-0|}{t_1-0}=\frac{|v_1|}{4T}\\ |a_{t_1,t_2}|&=\frac{|0-v_1|}{t_2-t_1}=\frac{|v_1|}{7T-4T}=\frac{|v_1|}{3T}\end{aligned}\right\}\Rightarrow |a_{t_1,t_2}|>|a_{0,t_1}|$$

بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

گام سوم: مقایسهٔ شتاب در بازه‌های زمانی ۰ تا t_3 و t_2 تا t_3:

$$\left.\begin{aligned}|a_{0,t_3}|&=\frac{|v_3-0|}{t_3-0}=\frac{|v_3|}{10T-0}=\frac{|v_3|}{10T}\\ |a_{t_2,t_3}|&=\frac{|v_3-0|}{t_3-t_2}=\frac{|v_3|}{10T-7T}=\frac{|v_3|}{3T}\end{aligned}\right\}\Rightarrow |a_{t_2,t_3}|>|a_{0,t_3}|$$

بنابراین گزینهٔ (۳) هم نادرست است.

گام چهارم: مقایسهٔ اندازهٔ شتاب متوسط در بازه‌های زمانی t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3:

شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان داده‌شده، در لحظهٔ t_1 نسبت به لحظهٔ t_3 اندازهٔ بیشتری دارد.

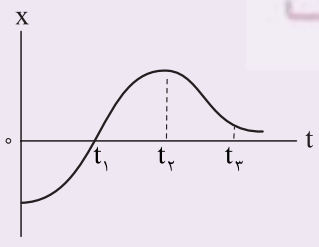
$$\left.\begin{aligned}|a_{t_1,t_2}|&=\frac{|v_1|}{3T}\\ |a_{t_2,t_3}|&=\frac{|v_3|}{3T}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{|v_1|>|v_3|}|a_{t_1,t_2}|>|a_{t_2,t_3}|$$

بنابراین گزینهٔ (۴) هم نادرست است، یعنی گزینهٔ (۲) درست است.

کنکور

نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. در کدام لحظهٔ نشان داده شده، تندی بیشتر است؟

(سؤال ۵۴ کنکور تجربی ۱۴۰۲ (خارج از کشور))



۱) t_1

۲) t_2

۳) t_3

۴) $t=0$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۳ دو متحرک A و B با تندی‌های ثابت v_A و v_B $(v_B > v_A)$ روی محور x در حرکت هستند و در لحظهٔ $t = ۰$، فاصلهٔ این دو از هم ۲۰۰ m است. اگر این دو به سمت هم در حال حرکت باشند، پس از ۴ s و اگر در یک جهت حرکت کنند و متحرک B به دنبال متحرک A برود، پس از ۲۰ s به هم می‌رسند. $\frac{v_B}{v_A}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint رابطهٔ سرعت نسبی دو متحرک را که روی محور x حرکت می‌کنند، در دو حالت بنویسید و نسبت خواسته‌شده را پیدا کنید.

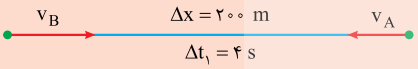
درس Box سرعت متحرک B نسبت به متحرک A از رابطهٔ $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ به دست می‌آید.

الف) وقتی دو متحرک در یک جهت حرکت می‌کنند: $v_{BA} = v_B - v_A$

ب) وقتی دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند: $v_{BA} = v_B + v_A$

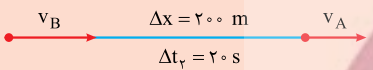
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در حالتی که دو متحرک به طرف هم حرکت می‌کنند، داریم:



$$v_B + v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t_۱} = \frac{۲۰۰}{۴} = ۵۰ \text{ m/s}$$

گام دوم: در حالتی که دو متحرک در یک جهت حرکت می‌کنند، داریم:



$$v_B - v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t_۲} = \frac{۲۰۰}{۲۰} = ۱۰ \text{ m/s}$$

گام سوم: نتایج به‌دست‌آمده در گام‌های اول و دوم را با هم ترکیب می‌کنیم و نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} v_B + v_A = ۵۰ \\ v_B - v_A = ۱۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲v_B = ۶۰ \Rightarrow v_B = ۳۰ \text{ m/s} \Rightarrow v_A = ۲۰ \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{۳۰}{۲۰} = ۱/۵$$

کنکور دو متحرک با تندی ثابت $v_۱$ و $v_۲ > v_۱$ روی خط راست طوری حرکت می‌کنند که اگر خلاف جهت هم بروند، فاصلهٔ آن‌ها در هر ثانیه، ۱۶ متر تغییر می‌کند و اگر هم‌جهت حرکت کنند، فاصلهٔ آن‌ها در هر دقیقه ۲۴۰ متر تغییر می‌کند. $\frac{v_۲}{v_۱}$ کدام است؟

(سؤال ۵۳ کنکور تجربی ۱۴۰۲ (خارج از کشور))

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

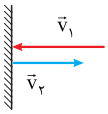
۴۴ **توپی که روی سطح افقی در حرکت است، با تندی $۴\ m/s$ به دیواری قائم برخورد می‌کند و در همان راستا با تندی $۳\ m/s$ برمی‌گردد. اگر بازهٔ زمانی تماس توپ با دیوار $۰/۲\ s$ باشد، بزرگی شتاب متوسط توپ در این بازهٔ زمانی، چند واحد SI است؟**

۱) ۳۵ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint رابطهٔ شتاب متوسط را به صورت برداری بنویسید و اندازهٔ شتاب متوسط را به راحتی به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی مطابق شکل زیر، فرض می‌کنیم که توپ با سرعت $\vec{v}_۱$ و به طرف چپ در حرکت بوده که به دیواری برخورد کرده و با سرعت $\vec{v}_۲$ به طرف راست برمی‌گردد.

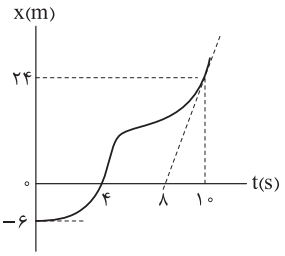


$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{(۳\ m/s)\vec{i} - (-۴\ m/s)\vec{i}}{۰/۲\ s}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = \frac{(۷\ m/s)\vec{i}}{۰/۲\ s} = (۳۵\ m/s^۲)\vec{i} \Rightarrow a_{av} = ۳۵\ m/s^۲$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۵ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۰$ تا $t_2 = ۱۰\ s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟ (در شکل، خط مماس بر نمودارهای $t_1 = ۰$ و $t_2 = ۱۰\ s$ رسم شده است.)



۱) ۱/۲

۲) ۲/۴

۳) ۳

۴) ۱/۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

به کمک شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان، سرعت متحرک را در لحظه‌های $t_1 = ۰\ s$ و $t_2 = ۱۰\ s$ به دست آورید و سپس شتاب متوسط بین این دو لحظه را پیدا کنید.

درس Box

در حرکت روی خط راست و در رابطهٔ شتاب متوسط $(a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1})$، با توجه به علامت جبری سرعت‌ها، علامت شتاب متوسط و جهت آن مشخص می‌شود. اگر شتاب متوسط مثبت باشد، یعنی در جهت محور است و اگر منفی باشد، یعنی در خلاف جهت محور است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان که در هر لحظه سرعت متحرک را نشان می‌دهد، داریم:

$$t_1 = ۰\ s \Rightarrow v_1 = ۰$$

$$t_2 = ۱۰\ s \Rightarrow v_2 = \frac{۲۴ - ۰}{۱۰ - ۸} = ۱۲\ m/s$$

گام دوم:

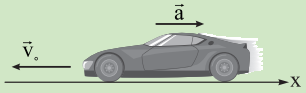
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{۱۲ - ۰}{۱۰ - ۰} = ۱/۲\ m/s^2$$

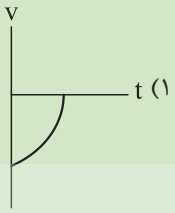
گول نخوری

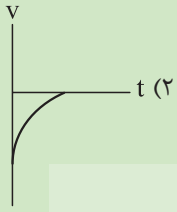
اگر شیب خط واصل بین دو نقطهٔ ابتدا و انتهای نمودار در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰ s را پیدا کنید، حاصل آن عدد ۳ خواهد بود. مراقب باشید در دام گزینهٔ (۳) نیفتید، زیرا شیب این خط، سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی مذکور به ما می‌دهد، نه شتاب متوسط را.

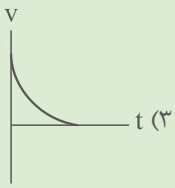
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

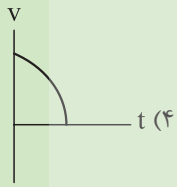
۴۶ شکل زیر خودرویی را در لحظهٔ $t = ۰$ نشان می‌دهد که در خلاف جهت محور x در حال حرکت است و بزرگی شتاب آن رفته‌رفته کاهش می‌یابد. نمودار سرعت ـ زمان این خودرو از لحظهٔ $t = ۰$ تا لحظه‌ای که خودرو متوقف می‌شود، کدام می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۲

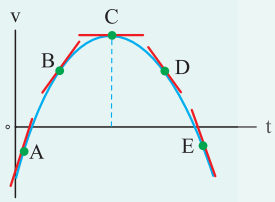
Hint کافی است به دو نکته دقت کنید، یکی علامت سرعت متحرک و دیگری بزرگی شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان.

درس Box

۱) اگر متحرک در جهت محور x حرکت کند، سرعت لحظه‌ای آن مثبت و اگر در خلاف جهت محور x حرکت کند، سرعت لحظه‌ای آن منفی است.

۲) شتاب در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در آن لحظه است.

مثال در نمودار سرعت ـ زمان شکل زیر داریم:



$a_A > a_B > ۰$

$a_C = ۰$

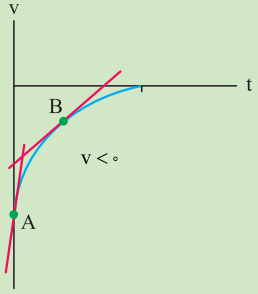
$|a_E| > |a_D|$

$a_E < ۰ , a_D < ۰$

۳) اگر سرعت و شتاب متحرک هم‌جهت (هم‌علامت) باشند، $av > ۰$ بوده و اندازهٔ سرعت آن افزایش می‌یابد. در این صورت می‌گوییم حرکت تندشونده است. اگر سرعت و شتاب متحرک در خلاف جهت هم (غیر هم‌علامت) باشند، $av < ۰$ بوده و اندازهٔ سرعت آن کاهش می‌یابد، در این صورت می‌گوییم حرکت کندشونده است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که خودرو در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، سرعت آن منفی است؛ بنابراین نمودار سرعت ـ زمان آن در پایین محور t قرار می‌گیرد. (رد گزینه‌های (۳) و (۴)).

گام دوم: طبق صورت سؤال، بزرگی شتاب متحرک در حال کاهش است؛ بنابراین اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان باید به تدریج کم شود، که این شرایط با گزینهٔ (۲) منطبق است.



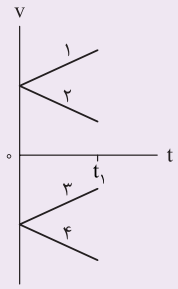
$a_B < a_A$

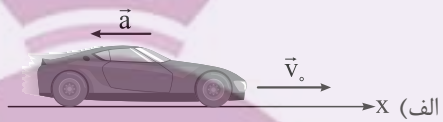
ایران تقویتی
پوسته آزمون موفقیت

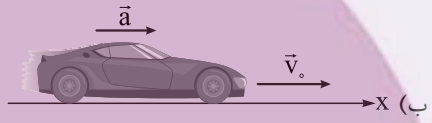
کتاب درسی

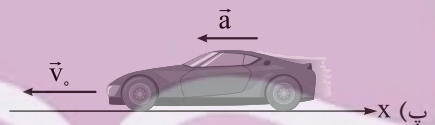
در تمامی حالت‌های شکل زیر، خودروها در امتداد محور x و با شتاب ثابت در حرکت‌اند. حرکت هر یک از خودروها، توسط کدام‌یک از نمودارهای v ـ t در محدودهٔ زمانی نشان داده شده روی نمودارها، توصیف می‌شود؟ هم‌چنین توضیح دهید تندی کدام خودرو در حال افزایش (حرکت تندشونده) و تندی کدام خودرو در حال کاهش (حرکت کُندشونده) است.

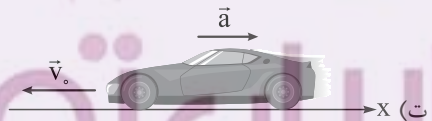
(فیزیک (۳) ـ فعالیت ۱ ـ ۲ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)





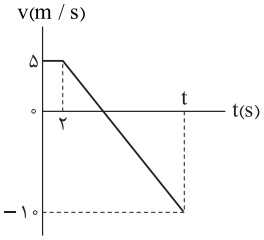






ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۷ شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. اگر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک تا قبل از تغییر جهت نصف اندازهٔ جابه‌جایی از لحظهٔ تغییر جهت تا لحظهٔ t باشد، اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۰/۵ s تا t، چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) $\frac{۵}{۱۴}$
۲) $\frac{۱۵}{۱۴}$
۳) $\frac{۱۰}{۲۷}$
۴) $\frac{۱۰}{۹}$

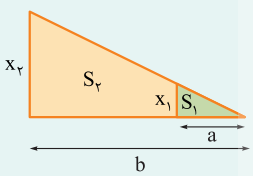
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) در حرکت روی خط راست، در لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد، سرعت آن صفر شده و سپس تغییر علامت می‌دهد. به عبارت دیگر، در لحظه‌ای که نمودار سرعت ـ زمان، محور t را قطع می‌کند، در آن لحظه متحرک متوقف شده و تغییر جهت داده است.

- مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، در هر بازهٔ زمانی، برابر با جابه‌جایی متحرک در آن بازه است. (مساحت سطحی را که بالای محور زمان است، مثبت در نظر می‌گیریم، اما مساحت سطحی را که زیر محور زمان است، منفی در نظر می‌گیریم؛ زیرا سرعت و جابه‌جایی در این بخش، منفی هستند.)
- قدرمطلق مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در هر بازهٔ زمانی، مسافت پیموده‌شده در آن بازهٔ زمانی را نشان می‌دهد.
- در تحلیل نمودارهای حرکت‌شناسی، نوشتن نسبت تشابه بین اضلاع مثلث‌ها (رابطهٔ تالس) و هم‌چنین نسبت مساحت‌های آن‌ها، می‌تواند مفید باشد.

مثال

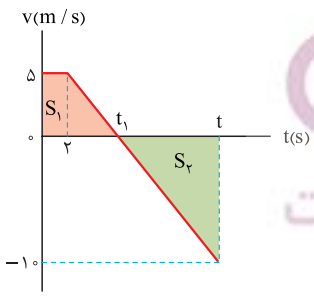


$$\frac{x_۱}{x_۲}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{S_۱}{S_۱+S_۲}=(\frac{a}{b})^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در لحظهٔ $t_۱$، نمودار سرعت ـ زمان محور t را قطع کرده و علامت سرعت از مثبت به منفی تغییر پیدا کرده است؛ بنابراین در لحظهٔ $t_۱$ جهت حرکت نیز تغییر کرده است.

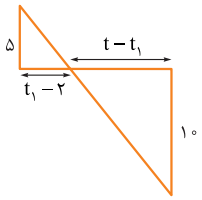


گام دوم: مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان را یک بار از لحظهٔ $t=۰$ تا $t_۱$ و بار دیگر از لحظهٔ $t_۱$ تا t به دست می‌آوریم و با توجه به متن سؤال، $S_۱$ را نصف قدرمطلق $S_۲$ قرار می‌دهیم.

$$S_۱=\frac{۱}{۲}|S_۲| \Rightarrow \frac{(t_۱+۲)۵}{۲}=\frac{۱}{۲}|\frac{(t-t_۱)(-۱۰)}{۲}|$$

$$\Rightarrow (t_۱+۲)۵=(t-t_۱)۵ \Rightarrow t_۱+۲=t-t_۱ \Rightarrow t=۲t_۱+۲$$

گام سوم: از تشابه دو مثلث در شکل مقابل می‌توان نوشت:



$$\frac{t-t_1}{t_1-2}=\frac{10}{5}=2 \Rightarrow t-t_1=2t_1-4 \Rightarrow t=3t_1-4$$

گام چهارم: از ترکیب روابط به‌دست‌آمده در گام‌های دوم و سوم داریم:

$$\left.\begin{matrix} t=2t_1+2 \\ t=3t_1-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2t_1+2=3t_1-4 \Rightarrow t_1=6\ s$$

$$\Rightarrow t=2(6)+2 \Rightarrow t=14\ s$$

گام چهارم: رابطهٔ شتاب متوسط را در بازهٔ زمانی $0/5\ s$ تا $14\ s$ به دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-10-5}{14-0/5}=\frac{-15}{13/5}=-\frac{30}{27}=-\frac{10}{9}\ m/s^2$$

$$\Rightarrow |a_{av}|=\frac{10}{9}\ m/s^2$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

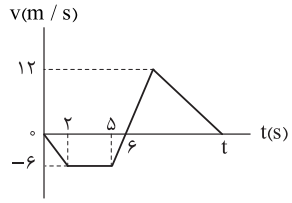
۴۸ **نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت کرده و در لحظهٔ t برای همیشه متوقف می‌شود، مطابق شکل زیر است. بزرگی سرعت متوسط این متحرک در مدتی که در جهت محور x حرکت می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۳

۲) ۵

۳) ۶

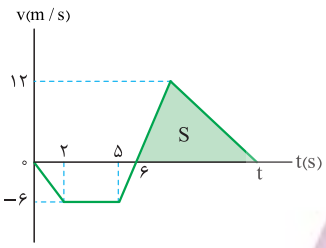
۴) ۱۲



پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint مساحت سطح زیر نمودار در بازهٔ زمانی ۶ s تا t را برحسب t بنویسید، سپس به کمک رابطهٔ $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$، خواستهٔ سؤال را به راحتی به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در بازهٔ زمانی ۶ s تا t که نمودار سرعت ـ زمان متحرک در بالای محور t قرار دارد و سرعت مثبت است، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند. مساحت سطح زیر نمودار در این بازهٔ زمانی همان جابه‌جایی متحرک را نشان می‌دهد.



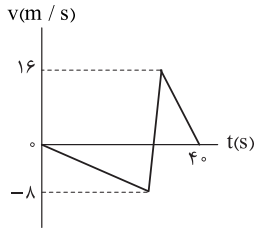
$$\Delta x = S = \frac{(t-۶)\times ۱۲}{۲} = (t-۶)۶$$

گام دوم: رابطهٔ سرعت متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی ۶ s تا t می‌نویسیم و خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{(t-۶)۶}{(t-۶)}=۶\ m/s$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۹ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در ۴۰ ثانیهٔ اول برابر ۵ m / s باشد، جابه‌جایی کل متحرک در این مدت چند متر بوده است؟



۱) ۴۰

۲) −۴۰

۳) ۸۰

۴) −۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا مسافت طی‌شده توسط متحرک در مدت ۴۰ s را حساب کنید؛ سپس لحظه‌ای که نمودار، محور t را قطع می‌کند، پیدا کنید. در پایان نیز با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار، جابه‌جایی را حساب کنید.

درس Box

رابطهٔ تندی متوسط:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

s_{av} : تندی متوسط (m / s)

ℓ : مسافت (m)

Δt : مدت‌زمان (s)

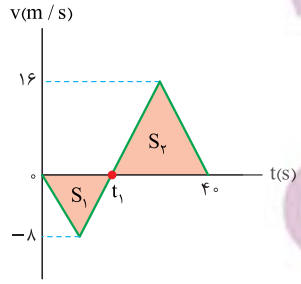
مسافت طی‌شده توسط متحرک و تندی متوسط آن، همواره مثبت هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط، مسافت طی‌شده توسط متحرک را در مدت ۴۰ s به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow ۵ = \frac{\ell}{۴۰} \Rightarrow \ell = ۲۰۰\ m$$

گام دوم: مسافت طی‌شده برابر است با مجموع اندازه‌های مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$. بر این اساس، لحظه‌ای را که نمودار v ـ t محور زمان را قطع می‌کند، حساب می‌کنیم:



$$\ell = |S_۱| + S_۲ \Rightarrow ۲۰۰ = |\frac{(t_۱ - ۰)(-۸)}{۲}| + \frac{(۴۰ - t_۱)۱۶}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲۰۰ = ۴t_۱ + ۸(۴۰ - t_۱)$$

$$\Rightarrow ۲۰۰ = -۴t_۱ + ۳۲۰ \Rightarrow ۴t_۱ = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow t_۱ = ۳۰\ s$$

گام سوم: مساحت محدود بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان را با در نظر گرفتن علامت جبری آن‌ها، با هم جمع می‌کنیم تا جابه‌جایی متحرک به دست آید:

$$\Delta x = S_۱ + S_۲ = \frac{(۳۰ - ۰)(-۸)}{۲} + \frac{(۴۰ - ۳۰)۱۶}{۲} = -۱۲۰ + ۸۰ = -۴۰\ m$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۰ متحرکی در امتداد محور x و با شتاب ثابت در حرکت است. در مکان $\vec{x}_1 = (5\ m)\vec{i}$ سرعت متحرک $\vec{v}_1 = (12\ m/s)\vec{i}$ و در مکان $\vec{x}_2 = (50\ m)\vec{i}$ سرعت متحرک $\vec{v}_2 = (18\ m/s)\vec{i}$ است. در چه مکانی سرعت متحرک $\vec{v}_3 = (22\ m/s)\vec{i}$ خواهد شد؟

۱) $(75\ m)\vec{i}$ ۲) $(80\ m)\vec{i}$

۳) $(90\ m)\vec{i}$ ۴) $(95\ m)\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint به کمک معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت بین دو مکان x_1 و x_2، شتاب حرکت را پیدا کنید و سپس با استفاده از همین معادله بین مکان x_3 و مکانی دیگر مانند x_1، x_3 را پیدا کنید.

