پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله ششم
۱۴۰۵-۰۶	۱۵/آبان/۱۴۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ میثم حصارکی ـ علی شهرابی ـ محمد گودرزی ـ محسن علی‌نجاری ـ سروش موئینی
هندسه (۲)	امیرحسین ابومحبوب
آمار و احتمال	مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ سعید قندچی
فیزیک (۲)	یاشار انگوتی ـ نوید شاهی
شیمی (۲)	معصومه سعیدی ـ یاسر عبداللهی ـ محمد عظیمیان زواره ـ وحید فارسیان ـ محمد قهرمانی‌نژاد

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	محسن علی‌نجاری	محسن علی‌نجاری	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی مازیار احمدی‌ناو	محمد بهرامی سید محمدمهدی حسینی سهند محمدکریم‌نژاد
هندسه (۲)	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	مریم نظری	ماهک کناره ماهان فنی‌فر منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	سعید قندچی	منصور زرکش اصفهانی عباس حسینی مریم نظری ابوالفضل ناصری ماهان فنی‌فر
فیزیک (۲)	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا جعفری محمدجواد سورچی	علیرضا جباری هادی نجفی	علیرضا جعفری‌آثار ادریس محمدی مدیا عیدی فاطمه نجفی امیر محمودی انزابی
شیمی (۲)	یاسر عبداللهی	وحید فارسیان	وحید فارسیان	مرتضی نصیرزاده محمدمهدی کریمیان یاشار ذریه	هادی عبادی علیرضا فرضعلی‌زاده امیر قاسمی‌پور مهدیس محبت‌پناه

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۵

Azmoonkheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد ساناز فلاحی ـ نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخائی ـ الهام سهرابی طاهره صادق‌نژاد ـ مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند ـ مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

ایران تستنو
توشه ای برای موفقیت

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۵

Azmoonkheilisabz.com

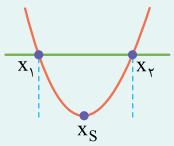
۱ نقاط $(۶,۴)$ و $(۲/۲۵,-۴)$ روی نمودار یک تابع درجه‌دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع، در صورت وجود کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۱۵}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۵}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اگر دو نقطهٔ هم‌عرض $(x_۱, y_۰)$ و $(x_۲, y_۰)$ روی نمودار تابع درجه‌دوم f با ضابطهٔ $f(x)=a(x-x_S)^۲+y_S$ قرار داشته باشند، x_S (طول رأس سهمی) میانگین $x_۱$ و $x_۲$ است:



$$x_S=\frac{x_۱+x_۲}{۲}$$

x_S میانگین صفرهای تابع f نیز هست.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، کافی است مجموع طول‌های دو نقطهٔ داده‌شده را حساب کنیم:

$$\text{مجموع صفرهای تابع}=۶-۲/۲۵=۳/۷۵=\frac{۱۵}{۴}$$

کنکور نقاط $(۴,-۳)$ و $(۴,-۱/۵)$ روی یک تابع درجه‌دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

(سؤال ۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲ اگر ... , z , y , x یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت و ... , $\frac{z}{۳}$, $\frac{y}{۲}$, x یک دنبالهٔ هندسی باشد، مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی چند برابر جملهٔ اول آن می‌تواند باشد؟

$d \neq ۰$

۱) ۵۵ ۲) ۱۱ ۳) ۱۱۰ ۴) ۳۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

- اگر a، b و c، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، رابطهٔ $۲b = a + c$ بین آن‌ها برقرار است.
- اگر a، b و c، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، رابطهٔ $b^۲ = ac$ بین آن‌ها برقرار است.
- مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی a_n با قدرنسبت d از روابط زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n(a_۱ + a_n)}{۲} \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: قدرنسبت دنبالهٔ حسابی را d می‌گیریم؛ بنابراین سه جملهٔ اول آن را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

دنبالهٔ حسابی: $y-d , y , y+d , ...$

هم‌چنین سه جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی به صورت زیر درخواهد آمد:

دنبالهٔ هندسی: $y-d , \frac{y}{۲} , \frac{y+d}{۳} , ...$

حالا طبق ویژگی جملات متوالی دنبالهٔ هندسی داریم:

$$(\frac{y}{۲})^۲ = (y-d)(\frac{y+d}{۳}) \Rightarrow \frac{y^۲}{۴} = \frac{y^۲ - d^۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۴y^۲ - ۴d^۲ = ۳y^۲ \Rightarrow y^۲ = ۴d^۲ \Rightarrow y = \pm ۲d$$

گام دوم: حالا در هر حالت مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی را برحسب d حساب می‌کنیم:

$y = -۲d \Rightarrow$ دنباله: $-۳d , -۲d , -d , ۰ , ...$

$$\Rightarrow S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲(-۳d) + ۹d) = ۵ \times ۳d = ۱۵d$$

$y = ۲d \Rightarrow$ دنباله: $d , ۲d , ۳d , ...$

$$\Rightarrow S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲(d) + ۹d) = ۵۵d$$

گام سوم: در حالت اول مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی، ۵− برابر و در حالت دوم، ۵۵ برابر جملهٔ اول آن است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

کنکور

اگر a , b , c، سه جملهٔ نخست و متمایز یک دنبالهٔ حسابی بوده و $\frac{۱}{۴}c$, $\frac{۱}{۲}a$, b، سه جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی باشند، دو برابر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ *(سؤال ۱۱۳ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) −۱ ۴) −۲

۳ مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی، $S_n = (3x+1) - x \times 2^n$ است. مجموع دو جملهٔ سوم این دنباله کدام است؟

جمله‌های پنجم و ششم

۱) ۳۲
۲) ۲۸
۳) ۲۴
۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی a_n با قدرنسبت q از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق رابطهٔ درس‌باکس، مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \times q^n$$

با مقایسهٔ رابطهٔ بالا و رابطهٔ صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $q = 2$ است.

$$\Rightarrow S_n = -a_1 + a_1 \times 2^n$$

گام دوم: هم‌چنین داریم:

$$\begin{cases} -a_1 = 3x+1 \\ a_1 = -x \end{cases} \Rightarrow 3x+1 = x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

و در نتیجه $a_1 = \frac{1}{2}$ است.

گام سوم: بنابراین دنبالهٔ هندسی مورد نظر، یک دنباله با جملهٔ اول $\frac{1}{2}$ و قدرنسبت ۲ است:

$$a_n : \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

مجموع دو جملهٔ سوم این دنباله، یعنی جملات پنجم و ششم آن، برابر $8+16 = 24$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^۲ - x - ۸ = ۰$ باشند، به طوری که $\alpha > \beta$، حاصل عبارت $\frac{۵\alpha - ۳\beta - ۱}{۴}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳۳}$
۲) ۳۳
۳) ۱۱
۴) $\sqrt{۱۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، داریم:

- مجموع جواب‌ها: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
- حاصل‌ضرب جواب‌ها: $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

برخی از روابط دیگر بین α و β به شرح زیر است:

- مجموع مربعات جواب‌ها: $\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P$
- مجموع مکعبات جواب‌ها: $\alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳SP$
- اختلاف جواب‌ها: $|\alpha - \beta| = \sqrt{S^۲ - ۴P}$
- مجموع معکوس‌های جواب‌ها: $\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = \frac{S}{P}$
- مجموع نسبت‌های جواب‌ها: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{S^۲}{P} - ۲$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک روش Δ، معادله را حل می‌کنیم:

$$x^۲ - x - ۸ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۱ + ۳۲ = ۳۳} x = \frac{۱ \pm \sqrt{۳۳}}{۲}$$

گام دوم: بنابراین طبق فرض $\alpha = \frac{۱ + \sqrt{۳۳}}{۲}$ و $\beta = \frac{۱ - \sqrt{۳۳}}{۲}$ است و داریم:

$$\frac{۵\alpha - ۳\beta - ۱}{۴} = \frac{۵(\frac{۱ + \sqrt{۳۳}}{۲}) - ۳(\frac{۱ - \sqrt{۳۳}}{۲}) - ۱}{۴} = \frac{۸\sqrt{۳۳}}{۸} = \sqrt{۳۳}$$

تیزپازی

عبارت $\frac{۵\alpha - ۳\beta - ۱}{۴}$ را به صورت $\frac{(\alpha + \beta) + ۴(\alpha - \beta) - ۱}{۴}$ بازنویسی می‌کنیم:

$$\xrightarrow{S=۱, P=-۸} \begin{cases} \alpha + \beta = S = ۱ \\ \alpha - \beta = \sqrt{S^۲ - ۴P} = \sqrt{۳۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha + \beta) + ۴(\alpha - \beta) - ۱}{۴} = \frac{۱ + ۴\sqrt{۳۳} - ۱}{۴} = \sqrt{۳۳}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵ به ازای کدام مقدار k، هر یک از جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم $16x^2 - kx + 1 = 0$، توان چهارم جواب‌های معادلهٔ $2x^2 - 2x - 1 = 0$ است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۴۹ ۴) ۵۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^2 - Sx + P = 0$ باشند، داریم:

مجموع مربعات جواب‌ها: $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

مجموع مکعبات جواب‌ها: $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$

اختلاف جواب‌ها: $|\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P}$

مجموع معکوس جواب‌ها: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P}$

مجموع نسبت‌های جواب‌ها: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{S^2}{P} - 2$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جواب‌های معادلهٔ $2x^2 - 2x - 1 = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = 1 \\ P = \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

گام دوم: جواب‌های معادلهٔ $16x^2 - kx + 1 = 0$ را $\alpha' = \alpha^4$ و $\beta' = \beta^4$ در نظر می‌گیریم:

$$S' = \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

بنابراین داریم:

$$S' = \frac{k}{16} = (1+1)^2 - 2(\frac{1}{4}) = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow k = 56$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۱۸x + ۱ = ۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{۱}{\sqrt[۳]{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{\beta}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint حواست باشه که α و β معکوس همن. اول عبارت مطلوب رو به توان ۳ برسون.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$S = \alpha + \beta = ۱۸$$

$$P = \alpha\beta = ۱$$

یعنی α و β معکوس یکدیگرند، پس حاصل عبارت $\frac{۱}{\sqrt[۳]{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{\beta}}$ با حاصل عبارت $\sqrt[۳]{\alpha} + \sqrt[۳]{\beta}$ برابر است.

گام دوم: حاصل عبارت $\sqrt[۳]{\alpha} + \sqrt[۳]{\beta}$ را برابر t در نظر می‌گیریم و داریم:

$$t^۳ = \alpha + \beta + ۳\sqrt[۳]{\alpha\beta}\underbrace{(\sqrt[۳]{\alpha} + \sqrt[۳]{\beta})}_{t}$$

$$\xrightarrow{S=۱۸, P=۱} t^۳ = ۱۸ + ۳t$$

گام سوم: معادلهٔ زیر را داریم:

$$t^۳ - ۳t - ۱۸ = ۰$$

که می‌توانیم شمارنده‌های عدد ۱۸ را در آن امتحان کنیم، اگر $t = ۳$ را امتحان کنیم، داریم:

$$۳^۳ - ۳\times ۳ - ۱۸ = ۰ \checkmark$$

حالا با تقسیم چندجمله‌ای $t^۳ - ۳t - ۱۸$ بر $t - ۳$، می‌توانیم جواب‌های دیگر معادله را در صورت وجود به دست آوریم:

$$t^۳ - ۳t - ۱۸ = (t-۳)\underbrace{(t^۲ + ۳t + ۶)}_{\Delta \text{ منفی است.}} = ۰ \Rightarrow t = ۳$$

بنابراین $\frac{۱}{\sqrt[۳]{\alpha}} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{\beta}} = ۳$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷ اگر بیشترین مقدار تابع درجه‌دوم f با ضابطهٔ $f(x)=(m+1)x^2+(1-m)x-m$ برابر $-2m-1$ باشد، مقدار m کدام است؟

دهانهٔ سهمی به سمت پایین است یا ضریب x^2 منفی است.

۱) -2

۲) -4

۳) -3

۴) -5

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

نقطهٔ رأس نمودار تابع درجه‌دوم f با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$، نقطهٔ $S(x_S, y_S)$ است که در آن داریم:

$$\begin{cases} x_S=-\frac{b}{2a} \\ y_S=-\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

اگر $a<0$ باشد، y_S بیشترین مقدار و اگر $a>0$ باشد، y_S کم‌ترین مقدار تابع است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا y_S را طبق درس‌باکس، برحسب m به دست می‌آوریم:

$$y_S=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(1-m)^2-4(m+1)(-m)}{4(m+1)}=-\frac{5m^2+2m+1}{4m+4}$$

گام دوم: حالا مقدار y_S را برابر $-2m-1$ قرار می‌دهیم:

$$-\frac{5m^2+2m+1}{4m+4}=-2m-1 \Rightarrow 5m^2+2m+1=8m^2+12m+4 \Rightarrow 3m^2+10m+3=0$$

معادلهٔ بالا را به کمک روش روسی حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{a\times c} r^2+10r+9=(r+9)(r+1)=0 \Rightarrow r_1=-1\ ,\ r_2=-9$$

$$\xrightarrow{\div a} m_1=-\frac{1}{3}\ ,\ m_2=-3$$

گام سوم: اما طبق فرض، تابع f بیشترین مقدار دارد، پس ضریب x^2 در ضابطهٔ آن باید منفی باشد، در نتیجه فقط مقدار $m=-3$ قابل قبول است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸ معادلهٔ $\frac{k}{x^۲-x-۶}=۱-\frac{۳}{x-۳}$ به ازای چند مقدار صحیح نامثبت k، دو جواب دارد؟

$k \leq ۰$

۱) ۱۳
۲) ۱۴
۳) ۱۵
۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مخرج کسر سمت چپ را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{k}{x^۲-x-۶}=\frac{k}{(x-۳)(x+۲)}$$

و در سمت راست تساوی، مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$۱-\frac{۳}{x-۳}=\frac{x-۶}{x-۳}$$

بنابراین معادلهٔ زیر را داریم:

$$\frac{k}{(x-۳)(x+۲)}=\frac{x-۶}{x-۳}$$

گام دوم: بدیهی است که $x-۳$ مخالف صفر است، پس می‌توانیم از مخرج‌ها حذف کنیم:

$$\Rightarrow \frac{k}{x+۲}=x-۶$$

حالا طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$x^۲-۴x-۱۲=k \Rightarrow x^۲-۴x-۱۲-k=۰$$

گام سوم: معادلهٔ بالا زمانی دو جواب دارد که Δ ی آن مثبت باشد:

$$\Delta=(-۴)^۲-۴(۱)(-۱۲-k)=۴k+۶۴>۰ \Rightarrow k>-۱۶$$

اما حواسمان هست که هیچ‌کدام از جواب‌ها نباید -۲ و ۳ شوند:

$$\begin{cases} x \neq -۲: (-۲)^۲-۴(-۲)-۱۲-k \neq ۰ \Rightarrow k \neq ۰ \\ x \neq ۳: (۳)^۲-۴(۳)-۱۲-k \neq ۰ \Rightarrow k \neq -۱۵ \end{cases}$$

گام چهارم: در نتیجه مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای k برابر است با:

$$(-۱۶,+\infty)-\{-۱۵,۰\}$$

این مجموعه شامل ۱۴ عدد صحیح نامثبت است (از -۱۴ تا -۱).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۳}{x^۲-۳x+۲}+\frac{۸}{x^۲-۳x+۳}=\frac{۱۵}{x^۲-۳x+۴}$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) این معادله جواب حقیقی ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint بهتره که $x^۲-۳x+۳$ رو متغیر جدید بگیری.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** $x^۲-۳x+۳$ را متغیر جدید t می‌گیریم، در این صورت معادله به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\frac{۱۵}{t+۱}=\frac{۸}{t}+\frac{۳}{t-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۵}{t+۱}=\frac{۱۱t-۸}{t^۲-t}$$

گام دوم: حالا طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$۱۵t^۲-۱۵t=۱۱t^۲+۳t-۸ \Rightarrow ۴t^۲-۱۸t+۸=۰$$

گام سوم: معادلهٔ بالا را با تجزیه به کمک اتحاد جمله‌مشترک حل می‌کنیم:

$$(۲t)^۲-۹(۲t)+۸=۰ \Rightarrow (۲t-۸)(۲t-۱)=۰$$

$$\Rightarrow t=۴ \text{ یا } t=\frac{۱}{۲}$$

گام چهارم: حالا می‌توانیم جواب‌های معادلهٔ اصلی را پیدا کنیم:

$$x^۲-۳x+۳=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲-۳x+\frac{۵}{۲}=۰$$

Δی معادلهٔ بالا منفی است، پس معادله جواب ندارد.

$$x^۲-۳x+۳=۴ \Rightarrow x^۲-۳x-۱=۰$$

Δی این معادله مثبت است، پس معادله دو جواب دارد. هر دو جواب گنگ‌اند و مخرج کسرها را صفر نمی‌کنند، پس قابل قبول‌اند.

مجموع این جواب‌ها برابر ۳ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰ نسبت جواب‌های معادلهٔ $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2-2x}{2+2x}=-\frac{3}{2}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۹ ۴) -۹

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint $\frac{x+1}{x-1}$ رو یه متغیر جدید بگیر.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ زیر را داریم:

$$\xrightarrow{x\neq\pm1}\ \frac{x+1}{x-1}+\frac{1-x}{1+x}=-\frac{3}{2}$$

حالا اگر $\frac{x+1}{x-1}$ را متغیر جدید t بگیریم، معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$t-\frac{1}{t}=-\frac{3}{2}$$

گام دوم: مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{t^2-1}{t}=-\frac{3}{2}$$

سپس طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$2t^2-2=-3t\ \Rightarrow\ 2t^2+3t-2=0$$

معادلهٔ بالا را به کمک روش روسی حل می‌کنیم:

$$r^2+3r-4=(r+4)(r-1)=0\ \Rightarrow\ r=-4,1$$

$$\xrightarrow{\div2}\ t=-2,\frac{1}{2}$$

گام سوم: حالا می‌توانیم جواب‌های معادلهٔ اصلی را به دست آوریم:

$$\begin{cases}t=\frac{x+1}{x-1}=-2\ \Rightarrow\ x+1=-2x+2\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{3}\\ t=\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 2x+2=x-1\ \Rightarrow\ x=-3\end{cases}$$

بنابراین نسبت جواب‌های معادله می‌تواند -۹ یا $-\frac{1}{9}$ باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱ **دو شیر آب، یک استخر را پر می‌کنند. زمان لازم برای پرکردن استخر توسط شیر دوم، دو برابر همین زمان برای شیر اول است. اگر هر دو شیر با هم باز باشند، استخر در ۸ ساعت پر می‌شود. هر شیر به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می‌کند؟**

۱) شیر اول: ۱۲ ساعت ـ شیر دوم: ۲۴ ساعت

۲) شیر اول: ۱۰ ساعت ـ شیر دوم: ۲۰ ساعت

۳) شیر اول: ۱۵ ساعت ـ شیر دوم: ۳۰ ساعت

۴) شیر اول: ۱۴ ساعت ـ شیر دوم: ۲۸ ساعت

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

فرض کنید، فرد ۱ کاری را در مدت t_1، فرد ۲ همان کار را در مدت‌زمان t_2، فرد ۳ در مدت‌زمان t_3، ... و فرد n در مدت‌زمان t_n به اتمام برساند. اگر همهٔ این افراد با هم کار کنند و کار در مدت‌زمان T به اتمام برسد، رابطهٔ زیر را بین t_iها و T داریم:

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}=\frac{1}{T}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

مدت‌زمانی که شیر اول نیاز دارد تا استخر را پر کند، t می‌گیریم؛ در نتیجه مدت‌زمان شیر دوم ۲t خواهد بود؛ بنابراین معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{2t}=\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{3}{2t}=\frac{1}{8} \Rightarrow t=12\ h$$

یعنی شیر اول به ۱۲ ساعت و شیر دوم به ۲۴ ساعت زمان نیاز دارد.

کتاب درسی

ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

(حسابان (۱) ـ تمرین ۹ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مشابه امتحان نهایی

۱۲ جواب معادلهٔ $x-\sqrt{2x+6}=1$ برابر با α است. مجموع ارقام عدد $4\alpha+1$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۵

۳) ۴

۴) ۳

مشاوره در معادلات رادیکالی، سعی کنید رادیکال را در یک سمت تساوی و سایر عبارت‌های جبری را در سمت دیگر تساوی بنویسید، سپس عبارات را به توان لازم برسانید تا رادیکال حذف شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x-1=\sqrt{2x+6}$$

حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\xrightarrow{x-1\geq 0} x^2-2x+1=2x+6 \Rightarrow x^2-4x-5=0$$

گام دوم: معادلهٔ بالا را با تجزیه به کمک اتحاد جمله‌مشترک حل می‌کنیم:

$$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } 5$$

یه‌جور دیگه

$$\xrightarrow{a+c=b} x_1=-1\ ,\ x_2=-\frac{c}{a}=5$$

اما فقط $x=5$ در معادلهٔ اصلی $x-1=\sqrt{2x+6}$ صدق می‌کند.

گام سوم: پس $\alpha=5$ و در نتیجه $4\alpha+1=21$ است. مجموع ارقام عدد ۲۱، برابر ۳ است.

امتحان نهایی

معادلهٔ $\sqrt{x+1}=x-5$ را حل کنید. (سؤال ۵ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ معادلهٔ $\sqrt{x^۲-۲x+۶}+\sqrt{x^۲-۲x+۱}=۵$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint بازم تغییر متغیر داری.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** $x^۲-۲x+۱$ را متغیر جدید t می‌گیریم:

$$\Rightarrow \sqrt{t+۵}+\sqrt{t}=۵$$

و در نتیجه معادلهٔ زیر را داریم:

$$\sqrt{t+۵}=۵-\sqrt{t}$$

گام دوم: حالا طرفین معادلهٔ بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$t+۵=۲۵+t-۱۰\sqrt{t} \Rightarrow ۱۰\sqrt{t}=۲۰ \Rightarrow \sqrt{t}=۲ \Rightarrow t=۴$$

گام سوم: $t=۴$ قابل قبول است و براساس آن، جواب‌های معادلهٔ اصلی را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲-۲x+۱=۴ \Rightarrow x^۲-۲x-۳=(x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=۳,-۱$$

معادلهٔ اصلی دو جواب دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ اختلاف جواب‌های $\frac{۳}{۴}+\sqrt{x(x+۲)}=(x+۱)^۲$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint می‌تونی $\sqrt{x(x+۲)}$ رو متغیر جدید t بگیری.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ زیر را داریم:

$$\frac{۳}{۴}+\sqrt{x(x+۲)}=x^۲+۲x+۱$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}+\sqrt{x(x+۲)}=x(x+۲)+۱$$

که اگر $t=\sqrt{x(x+۲)}$ باشد، داریم:

$$\frac{۳}{۴}+t=t^۲+۱$$

گام دوم: معادلهٔ بالا را برحسب t حل می‌کنیم:

$$t^۲-t+\frac{۱}{۴}=(t-\frac{۱}{۲})^۲=۰ \Rightarrow t=\frac{۱}{۲}$$

گام سوم: حالا می‌توانیم، مقادیر x را پیدا کنیم:

$$\sqrt{x(x+۲)}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲+۲x=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲+۲x-\frac{۱}{۴}=۰$$

اختلاف جواب‌های معادلهٔ بالا برابر است با:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۴+۱}}{۱}=\sqrt{۵}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵ معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{x-۳}}=\sqrt{x-۲}+\sqrt{۳-x}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint محدودهٔ x رو به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** همهٔ عبارت‌های رادیکالی باید قابل تعریف باشند؛ بنابراین در ابتدا محدودهٔ جواب‌ها (x) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\sqrt{x-۳} \;;\; x-۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۳\\ \sqrt{x-۲} \;;\; x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲\\ \sqrt{۳-x} \;;\; ۳-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۳\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\in\{۳\}$$

گام دوم: بنابراین تنها جواب معادله می‌تواند ۳ باشد؛ آن را امتحان می‌کنیم:

$\sqrt{۳+۰}=\sqrt{۱+۰}$ ✖

بنابراین معادله جواب ندارد.

کنکور معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲-x}=\sqrt{۲x-۳}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟ *(سؤال ۱۱۶ کنکور تجربی ۱۴۰۲ ـ نوبت اول)*

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ کدام گزینه در مورد جواب‌های معادلهٔ $||x|-۳|=۱$ درست است؟

۱) تنها دارای دو جواب منفی است.

۲) تنها دارای دو جواب مثبت است.

۳) دارای دو جواب مثبت و دو جواب منفی است.

۴) دارای یک جواب مثبت و یک جواب منفی است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

قدرمطلق و ویژگی‌های آن:

- $|x|$ فاصلهٔ عدد x را از صفر نشان می‌دهد و همواره عددی نامنفی است:

$$|\text{☁}|=\begin{cases}-\text{☁} & ;\ \text{☁}\le ۰\\ \text{☁} & ;\ \text{☁}\ge ۰\end{cases}$$

- برخی از ویژگی‌های قدرمطلق به شرح زیر هستند:

۱) $|\text{☁}|\ge ۰$

۲) $|\text{☁}|=|-\text{☁}| \xrightarrow{\text{نتیجه}} |○|=|△| \Rightarrow \begin{cases}○=△\\ \text{یا}\\ ○=-△\end{cases}$

۳) $|\text{☁}|=a \xrightarrow{a>۰} \begin{cases}\text{☁}=a\\ \text{یا}\\ \text{☁}=-a\end{cases}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق ویژگی‌های قدرمطلق در ابتدا داریم:

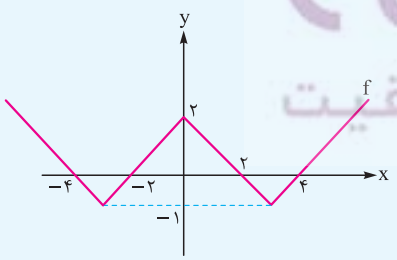
$$\xrightarrow{||x|-۳|=۱} \begin{cases}|x|-۳=-۱ \Rightarrow |x|=۲\\ \text{یا}\\ |x|-۳=۱ \Rightarrow |x|=۴\end{cases}$$

گام دوم: هر کدام از معادلات قدرمطلقی بالا ۲ جواب دارند، بنابراین معادله در کل ۴ جواب دارد:

$$\begin{cases}|x|=۲ \Rightarrow x=\pm ۲\\ |x|=۴ \Rightarrow x=\pm ۴\end{cases}$$

یه‌جور دیگه

نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=||x|-۳|-۱$ را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشخص است، طول ۲ نقطه از نقاط برخورد نمودار تابع f با محور x مثبت و طول ۲ نقطهٔ دیگر منفی است.

امتحان نهایی معادلهٔ قدرمطلقی $||x|-۱|=۲$ را به روش جبری حل کنید. *(سؤال ۶ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲)*

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷ به‌ازای چند مقدار صحیح m، معادلهٔ $|x^۲-۴x+۵|-۱=|m-۲|$ جواب حقیقی ندارد؟

همواره مثبت است.

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نامساوی‌های قدرمطلقی:

$|\square| \geq a \xrightarrow{a>۰} \begin{cases} \square \geq a \\ \text{یا} \\ \square \leq -a \end{cases}$

$|\square| \leq a \xrightarrow{a>۰} -a \leq \square \leq a$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از آن‌جا که عبارت $x^۲-۴x+۵=(x-۲)^۲+۱$ همواره مثبت است، معادلهٔ صورت سؤال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$|m-۲|-۱=x^۲-۴x+۵ \Rightarrow |m-۲|=x^۲-۴x+۶$$

گام دوم: عبارت سمت راست را به فرم مربع کامل می‌نویسیم:

$$|m-۲|=(x-۲)^۲+۲$$

عبارت سمت راست بزرگ‌تر از ۲ یا مساوی با آن است؛ بنابراین برای این‌که معادلهٔ بالا جواب حقیقی نداشته باشد، لازم است که $|m-۲|$ از ۲ کوچک‌تر باشد:

$$\xrightarrow{|m-۲|<۲} -۲<m-۲<۲ \Rightarrow ۰<m<۴$$

گام سوم: بنابراین m باید عضو بازهٔ $(۰,۴)$ باشد؛ اعداد صحیح این بازه عبارت‌اند از: ۱، ۲ و ۳.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ **مجموع فاصلهٔ نقطهٔ $(x,0)$ از نقطهٔ $(3,0)$ و دو برابر فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(1,0)$، برابر ۳ است. مقدار x کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: فاصلهٔ نقطهٔ $(x,0)$ از نقطهٔ $(3,0)$ برابر $|x-3|$ و فاصلهٔ نقطهٔ $(x,0)$ از نقطهٔ $(1,0)$ برابر $|x-1|$ است؛ بنابراین عملاً معادلهٔ زیر را داریم:

$$|x-3|+2|x-1|=3$$

گام دوم: حالا به کمک بازه‌بندی براساس ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها، معادلهٔ بالا را حل می‌کنیم:

جواب	معادله	محدوده
$x=\frac{2}{3}$ ✓	$-x+3-2x+2=3 \Rightarrow 3x=2$	$x<1$
$x=2$ ✓	$-x+3+2x-2=3 \Rightarrow x=2$	$1\le x<3$
$x=\frac{8}{3}$ ✗	$x-3+2x-2=3 \Rightarrow 3x=8$	$x\ge 3$

پس جواب‌های معادله $x=\frac{2}{3}$ و $x=2$ هستند.

تیزبازی می‌توانستیم مقادیر گزینه‌ها را در معادلهٔ گام اول جای‌گذاری کنیم.

کتاب درسی

بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه به طول‌های ۱− و ۳ روی محور xها برابر ۶ باشد؟

(حسابان (۱) ـ تمرین ۲ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

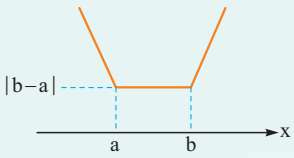
۱۹ معادلهٔ $|x-۲|=|x+۱|+|x+۳|+|x+۴|$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

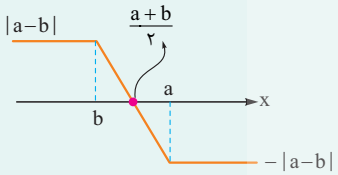
درس Box

نمودار گلدانی: نمودار توابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-a|+|x-b|$ به صورت زیر هستند:

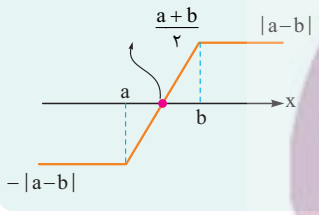


نمودار سرسره‌ای: نمودار توابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-a|-|x-b|$ به یکی از صورت‌های زیر است:

$a>b$



$a<b$

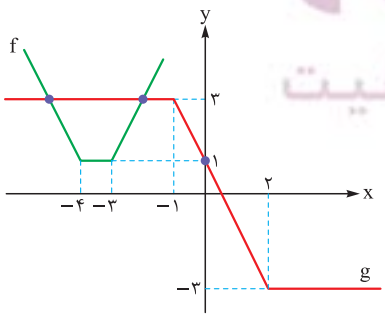


پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حل این معادله به کمک بازه‌بندی بسیار طولانی و وقت‌گیر است؛ بنابراین چون صرفاً تعداد جواب‌ها مورد نظر است، کافی است دو تابع را چنان در نظر بگیریم که معادلهٔ حاصل از تلاقی آن‌ها همین معادله باشد، با بازنویسی معادله داریم:

$$|x+۴|+|x+۳|=|x-۲|-|x+۱|$$

گام دوم: بنابراین دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=|x+۴|+|x+۳|$ و $g(x)=|x-۲|-|x+۱|$ را در نظر می‌گیریم؛ تعداد نقاط برخورد نمودارهای این دو تابع، برابر با تعداد جواب‌های معادله است:



همان‌طور که مشخص است، تعداد نقاط برخورد برابر ۲ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰ مجموع عرض نقاط مشترک نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=||x|-1|+||x|-2|$ و خط $y=\frac{x}{2}+3$ کدام است؟

۱) ۶/۶ ۲) ۶/۸
۳) ۹/۶ ۴) ۹/۸

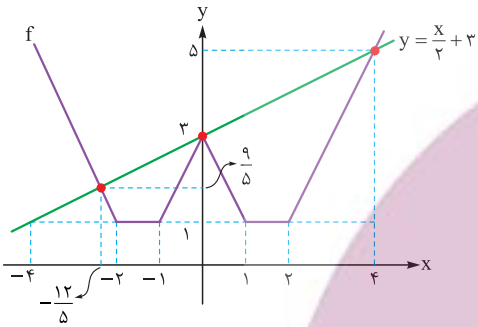
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نمودار تابع f و خط $y=\frac{x}{2}+3$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

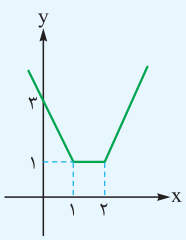
$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & ; \quad x\le -2\\ 1 & ; \quad -2\le x\le -1\\ 2x+3 & ; \quad -1\le x\le 0\\ -2x+3 & ; \quad 0\le x\le 1\\ 1 & ; \quad 1\le x\le 2\\ 2x-3 & ; \quad x\ge 2\end{cases}$$

دقت کنید که $x=0,\pm1,\pm2$ ریشه‌های عبارات قدرمطلقی هستند:



یه‌جور دیگه

نمودار تابع $g(x)=|x-1|+|x-2|$ را رسم می‌کنیم؛ نمودار این تابع شبیه یک گلدان است:



حالا چون $f(x)=g(|x|)$ است؛ کافی است در نمودار بالا، بخش $x<0$ نمودار را حذف و به جای آن قرینهٔ بخش $x>0$ را نسبت به محور y رسم کنیم.

گام دوم: حالا طول نقاط برخورد دو نمودار را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x\le -2 \ ; \ -2x-3=\frac{x}{2}+3 \Rightarrow \frac{5x}{2}=-6 \Rightarrow x=-\frac{12}{5} \Rightarrow y=\frac{9}{5}\\ x\ge 2 \ ; \ 2x-3=\frac{x}{2}+3 \Rightarrow \frac{3x}{2}=6 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=5\end{cases}$$

گام سوم: بنابراین نقاط مشترک نمودار تابع f و خط $y=\frac{x}{2}+3$ عبارت‌اند از $(-\frac{12}{5},\frac{9}{5})$، $(0,3)$ و $(4,5)$ که مجموع عرض آن‌ها برابر است با:

$$\frac{9}{5}+3+5=\frac{49}{5}=9/8$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱ **می‌خواهیم از نقطهٔ M خارج از دایرهٔ C، مماسی بر این دایره رسم کنیم. اگر شعاع دایره برابر ۶ و فاصلهٔ M از مرکز دایره برابر ۸ باشد، در ابتدا دایره‌ای به کدام شعاع باید رسم کنیم؟**

۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۱۲

مشاوره این سؤال براساس روش رسم خط مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره، در متن صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی طراحی گردیده است. روش رسم خط مماس یکی از سؤالات احتمالی در امتحانات داخلی مدارس و امتحان نهایی محسوب می‌شود.

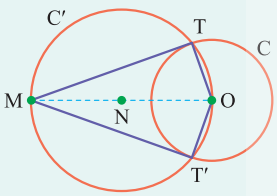
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره:

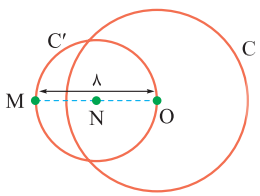
می‌خواهیم از نقطهٔ M خارج دایرهٔ $C(O, R)$ مماسی بر این دایره رسم کنیم. برای این کار دایرهٔ C' را به مرکز N (وسط پاره‌خط OM) و به قطر OM رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C را در نقاط T و T' قطع کند، نقطهٔ T روی دایره است، بنابراین $NT = NO = NM$ و در نتیجه $NT = \frac{۱}{۲}OM$ است. می‌دانیم اگر در یک مثلث، اندازهٔ میانهٔ نظیر یک ضلع، نصف اندازهٔ آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است، بنابراین مثلث OMT در رأس T قائم‌الزاویه است و به عبارت دیگر MT بر OT عمود است.

از طرفی می‌دانیم خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است، پس MT در نقطهٔ T بر دایرهٔ C مماس است. به دلیل مشابه MT' نیز بر دایرهٔ C مماس است.



پاسخ خیلی تشریحی

مطابق توضیحات ارائه‌شده در درس‌باکس، برای رسم خط مماس بر دایرهٔ C از نقطهٔ M واقع در خارج آن، کافی است دایرهٔ C' را به مرکز N (وسط OM) و به قطر OM رسم کنیم، بنابراین اندازهٔ شعاع دایرهٔ C' برابر است با:



$$NM = NO = \frac{OM}{۲} = ۴$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

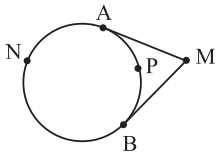
۲۲ در شکل زیر MA و MB بر دایره مماس هستند. اگر $\hat{M} = ۳۶^\circ$ باشد، آن‌گاه نسبت اندازهٔ کمان APB به اندازهٔ کمان ANB کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۷}{۱۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

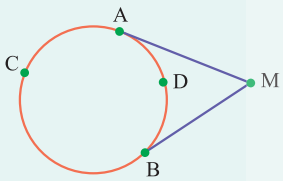


مشاوره فرمول‌های اندازهٔ زاویه‌های حاصل از برخورد دو وتر، یک وتر و یک مماس و دو مماس را به خوبی یاد بگیرید. معمولاً یکی از سؤالات کنکور، به طور مستقیم یا ترکیبی، با مفاهیمی مانند زوایای محاطی و ظلی به این موضوع اختصاص دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint مجموع دو کمان APB و ANB برابر ۳۶۰° است.

درس Box فرض کنید از نقطهٔ M، دو مماس MA و MB بر یک دایره رسم شده باشد. زاویهٔ بین دو مماس در این حالت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض کنید $\overset{\frown}{APB} = x$ و $\overset{\frown}{ANB} = y$ باشد. طبق توضیحات درس‌باکس می‌توان نوشت:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ANB} - \overset{\frown}{APB}}{۲} \Rightarrow ۳۶^\circ = \frac{y - x}{۲} \Rightarrow y - x = ۷۲^\circ$$

گام دوم: مجموع کمان‌های یک دایره برابر ۳۶۰° است، پس $x + y = ۳۶۰^\circ$.

حال مقادیر x و y را از طریق حل دستگاه دومعادله ـ دومجهول پیدا می‌کنیم.

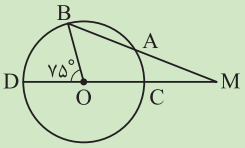
$$\begin{cases} y + x = ۳۶۰^\circ \\ y - x = ۷۲^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۴۴^\circ \\ y = ۲۱۶^\circ \end{cases}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{\overset{\frown}{APB}}{\overset{\frown}{ANB}} = \frac{x}{y} = \frac{۱۴۴^\circ}{۲۱۶^\circ} = \frac{۲}{۳}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳ در شکل زیر اگر O مرکز دایره و اندازهٔ وتر AB مساوی اندازهٔ شعاع دایره باشد، اندازهٔ زاویهٔ M چند درجه است؟



۱) ۱۵
۲) ۱۷/۵
۳) ۲۰
۴) ۲۲/۵

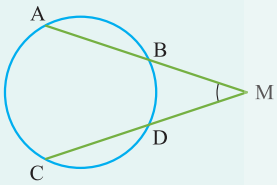
مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی طراحی شده است؛ با این تفاوت که به جای MA، این‌بار اندازهٔ AB مساوی شعاع دایره است. ایدهٔ وتری از دایره که اندازهٔ آن با اندازهٔ شعاع دایره برابر است، چندین بار در کنکورهای سال‌های اخیر به کار رفته است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint اندازهٔ کمان AB برابر 60° است.

درس Box

۱) اگر امتداد وترهای AB و CD در نقطهٔ M بیرون دایره متقاطع باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ M برابر است با:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{2}$$

۲) اگر اندازهٔ وتری از دایره برابر اندازهٔ شعاع دایره باشد، اندازهٔ کمان متناظر با آن وتر برابر 60° است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق مورد (۲) درس‌باکس، اندازهٔ کمان AB برابر 60° است. از طرفی می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی برابر اندازهٔ کمان مقابل آن است، پس $\overset{\frown}{BD} = B\hat{O}D = 75^\circ$. طبق فرض O مرکز دایره و در نتیجه CD قطری از دایره است، بنابراین داریم:

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD} = 180^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} + 60^\circ + 75^\circ = 180^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = 45^\circ$$

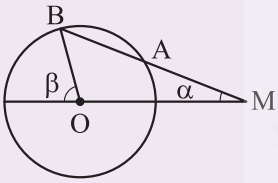
گام دوم: طبق مورد (۱) درس‌باکس، اندازهٔ زاویهٔ M برابر است با:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{75^\circ - 45^\circ}{2} = 15^\circ$$

کتاب درسی

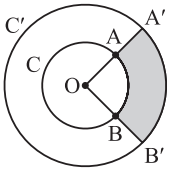
دایرهٔ C (O , R) مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و MA = R؛ نشان دهید: $\beta = 3\alpha$

(هندسه (۲) ـ تمرین ۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ در شکل زیر دو دایرهٔ C و C' هم‌مرکز هستند. اگر طول کمان $A'B'$ سه برابر طول کمان AB و مساحت ناحیهٔ سایه‌زده برابر مساحت دایرهٔ C باشد، اندازهٔ زاویهٔ AOB چند درجه است؟



۱) ۴۵

۲) ۴۰

۳) ۳۶

۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint نسبت طول کمان‌های $A'B'$ و AB با نسبت اندازهٔ شعاع‌های دو دایره برابر است.

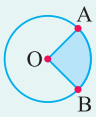
درس Box

- **طول کمان**: طول کمان در دایره برحسب واحد طول (متر، سانتی‌متر و ...) بیان می‌شود و مقدار آن بستگی به شعاع دایره و اندازهٔ کمان (برحسب درجه) دارد.

طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی α در دایره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

- **مساحت قطاع**: اگر $\overset{\frown}{AB}$ کمانی از دایرهٔ $C(O, R)$ باشد، آن‌گاه ناحیهٔ سایه‌زده در شکل زیر، یک قطاع از دایره نامیده می‌شود.



در صورتی که $A\hat{O}B = \alpha$ باشد، مساحت قطاع AOB برابر است با:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول**: فرض کنید اندازهٔ شعاع‌های دو دایرهٔ C و C' به ترتیب برابر R و R' و $A\hat{O}B = \alpha$ باشد. در این صورت اگر طول کمان‌های AB و $A'B'$ را به ترتیب با L و L' نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$\frac{L}{L'} = \frac{\frac{\pi R \alpha}{180^\circ}}{\frac{\pi R' \alpha}{180^\circ}} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{R}{R'} \Rightarrow R' = 3R$$

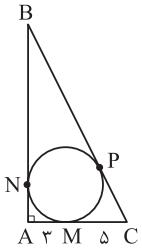
گام دوم: مساحت ناحیهٔ سایه‌زده برابر مساحت دایرهٔ C است، پس می‌توان نوشت:

$$\text{مساحت دایرهٔ } C = \text{مساحت قطاع } A'OB' - \text{مساحت قطاع } AOB \Rightarrow \frac{\pi(3R)^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} = \pi R^2$$

$$\Rightarrow \frac{8\pi R^2 \alpha}{360^\circ} = \pi R^2 \Rightarrow \frac{8\alpha}{360^\circ} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵ در شکل زیر اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC در نقاط M، N و P بر دایره مماس‌اند. محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۳۲

۲) ۳۶

۳) ۴۰

۴) ۴۴

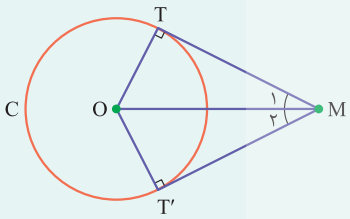
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint به کمک قضیهٔ فیثاغورس، اندازهٔ پاره‌خط‌های BN و BP را به دست آورید.

درس Box هرگاه از نقطهٔ M خارج دایرهٔ C(O , R)، دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T′ نقاط تماس باشند، آن‌گاه:

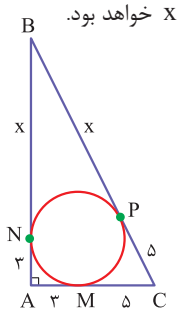
الف) اندازه‌های دو مماس برابرند، یعنی $MT = MT'$.

ب) MO نیمساز زاویهٔ بین دو مماس است، یعنی $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** می‌دانیم طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه بر دایره برابر یکدیگرند، پس $AN = AM = ۳$ و $CM = CP = ۵$.

فرض کنید $BN = BP = x$ باشد. در این صورت طول اضلاع AB و BC به ترتیب برابر $x + ۳$ و $x + ۵$ خواهد بود.



گام دوم: طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow (x+۳)^۲ + ۸^۲ = (x+۵)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ + ۶۴ = x^۲ + ۱۰x + ۲۵ \Rightarrow ۴x = ۴۸ \Rightarrow x = ۱۲$$

گام سوم: با جای‌گذاری مقدار x، محیط مثلث ABC برابر است با:

$$\text{محیط}_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = ۱۵ + ۸ + ۱۷ = ۴۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶ عمودمنصف وتر AB در دایرهٔ $C(O\ ,\ 4\sqrt{2})$، این دایره را در نقاط M و N قطع می‌کند. اگر مساحت چهارضلعی AMBN برابر ۳۲ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ O از وتر AB کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{6}$
۳) ۵
۴) $2\sqrt{7}$

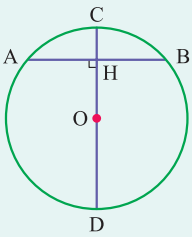
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

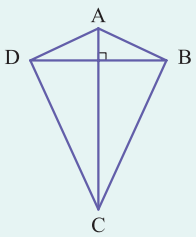
در چهارضلعی AMBN، قطرها بر هم عمودند.