درس Box معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت روی محور x به صورت زیر است:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

v_1: سرعت متحرک در مکان x_1 (m/s)

v_2: سرعت متحرک در مکان x_2 (m/s)

a: شتاب حرکت (m/s^2)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی را بین دو مکان x_1 و x_2 می‌نویسیم تا شتاب حرکت را به دست آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) \Rightarrow 18^2 - 12^2 = 2a(50-5) \Rightarrow (18-12)(18+12) = 2a \times 45$$

$$\Rightarrow 6 \times 30 = 90a \Rightarrow a = 2\ m/s^2$$

گام دوم: معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی را بین دو مکان x_1 و x_3 می‌نویسیم تا x_3 را پیدا کنیم:

$$v_3^2 - v_1^2 = 2a(x_3 - x_1) \Rightarrow 22^2 - 12^2 = 2 \times 2(x_3 - 5) \Rightarrow (22-12)(22+12) = 4(x_3 - 5)$$

$$\Rightarrow 10 \times 34 = 4x_3 - 20 \Rightarrow 360 = 4x_3 \Rightarrow x_3 = 90\ m$$

$$\Rightarrow \vec{x}_3 = (90\ m)\vec{i}$$

کتاب درسی متحرکی در امتداد محور x و با شتاب ثابت در حرکت است. در مکان $x = +10\ m$، سرعت متحرک $+4\ m/s$ و در مکان $x = +19\ m$، سرعت متحرک $+18\ km/h$ است. *(فیزیک (۳) ـ تمرین ۲۰ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)*

الف) شتاب حرکت آن چه‌قدر است؟

ب) پس از چه مدتی سرعت متحرک از $+4\ m/s$ به سرعت $+18\ km/h$ می‌رسد؟

۵۱ هواپیمایی از حال سکون و با شتاب ثابت روی باند پرواز و در امتداد محور x شروع به حرکت می‌کند و با سرعت $۳۶۰\ km/h$ از روی باند بلند می‌شود. اگر این حرکت $۴۰\ s$ طول بکشد، مسافتی که هواپیما روی باند پرواز طی کرده، چند کیلومتر است؟

۱) ۲ ۲) ۳/۶
۳) ۴ ۴) ۷/۲

مشاوره بسیاری از تست‌های کنکور از بین پرسش‌ها، تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی برداشت می‌شوند؛ بنابراین کتاب درسی نه تنها برای امتحانات نهایی اهمیت فراوانی دارد، بلکه در تست‌های کنکور هم زمینه‌ساز بسیاری از تست‌هاست.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

رابطهٔ مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت روی محور x به صورت زیر است:

$$\Delta x = (\frac{v_0 + v}{2})\Delta t$$

Δx: جابه‌جایی (m)

v_0: سرعت اولیه متحرک یا سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 0$ (m/s)

v: سرعت متحرک در لحظهٔ t (m/s)

Δt: بازهٔ زمانی حرکت (s)

پاسخ خیلی تشریحی

سرعت هواپیما هنگام برخاستن از سطح باند پرواز را برحسب متر بر ثانیه می‌نویسیم:

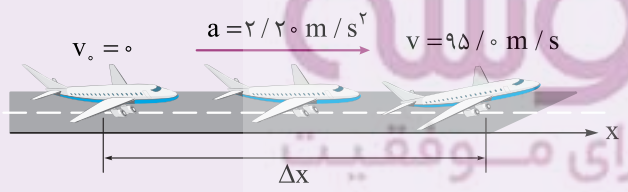
$$v_0 = ۳۶۰\ km/h = ۳۶۰ \frac{km}{h} \times \frac{۱۰^۳ m}{۱\ km} \times \frac{۱\ h}{۳۶۰۰\ s} = ۱۰۰\ m/s$$

سپس رابطهٔ مستقل از شتاب را می‌نویسیم و جابه‌جایی هواپیما را در این مدت به دست می‌آوریم. از آن‌جا که حرکت فقط در یک جهت انجام شده است، مسافت طی‌شده توسط هواپیما و جابه‌جایی آن یکسان هستند:

$$\Delta x = (\frac{v_0 + v}{2})\Delta t = (\frac{۰ + ۱۰۰}{2}) \times ۴۰ = ۲۰۰۰\ m = ۲\ km$$

کتاب درسی

شکل زیر، هواپیمایی را نشان می‌دهد که از حال سکون و با شتاب ثابت روی باند پرواز و در امتداد محور x شروع به حرکت می‌کند. *(فیزیک (۳) ـ مثال ۱ ـ ۱۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)*



الف) چه مدت طول می‌کشد تا هواپیما به شرایط برخاستن برسد؟

ب) سرعت متوسط هواپیما در این بازهٔ زمانی چه‌قدر است؟

پ) جابه‌جایی هواپیما در این مدت چه‌قدر است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۲ متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2 = t_1 + 12\ (s)$ برابر $300\ m$ است. اگر $\frac{1}{5}$ این جابه‌جایی در ۴ ثانیهٔ اول و بقیهٔ آن در ۸ ثانیهٔ بعد از آن انجام شود، بزرگی شتاب حرکت در SI کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{25}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint رابطهٔ مستقل از شتاب $(\Delta x = (\frac{v_0 + v}{2})\Delta t)$ را برای هر مرحله از حرکت و همچنین کل حرکت بنویسید و سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای حرکت پیدا کنید. به این ترتیب شتاب حرکت به دست می‌آید.

درس Box در حرکت با شتاب ثابت، شتاب لحظه‌ای و شتاب متوسط با هم برابرند.

$a = a_{av}$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** جابه‌جایی در هر مرحله از حرکت را مشخص کرده و روی مسیر حرکت نشان می‌دهیم:

$\Delta x = 300\ m$

$\Delta x_1 = \frac{1}{5}\Delta x = \frac{1}{5} \times 300 = 60\ m$

$\Delta x_2 = \frac{4}{5}\Delta x = \frac{4}{5} \times 300 = 240\ m$

$\Delta x_1 = 60\ m$ $\quad$ $\Delta x_2 = 240\ m$

t_1 $\quad$ $t_1 + 4\ s$ $\quad$ $t_2 = t_1 + 12\ s$

v_0 $\quad$ v_1 $\quad$ v_2

گام دوم: رابطهٔ مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت را برای جابه‌جایی‌های Δx_1، Δx_2 و کل حرکت $(\Delta x_1 + \Delta x_2)$ می‌نویسیم:

$\Delta x_1 = (\frac{v_0 + v_1}{2})(t_1 + 4 - t_1) \Rightarrow 60 = \frac{v_0 + v_1}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 + v_1 = 30$

$\Delta x_2 = (\frac{v_1 + v_2}{2})(t_1 + 12 - (t_1 + 4)) \Rightarrow 240 = \frac{v_1 + v_2}{2} \times 8 \Rightarrow v_1 + v_2 = 60$

$\Delta x_1 + \Delta x_2 = (\frac{v_0 + v_2}{2})(t_2 - t_1) \Rightarrow 300 = \frac{v_0 + v_2}{2} \times 12 \Rightarrow v_0 + v_2 = 50$

گام سوم: از حل معادلات به‌دست‌آمده در گام دوم، اختلاف مقادیر v_1 و v_2 را پیدا می‌کنیم:

$\left.\begin{matrix} v_0 + v_2 = 50 \\ v_0 + v_1 = 30 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_2 - v_1 = 20$

گام چهارم: در بازهٔ زمانی $t_1 + 4\ s$ تا $t_1 + 12\ s$، شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_1 + 12 - (t_1 + 4)} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}\ m/s^2$

شتاب به‌دست‌آمده، در کل مسیر حرکت، ثابت است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

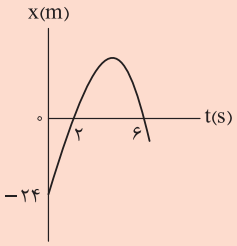
کنکور

متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2 = t_1 + 16\,(s)$ برابر ۴۰۰ متر است. اگر نیمی از این جابه‌جایی در ۴ ثانیهٔ اول و نیم دیگر آن در ۱۲ ثانیهٔ بعد از آن انجام شود، بزرگی شتاب حرکت در SI کدام است؟ (سؤال ۱۸۷ کنکور تجربی ۱۴۰۱ - نوبت دوم)

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳}$ ۴) $\frac{۲۵}{۶}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۳ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. تندی این متحرک در لحظهٔ عبور از مبدأ مکان چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۸
۴) ۸/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

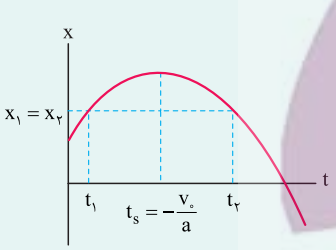
Hint معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را بنویسید و شتاب حرکت آن را حساب کنید، سپس سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۲\ s$ را پیدا کنید که با خواستهٔ سؤال برابر است.

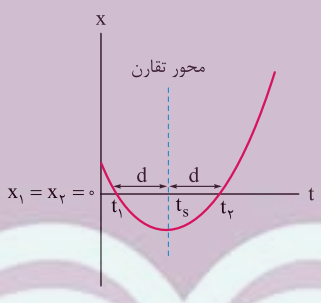
درس Box

۱) در حرکت با شتاب ثابت a روی محور x، با داشتن یک نقطه از نمودار مکان ـ زمان (که به شکل سهمی است) و ریشه‌های معادله ($t_۱$ و $t_۲$)، می‌توانیم معادلهٔ مکان را بنویسیم: $x = \frac{۱}{۲}a(t-t_۱)(t-t_۲)$

با قراردادن مختصات نقطهٔ معلوم در معادلهٔ فوق، a به دست می‌آید و معادلهٔ مکان ـ زمان، کامل می‌شود.

۲) در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، در زوج لحظه‌هایی که نسبت به زمان رأس سهمی $(t_s = -\frac{v_۰}{a})$ تقارن دارند، متحرک دارای مکان‌های یکسان و تندی‌های برابر است. البته سرعت‌های متحرک در این دو لحظه، قرینهٔ یکدیگرند.





$$\frac{t_۱ + t_۲}{۲} = t_s \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = x_۲ \\ v_۱ = -v_۲ \end{cases}$$

۳) رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه در حرکت با شتاب ثابت روی محور x:

$$\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + vt$$

Δx: جابه‌جایی (m)
a: شتاب $(m/s^۲)$
t: زمان (s)
v: سرعت در لحظهٔ t (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با معلوم‌بودن ریشه‌های معادلهٔ مکان یعنی $t_۱$ و $t_۲$، می‌توانیم معادلهٔ مکان ـ زمان را بنویسیم و شتاب حرکت را به دست آوریم:

$$x = \frac{۱}{۲}a(t-t_۱)(t-t_۲) \xrightarrow[t_۲=۶\ s]{t_۱=۲\ s} x = \frac{۱}{۲}a(t-۲)(t-۶)$$

$$\xrightarrow[x=-۲۴\ m]{t=۰} -۲۴ = \frac{۱}{۲}a(۰-۲)(۰-۶) \Rightarrow -۴۸ = a\times ۱۲ \Rightarrow a = -۴\ m/s^۲$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام دوم: رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه را در بازهٔ زمانی صفر تا ۲ s می‌نویسیم و سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 2\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt \xrightarrow[a=-4\,m/s^2]{t=2\,s} 0-(-24) = -\frac{1}{2}(-4)2^2 + v\times 2$$

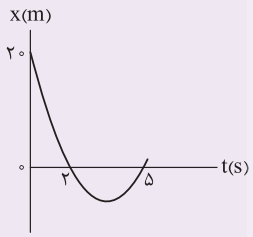
$$\Rightarrow 24 = 8 + 2v \Rightarrow v = 8\,m/s$$

نکته متحرک در لحظهٔ $t_2 = 6\,s$ دومین بار از مبدأ مکان می‌گذرد. سرعت متحرک در این لحظه $-8\,m/s$ است. البته چه در لحظهٔ $t_1 = 2\,s$ و چه در لحظهٔ $t_2 = 6\,s$، تندی متحرک با اندازهٔ سرعت آن، برابر و به اندازهٔ $8\,m/s$ است.

کنکور

سهمی زیر، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند. سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 5\,s$ چند متر بر ثانیه است؟

(سؤال ۴۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)



۱) ۲/۵

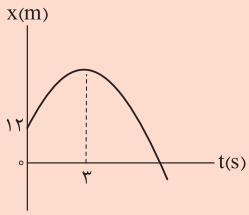
۲) ۴

۳) ۴/۵

۴) ۶

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۴ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در ۵ ثانیهٔ اول حرکت، نسبت مسافت طی‌شده به اندازهٔ جابه‌جایی این متحرک کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۱۳}{۵}$
۳) ۳
۴) $\frac{۱۳}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ اول حرکت را برحسب شتاب به دست آورید، سپس نسبت آن‌ها را پیدا کنید.

درس Box می‌توان گفت که جابه‌جایی‌های متحرک در ثانیه‌های متوالی، یک دنبالهٔ عددی تشکیل می‌دهند که قدرنسبت آن، شتاب (a) است.

مثلاً در یک حرکت تندشونده و در ثانیه‌های متوالی داریم:

جابه‌جایی در یک ثانیهٔ اول: $\Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}a + v_۰$

ثانیهٔ اول	ثانیهٔ دوم	ثانیهٔ سوم	ثانیهٔ چهارم	ثانیهٔ پنجم	...
$\Delta x_۱$	$\Delta x_۱ + a$	$\Delta x_۱ + ۲a$	$\Delta x_۱ + ۳a$	$\Delta x_۱ + ۴a$	

اگر سرعت اولیه صفر باشد: $(v_۰ = ۰)$

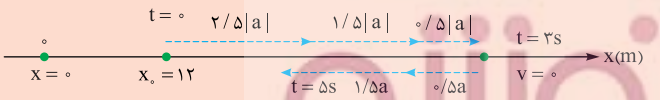
ثانیهٔ اول	ثانیهٔ دوم	ثانیهٔ سوم	ثانیهٔ چهارم	ثانیهٔ پنجم	...
۰/۵a	۱/۵a	۲/۵a	۳/۵a	۴/۵a	

اگر در پایان یک حرکت کندشونده، متحرک بایستد، مشابه آن است که در جهت مخالف و از حال سکون به حرکت درآمده باشد:

... ۴/۵|a| ۳/۵|a| ۲/۵|a| ۱/۵|a| ۰/۵|a| $v = ۰$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مطابق نمودار داده‌شده، این متحرک از مکان $x_۰ = ۱۲\ m$ روی محور x و در جهت مثبت شروع به حرکت کرده و پس از ۳ s متوقف می‌شود، سپس در جهت منفی شروع به حرکت می‌کند. در شکل زیر، مسیر حرکت در بازهٔ زمانی صفر تا ۵ s روی محور x نشان داده شده است. توجه کنید که چون گودی نمودار x ـ t رو به پایین است، شتاب حرکت منفی است.



گام دوم: نسبت مسافت طی‌شده (ℓ) به اندازهٔ جابه‌جایی آن (Δx) را در ۵ ثانیهٔ اول حرکت به دست می‌آوریم:

$$\frac{\ell}{\Delta x} = \frac{۲/۵|a| + ۱/۵|a| + ۰/۵|a| + |۰/۵a + ۱/۵a|}{۲/۵|a|} = \frac{۴/۵|a| + |۲a|}{۲/۵|a|} = \frac{۶/۵|a|}{۲/۵|a|}$$

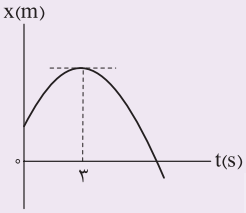
$$\Rightarrow \frac{\ell}{\Delta x} = \frac{۶/۵}{۲/۵} = \frac{۱۳}{۵}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

کنکور

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر بزرگی شتاب برابر $2\ m/s^2$ باشد، مسافت طی‌شده در چهار ثانیهٔ اول، چند برابر مسافت طی‌شده در ۴ ثانیهٔ دوم است؟

(سؤال ۴۷ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)



۱) $\frac{۱}{۳}$

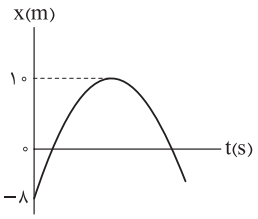
۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۵}{۱۲}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۵ **نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر فاصلهٔ زمانی بین دو لحظه‌ای که جهت بردار مکان تغییر می‌کند، ۸ s باشد، اندازهٔ سرعت اولیهٔ این متحرک در SI کدام است؟**



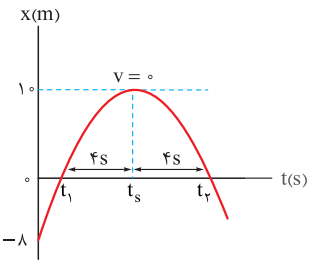
۱) ۲/۵
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $۵\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۵}$

مشاوره این‌که مسائل فیزیک درگیر محاسبات ریاضی می‌شوند کاملاً طبیعی است، اما این درگیری در مبحث حرکت‌شناسی نسبت به سایر مطالب فیزیک، پررنگ‌تر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint با استفاده از نکتهٔ دنبالهٔ حسابی در حرکت با شتاب ثابت، شتاب حرکت را پیدا کنید، سپس به کمک معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی (مستقل از زمان) سرعت اولیهٔ متحرک را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ که نمودار مکان ـ زمان، محور t را قطع می‌کند، جهت بردار مکان عوض می‌شود.



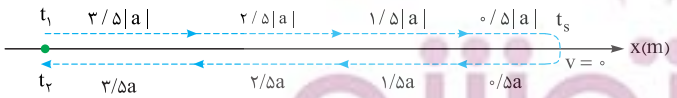
بنابراین داریم:

$$t_۲ - t_۱ = ۸\ s$$

و با توجه به این‌که نمودار مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت به صورت قسمتی از یک سهمی است، می‌توان نوشت:

$$t_s = \frac{t_۱ + t_۲}{۲}$$

گام دوم: مسیر حرکت متحرک را روی محور x نشان می‌دهیم و در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ حرکت متحرک را با استفاده از نکتهٔ دنبالهٔ حسابی، تحلیل می‌کنیم:



در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا t_s داریم:

$$\Delta x = ۳/۵|a| + ۲/۵|a| + ۱/۵|a| + ۰/۵|a|$$

$$\Rightarrow ۱۰ - ۰ = ۸|a| \Rightarrow |a| = \frac{۵}{۴}\ m/s^۲$$

چون گودی سهمی رو به پایین است، شتاب متحرک منفی است.

$$a = -\frac{۵}{۴}\ m/s^۲$$

گام سوم: معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت را در بازهٔ زمانی صفر تا t_s می‌نویسیم و سرعت اولیه $(v_۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow[\Delta x = ۱۰-(-۸) = ۱۸\ m]{v=۰\ ,\ a=-\frac{۵}{۴}\ m/s^۲} ۰ - v_۰^۲ = ۲(-\frac{۵}{۴})۱۸$$

$$\Rightarrow v_۰^۲ = ۴۵ \Rightarrow v_۰ = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}\ m/s$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۶ **خودرویی با سرعت ثابت $72\ km/h$ روی خط راست در حال حرکت است. ناگهان راننده مانع ثابتی را در ۵۲ متری خود می‌بیند و با شتاب ثابت اقدام به ترمزگرفتن می‌کند، ولی خودرو با سرعت $8\ m/s$ به مانع برخورد می‌کند. اگر بزرگی شتاب حاصل از ترمز $4\ m/s^2$ باشد، مدت‌زمان واکنش راننده چند ثانیه است؟**

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳

۳) ۰/۵ ۴) ۰/۵۵

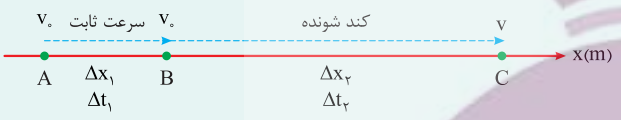
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا جابه‌جایی خودرو را در مدتی که حرکت آن کندشونده است، به دست آورید، سپس جابه‌جایی و زمان حرکت را در بازه‌ای که خودرو حرکت یکنواخت داشته است، حساب کنید.