درس Box

۱) می‌دانیم هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. از طرفی مرکز دایره از تمام نقاط واقع بر دایره به یک فاصله است، پس عمودمنصف هر کدام از وترهای دایره از مرکز دایره عبور می‌کند و در واقع شامل یکی از قطرهای دایره است.



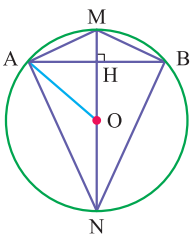
۲) مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ قطرهای آن چهارضلعی.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عمودمنصف وتر AB از نقطهٔ O (مرکز دایره) عبور می‌کند، پس MN قطری از دایره و اندازهٔ آن دو برابر شعاع دایره یعنی برابر $8\sqrt{2}$ است. از طرفی در چهارضلعی AMBN قطرها بر هم عمودند، پس مساحت آن نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ قطرهای آن است و در نتیجه داریم:



$$S_{AMBN} = \frac{1}{2} AB \times MN \Rightarrow 32 = \frac{1}{2} AB \times 8\sqrt{2} \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$$

گام دوم: MN عمودمنصف وتر AB است، بنابراین $AH = BH = 2\sqrt{2}$. طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAH می‌توان نوشت:

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = (4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 32 - 8 = 24 \Rightarrow OH = 2\sqrt{6}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

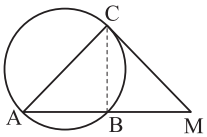
۲۷ در شکل زیر MC بر دایره مماس است. اگر $AC = MC$ و $\overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ MBC چند درجه است؟

۱) ۹۰

۲) ۹۵

۳) ۱۰۰

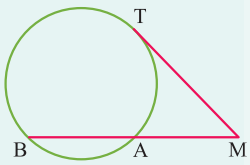
۴) ۱۰۵



پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint از متساوی‌الساقین بودن مثلث ACM استفاده کنید و اندازهٔ دو زاویهٔ A و M را برابر هم قرار دهید.

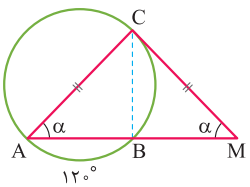
درس Box هرگاه از نقطه‌ای خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به آن دایره رسم شود، زاویهٔ بین مماس و قطاع از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BT} - \overset{\frown}{AT}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طبق فرض $AC = MC$، پس مثلث ACM متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{A} = \hat{M} = \alpha$.

از طرفی $\overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$، پس $\overset{\frown}{ACB} = ۳۶۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۲۴۰^\circ$.



گام دوم: زاویهٔ A زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان BC است، پس $\overset{\frown}{BC} = ۲\alpha$ و در نتیجه $\overset{\frown}{AC} = ۲۴۰ - ۲\alpha$. طبق توضیحات ارائه‌شده در درس‌باکس، اندازهٔ زاویهٔ M (زاویهٔ بین مماس MC و قاطع MBA) برابر است با:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{(۲۴۰^\circ - ۲\alpha) - ۲\alpha}{۲} \Rightarrow ۲\alpha = ۲۴۰^\circ - ۴\alpha$$

$$\Rightarrow ۶\alpha = ۲۴۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$

گام سوم: زاویهٔ ACB زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان AB است، پس داریم:

$$\hat{ACB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

$\overset{\Delta}{ABC}$: زاویهٔ خارجی است $\Rightarrow \hat{MBC} = \hat{A} + \hat{ACB} = ۴۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۰۰^\circ$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

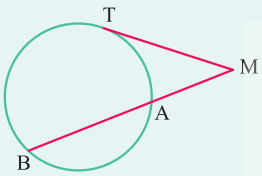
۲۸ از نقطهٔ M مماسی به طول $۴\sqrt{۳}$ بر دایرهٔ C(O, R) رسم شده است. اگر فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایرهٔ C از نقطهٔ M برابر ۱۲ باشد، R کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint از روابط طولی در دایره استفاده کنید و ابتدا فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ C از نقطهٔ M را به دست آورید.

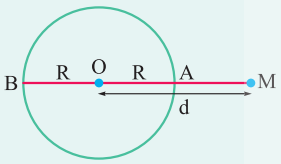
درس Box ۱) هرگاه از یک نقطهٔ خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به آن دایره رسم شود، اندازهٔ مماس واسطهٔ هندسی بین اندازه‌های دو قطعهٔ قاطع است.



$$MT^۲ = MA \times MB$$

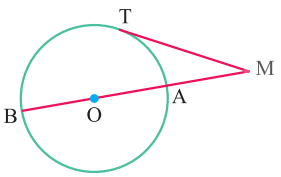
۲) فرض کنید M نقطه‌ای خارج یک دایره باشد. برای پیداکردن نزدیک‌ترین و دورترین نقطهٔ دایره نسبت به نقطهٔ M، کافی است از M به مرکز دایره وصل کرده و امتداد دهیم تا دایره را در دو نقطه قطع کند. در این صورت دو نقطهٔ برخورد براساس دوری و نزدیکی به M به ترتیب دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره نسبت به M هستند.

اگر فاصلهٔ M از مرکز دایره برابر d و شعاع دایره برابر R باشد، آن‌گاه:



$$\begin{cases} \text{بیشترین فاصله} = MB = d + R \\ \text{کم‌ترین فاصله} = MA = d - R \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** از نقطهٔ M، مماس MT و قاطع MAB که از مرکز دایره عبور می‌کند را رسم می‌کنیم. A و B به ترتیب نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره نسبت به M هستند. با توجه به درس‌باکس و با استفاده از فرض سؤال داریم:



$$MT^۲ = MA \times MB \Rightarrow (۴\sqrt{۳})^۲ = (d-R)(d+R)$$
$$\Rightarrow ۴۸ = (d-R)\times ۱۲ \Rightarrow d - R = ۴$$

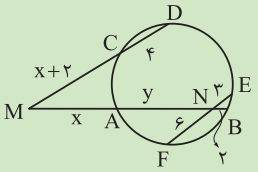
گام دوم: با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، مقدار R را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} d + R = ۱۲ \\ d - R = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = ۸ \\ R = ۴ \end{cases}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مشابه امتحان نهایی

۲۹ در شکل زیر، حاصل $y - x$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

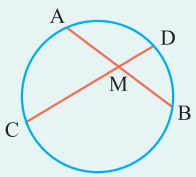
مشاوره این سؤال از مبحث روابط طولی در دایره و مشابه سؤال ۶ امتحان نهایی هندسه (۲) خرداد ۱۴۰۳ طراحی شده است. سؤالات مشابه بارها در کنکور نیز تکرار شده‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا با استفاده از روابط طولی وترهای متقاطع در درون دایره، مقدار y را تعیین کنید.

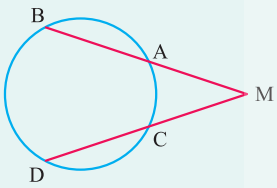
درس Box

۱) اگر دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ M درون دایره قطع کنند، آن‌گاه:



$$MA \times MB = MC \times MD$$

۲) اگر امتداد دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ M بیرون دایره قطع کنند، آن‌گاه:



$$MA \times MB = MC \times MD$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق روابط طولی در دایره برای وترهای متقاطع درون دایره (مورد (۱) درس‌باکس) داریم:

$$NA \times NB = NE \times NF \Rightarrow y \times ۲ = ۳ \times ۶ \Rightarrow y = ۹$$

گام دوم: طبق روابط طولی در دایره برای وترهای متقاطع در بیرون دایره (مورد (۲) درس‌باکس) و با جای‌گذاری مقدار y داریم:

$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow x(x+۱۱) = (x+۲)(x+۶)$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۱۱x = x^۲ + ۸x + ۱۲ \Rightarrow ۳x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$$

گام سوم: با توجه به نتایج گام‌های اول و دوم، حاصل عبارت مورد نظر برابر است با:

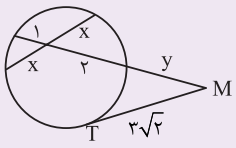
$$y - x = ۹ - ۴ = ۵$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

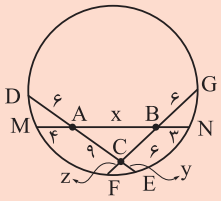
امتحان نهایی

در شکل زیر MT به طول $۳\sqrt{۲}$ مماس بر دایره است. مقادیر عددی x و y را به دست آورید.

(سؤال ۶ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)



۳۰ در شکل زیر، مقدار x کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۲ / ۷۵

۳) ۱۳ / ۵

۴) ۱۴ / ۲۵

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۳۰ کنکور ریاضی داخل مرحلهٔ اول ۱۴۰۳ و از مبحث روابط طولی در دایره طراحی شده است؛ با این تفاوت که در این سؤال، ۳ متغیر مجهول دیده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در نقطهٔ C را نوشته و رابطه‌ای بین y و z پیدا کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در نقطهٔ C را می‌نویسیم:

$$CE\times CD = CF\times CG \Rightarrow y\times ۱۵ = z\times ۱۲ \Rightarrow ۵y = ۴z \Rightarrow ۲z = \frac{۵}{۲}y \quad (*)$$

گام دوم: رابطهٔ طولی وترهای متقاطع در نقطهٔ B را می‌نویسیم و سپس z را برحسب y جایگزین می‌کنیم:

$$BM\times BN = BF\times BG \Rightarrow (x+۴)\times ۳ = (۶+z)\times ۶$$

$$\Rightarrow x+۴ = (۶+z)\times ۲ \Rightarrow x+۴ = ۱۲+۲z \xrightarrow{(*)} x = \frac{۵}{۲}y+۸ \quad (**)$$

گام سوم: رابطهٔ طولی را برای وترهای متقاطع در نقطهٔ A می‌نویسیم تا رابطهٔ دیگری بین x و y به دست آید.

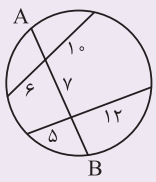
$$AM\times AN = AD\times AE \Rightarrow ۴(x+۳) = ۶(۹+y)$$

$$\Rightarrow ۴x+۱۲ = ۵۴+۶y \Rightarrow ۴x = ۶y+۴۲ \xrightarrow{(**)} ۴(\frac{۵}{۲}y+۸) = ۶y+۴۲$$

$$\Rightarrow ۱۰y+۳۲ = ۶y+۴۲ \Rightarrow ۴y = ۱۰ \Rightarrow y = \frac{۵}{۲}$$

$$x = \frac{۵}{۲}\times\frac{۵}{۲}+۸ = \frac{۵۷}{۴} = ۱۴/۲۵$$

کنکور در شکل زیر، طول وتر AB کدام است؟ *(سؤال ۳۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)*



۱) ۱۶

۲) ۱۷

۳) ۱۸

۴) ۱۹

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۱ دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «n عددی اول است. $\Rightarrow \frac{n}{۲} = ۲$» مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ است. مجموعه‌جواب چند عضو دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

مشاوره جدول ارزش ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ را خیلی خوب بلد باشید. در بیشتر سؤال‌های منطق، ردپای این ترکیب وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

در گزارهٔ $p \Rightarrow q$، اگر p نادرست باشد، گزاره به انتفای مقدم درست است.

درس Box

- هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.

گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، یک‌متغیره، دومتغیره و ... می‌نامیم.

- در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این‌که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

- در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه‌جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره، داریم: $S \subseteq D$.

جدول ارزش گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است:

۱) هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزارهٔ مرکب «$p \Rightarrow q$» همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند: ارزش«$p \Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

۲) ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: گزارهٔ شرطی فقط در حالتی که فرض درست و حکم نادرست باشد، نادرست بوده و در بقیهٔ حالت‌ها درست است.

گام دوم:

$$n=۱: \underbrace{(\frac{۱}{۲}=۲}_{\text{ن}} \Rightarrow \underbrace{\text{۱ عددی اول است.}}_{\text{ن}}) \equiv T$$

$$n=۲: \underbrace{(\frac{۲}{۲}=۲}_{\text{د}} \Rightarrow \underbrace{\text{۲ عددی اول است.}}_{\text{د}}) \equiv T$$

$$n=۳: \underbrace{(\frac{۳}{۲}=۲}_{\text{ن}} \Rightarrow \underbrace{\text{۳ عددی اول است.}}_{\text{د}}) \equiv T$$

$$n=۴: \underbrace{(\frac{۴}{۲}=۲}_{\text{د}} \Rightarrow \underbrace{\text{۴ عددی اول است.}}_{\text{ن}}) \equiv F$$

پس مجموعه‌جواب $\{۱,۲,۳\}$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۲ اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ باشد، کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $B - A = \varnothing$

۲) $C \cup B' \subseteq D \cup A'$

۳) $A - C \subseteq B - D$

۴) $A \cup C \subseteq B \cap D$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $B' \subseteq A'$.

درس Box

قضیه‌های زیرمجموعه:

۱) $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

۲) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

۳) $\begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cup C \subseteq B \cup D \\ A \cap C \subseteq B \cap D \end{cases}$

۴) $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

۵) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

۶) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر $A \subseteq B$ طبق قضیه، آن‌گاه $B' \subseteq A'$.

گام دوم: طبق قضیه، اگر دو رابطهٔ زیرمجموعه داشته باشیم، می‌توانیم دو طرف را اجتماع بگیریم، یعنی:

$\begin{cases} B' \subseteq A' \\ C \subseteq D \end{cases} \Rightarrow B' \cup C \subseteq A' \cup D$ (گزینهٔ (۲) درست است.)

برای سایر گزینه‌ها، به راحتی می‌توانید مثال نقض ارائه کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۳ هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -1\le x<4\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟

۱) $\forall x\in A;\ x^2-3x-4<0$

۲) $\exists x\in A;\ x^2-1=0$

۳) $\forall x\in A;\ x+5\le 8$

۴) $\exists x\in A;\ x^0=1$

مشاوره سعی کنید نماد $\exists$ را به صورت «وجود دارد.» بخوانید تا «به ازای برخی مقادیر»، چون معمولاً با این نگاه تشخیص ارزش آن ساده‌تر صورت می‌گیرد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint نماد $\forall$ به صورت «به ازای هر» و نماد $\exists$ به صورت «به ازای برخی مقادیر یا وجود دارد» خوانده می‌شود.

درس Box

سور عمومی ($\forall$) و سور وجودی ($\exists$):

۱) گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنهٔ متغیر در گزاره‌نما صدق کند؛ به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد. به زبان دیگر گزارهٔ $\forall x\in U\ ;\ P(x)$ وقتی درست است که به ازای هر x عضو U گزارهٔ $P(x)$ درست باشد.

۲) گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود. وقتی درست است که مجموعهٔ جواب آن تهی نباشد؛ به زبان دیگر گزارهٔ $\exists x\in U;\ P(x)$ وقتی درست است که حداقل یک x عضو U وجود داشته باشد که به ازای آن گزارهٔ $P(x)$ درست بشود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: عضوهای مجموعهٔ A به صورت $\{-1,0,1,2,3\}$ است.

گام دوم: گزینهٔ (۱) بیان می‌کند به ازای همهٔ عضوهای A که به جای x قرار گیرد، داریم $x^2-3x-4<0$، اما این گزاره نادرست است، چون مثلاً به ازای $x=-1$ داریم:

$$(-1)^2-3(-1)-4=0$$

در حالی که $0<0$ نادرست است، پس همین گزارهٔ سوری نادرست است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): می‌گوید: وجود دارد x عضو A به طوری که $x^2-1=0$. این گزاره درست است، چون مثلاً $x=1$ وجود دارد که $1^2-1=0$.

گزینهٔ (۳): می‌گوید: به ازای همهٔ xهای عضو A داریم $x+5\le 8$ یا $x\le 3$ این گزاره درست است، چون اگر x را هر کدام از اعداد $-1,0,1,2,3$ قرار دهیم، نامساوی $x\le 3$ درست است.

گزینهٔ (۴): درست است، چون مثلاً $x=2$ عضو A وجود دارد که $2^0=1$.

کتاب درسی

هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid 0<x\le 5\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

(آمار و احتمال ـ تمرین ۹ صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

الف) $\exists x\in A,\ x+4=10$

ب) $\forall x\in A,\ x+2\le 9$

پ) $\exists x\in A,\ x+3\le 4$

ت) $\forall x\in A,\ x+1\ge 6$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۴ کدام گزاره، یک گزارهٔ «همیشه درست» نیست؟

۱) $[p \vee (p \wedge q)] \vee \sim p$

۲) $p \wedge q \Rightarrow p$

۳) $p \Rightarrow q \vee p$

۴) $p \Rightarrow (\sim p \wedge r)$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ببینید آیا می‌توانید ردیفی از جدول برای p و q در نظر بگیرید که گزاره‌ها غلط بشود.

درس Box

ارزش گزاره‌های ترکیبی:

ارزش	فارسی	ریاضی	ترکیب گزاره‌ها
وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشد.	p یا q	$p \vee q$	ترکیب فصلی
وقتی درست است که p و q هر دو درست باشند.	p و q	$p \wedge q$	ترکیب عطفی
فقط در حالت «ن ⇒ د» نادرست است و در بقیهٔ حالت‌ها درست است.	اگر p آن‌گاه q	$p \Rightarrow q$	ترکیب شرطی
وقتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.	p اگر و فقط اگر q	$p \Leftrightarrow q$	ترکیب دوشرطی
ارزش آن برعکس p است.	نقیض p	p	نقیض

حواست باشه: گزاره‌هایی نظیر $(p \Rightarrow p)$ یا $(p \vee \sim p)$ که همواره درست هستند را گزاره‌هایی همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر $(p \wedge \sim p)$ را که همواره نادرست هستند را همیشه نادرست می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ارزش گزاره همیشه درست، در تمام حالت‌ها و در تمام ردیف‌های جدول درست است.

گام دوم: با دقت در گزینه‌ها در گزینهٔ (۴) اگر p درست باشد ارزش $p \wedge r \sim$ نادرست بوده و گزارهٔ شرطی نیز نادرست می‌شود، پس این گزاره همیشه درست نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$\overbrace{[p \vee (p \wedge q)]}^{\text{قانون جذب}} \vee \sim p \equiv p \vee \sim p \equiv T$$

گزینهٔ (۲):

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

گزینهٔ (۳): می‌توانیم شبیه گزینهٔ (۲) با جدول ثابت کنیم که همیشه درست است، ولی با جبر گزاره‌ها می‌رویم:

$$\overbrace{p \Rightarrow q \vee p}^{\text{تبدیل شرطی به فصلی}} \equiv \sim p \vee (q \vee p) \equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

امتحان نهایی

با واردکردن جدول زیر در پاسخ برگ و سپس تکمیل آن، نشان دهید که: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$.

(سؤال ۳ ـ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۳)

			q	p
			د	د
			ن	د
			د	ن
			ن	ن

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۵ r گزاره‌ای درست است. گزارهٔ $[(q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge r)] \Rightarrow q$ در چند حالت درست می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره این سؤال می‌تواند با ادبیات احتمال هم در کنکور مطرح بشود خوب آن را تحلیل کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint دو حالت برای هر کدام از گزاره‌ای p و q در نظر بگیرید و ببینید در چند حالت گزاره داده شده درست می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** جدول ارزش گزاره را تشکیل می‌دهیم:

کل گزاره	$(q \vee r) \Leftrightarrow p \wedge r$	$p \wedge r$	$q \vee r$	r	q	p
د	د	د	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	د	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن

پس در ۳ حالت، ارزش گزاره درست می‌شود.

یه‌جور دیگه چون r درست است، پس $q \vee r \equiv T$ و $p \wedge r \equiv p$، پس:

$$[(q \vee r) \Leftrightarrow p \wedge r] \equiv T \Leftrightarrow p \equiv p$$

پس گزارهٔ داده‌شده هم‌ارز $p \Rightarrow q$ است، اما گزارهٔ شرطی دقیقاً در ۳ حالت درست می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۶ اگر $A=\{a,\{a\}\}$ باشد، مجموعهٔ $P(A)-A$ چند زیرمجموعهٔ محض دارد؟ ($P(A)$ مجموعهٔ توانی است.)

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۷
۴) ۸

مشاوره مجموعهٔ توانی، تازه به کتاب درسی اضافه شده، پس در سال‌های آینده از آن سؤال خواهد آمد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint مجموعهٔ توانی A را تشکیل داده و بعد $P(A)-A$ را به دست آورید.

درس Box

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

۱) اگر A، دارای n عضو باشد، در این صورت $P(A)$، 2^n عضو دارد.

۲) اگر $A\subseteq B$ به طوری که $A\neq B$، آن‌گاه A زیرمجموعهٔ محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مجموعهٔ کلیهٔ زیرمجموعه‌های A یا همان $P(A)$ را تشکیل می‌دهیم:

زیرمجموعه‌ها: $\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\} \Rightarrow P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$

گام دوم:

$$P(A)-A=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}-\{a,\{a\}\}=\{\varnothing,\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$$

(مشترک)

گام سوم: مجموعهٔ $P(A)-A$ دارای ۳ عضو است، پس 2^3-1 زیرمجموعهٔ محض دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷ در اثبات گزارهٔ «$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$» به روش عضوگیری به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\forall x \in U, (x \in B' \Rightarrow \ldots\ldots \xrightarrow{A \subseteq B} \not\Rightarrow x \in A')$$

به ترتیب از چپ به راست، کدام گزینه را باید در جاهای خالی قرار دهیم؟

۱) $x \notin A$ ـ $x \notin B$

۲) $x \notin A$ ـ $x \in B$

۳) $x \in A$ ـ $x \in B$

۴) $x \in A$ ـ $x \notin B$

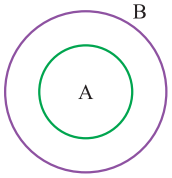
مشاوره معمولاً از اثبات به روش عضوگیری، یک سؤال در آزمون ترم اول و نهایی خواهید داشت.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اگر $x \in B'$ یعنی اگر x عضوی از متمم B باشد، پس x عضو خود B نیست ($x \notin B$).

گام دوم: اگر $x \notin B$ (چون همهٔ عضوهای A داخل B هم هستند).