درس Box

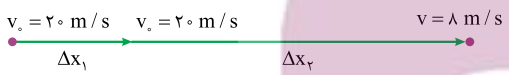
در حرکت روی خط راست، وقتی خودرو با سرعت ثابتی در حرکت است و راننده مانعی را در مقابل خود می‌بیند و ترمز می‌گیرد، از لحظهٔ مشاهدهٔ مانع تا لحظه‌ای که فرایند ترمز شروع می‌شود، زمانی طول می‌کشد که به مدت‌زمان واکنش راننده معروف است. گرچه این زمان نسبتاً کوتاه است، اما در همین مدت کوتاه، خودرو با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.



مثلاً در شکل فوق، راننده هنگام عبور از نقطهٔ A، مانع را در نقطهٔ C مشاهده می‌کند، سپس در نقطهٔ B فرایند ترمز شروع می‌شود و در نقطهٔ C خودرو به مانع می‌رسد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به درس‌باکس، ابتدا جابه‌جایی خودرو در مرحلهٔ دوم حرکت را به دست می‌آوریم. در این مرحله خودرو با شتاب ثابت a، حرکت کندشونده دارد و جابه‌جایی آن Δx_2 است:



$$v_0 = 72\ km/h = 72 \div 3/6 = 20\ m/s$$

حرکت مرحلهٔ دوم به صورت کندشونده و در جهت مثبت است، بنابراین $a < 0$ است.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 8^2 - 20^2 = 2(-4)\Delta x_2$$

$$\Rightarrow 64 - 400 = -8\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{-336}{-8} = 42\ m$$

گام دوم: جابه‌جایی خودرو در مرحلهٔ اول حرکت را نیز به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 52 \Rightarrow \Delta x_1 + 42 = 52 \Rightarrow \Delta x_1 = 10\ m$$

گام سوم: در مرحلهٔ اول، خودرو با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بر این اساس، زمان واکنش راننده (Δt_1) را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_1 = v_0 \Delta t_1 \Rightarrow 10 = 20\,\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = 0/5\ s$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

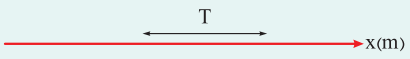
۵۷ متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست در حرکت است. اگر جابه‌جایی متحرک در ۳ ثانیهٔ چهارم حرکتش به اندازهٔ ۲۷ متر بیشتر از جابه‌جایی آن در ۳ ثانیهٔ دوم حرکتش باشد، شتاب این حرکت چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵
۳) ۳ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

در حرکت با شتاب ثابت a و سرعت اولیهٔ v_0 روی محور x، جابه‌جایی متحرک در T ثانیهٔ n اُم حرکت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\Delta x = (n - 0/5)aT^2 + v_0 T$$

مثلاً جابه‌جایی در دو ثانیهٔ سوم حرکت $(n = 3, T = 2\,s)$ برابر است با: $\Delta x = 2/5\,a \times 4 + v_0 \times 2 = 10a + 2v_0$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک رابطهٔ مطرح‌شده در درس‌باکس، جابه‌جایی متحرک در ۳ ثانیهٔ دوم حرکتش (Δx) و جابه‌جایی آن در ۳ ثانیهٔ چهارم حرکتش $(\Delta x')$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = (n - 0/5)aT^2 + v_0 T$$

$$n = 4, T = 3\,s \Rightarrow \Delta x' = (4 - 0/5)a(3)^2 + v_0 \times 3 \Rightarrow \Delta x' = 3/5a \times 9 + 3v_0$$

$$n = 2, T = 3\,s \Rightarrow \Delta x = (2 - 0/5)a(3)^2 + v_0 \times 3 \Rightarrow \Delta x = 1/5a \times 9 + 3v_0$$

گام دوم: اختلاف Δx و $\Delta x'$ را برابر با ۲۷ m قرار می‌دهیم و از آن‌جا شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x' - \Delta x = 27 \Rightarrow 3/5a \times 9 + 3v_0 - (1/5a \times 9 + 3v_0) = 27$$

$$\Rightarrow 2a \times 9 = 27 \Rightarrow a = \frac{27}{18} = 1/5\,m/s^2$$

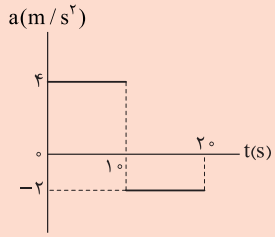
کنکور

متحرکی در لحظهٔ $t = 0\,s$ با شتاب ثابت از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. جابه‌جایی این متحرک در n ثانیهٔ سوم، چند برابر جابه‌جایی در n ثانیهٔ دوم است؟ *(سؤال ۴۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)*

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $2n$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۸ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t = ۰$، سرعت متحرک $\vec{v} = (-۲۰\ m/s)\vec{i}$ باشد، مسافتی که متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۵\ s$ تا $t_۲ = ۱۵\ s$ طی می‌کند، چند متر است؟



۱) ۱۲۵
۲) ۱۵۰
۳) ۱۷۵
۴) ۲۰۰

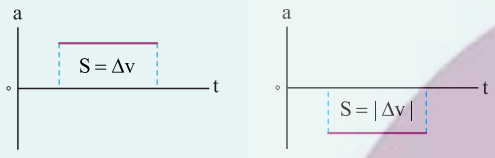
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

نمودار شتاب ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

۱) این نمودار به صورت یک خط افقی موازی محور زمان است.

۲) مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان، در هر بازهٔ زمانی، برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازه است $(S = \Delta v)$. برای قسمتی از نمودار که بالای محور زمان قرار می‌گیرد، $\Delta v > ۰$ و برای قسمتی از نمودار که زیر محور زمان قرار می‌گیرد، $\Delta v < ۰$ است.



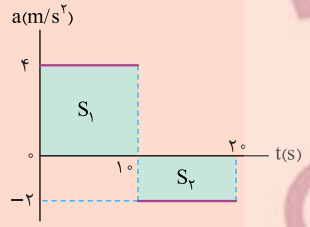
۳) اگر نمودار شتاب ـ زمان، شامل دو یا چند مرحلهٔ مختلف باشد که هر کدام شتاب ثابت خود را دارند، می‌توان نوشت:

کل $\Delta v = \Delta v_۱ + \Delta v_۲ + \cdots$

۴) اگر سرعت اولیه معلوم باشد، می‌توان نمودار سرعت ـ زمان را براساس نمودار شتاب ـ زمان رسم نمود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک مساحت سطح محدود بین نمودار a ـ t و محور زمان، تغییرات سرعت متحرک در هر مرحله از حرکت را به دست می‌آوریم و براساس آن، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

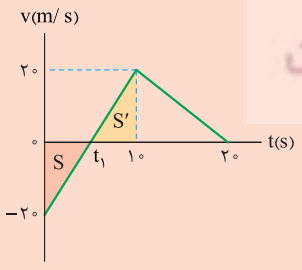


$$S_۱ = \Delta v_۱ = ۴(۱۰ - ۰) = ۴۰\ m/s$$

$$v_{t=۱۰\,s} = v_۰ + \Delta v_۱ = -۲۰ + ۴۰ = ۲۰\ m/s$$

$$S_۲ = \Delta v_۲ = -۲(۲۰ - ۱۰) = -۲۰\ m/s$$

$$v_{t=۲۰\,s} = v_{t=۱۰\,s} + \Delta v_۲ = ۲۰ + (-۲۰) = ۰$$



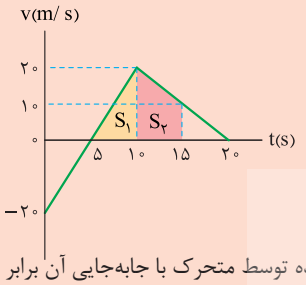
گام دوم: با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث S و S′، نمودار سرعت ـ زمان در لحظهٔ $t_۱ = ۵\ s$، محور t را قطع می‌کند. از طرفی چون لحظهٔ $t_۲ = ۱۵\ s$ دقیقاً در وسط بازهٔ زمانی ۱۰ s تا ۲۰ s قرار دارد، سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$ برابر با سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

یعنی داریم:

$$v_{t=15\,s}=\frac{v_{t=10\,s}+v_{t=20\,s}}{2}=\frac{20+0}{2}=10\,m/s$$

گام سوم: یک بار دیگر نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم و مساحت محدود بین این نمودار و محور زمان را در بازهٔ زمانی $t_1=5\,s$ تا $t_2=15\,s$ به دست می‌آوریم. قدرمطلق این مساحت، همان مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی فوق است.



$$\Delta x=S_1+S_2=\frac{(10-5)20}{2}+\frac{(20+10)(15-10)}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta x=50+75=125\,m$$

از آن‌جا که در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 جهت حرکت متحرک تغییر نکرده است، مسافت طی‌شده توسط متحرک با جابه‌جایی آن برابر است و داریم:

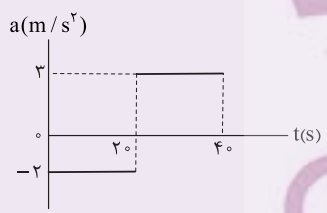
$$\ell=\Delta x=125\,m$$

نکته در بازهٔ زمانی $5\,s$ تا $15\,s$ شتاب ثابت نیست؛ بنابراین برای محاسبهٔ جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی نمی‌توانیم از روابط حرکت با شتاب ثابت استفاده کنیم، مگر آن‌که حرکت را در دو بخش $5\,s$ تا $10\,s$ و همچنین $10\,s$ تا $15\,s$ جداگانه تحلیل کنیم و جابه‌جایی‌های دو مرحله را با هم جمع کنیم.

کنکور

نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t=0\,s$، سرعت متحرک $\vec{v}=(20\,m/s)\vec{i}$ باشد، مسافتی که متحرک در ۲۰ ثانیهٔ دوم طی می‌کند، چند متر است؟

(سؤال ۵۲ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)



۱) ۴۰۰

۲) ۲۰۰

۳) $\frac{1000}{3}$

۴) $\frac{2000}{3}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ در لحظهٔ $t=0$، خودروی A با سرعت ثابت $(20\ m/s)\vec{i}$ در حال عبور از مکان $x_A=-10\ m$ است و خودروی B از حال سکون و با شتاب ثابت $(2\ m/s^2)\vec{i}$ از مکان $x_B=26\ m$ شروع به حرکت می‌کند. مکانی که دو متحرک برای دومین بار از کنار هم عبور می‌کنند، برحسب متر کدام است؟

۱) $30\vec{i}$ ۲) $126\vec{i}$

۳) $190\vec{i}$ ۴) $350\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint معادلهٔ مکان هر یک از دو خودروی A و B را جداگانه نوشته و آن‌ها را با هم برابر قرار دهید تا لحظه‌های عبور آن‌ها از کنار یکدیگر به دست آید، سپس در لحظهٔ دومین عبور از کنار هم، کافی است مکان یکی از آن‌ها را پیدا کنید.

درس Box

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت روی محور x:

$$x=vt+x_0$$

x: مکان متحرک در لحظهٔ t (m)

x_0: مکان اولیه یا مبدأ حرکت، یعنی مکان متحرک در لحظهٔ $t=0$ (m)

v: سرعت متحرک (m/s)

t: زمان (s)

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت روی محور x:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

x: مکان متحرک در لحظهٔ t (m)

x_0: مکان اولیه یا مبدأ حرکت، یعنی مکان متحرک در لحظهٔ $t=0$ (m)

v_0: سرعت اولیه یا سرعت متحرک در لحظهٔ $t=0$ (m/s)

a: شتاب حرکت (m/s^2)

t: زمان (s)

هرگاه دو متحرک در لحظه‌ای به هم برسند یا از کنار هم بگذرند، می‌توان در آن لحظه، معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را مساوی با هم قرار داد و مجهول مورد نظر را به دست آورد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: خودروی A با سرعت ثابت حرکت می‌کند، بنابراین معادلهٔ مکان آن به صورت زیر است:

$$x_A=v_at+x_{0A}\Rightarrow x_A=20t-10$$

خودروی B با شتاب ثابت حرکت می‌کند، بنابراین معادلهٔ مکان آن به صورت زیر است:

$$x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{0B}t+x_{0B}\xrightarrow[v_{0B}=0,\ x_{0B}=26\ m]{a_B=2\ m/s^2}x_B=\frac{1}{2}\times 2t^2+26=t^2+26$$

گام سوم: معادلهٔ مکان دو خودرو را با هم برابر قرار می‌دهیم تا لحظه‌های عبور آن‌ها از کنار یکدیگر را به دست آوریم:

$$x_A=x_B\Rightarrow 20t-10=t^2+26\Rightarrow t^2-20t+36=0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t-18)=0\Rightarrow t_1=2\ s,\ t_2=18\ s$$

در لحظهٔ t_1، اولین عبور دو خودرو از کنار هم و در لحظهٔ t_2، دومین عبور آن‌ها از کنار هم رخ می‌دهد.

گام چهارم: مکان خودروی A را در لحظهٔ t_2 به دست می‌آوریم، مکان خودروی B نیز همان است.

$$x_B=x_A=20t_2-10=20\times 18-10=360-10=350\ m$$

$$\Rightarrow \vec{x}_A=\vec{x}_B=(350\ m)\vec{i}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

کتاب درسی

خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبزشدن چراغ، خودرو با شتاب $2\ m/s^2$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت $36\ km/h$ از آن سبقت می‌گیرد.

(فیزیک (۳) - تمرین ۲۱ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

الف) در چه لحظه و در چه مکانی خودرو به کامیون می‌رسد؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۰ **دو متحرک A و B روی خط راست به ترتیب با سرعت‌های ثابت ۱۲ m/s و ۶ m/s در یک جهت در حال حرکت هستند. از لحظه‌ای که متحرک A از متحرک B سبقت می‌گیرد، متحرک B به مدت ۹ s با شتاب ۱ m/s² سرعت خود را تا v′ افزایش داده، سپس با سرعت ثابت v′ به حرکتش ادامه می‌دهد. فاصلهٔ بین دو نقطه‌ای که این دو متحرک از کنار هم عبور کرده‌اند، چند متر است؟**

۱) ۱۳۵ ۲) ۱۶۲

۳) ۲۷۰ ۴) ۳۷۸

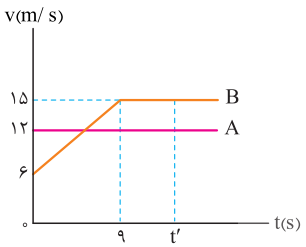
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سرعت متحرک B را ۹ s پس از آن‌که دو متحرک برای اولین بار از کنار هم عبور کرده‌اند، به دست می‌آوریم:

$$v_B = a_B t + v_{\circ B} = ۱\times ۹ + ۶ = ۱۵\ m/s$$

گام دوم: براساس اطلاعات داده‌شده در صورت سؤال، نمودار سرعت ـ زمان آن‌ها را رسم می‌کنیم. اگر دو متحرک در لحظهٔ t′ برای دومین بار از کنار هم عبور کرده باشند، جابه‌جایی آن‌ها نسبت به لحظهٔ $t = ۰$ باید برابر باشد، یعنی مساحت سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان این دو متحرک در این بازهٔ زمانی باید یکسان باشد.



$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow ۱۲t' = \frac{(۱۵+۶)\times ۹}{۲} + (t'-۹)۱۵$$

$$\Rightarrow ۱۲t' = ۹۴/۵ + ۱۵t' - ۱۳۵ \Rightarrow ۴۰/۵ = ۳t' \Rightarrow t' = ۱۳/۵\ s$$

گام سوم: جابه‌جایی متحرک A را در لحظهٔ t′ به دست می‌آوریم (جابه‌جایی متحرک B نیز در لحظهٔ t′ همین است):

$$\Delta x_A = v_A t' = ۱۲\times ۱۳/۵ = ۱۶۲\ m$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۱ گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۱۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. نسبت سرعت متوسط گلوله در ۲ ثانیهٔ اول حرکتش به سرعت متوسط آن در ۲ ثانیهٔ آخر حرکتش قبل از برخورد با سطح زمین، کدام است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

معادله‌های جابه‌جایی و سرعت در حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه:

$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$: Δy جابه‌جایی (m)

$v = -gt$: g شتاب گرانش در سطح زمین $(m/s^۲)$

: t زمان سقوط (s)

: v سرعت در لحظهٔ t (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کل زمان سقوط گلوله را از لحظهٔ رهاشدن تا لحظهٔ رسیدن به سطح زمین به دست می‌آوریم:

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow -۱۸۰ = -\frac{۱}{۲}(۱۰)t^۲ \Rightarrow t^۲ = ۳۶ \Rightarrow t = ۶\ s$$

گام دوم: سرعت متوسط گلوله را در دو ثانیهٔ اول حرکت آن به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} v_۰ = ۰ \\ v = -gt \xrightarrow{t=۲\ s} v_{t=۲\ s} = -۱۰\times ۲ = -۲۰\ m/s \end{array}\right\} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_۰ + v_{t=۲\ s}}{۲} = \frac{۰-۲۰}{۲} = -۱۰\ m/s$$

گام سوم: سرعت متوسط گلوله را در دو ثانیهٔ آخر حرکت آن به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} v_{t=۴\ s} = -۱۰\times ۴ = -۴۰\ m/s \\ v_{t=۶\ s} = -۱۰\times ۶ = -۶۰\ m/s \end{array}\right\} \Rightarrow v'_{av} = \frac{v_{t=۴\ s} + v_{t=۶\ s}}{۲} = \frac{-۴۰-۶۰}{۲} \Rightarrow v'_{av} = -۵۰\ m/s$$

گام چهارم: نسبت خواسته‌شده در صورت سؤال را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{v_{av}}{v'_{av}} = \frac{-۱۰}{-۵۰} = \frac{۱}{۵}$$

تیزپایی

وقتی گلوله‌ای حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه دارد، مسافت‌های طی‌شده توسط آن در ثانیه‌های متوالی حرکت عبارت‌اند از: ۵ m، ۱۵ m، ۲۵ m، ۳۵ m، ۴۵ m، ۵۵ m و ...

با توجه به متن سؤال، در دو ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-(۱۵+۵)}{۲-۰} = -۱۰\ m/s$$

در دو ثانیهٔ آخر حرکت نیز می‌توان نوشت:

$$v'_{av} = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{-(۴۵+۵۵)}{۶-۴} = -۵۰\ m/s$$

$$\frac{v_{av}}{v'_{av}} = \frac{-۱۰}{-۵۰} = \frac{۱}{۵}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۲ سنگ کوچکی را در شرایط خلأ از بالای ساختمانی رها می‌کنیم. اگر این سنگ در ۰/۵ s سوم حرکت خود، ۶ m سقوط کند، شتاب گرانش در این محیط چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹/۸
۳) ۹/۶ ۴) ۹/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اگر جسمی در شرایط خلأ سقوط کند و شتاب گرانش در آن محل g' باشد، مسافت طی‌شده در T ثانیهٔ n اُم حرکت آن برابر است با:

$$\ell = (n - ۰/۵)g'T^۲$$

ℓ : مسافت (m)

پاسخ خیلی تشریحی

این سنگ در ۰/۵ s سوم حرکت خود، ۶ m سقوط کرده است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\ell = (n - ۰/۵)g'T^۲ \xrightarrow[T=۰/۵\ s]{n=۳,\ \ell=۶\ m} ۶ = (۳ - ۰/۵)g'(۰/۵)^۲$$

$$\Rightarrow ۶ = ۲/۵g'(۰/۲۵) \Rightarrow ۲۴ = ۲/۵g' \Rightarrow g' = ۹/۶\ m/s^۲$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۳ دو گلولهٔ A و B به ترتیب از ارتفاع‌های h و $\frac{۴}{۹}h$ از سطح زمین در شرایط خلأ با اختلاف زمان ۱s رها می‌شوند و با اختلاف زمانی ۳ s به سطح زمین می‌رسند. اگر گلولهٔ B، ۱s بعد از گلولهٔ A رها شده باشد، سرعت متوسط گلولهٔ A از لحظهٔ رهاشدن تا رسیدن به محل رهاشدن گلولهٔ B، چند برابر سرعت متوسط گلولهٔ B در مدت سقوطش تا زمین است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

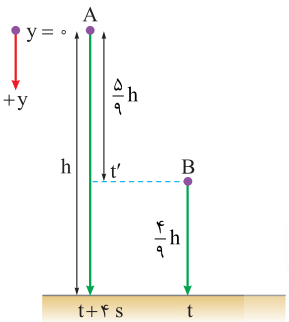
۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای مقایسهٔ زمان سقوط گلوله‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} h=\frac{۱}{۲}gt^{۲}_{A} \\ \frac{۴}{۹}h=\frac{۱}{۲}gt^{۲}_{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{h}{\frac{۴}{۹}h}=\frac{t^{۲}_{A}}{t^{۲}_{B}} \Rightarrow \frac{۹}{۴}=(\frac{t_A}{t_B})^{۲} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \frac{t_A}{t_B}=\frac{۳}{۲}$$



پس زمان سقوط گلولهٔ A بیشتر از گلولهٔ B است. با توجه به داده‌های سؤال برای این‌که این اتفاق بیفتد، باید گلولهٔ A، ۳ s دیرتر از گلولهٔ B به سطح زمین برسد. از طرفی گلولهٔ A، ۱s زودتر از گلولهٔ B رها شده بود؛ بنابراین زمان سقوط گلولهٔ A در مجموع ۴ s بیشتر از گلولهٔ B است. داریم:

$$\frac{t_A}{t_B}=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{t_A=t_B+۴\,s} \frac{t_B+۴}{t_B}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲t_B+۸=۳t_B \Rightarrow t_B=۸\,s \ , \ t_A=۱۲\,s$$

گام دوم: زمان سقوط و سرعت متوسط گلولهٔ A را از لحظهٔ رهاشدن تا رسیدن به محل رهاشدن گلولهٔ B به دست می‌آوریم:

$$\frac{\frac{۵}{۹}h}{h}=\frac{\frac{۱}{۲}gt'^{۲}}{\frac{۱}{۲}gt^{۲}_{A}} \Rightarrow \frac{۵}{۹}=\frac{t'^{۲}}{t^{۲}_{A}} \xrightarrow{t_A=۱۲\,s} \frac{\sqrt{۵}}{۳}=\frac{t'}{۱۲} \Rightarrow t'=۴\sqrt{۵}\,s$$

$$v_{(av)_A}=\frac{\frac{۵}{۹}h}{t'}=\frac{\frac{۵}{۹}h}{۴\sqrt{۵}}=\frac{۵h}{۳۶\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}h}{۳۶}$$

گام سوم: سرعت متوسط گلولهٔ B را نیز در مدت‌زمان سقوطش حساب می‌کنیم:

$$v_{(av)_B}=\frac{\frac{۴}{۹}h}{t_B} \xrightarrow{t_B=۸\,s} v_{(av)_B}=\frac{\frac{۴}{۹}h}{۸}=\frac{۴h}{۷۲}=\frac{h}{۱۸}$$

گام چهارم: نسبت خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{v_{(av)_A}}{v_{(av)_B}}=\frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳۶}h}{\frac{h}{۱۸}}=\frac{۱۸\sqrt{۵}}{۳۶}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای سرفرازی

۶۴ خودرویی با تندی $54\ km/h$ در حرکت است. تندی این خودرو چند متر بر ثانیه افزایش یابد تا انرژی جنبشی آن ۹ برابر شود؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint رابطهٔ انرژی جنبشی را به صورت نسبتی بنویسید و با توجه به این‌که $K_2 = 9K_1$ است، به راحتی تندی خودرو در حالت دوم و سپس تغییرات تندی را به دست آورید.

درس Box **انرژی جنبشی:** انرژی وابسته به حرکت یک جسم را انرژی جنبشی یا حرکتی می‌نامیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

K: انرژی جنبشی (J)

m: جرم (kg)

v: تندی (m/s)

- انرژی جنبشی همواره مثبت است و کمیتی نرده‌ای محسوب می‌شود.
- برای مقایسهٔ انرژی جنبشی در دو حالت مختلف یا برای دو جسم مختلف می‌توان نوشت:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** تندی اولیهٔ خودرو را برحسب m/s به دست می‌آوریم:

$$v_1 = 54\ km/h \div 3/6 = 15\ m/s$$

گام دوم: نسبت انرژی جنبشی جسم در دو حالت را می‌نویسیم تا تندی خودرو در حالت دوم به دست آید:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \xrightarrow[K_2=9K_1]{m_2=m_1} 9 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = 3$$

$$\xrightarrow{v_1=15\ m/s} \frac{v_2}{15} = 3 \Rightarrow v_2 = 45\ m/s$$

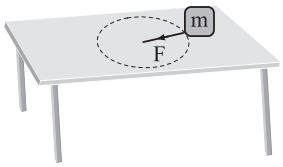
گام سوم: تغییر تندی خودرو را حساب می‌کنیم:

$$v_2 - v_1 = 45 - 15 = 30\ m/s$$

گول نخوری اگر بعد از به دست آوردن v_2، گام سوم را طی نکنیم و همان v_2 را جواب آخر بدانیم، در دام گزینهٔ (۴) می‌افتیم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۵ مطابق شکل، جسمی به جرم **m** به وسیلهٔ یک تکه نخ سبک به طول **L**، روی سطح افقی یک میز بدون اصطکاک بر روی یک مسیر دایره‌ای می‌چرخد. اگر نیرویی که نخ به جسم وارد می‌کند، دارای اندازهٔ ثابت **F** باشد، در مدتی که جسم یک‌چهارم محیط دایره را طی می‌کند، کار این نیرو کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}FL$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}FL$

۳) $\frac{۱}{۲}F\pi L$

۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

کار:

هرگاه نیرویی بر یک جسم وارد شده و جسم بر اثر نیرو جابه‌جا شود، می‌گوییم آن نیرو بر روی جسم کار انجام داده است.

کار نیروی ثابت $\vec{F}$ در جابه‌جایی $\vec{d}$، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

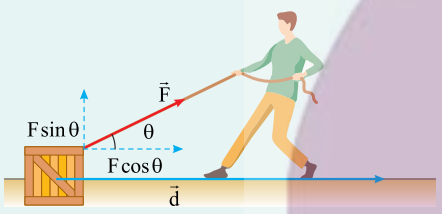
$$W_F = Fd\cos\theta$$

W_F : کار نیروی F (J)

F: اندازهٔ نیرو (N)

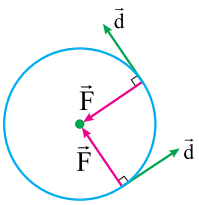
d: اندازهٔ جابه‌جایی (m)

θ : زاویهٔ بین $\vec{F}$ و $\vec{d}$



پاسخ خیلی تشریحی ✔

نیروی F که جسم را در مسیر دایره‌ای خود حفظ می‌کند، در هر لحظه در امتداد یکی از شعاع‌های مسیر بوده و در بازه‌های زمانی بسیار کوچک، بر مسیر حرکت عمود است.



$$W_F = Fd\cos\theta \xrightarrow[\cos۹۰^\circ=۰]{\theta=۹۰^\circ} W_F = ۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۶ چتربازی به جرم کل $75\ kg$ از بالونی که در ارتفاع $800\ m$ از سطح زمین است، با تندی $1/5\ m/s$ به بیرون بالون می‌پرد و با تندی $4/5\ m/s$ به سطح زمین می‌رسد. کار نیروی وزن در طول این مسیر چند کیلوژول است؟ $(g = 9/8\ N/kg)$

۱) ۵۸۸ ۲) ۶۰۰
۳) ۶۷۵ ۴) ۵۷۵

مشاوره گاهی داده‌های اضافی در سؤالات دیده می‌شوند که هیچ کاربردی در حل آن سؤال ندارند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint کافی است به کمک رابطهٔ $W_{mg} = mgh$ کار نیروی وزن را به دست آورید.

درس Box

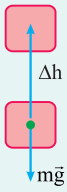
کار نیروی وزن (W_{mg}): $W_{mg} = -mg\Delta h$

m: جرم (kg)

g: شتاب گرانش زمین $(g = 9/8 \simeq 10\ N/kg)$

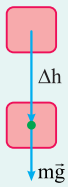
$\Delta h = h_2 - h_1$: جابه‌جایی قائم (m)

الف) اگر جسم به اندازهٔ Δh، رو به بالا جابه‌جا شود:



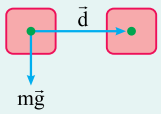
$\Delta h > 0 \Rightarrow W_{mg} < 0$

ب) اگر جسم به اندازهٔ Δh، رو به پایین جابه‌جا شود:



$\Delta h < 0 \Rightarrow W_{mg} > 0$

پ) اگر جسم به اندازهٔ d به صورت افقی جابه‌جا شود:



$\Delta h = 0 \Rightarrow W_{mg} = 0$

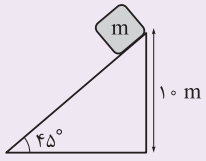
پاسخ خیلی تشریحی ✔ از آن‌جا که جسم رو به پایین حرکت کرده است، نیروی وزن و جابه‌جایی آن هم‌جهت هستند و کار نیروی وزن، مثبت است:

$W_{mg} = mg\Delta h = 75 \times 9/8 \times 800 = 588000\ J = 588\ kJ$

نکته تندی‌های اولیه و نهایی چترباز در تعیین کار نیروی وزن او هیچ تأثیری نداشتند.

کنکور مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $m = 2\ kg$ از بالای سطح شیبدار به پایین سطح می‌لغزد. اگر بزرگی نیروی اصطکاک در این مسیر $\frac{1}{4}$ بزرگی وزن جسم باشد، کار نیروی وزن در این جابه‌جایی چند ژول است؟ $(g = 10\ N/kg)$

(سؤال ۷۳ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)



۱) ۱۵۰
۲) ۲۰۰
۳) $150\sqrt{2}$
۴) $200\sqrt{2}$

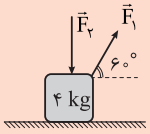
۶۷ در شکل زیر، جسم بر روی یک سطح افقی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و بعد از طی مسافت $10\ m$، سرعتش به $5\ m/s$ می‌رسد. اگر بزرگی نیروی اصطکاک $\frac{1}{3}$ بزرگی نیروی F_1 و هم‌اندازهٔ نیروی قائم F_2 باشد، اندازهٔ نیروی اصطکاک در این حرکت چند نیوتون است؟ (از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۵

۲) ۱۰

۳) ۱۵

۴) ۳۰



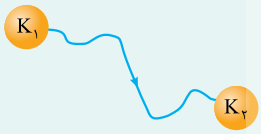
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint تغییرات انرژی جنبشی جسم را به دست آورید و با توجه به قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، آن را برابر با جمع جبری کارهای دو نیروی $\vec{F}_1$ و اصطکاک $(\vec{f}_k)$ قرار دهید.

درس Box

قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی:

کار کل انجام‌شده روی یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است.



$$W_t = K_2 - K_1$$

W_t: کار کل (کار برایند نیروها) (J)

K_1: انرژی جنبشی در وضعیت ۱ (J)

K_2: انرژی جنبشی در وضعیت ۲ (J)

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

K: انرژی جنبشی (J)

m: جرم (kg)

v: تندی (m/s)

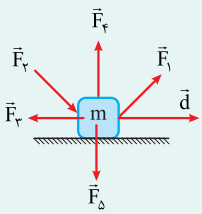
اگر $W_t > 0$ باشد. $\Leftarrow K_2 > K_1 \Leftarrow$ جسم در پایان جابه‌جایی، تندتر از آغاز آن حرکت می‌کند.

اگر $W_t = 0$ باشد. $\Leftarrow K_2 = K_1 \Leftarrow$ تندی جسم در دو نقطهٔ آغاز و پایان یکسان است.

اگر $W_t < 0$ باشد. $\Leftarrow K_2 < K_1 \Leftarrow$ جسم در پایان جابه‌جایی، کندتر از آغاز آن حرکت می‌کند.

کار یک کمیت نرده‌ای است، پس به صورت نرده‌ای نیز جمع می‌شود، یعنی کار برایند نیروهای وارد بر یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با جمع جبری کار هر یک از نیروهای وارد بر جسم در این جابه‌جایی، برابر است.

مثلاً در شکل مقابل، وقتی جسم به سمت راست جابه‌جا می‌شود:



$W_{F_1} > 0$

$W_{F_2} > 0$

$W_{F_3} < 0$

$W_{F_4} = 0$

$W_{F_5} = 0$

$W_t = W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_3} + W_{F_4} + W_{F_5}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در جابه‌جایی این جسم روی سطح افقی، فقط دو نیروی $\vec{F}_1$ و اصطکاک $(\vec{f}_k)$ کار انجام می‌دهند. کار سایر نیروها مانند وزن و $\vec{F}_2$ برابر با صفر است؛ زیرا این دو نیرو بر جابه‌جایی عمود هستند.

گام دوم: قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی را برای این جسم می‌نویسیم و بزرگی نیروی $\vec{F}_1$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta K = W_t \Rightarrow K_2 - K_1 = W_{F_1} + W_{f_k} \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = F_1 d\cos\theta_1 - f_k d$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 4(5^2 - 0) = F_1 \times 10\cos 60^\circ - f_k \times 10 \xrightarrow[\cos 60^\circ = 0/5]{f_k = \frac{1}{3}F_1 = F_2} 50 = F_1 \times 5 - \frac{10}{3}F_1$$

$$\Rightarrow 50 = \frac{5}{3}F_1 \Rightarrow F_1 = 30\ N$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال، نیروی اصطکاک است:

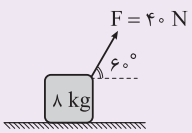
$$f_k = \frac{1}{3}F_1 = \frac{1}{3}\times 30 = 10\ N$$

گول نخوری ✘ اگر به خواستهٔ سؤال دقت نکنید و به دست آوردن نیروی F_1 را پایان حل خود بدانید، در دام گزینهٔ (۴) می‌افتید.

کنکور

در شکل زیر، نیروی ثابت F، جسم را روی سطح افقی از حال سکون به حرکت درمی‌آورد و بعد از طی مسافت ۵ متر، سرعت جسم را به ۲/۵ m/s می‌رساند. بزرگی نیروی اصطکاک در این حرکت چند نیوتون است؟

(سؤال ۷۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ ـ نوبت اول)



۱) ۲۰
۲) ۱۶
۳) ۱۵
۴) ۱۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۸ برای آن‌که تندی خودرویی از حال سکون به v برسد، باید کار کل W_{1t} روی آن انجام شود و برای آن‌که تندی آن از v به $2v$ برسد، باید کار کل W_{2t} روی آن انجام شود. نسبت $\frac{W_{1t}}{W_{2t}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

مشاوره این سؤال، دقیقاً تمرین ۳ ـ ۹ کتاب در صفحهٔ ۶۴ است. تمرین‌های کتاب را جدی بگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint به کمک قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی در دو حالت مطرح‌شده، W_{1t} و W_{2t} را جداگانه به دست آورید و بر هم تقسیم کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، W_{1t} را محاسبه می‌کنیم:

$$W_{1t} = K_1 - K_0 = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

گام دوم: به طور مشابه، W_{2t} را نیز به دست می‌آوریم:

$$W_{2t} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(2v)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}mv^2$$

گام سوم: نسبت خواسته‌شده در سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\frac{W_{1t}}{W_{2t}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{3}{2}mv^2} = \frac{1}{3}$$

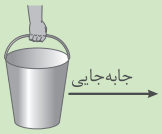
کنکور

برای آن‌که تندی اسکی‌بازی از صفر به v_1 برسد، باید کل کار انجام‌شده روی آن ۱۲۰ J شود. اگر تندی اسکی‌باز از v_1 به $4v_1$ برسد، در این مرحله کل کار انجام‌شده روی آن چند ژول است؟ *(سؤال ۴۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ (خارج از کشور))*

۱) ۳۶۰ ۲) ۹۶۰
۳) ۱۹۲۰ ۴) ۱۸۰۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۹ شخصی مطابق شکل، سطلی را در دست دارد و سطل بر روی سطح در یک مسیر افقی به اندازهٔ **d** جابه‌جا می‌شود. کدام موارد الزاماً درست است؟



الف) از آن‌جایی که جابه‌جایی سطل افقی است، کار نیروی دست شخص صفر است.

ب) اگر کار کل انجام‌شده روی سطل صفر باشد، تندی حرکت در طی آن جابه‌جایی ثابت بوده است.

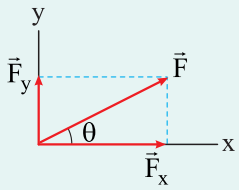
پ) کار نیروی وزن صفر است.

۱) الف ـ ب
۲) ب و پ
۳) پ
۴) الف ـ ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

تجزیهٔ نیرو: اگر $\vec{F}_x$ و $\vec{F}_y$ مؤلفه‌های بردار $\vec{F}$ روی محورهای x و y باشند، می‌توان نوشت:

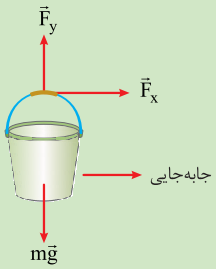


$$F_x = F\cos\theta$$
$$F_y = F\sin\theta$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

موارد مطرح‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) نادرست است؛ اگر $\vec{F}_x$ و $\vec{F}_y$ مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی دست شخص باشند، نیروی $\vec{F}_y$ هم‌اندازه با وزن جسم و در خلاف جهت آن است. نیروی $\vec{F}_y$ در این جابه‌جایی کاری انجام نمی‌دهد، زیرا بر جابه‌جایی عمود است، اما اگر تندی سطل در هنگام حرکت تغییر کند، نیروی $\vec{F}_x$ کار انجام می‌دهد.



ب) نادرست است؛ چون ممکن است، تندی سطل در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی حرکت، با هم برابر باشند و کار کل صفر شود، اما در بین راه تندی سطل تغییر کرده باشد.

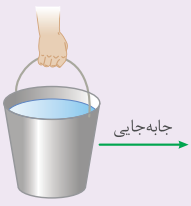
پ) درست است؛ زیرا نیروی وزن بر جابه‌جایی سطل که افقی است، به صورت عمود وارد می‌شود.

$$W_{mg} = mgd\cos 90^\circ \xrightarrow{\cos 90^\circ = 0} W_{mg} = 0$$

بنابراین فقط مورد «پ» درست است.

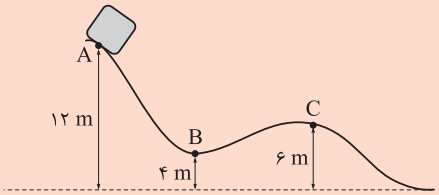
کتاب درسی

اگر مطابق شکل زیر سطلی را در دست نگه دارید، آیا نیروی دست شما هنگامی که با تندی ثابت در مسیر افقی قدم می‌زنید روی سطل کاری انجام می‌دهد؟ اگر تندی حرکت شما در طول مسیر کم و زیاد شود چطور؟ پاسخ خود را در هر مورد توضیح دهید. از مقاومت هوا در مقابل حرکت سطل، چشم‌پوشی کنید. *(فیزیک (۱) ـ تمرین ۷ صفحهٔ ۷۹ کتاب درسی)*



ایران توشه

۷۰ مطابق شکل، جسمی به جرم m از نقطهٔ A بدون تندی اولیه رها می‌شود و روی سطح بدون اصطکاک سر می‌خورد. تندی جسم هنگام عبور از نقطهٔ B، چند برابر تندی جسم هنگام عبور از نقطهٔ C است؟



۱) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

۲) $\sqrt{\frac{۴}{۳}}$

۳) $\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اصل پایستگی انرژی مکانیکی را یک بار بین دو نقطهٔ A و B و بار دیگر بین دو نقطهٔ A و C بنویسید و نسبت خواسته‌شده را به دست آورید.

درس Box

۱) انرژی جنبشی جسمی به جرم m که با تندی v در حال حرکت است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{۱}{۲} m v^۲$$

(J) انرژی جنبشی ← K
(kg) جرم جسم ← m
(m/s) تندی جسم ← v

۲) انرژی پتانسیل گرانشی: اگر جسمی به جرم m در ارتفاع h نسبت به سطح زمین قرار بگیرد، آن‌گاه انرژی پتانسیل گرانشی آن نسبت به سطح زمین از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$U = mgh$$

(J) انرژی پتانسیل گرانشی ← U
(kg) جرم ← m
(m) ارتفاع ← h
(m/s²) شتاب گرانش ← g

۳) به مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل یک جسم، انرژی مکانیکی آن می‌گوییم.

$$E = K + U$$

(J) انرژی مکانیکی ← E
(J) انرژی جنبشی ← K
(J) انرژی پتانسیل ← U

۴) اصل پایستگی انرژی مکانیکی: در شرایطی که بتوان اثر ناشی از نیروهای اتلافی مانند اصطکاک و مقاومت هوا را نادیده گرفت، مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل جسم در نقطه‌های مختلف مسیر حرکت، با هم برابر و پایسته می‌ماند.