پس x نمی‌تواند عضو A باشد (چون اگر عضو A باشد، عضو B هم هست)، پس جای خالی دوم به صورت $x \notin A$ باید باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۸ گزارهٔ $r \Rightarrow (\sim p) \Rightarrow [(\sim q \wedge (p \Rightarrow q)]$، هم‌ارز کدام گزینه است؟

۱) $\sim r$ ۲) r ۳) $p \vee q$ ۴) T

مشاوره در سال‌های اخیر، همواره یک سؤال از منطق ریاضی در کنکور آمده است که معمولاً به همین صورت بوده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint r را درست فرض کنید یا این‌که از هم‌ارزی ترکیب شرطی استفاده کنید.

درس Box

جبر گزاره‌ها و جبر مجموعه‌ها در یک قاب:

اسم قانون	مجموعه	گزاره
قوانین شرکت‌پذیری	$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
قوانین پخشی (عکس آن فاکتورگیری)	$\begin{cases} \underline{A \cup} (B \cap C) = (\underline{A \cup} B) \cap (\underline{A \cup} C) \\ \underline{A \cap} (B \cup C) = (\underline{A \cap} B) \cup (\underline{A \cap} C) \end{cases}$ فاکتور	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
قوانین زیرمجموعه	$A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \\ A - B = \varnothing \end{cases}$ (تمامی روابط دوطرفه هستند.)	–
قوانین دمورگان	$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
قانون تبدیل تفاضل به اشتراک	$A - B = A \cap B'$	–
قوانین جذب	$\begin{cases} \underline{A \cup} (A \cap B) = A \quad (\underline{A \cap} B \subseteq A \text{ چون}) \\ \underline{A \cap} (A \cup B) = A \quad (A \subseteq A \cup B \text{ چون}) \end{cases}$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
ترکیب شرطی	–	$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
مقدماتی	$A \cup A' = U, A \cup U = U, A \cup \varnothing = A$ $A \cap A' = \varnothing, A \cap U = A, A \cap \varnothing = \varnothing$	$p \vee \sim p \equiv T, p \vee T \equiv T, p \vee F \equiv p$ $p \wedge \sim p \equiv F, p \wedge T \equiv p, p \wedge F \equiv F$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول:

$$\sim q \wedge (p \Rightarrow q) \equiv \sim q \wedge (\sim p \vee q) \equiv (\sim q \wedge \sim p) \vee \overbrace{(\sim q \wedge q)}^{F} \equiv \sim q \wedge \sim p$$

گام دوم:

$$(\sim q \wedge \sim p) \Rightarrow \sim p \equiv \sim (\sim q \wedge \sim p) \vee \sim p \equiv (q \vee p) \vee \sim p \equiv q \vee (p \vee \sim p) \equiv q \vee T \equiv T$$

گام سوم: گزارهٔ داده‌شدهٔ هم‌ارز $r \Rightarrow T$ می‌شود. واضح است که اگر r درست باشد، این گزاره درست و اگر r نادرست باشد، گزاره نادرست است، پس گزارهٔ داده‌شده هم‌ارز r است.

تیزبازی اگر r درست باشد، گزارهٔ «$r \Rightarrow \square$» صرف‌نظر از ارزش $\square$ درست است پس گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند، هم‌چنین اگر r نادرست و p هم نادرست باشد، گزاره $\sim p \Rightarrow \square$ درست و کل گزاره به صورت «ن $\Rightarrow$ د» درمی‌آید که نادرست است، پس گزینهٔ (۴) هم رد می‌شود.

حواست باشه: در اثبات‌های ریاضی (به خصوص در هندسه) معمولاً از قاعدهٔ قیاس استثنایی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q] \equiv T$$

یعنی اگر از درستی p بتوانیم درستی q را نتیجه بگیریم و p (فرض) درست باشد، آن‌گاه درستی q را می‌توانیم نتیجه بگیریم و این گزاره درست است. (البته اسم این قاعده در کتاب درسی شما نیامده است.)

از طرفی طبق قانون عکس نقیض $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ ، پس قاعدهٔ قیاس استثنایی را می‌توانیم *این‌پوری* با هم بنویسیم:

$$[[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p] \equiv T$$

کنکور

گزارهٔ $p \Leftrightarrow q \sim$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$

۲) $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$

۳) $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

۴) $\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

کنکور

گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

۲) $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

۳) $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

۴) $\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۹ مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید. اگر ۳ عضو به A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲۲۴تا اضافه می‌شود. اگر ۳ عضو از A کم کنیم، تعداد زیرمجموعه‌ها چندتا کاهش می‌یابد؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۸

۳) ۵۶ ۴) ۱۱۲

مشاوره مشابه این سؤال در سال‌های آینده می‌تواند در کنکور مطرح شود. روش ساخت معادلهٔ آن را خوب یاد بگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint معادلهٔ $۲^{n+۳} - ۲^n = ۲۲۴$ را حل کنید.

درس Box

تعداد زیرمجموعه‌ها:

فرض کنیم مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط خاص از روابط زیر به دست می‌آید:

تعداد کل زیرمجموعه‌ها	زیرمجموعه‌های ناتهی	زیرمجموعه‌های غیرخودش (سَره)	زیرمجموعه‌های شامل k عضو خاص (فاقد k عضو خاص)	زیرمجموعه‌های k عضوی
۲^n	$۲^n - ۱$	$۲^n - ۱$	۲^{n-k}	$\binom{n}{k}$

زیرمجموعه‌های kعضوی شامل x عضو خاص	زیرمجموعه‌های kعضوی فاقد x عضو خاص
$\binom{n-x}{k-x}$	$\binom{n-x}{k}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض کنیم مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، پس ۲^n زیرمجموعه دارد.

گام دوم: اگر ۳ عضو به A اضافه کنیم، دارای $n+۳$ عضو و $۲^{n+۳}$ زیرمجموعه می‌شود.

گام سوم: داریم:

$$۲^{n+۳} - ۲^n = ۲۲۴ \Rightarrow ۲^n \times ۲^۳ - ۲^n = ۲۲۴ \Rightarrow ۲^n(۲^۳ - ۱) = ۲۲۴ \Rightarrow ۲^n = \frac{۲۲۴}{۷} = ۳۲ \Rightarrow n = ۵$$

گام چهارم: A دارای ۵ عضو و $۲^۵ = ۳۲$ زیرمجموعه است. اگر از A، ۳ عضو کم کنیم، دارای ۲ عضو و $۲^۲ = ۴$ زیرمجموعه می‌شود، پس تعداد زیرمجموعه‌ها ۲۸تا کاهش می‌یابد.

کتاب درسی

مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید، اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید A چند عضوی است. *(آمار و احتمال ـ مثال صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)*

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۰ مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۵,۶,۸,۹,۱۰\}$ چند زیرمجموعه دارد که مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه برابر ۱۲ باشد؟

۱) ۸

۲) ۱۶

۳) ۳۲

۴) ۴۰

مشاوره مشابه این سؤال در کنکور سال ۱۴۰۳ مطرح شده است. سعی کنید این سؤال را به خوبی درک کنید، چون همین سؤال با ادبیات‌های مختلف در سال‌های بعد نیز تکرار می‌شود (مثلاً در فصل گراف در درس ریاضیات گسسته).

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ببینید کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو چه اعدادی می‌تواند باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از بین عضوهای A، فقط $۱۲=۱۰+۲$ و $۱۲=۹+۳$ پس کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو به دو صورت زیر می‌تواند باشد:

الف) $\{۲,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,۱۰\}$

ب) $\{۳,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,۹\}$

گام دوم: در حالت «الف»، هر کدام از دایره‌ها نشان‌دهندهٔ یکی از اعداد ۳، ۵، ۶، ۸، ۹ است که ممکن است عضو زیرمجموعه باشد یا نباشد، پس هر کدام ۲ حالت دارند، پس تعداد زیرمجموعه‌ها به شکل «الف» برابر است با:

$۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۳۲$

گام سوم: شبیه «الف»، در قسمت «ب» هر کدام از عضوهای ۸، ۶ و ۵ ممکن است عضو مجموعهٔ «ب» باشند یا نباشند، پس $۲\times۲\times۲=۸$ زیرمجموعه نیز به این صورت وجود دارد.

گام چهارم: $۳۲+۸=۴۰$ زیرمجموعه با شرایط مسئله وجود دارد.

کنکور

در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{۱۲,۱۳,۱۵,۱۸,۲۳,۲۴,۲۵,۲۶\}$ حاصل‌ضرب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو، مضرب ۱۰ است؟ *(سؤال ۳۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)*

۱) ۵۹

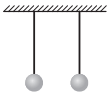
۲) ۶۰

۳) ۶۱

۴) ۶۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۱ در شکل زیر، دو گوی فلزی هم‌اندازهٔ بدون بار از جنس آلومینیم و برنج از نخ‌های عایق سبکی آویزان‌اند. اگر با پارچهٔ کتان خنثی، هر یک از گوی‌ها را به طور جداگانه مالش دهیم، پس از مالش، چه تعداد از موارد زیر ممکن است رخ دهد؟



انتهای مثبت سری
آلومینیم
پارچهٔ کتان
برنج
انتهای منفی سری

الف) دو گوی یکدیگر را دفع می‌کنند.

ب) دو گوی یکدیگر را جذب کرده و پس از برقراری تماس، در همان فاصلهٔ اولیه قرار می‌گیرند.

پ) دو گوی یکدیگر را جذب کرده و پس از حاصل‌شدن تماس، در فاصله‌ای بیشتر از حالت اول، قرار می‌گیرند.

ت) دو گوی یکدیگر را جذب کرده و به هم می‌چسبند و در همین حالت باقی می‌مانند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

وقتی دو جسم با هم مالش داده می‌شوند، براساس سری تریبوالکتریک (الکتریستهٔ مالشی)، هر چه جسمی بالاتر و به انتهای مثبت سری نزدیک‌تر باشد، یعنی تمایل به از دست دادن الکترون بیشتری دارد و بار آن مثبت می‌شود و هر چه جسمی پایین‌تر و به انتهای منفی سری نزدیک‌تر باشد، یعنی تمایل به گرفتن الکترون دارد و بار آن منفی می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به جدول، بار گوی‌ها را تعیین علامت می‌کنیم:

- آلومینیم در جدول بالاتر از پارچهٔ کتان است. ← الکترون از دست می‌دهد. ← بار آن مثبت می‌شود.
- برنج پایین‌تر از پارچهٔ کتان است. ← الکترون می‌گیرد. ← بار آن منفی می‌شود.

گام دوم: حالا به بررسی تک‌تک عبارات می‌پردازیم:

الف) با توجه به تعیین علامت بارها در گام اول، دو گوی یکدیگر را جذب می‌کنند. (نادرست)

ب) وقتی دو گوی یکدیگر را جذب می‌کنند و به هم برخورد می‌کنند، اگر مقدار بارها برابر باشد، مجموع بارها صفر می‌شود و گوی‌ها به حالت آویزان عمودی (همان فاصلهٔ اولیهٔ قبل از انحراف) برمی‌گردند. (درست)

پ) وقتی دو گوی یکدیگر را جذب می‌کنند و به هم برخورد می‌کنند، اگر مقدار بارها نابرابر باشد، مجموع بارها صفر نمی‌شود و پس از تماس، به طور مساوی بین هر دو تقسیم می‌شود و هر دو گوی بار یکسان می‌گیرند و نیروی دافعه باعث می‌شود در فاصله‌ای بیشتر از فاصلهٔ اول قرار بگیرند. (درست)

ت) برای این‌که دو گوی دائماً به هم بچسبند باید همواره نیروی جاذبه وجود داشته باشد، اما با برخورد گوی‌ها با یکدیگر، تبادل بار صورت می‌گیرد و گوی‌ها یا خنثی می‌شوند یا دافعه ایجاد می‌شود، پس هیچ وقت دائماً به هم نمی‌چسبند. (نادرست)

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح می‌باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۲ دو ذرهٔ بدون بار را به یکدیگر مالش می‌دهیم و در حین مالش ۵×۱۰^{۱۰} الکترون بین این دو ذره جابه‌جا می‌شود. اگر این دو ذره را در فاصلهٔ ۴۸ cm از هم قرار دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها چند میکرونیوتون خواهد بود؟

$(k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}$ و $e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$

۱) ۵۰ ۲) ۲۵

۳) ۵ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱ اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی: بار الکتریکی یک جسم، مضرب درستی از بار بنیادی e است:

$$q = \pm ne$$

$n = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$: اختلاف تعداد پروتون‌ها و الکترون‌های جسم

$+$: در صورتی که تعداد پروتون‌ها بیشتر از تعداد الکترون‌ها باشد.

$-$: در صورتی که تعداد الکترون‌ها بیشتر از تعداد پروتون‌ها باشد.

وقتی n الکترون از جسم خنثای A به جسم خنثای B انتقال یابد، جسمی که الکترون از دست می‌دهد، دارای بار مثبت و جسمی که الکترون اضافی دریافت می‌کند، دارای بار منفی خواهند شد.

۲ قانون کولن: اندازهٔ نیروی الکتریکی (الکتروستاتیکی) بین دو بار نقطه‌ای که در راستای خط مستقیم بین آن‌ها اثر می‌کند، با حاصل‌ضرب بزرگی آن‌ها متناسب است و با مربع فاصلهٔ بین آن‌ها نسبت وارون دارد.

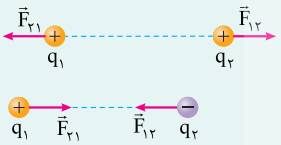
$$F = k\frac{|q_۱||q_۲|}{r^{۲}}$$

F: اندازهٔ نیروی الکتریکی (N)

$k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}$: ثابت کولن

$q_۱$ و $q_۲$: بارهای الکتریکی نقطه‌ای (C)

r: فاصلهٔ بین دو بار (m)



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا بزرگی بار را با استفاده از رابطهٔ کوانتیده‌بودن بار الکتریکی محاسبه می‌کنیم:

$$q = \pm ne \xrightarrow[e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C]{n = ۵\times۱۰^{۱۰}} |q_۱| = |q_۲| = ۵\times۱۰^{۱۰}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C = ۸\times۱۰^{-۹}\ C$$

گام دوم: حالا بزرگی نیروی الکتریکی را با استفاده از قانون کولن به دست می‌آوریم:

$$F = k\frac{|q_۱||q_۲|}{r^{۲}} \xrightarrow[r = ۴۸\,cm = ۴۸\times۱۰^{-۲}\,m]{k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}},\ |q_۱| = |q_۲| = ۸\times۱۰^{-۹}\ C} F = \frac{۹\times۱۰^{۹}\times۸\times۱۰^{-۹}\times۸\times۱۰^{-۹}}{(۴۸\times۱۰^{-۲})^{۲}} = ۲/۵\times۱۰^{-۶}\ N = ۲/۵\,\mu N$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۳ دو ذرهٔ دارای بار یکسان q در فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند. چه کسری از بار یکی از ذرات را به ذرهٔ دیگر منتقل کنیم تا وقتی این دو ذره را در فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}r$ از هم قرار می‌دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها، ۸ برابر حالت قبل شود؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

قانون کولن به بیان نسبتی:

$$\frac{F'}{F}=\left(\frac{|q'_۱|\times|q'_۲|}{|q_۱|\times|q_۲|}\right)\times\left(\frac{r}{r'}\right)^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: هنگامی که بخشی از یک بار به ذرهٔ دیگر منتقل می‌شود، مجموع جبری بارهای سیستم ثابت می‌ماند و اگر مقدار xq از ذرهٔ اول برداشته شود، همان مقدار به ذرهٔ دوم اضافه می‌شود.

	حالت اول	حالت دوم
بار ذرهٔ اول	q	$q-xq$
بار ذرهٔ دوم	q	$q+xq$

گام دوم: حالا رابطهٔ نسبتی قانون کولن را می‌نویسیم و داده‌ها را جای‌گذاری می‌کنیم:

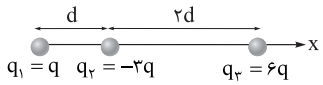
$$\frac{F'}{F}=\left(\frac{q'_۱\times q'_۲}{q_۱\times q_۲}\right)\left(\frac{r}{r'}\right)^۲ \xrightarrow[r'=\frac{۱}{۳}r\,,\,F'=۸F]{q'_۱=q-xq\,,\,q'_۲=q+xq} ۸=\frac{(q-xq)(q+xq)}{q\times q}\times ۹$$

$$\Rightarrow ۸=\frac{q^۲(۱-x^۲)}{q^۲}\times ۹ \Rightarrow ۱-x^۲=\frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow x^۲=۱-\frac{۸}{۹} \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۹} \xrightarrow{\sqrt{\ }} x=\frac{۱}{۳}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۴ در شکل زیر، اگر مکان دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 را جابه‌جا کنیم، بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 چند برابر می‌شود؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۱۰}{۳}$
۴) $\frac{۱۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) **اصل برهم‌نهی نیروهای الکتروستاتیکی:** نیروی خالص وارد بر یک ذرهٔ باردار در حضور چندین بار نقطه‌ای، برابر با جمع برداری نیروهایی است که هر ذره به طور مستقل به آن وارد می‌کند:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

۲) **تعیین علامت و جمع بردارها در یک بعد (روی محور x):**

- ابتدا جهت هر نیرو را صرفاً براساس نوع بارها (جاذبه برای ناهمنام و دافعه برای همنام) روی شکل مشخص می‌کنیم.

سپس برای محاسبهٔ بزرگی نیروی خالص:

- اگر بردارها هم‌جهت باشند: اندازه‌های آن‌ها جمع می‌شود. $(F_{net} = F_1 + F_2)$
- اگر بردارها خلاف جهت باشند: اندازهٔ بردار کوچک‌تر از اندازهٔ بردار بزرگ‌تر کم می‌شود. $(F_{net} = |F_1 - F_2|)$

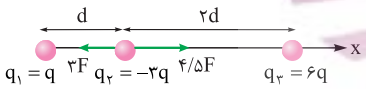
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نیروهای وارد بر بار q_2 را در حالت اول بررسی می‌کنیم و براساس قانون کولن، تمامی نیروها را برحسب عبارت $F = \frac{kq^2}{d^2}$ می‌نویسیم:

$$F_{12} = k\frac{q_1|q_2|}{r_{12}^2} \xrightarrow[r=d]{q_1=q,\ |q_2|=+۳q} F_{12} = ۳\frac{kq^2}{d^2}$$

$$F_{32} = k\frac{q_3|q_2|}{r_{32}^2} \xrightarrow[r=۲d]{|q_2|=+۳q,\ q_3=۶q} F_{32} = \frac{۱۸kq^2}{۴d^2} = ۴/۵\frac{kq^2}{d^2}$$

$$F_{net,1} = F_{32} - F_{12} = ۴/۵\frac{kq^2}{d^2} - ۳\frac{kq^2}{d^2} = ۱/۵\frac{kq^2}{d^2}$$

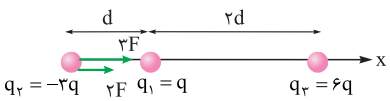


گام دوم: حالا نیروهای وارد بر بار q_2 را در حالت دوم بررسی می‌کنیم:

$$F'_{12} = k\frac{q_1|q_2|}{r'^2_{12}} \Rightarrow F'_{12} = ۳\frac{kq^2}{d^2}$$

$$F'_{32} = k\frac{q_3|q_2|}{r'^2_{32}} \xrightarrow{r'_{32}=۳d} F'_{32} = \frac{۱۸kq^2}{۹d^2} = ۲\frac{kq^2}{d^2}$$

$$F_{net,2} = F'_{12} + F'_{32} = ۵\frac{kq^2}{d^2}$$

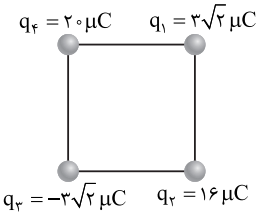


گام سوم: حالا نسبت نیروی حالت دوم به حالت اول را به دست می‌آوریم:

$$\frac{F_{net,2}}{F_{net,1}} = \frac{۵\frac{kq^2}{d^2}}{\frac{۳}{۲}\frac{kq^2}{d^2}} = \frac{۵}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱۰}{۳}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۵ در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی رأس‌های مربعی به ضلع ۳۰ cm قرار دارند. بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۴$ چند نیوتون است؟ $(k = ۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



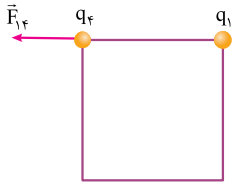
۱) ۱۶
۲) ۲۰
۳) ۲۴
۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته هنگام عددگذاری در رابطهٔ قانون کولن، اگر بارهای الکتریکی برحسب μC و فاصلهٔ دو بار برحسب cm نوشته شوند، برای آن‌که نیرو برحسب نیوتون به دست آید، باید ضریب k را $۹۰ \frac{N.cm^۲}{\mu C^۲}$ بنویسیم.

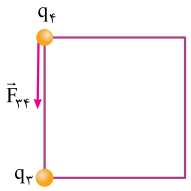
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا نیروی ذرهٔ ۱ به ذرهٔ ۴ را محاسبه می‌کنیم:



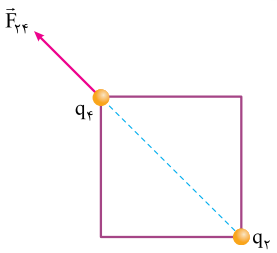
$$F_{۱۴} = k\frac{q_۱q_۴}{r_{۱۴}^۲} \xrightarrow[q_۴=۲۰\,\mu C\,,\, r_{۱۴}=۳۰\,cm]{k=۹۰\,,\, q_۱=۳\sqrt{۲}\,\mu C} F_{۱۴} = ۹۰\times\frac{۳\sqrt{۲}\times۲۰}{۹۰۰} = ۶\sqrt{۲}\ N$$

گام دوم: نیروی ذرهٔ ۳ به ذرهٔ ۴ را محاسبه می‌کنیم:



$$F_{۳۴} = k\frac{|q_۳|\,q_۴}{r_{۳۴}^۲} \xrightarrow[q_۴=۲۰\,\mu C\,,\, r_{۳۴}=۳۰\,cm]{k=۹۰\,,\, |q_۳|=+۳\sqrt{۲}\,\mu C} F_{۳۴} = \frac{۹۰\times۳\sqrt{۲}\times۲۰}{۹۰۰} = ۶\sqrt{۲}\ N$$

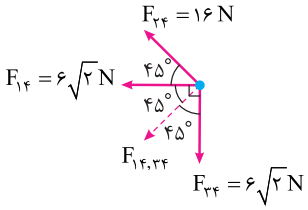
گام سوم: اگر مربعی به ضلع a داشته باشیم، بنا به رابطهٔ فیثاغورس، قطر آن برابر با $\sqrt{۲}a$ است. نیروی ذرهٔ ۲ به ذرهٔ ۴ را محاسبه می‌کنیم:



$$F_{۲۴} = k\frac{q_۲q_۴}{r_{۲۴}^۲} \xrightarrow[q_۴=۲۰\,\mu C, r_{۲۴}=۳۰\sqrt{۲}\,cm]{k=۹۰, q_۲=۱۶\,\mu C} F_{۲۴} = \frac{۹۰\times۱۶\times۲۰}{۹۰۰\times۲} = ۱۶\ N$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام چهارم: حالا در شکل زیر ابتدا اندازهٔ برایند دو نیروی هم‌اندازهٔ $F_{۱۴}$ و $F_{۳۴}$ را به دست می‌آوریم:



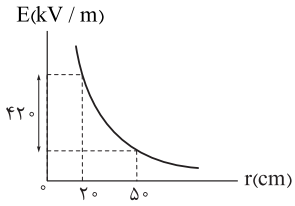
$$F_{۱۴,۳۴} = \sqrt{F_{۱۴}^{۲} + F_{۳۴}^{۲}} = \sqrt{۲}\,F_{۱۴} = \sqrt{۲} \times ۶\sqrt{۲} = ۱۲\,N$$

این نیرو، همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، بر نیروی $\vec{F}_{۲۴}$ عمود است؛ پس داریم:

$$F_{net} = \sqrt{F_{۱۴,۳۴}^{۲} + F_{۲۴}^{۲}} = \sqrt{۱۲^{۲} + ۱۶^{۲}} = ۲۰\,N$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۶ نمودار اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای q برحسب فاصله از آن به شکل زیر است. بار الکتریکی نقطه‌ای $q' = ۱۸\ \mu C$ را در فاصلهٔ ۶۰ cm از بار q قرار می‌دهیم. بزرگی نیروی الکتریکی وارد بر بار q از طرف بار q' چند نیوتون است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۱۰

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

میدان الکتریکی حاصل از یک ذرهٔ باردار:

می‌خواهیم بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار ذره‌ای q را در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از آن به دست آوریم:

$$E = k\frac{|q|}{r^۲}$$

E: اندازهٔ میدان الکتریکی (N/C)

$k = ۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲}$: ثابت کولن

q: بار الکتریکی‌ای که میدان را ایجاد کرده است (C)

r: فاصلهٔ بار q تا نقطه‌ای که میدان الکتریکی را در آن نقطه می‌خواهیم (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به آن‌که اختلاف میدان در فاصله‌های $r_۱$ و $r_۲$ برابر $۴۲۰\ kV/m$ است، رابطهٔ میدان را می‌نویسیم:

$$E_۱ = k\frac{q}{r_۱^۲} \xrightarrow{r_۱=۲۰\ cm=۰/۲\ m} E_۱ = \frac{kq}{۰/۰۴} \Rightarrow E_۱ = ۲۵kq$$

$$E_۲ = k\frac{q}{r_۲^۲} \xrightarrow{r_۲=۵۰\ cm=۰/۵\ m} E_۲ = \frac{kq}{۰/۲۵} \Rightarrow E_۲ = ۴kq$$

از طرفی می‌دانیم: $E_۱ - E_۲ = ۴۲۰\ kV/m$

$$E_۱ - E_۲ = ۴۲۰\ kV/m$$

$$\Rightarrow ۲۵kq - ۴kq = ۴۲۰ \Rightarrow ۲۱kq = ۴۲۰ \Rightarrow kq = ۲۰\frac{kN.m^۲}{C} \Rightarrow kq = ۲۰\times۱۰^۳\frac{N.m^۲}{C}$$

گام دوم: حالا نیروی الکتریکی در فاصلهٔ جدید را محاسبه می‌کنیم:

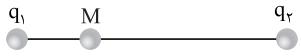
$$F = k\frac{q\times q'}{r'^۲} \xrightarrow[q'=۱۸\ \mu C\ ,\ kq=۲۰\times۱۰^۳\frac{N.m^۲}{C}]{r'=۶۰\ cm=۰/۶\ m} F = \frac{۲۰\times۱۰^۳\times۱۸\times۱۰^{-۶}}{۳۶\times۱۰^{-۲}} = ۱\ N$$

تیزپازی

در برخی مسائل که نمودار وابسته به $\frac{۱}{r^۲}$ داده می‌شود، سعی نکنین k و q رو جداگانه به دست بیارین بلکه باید با اون‌ها مثل مقادیر (ثابت) برخورد کنین.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۷ در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصلهٔ ثابتی از یکدیگر قرار دارند و میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M برابر با $\vec{E}$ است. اگر مقدار بار الکتریکی q_1 دو برابر شده و علامت آن نیز تغییر کند، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ M، برابر $10\vec{E}$ می‌شود. در حالت اول، بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در نقطهٔ M، چند برابر بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در نقطهٔ M است؟



۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق اصل برهم‌نهی، میدان خالص در نقطهٔ M برابر با مجموع برداری میدان‌های ایجادشده توسط هر بار است:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (I)$$

گام دوم: بار q_1 دو برابر شده و تغییر علامت داده، پس $\vec{E}_1$ نیز دو برابر و قرینه می‌شود و $\vec{E}_2$ بدون تغییر می‌ماند:

$$\vec{E}'_1 = -2\vec{E}_1 \quad , \quad \vec{E}'_2 = \vec{E}_2$$

$$\vec{E}' = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 \Rightarrow 10\vec{E} = -2\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (II)$$

گام سوم: معادلهٔ (I) را در معادلهٔ (II) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$10(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = -2\vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

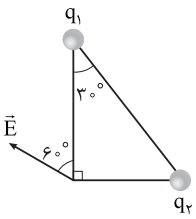
$$\Rightarrow 12\vec{E}_1 = -9\vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{-9}{12}\vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{-3}{4}\vec{E}_2$$

چون نسبت بزرگی میدان را خواسته، پس داریم:

$$|\vec{E}_1| = \frac{3}{4}|\vec{E}_2|$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۸ در شکل زیر، اگر میدان الکتریکی خالص حاصل از بارهای الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در رأس قائم مثلث برابر با $\vec{E}$ باشد، $\frac{q_2}{q_1}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{3}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳) $-\sqrt{3}$

۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

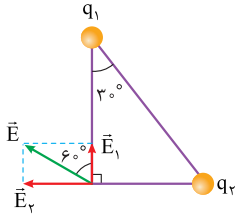
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فاصله از q_1 تا رأس قائم را r_1 و فاصله از q_2 تا رأس قائم را r_2 می‌نامیم. با استفاده از نسبت مثلثاتی tan داریم:

$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} r_1^2 = 3r_2^2$$

گام دوم: بردار میدان خالص $\vec{E}$ به سمت چپ و بالا متمایل است. این بردار از دو مؤلفه تشکیل شده است:



۱) **مؤلفهٔ قائم ($\vec{E}_1$):** رو به بالا است؛ یعنی خطوط میدان در این نقطه به سمت بار q_1 می‌روند. طبق قرداد، خطوط میدان به سمت بارهای منفی ختم می‌شوند، پس بار q_1 منفی است ($q_1 < ۰$).

۲) **مؤلفهٔ افقی ($\vec{E}_2$):** رو به چپ است؛ یعنی خطوط میدان در این نقطه از بار q_2 که در سمت راست قرار دارد، دور می‌شوند. خطوط میدان از بارهای مثبت خارج می‌شوند، پس بار q_2 مثبت است ($q_2 > ۰$).

گام سوم: استفاده از زوایای بردار میدان برای یافتن نسبت بزرگی‌ها:

زاویهٔ ۶۰° بین بردار میدان خالص ($\vec{E}$) و مؤلفهٔ قائم ($\vec{E}_1$) تشکیل شده است. از روی شکل برداری، داریم:

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{|\vec{E}_2|}{|\vec{E}_1|} = \frac{E_2}{E_1}$$

$$\sqrt{3} = \frac{E_2}{E_1} \Rightarrow E_2 = \sqrt{3}E_1$$

حالا فرمول میدان الکتریکی نقطه‌ای ($E = k\frac{|q|}{r^2}$) را برای هر دو جای‌گذاری می‌کنیم:

$$k\frac{|q_2|}{r_2^2} = \sqrt{3} \times k\frac{|q_1|}{r_1^2}$$

با ساده‌کردن k از طرفین و مرتب‌کردن معادله برای یافتن نسبت بارها:

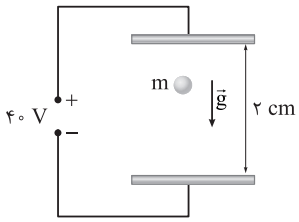
$$\frac{|q_2|}{|q_1|} = \sqrt{3}\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right)$$

از گام اول می‌دانیم که $\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{1}{3}$، این مقدار را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{|q_2|}{|q_1|} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow[q_2>۰]{q_1<۰} \frac{q_2}{q_1} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۹ در شکل زیر، ذرهٔ بارداری با جرم $m = ۲/۵\ g$ در میدان الکتریکی بین دو صفحهٔ باردار و افقی در تعادل است. بار این ذره چند میکروکولن است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) $۱۲/۵$

۲) $-۱۲/۵$

۳) $۲/۵$

۴) $-۲/۵$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

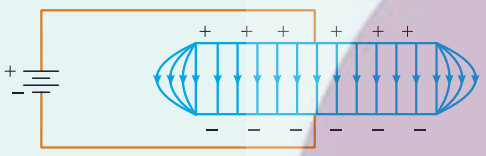
۱) رابطهٔ نیروی الکتریکی وارد بر یک ذرهٔ باردار که در میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار می‌گیرد، به صورت زیر است:

$\vec{F} = q\vec{E}$ ← نیروی الکتریکی (N)، میدان الکتریکی (N/C)، بار الکتریکی (C)

- اگر $q > ۰$ باشد، $\vec{F}$ و $\vec{E}$ هم‌جهت هستند.
- اگر $q < ۰$ باشد، $\vec{F}$ و $\vec{E}$ در خلاف جهت هم هستند.

۲) **میدان الکتریکی یکنواخت:** میدان الکتریکی‌ای است که خطوط آن مستقیم، موازی و هم‌فاصله‌اند، یعنی بردار میدان الکتریکی در تمام نقاط این میدان هم‌اندازه و هم‌جهت است.

مثال در شکل زیر، بین دو صفحهٔ رسانای موازی و دور از لبه‌های آن میدان الکتریکی یکنواخت وجود دارد.



$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

E: اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت (N/C) یا (V/m)

ΔV: اختلاف پتانسیل میان دو صفحه (V)

d: فاصلهٔ میان دو صفحه (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رابطهٔ میدان در خازن یا دو صفحهٔ موازی به این صورت است:

$$E = \frac{V}{d} \xrightarrow{V=۴۰\ V\ ,\ d=۲\ cm=۲\times۱۰^{-۲}\ m} E = \frac{۴۰\ V}{۰/۰۲\ m} = ۲۰۰۰\ N/C$$

گام دوم: اندازهٔ نیروی الکتریکی باید با اندازهٔ نیروی وزن برابر باشد:

$$F_E = W \Rightarrow |q|E = mg$$

$$\xrightarrow[g=۱۰\ N/kg]{E=۲۰۰۰\ N/C\ ,\ m=۲/۵\ g=۲/۵\times۱۰^{-۳}\ kg} ۲۰۰۰\times q = ۲/۵\times۱۰^{-۳}\times۱۰$$

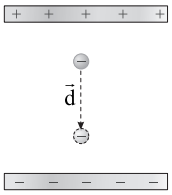
$$\Rightarrow q = \frac{۲/۵\times۱۰^{-۳}\times۱۰}{۲۰۰۰} = ۱۲/۵\times۱۰^{-۶}\ C = ۱۲/۵\ \mu C$$

- طبق شکل، صفحهٔ بالایی به قطب مثبت و صفحهٔ پایینی به قطب منفی باتری متصل است.
- خطوط میدان الکتریکی $(\vec{E})$ همواره از مثبت به منفی (یعنی به سمت پایین) هستند.
- از آن‌جا که نیروی الکتریکی $(\vec{F}_E)$ به سمت بالا (در خلاف جهت میدان) به ذره وارد می‌شود، نتیجه می‌گیریم که ذره دارای بار منفی است.

بنابراین جواب گزینهٔ (۲) یعنی $-۱۲/۵\ \mu C$ می‌باشد.

تـوشـه ای بـرای مـوفقیت

۵۰ **مطابق شکل زیر، الکترونی در میدان الکتریکی حاصل از دو صفحهٔ رسانای باردار جابه‌جا می‌شود. در این جابه‌جایی، علامت کار میدان الکتریکی و تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون، به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟**



۱) مثبت، مثبت

۲) منفی، منفی

۳) مثبت، منفی

۴) منفی، مثبت

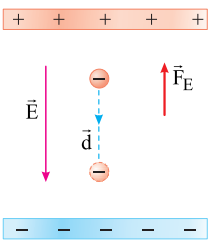
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

وقتی یک ذرهٔ باردار تحت تأثیر میدان الکتریکی، در جهت تمایل خود (جهت نیروی الکتریکی) حرکت کند، کار نیروی الکتریکی وارد بر آن مثبت بوده و تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی منفی است. از طرفی وقتی یک ذرهٔ باردار تحت تأثیر میدان الکتریکی در خلاف جهت تمایل خود (خلاف جهت نیروی الکتریکی) حرکت کند، کار نیروی الکتریکی وارد بر آن منفی بوده و تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی مثبت است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

می‌دانیم نیروی الکتریکی وارد بر الکترون (بار منفی) در خلاف جهت میدان است؛ بنابراین با توجه به شکل زیر که جهت میدان الکتریکی رو به پایین است، درمی‌یابیم جهت نیروی الکتریکی وارد بر الکترون رو به بالا و در خلاف جهت جابه‌جایی است؛ در نتیجه کار میدان الکتریکی بر روی ذره، منفی و تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی، مثبت است.



$W_E < 0$

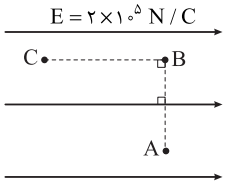
$\Delta U_E > 0$

تیزبازی

هیچ وقت علامت کار میدان الکتریکی و تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی وقتی غیرصفر هستند، یکسان نیست؛ پس همون اول گزینه‌های (۱) و (۲) رو رد کنین.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۱ در میدان الکتریکی یکنواخت شکل زیر، بار الکتریکی $q = ۵\ \mu C$ در مسیر نشان داده شده، از نقطهٔ A به نقطهٔ B و سپس به نقطهٔ C منتقل شده است. اندازهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار q، در طی این جابه‌جایی چند میلی‌ژول است؟ $(\overline{AB} = ۶\ cm$ و $\overline{BC} = ۸\ cm)$



۱) ۶۰

۲) ۸۰

۳) ۱۰۰

۴) ۱۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

وقتی یک ذرهٔ باردار تحت تأثیر میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$، به اندازهٔ d جابه‌جا شود، اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی ذره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

زاویهٔ بین بردارهای نیرو و جابه‌جایی — بار الکتریکی ذره (C) — میدان الکتریکی (N/C)

$$|\Delta U_E| = |E \cdot q \cdot d \cdot \cos\theta|$$

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J) — جابه‌جایی (m)

طبق رابطهٔ بالا، دو حالت خاص داریم:

۱) جابه‌جایی ذره به اندازهٔ d در راستای خطوط میدان الکتریکی: $|\Delta U_E| = |Eqd|$

۲) جابه‌جایی ذره به اندازهٔ d عمود بر خطوط میدان الکتریکی: $\Delta U_E = ۰$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به این‌که ذره از A تا B عمود بر خطوط میدان الکتریکی و از B تا C در راستای خطوط میدان الکتریکی جابه‌جا شده است، داریم:

$$AB: \theta = ۹۰^\circ \Rightarrow \cos\theta = ۰ \Rightarrow \Delta U_{AB} = ۰$$

$$BC: |\cos\theta| = ۱ \Rightarrow |\Delta U_{BC}| = |Eqd_{BC}|$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$|\Delta U_E| = |\Delta U_{AB} + \Delta U_{BC}| = |\Delta U_{BC}| = |Eqd_{BC}|$$

$$\Rightarrow |\Delta U_E| = ۲\times۱۰^۵ \times ۵\times۱۰^{-۶} \times ۸\times۱۰^{-۲} = ۸\times۱۰^{-۲}\ J \times \frac{۱\ mJ}{۱۰^{-۳}\ J} = ۸۰\ mJ$$

با توجه به این‌که جهت نیروی الکتریکی وارد بر بار مثبت در جهت خطوط میدان و جابه‌جایی ذره در مسیر BC در خلاف جهت نیروی الکتریکی است، درمی‌یابیم انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در مسیر BC افزایش می‌یابد؛ بنابراین داریم:

$$\Delta U_E = ۸۰\ mJ$$

تیزبازی

اگر توی سؤال حواست به گزینه‌ها باشه، می‌بینی کلاً نیازی به بررسی علامت ΔU_E نداری!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۲ ذره‌ای به جرم $40\ g$ و بار الکتریکی $3\ \mu C$ در جهت میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $E = 4\times10^{5}\ N/C$ با تندی اولیهٔ v_0 پرتاب می‌شود. اگر پس از $80\ cm$ جابه‌جایی، تندی ذره ۲ برابر شود، v_0 چند متر بر ثانیه است؟ (از نیروهای وزن و مقاومت هوای وارد بر ذره، صرف‌نظر کنید.)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

وقتی بر یک ذرهٔ باردار فقط نیروی الکتریکی وارد شود، می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta K = -\Delta U_E$$

(ΔK: تغییر انرژی جنبشی (J)، ΔU_E: تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J))

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که ذره با بار مثبت در جهت خطوط میدان و جهت نیروی الکتریکی جابه‌جا شده است، درمی‌یابیم علامت ΔU_E منفی است؛ بنابراین داریم:

$$|\Delta U_E| = |Eqd\cos\theta| \xrightarrow{E=4\times10^{5}\ N/C,\ q=3\ \mu C=3\times10^{-6}\ C,\ d=80\ cm=0.8\ m} |\Delta U_E| = 4\times10^{5}\times3\times10^{-6}\times0.8 = 0.96\ J$$

$$\xrightarrow{\Delta U_E<0} \Delta U_E = -0.96\ J$$

گام دوم: تغییر انرژی جنبشی را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که فقط نیروی الکتریکی بر ذره وارد می‌شود، داریم:

$$\Delta K = -\Delta U_E \Rightarrow \Delta K = 0.96\ J$$

گام سوم: تندی اولیهٔ پرتاب ذره را به دست می‌آوریم:

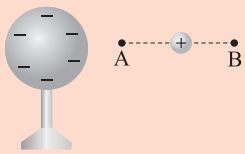
$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow 0.96 = \frac{1}{2}\times40\times10^{-3}(4v_0^2 - v_0^2)$$

$$\Rightarrow 3v_0^2 = 48 \Rightarrow v_0^2 = 16 \Rightarrow |v_0| = 4\ m/s$$

بنابراین تندی اولیهٔ پرتاب ذره $4\ m/s$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۳ **در شکل زیر، ذرهٔ باردار کوچک و مثبتی در نزدیکی کره‌ای با بار منفی که روی پایهٔ عایقی قرار دارد از نقطهٔ A تا نقطهٔ B جابه‌جا می‌شود. به ترتیب از راست به چپ، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A در مقایسه با نقطهٔ B چگونه است، و در این جابه‌جایی، علامت کار میدان الکتریکی روی ذره کدام است؟**



۱) بیشتر، مثبت

۲) بیشتر، منفی

۳) کم‌تر، مثبت

۴) کم‌تر، منفی

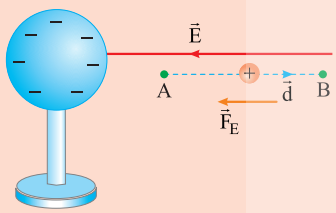
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اگر از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر در جهت خطوط میدان الکتریکی جابه‌جا شویم، پتانسیل الکتریکی کاهش و اگر در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی جابه‌جا شویم، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: می‌دانیم جهت میدان الکتریکی ناشی از بار منفی به سمت آن بار است؛ بنابراین جهت میدان الکتریکی ناشی از کره مطابق شکل مقابل است:



بنابراین با حرکت از A تا B، با توجه به این‌که در خلاف جهت خطوط میدان جابه‌جا شده‌ایم، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد؛ در نتیجه داریم:

$$V_B > V_A$$

پس پتانسیل نقطهٔ A کم‌تر از نقطهٔ B است.