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲$$

$E_۱$: انرژی مکانیکی در حالت اول (J)

$E_۲$: انرژی مکانیکی در حالت دوم (J)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: رابطهٔ اصل پایستگی انرژی مکانیکی را بین دو نقطهٔ A و B می‌نویسیم:

$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \xrightarrow{K_A = ۰} mgh_A = \frac{۱}{۲} m v_B^۲ + mgh_B$$

$$\xrightarrow[h_B = ۴\,m]{h_A = ۱۲\,m} ۱۲g = \frac{۱}{۲} v_B^۲ + ۴g \Rightarrow ۸g = \frac{۱}{۲} v_B^۲ \Rightarrow v_B^۲ = ۱۶\,g$$

گام دوم: رابطهٔ اصل پایستگی انرژی مکانیکی را بین دو نقطهٔ A و C می‌نویسیم:

$$E_A = E_C \Rightarrow K_A + U_A = K_C + U_C \xrightarrow{K_A = 0} mgh_A = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C$$

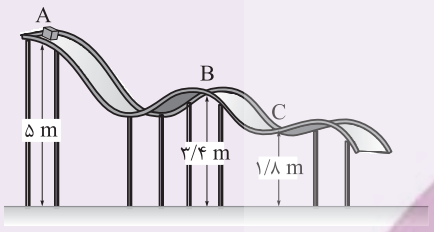
$$12g = \frac{1}{2}v_C^2 + 6g \Rightarrow 6g = \frac{1}{2}v_C^2 \Rightarrow v_C^2 = 12g$$

گام سوم: نسبت خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم:

$$\left(\frac{v_B}{v_C}\right)^2 = \frac{16g}{12g} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{v_B}{v_C} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

کنکور

جسمی به جرم m روی سطح بدون اصطکاکی مطابق شکل زیر، از نقطهٔ A رها می‌شود. تندی جسم در نقطهٔ C، چند برابر تندی آن در نقطهٔ B است؟ (سؤال ۱۸۵ کنکور تجربی ۱۴۰۱ (خارج از کشور))



۱) ۲

۲) $\frac{\sqrt{17}}{3}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) $\frac{17}{9}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۱ جسمی به جرم m را از سطح زمین به سمت هدفی در ارتفاع ۲ متری سطح زمین پرتاب می‌کنیم و جسم با تندی $2\ m/s$ به هدف برخورد می‌کند. اگر بزرگی کار نیروی مقاومت هوا تا رسیدن جسم به هدف، برابر ۵۶ درصد انرژی جنبشی اولیهٔ جسم باشد، تندی اولیهٔ جسم هنگام پرتاب چند متر بر ثانیه بوده است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) $5\sqrt{2}$ ۲) ۱۰
۳) $10\sqrt{2}$ ۴) ۲۰

مشاوره در حل تست‌های مربوط به کار و انرژی، اگر در ابتدای حل تست احساس کردید که جرم جسم داده نشده و سؤال قابل حل نیست، در اشتباه هستید، زیرا معمولاً در چنین مواردی جرم جسم از طرفین رابطهٔ محاسباتی حذف می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint به کمک رابطهٔ $E_2 - E_1 = W_f$ و حذف جرم از طرفین آن، تندی اولیهٔ جسم را به دست آورید.

درس Box

انرژی درونی:

انرژی درونی یک جسم، مجموع انرژی‌های ذره‌های تشکیل‌دهندهٔ آن است. هر چه تعداد ذرات سازندهٔ یک جسم و انرژی هر ذرهٔ آن بیشتر باشد، انرژی درونی آن نیز بیشتر است. مثلاً با گرم‌ترشدن یک جسم، انرژی هر ذرهٔ آن بیشتر شده و انرژی درونی آن بیشتر می‌شود.

کار و انرژی درونی:

اگر در طول مسیر یک جسم، نیروهای اتلافی مانند اصطکاک و مقاومت هوا بر جسم اثر کرده و روی آن کار منفی انجام دهند، بخشی از انرژی مکانیکی جسم به انرژی درونی جسم، سطح و هوا تبدیل می‌شود.

به عبارت دیگر انرژی مکانیکی جسم یا سامانه پایسته نمی‌ماند و بخشی از آن تلف می‌شود. این بخش تلف‌شده از بین نرفته، بلکه به انرژی درونی تبدیل شده است.

$$E_2 - E_1 = W_f < 0$$

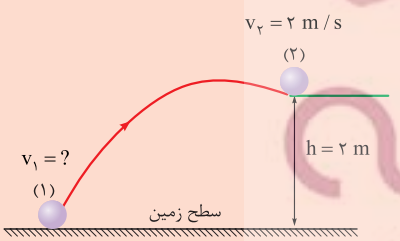
W_f : کار انجام‌شده توسط نیروهای اتلافی (J)

E_1 : انرژی مکانیکی جسم در حالت اول (J)

E_2 : انرژی مکانیکی جسم در حالت دوم (J)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل، انرژی پتانسیل جسم در نقطهٔ (۱) برابر صفر است. علاوه بر این، با توجه به متن سؤال می‌توان نوشت:



$$|W_f| = 0/56K_1 \xrightarrow{W_f < 0} W_f = -0/56\ K_1$$

گام دوم: قانون پایستگی انرژی را بین دو نقطهٔ (۱) و (۲) به کار می‌بریم و v_1 را پیدا می‌کنیم:

$$E_2 - E_1 = W_f \Rightarrow (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1^{\cancel{0}}) = -0/56\ K_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 = K_1 - 0/56K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m \times 2^2 + m \times 10 \times 2 = 0/44 \times \frac{1}{2}mv_1^2$$

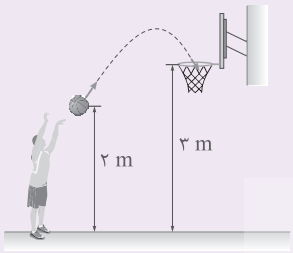
$$\Rightarrow 2 + 20 = 0/22v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = 100 \Rightarrow v_1 = 10\ m/s$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

کنکور

در شکل زیر، توپ با تندی اولیهٔ $8\ m/s$ پرتاب می‌شود. اگر کار نیروی مقاومت هوا تا رسیدن توپ به سبد، $-\frac{1}{8}K_0$ باشد، تندی توپ در لحظهٔ ورود به سبد، چند متر بر ثانیه است؟ (K_0 انرژی جنبشی اولیه و $g = 10\ m/s^2$ است.)

(سؤال ۲۰۸ کنکور تجربی ۱۴۰۱)



۱) $2\sqrt{2}$

۲) $4\sqrt{2}$

۳) ۵

۴) ۶

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۲ **گلوله‌ای از سطح زمین به طرف بالا پرتاب می‌شود. اگر تندی گلوله هنگام بازگشت به نقطهٔ پرتاب، نصف تندی اولیهٔ آن باشد، کار نیروی مقاومت هوا در کل مسیر چند برابر کار نیروی وزن گلوله در مسیر رفت تا نقطهٔ اوج است؟ (اندازهٔ نیروی مقاومت هوا در کل مسیر ثابت در نظر گرفته شود.)**

۱) ۶ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۶}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

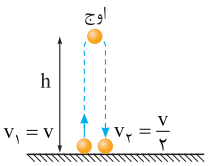
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی را یک بار هنگام رفت گلوله تا نقطهٔ اوج خود و بار دیگر هنگام برگشت گلوله از نقطهٔ اوج به نقطهٔ اولیه پرتاب بنویسید و از ترکیب آن‌ها، اندازهٔ نیروی مقاومت هوا را برحسب وزن جسم به دست آورید. سپس خواستهٔ مسئله را به راحتی پیدا کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تندی اولیهٔ پرتاب گلوله را v و تندی بازگشت به نقطهٔ پرتاب را $\frac{v}{۲}$ در نظر می‌گیریم. ارتفاع اوج گلوله را با h و اندازهٔ نیروی مقاومت هوا را با f نشان می‌دهیم. انرژی جنبشی گلوله در نقطهٔ اوج خود (K') برابر با صفر است.



گام دوم: قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی را یک بار هنگام رفت گلوله تا نقطهٔ اوج خود می‌نویسیم:

$$K' - K_۱ = W_f + W_{mg} \Rightarrow ۰ - \frac{۱}{۲}mv^۲ = -fh + (-mgh)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^۲ = fh + mgh \quad (۱)$$

گام سوم: قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی را بار دوم، هنگام برگشت گلوله از نقطهٔ اوج خود به نقطهٔ اولیهٔ پرتاب می‌نویسیم:

$$K_۲ - K' = W_f + W_{mg} \Rightarrow \frac{۱}{۲}m(\frac{v}{۲})^۲ - ۰ = -fh + mgh$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۸}mv^۲ = -fh + mgh \ (۲)$$

گام چهارم: از ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{۱}{۲}m v^۲ + \frac{۱}{۸}m v^۲ = ۲m gh \Rightarrow \frac{۵}{۸}v^۲ = ۲gh \Rightarrow v^۲ = \frac{۱۶}{۵}gh$$

گام پنجم: با جای‌گذاری در رابطهٔ (۱)، اندازهٔ نیروی مقاومت هوا را برحسب وزن آن حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}m \times \frac{۱۶}{۵}g h = f h + mg h \Rightarrow \frac{۸}{۵}mg = f + mg \Rightarrow f = \frac{۳}{۵}mg$$

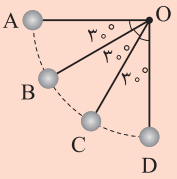
گام ششم: نسبت خواسته‌شده در سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{W_f}{W_{mg}} = \frac{-f(۲h)}{-mgh} \xrightarrow{f=\frac{۳}{۵}mg} \frac{\frac{۳}{۵}mg \times ۲}{mg} = \frac{۶}{۵}$$

(کل مسیر ← W_f، رفت ← W_{mg})

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۳ در شکل زیر، وزنه به نخی بسته شده است و در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. وقتی نخ در حالت افقی قرار دارد، وزنه را از نقطهٔ A رها می‌کنیم. اگر از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنیم، کدام موارد درست است؟



الف) بیشترین تغییر انرژی جنبشی وزنه در طی کمان $\overset{\frown}{CD}$ رخ می‌دهد.

ب) تغییر انرژی پتانسیل گرانشی وزنه در طی هر سه کمان $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{CD}$ یکسان است.

پ) تغییر انرژی مکانیکی وزنه در طی هر سه کمان یکسان است.

ت) تغییر انرژی جنبشی وزنه در طی کمان $\overset{\frown}{AB}$ از تغییر انرژی جنبشی آن در کمان $\overset{\frown}{BC}$ بزرگ‌تر است.

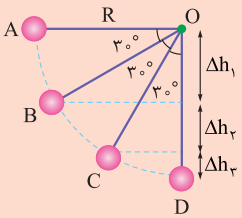
۱) الف ـ ب
۲) الف ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون از مقاومت هوا چشم‌پوشی کرده‌ایم، انرژی مکانیکی جسم در تمام نقاط مسیر، پایسته است، بنابراین تغییر انرژی مکانیکی جسم در طی هر سه کمان برابر صفر است؛ یعنی مورد «پ» درست است و گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند.

گام دوم: وقتی گلوله، کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{CD}$ را طی می‌کند، جابه‌جایی‌های قائم آن یکسان نیست و به تدریج کاهش می‌یابد.



$$\Delta h_1 > \Delta h_2 > \Delta h_3$$

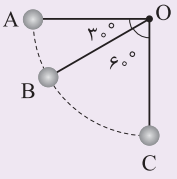
از آن‌جا که $\Delta U = mg\Delta h$ است، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی در سه کمان، یکسان نیست و مورد «ب» نادرست است؛ یعنی گزینهٔ (۳) هم رد می‌شود و همین‌جا معلوم می‌شود که گزینهٔ (۴) درست است.

گام سوم: در طی هر سه کمان، $\Delta K = -\Delta U$ است، بنابراین چون تغییر انرژی پتانسیل در طی سه کمان، متفاوت است، تغییرات انرژی جنبشی در طی کمان‌های مختلف نیز یکسان نیست. بیشترین تغییر انرژی جنبشی در طی کمان AB رخ می‌دهد و کم‌ترین آن در طی کمان CD رخ می‌دهد، پس مورد «الف» نیز نادرست است.

گام چهارم: کاهش انرژی پتانسیل گرانشی وزنه در طی کمان AB، بیشتر از کاهش انرژی پتانسیل آن در طی کمان BC است، بنابراین تغییر انرژی جنبشی در طی کمان AB از تغییر انرژی جنبشی در طی کمان BC بزرگ‌تر است و مورد «ت» درست محسوب می‌شود.

کنکور

در شکل زیر، وزنه به نخی بسته شده است و در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. وقتی نخ در حالت افقی قرار دارد، وزنه را از نقطهٔ A رها می‌کنیم. اگر تغییر انرژی جنبشی در طی کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر ΔK_1 و در طی کمان $\overset{\frown}{BC}$ برابر ΔK_2 باشد، نسبت $\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2}$ چه‌قدر است؟ (مقاومت هوا ناچیز فرض شود.) (سؤال ۷۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۵)



۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۷۴ **گلوله‌ای در شرایط خلأ از سطح زمین رو به بالا پرتاب می‌شود. اگر در ارتفاع h_1 از سطح زمین ۳۰ درصد از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله کاسته شده باشد و m ۲۰ بالاتر، ۲۰ درصد دیگر از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله کم شود، این گلوله حداکثر تا ارتفاع چند متری از سطح زمین بالا می‌رود؟ $(g = ۱۰ N/kg)$**

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۰۰

۳) $\frac{۴۰۰}{۳}$ ۴) $\frac{۵۰۰}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

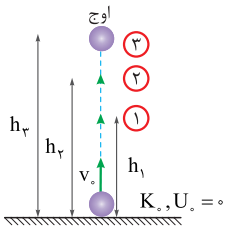
درس Box

وقتی انرژی مکانیکی یک جسم ثابت می‌ماند، هر چه از انرژی جنبشی آن کاسته شود، همان مقدار به انرژی پتانسیل آن افزوده می‌شود.

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲ \Rightarrow K_۱ - K_۲ = U_۲ - U_۱ \Rightarrow \Delta U = -(K_۲ - K_۱) = -\Delta K$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از آن‌جا که پرتاب گلوله در شرایط خلأ صورت گرفته و اصل پایستگی انرژی مکانیکی برقرار است، هر چه از انرژی جنبشی گلوله کاسته شود، همان مقدار به انرژی پتانسیل آن افزوده می‌شود؛ بنابراین با توجه به اطلاعات داده‌شده در صورت سؤال، می‌توان نوشت:



گام دوم: بین نقطهٔ اولیهٔ پرتاب و نقطهٔ ۱ می‌توان نوشت:

$$U_۱ - U_۰ = -(K_۱ - K_۰) \xrightarrow{U_۰ = ۰} U_۱ = -(-۰/۳K_۰) \Rightarrow mgh_۱ = ۰/۳K_۰$$

گام سوم: بین نقطهٔ اولیهٔ پرتاب و نقطهٔ ۲ می‌توان نوشت:

$$U_۲ - U_۰ = -(K_۲ - K_۰) \xrightarrow{U_۰ = ۰} U_۲ = -(-۰/۵K_۰) \Rightarrow mg(h_۱ + ۲۰) = ۰/۵K_۰$$

گام چهارم: نتایج به‌دست‌آمده در گام‌های دوم و سوم را از هم کم می‌کنیم:

$$mg(h_۱ + ۲۰) - mgh_۱ = ۰/۵K_۰ - ۰/۳K_۰ \Rightarrow ۲۰\,mg = ۰/۲K_۰ \Rightarrow K_۰ = ۱۰۰\,mg$$

گام پنجم: با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی بین نقطهٔ اولیهٔ پرتاب و نقطهٔ اوج داریم:

$$E_۰ = E_۳ \Rightarrow K_۰ + U_۰ = K_۳ + U_۳ \xrightarrow[K_۳ = ۰]{U_۰ = ۰} K_۰ = U_۳ \xrightarrow{K_۰ = ۱۰۰\,mg} ۱۰۰\,mg = mgh_۳ \Rightarrow h_۳ = ۱۰۰\,m$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۵ در یک نیروگاه آبی، در هر دقیقه $۲\times۱۰^{۴}\ m^{۳}$ آب از ارتفاع h سقوط می‌کند و نیمی از انرژی آزادشدهٔ آن به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. اگر توان الکتریکی خروجی ۹۰ مگاوات باشد، h چند متر است؟

$(\rho_{آب}=۱\ g/cm^{۳}\ و\ g=۱۰\ N/kg)$

۱) ۴۵
۲) ۵۴
۳) ۹۰
۴) ۱۰۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا به کمک توان الکتریکی خروجی، انرژی مفید (خروجی) را به دست آورید. سپس با توجه به این‌که عملاً بازده تبدیل انرژی ٪۵۰ است، انرژی ورودی و از آن‌جا ارتفاع h را پیدا کنید.

درس Box

توان:

کار انجام‌شده در واحد زمان (آهنگ انجام کار) را توان متوسط می‌گوییم:

$$P_{av}=\frac{W}{\Delta t}$$

P_{av}: توان متوسط نیروی F (W)

W: کار نیروی F (J)

Δt: بازهٔ زمانی (s)

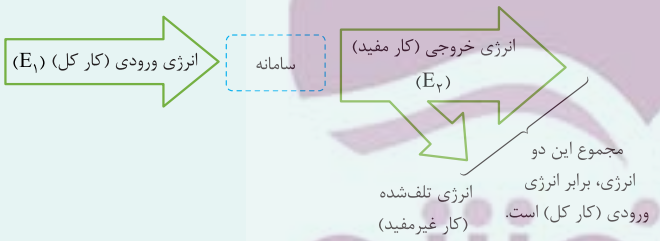
رابطهٔ توان متوسط، می‌تواند به طور مشابه برای انرژی نیز به کار رود:

$$P_{av}=\frac{E}{\Delta t}$$

E: انرژی (J)

بازده:

در هر سامانه، تنها بخشی از انرژی ورودی (کل یا مصرفی سامانه) به انرژی خروجی (مورد نظر یا مفید) تبدیل شده و بقیهٔ آن به صورت انرژی‌های ناخواسته، تلف می‌شود.



$$Ra=\frac{E_۲}{E_۱}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با معلوم‌بودن توان الکتریکی خروجی، انرژی مفید خروجی یعنی همان انرژی الکتریکی را به دست می‌آوریم:

$$P_{av}=\frac{E_۲}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۱\ min=۶۰\ s]{P_{av}=۹۰\ MW=۹۰\times۱۰^{۶}\ W}۹۰\times۱۰^{۶}=\frac{E_۲}{۶۰}\Rightarrow E_۲=۵۴\times۱۰^{۸}\ J$$

گام دوم: از آن‌جا که فقط نیمی از انرژی آزادشده به انرژی الکتریکی تبدیل شده است، یعنی بازده نیروگاه $\frac{۱}{۲}$ یا ۵۰ درصد است:

$$Ra=\frac{E_۲}{E_۱}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۵۴\times۱۰^{۸}}{E_۱}\Rightarrow E_۱=۱۰۸\times۱۰^{۸}\ J$$

گام سوم: انرژی ورودی $(E_۱)$، ناشی از تغییر انرژی پتانسیل گرانشی آب است، پس می‌توان نوشت:

$$E_۱=mgh\xrightarrow{m=\rho V}E_۱=\rho Vgh\xrightarrow[V=۲\times۱۰^{۴}\ m^{۳},\ g=۱۰\ N/kg]{\rho=۱\ g/cm^{۳}=۱۰^{۳}\ kg/m^{۳}}۱۰۸\times۱۰^{۸}=۱۰^{۳}\times۲\times۱۰^{۴}\times۱۰\times h$$

$$\Rightarrow ۵۴\times۱۰^{۸}=۱۰^{۸}h\Rightarrow h=۵۴\ m$$

ایران نوشه
توشه ای برای موفقیت

کنکور

در یک نیروگاه آبی، آب از ارتفاع ۹۰ متری سقوط می‌کند و ۴۰ درصد انرژی آزادشده از آن به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. اگر توان الکتریکی خروجی ۶۰ مگاوات باشد، حجم آبی که در هر دقیقه سقوط می‌کند، چند متر مکعب است؟ ($\rho_{آب} = ۱۰۰۰ \, kg/m^3$ و $g = ۱۰ \, m/s^2$) (سؤال ۷۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۵)

۱) $۱۰^۳$
۲) $۱۰^۴$
۳) ۴×۱۰^۳
۴) ۳×۱۰^۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۶ کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

الف) تفاوت جرم مولی اتیلن گلیکول و اوره، برابر جرم مولی گاز هیدروژن است.

ب) هنگامی که مولکول‌های عسل وارد آب می‌شوند، بین گروه‌های هیدروکسید این مولکول‌ها با مولکول‌های آب، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

پ) اگر انحلال حل‌شونده در حلال گرماگیر باشد، ذره‌های حل‌شونده کنار هم باقی مانده و در حلال پخش نمی‌شوند.

ت) اگر فرمول شیمیایی بنزین و وازلین به ترتیب به صورت C_xH_y و $C_{x'}H_{y'}$ باشد، حاصل $x+y'$ برابر ۶۰ است.

C_8H_{18} ← بنزین — وازلین → $C_{25}H_{52}$

۱) الف ـ ت
۲) ب ـ ت
۳) الف ـ پ
۴) ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف)

$$\left.\begin{matrix}\text{اتیلن گلیکول: } C_2H_6O_2 = 62\ g.mol^{-1}\\ \text{اوره: } CO(NH_2)_2 = 60\ g.mol^{-1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow 62-60=2\ g = H_2 \text{ جرم مولی}$$

ب) مولکول‌های عسل قطبی بوده و در ساختار خود، شمار قابل توجهی گروه OH — (هیدروکسیل) دارند و هنگامی که وارد آب شوند، با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی تشکیل می‌دهند.

گول نخوری ✘

هیدروکسید (OH^-) نام یک یون چنداتمی و هیدروکسیل OH — نام گروه عاملی الکلی است.

پ) *چه ربطی به گرماگیر یا گرماده بودن داره؟* اگر ذره‌های حل‌شونده با مولکول‌های حلال جاذبهٔ مناسب برقرار نکنند، ذره‌های حل‌شونده کنار هم باقی مانده و در حلال پخش نمی‌شوند. انحلال مواد در حلال می‌تواند گرماده یا گرماگیر باشد.

ت) فرمول شیمیایی بنزین و وازلین را می‌توان به ترتیب به صورت C_8H_{18} و $C_{25}H_{52}$ در نظر گرفت:

$$x+y'=8+52=60$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۷ کدام مورد دربارهٔ پاک‌کننده‌ها نادرست است؟

۱) براساس خواص اسیدی و بازی عمل می‌کنند.

۲) صابون گوگرددار برای از بین بردن جوش‌های صورت و قارچ‌های پوستی مناسب است.

۳) کاغذ pH در حضور پاک‌کننده‌های غیرصابونی به رنگ سرخ درمی‌آید.

۴) پاک‌کننده‌های خورنده افزون بر برهم‌کنش با ذرات، با آن‌ها وارد واکنش می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی خاصیت بازی دارند و کاغذ pH در حضور آن‌ها به رنگ آبی درمی‌آید.

در مورد گزینهٔ (۲) بدانید و آگاه باشید که:

نوع افزودنی به صابون یا شوینده	ویژگی صابون یا شوینده
ترکیب‌های گوگرددار	از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی
مواد شیمیایی کلردار	خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی بیشتر
نمک‌های فسفات	جلوگیری از تشکیل رسوب و ایجاد لکه (به دلیل واکنش این نمک‌ها با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت)
جوش شیرین ($NaHCO_3$)	افزایش قدرت پاک‌کنندگی چربی‌ها (به دلیل خاصیت بازی جوش شیرین و در نتیجه واکنش آن با چربی و تولید صابون)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

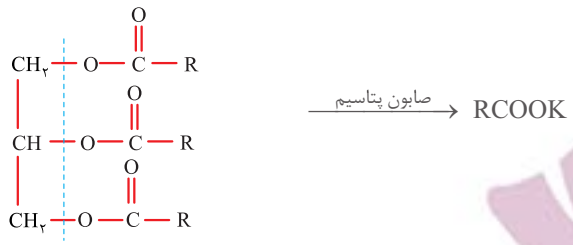
۷۸ جرم مولی یک استر سه‌عاملی با زنجیر هیدروکربنی یکسان برابر با ۸۰۰ گرم بر مول است. درصد جرمی پتاسیم در صابون پتاسیم حاصل از این استر به تقریب کدام است؟ $(H=1, C=12, O=16, K=39 : g.mol^{-1})$

۱) ۱۳/۳۶
۲) ۱۲/۹۴
۳) ۱۴/۳۴
۴) ۱۰/۶

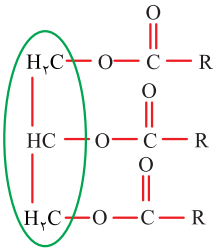
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

باید از جرم مولی استر، به جرم مولی صابون برسیم.



اگر قسمت مشخص‌شده در ساختار استر را از مولکول جدا کنیم و باقی‌ماندهٔ آن را بر ۳ تقسیم کنیم، جرم مولی یک واحد RCOO به دست می‌آید:



$$\text{جرم مولی گروه RCOO} = 800 - 41 = 759 \Rightarrow 759 \div 3 = 253\ g$$

بنابراین جرم مولی صابون پتاسیم حاصل از این استر (RCOOK) برابر است با:

$$\text{جرم مولی صابون} = RCOO + K = 253 + 39 = 292\ g.mol^{-1}$$

$$\text{درصد جرمی K در RCOOK} = \frac{\text{جرم K}}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100 = \frac{39}{292} \times 100 \simeq \%13/36$$

گول نخوری ✘

در صورت سؤال اشاره نشده که زنجیرهای هیدروکربنی استر، سیرشده هستند یا سیرنشده؛ بنابراین نمی‌توان از فرمول عمومی استرهای سیرشده $(C_nH_{2n-4}O_6)$ استفاده کرد.

$$\text{جرم مولی} = 12n + 2n - 4 + (6 \times 16) = 14n + 92$$

$$14n + 92 = 800 \Rightarrow 14n = 708 \Rightarrow n = \frac{708}{14} \Rightarrow$$ عدد صحیح درنمی‌آید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۹ درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب چگونه است؟

- رنگ‌های پوششی، سس مایونز، شیر، ژله و شربت معده، همگی زیرمجموعهٔ مخلوط‌هایی هستند که ذرات سازندهٔ آن‌ها توده‌های مولکولی است.
- اگر مقداری صابون را به مخلوط آب و روغن اضافه کنیم، یک مخلوط پایدار و ناهمگن همانند آب گل‌آلود خواهیم داشت.
- اندازهٔ ذرات سازندهٔ کلوئیدها از اندازهٔ ذرات سازندهٔ محلول‌ها و سوسپانسیون‌ها بزرگ‌تر است.
- سوسپانسیون‌ها و کلوئیدها در ویژگی‌های «رفتار در برابر نور»، «همگن‌بودن» و «پایداری» با محلول‌ها متفاوت هستند.

۱) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست
۲) درست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۳) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۴) درست ـ درست ـ درست ـ درست

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

همهٔ عبارت‌های داده‌شده، نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- توده‌های مولکولی، ذرات سازندهٔ کلوئیدها است. در بین مواد داده‌شده، شربت معده، سوسپانسیون است.
- مخلوط آب، روغن و صابون از نوع کلوئید (ناهمگن و پایدار) است، در حالی که آب گل‌آلود، سوسپانسیون (ناهمگن و ناپایدار) محسوب می‌شود.
- اندازهٔ ذرات سازندهٔ کلوئیدها، از محلول‌ها بزرگ‌تر و از سوسپانسیون‌ها، کوچک‌تر است.
- کلوئیدها در پایداری، با محلول‌ها یکسان هستند.

محلول ← همگن، پایدار، عبور نور

کلوئید ← ناهمگن، پایدار، پخش نور

سوسپانسیون ← ناهمگن، ناپایدار، پخش نور

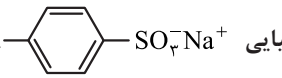
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۰ کدام موارد نادرست است؟ $(H=1, C=12, O=16, Na=23, S=32, K=39 : g.mol^{-1})$

الف) در پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، همواره درصد جرمی کربن از درصد جرمی کاتیون فلزی بیشتر است.

ب) شمار اتم‌های هیدروژن در یک پاک‌کنندهٔ صابونی و غیرصابونی با R یکسان، همواره متفاوت است.

پ) نسبت شمار اتم‌های اکسیژن در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی به صابونی، برابر با نسبت درصد جرمی O به S در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است.

ت) مجموع شمار اتم‌های C و H در فرمول شیمیایی  **، ۱۰ واحد از این مجموع در صابون $RCOO^-K^+$ بیشتر است.**

ث) اگر جرم مولی گروه آلکیل در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی برابر ۱۶۹ گرم باشد، جرم مولی بخش ناقطبی آن برابر ۲۴۷ گرم خواهد بود.

۱) الف ـ ب ـ پ
۲) ب ـ پ ـ ت ـ ث
۳) الف ـ ت ـ ث
۴) ب ـ ت ـ ث

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «ب»، «ت» و «ث» نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) طبق تعریف، پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، تعداد اتم کربن زیادی دارند؛ پس قطعاً درصد جرمی کربن در آن‌ها بیشتر از عنصرهای دیگر است؛ مثلاً در ۱ مول از صابون جامد $C_{15}H_{31}COONa$، $۱۶\times۱۲=۱۹۲$ گرم کربن و $۱\times۲۳=۲۳$ گرم سدیم وجود دارد؛ بنابراین درصد جرمی کربن، $\frac{۱۹۲}{۲۳}\simeq ۸/۳$ برابر درصد جرمی سدیم است.

ب) اگر پاک‌کنندهٔ صابونی، حاوی کاتیون آمونیوم باشد، شمار اتم‌های هیدروژن دو پاک‌کننده (در صورت R یکسان) برابر خواهد بود.

$RCOONH_4$, $RC_6H_4SO_3Na$

پ) نسبت شمار اتم‌های O در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی $(RC_6H_4SO_3Na)$ به صابونی $(RCOONa)$ برابر $\frac{۳}{۲}=۱/۵$ می‌باشد.

در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی به ترتیب ۳ اتم O و ۱ اتم S وجود دارد. با توجه به جرم مولی O و S، نسبت درصد جرمی O به S در این پاک‌کننده ۱/۵ است.

$$\frac{۳\times۱۶\ g\ O}{۱\times۳۲\ g\ S}=۱/۵$$

ت)

$$\left.\begin{array}{l} RC_6H_4SO_3Na \Rightarrow \text{مجموع شمار اتم‌های کربن و هیدروژن} = \underbrace{x}_{\text{در گروه R}}+۶+۴=x+۱۰ \\ RCOOK \Rightarrow \text{مجموع شمار اتم‌های کربن و هیدروژن} = x+۱ \end{array}\right\} \Rightarrow (x+۱۰)-(x+۱)=۹$$

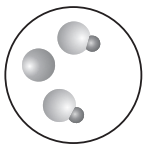
ث)

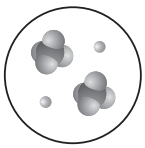
$$\underbrace{RC_6H_4}_{\text{بخش ناقطبی}}SO_3Na \Rightarrow \text{جرم مولی بخش ناقطبی} = ۱۶۹+(۶\times۱۲)+۴=۲۴۵\ g$$

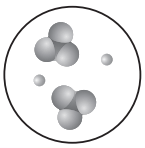
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

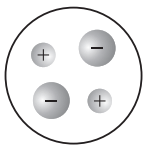
۸۱ کدام ماده اسید آرنیوس محسوب می‌شود و نمای ذره‌ای محلول آن در آب به درستی نشان داده شده است؟

(H^+ ، OH^-)

۱) باریم اکسید ـ 

۲) گوگرد تری‌اکسید ـ 

۳) دی‌نیتروژن پنتااکسید ـ 

۴) پتاسیم کلرید ـ 

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

	اسید آرنیوس	باز آرنیوس
تعریف	ماده‌ای که با حل‌شدن در آب، غلظت یون H^+ را افزایش می‌دهد.	ماده‌ای که با حل‌شدن در آب، غلظت یون OH^- را افزایش می‌دهد.
نمونه‌های مهم	۱) هیدروژن هالیدها: HF، HCl، HBr و HI ۲) کربوکسیلیک اسیدها (RCOOH) ۳) HNO_3، H_2SO_4، HNO_2 و HCN ۴) اغلب اکسیدهای نافلزی: $CO_2(g)$، $SO_2(g)$ و $N_2O_5(s)$	۱) هیدروکسیدهای فلزی: KOH، NaOH، $Ca(OH)_2$ و $Ba(OH)_2$ ۲) آمونیاک (NH_3) و آمین‌ها ۳) اغلب اکسیدهای فلزی: $Li_2O(s)$، $Na_2O(s)$ و $BaO(s)$
رنگ کاغذ pH در محلول آن‌ها	سرخ	آبی

پاسخ خیلی تشریحی

اکسیدهای نافلزی مانند SO_3 و N_2O_5، اسید آرنیوس محسوب می‌شوند؛ پس گزینه‌های (۱) و (۴) پَرا! دقت کنید که ترکیب گزینهٔ (۱) (BaO) خاصیت بازی دارد، در حالی که ترکیب گزینهٔ (۴) (KCl) خنثی محسوب می‌شود.

حالا واکنش اکسیدهای گزینه‌های (۲) و (۳) با آب را ببینید:

$$SO_3 + H_2O \rightarrow \underbrace{2H^+ + SO_4^{2-}}$$

شمار یون‌های H^+ باید دو برابر SO_4^{2-} باشد.

$$N_2O_5 + H_2O \rightarrow \underbrace{2H^+ + 2NO_3^-}$$

شمار یون‌های H^+ و NO_3^- برابر است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۲ کدام مورد، درست است؟

۱) به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی سازنده‌اش تبدیل می‌شود، یونش می‌گویند.

۲) واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، گرماگیر و با تولید گاز هیدروژن همراه است.

۳) مدل آرنیوس می‌تواند غلظت یون هیدرونیوم را در محلول‌های آبی جداگانه‌ای از HNO_2 و HNO_3 مقایسه کند.

۴) در دمای یکسان، رسانایی الکتریکی محلول ۰/۲۵ مولار آلومینیم نیترات، بیشتر از محلول ۰/۳۰ مولار سدیم کلرید است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ هر چه مجموع غلظت یون‌ها در یک محلول بیشتر باشد، رسانایی الکتریکی آن محلول بیشتر است.

$$Al(NO_3)_3 \rightarrow \underbrace{Al^{3+} + 3NO_3^-}_{4\times 0/25 = 1\ mol.L^{-1}}$$

$$NaCl \rightarrow \underbrace{Na^+ + Cl^-}_{2\times 0/3 = 0/6\ mol.L^{-1}}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به **یون‌های مثبت و منفی** (نه سازنده‌اش!) تبدیل می‌شود، **یونش** گویند. مثلاً HCl یک ترکیب مولکولی است و در ساختار آن یون‌های H^+ و Cl^- وجود ندارد؛ اما با انحلال در آب و واکنش با آن، به یون‌های H_3O^+ و Cl^- تبدیل می‌شود.

گزینهٔ (۲): واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، گرماده است.

گزینهٔ (۳): با مدل آرنیوس تنها می‌توان اسید و باز را از یکدیگر تشخیص داد و نمی‌توان $[H^+]$ در محلول دو اسید یا $[OH^-]$ در محلول دو باز را با هم مقایسه کرد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۳ **۰/۱ مول از نوعی اسید آلی را به مقدار معینی آب اضافه کرده و حجم محلول را به ۵ لیتر می‌رسانیم. اگر درصد یونش اسید برابر ۲٪ و جرم آنیون حاصل از یونش اسید برابر ۹۰ میلی‌گرم باشد، نام این اسید، ..... و در دمای یکسان، قدرت اسیدی آن نسبت به نیتروواسید، ..... است. $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$**

۱) فورمیک اسید ـ کم‌تر

۲) استیک اسید ـ کم‌تر

۳) فورمیک اسید ـ بیشتر

۴) استیک اسید ـ بیشتر

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ آنیون حاصل از یونش فورمیک اسید، $HCOO^-$ (با جرم مولی $45\ g.mol^{-1}$) و آنیون حاصل از یونش استیک اسید، CH_3COO^- (با جرم مولی $59\ g.mol^{-1}$) است. حالا باید با اطلاعات داده‌شده، جرم مولی آنیون حاصل از یونش را پیدا کنیم و ببینیم با کدام آنیون مطابقت دارد:

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$\text{مول } A^- = \text{مول } H^+ = \text{مول اولیهٔ اسید} \times \text{درجهٔ یونش}$$

$$\Rightarrow \text{مول } A^- = 0/1 \times \frac{2}{100} = 2\times10^{-3}\ mol$$

$$\text{مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \text{جرم مولی } A^- = \frac{90\times10^{-3}\ g}{2\times10^{-3}\ mol} = 45\ g.mol^{-1} \Rightarrow$$

آنیون مورد نظر، همان فورمات $(HCOO^-)$ است.

قدرت اسیدی فورمیک اسید از نیتروواسید (HNO_2) کم‌تر است.

نکته با توجه به مطالب صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ کتاب درسی، ترتیب K_a و قدرت اسیدی چند اسید ضعیف به صورت زیر است:

$$\text{قدرت اسیدی } (K_a): HF > HNO_2 > HCOOH > CH_3COOH > H_2CO_3 > HCN$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۴ کدام گزینه نادرست است؟

۱) در یک واکنش برگشت‌پذیر، واکنش‌های رفت و برگشت به طور پیوسته و هم‌زمان انجام می‌شوند.

۲) در سامانه‌های تعادلی، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با هم برابر است.

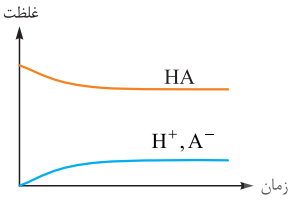
۳) در سامانه‌های تعادلی، مقدار مواد شرکت‌کننده ثابت می‌ماند.

۴) پس از به تعادل رسیدن فرایند یونش اسیدهای ضعیف در آب، غلظت یون‌ها با غلظت مولکول‌های اسید یونیده‌نشده، برابر می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در لحظهٔ تعادل، غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش ثابت می‌ماند. در یونش اسیدهای ضعیف در آب، به طور معمول غلظت یون‌های حاصل از یونش، خیلی کم‌تر از غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده است.



$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

غلظت اولیه: $M \quad \circ \quad \circ$

غلظت تعادلی: $M - x \quad x \quad x$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۵ برای چه تعداد از موارد زیر، رابطهٔ $[H_3O^+] > [OH^-]$ برقرار است؟

خاصیت بازی

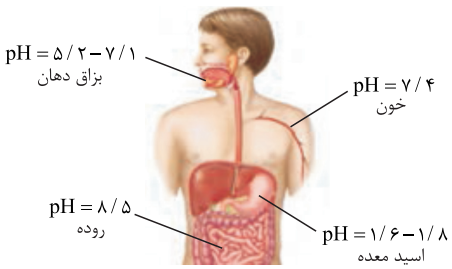
- محلول جوش شیرین در آب
- محتویات رودهٔ کوچک انسان
- شیشه‌پاک‌کن
- لوله‌بازکن
- خون انسان

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

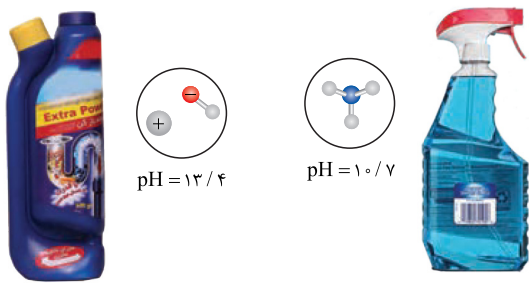
پاسخ خیلی تشریحی رابطهٔ $[H_3O^+] > [OH^-]$ در محیط‌های بازی برقرار است. همهٔ موارد داده‌شده، خاصیت بازی ($pH > 7$) دارند.

صفحهٔ ۲۴ کتاب درسی:



صفحه‌های ۲۸ و ۲۹ کتاب درسی:

بازها کاربردهای گسترده‌ای در زندگی روزانه دارند که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به شیشه‌پاک‌کن و لوله‌بازکن اشاره کرد:



صفحهٔ ۳۲ کتاب درسی: محلول جوش شیرین (سدیم هیدروژن کربنات) در آب خاصیت بازی دارد.

۸۶ **با در نظر گرفتن محلول‌های اسیدی یا بازی A و B، کدام مورد درست است؟ (اسید یا باز مورد نظر، تک‌ظرفیتی هستند، $Li = ۷ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱}$)**

A: غلظت مولی یون هیدرونیوم در آن بیشتر از غلظت مولی یون هیدروکسید و $\frac{۱}{۵}$ غلظت مولکول‌های یونش‌نیافته است.

B: در ۲۰۰ میلی‌لیتر از آن، $۱/۲۰۴\times ۱۰^{۲۳}$ یون هیدروکسید وجود دارد.

۱) در صورتی که محلول‌ها را در مسیر مداری دارای لامپ قرار دهیم، روشنایی ایجادشده توسط محلول A بیشتر از محلول B است.

۲) با اضافه‌کردن ۳ گرم لیتیم اکسید به مقدار کافی آب، می‌توان محلول B را تهیه کرد.

۳) محلول A می‌تواند محلول نیتریک اسید باشد.

۴) درصد یونش اسید در محلول A برابر با ۲۰٪ است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا بیایید محلول‌ها را تحلیل کنیم:

محلول A: با توجه به بیشتربودن $[H^+]$ نسبت به $[OH^-]$، محلول مورد نظر، اسیدی است:

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

غلظت اولیه: $M \quad ۰ \quad ۰$

غلظت تعادلی: $M-x \quad x \quad x$

$$[H^+]=\frac{۱}{۵}[HA] \Rightarrow x=\frac{۱}{۵}(M-x) \Rightarrow ۵x=M-x \Rightarrow ۶x=M \Rightarrow x=\frac{۱}{۶}M$$

محلول B:

$$\text{مول } OH^- : ۱/۲۰۴\times ۱۰^{۲۳}\times\frac{۱\ mol}{۶/۰۲\times ۱۰^{۲۳}}=\frac{۱}{۵}=۰/۲\ mol$$

$$[OH^-]=\frac{۰/۲\ mol}{\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}L}=۱\ mol.L^{-۱} \xrightarrow{[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}} [H^+]=۱۰^{-۱۴}$$

با توجه به بیشتربودن $[OH^-]$ نسبت به $[H^+]$، محلول B، بازی است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): غلظت یون‌ها در محلول A را نداریم، پس مقایسه امکان‌پذیر نیست.

گزینهٔ (۲): لیتیم اکسید مطابق معادلهٔ زیر با آب واکنش می‌دهد:

$$Li_۲O + H_۲O \rightarrow ۲Li^+ + ۲OH^-$$

حالا ببینیم آیا با ۳ گرم $Li_۲O$، ۰/۲ مول OH^- به دست می‌آید یا خیر.

$$۳\ g\ Li_۲O\times\frac{۱\ mol\ Li_۲O}{۳۰\ g\ Li_۲O}\times\frac{۲\ mol\ OH^-}{۱\ mol\ Li_۲O}=۰/۲\ mol\ OH^- \ ✓$$

گزینهٔ (۳): A حاوی یک اسید ضعیف است، در حالی که نیتریک اسید ($HNO_۳$) جزء اسیدهای قوی می‌باشد.

گزینهٔ (۴):

$$\text{درصد یونش}=\frac{[H^+]}{M}\times ۱۰۰=\frac{\frac{۱}{۶}M}{M}\times ۱۰۰\simeq ٪۱۶/۶۷$$

۸۷ pH محلول ۱۰^{-n} مولار اسید HA برابر ۴ است. اگر ثابت یونش این اسید برابر با $۱۰^{-(n+۲)}$ باشد، مقدار n کدام است؟ (غلظت تعادلی اسید را با غلظت اولیهٔ محلول برابر در نظر بگیرید.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ باید $[H^+]$ را در رابطهٔ ثابت یونش اسید وارد کرده و n را به دست آوریم:

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

غلظت اولیه: $M \quad ۰ \quad ۰$

غلظت تعادلی: $M-x \quad x \quad x$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{[H^+]^۲}{M}$$

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۴} \Rightarrow ۱۰^{-(n+۲)} = \frac{(۱۰^{-۴})^۲}{۱۰^{-n}} \Rightarrow ۱۰^{-n} \times ۱۰^{-۲} = \frac{۱۰^{-۸}}{۱۰^{-n}} \Rightarrow ۱۰^{-۲n} = ۱۰^{-۶}$$

$$\Rightarrow ۲n = ۶ \Rightarrow n = ۳$$

امتحان نهایی

اگر درصد یونش محلول ۱۰^{-n} مول بر لیتر از اسید HA، در دمای اتاق برابر یک و pH = ۴ باشد:

الف) مقدار n را محاسبه کنید. *(سؤال ۱۰ ـ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۲)*

ب) نسبت غلظت یون H^+ به OH^- را در این محلول به دست آورید.

۸۸ محلولی از اسید HA با غلظت ۴ مولار و حجم ۱۰۰ میلی‌لیتر در اختیار داریم. اگر محلول این اسید را تا سه مرتبه رقیق کنیم، به طوری که در هر مرحله ۱۰ میلی‌لیتر از محلول قبلی برداریم و به حجم ۱۰۰ میلی‌لیتر برسانیم، pH نهایی محلول شمارهٔ ۴ برابر چند خواهد بود؟

شمارهٔ محلول	۱	۲	۳	۴
pH	۲/۷	-	-	؟

۱) ۴/۱
۲) ۳/۶
۳) ۴/۲
۴) ۳/۷

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی در ابتدا مقدار ثابت یونش اسید را با استفاده از داده‌های مسئله محاسبه می‌کنیم:

$$pH_1 = 2/7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-2/7} = 10^{-3} \times 10^{0/3} = 2 \times 10^{-3}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \xrightarrow{[H^+] << M} K_a = \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{4} = 10^{-6}$$

در مرحلهٔ بعد، غلظت محلول پس از ۳ مرحله رقیق‌سازی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} M_1V_1 = M_2V_2 \\ 4 \times 10 = M_2 \times 100 \Rightarrow M_2 = 0/4 \\ 0/4 \times 10 = M_3 \times 100 \Rightarrow M_3 = 0/04 \\ 0/04 \times 10 = M_4 \times 100 \Rightarrow M_4 = 0/004 \end{cases}$$

یه‌جور دیگه در هر مرحله ۱۰ میلی‌لیتر از محلول قبلی را به حجم ۱۰۰ میلی رسانده‌ایم؛ یعنی غلظت آن را ۰/۱ برابر کرده‌ایم. پس از سه مرحله رقیق‌سازی، غلظت نهایی برابر ۰/۰۰۱ غلظت اولیه یعنی ۰/۰۰۴ می‌شود.

حال با توجه به این‌که مقدار K_a کوچک است، مقدار pH محلول نهایی را حساب می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M} \Rightarrow [H^+] = \sqrt{K_a M_4} = \sqrt{10^{-6} \times 0/004} = 2\sqrt{10^{-9}}$$

$$\xrightarrow{-\log} pH = -\log 2 + (-\log 10^{-\frac{9}{2}}) \Rightarrow pH = -0/3 + 4/5 = 4/2$$

۸۹ کدام مورد درست است؟

۱) اگر در شرایط یکسان، pH دو محلول فورمیک اسید و استیک اسید برابر باشد، غلظت مولی فورمیک اسید بیشتر است.

۲) در دمای معین، شکل کلی نمودار $[H_3O^+]$ برحسب $[OH^-]$، همانند نمودار مربع درجهٔ یونش (α^2) برحسب غلظت اسیدهای بسیار ضعیف است.

۳) آب گوجه‌فرنگی و محلول شیشه‌پاک‌کن به ترتیب می‌توانند رنگ گل ادریسی را قرمز و آبی کنند.

۴) اگر قدرت بازی باز BOH از باز B′OH بیشتر باشد، به یقین pH محلول BOH بیشتر است.

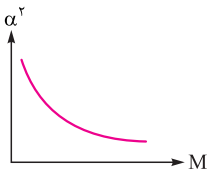
پاسخ: گزینهٔ ۲

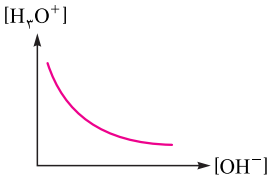
پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): قدرت اسیدی فورمیک اسید از استیک اسید بیشتر است، در نتیجه مقدار کم‌تری از آن می‌تواند مقدار هیدرونیوم برابری با استیک اسید تولید کند تا pH هر دو برابر شود.

گزینهٔ (۲): با توجه به روابط $[H_3O^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]}$ و $\alpha^2 = \frac{K_a}{M}$ (K_a ثابت است)، می‌توان نتیجه گرفت که شکل هر دو نمودار به صورت هموگرافیک و نزولی است.

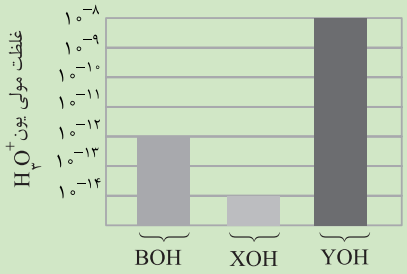




گزینهٔ (۳): آب گوجه‌فرنگی و محلول شیشه‌پاک‌کن به ترتیب خاصیت اسیدی و بازی دارند. می‌دانیم رنگ گل ادریسی در خاک‌هایی با خصلت اسیدی به رنگ آبی و در خاک‌هایی با خصلت بازی به رنگ قرمز درمی‌آید؛ پس آب گوجه‌فرنگی و محلول شیشه‌پاک‌کن، رنگ گل ادریسی را به ترتیب آبی و قرمز می‌کنند.

گزینهٔ (۴): مقدار pH محلول اسیدها و بازها، علاوه بر ثابت یونش به غلظت محلول نیز وابسته است.

۹۰ **با توجه به شکل زیر که غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۱ مولار بازهای BOH ، XOH و YOH را در دمای اتاق نشان می‌دهد، کدام مورد نادرست است؟**



۱) ثابت یونش بازی YOH از دو باز دیگر کم‌تر است.

۲) رسانایی الکتریکی محلول BOH بیشتر از محلول XOH است.

۳) از XOH می‌توان در لوله‌بازکن استفاده کرد.

۴) pH محلول YOH با pH محلول 5×10^{-7} مولار باریم هیدروکسید برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا غلظت یون هیدروکسید در محلول سه باز را حساب می‌کنیم:

$$BOH: [H^+]=10^{-12} \Rightarrow [OH^-]=\frac{10^{-14}}{10^{-12}}=10^{-2}$$

$$XOH: [H^+]=10^{-14} \Rightarrow [OH^-]=\frac{10^{-14}}{10^{-14}}=1$$

$$YOH: [H^+]=10^{-8} \Rightarrow [OH^-]=\frac{10^{-14}}{10^{-8}}=10^{-6}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): غلظت اولیهٔ سه محلول، یکسان بوده (۱ مولار) و $[OH^-]$ در محلول YOH از همه کم‌تر است. این موضوع نشان‌دهندهٔ ضعیف‌تربودن این باز و کوچک‌تربودن ثابت یونش آن می‌باشد.

گزینهٔ (۲): برای مقایسهٔ رسانایی الکتریکی محلول‌های بازی باید به $[OH^-]$ در آن‌ها توجه کنیم. $[OH^-]$ در محلول XOH بیشتر است؛ از این‌رو رسانایی الکتریکی این محلول بیشتر می‌باشد.

گزینهٔ (۳): $[OH^-]$ در محلول XOH با غلظت اولیهٔ محلول برابر است؛ بنابراین XOH بازی قوی بوده (مانند NaOH) و از آن می‌توان در لوله‌بازکن استفاده کرد.

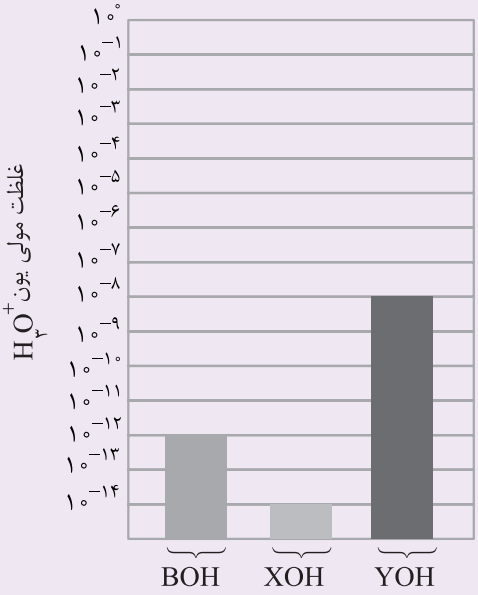
گزینهٔ (۴): $[OH^-]$ در محلول YOH با محلول باریم هیدروکسید برابر است؛ از این‌رو pH دو محلول یکسان می‌باشد.

در محلول $Ba(OH)_2$ $[OH^-]=2M=2\times5\times10^{-7}=10^{-6}\ mol.L^{-1}$

امتحان نهایی

با توجه به شکل زیر که غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۱ مولار سه باز BOH، XOH و YOH در دمای اتاق را نشان می‌دهد، به پرسش‌ها پاسخ دهید.

(سؤال ۱۳ ـ امتحان نهایی خرداد خارج ۱۴۰۱)



الف) کدام باز می‌تواند در لوله‌بازکن استفاده شود؟ چرا؟

ب) pH کدام باز در شرایط یکسان کوچک‌تر است؟ چرا؟ (محاسبه لازم نیست.)

پ) در شرایط یکسان، رسانایی الکتریکی محلول آبی YOH بیشتر است یا محلول BOH؟ دلیل بنویسید.

۹۱ ۱۵۰۰ میلی‌لیتر محلول اسید ضعیف HA با $pH = ۳/۵$، با چند گرم سدیم هیدروکسید به طور کامل واکنش می‌دهد؟ (درصد یونش اسید در محلول برابر ۲ است، $g.mol^{-۱} : H = ۱, O = ۱۶, Na = ۲۳$)

۱) ۰/۲۲۵ ۲) ۰/۴۵

۳) ۰/۹ ۴) ۱/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

در مسائل مربوط به واکنش کامل اسیدها و بازها، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد.

$$\underset{\text{غلظت اسید}}{n_a M_a} \; \underset{\text{حجم اسید}}{V_a} = \underset{\text{ظرفیت باز}}{n_b} \; \underset{\text{غلظت باز}}{M_b} \; \underset{\text{حجم باز}}{V_b}$$

با توجه به این‌که حاصل $M.V$ معادل با تعداد مول است، رابطهٔ بالا را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

مول باز × ظرفیت باز = مول اسید × ظرفیت اسید

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: محاسبهٔ غلظت مولی محلول اسید:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۳/۵} = ۱۰^{-۴} \times ۱۰^{۰/۵} = ۳ \times ۱۰^{-۴} \; mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = M\alpha \Rightarrow ۳ \times ۱۰^{-۴} = M \times \frac{۲}{۱۰۰} \Rightarrow M = ۱/۵ \times ۱۰^{-۲} \; mol.L^{-۱}$$

گام دوم: محاسبهٔ جرم NaOH مصرف‌شده در واکنش با اسید:

$$HA + NaOH \rightarrow NaA + H_۲O$$

$$۱۵۰۰ \; mL \; HA(aq) \times \frac{۱ \; L \; HA(aq)}{۱۰۰۰ \; mL \; HA(aq)} \times \frac{۱/۵ \times ۱۰^{-۲} \; mol \; HA}{۱ \; L \; HA(aq)} \times \frac{۱ \; mol \; NaOH}{۱ \; mol \; HA} \times \frac{۴۰ \; g \; NaOH}{۱ \; mol \; NaOH} = ۰/۹ \; g \; NaOH$$

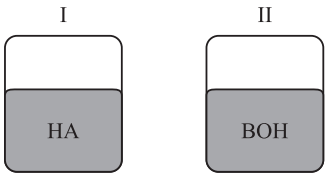
یه جور دیگه

$$\text{مول باز} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}$$

$$\underbrace{n_a M_a V_a}_{HA} = \underbrace{n_b \overbrace{M_b V_b}}_{NaOH}$$

$$۱ \times ۱/۵ \times ۱۰^{-۲} \times ۱/۵ = ۱ \times \frac{x}{۴۰} \Rightarrow x = ۰/۹ \; g \; NaOH$$

۹۲ با توجه به دو محلول زیر، نسبت غلظت تعادلی HA به غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول BOH به تقریب کدام است؟ (دما برابر $25\ ^\circ C$ است.)



$K_a = 1/8 \times 10^{-3}$ $K_b = 4/8 \times 10^{-4}$

$pH = 2/5$ $M = 0/3\ mol.L^{-1}$

۱) $9/6 \times 10^{9}$

۲) 6×10^{9}

۳) $9/6 \times 10^{10}$

۴) 6×10^{10}

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: محاسبهٔ غلظت تعادلی HA در محلول (I):

$$pH = 2/5 \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-2/5} = 10^{-3} \times 10^{0/5} = 0/003$$

$$K_a = \frac{[H_3O^+]^2}{[HA]} \Rightarrow 1/8 \times 10^{-3} = \frac{0/003 \times 0/003}{[HA]} \Rightarrow [HA] = \frac{9 \times 10^{-6}}{1/8 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

گام دوم: محاسبهٔ غلظت یون هیدرونیوم در محلول باز BOH:

$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{M} \Rightarrow [OH^-] = \sqrt{K_b M} = \sqrt{4/8 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-1}} = \sqrt{144 \times 10^{-6}} = 12 \times 10^{-3}$$

$$[H_3O^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{12 \times 10^{-3}} = \frac{10^{-11}}{12}\ mol.L^{-1}$$

گام سوم: محاسبهٔ نسبت غلظت تعادلی HA به غلظت یون هیدرونیوم در محلول BOH:

$$\frac{0/005}{\frac{10^{-11}}{12}} = 6 \times 10^{9}$$

۹۳ **غلظت یون هیدرونیوم در ۲۰۰ میلی‌لیتر از شیرهٔ معدهٔ فردی برابر با ۰/۰۳ مولار است. پزشک برای کاهش اسید معدهٔ او، ۵۰ میلی‌لیتر شیرمنیزی دارای ۱۱۶ میلی‌گرم منیزیم هیدروکسید تجویز می‌کند. pH نهایی معدهٔ این شخص پس از مصرف شیرمنیزی چه‌قدر می‌شود؟ (از اثر سایر مواد سازندهٔ شیرمنیزی روی شیرهٔ معده صرف نظر شود، $H=1, O=16, Mg=24 : g.mol^{-1}$)**

۱) ۲/۸
۲) ۲/۵
۳) ۲/۱
۴) ۱/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

منیزیم هیدروکسید مطابق معادلهٔ زیر با شیرهٔ معده واکنش می‌دهد:

$$Mg(OH)_2(s) + 2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + 2H_2O(l)$$

ابتدا مقدار مول هر کدام از واکنش‌دهنده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$mol\ HCl = mol\ H_3O^+ = 0/03 \frac{mol}{L} \times 0/2\ L = 0/006\ mol$$

$$mol\ Mg(OH)_2 = 116 \times 10^{-3}\ g \times \frac{1\ mol}{58\ g} = 0/002\ mol$$

مطابق با ضرایب استوکیومتری، هر ۰/۰۰۲ مول $Mg(OH)_2$، موجب خنثی‌شدن ۰/۰۰۴ مول HCl می‌شود و لذا ۰/۰۰۲ مول HCl در معده باقی می‌ماند که تعیین‌کنندهٔ pH نهایی معده است.

$$[H_3O^+] = [HCl] = \frac{mol\ HCl}{\text{حجم کل}} = \frac{0/002\ mol}{0/25\ L} = 0/008\ mol/L$$

$$pH = -\log 8 \times 10^{-3} = 3 - \log 8 = 3 - 3\log 2 = 3 - 0/9 = 2/1$$

۹۴ در کدام گزینه، اتم هر دو عنصر پس از تبدیل‌شدن به یون، به آرایش الکترونی گاز نجیب مشابه می‌رسند و به ازای تشکیل یک مول ترکیب یونی، شمار الکترون‌های بیشتری بین آن‌ها مبادله می‌شود؟

۱) ${}_{20}E$ ، ${}_{16}G$
۲) ${}_{15}A$ ، ${}_{12}D$
۳) ${}_{8}X$ ، ${}_{13}Z$
۴) ${}_{31}J$ ، ${}_{35}M$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اتم عنصر ${}_{20}E$ با از دست دادن دو الکترون و اتم ${}_{16}G$ با گرفتن دو الکترون، آرایش گاز نجیب ${}_{18}Ar$ و هم‌چنین اتم عنصر ${}_{8}X$ با گرفتن دو الکترون و اتم ${}_{13}Z$ با از دست دادن ۳ الکترون به آرایش گاز نجیب ${}_{10}Ne$ می‌رسند. در تشکیل ترکیب حاصل از گزینهٔ (۱)، دو الکترون و در تشکیل ترکیب حاصل از گزینهٔ (۳)، ۶ الکترون مبادله می‌شود.

شمار الکترون‌های مبادله‌شده = بار کاتیون × زیروند کاتیون = ۱ × ۲ = ۲ $\quad E^{2+}G^{2-} \rightarrow EG$

شمار الکترون‌های مبادله‌شده = بار کاتیون × زیروند کاتیون = ۲ × ۳ = ۶ $\quad Z^{3+}X^{2-} \rightarrow Z_2X_3$

۹۵ در بین موارد زیر، چند ترکیب مولکولی یافت می‌شود که نام آن‌ها به درستی ذکر نشده است؟

- N_2O_3 : دی‌نیتروژن تری‌اکسیژن
- AlF_3 : آلومینیم تری‌فلوئورید
- BCl_3 : بور تری‌کلرید
- OF_2 : اکسیژن فلوئورید
- SO_3 : گوگرد (IV) اکسید
- P_4O_{10} : تترافسفر دکااکسید

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

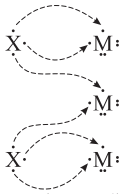
پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به صورت سؤال، باید به دنبال ترکیبات مولکولی با نام اشتباه بگردیم. AlF_3 یک ترکیب یونی با نام آلومینیم فلوئورید است. باقی ترکیبات همگی مولکولی هستند و باید نام آن‌ها را بررسی کنیم.

- N_2O_3 : دی‌نیتروژن تری‌اکسیژن ✗ ← دی‌نیتروژن تری‌اکسید
- BCl_3 : بور تری‌کلرید
- OF_2 : اکسیژن فلوئورید ✗ ← اکسیژن دی‌فلوئورید
- SO_3 : گوگرد (IV) اکسید ✗ ← گوگرد (VI) اکسید یا گوگرد تری‌اکسید
- P_4O_{10} : تترافسفر دکااکسید

پس موارد مطلوب سؤال، ترکیب‌های N_2O_3 ، OF_2 و SO_3 می‌باشند.

۹۶ **با توجه به شکل زیر که نمایشی ساده از مبادلهٔ الکترون بین عنصرهای X و M را نشان می‌دهد، کدام مورد نادرست است؟**



$_{16}S$, $_{8}O$

۱) عنصر M می‌تواند عنصر مشترک در بین عنصرهای فراوان‌تر در سیاره‌های زمین و مشتری باشد.

۲) فراوردهٔ واکنش، یک ترکیب یونی دوتایی با فرمول شیمیایی X_2M_3 است.

۳) اگر اتم X در دورهٔ سوم و اتم M در دورهٔ دوم باشد، هر واحد از ترکیب یونی حاصل در مجموع دارای ۶۰ الکترون است.

۴) در بیرونی‌ترین لایهٔ اتم عنصر M، شمار الکترون‌ها با $l=0$، نصف شمار الکترون‌ها با $l=1$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اتم X دارای ۳ الکترون ظرفیت بوده و می‌تواند متعلق به گروه ۱۳ باشد. اتم M دارای ۶ الکترون ظرفیت بوده و به یقین در گروه ۱۶ جدول تناوبی قرار دارد و یک نافلز است.

$_{13}Al$ در گروه ۱۳ و دورهٔ سوم و $_{8}O$ در گروه ۱۶ و دورهٔ دوم جدول تناوبی قرار دارد. ترکیب یونی حاصل از واکنش بین این دو عنصر به صورت Al_2O_3 است.

$$\begin{cases} {}_{13}Al^{3+} \Rightarrow e=10 \\ {}_{8}O^{2-} \Rightarrow e=10 \end{cases} \Rightarrow Al_2O_3 : e=\underbrace{2(10)}_{Al}+\underbrace{3(10)}_{O}=50$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عنصر M می‌تواند اکسیژن ($_{8}O$) یا گوگرد ($_{16}S$) باشد که جزء عنصرهای مشترک فراوان در سیاره‌های زمین و مشتری هستند.

گزینهٔ (۲): فرمول ترکیب حاصل به صورت M_2X_3 خواهد بود که با مبادلهٔ الکترون بین اتم‌ها به‌دست‌آمده و یک ترکیب یونی دوتایی است.

گزینهٔ (۴): آرایش بیرونی‌ترین لایهٔ الکترونی اتم عناصر گروه ۱۶ جدول تناوبی، به صورت $ns^2\,np^4$ است که ۴ الکترون با $l=1$ و ۲ الکترون با $l=0$ دارند.

۹۷ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب چگونه است؟

- **اکسیژن در لایه‌های بالایی هواکره، به شکل یون‌هایی مانند O_2^+، O^+ و O^{2-} نیز یافت می‌شود.**
- **حرکت زمین به دور خود، مانع خروج گازهای موجود در هواکره از اتمسفر زمین می‌شود.**
- **در تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، گازی که در دمای $-196\ ^\circ C$ از ستون تقطیر خارج می‌شود، نسبت به گازی که در دمای $-186\ ^\circ C$ از آن خارج می‌شود، واکنش‌پذیرتر است.**
- **در فرایند جداسازی اجزای هواکره، ابتدا هوا را از صافی‌هایی عبور می‌دهند تا رطوبت هوا به صورت یخ جدا شود.**

۱) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

۲) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست

۳) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

۴) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

فقط عبارت سوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

- در لایه‌های بالایی هواکره، علاوه بر اتم‌ها و مولکول‌ها، کاتیون نیز یافت می‌شود، اما خبری از آنیون (مانند O^{2-}) نیست!
- جاذبهٔ زمین مانع خروج گازها از هواکره می‌شود.
- نقطهٔ جوش N_2 و Ar به ترتیب $-196\ ^\circ C$ و $-186\ ^\circ C$ است. با رسیدن دما به نقطهٔ جوش این مواد، آن‌ها به صورت گاز از مخلوط جدا می‌شوند. واکنش‌پذیری N_2 از گاز نجیب Ar بیشتر است.
- هدف عبور هوا از صافی‌ها، گرفته‌شدن گردوغبار آن است.

۹۸ جدول زیر کاربرد یا ویژگی برخی از گازهای سازندهٔ هوای پاک و خشک را نشان می‌دهد. کدام گزینه دربارهٔ مقایسهٔ درصد حجمی گازها در هوا درست است؟

نماد گاز	کاربرد یا ویژگی
A → He	برای خنک‌کردن دستگاه‌های تصویربرداری مانند MRI استفاده می‌شود.
B → N_2	جانداران ذره‌بینی، این گاز را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت می‌کنند.
X → CO_2	در دمای $-78\ ^\circ C$، به حالت جامد درمی‌آید.
D → Ar	در ساخت لامپ‌های رشته‌ای به کار می‌رود.

۱) $B > X > D > A$
۲) $X > D > B > A$
۳) $B > D > X > A$
۴) $X > A > D > B$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ A، B، X و D به ترتیب هلیم، نیتروژن، کربن دی‌اکسید و آرگون هستند:

درصد حجمی گازها در هوا: $\underset{B}{N_2} > O_2 > \underset{D}{Ar} > \underset{X}{CO_2} > Ne > \underset{A}{He} > Kr > Xe$

۹۹ کدام موارد، درست است؟

الف) مقدار میانگین سطح آب‌های آزاد زمین و مساحت برف در نیمکرهٔ شمالی زمین با میزان کربن دی‌اکسید موجود در هوا رابطهٔ مستقیم دارند.

ب) اکسیدی از کربن که شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی آن بیشتر از جفت‌الکترون‌های ناپیوندی است، مولکولی دواتمی است.

پ) اکسید برخی از عنصرهای دستهٔ s جدول دوره‌ای، خاصیت اسیدی دارند.

ت) قراردادن برگ سبز گیاهان در هیدروکلریک اسید، باعث تغییر رنگ آن‌ها به قهوه‌ای می‌شود.

ث) تهیهٔ گاز هلیم از تقطیر جزءبه‌جزء گاز طبیعی مقرون‌به‌صرفه‌تر است؛ زیرا ۷ درصد جرمی گاز طبیعی را هلیم تشکیل می‌دهد.

۱) پ ـ ث ۲) ب ـ ت

۳) الف ـ ب ـ ت ۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) با افزایش مقدار CO_2 در هوا، میانگین سطح آب‌های آزاد، افزایش و مساحت سطح برف در نیمکرهٔ شمالی کاهش می‌یابد.

افزایش میزان CO_2 موجود در هوا ← افزایش دمای کرهٔ زمین و افزایش سطح آب دریاها

افزایش میزان CO_2 موجود در هوا ← کاهش مساحت برف در نیمکرهٔ شمالی

ب) کربن دارای دو اکسید معروف CO و CO_2 است که فقط در CO، شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی بیشتر از شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی است.

۳ جفت‌الکترون پیوندی و ۲ جفت‌الکترون ناپیوندی $:C\equiv O:$ ⇒ مولکول دواتمی

۴ جفت‌الکترون پیوندی و ۴ جفت‌الکترون ناپیوندی $\ddot{O}=C=\ddot{O}$ ⇒ مولکول سه‌اتمی

پ) عنصرهای دستهٔ s، شامل هیدروژن و هلیم و فلزهای گروه‌های (۱) و (۲) هستند. اکسید هیدروژن، همان H_2O است که خاصیت اسیدی یا بازی ندارد. هلیم واکنش‌ناپذیر است و اکسیدهای فلزی (مانند Li_2O و BaO) خاصیت بازی دارند.

ت) *کاملاً درسته! در شکل کتاب درسی نشون داده شده!*

ث) ۷ درصد حجمی (نه جرمی!) گاز طبیعی را هلیم تشکیل می‌دهد.

۱۰۰ پس از موازنهٔ معادله‌های I و II ، نسبت ضریب استوکیومتری NO در واکنش II به واکنش I، کدام است؟

I) $Cu + HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + NO + H_2O$

II) $N_2O_4 + N_2H_4 \rightarrow NO + H_2O$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی برای موازنهٔ هر دو معادله، باید از روش ضرایب مجهول استفاده کرد:

$$I)\ \underline{1}\,Cu + \underline{2b}\,HNO_3 \rightarrow \underline{1}\,Cu(NO_3)_2 + \underline{a}\,NO + \underline{b}\,H_2O$$

$$\left.\begin{array}{l} N\text{ موازنهٔ}: 2b = 2 + a \Rightarrow 2b - a = 2 \\ O\text{ موازنهٔ}: 6b = 6 + a + b \Rightarrow 5b - a = 6 \end{array}\right\} 3b = 4 \Rightarrow b = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

برای از بین رفتن ضریب کسری، همهٔ اعداد را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow 3Cu + 8HNO_3 \rightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 2NO + 4H_2O$$

$$II)\ \underline{a}N_2O_4 + \underline{1}\,N_2H_4 \rightarrow \underline{b}\,NO + \underline{2}\,H_2O$$

$$\left.\begin{array}{l} N\text{ موازنهٔ}: 2a + 2 = b \\ O\text{ موازنهٔ}: 4a = b + 2 \end{array}\right. \begin{array}{l} 2a - b = -2 \\ 4a - b = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -4a + 2b = 4 \\ 4a - b = 2 \end{array} \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow 2N_2O_4 + N_2H_4 \rightarrow 6NO + 2H_2O$$

نسبت ضریب NO در واکنش II به واکنش I برابر $\frac{6}{2} = 3$ است.

کنکور

تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش‌های a و b، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن‌ها کدام است؟

(سؤال ۷۸ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

a) $Pb_3O_4(s) + HNO_3(aq) \rightarrow Pb(NO_3)_2(aq) + PbO_2(s) + H_2O(l)$

b) $KNO_3(s) + C(s) + S(s) \rightarrow K_2S(s) + N_2(g) + CO_2(g)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۱ کدام مورد نادرست است؟

۱) کربن مونوکسید همانند آرگون، گازی بی‌بو است.

۲) میل ترکیبی هموگلوبین خون با گاز اکسیژن کم‌تر از ۰/۰۰۵ برابر میل ترکیبی آن با گاز کربن مونوکسید است.

۳) رنگ شعلهٔ حاصل از سوختن ناقص گاز شهری، مشابه با رنگ شعلهٔ سدیم نیترات است.

۴) طبق قانون پایستگی جرم، شمار مول‌های مواد در دو طرف یک معادلهٔ شیمیایی با هم یکسان است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *کاملاً درسته!*

گزینهٔ (۲): در کتاب درسی می‌خوانیم که میل ترکیبی هموگلوبین خون با کربن مونوکسید، بیش از ۲۰۰ برابر میل ترکیبی آن با اکسیژن است؛ پس می‌توانیم بگوییم که میل ترکیبی هموگلوبین با اکسیژن کم‌تر از $\frac{۱}{۲۰۰} = ۰/۰۰۵$ برابر میل ترکیبی آن با کربن مونوکسید می‌باشد.

گزینهٔ (۳): هر دو مورد، زردرنگ می‌باشد.

نکته

جمع‌بندی رنگ شعله‌ها:

رنگ شعلهٔ فلز سدیم و ترکیب‌های آن + رنگ شعلهٔ سوختن ناقص هیدروکربن‌ها ⇐ زرد

رنگ شعلهٔ فلز لیتیم و ترکیب‌های آن ⇐ قرمز

رنگ شعلهٔ سوختن آهن ⇐ نارنجی

رنگ شعلهٔ فلز مس و ترکیب‌های آن ⇐ سبز

رنگ شعلهٔ سوختن گوگرد و رنگ شعلهٔ سوختن کامل هیدروکربن‌ها ⇐ آبی

رنگ شعلهٔ سوختن منیزیم ⇐ سفید

گزینهٔ (۴): به طور مثال در واکنش $۲H_۲ + O_۲ \rightarrow ۲H_۲O$، تعداد مول‌ها یا مولکول‌های واکنش‌دهنده‌ها (۳ مول یا ۳ مولکول) با فراورده‌ها (۲ مول یا ۲ مولکول) برابر نیست!

در واقع *باید هواستون باشه* که قانون پایستگی جرم و اتم داریم، ولی قانون پایستگی مول یا مولکول نداریم!

۱۰۲ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) تغییر رنگ شکر بر اثر گرما دادن، یک تغییر شیمیایی محسوب می‌شود.

۲) عنصر اکسیژن در ساختار همهٔ مولکول‌های زیستی وجود دارد.

۳) در صورت عدم وجود گازهای گلخانه‌ای در هواکره، میانگین دمای کرهٔ زمین به میزان $255\ K$ کاهش می‌یافت.

۴) در نزدیک‌ترین لایهٔ هواکره به زمین، با افزایش ارتفاع، دما و فشار هوا کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینهٔ (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

در صورت نبود هواکره و وجود گازهای گلخانه‌ای، میانگین دمای کرهٔ زمین به $-18\ ^\circ C$ کاهش می‌یافت.

$$T(K) = \theta(^\circ C) + 273 = -18 + 273 = 255\ K$$

میانگین دمای کرهٔ زمین به $255\ K$ می‌رسید و نه این‌که $255\ K$ کاهش یابد. در مورد گزینهٔ (۴) دقت کنید که تروپوسفر، نزدیک‌ترین لایهٔ هواکره به زمین است که در آن با افزایش ارتفاع، هم فشار و هم دمای هوا کاهش می‌یابد.

۱۰۳ در مخلوطی از اکسید منیزیم و یکی از اکسیدهای آهن، درصد جرمی یون‌های منیزیم و آهن به ترتیب برابر ۴۸ و ۱۴ است. کدام اکسید آهن در این مخلوط وجود دارد و نسبت جرم اکسید منیزیم به اکسید آهن در این مخلوط کدام است؟ $(O = 16 , Mg = 24 , Fe = 56 : g.mol^{-1})$

۱) FeO ـ ۴
۲) FeO ـ ۳
۳) Fe_2O_3 ـ ۳
۴) Fe_2O_3 ـ ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فرمول اکسید منیزیم، MgO و فرمول اکسیدهای آهن، FeO و Fe_2O_3 است. اگر جرم مخلوط را ۱۰۰ گرم فرض کنیم، به کمک درصد جرمی Mg^{2+}، می‌توانیم به جرم MgO و سپس جرم اکسید آهن دست یابیم:

$$\text{جرم } MgO : 48\ g\ Mg^{2+} \times \frac{1\ mol\ Mg^{2+}}{24\ g\ Mg^{2+}} \times \frac{1\ mol\ MgO}{1\ mol\ Mg^{2+}} \times \frac{40\ g\ MgO}{1\ mol\ MgO} = 80\ g\ MgO$$

$$\Rightarrow \text{جرم اکسید آهن} = \text{جرم مخلوط} - \text{جرم اکسید منیزیم} = 100 - 80 = 20\ g$$

$$\Rightarrow \frac{\text{جرم اکسید منیزیم}}{\text{جرم اکسید آهن}} = \frac{80}{20} = 4$$

قسمت دوم سؤال پیدا شد. برای قسمت اول، باید ببینیم به ازای ۲۰ گرم از کدام اکسید آهن، به ۱۴ گرم یون آهن می‌رسیم:

$$20\ g\ FeO \times \frac{1\ mol\ FeO}{72\ g\ FeO} \times \frac{1\ mol\ Fe^{2+}}{1\ mol\ FeO} \times \frac{56\ g\ Fe^{2+}}{1\ mol\ Fe^{2+}} \simeq 15/55\ g\ Fe^{2+}$$

$$20\ g\ Fe_2O_3 \times \frac{1\ mol\ Fe_2O_3}{160\ g\ Fe_2O_3} \times \frac{2\ mol\ Fe^{3+}}{1\ mol\ Fe_2O_3} \times \frac{56\ g\ Fe^{3+}}{1\ mol\ Fe^{3+}} = 14\ g\ Fe^{3+} \quad ✓$$

۱۰۴ کدام موارد زیر، درست است؟

الف) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در آلوتروپ‌های اکسیژن برابر است.

ب) اکسیژن در لایهٔ استراتوسفر، به طور عمده، به شکل مولکول‌های سه‌اتمی اوزون یافت می‌شود.

پ) هنگامی که تابش پرانرژی فرابنفش به مولکول اوزون برسد، پیوند اشتراکی بین دوتا از اتم‌های اکسیژن می‌شکند.

ت) بیشترین مقدار اوزون در تروپوسفر قرار دارد که در این لایه با نقش زیانبار و مضر آن مواجه هستیم.

۱) الف و پ ۲) ب و پ

۳) الف و ت ۴) ب و ت

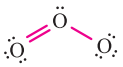
پاسخ: گزینهٔ ۱

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی عبارت‌ها:

الف) در هر دو آلوتروپ اکسیژن (O_2, O_3) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی برابر ۲ است.



$$\Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}} = \frac{۶}{۳} = ۲$$



$$\Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

ب) در تمامی لایه‌های هواکره، درصد حجمی اوزون نسبت به اکسیژن خیلی کم‌تر است و اکسیژن به طور عمده به شکل مولکول‌های دواتمی (O_2) در هواکره وجود دارد.

پ)



ت) بیشترین مقدار اوزون در منطقهٔ مشخصی از استراتوسفر قرار دارد که در این لایه با نقش مفید و محافظتی آن مواجه هستیم.

۱۰۵ **برق یک واحد صنعتی فقط از زغال‌سنگ تولید می‌شود و این واحد در یک روز ۵۰ کیلووات ساعت برق مصرف می‌کند. در صورتی که ۲۱۹ درخت تنومند در اطراف این واحد صنعتی باشد، این درختان در یک سال (۳۶۵ روز) چند درصد ردپای CO_2 این واحد صنعتی را کاهش می‌دهند؟ (هر درخت تنومند، ۵۰ کیلوگرم CO_2 را در یک سال مصرف می‌کند و به ازای تولید هر کیلووات ساعت برق توسط زغال‌سنگ، یک کیلوگرم CO_2 تولید می‌شود.)**

۱) ۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۸۰ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: محاسبهٔ مصرف برق واحد صنعتی در یک سال:

$$۳۶۵ \text{ روز} \times \frac{۵۰ \text{ kWh}}{۱ \text{ روز}} = (۳۶۵ \times ۵۰) \text{ kWh}$$

گام دوم: محاسبهٔ CO_2 تولیدشده بر اثر تولید این مقدار برق توسط زغال‌سنگ:

$$(۳۶۵ \times ۵۰ \text{ kWh}) \times \frac{۱ \text{ kg } CO_2}{۱ \text{ kWh}} = (۳۶۵ \times ۵۰) \text{ kg } CO_2$$

گام سوم: محاسبهٔ مصرف CO_2 توسط درختان:

$$۲۱۹ \text{ درخت} \times \frac{۵۰ \text{ kg } CO_2}{۱ \text{ درخت}} = (۲۱۹ \times ۵۰) \text{ kg } CO_2$$

گام چهارم: محاسبهٔ درصد CO_2 مصرف‌شده توسط درختان:

$$\text{درصد مصرف } CO_2 = \frac{\text{جرم } CO_2 \text{ مصرف‌شده توسط درختان}}{\text{جرم کل } CO_2 \text{ تولیدشده}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۱۹ \times \cancel{۵۰}}{۳۶۵ \times \cancel{۵۰}} \times ۱۰۰ = ٪۶۰$$