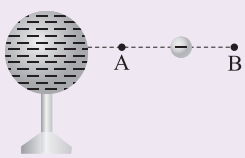
از طرفی با توجه به این‌که جابه‌جایی ذره در خلاف جهت نیروی وارد بر آن است، درمی‌یابیم کار نیروی الکتریکی وارد بر ذره، منفی است. به رابطهٔ زیر توجه کنید.



$$W_E = F_E.d\cos\theta \xrightarrow{\cos\theta=-1} W_E < 0$$

کنکور

در شکل زیر، کرهٔ فلزی با بار الکتریکی منفی روی پایهٔ نارسانایی قرار دارد و ذره‌ای با بار منفی را از نقطهٔ A تا نقطهٔ B جابه‌جا می‌کنیم. در این آزمایش، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B در مقایسه با پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A چگونه است و در این جابه‌جایی، انرژی پتانسیل الکتریکی ذرهٔ باردار چگونه تغییر می‌کند؟ *(سؤال ۲۲۰ کنکور تجربی ۱۴۰۰)*



۱) بیشتر ـ کاهش

۲) بیشتر ـ افزایش

۳) کم‌تر ـ کاهش

۴) کم‌تر ـ افزایش

۵۴ ذره‌ای به جرم ۵۰ میلی‌گرم و بار الکتریکی $40\ \mu C$، در یک میدان الکتریکی از نقطه‌ای به پتانسیل الکتریکی $V_1 = 40\ V$ با تندی $20\ m/s$ پرتاب می‌شود. در لحظه‌ای که این ذره به نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی $V_2 = -10\ V$ می‌رسد، انرژی جنبشی آن چند میلی‌ژول است؟ (از نیروهای وزن و مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

وقتی که تنها نیروی الکتریکی بر یک ذره اثر می‌کند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta K = -\Delta U_E$$

از طرفی اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه برابر است با:

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$$

(ΔV: اختلاف پتانسیل (V)، ΔU_E: تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)، q: بار ذره (C))

در نهایت می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta K = -q \times \Delta V$$

توی رابطهٔ $\Delta K = -q\Delta V$ *خواست باشه*، هر سه کمیت باید با در نظر گرفتن علامت قرار داده شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: انرژی جنبشی اولیه را به دست می‌آوریم:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-6} \times 20^2 = 0/01\ J$$

گام دوم: انرژی جنبشی نهایی را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که فقط نیروی الکتریکی بر ذره وارد می‌شود، داریم:

$$\begin{cases} \Delta K = -\Delta U_E \\ \Delta U_E = q\Delta V \end{cases} \Rightarrow \Delta K = -q\Delta V \xrightarrow{K_1 = 0/01\ J,\ q = 40\ \mu C = 40 \times 10^{-6}\ C} K_2 - 0/01 = -40 \times 10^{-6} \times (-10 - 40)$$

$$\Rightarrow K_2 - 0/01 = -40 \times 10^{-6} \times (-50) \Rightarrow K_2 - 0/01 = 2 \times 10^{-3} \Rightarrow K_2 = 0/012\ J = 12\ mJ$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۵ در صفحهٔ مختصات، میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = (-۵۰۰\ N/C)\,\vec{j}$ ایجاد شده است. اگر در نقطه‌ای به مختصات $\begin{vmatrix} ۶\ cm \\ ۵\ cm \end{vmatrix}$، پتانسیل الکتریکی برابر با $-۵\ V$ باشد، پتانسیل الکتریکی مبدأ مختصات چند ولت است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰

۳) -۲۰ ۴) -۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

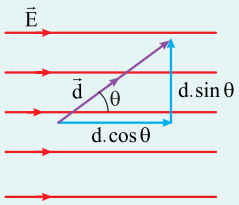
درس Box

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی یکنواخت E که در فاصلهٔ d از هم قرار دارند، طبق رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta V = -E.d\cos\theta$$

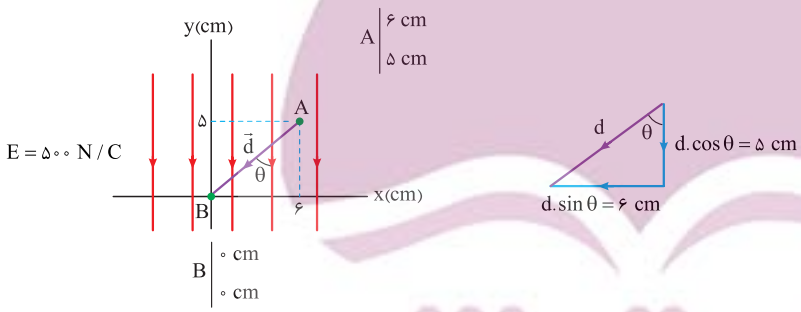
(اختلاف پتانسیل (V)، فاصلهٔ دو نقطه (m)، اندازهٔ میدان الکتریکی (V/m)، زاویهٔ بین بردارهای $\vec{E}$ و $\vec{d}$)

در رابطهٔ بالا، $d.\cos\theta$ همان مؤلفه‌ای از فاصلهٔ دو ذره است که در راستای خطوط میدان الکتریکی است. به شکل زیر دقت کنید.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جابه‌جایی در راستای خطوط میدان $(d.\cos\theta)$ را به دست می‌آوریم. با توجه به شکل زیر داریم:



گام دوم: اختلاف پتانسیل نقاط A و B را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V = -E.d\cos\theta \xrightarrow{E=۵۰۰\ N/C,\ d\cos\theta=۵\ cm=۰/۰۵\ m} \Delta V = -۵۰۰\times۰/۰۵ = -۲۵\ V$$

گام سوم: پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ B (مبدأ مختصات) به دست می‌آوریم:

$$\Delta V = V_B - V_A \xrightarrow[V_A=-۵\ V]{\Delta V=-۲۵\ V} -۲۵ = V_B - (-۵) \Rightarrow V_B = -۳۰\ V$$

یه‌جور دیگه

می‌دانیم با حرکت از نقطهٔ A به B، با توجه به این‌که به سمت پایین می‌رویم (در جهت خطوط میدان)، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد و چون در راستای خطوط میدان به اندازهٔ $d' = ۵\ cm$ پایین می‌رویم، داریم:

$$|\Delta V| = E.d' \Rightarrow |\Delta V| = ۵۰۰\times۰/۰۵ = ۲۵\ V \xrightarrow{\Delta V<۰} \Delta V = -۲۵\ V$$

در نتیجه پتانسیل نقطهٔ B، ۲۵ V کم‌تر از نقطهٔ A و برابر با $-۳۰\ V$ است.

۵۶ در یک میدان الکتریکی، بار الکتریکی $q_1 = 2\ \mu C$ از نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی $V_1 = -20\ V$ به نقطهٔ M، و بار الکتریکی $q_2 = -4\ \mu C$ نیز از نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی $V_2 = 70\ V$ به نقطهٔ M منتقل می‌شود. اگر در طی این جابه‌جایی‌ها، کار میدان الکتریکی روی این دو ذره، برابر باشد، پتانسیل نقطهٔ M چند ولت است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

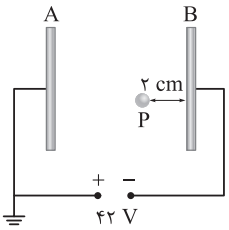
با توجه به این‌که کار میدان الکتریکی بر روی بارهای q_1 و q_2 یکسان است، درمی‌یابیم تغییر انرژی پتانسیل این دو ذره هم برابر است؛ بنابراین طبق رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} = \frac{\Delta U_2}{\Delta U_1} \times \frac{q_1}{q_2} \xrightarrow[\Delta U_2 = \Delta U_1 \,,\, q_1 = 2\ \mu C \,,\, q_2 = -4\ \mu C]{\Delta V_2 = V_M - V_2 \,,\, \Delta V_1 = V_M - V_1} \frac{V_M - 70}{V_M - (-20)} = 1 \times \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -2V_M + 140 = V_M + 20 \Rightarrow V_M = 40\ V$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۷ در شکل زیر، اختلاف پتانسیل ثابت ۴۲ V بین دو صفحهٔ رسانای بزرگ موازی که در فاصلهٔ ۶ cm از هم قرار دارند، اعمال شده است. با ثابت‌ماندن صفحهٔ A، صفحهٔ B را چند سانتی‌متر و چگونه جابه‌جا کنیم تا پتانسیل الکتریکی نقطهٔ P، ۴ V افزایش یابد؟



۱) ۲، به سمت راست

۲) ۲، به سمت چپ

۳) ۱، به سمت راست

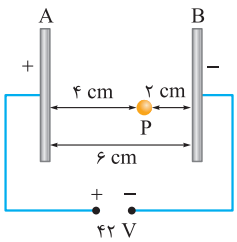
۴) ۱، به سمت چپ

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اختلاف پتانسیل نقطهٔ P با صفحهٔ A را در حالت اول به دست می‌آوریم. می‌دانیم جهت میدان الکتریکی از صفحهٔ مثبت به منفی بوده و با حرکت از صفحهٔ A به سمت نقطهٔ P، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta V = E.d \Rightarrow \frac{V_A - V_P}{V_A - V_B} = \frac{d_{AP}}{d_{AB}} \Rightarrow \frac{V_A - V_P}{۴۲} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow V_A - V_P = ۲۸\ V \Rightarrow V_P = V_A - ۲۸\ (V)$$



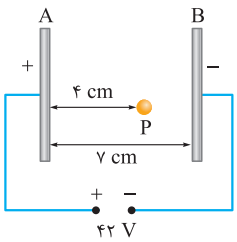
گام دوم: با توجه به اختلاف پتانسیل نقطهٔ P با صفحهٔ A در حالت دوم، فاصلهٔ دو صفحهٔ A و B را در حالت دوم به دست می‌آوریم:

$$V'_P = V_P + ۴ = (V_A - ۲۸) + ۴ = V_A - ۲۴(V) \Rightarrow V_A - V'_P = V_A - (V_A - ۲۴) = ۲۴\ V$$

$$\frac{V_A - V'_P}{V_A - V_B} = \frac{d_{AP}}{d'_{AB}} \Rightarrow \frac{۲۴}{۴۲} = \frac{۴}{d'_{AB}} \Rightarrow d'_{AB} = ۷\ cm$$

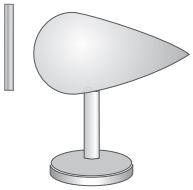
دقت کنید که چون صفحهٔ A و نقطهٔ P جابه‌جا نمی‌شوند، در حالت دوم هم d_{AP} همان ۴ cm است.

در نتیجه با توجه به این‌که فاصلهٔ AB در حالت دوم به اندازهٔ $۷ - ۶ = ۱\ cm$ افزایش یافته است، درمی‌یابیم صفحهٔ B، به اندازهٔ ۱ cm به سمت راست جابه‌جا شده است.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۸ مطابق شکل زیر، یک جسم رسانای دوکی‌شکل خنثی که روی پایهٔ عایقی است، در مجاورت یک میلهٔ باردار قرار دارد. چه تعداد از موارد زیر درست هستند؟



الف) میدان الکتریکی خالص درون جسم رسانا، صفر است.

ب) جسم رسانا، به میلهٔ باردار نیروی الکتریکی ربایشی وارد می‌کند.

پ) چگالی سطحی بار الکتریکی در نقاط نوک‌تیز رسانای دوکی‌شکل بیشتر است.

ت) همهٔ نقاط جسم رسانا، هم‌پتانسیل‌اند.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

یک جسم رسانای باردار هنگامی که در تعادل الکتروستاتیک قرار دارد:

۱) تمام نقاطش هم‌پتانسیل هستند.

۲) بار الکتریکی خالص و میدان الکتریکی خالص داخل آن صفر است.

۳) بار الکتریکی در تمام سطح رسانا پخش می‌شود و تراکم بار در نقاط نوک‌تیز آن بیشتر است.

نکته یک جسم باردار، جسم خنثی را جذب می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق درس‌باکس، همهٔ عبارات درست هستند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ روی سطح فلزی بزرگی، بار الکتریکی دور از لبه‌ها به طور یکنواخت توزیع شده است. اگر بخشی از این سطح به شکل مربعی به ضلع ۲ mm، بار الکتریکی ۸ pC داشته باشد، چگالی سطحی بار الکتریکی این سطح فلزی چند میکروکولن بر متر مربع است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۲×۱۰^{-۳}
۴) ۴×۱۰^{-۳}

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

به نسبت بار الکتریکی به مساحت سطحی که بار بر روی آن قرار گرفته است، چگالی سطحی بار می‌گوییم و رابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

σ: چگالی سطحی بار $(C/m^۲)$، Q: بار الکتریکی (C)، A: مساحت سطح $(m^۲)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

طبق رابطهٔ چگالی سطحی بار داریم:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \xrightarrow[A=a^۲=(۲\times۱۰^{-۳})^۲=۴\times۱۰^{-۶}\,m^۲]{Q=۸\,pC=۸\times۱۰^{-۱۲}\,C} \sigma = \frac{۸\times۱۰^{-۱۲}}{۴\times۱۰^{-۶}} = ۲\times۱۰^{-۶}\,C/m^۲ = ۲\,\mu C/m^۲$$

گول نخوری ✘

اگر مساحت مربع رو $۴\,mm^۲$ به دست بیارین و برحسب SI به اشتباه $۴\times۱۰^{-۳}\,m^۲$ بنویسین، توی دام گزینهٔ (۳) میفتین.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۰ **قطر کرهٔ رسانای A، ۲ برابر قطر کرهٔ رسانای B، و بار الکتریکی کرهٔ A نیز، ۲ برابر بار الکتریکی کرهٔ B است. اگر تعداد ۵×۱۰^{۱۳} الکترون بین این دو کره جابه‌جا شود، چگالی سطحی بار الکتریکی آن‌ها برابر می‌شود. بار اولیهٔ کرهٔ A چند میکروکولن است؟ $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$**

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نسبت مساحت کره‌ها را به دست می‌آوریم؛ با توجه به این‌که قطر کرهٔ A، ۲ برابر قطر کرهٔ B است، درمی‌یابیم شعاع کرهٔ A نیز ۲ برابر شعاع کرهٔ B است؛ بنابراین داریم:

$$A=۴\pi R^{۲} \Rightarrow \frac{A_A}{A_B}=\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{A_A}{A_B}=\left(\frac{۲R_B}{R_B}\right)^{۲}=۴$$

گام دوم: نسبت بار کره‌ها را برای این‌که چگالی سطحی بار یکسانی داشته باشند (حالت دوم)، به دست می‌آوریم:

$$\sigma=\frac{q}{A} \Rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{q'_A}{q'_B}\times\frac{A_B}{A_A} \xrightarrow[A_B=\frac{۱}{۴}A_A]{\sigma_A=\sigma_B} ۱=\frac{q'_A}{q'_B}\times\frac{۱}{۴} \Rightarrow q'_A=۴q'_B$$

گام سوم: تغییرات بار کرهٔ A را به دست می‌آوریم. طبق اصل پایستگی بار داریم:

$$q'_A+q'_B=q_A+q_B \xrightarrow[q_A=۲q_B]{q'_A=۴q'_B} ۴q'_B+q'_B=۲q_B+q_B$$

$$\Rightarrow ۵q'_B=۳q_B \Rightarrow q'_B=\frac{۳}{۵}q_B$$

$$\Rightarrow \Delta q=|q'_A-q_A|=|q'_B-q_B| \Rightarrow \Delta q=|\frac{۳}{۵}q_B-q_B|=\frac{۲}{۵}q_B$$

$$\xrightarrow{q_B=\frac{۱}{۲}q_A} \Delta q=\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۲}q_A=\frac{۱}{۵}q_A$$

گام چهارم: بار اولیهٔ کرهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\Delta q=ne \xrightarrow{\Delta q=\frac{۱}{۵}q_A} \frac{۱}{۵}q_A=۵\times۱۰^{۱۳}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} \Rightarrow q_A=۴۰\times۱۰^{-۶}C=۴۰\,\mu C$$

یه‌جور دیگه

گام اول: مقدار بار منتقل‌شده را به دست می‌آوریم:

$$x=\Delta q=ne \Rightarrow x=۵\times۱۰^{۱۳}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}=۸\times۱۰^{-۶}C=۸\,\mu C$$

گام دوم: بار کرهٔ A را به دست می‌آوریم. اگر بار اولیهٔ کرهٔ B برابر q باشد، داریم:

$$\sigma_A=\sigma_B \Rightarrow \frac{۲q+x}{A_A}=\frac{q-x}{A_B} \xrightarrow[x=۸]{A_A=۴A_B} \frac{۲q+۸}{۴}=q-۸$$

$$\Rightarrow ۴q-۳۲=۲q+۸ \Rightarrow q=۲۰\,\mu C$$

$$\Rightarrow q_A=۲q=۲\times۲۰=۴۰\,\mu C$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۱ کدام مطلب، **نادرست** است؟

۱) همهٔ مواد طبیعی و ساختگی از کرهٔ زمین به دست می‌آیند و به تقریب جرم کل مواد در کرهٔ زمین ثابت می‌ماند.

۲) میزان تولید یا مصرف نسبی سوخت‌های فسیلی از فلزها بیشتر و از مواد معدنی کم‌تر است.

۳) عنصرهای جدول دوره‌ای را براساس شمارهٔ گروه آن‌ها، می‌توان در سه دسته شامل فلز، نافلز و شبه‌فلز جای داد.

۴) تعیین دوره و گروه یک عنصر در جدول دوره‌ای، کمک شایانی به پیش‌بینی خواص و رفتار آن خواهد کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عنصرهای جدول دوره‌ای را براساس **رفتار** آن‌ها می‌توان در سه دسته شامل فلز، نافلز و شبه‌فلز جای داد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مواد طبیعی مانند برخی فلزها، نفت، الماس و ... مستقیماً از کرهٔ زمین به دست می‌آیند و برخی مواد ساختگی، مانند پلاستیک، لاستیک و ... به طور غیرمستقیم از مواد طبیعی ساخته شده و این مواد در آخر، پس از استفاده، به صورت پسماند به خاک و کرهٔ زمین برمی‌گردند و طبق قانون پایستگی جرم مقدار آن‌ها ثابت خواهد ماند.

گزینهٔ (۲): مقایسهٔ میزان تولید یا مصرف نسبی برخی مواد، به صورت زیر است:

فلزها < سوخت‌های فسیلی < مواد معدنی

گزینهٔ (۴): به کمک خواص و رفتار عنصرهای هم‌گروه یا عنصرهای قبل و پس از یک عنصر، این پیش‌بینی امکان‌پذیر است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۲ چند مورد از مقایسه‌های داده‌شده درست است؟

- واکنش‌پذیری: $_{30}Zn$ > $_{29}Cu$
- رسانایی الکتریکی: $_{16}S$ > $_{32}Ge$
- شکل‌پذیری: هفتمین عنصر دستهٔ p > دومین عنصر گروه ۱۵
- شعاع اتمی: نافلز مایع جدول دوره‌ای > اولین فلز گروه ۱۴

$_{15}P$ ، $_{13}Al$: $2p^6\,3p^1 \Rightarrow$ ، $_{50}Sn$ ، $_{35}Br$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

بیایید *دونه‌دونه* مقایسه‌های داده‌شده را بررسی کنیم:

- فلز روی ($_{30}Zn$)، واکنش‌پذیری کم و فلز مس ($_{29}Cu$)، واکنش‌پذیری ناچیزی دارد؛ بنابراین:

واکنش‌پذیری : $_{29}Cu < {}_{30}Zn$

نکته

ترتیب واکنش‌پذیری برخی عنصرهای جدول تناوبی:

واکنش پذیری : فلزهای گروه ۱ و ۲ (زیاد) > Al > C > Zn > Fe (کم) > Cu > Ag > Au (ناچیز)

- ژرمانیم ($_{32}Ge$) یک عنصر شبه‌فلزی است که رسانایی الکتریکی کمی دارد در حالی که گوگرد ($_{16}S$) یک نافلز است و رسانایی الکتریکی ندارد.

رسانایی الکتریکی: $_{32}Ge < {}_{16}S$

- آلومینیم ($1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^1$) هفتمین عنصر دستهٔ p و فسفر ($_{15}P$)، دومین عنصر گروه ۱۵ جدول تناوبی است. شکل‌پذیری نافلز فسفر کم‌تر از فلز آلومینیم می‌باشد.

شکل‌پذیری : $_{15}P < {}_{13}Al$

- نافلز مایع و اولین فلز گروه ۱۴ جدول دوره‌ای به ترتیب برم ($_{35}Br$) و قلع ($_{50}Sn$) هستند. برم در دورهٔ چهارم و گروه ۱۷ و قلع در دورهٔ پنجم و گروه ۱۴ جدول تناوبی جای دارد؛ پس قلع نسبت به برم در دورهٔ پایین‌تر و نیز سمت چپ‌تر جدول تناوبی قرار دارد، پس شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد.

شعاع اتمی : $_{50}Sn > {}_{35}Br$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۳ با توجه به جدول زیر، کدام موارد درست است؟

عنصر	M	Y	A	X	E	D
آرایش الکترونی اتم	$[Ar]4s^1$	$[Ne]3s^2 3p^5$	$[Ar]3d^{10} 4s^1$	$[He]2s^2 2p^5$	$[Ne]3s^2 3p^1$	$[Ne]3s^2 3p^2$

الف) شعاع اتمی عنصر Y از شعاع اتمی عنصر E کم‌تر است.

ب) واکنش $AO(s) + 2M(s) \xrightarrow{\Delta} M_2O(s) + A(s)$ به طور طبیعی انجام می‌شود.

پ) حالت فیزیکی عنصرهای X و Y در دما و فشار اتاق با هم متفاوت است.

ت) همهٔ زیرلایه‌های اشغال‌شده در اتم عنصر نافلزی و هم‌گروه با D در جدول دوره‌ای، دارای ۲ الکترون هستند.

ث) عنصر A همانند $_{24}Cr$، کاتیون‌هایی با بار الکتریکی ۲+ و ۳+ تشکیل می‌دهد.

۱) الف، ب و پ
۲) ب، ت و ث
۳) الف، ب و ت
۴) الف، پ، ت و ث

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف»، «ب» و «ت» درست‌اند.

ابتدا بهتره که تکلیف عنصرها را مشخص کنیم:

$M = {}_{19}K \ , \ Y = {}_{17}Cl \ , \ A = {}_{29}Cu \ , \ X = {}_{9}F \ , \ E = {}_{13}Al \ , \ D = {}_{14}Si$

بررسی عبارت‌ها:

الف) عنصرهای E و Y هر دو در یک دوره از جدول تناوبی قرار دارند. در یک دوره با افزایش عدد اتمی (از چپ به راست) شعاع اتمی کاهش می‌یابد؛ بنابراین:

شعاع اتمی: $(_{13}Al)E > (_{17}Cl)Y$

ب) عنصر M یک فلز اصلی $(_{19}K)$ و عنصر A فلزی واسطه $(_{29}Cu)$ است. واکنش‌پذیری یک فلز اصلی از واکنش‌پذیری یک فلز واسطه بیشتر است؛ بنابراین واکنش مورد نظر به طور طبیعی (خودبه‌خودی) انجام می‌شود.

پ) عنصرهای X و Y به ترتیب فلوئور $(_9F)$ و کلر $(_{17}Cl)$ هستند که در دما و فشار اتاق به حالت گازی‌شکل یافت می‌شوند.

ت) کربن $(_6C)$ عنصر نافلزی هم‌گروه با عنصر D $(_{14}Si)$ است که هر سه زیرلایهٔ آن، دو الکترون دارد.

$_6C : 1s^2 2s^2 2p^2$

ث) عنصر A همان فلز مس $(_{29}Cu)$ است که کاتیون‌های ۱+ و ۲+ تشکیل می‌دهد.

امتحان نهایی

با توجه به جدول داده‌شده به پرسش‌ها پاسخ دهید. *(سؤال ۳ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)*

عنصر	M	Y	A	X	E	D
آرایش الکترونی	$[Ar]4s^1$	$[Ne]3s^2 3p^5$	$[Ar]3d^{10} 4s^1$	$[He]2s^2 2p^5$	$[Ne]3s^2 3p^1$	$[Ne]3s^2 3p^2$

الف) چرا شعاع اتمی عنصر E بیشتر از عنصر Y است؟

ب) واکنش‌پذیری کدام عنصر (X یا Y) بیشتر است؟

پ) آیا واکنش زیر به طور طبیعی انجام می‌شود؟ چرا؟

$\underbrace{AO}_{\text{(اکسید عنصر A)}}(s) + 2M(s) \xrightarrow{\Delta} M_2O(s) + A(s)$

ت) کدام عنصر (A یا D) در اثر ضربه خرد می‌شود؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶۴ است. موارد کدام گزینه، عبارت‌های داده‌شده را به درستی کامل می‌کند؟

الف) درصد عنصرهای فلزی بین عنصرهای دورهٔ سوم جدول دوره‌ای برابر .....

ب) در بین عنصرهای $_{9}A$، $_{38}D$، $_{20}E$، $_{31}G$ و $_{55}J$، ..... عنصر فلزی وجود دارد.

پ) با افزایش شمار الکترون‌های با $l=0$ در اتم عنصرهای هر گروه، خصلت نافلزی عنصرها ..... می‌یابد.

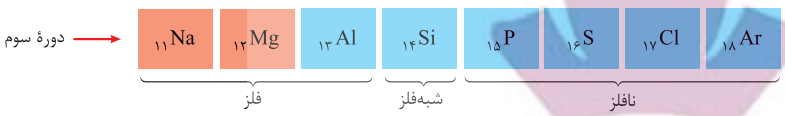
۱) ۵ / ۳۷٪ ـ چهار ـ کاهش
۲) ۲۵٪ ـ چهار ـ افزایش
۳) ۵ / ۳۷٪ ـ سه ـ کاهش
۴) ۲۵٪ ـ سه ـ افزایش

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی عبارت‌ها:

الف) سه عنصر از ۸ عنصر دورهٔ سوم جدول دوره‌ای، فلزند.



$\frac{3}{8}\times 100 = ٪37/5$

ب) به‌جز عنصر $_{9}F$ $(_{9}A)$، چهار عنصر دیگر فلز هستند.

پ) با افزایش عدد اتمی در هر گروه، شمار الکترون‌های با $l=0$ نیز افزایش می‌یابد؛ بنابراین خصلت نافلزی (از بالا به پایین) کاهش می‌یابد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۵ **با حرکت از سمت عنصر X که دارای ۱۰ الکترون با $l=1$ است، به سمت عنصر D از دورهٔ سوم که مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های لایهٔ آخر آن برابر با ۱۰ است، .....**

۱) از خاصیت فلزی کاسته و به خاصیت نافلزی افزوده می‌شود

۲) شعاع اتمی کاهش می‌یابد

۳) از خاصیت نافلزی کاسته و به خاصیت فلزی افزوده می‌شود

۴) شمار لایه‌های الکترونی اشغال‌شدهٔ اتم‌ها افزایش می‌یابد

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

رابطهٔ واکنش‌پذیری و خصلت فلزی و نافلزی عنصرها با شعاع اتمی در یک دوره:

۱) در عنصرهای فلزی اصلی یک دورهٔ جدول تناوبی از چپ به راست، به دلیل کاهش شعاع اتمی، تمایل فلز برای از دست دادن الکترون کم‌تر شده، یعنی خصلت فلزی و واکنش‌پذیری کاهش می‌یابد.

در یک دوره، با کاهش شعاع اتمی فلزها ← کاهش خصلت فلزی و واکنش‌پذیری

مثال بین دو عنصر پتاسیم و کلسیم که هر دو در دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارند، واکنش‌پذیری پتاسیم بیشتر است.

واکنش‌پذیری: $_{19}K > {}_{20}Ca$

۲) با صرف‌نظر از گازهای نجیب، در عنصرهای نافلزی یک دورهٔ جدول تناوبی، از چپ به راست، به دلیل کاهش شعاع اتمی، تمایل نافلز برای گرفتن الکترون بیشتر شده، یعنی خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری افزایش می‌یابد.

در یک دوره، با کاهش شعاع اتمی نافلزها ← افزایش خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری

مثال گوگرد و کلر هر دو در دورهٔ سوم جدول تناوبی قرار دارند، اما واکنش‌پذیری کلر بیشتر است.

واکنش‌پذیری: $_{17}Cl > {}_{16}S$

جمع‌بندی:

رابطهٔ بین خصلت فلزی با شعاع اتمی در فلزها	رابطهٔ بین خصلت نافلزی با شعاع اتمی در نافلزها
رابطهٔ مستقیم	رابطهٔ وارونه
خصلت فلزی ↑ ⇒ شعاع اتمی ↑	خصلت نافلزی ↓ ⇒ شعاع اتمی ↑

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا عنصرهای X و D را می‌یابیم:

$$X \xrightarrow{l=1\text{ الکترون با }10} 2p^6, 3p^4 \Rightarrow X: [_{10}Ne]3s^2 3p^4 \Rightarrow {}_{16}S \text{ (گوگرد)}$$

$$D \xrightarrow{n=3\text{ الکترون‌های }(n+l)} 3s^2 3p^1 \Rightarrow 2(3+0)+1(3+1)=10 \Rightarrow D=[_{10}Ne]3s^2 3p^1 \Rightarrow {}_{13}Al \text{ (آلومینیم)}$$

عنصرهای $_{16}S$ و $_{13}Al$ هر دو در یک دوره هستند و با پیمایش از $_{16}S$ به سمت $_{13}Al$ (از راست به چپ در یک دوره)، از خاصیت نافلزی کاسته و به خاصیت فلزی افزوده می‌شود.

۶۶ در رابطه با عناصر دورهٔ سوم جدول تناوبی، کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟

الف) بزرگ‌ترین شعاع اتمی مربوط به عنصری است که در تولید لامپ چراغ‌های جلوی خودروها استفاده می‌شود.

ب) عناصر فلزی این دوره، جزء عناصر دستهٔ s هستند و با تشکیل یون پایدار به آرایش الکترونی گاز نجیب دورهٔ قبل خود می‌رسند.

پ) تعداد عناصری که دارای نماد شیمیایی دوحرفی هستند، ۳ برابر تعداد عناصری است که نماد یک‌حرفی دارند.

ت) همهٔ عناصری که در ترکیب‌های خود، فقط پیوند اشتراکی تشکیل می‌دهند، رسانایی الکتریکی ندارند.

۱) الف ـ ب
۲) الف ـ ب ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) الف ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف»، «ب» و «ت» نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) بزرگ‌ترین شعاع اتمی در دورهٔ سوم متعلق به عنصر سدیم ($_{11}Na$) است، در حالی که از هالوژن‌ها، در تولید لامپ چراغ‌های جلوی خودروها استفاده می‌شود،

ب) علاوه بر سدیم ($_{11}Na$) و منیزیم ($_{12}Mg$) که جزء دستهٔ s هستند، آلومینیم ($_{13}Al$) از دستهٔ p جدول تناوبی نیز جزء عناصر فلزی این دوره می‌باشد.



پ) در بین ۸ عنصر این دوره، نماد شیمیایی ۶ عنصر ($_{11}Na$ ،$_{12}Mg$ ،$_{13}Al$ ،$_{14}Si$ ،$_{17}Cl$ ،$_{18}Ar$) دوحرفی و نماد شیمیایی ۲ عنصر ($_{15}P$ ،$_{16}S$) تک‌حرفی است.

ت) سیلیسیم ($_{14}Si$) شبه‌فلزی است که در ترکیب‌های خود پیوند اشتراکی تشکیل می‌دهد و رسانایی الکتریکی کمی نیز دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۷ درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب چگونه است؟

- **در استخراج طلا از معادن، نسبت جرم طلای استخراج‌شده به جرم پسماند تولیدشده به تقریب برابر ۳ است.**
- **آزاد یافت‌شدن یک عنصر در طبیعت، به یقین شاهدی بر واکنش‌پذیری بسیار کم آن است.**
- **چکش‌خواری و رسانایی الکتریکی بالای طلا، به تمایل کم اتم‌های آن به از دست دادن الکترون وابسته است.**
- **به دلیل چکش‌خواری و نرم‌بودن فلز طلا، می‌توان برگه‌ها و نخ‌هایی از آن را به راحتی تهیه کرد.**

۱) درست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۲) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۴) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

به‌جز عبارت چهارم، بقیهٔ عبارت‌ها نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در استخراج طلا از معادن، جرم پسماند تولیدشده از جرم طلای استخراج‌شده بسیار بیشتر است.

عبارت دوم: این مورد برای همهٔ عنصرها صادق نیست! مثلاً اکسیژن نافلزی بسیار واکنش‌پذیر است و علاوه بر ترکیب، به شکل آزاد نیز در طبیعت یافت می‌شود.

عبارت سوم: میزان توانایی اتم فلزها به از دست دادن الکترون، رفتار شیمیایی آن فلز را تعیین می‌کند در حالی که چکش‌خواری و رسانایی الکتریکی از جمله رفتارهای فیزیکی فلزها هستند و ربطی به واکنش‌پذیری آن‌ها ندارد!

عبارت چهارم: *کاملاً درسته!* فلز طلا به اندازه‌ای چکش‌خوار و نرم است که چند گرم از آن را می‌توان به صفحه‌ای با مساحت چند متر مربع تبدیل کرد؛ به همین دلیل ساخت برگه‌ها و رشته‌سیم‌های بسیار نازک (نخ طلا) به راحتی امکان‌پذیر است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۸ کدام مورد، نادرست است؟

۱) در واکنش $Fe(s) + XSO_4(aq) \rightarrow \ldots$، اگر X نخستین عنصری از جدول تناوبی باشد که لایهٔ سوم آن به طور کامل پر می‌شود، واکنش به طور طبیعی انجام‌پذیر است. ($_{29}Cu$)

۲) اگر واکنش $M(s) + FeSO_4(aq) \rightarrow \ldots$، در جهت طبیعی پیش نرود، محلول روی نیترات را می‌توان در ظرفی از جنس فلز M نگه‌داری کرد.

۳) اگر واکنش $D(s) + XCl_2(aq) \rightarrow DCl(aq) + X(s)$ به طور طبیعی انجام‌پذیر باشد و X و D هر دو فلز اصلی یک دوره از جدول تناوبی باشند، عدد اتمی X بزرگ‌تر از عدد اتمی D است.

۴) در واکنش $A(s) + FeSO_4(aq) \rightarrow \ldots$، اگر A فلز واسطهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی و مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیت آن برابر ۵۸ باشد، واکنش به طور طبیعی انجام نمی‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مقایسهٔ واکنش‌پذیری عنصرها:

در هر واکنش شیمیایی که به طور طبیعی انجام می‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کم‌تر است؛ پس اگر یک واکنش به ما بدهند که در دو طرفش یک عنصر آزاد وجود داشته باشد و *بگن* که این واکنش به طور طبیعی انجام می‌شه، ما خیلی سریع *می‌تونیم* واکنش‌پذیری دو عنصر آزاد در دو طرف معادله را با هم مقایسه کنیم:

$\underset{\text{ترکیب}}{AB} + \underset{\text{عنصر}}{C} \rightarrow \underset{\text{ترکیب}}{AC} + \underset{\text{عنصر}}{B} \Rightarrow$ واکنش‌پذیری: $B < C$

به طور کلی واکنش‌پذیری فلزهای اصلی، یعنی دستهٔ s (گروه ۱ و ۲) و فلز آلومینیم (از دستهٔ p)، از فلزهای واسطه بیشتر است.

هم‌چنین واکنش‌پذیری فلزهای واسطه‌ای مانند آهن و روی از فلزهای واسطه‌ای مانند مس، نقره و طلا بیشتر می‌باشد. در ضمن واکنش‌پذیری کربن (C) از واکنش‌پذیری فلزهای گروه ۱، ۲ و آلومینیم، کم‌تر و از فلزهای واسطه بیشتر است. *خلاصه این‌که باید مقایسهٔ کلی زیر رو بلد باشین:*

واکنش‌پذیری: فلزهای گروه ۱ و ۲ $> Al > C > Zn > Fe > Cu > Ag > Au$

هر چه واکنش‌پذیری یک عنصر بیشتر باشد، تمایل آن به ایجاد ترکیب بیشتر بوده و ترکیب‌های آن پایدارترند، در نتیجه شرایط نگه‌داری عنصر سخت‌تر بوده و استخراج آن نیز سخت‌تر است.

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا عنصر A را پیدا می‌کنیم:

$A: [_{18}Ar]3d^x 4s^2 \Rightarrow$ الکترون‌های ظرفیت $(n+l) = 58 \Rightarrow x(3+2) + 2(4+0) = 58 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow {}_{30}Zn$

واکنش‌پذیری روی ($_{30}Zn$) از آهن ($_{26}Fe$) بیشتر است؛ بنابراین واکنش روی با آهن (II) سولفات به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

$Zn(s) + FeSO_4(aq) \rightarrow ZnSO_4(aq) + Fe(s)$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): فلز مس ($_{29}Cu$) نخستین عنصری از جدول تناوبی است که لایهٔ سوم آن به طور کامل از الکترون پر می‌شود؛ بنابراین واکنش محلول مس (II) سولفات با فلز آهن به طور طبیعی انجام می‌شود.

$_{29}Cu: [_{18}Ar]3d^{10}4s^1$

$Fe(s) + CuSO_4(aq) \rightarrow FeSO_4(aq) + Cu(s)$

گزینهٔ (۲): اگر واکنش $M(s) + FeSO_4(aq) \rightarrow \ldots$ انجام‌پذیر نباشد، یعنی واکنش‌پذیری M از Fe کم‌تر بوده و با توجه به کم‌تربودن واکنش‌پذیری آهن نسبت به روی، فلز M با محلول‌های یون‌های روی نیز واکنش نمی‌دهد؛ در نتیجه این فلز گزینهٔ مناسبی برای نگه‌داری محلول روی نیترات $(Zn(NO_3)_2)$ است.

ترتیب واکنش‌پذیری: $Zn > Fe > M$

$M(s) + Zn(NO_3)_2(aq) \rightarrow$ واکنش نمی‌دهد.

نکته

اگر واکنش‌پذیری فلز M بیشتر از فلز X باشد، فلز M با محلول حاوی یون‌های X واکنش می‌دهد، بنابراین از ظرفی از جنس فلز M نمی‌توان برای نگه‌داری محلول حاوی نمک X استفاده کرد.

از ظرفی از جنس فلز M نمی‌توان برای نگه‌داری محلول حاوی نمک X استفاده کرد. $\Rightarrow$ واکنش می‌دهد $M + X^{n+} \rightarrow$

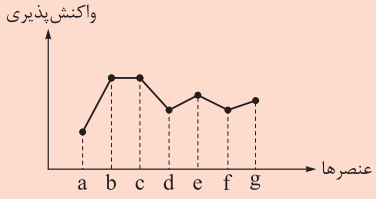
گزینه (۳): با توجه به انجام‌پذیری واکنش، واکنش‌پذیری فلز D از X بیشتر است. می‌دانیم در یک دوره از چپ به راست، با کاهش شعاع اتمی، واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد؛ بنابراین عدد اتمی X بزرگ‌تر است.

کاهش واکنش‌پذیری

D X

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۹ **با بررسی نمودار زیر که واکنش‌پذیری شماری از عنصرهای دورهٔ دوم جدول دوره‌ای را به صورت نامرتب نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟**



۱) مجموع شمارهٔ گروه عنصرهای b و c برابر ۱۸ است.

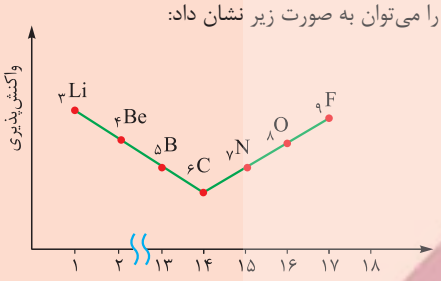
۲) تفاوت عدد اتمی a با عدد اتمی آخرین فلز دورهٔ چهارم، برابر ۲۵ است.

۳) اگر e اکسیژن باشد، g یک فلز قلیایی خاکی است.

۴) برای اتم دو عنصر، شمار الکترون‌ها در نخستین لایه و بیرونی‌ترین لایهٔ اشغال‌شده، یکسان است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نمودار روند کلی واکنش‌پذیری عنصرهای دورهٔ دوم به صورت مرتب‌شده را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



واکنش‌پذیری: $_{3}Li \underset{c,b}{=} {}_{9}F > {}_{4}Be \underset{g,e}{=} {}_{8}O > {}_{5}B \underset{f,d}{=} {}_{7}N > {}_{6}C \underset{a}{}$

در بین عنصرهای این دوره، فقط در اتم بریلیم ($_{4}Be$) تعداد الکترون‌های لایهٔ اول ($1s^2$) و لایهٔ دوم ($2s^2$) با یکدیگر برابر است.

$_{4}Be: 1s^2 2s^2$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): b و c می‌توانند عنصرهای لیتیم ($_{3}Li$) و فلوئور ($_{9}F$) باشند که به ترتیب در گروه‌های ۱ و ۱۷ جای گرفته‌اند.

مجموع شمارهٔ گروه $_{3}Li$ و $_{9}F$ $= 1 + 17 = 18$

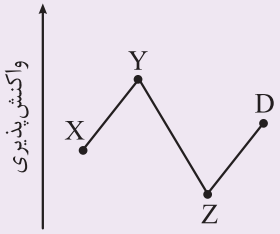
گزینهٔ (۲): a، عنصر کربن ($_{6}C$) و آخرین فلز دورهٔ چهارم، گالیم ($_{31}Ga$) است.

تفاوت عدد $_{6}C$ و $_{31}Ga$ $= 31 - 6 = 25$

گزینهٔ (۳): b و c، یعنی عنصرهای فلوئور ($_{9}F$) و لیتیم ($_{3}Li$)، بیشترین واکنش‌پذیری و پس از آن‌ها e و g، یعنی عنصرهای اکسیژن ($_{8}O$) و بریلیم ($_{4}Be$)، بیشترین واکنش‌پذیری را دارند. بریلیم در گروه دوم جدول قرار دارد و یک فلز قلیایی خاکی است.

کنکور

با توجه به مقایسهٔ واکنش‌پذیری چهار عنصر آغازی دورهٔ دوم جدول تناوبی که به شکل نامرتب و با حروف انگلیسی نشان داده شده، کدام مورد درست است؟ (سؤال ۸۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۵)



۱) همهٔ عناصر، دارای یون پایدار تک‌اتمی هستند.

۲) شعاع اتمی D، بزرگ‌تر از شعاع اتمی X و Y است.

۳) همهٔ زیرلایه‌های الکترونی در اتم D، برخلاف زیرلایه‌های الکترونی در اتم X، پُر است.

۴) شمار الکترون‌های دارای $l = 0$، در اتم Y، برابر با شمار الکترون‌های دارای $l = 1$، در اتم Z است.

۷۰ **m گرم آلومینیم با خلوص ۷۵٪ در واکنش با مقدار کافی هیدروکلریک اسید، ۴۴/۸ لیتر گاز هیدروژن در شرایط STP تولید کرده است. مقدار m کدام است؟ (ناخالصی‌ها در واکنش شرکت نکرده‌اند، $Al = 27\ g.mol^{-1}$)**

$Al(s) + HCl(aq) \rightarrow AlCl_3(aq) + H_2(g)$ (معادله موازنه شود.)

۱) ۹۶ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$2Al(s) + 6HCl(aq) \rightarrow 2AlCl_3(aq) + 3H_2(g)$$

به کمک حجم گاز هیدروژن تولیدشده، جرم آلومینیم ناخالص را محاسبه می‌کنیم:

$$44/8\ L\ H_2 \times \frac{1\ mol\ H_2}{22/4\ L\ H_2} \times \frac{2\ mol\ Al}{3\ mol\ H_2} \times \frac{27\ g\ Al}{1\ mol\ Al} \times \frac{\text{ناخالص } 100\ g\ Al}{\text{خالص } 75\ g\ Al} = \text{ناخالص } 48\ g\ Al$$

به جور دیگه

$$\frac{\frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Al}} = \frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{H_2}} \Rightarrow \frac{x \times \frac{75}{100}}{2 \times 27} = \frac{44/8}{3 \times 22/4} \Rightarrow x = 48\ g$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۱ کدام مورد دربارهٔ واکنش ترمیت درست است؟

$$2Al(s) + Fe_2O_3(s) \rightarrow Al_2O_3(s) + 2Fe(l)$$

۱) در معادلهٔ واکنش، مواد با سه حالت فیزیکی متفاوت وجود دارند.

۲) در واکنش انجام‌شدهٔ آن، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است.

۳) مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد پس از موازنهٔ معادلهٔ واکنش آن، برابر ۵ است.

۴) در این واکنش، واکنش‌پذیری عنصر فلزی که اتم آن الکترون‌های ظرفیتی بیشتری دارد، کم‌تر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

دو عنصر فلزی موجود در این واکنش، آلومینیم ($_{13}Al$) و آهن ($_{26}Fe$) هستند که به ترتیب اتم آن‌ها ۳ و ۸ الکترون ظرفیتی دارد.

$$2Al(s) + Fe_2O_3(s) \rightarrow Al_2O_3(s) + 2Fe(l)$$

واکنش‌پذیری: $Al > Fe$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در این واکنش مواد تنها با دو حالت فیزیکی جامد (s) و مذاب (l) حضور دارند.

گزینهٔ (۲): با توجه به این‌که این واکنش به طور طبیعی (خودبه‌خودی) انجام می‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها **کم‌تر** است.

گزینهٔ (۳): همان‌طور که در واکنش می‌بینید، مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر با ۶ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۲ در یک آزمایشگاه، نمونه‌ای از آهن (III) اکسید که حاوی ۲۱ گرم یون آهن است در اختیار داریم. چند گرم ناخالصی به این نمونه اضافه کنیم تا درصد خلوص آهن (III) اکسید در نمونهٔ مورد نظر برابر ۲۵ درصد شود؟ $(Fe = ۵۶ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) ۹۰ ۲) ۸۰ ۳) ۷۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اول جرم آهن (III) اکسید ($Fe_۲O_۳$) خالص را می‌سابیم:

$$۲۱\ g\ Fe^{۳+} \times \frac{۱\ mol\ Fe^{۳+}}{۵۶\ g\ Fe^{۳+}} \times \frac{۱\ mol\ Fe_۲O_۳}{۲\ mol\ Fe^{۳+}} \times \frac{۱۶۰\ g\ Fe_۲O_۳}{۱\ mol\ Fe_۲O_۳} = ۳۰\ g\ Fe_۲O_۳$$

حالا اگر جرم ناخالصی را x در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\text{درصد خلوص } Fe_۲O_۳ = \frac{\text{جرم } Fe_۲O_۳ \text{ خالص}}{\text{جرم ناخالصی} + \text{جرم } Fe_۲O_۳ \text{ خالص}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۲۵ = \frac{۳۰}{۳۰+x} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۳۰ + x = ۱۲۰ \Rightarrow x = ۹۰\ g$$

یه جور دیگه

$$۱\ Fe_۲O_۳ \sim ۲\ Fe^{۳+}$$

$$\frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰} \times \text{جرم ناخالص} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{y \times \frac{۲۵}{۱۰۰}}{۱۶۰} = \frac{۲۱}{۵۶ \times ۲} \Rightarrow y = ۱۲۰\ g$$

($Fe_۲O_۳$ در مخرج کسر اول، $Fe^{۳+}$ در مخرج کسر دوم)

$$\Rightarrow \text{جرم ناخالصی} = ۱۲۰ \times \frac{۷۵}{۱۰۰} = ۹۰\ g$$

(۷۵ درصد ناخالصی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۳ **۱۵۰ لیتر از عنصر گازی A_2 در شرایطی که حجم مولی گازها برابر ۲۵ لیتر است، با مقدار کافی X_2M_3 واکنش کامل می‌دهد و ۱۱۲ گرم عنصر X تشکیل می‌شود. اگر بازده درصدی واکنش برابر ۵۰ باشد، جرم مولی X برحسب گرم بر مول کدام است؟**

$X_2M_3(s) + A_2(g) \rightarrow X(s) + A_2M(l)$ (معادله موازنه شود.)

۱) ۵۱ ۲) ۵۲ ۳) ۵۵ ۴) ۵۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اول معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$X_2M_3 + 3A_2 \rightarrow 2X + 3A_2M$$

۱۱۲ گرم عنصر X تشکیل شده است، یعنی مقدار عملی X که در پایان واکنش به‌دست‌آمده برابر ۱۱۲ گرم است. حالا با توجه به بازده درصدی واکنش، مقدار نظری X برابر است با:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow 50 = \frac{112}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow \text{مقدار نظری} = 224\ g$$

حالا از طریق استوکیومتری واکنش، می‌توانیم جرم مولی (m) عنصر X را محاسبه کنیم:

$$150\ L\ A_2 \times \frac{1\ mol\ A_2}{25\ L\ A_2} \times \frac{2\ mol\ X}{3\ mol\ A_2} \times \frac{m\ g\ X}{1\ mol\ X} = 224\ g\ X \Rightarrow m = 56\ g.mol^{-1}$$

یه‌جور دیگه در حل مسائل بازده درصدی به کمک کسر تناسب، باید این کمیت را به شکل «$\frac{\text{بازده درصدی}}{100}$» حتماً در صورت کسر مربوط به واکنش‌دهنده ضرب کنیم:

$$\frac{\text{حجم} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{A_2}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{X}} \Rightarrow \frac{150 \times \frac{50}{100}}{3 \times 25} = \frac{112}{2 \times m} \Rightarrow m = \frac{112}{2} = 56\ g.mol^{-1}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۴ **اگر در اتم عنصر X، شمار الکترون‌ها با $l=0$ برابر ۸ و بیرونی‌ترین زیرلایهٔ الکترونی اشغال‌شدهٔ آن ns باشد، کدام مورد دربارهٔ اتم X درست است؟**

$1s^2 2s^2 3s^2 4s^2$

۱) اگر X نخستین فلز با این ویژگی باشد، زیرلایه‌ای با $l=2$ در اتم آن، یک الکترون دارد.

۲) اگر شمار الکترون‌های $l=2$ آن برابر ۱۰ باشد، با فلوئور دو ترکیب XF_2 و XF را تشکیل می‌دهد.

۳) اگر یک زیرلایهٔ نیمه‌پر داشته باشد، همانند کلسیم به صورت کانی‌های کربنات در طبیعت یافت می‌شود.

۴) شمار عنصرهای میان X و نخستین شبه‌فلز گروه چهاردهم جدول تناوبی عنصرها، حداقل ۶ و حداکثر ۱۶ است.

$_{14}Si$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بیرونی‌ترین زیرلایهٔ الکترونی اتم X، $4s^2$ است:

$$X \xrightarrow{\text{۸ الکترون با } l=0} 1s^2, 2s^2, 3s^2, 4s^2$$

پس اتم X می‌تواند یکی از اتم‌های کلسیم ($_{20}Ca$) تا روی ($_{30}Zn$)، به‌جز $_{24}Cr$ و $_{29}Cu$ باشد.

در اتم منگنز ($_{25}Mn$)، زیرلایهٔ 3d نیمه‌پر است.

$$_{25}Mn : [_{18}Ar]3d^5 4s^2$$

منگنز و کلسیم هر دو به صورت کانی‌های منگنز (II) کربنات ($MnCO_3$) و کلسیم کربنات ($CaCO_3$) در طبیعت یافت می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نخستین فلز با زیرلایهٔ $4s^2$، اتم کلسیم ($_{20}Ca$) است که فاقد زیرلایهٔ d ($l=2$) می‌باشد.

گزینهٔ (۲): اتم روی ($_{30}Zn$) دارای ۱۰ الکترون در زیرلایهٔ d ($l=2$) خود است:

$$_{30}Zn : [_{18}Ar]3d^{10} 4s^2$$

می‌دانیم که فلز روی فقط یک نوع کاتیون پایدار (Zn^{2+}) تشکیل می‌دهد.

گزینهٔ (۴): سیلیسیم ($_{14}Si$) نخستین شبه‌فلز گروه چهاردهم جدول تناوبی است. اگر اتم X را کلسیم ($_{20}Ca$) یا روی ($_{30}Zn$) در نظر بگیریم، شمار عنصرهای میان آن با سیلیسیم ($_{14}Si$)، حداقل ۵ و حداکثر ۱۵ می‌باشد.

تفاوت عدد اتمی $_{14}Si$ و $_{20}Ca$ − ۱ = ۲۰ − ۱۴ − ۱ = ۵ = شمار عنصرهای میان $_{14}Si$ و $_{20}Ca$

تفاوت عدد اتمی $_{14}Si$ و $_{30}Zn$ − ۱ = ۳۰ − ۱۴ − ۱ = ۱۵ = شمار عنصرهای میان $_{14}Si$ و $_{30}Zn$

نکته تعداد عنصرهای موجود بین دو عنصر در جدول تناوبی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

تعداد عنصرها بین A و B = تفاوت عدد اتمی دو عنصر − ۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۵ اگر از واکنش ۱۷۴ گرم منگنز (IV) اکسید با مقدار کافی هیدروکلریک اسید، ۳۳/۶ لیتر گاز در شرایط استاندارد تولید شود، به ترتیب از راست به چپ، بازده درصدی واکنش (I) کدام است و گاز کلر تولیدشده با چند گرم پتاسیم برمید با خلوص ۶۰ درصد واکنش می‌دهد؟ (بازده واکنش (II) را ۱۰۰ درصد در نظر بگیرید، $(Br = ۸۰ , Mn = ۵۵ , K = ۳۹ , O = ۱۶ : g.mol^{-1}$)

I) $MnO_۲(s) + ۴HCl(aq) \rightarrow MnCl_۲(aq) + Cl_۲(g) + ۲H_۲O(l)$

II) $Cl_۲(g) + ۲KBr(aq) \rightarrow ۲KCl(aq) + Br_۲(l)$

۱) ۷۵ ـ ۴۴۶
۲) ۷۵ ـ ۵۹۵
۳) ۷۰ ـ ۴۴۶
۴) ۷۰ ـ ۵۹۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$MnO_۲ + ۴HCl \rightarrow MnCl_۲ + Cl_۲ + ۲H_۲O$

$Cl_۲ + ۲KBr \rightarrow ۲KCl + Br_۲$

مقدار نظری گاز کلر تولیدشده را برای محاسبهٔ بازده درصدی، محاسبه می‌کنیم:

$$۱۷۴\ g\ MnO_۲ \times \frac{۱\ mol\ MnO_۲}{۸۷\ g\ MnO_۲} \times \frac{۱\ mol\ Cl_۲}{۱\ mol\ MnO_۲} \times \frac{۲۲/۴\ L\ Cl_۲}{۱\ mol\ Cl_۲} = ۴۴/۸\ L\ Cl_۲$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ = \frac{۳۳/۶}{۴۴/۸} \times ۱۰۰ = ٪۷۵$$

پس جواب، یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) خواهد بود.

اما برای قسمت دوم سؤال، جرم پتاسیم برمید (KBr) ناخالص را به دست می‌آوریم:

$$\text{ناخالص } ۳۳/۶\ L\ Cl_۲ \times \frac{۱\ mol\ Cl_۲}{۲۲/۴\ L\ Cl_۲} \times \frac{۲\ mol\ KBr}{۱\ mol\ Cl_۲} \times \frac{۱۱۹\ g\ KBr \text{ خالص}}{۱\ mol\ KBr} \times \frac{۱۰۰\ g\ KBr \text{ ناخالص}}{۶۰\ g\ KBr \text{ خالص}} = ۵۹۵\ g\ KBr \text{ ناخالص}$$

یه‌جور دیگه

$MnO_۲ \sim Cl_۲$

$$\frac{\text{جرم} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{MnO_۲}} = \frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{Cl_۲}} \Rightarrow \frac{۱۷۴ \times \frac{R}{۱۰۰}}{۸۷} = \frac{۳۳/۶}{۲۲/۴} \Rightarrow R = ٪۷۵$$

$Cl_۲ \sim ۲\ KBr$

$$\frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{Cl_۲}} = \frac{\text{جرم ناخالص} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{KBr}} = \frac{۳۳/۶}{۲۲/۴} = \frac{x \times \frac{۶۰}{۱۰۰}}{۱۱۹ \times ۲}$$

$$\Rightarrow x \simeq \frac{۱۱۹۰}{۲} \simeq \frac{۱۲۰۰}{۲} \simeq ۶۰۰ \Rightarrow \text{نزدیک‌ترین عدد } ۵۹۵$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۶ مطابق معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ زیر، ۶۳/۵ گرم $FeCl_n$ با خلوص ۸۰ درصد در واکنش با مقدار کافی محلول سدیم هیدروکسید، ۰/۴ مول رسوب تشکیل می‌دهد. رنگ رسوب حاصل کدام است و چند مول یون به حالت محلول باقی می‌ماند؟ (در ناخالصی‌ها یون وجود ندارد، $Fe=56, Cl=35/5, O=16, H=1: g.mol^{-1}$)

$$FeCl_n(aq)+NaOH(aq)\rightarrow Fe(OH)_n(s)+NaCl(aq)$$

۱) سبز ـ ۰/۸ ۲) سبز ـ ۱/۶

۳) قرمز قهوه‌ای ـ ۰/۸ ۴) قرمز قهوه‌ای ـ ۱/۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش همراه با حالت فیزیکی مواد شرکت‌کننده به صورت زیر است:

$$FeCl_n(aq)+nNaOH(aq)\rightarrow Fe(OH)_n(s)+nNaCl(aq)$$

برای قسمت اول سؤال، باید جرم مولی $FeCl_n$ (m) و سپس مقدار n را بیابیم؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{درصد خلوص}=\frac{\text{جرم مادهٔ خالص}}{\text{جرم مادهٔ ناخالص}}\times 100 \Rightarrow 80=\frac{x}{63/5}\times 100 \Rightarrow x=50/8\ g\ FeCl_n \text{ خالص}$$

$$50/8\ g\ FeCl_n\times\frac{1\ mol\ FeCl_n}{m\ g\ FeCl_n}\times\frac{1\ mol\ Fe(OH)_n}{1\ mol\ FeCl_n}=0/4\ mol\ Fe(OH)_n$$

$$\Rightarrow 0/4\,m=50/8 \Rightarrow m=127\ g.mol^{-1}$$

$$FeCl_n \text{ جرم مولی}=127\ g.mol^{-1} \Rightarrow 56+35/5n=127 \Rightarrow n=2$$

بنابراین رسوب حاصل، $Fe(OH)_2$ سبزرنگ است.

یه‌جور دیگه

$$FeCl_n \sim Fe(OH)_n$$

$$\frac{\text{درصد خلوص}}{100}\times\text{جرم ناخالص}=\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{63/5\times\frac{80}{100}}{m}=\frac{0/4}{1} \Rightarrow m=127\ g.mol^{-1}$$

نیاز به محاسبهٔ دقیق جرم مولی و سپس یافتن n نیست! می‌دانیم که n، ۲ یا ۳ است. اگر n، ۳ بود، مقدار جرم مولی حاصل عدد اعشاری می‌شد! $(3\times 35/5)$، بنابراین با توجه به این‌که جرم مولی عددی صحیح است (۱۲۷)، پس مقدار قابل قبول برای n، همان عدد ۲ است.

بریم سراغ قسمت دوم سؤال، حالا که n پیدا شد، معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش را می‌نویسیم:

$$FeCl_2(aq)+2NaOH(aq)\rightarrow Fe(OH)_2(s)+2NaCl(aq)$$

به ازای تولید ۱ مول رسوب $Fe(OH)_2$ در این واکنش، ۴ مول یون (۲ مول Na^+ و ۲ مول Cl^-) در محلول باقی می‌ماند، بنابراین داریم:

$$0/4\ mol\ Fe(OH)_2\times\frac{4\ mol\ \text{یون}\ (Na^+, Cl^-)}{1\ mol\ Fe(OH)_2}=1/6\ mol\ \text{یون}$$

۷۷ بر پایهٔ واکنش زیر که مربوط به تجزیهٔ آمونیوم دی‌کرومات ناخالص است، اگر تفاوت جرم فراوردهٔ جامد با فراورده‌های گازی برابر ۱۰۴ گرم باشد و جرم ناخالصی باقی‌مانده برابر ۵۶ گرم باشد، درصد خلوص آمونیوم دی‌کرومات در مخلوط آغازی کدام است؟ (ناخالص‌ها در واکنش شرکت نمی‌کنند. $g.mol^{-1}$: $H=1, N=14, O=16, Cr=52$)

$$(NH_4)_2Cr_2O_7(s) \xrightarrow{\Delta} Cr_2O_3(s) + N_2(g) + 4H_2O(g)$$

۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۸۰ ۴) ۹۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به معادلهٔ واکنش، ۴ مول H_2O ($4\times18=72\ g$) و ۱ مول N_2 ($28\ g$) به عنوان فراوردهٔ گازی (مجموعاً ۱۰۰ گرم فراوردهٔ گازی) و ۱ مول Cr_2O_3 ($152\ g$) به عنوان فراوردهٔ جامد به ازای تجزیهٔ ۱ مول $(NH_4)_2Cr_2O_7$ تولید می‌شود. (یعنی تفاوت جرم آن‌ها $152-100=52$ گرم است)؛ بنابراین به ازای ۱۰۴ گرم تفاوت جرم فراورده‌های جامد و گازی خواهیم داشت:

$$\text{تفاوت جرم } 104\ g \times \frac{1\ mol\ (NH_4)_2Cr_2O_7}{\text{تفاوت جرم } 52\ g} \times \frac{252\ g\ (NH_4)_2Cr_2O_7}{1\ mol\ (NH_4)_2Cr_2O_7} = 504\ g\ (NH_4)_2Cr_2O_7$$

یه‌جور دیگه از کسر مربوط به تفاوت جرم استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{(NH_4)_2Cr_2O_7}} = \frac{\text{تفاوت جرم}}{\underbrace{(\text{جرم مولی A}\times\text{ضریب A})-(\text{جرم مولی B}\times\text{ضریب B})}_{Cr_2O_3-(N_2+H_2O)}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{252} = \frac{104}{(152)-\underbrace{(28+4(18))}_{100}} \Rightarrow x = \frac{252\times104}{52} = 504\ g\ (NH_4)_2Cr_2O_7$$

با توجه به این‌که ۵۶ گرم ناخالصی در ظرف واکنش باقی‌مانده، مقدار مادهٔ ناخالص اولیه برابر با $504+56=560$ گرم خواهد بود؛ بنابراین داریم:

$$\text{درصد خلوص آمونیوم دی‌کرومات} = \frac{\text{جرم خالص آمونیوم دی‌کرومات}}{\text{جرم ناخالصی + جرم خالص آمونیوم دی‌کرومات}}\times100 = \frac{504}{560}\times100 = \%90$$

کنکور **از تجزیهٔ مقداری کلسیم سولفات دارای ناخالصی بر اثر حرارت، ۱۳/۴۴ لیتر گاز پس از تبدیل به شرایط استاندارد تشکیل می‌شود. اگر جرم ناخالصی باقی‌مانده، برابر ۱۳/۶ گرم باشد، درصد خلوص کلسیم سولفات در مخلوط آغازی کدام است؟ (ناخالصی در واکنش شرکت نمی‌کند، معادلهٔ واکنش موازنه شود. $g.mol^{-1}$: $Ca=40, S=32, O=16$)**

(سؤال ۸۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

$$CaSO_4(s) \xrightarrow{\Delta} CaO(s) + SO_2(g) + O_2(g)$$

۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۸۵ ۴) ۹۰

۷۸ **براساس مطالب کتاب درسی، استفاده از گیاهان جاذب فلز، یکی از روش‌های مناسب استخراج کدام عنصر جدول تناوبی می‌تواند باشد؟**

۱) اولین عنصر گروه ۱۰
۲) آخرین عنصر واسطهٔ دورهٔ چهارم
۳) نخستین عنصر با ۳ لایهٔ الکترونی پرشده
۴) عنصری دارای ۸ الکترون با $n+l=5$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

استفاده از گیاهان برای بیرون‌کشیدن فلز از لابه‌لای خاک (گیاه‌پالایی) برای استخراج فلزهای مس $(_{29}Cu)$ و طلا $(_{79}Au)$ برخلاف روی $(_{30}Zn)$ و نیکل $(_{28}Ni)$، مقرون‌به‌صرفه‌تر از استخراج از سنگ معدن است.

فلز مس $(_{29}Cu)$ نخستین عنصری است که ۳ لایهٔ الکترونی آن به طور کامل پر می‌شود.

$$_{29}Cu:[_{18}Ar]3d^{10}4s^{1}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): فلز نیکل $(_{28}Ni)$، اولین عنصر گروه ۱۰ جدول تناوبی است.

گزینهٔ (۲): فلز روی $(_{30}Zn)$، آخرین عنصر واسطهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی است.

گزینهٔ (۴): $n+l$ زیرلایه‌های $3d$، $4p$ و $5s$ برابر ۵ است. با توجه به این‌که $3d$ زودتر از دو زیرلایهٔ دیگر از الکترون اشغال می‌شود، اتم مورد نظر باید دارای ۸ الکترون در زیرلایهٔ $3d$ باشد:

$$X:[_{18}Ar]3d^{8}4s^{2} \Rightarrow {}_{28}Ni$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۹ کدام عدد نمی‌تواند مربوط به تفاوت عدد اتمی دو عنصر اصلی دورهٔ چهارم باشد؟

دسته s و p

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در بین ۱۸ عنصر دورهٔ چهارم جدول تناوبی، ۱۰ عنصر (از $_{21}Sc$ تا $_{30}Zn$) متعلق به عناصر واسطه می‌باشند، *پس با اینا کاری نداریم!*

دستهٔ s: $_{19}K$ $_{20}Ca$ — دستهٔ p: $_{31}Ga$ $_{32}Ge$ $_{33}As$ $_{34}Se$ $_{35}Br$ $_{36}Kr$

تفاوت عدد اتمی دو عنصر دستهٔ s برابر $۲۰-۱۹=۱$ و این تفاوت در میان عنصر دستهٔ p حداکثر برابر $۳۶-۳۱=۵$ و حداقل برابر $۳۲-۳۱=۱$ است.

حالا اگر تفاوت عدد اتمی دو عنصر دستهٔ s با عناصر دستهٔ p را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$_{19}K$ ... $_{31}Ga$ ... $_{36}Kr$

۱۲ — ۱۷

$\Rightarrow$ بازهٔ تفاوت عدد اتمی بین ۱۲ تا ۱۷ است.

$_{20}Ca$ ... $_{31}Ga$ ... $_{36}Kr$

۱۱ — ۱۶

$\Rightarrow$ بازهٔ تفاوت عدد اتمی بین ۱۱ تا ۱۶ است.

بنابراین تفاوت نمی‌تواند عددهای ۶ تا ۱۰ باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۰ **در یک کارخانه، روزانه ۲۵۰ لیتر محلول ۰/۲۵ مولار گلوکز تحت تخمیر بی‌هوازی قرار می‌گیرد. اگر بازده تولید اتانول در این واکنش برابر ۸۰ درصد باشد و اتانول حاصل را به طور کامل در واحد تولید انرژی بسوزانند، مجموع جرم گاز کربن دی‌اکسید که در پایان این فرایندها حاصل می‌شود، چند کیلوگرم خواهد بود؟ $(O=16, C=12 : g.mol^{-1})$**

۱) ۸/۸ ۲) ۱۳/۲

۳) ۱۵/۴ ۴) ۷/۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا معادلهٔ واکنش تخمیر بی‌هوازی گلوکز و هم‌چنین سوختن کامل اتانول را می‌نویسیم و موازنه می‌کنیم:

$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2$$

$$C_2H_5OH + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 3H_2O$$

با توجه به این‌که در هر دو واکنش کربن دی‌اکسید تولید می‌شود، پس باید جرم هر کدام را برحسب کیلوگرم حساب کنیم:

مقدار کربن دی‌اکسید تولیدشده در واکنش اول را محاسبه می‌کنیم:

$$250\ L\ \text{محلول} \times \frac{0/25\ mol\ C_6H_{12}O_6}{1\ L\ \text{محلول}} \times \frac{2\ mol\ CO_2}{1\ mol\ C_6H_{12}O_6} \times \frac{44\ g\ CO_2}{1\ mol\ CO_2} \times \frac{1\ kg}{1000\ g} \times \frac{80\ kg\ \text{عملی}}{100\ kg\ \text{نظری}}$$

$$= 4/4\ kg\ CO_2$$

برای محاسبهٔ کربن دی‌اکسید تولیدشده در واکنش دوم، ابتدا مول عملی اتانول را محاسبه می‌کنیم و سپس باید ببینیم به ازای مصرف آن، چند کیلوگرم کربن دی‌اکسید تولید می‌شود:

$$250\ L\ \text{محلول} \times \frac{0/25\ mol\ C_6H_{12}O_6}{1\ L\ \text{محلول}} \times \frac{2\ mol\ C_2H_5OH}{1\ mol\ C_6H_{12}O_6} \times \frac{80\ mol\ \text{عملی}}{100\ mol\ \text{نظری}}$$

$$= 100\ mol\ C_2H_5OH$$

$$100\ mol\ C_2H_5OH \times \frac{2\ mol\ CO_2}{1\ mol\ C_2H_5OH} \times \frac{44\ g\ CO_2}{1\ mol\ CO_2} \times \frac{1\ kg}{1000\ g} = 8/8\ kg\ CO_2$$

پس در مجموع $13/2 = 8/8 + 4/4$ کیلوگرم کربن دی‌اکسید طی این دو فرایند تولید می‌شود.

یه‌جور دیگه واکنش دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم تا ضریب مادهٔ مشترک (C_2H_5OH) در دو واکنش یکسان شود.

$$C_6H_{12}O_6 \sim 2CO_2 \sim 4CO_2$$

$$\frac{\text{بازده}}{100} \times \text{حجم} \times \text{غلظت مولی} \over \underbrace{\text{ضریب}}_{C_6H_{12}O_6} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{CO_2\ \text{واکنش اول}}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{CO_2\ \text{واکنش دوم}}}$$

$$\frac{\frac{1}{4} \times 250 \times \frac{80}{100}}{1000} = \frac{x}{44 \times 2} = \frac{y}{44 \times 4}$$

$$\begin{cases} x = 4400\ g = 4/4\ kg\ CO_2 \\ y = 8800\ g = 8/8\ kg\ CO_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جرم کل } CO_2 = 4/4 + 8/8 = 13/2\ kg\ CO_2$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت