با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی و آمار ۳ دوازدهم

پاسخ فعالیت‌ها و پرسش‌های کتاب

پایه دوازدهم · دوره دوم متوسطه · رشته‌های ادبیات و علوم انسانی و علوم و معارف اسلامی

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای در کلاس، تمرین‌ها و پرسش‌های کتاب

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۱ فصل اول — آمار و احتمال ۴

۲ فصل دوم — الگوهای خطی ۸۲

۳ فصل سوم — الگوهای غیرخطی ۱۱۷

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی و آمار ۳ دوازدهم (انسانی) - فصل اول

آمار و احتمال

فهرست

۱ صفحه ۲ · فعالیت — درس ۱: شمارش ۱۵

۲ صفحه ۲ · فعالیت — درس ۱: شمارش ۱۵

۳ صفحه ۳ · فعالیت — درس ۱: شمارش ۱۵

۴ صفحه ۴ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش ۱۶

۵ صفحه ۵ · فعالیت — درس ۱: شمارش ۱۷

۶ صفحه ۵ · فعالیت — درس ۱: شمارش ۱۷

۷ صفحه ۶ · فعالیت — درس ۱: شمارش ۱۷

۸ صفحه ۶ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش ۱۷

۹ صفحه ۶ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش ۱۸

۱۰ صفحه ۶ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش ۱۸

۱۱ صفحه ۶ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش ۱۹

۱۲ صفحه ۷ · فعالیت — درس ۱: شمارش ۱۹

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۷ · فعالیت — درس ۱: شمارش ۱۹

۱۴ صفحه ۸ · فعالیت — درس ۱: شمارش ۲۰

۱۵ صفحه ۸ · فعالیت — درس ۱: شمارش ۲۰

۱۶ صفحه ۹ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش ۲۰

۱۷ صفحه ۱۰ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش ۲۱

۱۸ صفحه ۱۰ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش ۲۱

۱۹ صفحه ۱۰ · کار در کلاس — درس ۱: شمارش ۲۱

۲۰ صفحه ۱۰ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۲

۲۱ صفحه ۱۰ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۲

۲۲ صفحه ۱۰ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۲

۲۳ صفحه ۱۰ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۳

۲۴ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۳

۲۵ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۴

۲۶ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۴

۲۷ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۴

۲۸ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۵

۳۰ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۵

۳۱ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۵

۳۲ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۵

۳۳ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۶

۳۴ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۶

۳۵ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۶

۳۶ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۶

۳۷ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۷

۳۸ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۷

۳۹ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۷

۴۰ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱: شمارش ۲۸

۴۱ صفحه ۱۲ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۲۸

۴۲ صفحه ۱۳ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۲۹

۴۳ صفحه ۱۳ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۲۹

۴۴ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۲۹

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۵ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۲۹

۴۶ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۲۹

۴۷ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۰

۴۸ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۰

۴۹ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۰

۵۰ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۱

۵۱ صفحه ۱۴ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۳۱

۵۲ صفحه ۱۴ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۳۱

۵۳ صفحه ۱۴ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۳۲

۵۴ صفحه ۱۴ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۲

۵۵ صفحه ۱۵ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۳

۵۶ صفحه ۱۵ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۳

۵۷ صفحه ۱۵ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۴

۵۸ صفحه ۱۵ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۴

۵۹ صفحه ۱۵ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۴

۶۰ صفحه ۱۶ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۵

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶۱ صفحه ۱۶ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۵

۶۲ صفحه ۱۶ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۵

۶۳ صفحه ۱۶ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۵

۶۴ صفحه ۱۶ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۵

۶۵ صفحه ۱۶ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۶

۶۶ صفحه ۱۷ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۶

۶۷ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۶

۶۸ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۷

۶۹ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۸

۷۰ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۳۹

۷۱ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۰

۷۲ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۰

۷۳ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۰

۷۴ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۰

۷۵ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۰

۷۶ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۱

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۷۷ صفحه ۱۹ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۴۱

۷۸ صفحه ۱۹ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۴۱

۷۹ صفحه ۱۹ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۴۱

۸۰ صفحه ۱۹ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۴۲

۸۱ صفحه ۱۹ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۴۲

۸۲ صفحه ۲۰ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۲

۸۳ صفحه ۲۰ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۲

۸۴ صفحه ۲۰ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۲

۸۵ صفحه ۲۰ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۳

۸۶ صفحه ۲۰ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۳

۸۷ صفحه ۲۱ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۳

۸۸ صفحه ۲۱ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۳

۸۹ صفحه ۲۱ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۴

۹۰ صفحه ۲۱ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۴

۹۱ صفحه ۲۱ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۴

۹۲ صفحه ۲۱ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۵

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۹۳ صفحه ۲۲ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۴۵

۹۴ صفحه ۲۲ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۴۶

۹۵ صفحه ۲۲ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۴۶

۹۶ صفحه ۲۲ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۴۶

۹۷ صفحه ۲۲ · فعالیت — درس ۲: احتمال ۴۶

۹۸ صفحه ۲۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۷

۹۹ صفحه ۲۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۷

۱۰۰ صفحه ۲۳ · کار در کلاس — درس ۲: احتمال ۴۷

۱۰۱ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۴۷

۱۰۲ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۴۷

۱۰۳ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۴۸

۱۰۴ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۴۸

۱۰۵ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۴۸

۱۰۶ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۴۸

۱۰۷ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۴۹

۱۰۸ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۴۹

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰۹ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۴۹

۱۱۰ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۴۹

۱۱۱ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۰

۱۱۲ صفحه ۲۵ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۰

۱۱۳ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۱

۱۱۴ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۲

۱۱۵ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۲

۱۱۶ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۲

۱۱۷ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۲

۱۱۸ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۲

۱۱۹ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۳

۱۲۰ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۳

۱۲۱ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۳

۱۲۲ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۳

۱۲۳ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۳

۱۲۴ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۵ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۴

۱۲۶ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۴

۱۲۷ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۵

۱۲۸ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۵

۱۲۹ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۵

۱۳۰ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۶

۱۳۱ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۷

۱۳۲ صفحه ۲۶ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۷

۱۳۳ صفحه ۲۷ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۷

۱۳۴ صفحه ۲۷ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۸

۱۳۵ صفحه ۲۷ · تمرین — درس ۲: احتمال ۵۸

۱۳۶ صفحه ۲۷ · خواندنی — درس ۲: احتمال ۵۸

۱۳۷ صفحه ۲۹ · فعالیت — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۵۹

۱۳۸ صفحه ۲۹ · فعالیت — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۰

۱۳۹ صفحه ۲۹ · فعالیت — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۰

۱۴۰ صفحه ۲۹ · فعالیت — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۱

ایران توشه
ترفندهای برای موفقیت

۱۴۱ صفحه ۳۰ · فعالیت — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۱

۱۴۲ صفحه ۳۰ · فعالیت — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۲

۱۴۳ صفحه ۳۰ · فعالیت — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۲

۱۴۴ صفحه ۳۱ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۳

۱۴۵ صفحه ۳۲ · بحث و گفت‌وگو — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۴

۱۴۶ صفحه ۳۲ · بحث و گفت‌وگو — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۴

۱۴۷ صفحه ۳۳ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۵

۱۴۸ صفحه ۳۳ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۵

۱۴۹ صفحه ۳۳ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۶

۱۵۰ صفحه ۳۶ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۷

۱۵۱ صفحه ۳۷ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۸

۱۵۲ صفحه ۳۷ · گام ۵ (بحث و نتیجه‌گیری) — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۹

۱۵۳ صفحه ۳۸ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۶۹

۱۵۴ صفحه ۳۹ · کار در کلاس — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۰

۱۵۵ صفحه ۳۹ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۱

۱۵۶ صفحه ۴۰ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۱

ایران توشه

۱۵۷ صفحه ۴۰ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۳

۱۵۸ صفحه ۴۱ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۳

۱۵۹ صفحه ۴۲ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۵

۱۶۰ صفحه ۴۲ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۶

۱۶۱ صفحه ۴۳ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۷

۱۶۲ صفحه ۴۳ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۹

۱۶۳ صفحه ۴۴ · تمرین — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۷۹

۱۶۴ صفحه ۴۴ · پروژه — درس ۳ چرخه‌ی آمار در حل مسائل ۸۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱ صفحه ۲ فعالیت

۱. فرض کنید در کتابخانه‌ی مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت درباره‌ی روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی «یا» تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

کتاب را یا از بین ۳۰ کتاب روان‌شناسی یا از بین ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی انتخاب می‌کنیم و این دو کار را نمی‌توان هم‌زمان انجام داد؛ پس طبق اصل جمع:

$۳۰ + ۲۵ = ۵۵$

دانش‌آموز ۵۵ راه برای انتخاب دارد.

۲ صفحه ۲ فعالیت

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (س) است. او می‌تواند به‌صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده‌روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همه‌ی حالت‌های ممکن را که او می‌تواند به‌صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کار برود، در یک مجموعه بنویسید: A = {، ، ، ، پیاده‌روی}.

رایگان: ۲ راه (سرویس بیمارستان، پیاده‌روی)؛ با پرداخت هزینه: ۳ راه (تاکسی، اتوبوس، مترو). این حالت‌ها هم‌زمان رخ نمی‌دهند، پس طبق اصل جمع:

$۲ + ۳ = ۵$

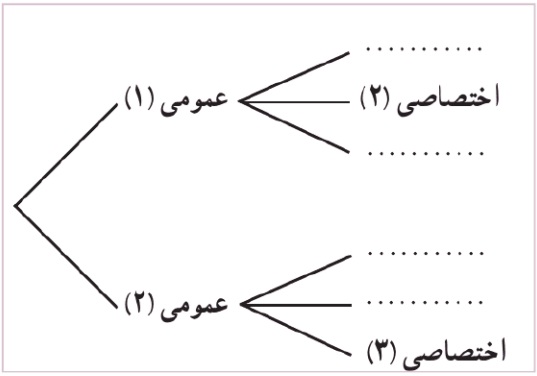
A = {سرویس بیمارستان، تاکسی، اتوبوس، مترو، پیاده‌روی} و تعداد انتخاب‌ها ۵ است.

۳ صفحه ۳ فعالیت

فرض کنید دانشجویی می‌خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید. انتخاب درس عمومی به دو

طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی ..... راه انتخاب وجود دارد.

پس در کل، این کار به .... = ... × .... طریق امکان‌پذیر است.



از هر درس عمومی، سه شاخه‌ی اختصاصی (۱)، (۲) و (۳) خارج می‌شود:

- عمومی (۱): اختصاصی (۱)، اختصاصی (۲)، اختصاصی (۳)
- عمومی (۲): اختصاصی (۱)، اختصاصی (۲)، اختصاصی (۳)

انتخاب درس عمومی به ۲ طریق ممکن است و برای هر کدام، ۳ راه برای انتخاب درس اختصاصی وجود دارد.

طبق اصل ضرب:

$۲ \times ۳ = ۶$

این کار به ۶ طریق امکان‌پذیر است.

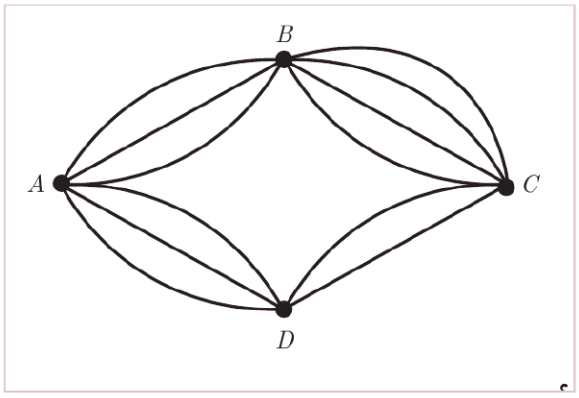
۴ صفحه ۴ **کار در کلاس**

مطابق شکل زیر، میان چهار شهر A، B، C و D راه‌هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟

ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟



از شکل: A به B سه راه، B به C چهار راه، A به D سه راه و D به C دو راه وجود دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) از A به B سه راه است و از هر کدام از آنها برای رفتن به C چهار راه داریم؛ طبق اصل ضرب: ۳ × ۴ = ۱۲

ب) از A به C می‌توان یا از مسیر A→B→C «یا» A→D→C رفت (اصل جمع): ۳×۴ + ۳×۲ = ۱۲ + ۶ = ۱۸

پ) از B به D یا مسیر B→C→D «یا» B→A→D را می‌توان رفت: ۴×۲ + ۳×۳ = ۸ + ۹ = ۱۷

---

۵ صفحه ۵ فعالیت

۱ــ اگر افراد A، B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

نفر اول را از بین ۳ نفر، نفر دوم را از ۲ نفر باقی‌مانده و نفر سوم را از ۱ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم؛ طبق اصل ضرب: ۳ × ۲ × ۱ = ۶

حالت‌ها: ABC – ACB – BAC – BCA – CAB – CBA

---

۶ صفحه ۵ فعالیت

۲ــ با ارقام ۲، ۷، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

برای رقم اول ۵ انتخاب، دوم ۴، سوم ۳، چهارم ۲ و پنجم ۱ انتخاب داریم:

۵ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۵! = ۱۲۰

---

۷ صفحه ۶ فعالیت

۳ــ ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با n!.

حل: اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی ..... انتخاب داریم و ... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با، n × (n−۱) × (n−۲) × ... × ۲ × ۱ = ...

مکان اول: n انتخاب؛ مکان بعدی: n−۱ انتخاب؛ مکان بعدی n−۲ انتخاب و ... ؛ مکان یکی‌مانده به آخر: ۲ انتخاب؛ مکان آخر: ۱ انتخاب. بنابر اصل ضرب:

n × (n−۱) × (n−۲) × ... × ۲ × ۱ = n!

پس تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر n! است.

---

۸ صفحه ۶ کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

irantooshe.ir

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟ (توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

رقم اول صفر نمی‌شود، پس ۵ انتخاب دارد (۱ تا ۵). رقم‌های بعدی از میان ارقام باقی‌مانده (صفر هم می‌تواند باشد) به ترتیب ۵، ۴، ۳ و ۲ انتخاب دارند. طبق اصل ضرب:

$۵ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۵ \times ۵! = ۶۰۰$

۹ صفحه ۶ کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟ (می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است.)

ابتدا رقم یکان را انتخاب می‌کنیم: ۱ یا ۳ یا ۵، یعنی ۳ انتخاب. رقم اول نباید صفر یا رقم یکان باشد: ۴ انتخاب. سپس رقم‌های دوم، سوم و چهارم به ترتیب ۴، ۳ و ۲ انتخاب دارند:

$۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۳ = ۲۸۸$

۱۰ صفحه ۶ کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول: تعداد ۵ رقمی‌های فرد - تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

روش دوم: اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد اعداد را در هر حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم: الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند؛ ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند.

روش اول: تعداد ۵ رقمی‌های زوج = تعداد کل - تعداد فردها: $۶۰۰ - ۲۸۸ = ۳۱۲$

روش دوم: الف) یکان صفر: بقیه‌ی ۴ مکان با ۵ رقم باقی‌مانده، یعنی $۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰$

ب) یکان ۲ یا ۴ (۲ انتخاب)؛ رقم اول نه صفر است و نه رقم یکان (۴ انتخاب)، سپس ۴، ۳ و ۲ انتخاب: $۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۹۲$

طبق اصل جمع، تعداد ۵ رقمی‌های زوج: $۱۲۰ + ۱۹۲ = ۳۱۲$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۱ صفحه ۶ کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟ (۵ رقمی‌هایی که به ۵ ختم می‌شوند + ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند = تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵)

عدد مضرب ۵ است اگر رقم یکانش ۰ یا ۵ باشد.

یکان صفر: $۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰$

یکان ۵: رقم اول ۴ انتخاب (نه صفر و نه ۵)، سپس ۴، ۳، ۲ انتخاب: $۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۹۶$

تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵: $۱۲۰ + ۹۶ = ۲۱۶$

۱۲ صفحه ۷ فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می‌توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست.) تعداد انتخاب‌ها: ۷ × ... × ... × ... ؛ از طرفی ۷ × ۶ × ۵ × ۴ = ...

ارقام ۱ تا ۷، تکرار مجاز نیست؛ طبق اصل ضرب: $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۸۴۰$

از طرفی با ضرب و تقسیم بر $۳!$ داریم: $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = \frac{۷!}{۳!} = \frac{۷!}{(۷-۴)!} = ۸۴۰$

(در این جایگشت‌ها ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده اهمیت دارد.)

۱۳ صفحه ۷ فعالیت

۲. به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟ (تعداد انتخاب‌ها: ۵ × ... × ... = ... ؛ از طرفی $۵!/(۵-۳)!$ = ...)

کتاب اول ۵ انتخاب، دوم ۴ و سوم ۳ انتخاب: $۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$

از طرفی: $\frac{۵!}{(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ صفحه ۸ فعالیت

۳. در حالت کلّی، نشان دهید تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء ($r \le n$)، که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد، برابر است با $n!/(n-r)!$. (تعداد انتخاب‌ها: $(n-r+1)$، $(n-r+2)$ ، ... ، $n-1$، n ← طبق اصل ضرب: $n(n-1)(n-2)...(n-r+2)$(.....))

r مکان داریم: مکان اول n انتخاب، مکان دوم $n-1$، ... ، مکان r ام $(n-r+1)$ انتخاب. طبق اصل ضرب:

$$n(n-1)(n-2)...(n-r+2)(n-r+1)$$

صورت و مخرج را در $(n-r)!$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times(n-r)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

پس این تعداد برابر است با $\frac{n!}{(n-r)!}$ که آن را با $P(n, r)$ نشان می‌دهیم.

۱۵ صفحه ۸ فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱، ۲، ۴ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه‌ی سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه‌تایی از ۴ رقم (انتخاب‌های سه‌تایی از بین ۴ رقم) را بر ..... تقسیم کنیم. جدول زیر را کامل کنید.

انتخاب سه رقم	۱،۲،۴	۱،۲،۶	۱،۴،۶	۲،۴،۶
جایگشت‌های سه رقم انتخاب شده	۱۲۴	۱۲۶	۱۴۶	۲۴۶
	۱۴۲	۱۶۲	۱۶۴	۲۶۴
	۲۴۱	۲۱۶	۴۱۶	۴۲۶
	۲۱۴	۲۶۱	۴۶۱	۴۶۲
	۴۱۲	۶۱۲	۶۱۴	۶۲۴
	۴۲۱	۶۲۱	۶۴۱	۶۴۲
	$A_1=\{1,2,4\}$	$A_3=\{...,...,...\}$	$A_2=\{1,4,6\}$	$A_4=\{...,...,...\}$

باید بر ۳! = ۶ تقسیم کنیم. تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از ۴ رقم: $P(4,3) = 4! \div 1! = 24$

مجموعه‌های جدول: $A_2 = \{1، 2، 6\}$ و $A_4 = \{2، 4، 6\}$. تعداد مجموعه‌های سه‌عضوی:

$$\frac{24}{6} = 4 \text{ یا } \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

۱۶ صفحه ۹ کار در کلاس

۱. به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

روش اول: ... × ۸ × ... × ... × ۵ ؛ روش دوم: (...−۹)/!۹ = (..., ۹)P = !...

روش اول: ۱۵۱۲۰ = ۵ × ۶ × ۷ × ۸ × ۹

روش دوم: $P(9,5)=\frac{9!}{(9-5)!}=\frac{9!}{4!}=9\times8\times7\times6\times5=15120$

۱۷ صفحه ۱۰ **کار در کلاس**

۲. به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟ (در ساختن تیم با جابه‌جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی‌شود، بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم.)

$$\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!\times3!}=\frac{9\times8\times7}{3!}=84$$

تعداد تیم‌های ۶ نفره ۸۴ است.

۱۸ صفحه ۱۰ **کار در کلاس**

۳. مجموعه‌ی ۸ عضوی A = {۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸} چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد؟

ترتیب اعضای زیرمجموعه مهم نیست، پس از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\times5!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

۱۹ صفحه ۱۰ **کار در کلاس**

۴. در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟ (در انتخاب مهره‌های رنگی نیز ترتیب مهم نیست.)

در کل ۹ مهره داریم و ۳ مهره (بدون توجه به ترتیب) انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\times6!}=\frac{9\times8\times7}{3!}=84$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰ صفحه ۱۰ تمرین

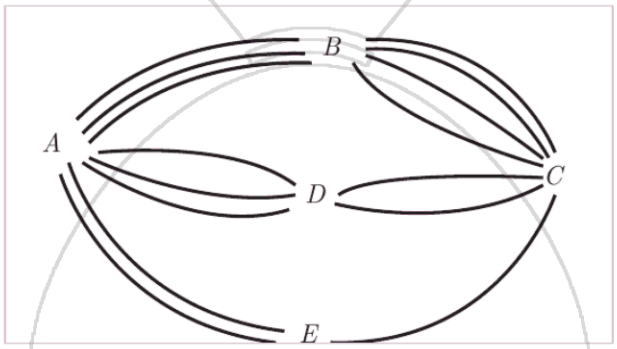
۱. می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

فقط یک نفر از یکی از سه کلاس انتخاب می‌شود؛ طبق اصل جمع: ۳۳ = ۱۲ + ۱۱ + ۱۰

۲۱ صفحه ۱۰ تمرین

۲. مطابق شکل زیر بین پنج شهر A، B، C، D و E راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟



از شکل: A–B سه راه، B–C چهار راه، A–D سه راه، D–C دو راه، A–E دو راه و E–C یک راه.

مسیرهای A به C: از B «یا» از D «یا» از E (اصل جمع)، و هر مسیر با اصل ضرب:

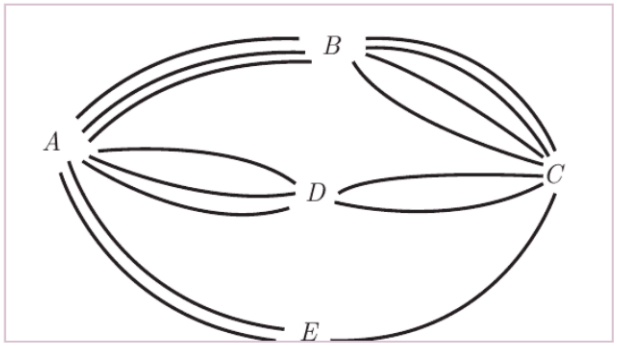
۲۰ = ۲ + ۶ + ۱۲ = ۲×۱ + ۳×۲ + ۳×۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲ صفحه ۱۰ تمرین

۲. مطابق شکل زیر بین پنج شهر A، B، C، D و E راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟



رفت: A→B→C به ۱۲ = ۴ × ۳ طریق؛ برگشت: C→B→A (راه‌ها دو طرفه‌اند) به ۱۲ = ۳ × ۴ طریق. طبق اصل ضرب:

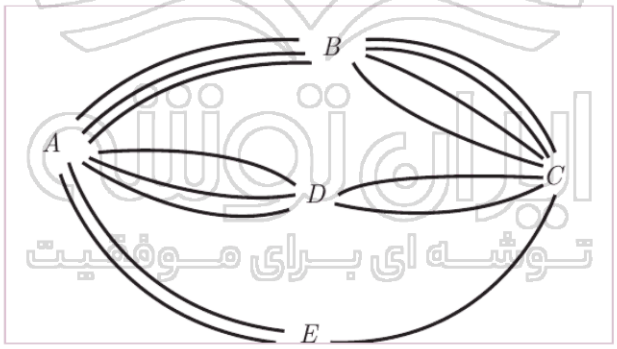
۱۴۴ = ۱۲ × ۱۲

(هنگام برگشت می‌توان از همان راه‌های رفت دوباره استفاده کرد.)

۲۳ صفحه ۱۰ تمرین

۲. مطابق شکل زیر بین پنج شهر A، B، C، D و E راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



بدون عبور از E، دو مسیر داریم: مستقیم D→A و مسیر D→C→B→A (مسیر D→C→E→A از E می‌گذرد و حذف می‌شود).

۳ :D→A راه؛ D→C→B→A: ۲ × ۴ × ۳ = ۲۴

طبق اصل جمع: ۳ + ۲۴ = ۲۷

۲۴ صفحه ۱۱ تمرین

۳. با حروف کلمه‌ی «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

کلمه ۵ حرف متمایز دارد و هر ۵ حرف باید به کار رود: $۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰$

---

۲۵ صفحه ۱۱ تمرین

۳. با حروف کلمه‌ی «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی‌معنی)

ب) چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

حرف آخر «ی» ثابت است؛ حرف اول از ۴ حرف باقی‌مانده و حرف دوم از ۳ حرف باقی‌مانده: $۴ \times ۳ \times ۱ = ۱۲$

---

۲۶ صفحه ۱۱ تمرین

۳. با حروف کلمه‌ی «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی‌معنی)

پ) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

حرف اول «و» و حرف آخر «ل» ثابت‌اند؛ سه حرف باقی‌مانده در ۳ مکان وسط جایگشت می‌شوند: $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۱ \times ۳! = ۶$

---

۲۷ صفحه ۱۱ تمرین

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به‌صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه‌ی تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

هر بازی را با (میزبان، مهمان) مشخص می‌کنیم: میزبان ۱۰ انتخاب و مهمان از ۹ تیم دیگر؛ چون رفت و برگشت داریم ترتیب مهم است: $P(۱۰,۲) = ۱۰ \times ۹ = ۹۰$

(یا $\binom{۱۰}{۲} \times ۲ = ۴۵ \times ۲ = ۹۰$)

---

۲۸ صفحه ۱۱ تمرین

۵. یک کارخانه‌ی خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

انتخاب رنگ «و» حجم موتور «و» نوع جلو داشبورد؛ طبق اصل ضرب: $۷ \times ۲ \times ۳ = ۴۲$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۱۱ تمرین

۶. مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان ساخت؟

رقم یکان باید زوج باشد: ۲، ۴، ۶ یا ۸ (۴ انتخاب). چهار رقم دیگر از ۵ رقم باقی‌مانده، به ترتیب ۵، ۴، ۳ و ۲ انتخاب دارند:

$$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۴ = ۴۸۰$$

۳۰ صفحه ۱۱ تمرین

۶. مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

عدد ۵ رقمی بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ باید با ۸ یا ۹ شروع شود (چون در A صفر نیست، هر عدد با رقم اول ۸ از ۸۰۰۰۰ بزرگ‌تر است). رقم اول ۲ انتخاب دارد و هر یک از ۴ رقم بعدی ۶ انتخاب (تکرار ارقام مجاز است):

$$۲ \times ۶ \times ۶ \times ۶ \times ۶ = ۲۵۹۲$$

(در صورت سؤال تکرار ارقام برای این قسمت مشخص نشده است و در اینجا مجاز فرض شد. اگر تکرار ارقام مجاز نباشد: $۲ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴۰$)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۱ صفحه ۱۱ تمرین

۶. مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

پ) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد؟

$\binom{۶}{۳} = ۲۰$ (ترتیب اعضا مهم نیست و $\frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۳!} = ۲۰$)

۳۲ صفحه ۱۱ تمرین

۶. مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

ت) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

عضو ۸ را حتماً برمی‌داریم و دو عضو دیگر را از ۵ عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم: $\binom{۵}{۲} = ۱۰$

۳۳ صفحه ۱۱ تمرین

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟

هر ۳ نقطه یک مثلث می‌سازد و ترتیب مهم نیست (هیچ سه نقطه‌ی روی دایره روی یک خط نیست):

$$\binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۳!} = ۲۲۰$$

۳۴ صفحه ۱۱ تمرین

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

هر وتر با دو نقطه از دایره مشخص می‌شود و ترتیب دو نقطه مهم نیست: $\binom{۱۲}{۲} = \frac{۱۲ \times ۱۱}{۲} = ۶۶$

۳۵ صفحه ۱۱ تمرین

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

۳ نفر از یازدهمی‌ها «و» ۳ نفر از دوازدهمی‌ها: $C(۵,۳) \times C(۶,۳) = ۱۰ \times ۲۰ = ۲۰۰$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۶ صفحه ۱۱ تمرین

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه‌ی دوازدهم باشد.

کاپیتان مشخص است؛ ۵ نفر دیگر از ۱۰ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌شوند: $C(۱۰,۵) = ۲۵۲$

۳۷ صفحه ۱۱ تمرین

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم باشند.

حالت‌ها: ۴ دوازدهمی و ۲ یازدهمی، یا ۵ و ۱، یا ۶ و ۰ (اصل جمع):

$C(۶,۴)\times C(۵,۲) + C(۶,۵)\times C(۵,۱) + C(۶,۶)\times C(۵,۰) = ۱۵\times ۱۰ + ۶\times ۵ + ۱ = ۱۸۱$

۳۸ صفحه ۱۱ تمرین

۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه‌ی یازدهم باشند.

۲ نفر از یازدهمی‌ها و ۴ نفر از دوازدهمی‌ها: $C(۵,۲) \times C(۶,۴) = ۱۰ \times ۱۵ = ۱۵۰$

۳۹ صفحه ۱۱ تمرین

۹. مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $۳^۲ + ۳\times ۴ + ۲\times ۳$ باشد.

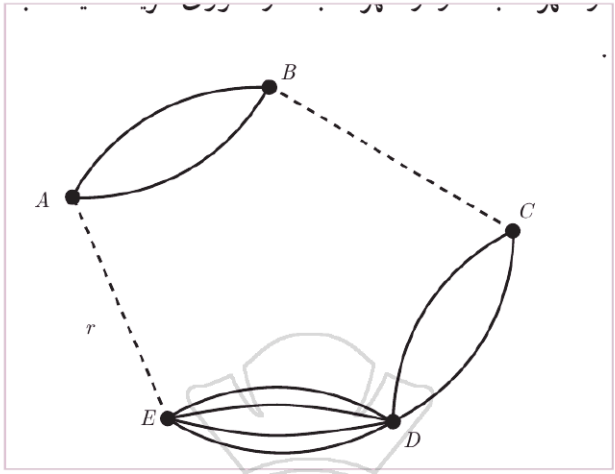
یک نمونه: بین شهرهای A و D سه مسیر وجود دارد: از طریق B (بین A و B سه راه و بین B و D سه راه)، از طریق C (بین A و C سه راه و بین C و D چهار راه) و از طریق E (بین A و E دو راه و بین E و D سه راه). به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟

اصل ضرب در هر مسیر و سپس اصل جمع: $۳\times ۳ + ۴\times ۳ + ۳\times ۲ = ۳^۲ + ۴\times ۳ + ۲\times ۳ = ۲۷$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۰ صفحه ۱۱ تمرین

۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



تعداد راه‌های B به C را x و A به E را r می‌نامیم. A به B دو راه و C به D دو راه، E به D سه راه دارد.

مسیرها: A→B→C→D و A→E→D؛ طبق اصل ضرب و جمع: $۲ \times x \times ۲ + r \times ۳ = ۲۰$

$۴x + ۳r = ۲۰$؛ r باید طوری باشد که $۲۰ - ۳r$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد: $r = ۴$ و $x = ۲$ (چون $۴×۲ + ۳×۴ = ۸ + ۱۲ = ۲۰$).

پس بین B و C دو راه و بین A و E چهار راه تعریف می‌کنیم.

۴۱ صفحه ۱۲ فعالیت

نرگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می‌شود؛ با وسایل نقلیه‌ی عمومی به مدرسه می‌رود و به‌طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد. امروز صبح نیز نرگس مانند هر روز رأس ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می‌توانید به‌طور قطع بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟

... آیا وضعیت همیشه عادی است؟ (آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیه‌ی عمومی به‌طور معمول منظم نیست و ... .)

خیر؛ هیچ‌کس نمی‌تواند قطعی پاسخ دهد. اگر وضعیت عادی باشد نرگس به‌موقع می‌رسد، اما وضعیت همیشه عادی نیست: ترافیک، تأخیر یا بی‌نظمی در حرکت وسایل نقلیه‌ی عمومی (و حوادثی مانند خرابی وسیله) می‌تواند وضع را تغییر دهد.

بنابراین دو وضعیت ممکن است: نرگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد، یا نرسد؛ و از پیش نمی‌توان یکی را قطعاً پیش‌بینی کرد. چنین پدیده‌ای تصادفی است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۲ صفحه ۱۳ فعالیت

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

نمونه‌ها: پرتاب یک سکه (رو یا پشت)، پرتاب یک تاس (یکی از اعداد ۱ تا ۶)، بیرون کشیدن یک مهره از کیسه‌ای که مهره‌های رنگی مختلف دارد، پیش‌بینی نتیجه‌ی مسابقه‌ی فوتبال بین دو تیم، انتخاب تصادفی یک کارت از بین چند کارت.

۴۳ صفحه ۱۳ فعالیت

۲. چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

نمونه‌ها: رها کردن سنگ در آب (فرو می‌رود)، گرم کردن آب تا ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد در فشار معمولی (به جوش می‌آید)، بیرون آوردن یک مهره از کیسه‌ای که همه‌ی مهره‌هایش سفید است (سفید بودن مهره)، رها کردن یک توپ از ارتفاع (به زمین می‌افتد).

۴۴ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس پایه‌ی دوازدهم؛

قطعی؛ چون سن دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم بیش از ۱۰ سال است و نتیجه از پیش معلوم است.

۴۵ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

ب) در ابتدای مسابقه‌ی فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛

تصادفی؛ نتیجه (۱ یا ۲) قبل از پرتاب مشخص نیست، هرچند همه‌ی حالت‌های ممکن را می‌دانیم.

۴۶ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) مشاهده‌ی دو مهره‌ی سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهره‌ی سفید وجود دارد؛

قطعی؛ چون همه‌ی مهره‌ها سفیدند، هر دو مهره حتماً سفیدند.

۴۷ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

ت) پیش‌بینی نتیجه‌ی بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛

تصادفی؛ نتیجه‌ی بازی را از پیش نمی‌توان به‌طور قطع مشخص کرد.

۴۸ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می‌توان نفر برنده را مشخص کرد؟

تصادفی؛ قبل از پرتاب‌ها نمی‌توان برنده را مشخص کرد، چون نتیجه‌ی سکه و تاس از پیش معلوم نیست.

۴۹ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکار که در یک جعبه قرار دارند، به‌طور تصادفی یکی از آنها را خارج می‌کنیم.

الف) آیا مجموعه‌ی عضوی {خودکار، مداد} می‌تواند همه‌ی برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

خیر؛ چون ۳ مداد و ۵ خودکار متفاوت‌اند و انتخاب هر مداد یا هر خودکار یک برآمد جداست (در مجموع ۸ برآمد)، مجموعه‌ی {خودکار، مداد} فقط دو نوع شیء را نشان می‌دهد.

۵۰ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکار که در یک جعبه قرار دارند، به‌طور تصادفی یکی از آنها را خارج می‌کنیم.
ب) به نظر شما چگونه می‌توان همه‌ی برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟ (در این کتاب، اشیای مورد بحث را با شماره‌گذاری متمایز می‌کنیم.)



اشیا را شماره‌گذاری می‌کنیم: مدادها را مداد ۱، مداد ۲، مداد ۳ و خودکارها را خودکار ۱ تا خودکار ۵ می‌نامیم.
آن‌گاه فضای نمونه شامل همه‌ی ۸ شیء است:
S = {m۱, m۲, m۳, k۱, k۲, k۳, k۴, k۵} (m: مداد، k: خودکار)

۵۱ صفحه ۱۴ فعالیت

فضای نمونه‌ی هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.
۱. پرتاب دو سکه با هم.

هر سکه رو (ر) یا پشت (پ) می‌آید: S = {(ر, ر), (پ, ر), (ر, پ), (پ, پ)}
تعداد اعضا: ۲ × ۲ = ۴

۵۲ صفحه ۱۴ فعالیت

فضای نمونه‌ی هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲. پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار).

{پ‌پ‌پ ,ر‌پ‌پ ,پ‌ر‌پ ,ر‌ر‌پ ,پ‌پ‌ر ,ر‌پ‌ر ,پ‌ر‌ر ,ر‌ر‌ر} = S (حروف به ترتیب سکه‌ی اول تا سوم)

تعداد اعضا: ۸ = ۲ × ۲ × ۲

۵۳ صفحه ۱۴ **فعالیت**

فضای نمونه‌ی هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.

۳. پرتاب یک تاس و یک سکه باهم.

S = {(ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶), (پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)}

تعداد اعضا: ۱۲ = ۶ × ۲

۵۴ صفحه ۱۴ **کار در کلاس**

۱. برای تعیین فضای نمونه‌ی پرتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱ , ۱)	(۱ , ۲)				(۱ , ۶)
۲	(۲ , ۱)	(۲ , ۲)				
۳			(۳ , ۳)		(۳ , ۵)	
۴				(۴ , ۴)		
۵			(۵ , ۳)			
۶						(۶ , ۶)

در هر خانه، عدد اول تاس آبی و عدد دوم تاس قرمز است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

آبی | قرمز	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
۲	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
۳	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
۴	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
۵	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
۶	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

بررسی با اصل ضرب: تاس آبی ۶ حالت و تاس قرمز ۶ حالت دارد: ۳۶ = ۶ × ۶ که با تعداد خانه‌های جدول (۶ سطر × ۶ ستون) برابر است.

۵۵ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۲. سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همه‌ی برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

هر برآمد یک ترتیب نشستن (جایگشت) است؛ با نام‌های علی (ع)، پارسا (پ) و محمد (م) از راست به چپ:

S = {(علی، پارسا، محمد)، (علی، محمد، پارسا)، (پارسا، علی، محمد)، (پارسا، محمد، علی)، (محمد، علی، پارسا)، (محمد، پارسا، علی)}

بدون شمردن: صندلی اول ۳ انتخاب، دوم ۲ و سوم ۱ انتخاب؛ طبق اصل ضرب ۶ = !۳ = ۱ × ۲ × ۳.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۶ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۳. در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی سبز وجود دارد. به‌طور تصادفی سه مهره را هم‌زمان از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ی این پدیده‌ی تصادفی را مشخص کنید.

در کل ۱۱ = ۴ + ۴ + ۳ مهره داریم و ۳ مهره را هم‌زمان (بدون توجه به ترتیب) انتخاب می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3!} = 165$$

۵۷ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم S = {پ, ر}. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

پیشامدها همان زیرمجموعه‌های S هستند (۲^2 = ۴ زیرمجموعه):

{پ ,ر} , {پ} , {ر} , ∅

∅ پیشامد غیرممکن و S = {ر, پ} پیشامد حتمی است.

۵۸ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۲. مریم، ملیکا و سوگند پول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان درباره‌ی دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به‌طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هرکسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه‌ی این پدیده‌ی تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید. اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعه‌ی کتاب، با هم خلاصه‌ی آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

S = {مریم، ملیکا، سوگند}

زیرمجموعه‌های یک عضوی: {مریم}، {ملیکا}، {سوگند} (هر کدام پیشامد «نفر اول کتاب را ببرد»).

پیشامدهای ممکن برای ارائه‌ی دو نفره (زیرمجموعه‌های دو عضوی): {مریم، ملیکا}، {مریم، سوگند}، {ملیکا، سوگند}؛ تعداد آنها $\binom{۳}{۲}$ = ۳ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۳. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام‌یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

الف) A = {۳, ۲, ۵}

ب) B = {۲}

پ) C = {۲, ۴, ۶}

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش به وقوع بپیوندد. چون برآمد ۲ در هر سه مجموعه وجود دارد، هر سه پیشامد A، B و C رخ داده‌اند.

۶۰ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۵, ۵), (۶, ۶)}

۶۱ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

{(۱, ۶), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۳), (۵, ۲), (۶, ۱)} (۶ عضو)

۶۲ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

بیشترین مجموع ۶ + ۶ = ۱۲ است، پس چنین حالتی وجود ندارد: ∅ (پیشامد غیرممکن).

۶۳ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

بیشترین حاصل ضرب ۶ × ۶ = ۳۶ < ۳۷ است؛ پس هر ۳۶ حالت فضای نمونه در این پیشامد هستند: این پیشامد همان S و پیشامد حتمی است (n = ۳۶).

۶۴ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۵. در یک برنامه‌ی کوهنوردی، ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد اعضای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) سه نفر دانش‌آموز پیشتاز از سه پایه‌ی مختلف باشند.

از هر پایه یک نفر: $n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$

۶۵ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۵. در یک برنامه‌ی کوهنوردی، ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد اعضای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

ب) حداقل ۲ دانش‌آموز در این گروه پیشتاز از دانش‌آموزان سال یازدهم باشند.

یا ۲ نفر یازدهمی و ۱ نفر از ۹ نفر غیریازدهمی، یا ۳ نفر یازدهمی (اصل جمع):

$$\binom{6}{2} \times \binom{9}{1} + \binom{6}{3} = 15 \times 9 + 20 = 155$$

۶۶ صفحه ۱۷ کار در کلاس

۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

ـــ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

ـــ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

ـــ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

ـــ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

ـــ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

زوج‌ها: {۲, ۴, ۶}؛ اول‌ها: {۲, ۳, ۵}.

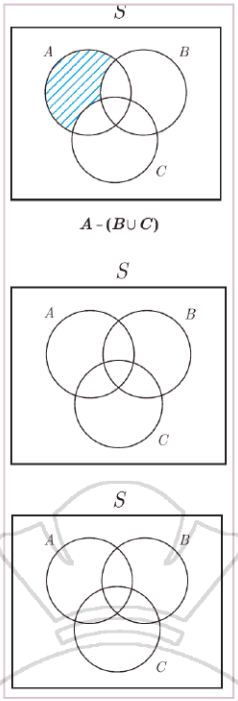
- زوج و اول (اشتراک): {۲}
- زوج یا اول (اجتماع): {۲, ۳, ۴, ۵, ۶}
- زوج ولی اول نباشد (تفاضل): {۴, ۶}
- اول ولی زوج نباشد (تفاضل): {۳, ۵}
- اول نباشد (متمم اول‌ها): {۱, ۴, ۶}

۶۷ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه‌ی S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ـــ فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد. (نمونه: A – (B ∪ C))



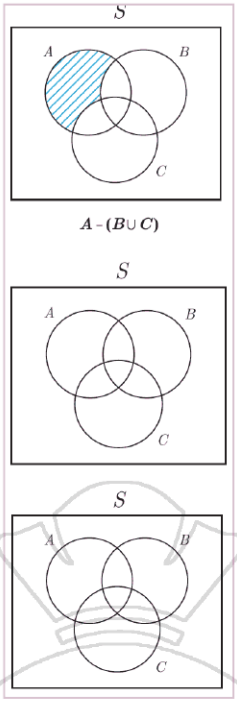
ناحیه‌ی A را برمی‌داریم و ناحیه‌های مشترک با B یا C را حذف می‌کنیم: A – (B ∪ C) (شکل نمونه‌ی کتاب).

۶۸ صفحه ۱۸ کار در کلاس

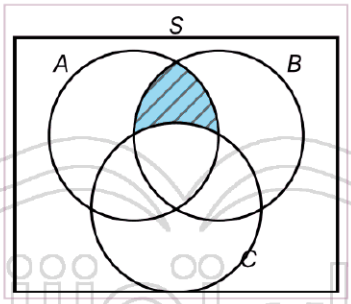
۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه‌ی S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ـــ پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



ناحیه‌ی مشترک A و B را می‌گیریم و بخشی از آن را که داخل C است حذف می‌کنیم: (A ∩ B) – C

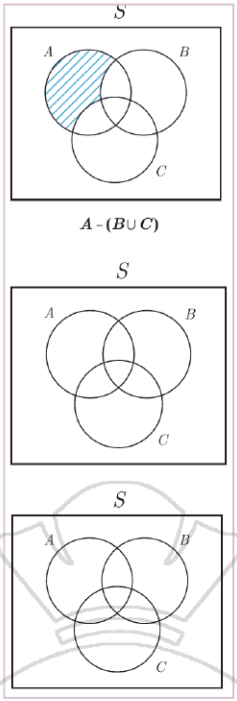


ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

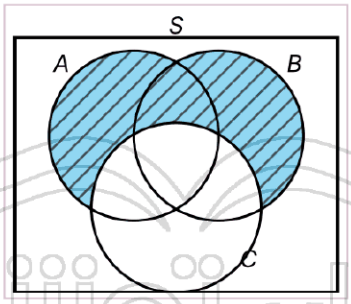
۶۹ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه‌ی S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

ـــ پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



اجتماع A و B را می‌گیریم و بخش داخل C را حذف می‌کنیم: (A ∪ B) – C



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۰ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد فرزندان)

الف) پیشامد A اینکه همه‌ی فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

فضای نمونه (۸ عضو): S = {ددد ,پدد ,دپد ,ددپ ,پپد ,پدپ ,دپپ ,پپپ}

A = {ددد ,پپپ}

۷۱ صفحه ۱۸ | کار در کلاس

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد فرزندان)

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

B = {پ‌پد ,پ‌دپ ,دپپ}

۷۲ صفحه ۱۹ | کار در کلاس

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد فرزندان)

ج) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

۲ دختر یا ۳ دختر: C = {ددد ,پ‌دد ,دپد ,ددپ}

۷۳ صفحه ۱۹ | کار در کلاس

با توجه به پیشامدهای A و B و C (خانواده‌ی ۳ فرزندی) به سؤالات زیر پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟

بله؛ A = {پپپ, ددد} و B = {پپد, پدپ, دپپ} عضو مشترک ندارند: $A \cap B = \emptyset$.

۷۴ صفحه ۱۹ | کار در کلاس

با توجه به پیشامدهای A و B و C (خانواده‌ی ۳ فرزندی) به سؤالات زیر پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟

بله؛ B دقیقاً یک دختر دارد ولی C حداقل دو دختر؛ هیچ عضو مشترکی ندارند: $B \cap C = \emptyset$.

۷۵ صفحه ۱۹ | کار در کلاس

با توجه به پیشامدهای A و B و C (خانواده‌ی ۳ فرزندی) به سؤالات زیر پاسخ دهید:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

آیا پیشامدهای C و A ناسازگارند؟

خیر؛ عضو «دد» هم در A و هم در C است: $A \cap C = \{\text{دد}\} \neq \emptyset$؛ پس A و C سازگارند.

---

۷۶ صفحه ۱۹ **کار در کلاس**

۴. دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید.

پرتاب یک تاس: پیشامد «عدد زوج بیاید» $A = \{۲, ۴, ۶\}$ و پیشامد «عدد فرد بیاید» $B = \{۱, ۳, ۵\}$؛ چون $A \cap B = \emptyset$، ناسازگارند. (نمونه‌ی دیگر: در پرتاب سکه، {ر} و {پ}.)

---

۷۷ صفحه ۱۹ **فعالیت**

۱. چنانچه پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$، در این صورت مقدار P(A) را محاسبه کنید.

$n(\emptyset) = ۰$؛ بنابراین $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۰}{n(S)} = ۰$

---

۷۸ صفحه ۱۹ **فعالیت**

۲. در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$، در این صورت مقدار P(A) را محاسبه کنید.

$P(A) = \frac{n(S)}{n(S)} = ۱$

---

۷۹ صفحه ۱۹ **فعالیت**

۳. هرگاه $A \subseteq B$، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

$A \subseteq B \Longrightarrow n(A) \leq \ldots \Longrightarrow n(A)/n(S) \leq \ldots/\ldots \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

اگر A زیرمجموعه‌ی B باشد، هر عضو A در B هم هست، پس:

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۰ صفحه ۱۹ فعالیت

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه‌ی S باشد، در این صورت داریم: $0 \le P(A) \le 1$

برای هر پیشامد A داریم $\varnothing \subseteq A \subseteq S$؛ طبق ۳: $P(\varnothing) \le P(A) \le P(S)$ و طبق ۱ و ۲: $P(\varnothing) = 0$ و $P(S) = 1$. پس $0 \le P(A) \le 1$.

۸۱ صفحه ۱۹ فعالیت

۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ی S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار P(A ∪ B) را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$P(A \cup B) \Longrightarrow n(A \cup B)/n(S) = n(A)/n(S) + \ldots \Longrightarrow n(A \cup B) = n(A) + \ldots = \ldots + \ldots$

چون $A \cap B = \varnothing$، اعضای A و B مشترک نیستند و طبق اصل جمع:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۸۲ صفحه ۲۰ کار در کلاس

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

الف) تاس زوج بیاید.

$n(S) = 12$؛ $A = \{(پ,2), (پ,4), (پ,6), (ر,2), (ر,4), (ر,6)\}$ و $n(A) = 6$:

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

۸۳ صفحه ۲۰ کار در کلاس

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ب) سکه پشت بیاید.

عضوهای (پ, ۱) تا (پ, ۶): ۶ عضو؛ $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

۸۴ صفحه ۲۰ کار در کلاس

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

تاس زوج: ۶ عضو؛ سکه رو: ۶ عضو؛ هر دو (ر با ۲، ۴، ۶): ۳ عضو که دو بار شمرده شده‌اند. پس $n(A \cup B) = ۶ + ۶ - ۳ = ۹$ (۳ عضو: (پ,۲)، (پ,۴)، (پ,۶) و ۶ عضو با «ر»).

$$P = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

۸۵ صفحه ۲۰ **کار در کلاس**

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

(پ,۱)، (پ,۳)، (پ,۵): ۳ عضو؛ $P = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$

۸۶ صفحه ۲۰ **کار در کلاس**

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند. (هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند.)

هر نفر ۱۲ حالت دارد؛ طبق اصل ضرب $n(S) = ۱۲^۵$. برای A هر نفر فقط یک حالت (فروردین) دارد: $n(A) = ۱$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۱۲^۵}$$

۸۷ صفحه ۲۱ **کار در کلاس**

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

ماه مشترک را از ۱۲ ماه انتخاب می‌کنیم و بقیه تعیین‌شده‌اند: $n(A) = ۱۲$:

$$P(A) = \frac{۱۲}{۱۲^۵} = \frac{۱}{۱۲^۴} = \frac{۱}{۲۰۷۳۶}$$

۸۸ صفحه ۲۱ **کار در کلاس**

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

ماه تولد نفر اول ۱۲ انتخاب، دوم ۱۱، سوم ۱۰، چهارم ۹ و پنجم ۸: $n(A) = ۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸ = ۹۵۰۴۰$

$$P(A) = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸}{۱۲^۵} = \frac{۹۵۰۴۰}{۲۴۸۸۳۲} = \frac{۵۵}{۱۴۴}$$

۸۹ صفحه ۲۱ کار در کلاس

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

مجموع دو تاس، ۳۶ حالت هم‌شانس دارد. تعداد حالت‌های هر مجموع:

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

شماره‌ی ۷ با ۶ حالت: $P = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$ که از بقیه بیشتر است.

۹۰ صفحه ۲۱ کار در کلاس

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟

شماره‌های ۲ و ۱۲؛ هر کدام فقط ۱ حالت دارد ((۱,۱) و (۶,۶)): $P = \frac{۱}{۳۶}$

۹۱ صفحه ۲۱ کار در کلاس

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

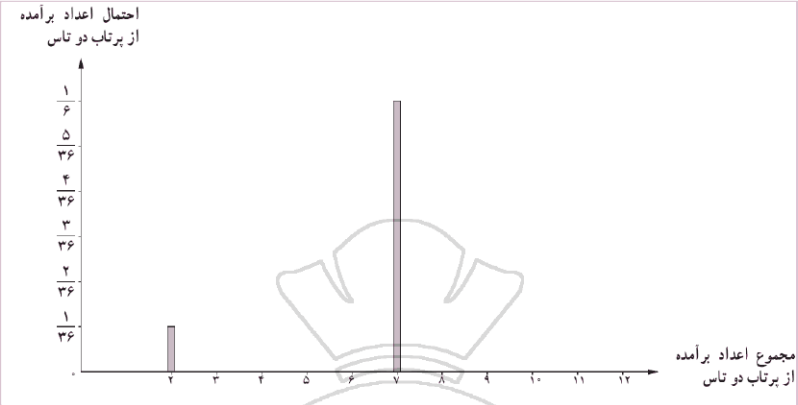
بله؛ احتمال کمتر به معنای غیرممکن بودن نیست. مثلاً شماره‌ی ۲ با احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ باز هم ممکن است برنده شود، چون پدیده تصادفی است و نتیجه از پیش معلوم نیست (فقط پیشامد $\varnothing$ غیرممکن است).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

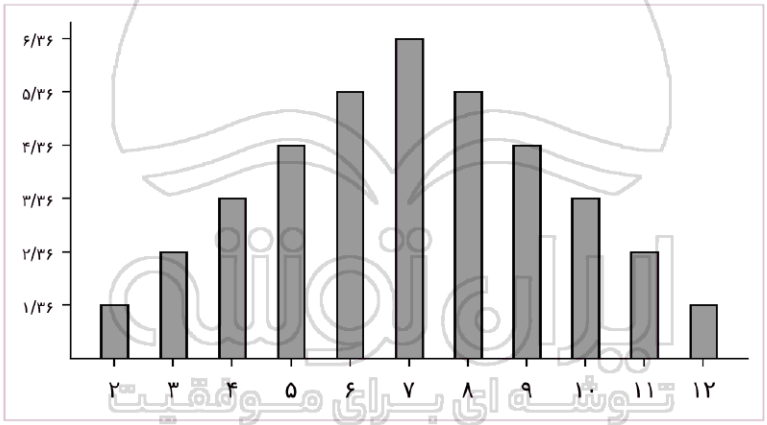
۹۲ صفحه ۲۱ کار در کلاس

۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

ت) در شکل زیر دستگاه مختصاتی رسم شده و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها نوشته شده است. نمودار میله‌ای زیر را کامل کنید.



احتمال هر مجموع برابر (تعداد حالت)/۳۶ است: ۱/۳۶, ۲/۳۶, ۳/۳۶, ۴/۳۶, ۵/۳۶, ۶/۳۶, ۵/۳۶, ۴/۳۶, ۳/۳۶, ۲/۳۶, ۱/۳۶ برای مجموع‌های ۲ تا ۱۲. نمودار کامل:



۹۳ صفحه ۲۲ فعالیت

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی مداد باشد؛ P(A).

$n(S) = ۸$: $P(A) = \frac{۳}{۸}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۴ صفحه ۲۲ فعالیت

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

ب) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی خودکار باشد؛ P(B).

$P(B) = \frac{۵}{۸}$

۹۵ صفحه ۲۲ فعالیت

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

پ) احتمال این را بیابید که شیء انتخاب شده مداد نباشد؛ $P(A')$.

مداد نبودن یعنی خودکار بودن: $P(A') = \frac{۵}{۸}$

۹۶ صفحه ۲۲ فعالیت

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$P(B) = P(A') = ۵/۸$. چون در این جعبه فقط مداد و خودکار هست، «مداد نباشد» و «خودکار باشد» یک پیشامداند: $B = A'$.

۹۷ صفحه ۲۲ فعالیت

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی:

ث) حاصل $P(A') + P(A)$ را پیدا کنید.

$P(A) + P(A') = \frac{۳}{۸} + \frac{۵}{۸} = ۱$؛ یعنی $P(A') = ۱ - P(A)$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۸ صفحه ۲۳ کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با ۱/۱۰ است. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۱}{۱۰} = \frac{۹}{۱۰}$$

۹۹ صفحه ۲۳ کار در کلاس

۲. احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با ۰/۰۱ است. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود.

$P = ۱ - ۰.۰۱ = ۰.۹۹$ (یعنی ۰/۹۹)

۱۰۰ صفحه ۲۳ کار در کلاس

۳. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه‌ی یک سیما را تماشا نکند برابر با ۳۲/۴۹ است، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

$$P = ۱ - \frac{۳۲}{۴۹} = \frac{۴۹ - ۳۲}{۴۹} = \frac{۱۷}{۴۹}$$

۱۰۱ صفحه ۲۵ تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به‌طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود.

تصادفی؛ کارت خارج‌شده از پیش معلوم نیست.

۱۰۲ صفحه ۲۵ تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

قطعی؛ نتیجه (تبدیل به بخار) از پیش مشخص است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰۳ صفحه ۲۵ تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

پ) نتیجه‌ی یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم.

تصادفی؛ درست یا غلط بودن پاسخ‌های شانسی از پیش معلوم نیست.

۱۰۴ صفحه ۲۵ تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

ت) در یک بازی ساده‌ی دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد: ــ عددی را انتخاب می‌کند. ــ سه واحد به آن عدد می‌افزاید. ــ سپس حاصل را دو برابر می‌کند. ــ از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند. ــ نتیجه‌ی به دست آمده را نصف می‌کند. ــ از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند. ــ در مرحله‌ی آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

قطعی؛ اگر عدد اولیه x باشد:

$$\frac{۲(x+۳)-۲}{۲} - x = \frac{۲x+۴}{۲} - x = x + ۲ - x = ۲$$

جواب همیشه ۲ است و به عدد انتخابی بستگی ندارد؛ پس فرد دوم از پیش می‌داند و نتیجه قطعی است.

۱۰۵ صفحه ۲۵ تمرین

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

اگر سکه رو بیاید، تاس ۶ حالت دارد؛ اگر پشت بیاید، سکه‌ی دوم ۲ حالت دارد:

$S = \{(ر,۱), (ر,۲), (ر,۳), (ر,۴), (ر,۵), (ر,۶), (ر,پ), (پ,پ)\}$

$n(S) = ۸$

۱۰۶ صفحه ۲۵ تمرین

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

تاس زوج: (ر,۲)، (ر,۴)، (ر,۶)؛ پشت آمدن سکه: (پ,ر) و (پ,پ):

A = {(ر,۲), (ر,۴), (ر,۶), (ر,پ), (پ,پ)}

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۰۷ صفحه ۲۵ تمرین

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی

S = {۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹}

---

۱۰۸ صفحه ۲۵ تمرین

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

A = {۳, ۹, ۱۵}

---

۱۰۹ صفحه ۲۵ تمرین

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

B = {۱, ۹} (۱ = $۱^۲$، ۹ = $۳^۲$؛ ۴ و ۱۶ فرد نیستند)

---

۱۱۰ صفحه ۲۵ تمرین

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

$A \cap B = \{۹\}$ و $A - B = \{۳, ۱۵\}$

۱۱۱ صفحه ۲۵ تمرین

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.

(الف)

صف می‌کند.

، عدد اوّلیه را کم می‌کند.

به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

یم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک‌بار دیگر سک

ایش تصادفی را مشخص کنید.

عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

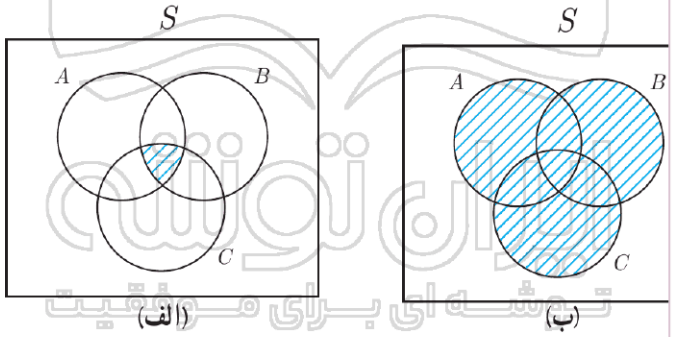
طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت

مطلوب است تعیین :

ایش تصادفی ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضر

د روی کارت، مجذور کامل باشد. ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا

های زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



ناحیه‌ی سایه‌خورده در داخل هر سه دایره است: عبارت توصیفی: «هر سه پیشامد A و B و C رخ دهند»؛ عبارت مجموعه‌ای: $A \cap B \cap C$

۱۱۲ صفحه ۲۵ تمرین

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.

(ب)

صف می‌کند.

، عدد اوّلیه را کم می‌کند.

به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

یم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک‌بار دیگر سک

ایش تصادفی را مشخص کنید.

عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

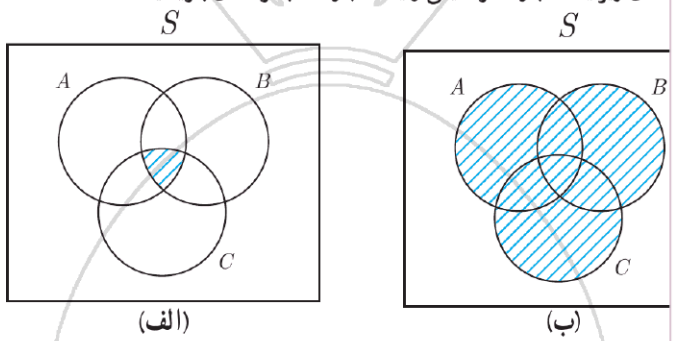
طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت

مطلوب است تعیین :

ایش تصادفی ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضر

د روی کارت، مجذور کامل باشد. ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا

های زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



هر سه دایره به طور کامل سایه خورده است: عبارت توصیفی: «حداقل یکی از پیشامدهای A یا B یا C رخ دهد»؛

عبارت مجموعه‌ای: A ∪ B ∪ C

۱۱۳ صفحه ۲۶ تمرین

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ی این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

رقم دهگان ۴ انتخاب و رقم یکان ۴ انتخاب (تکرار مجاز است): ۱۶ عدد.

S = {۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۲۱,۲۲,۲۳,۲۴,۳۱,۳۲,۳۳,۳۴,۴۱,۴۲,۴۳,۴۴}

ایران توشه

۱۱۴ صفحه ۲۶ تمرین

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

$A = \{۱۲, ۲۴, ۴۲\}$

۱۱۵ صفحه ۲۶ تمرین

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

$B = \{۱۱, ۱۳, ۲۳, ۳۱, ۴۱, ۴۳\}$

۱۱۶ صفحه ۲۶ تمرین

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد)

الف) فضای نمونه‌ی مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

$S = \{$ددد, پدد, دپد, ددپ, پپد, پدپ, دپپ, پپپ$\}$ $(۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$ عضو$)$

۱۱۷ صفحه ۲۶ تمرین

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد)

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

$A = \{$ددد, پپپ$\}$

۱۱۸ صفحه ۲۶ تمرین

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

B = {پ‌پد ,پ‌دپ ,دپپ}

۱۱۹ صفحه ۲۶ تمرین

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد)

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند.

C = {پ‌پد ,پ‌دپ ,دپپ ,پ‌پپ}

۱۲۰ صفحه ۲۶ تمرین

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (پسر = پ، دختر = د؛ به ترتیب تولد)

ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

D = {پ‌دد ,دپد ,ددپ ,ددد}

۱۲۱ صفحه ۲۶ تمرین

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

هر فرزند ۲ حالت دارد: ۱۶ = ۲ × ۲ × ۲ × ۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۲ صفحه ۲۶ تمرین

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

ب) پیشامد A را مشخص کنید، طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

فرزندان اول و دوم هر کدام ۲ حالت دارند: A = {ددد ,دپد ,ددپ ,دپپ} (۴ عضو)

۱۲۳ صفحه ۲۶ تمرین

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

۳ دختر و ۱ پسر (۴ حالت) یا ۴ دختر (۱ حالت):

C = {دددد, پددد, دپدد, ددپد, دددپ} (۵ عضو)

---

۱۲۴ صفحه ۲۶ تمرین

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

خیر؛ مثلاً «پددد» هم در A و هم در C است (و «دپدد» و «ددد» نیز): $A \cap C \neq \varnothing$. پس A و C سازگارند.

---

۱۲۵ صفحه ۲۶ تمرین

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشد.

ابتدا $n(S) = \binom{۱۷}{۳} = ۶۸۰$.

$$P = \frac{\binom{۱۲}{۳}}{\binom{۱۷}{۳}} = \frac{۲۲۰}{۶۸۰} = \frac{۱۱}{۳۴}$$

---

۱۲۶ صفحه ۲۶ تمرین

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

ابتدا $n(S) = \binom{۱۷}{۳} = ۶۸۰$.

$$P = \frac{\binom{۱۲}{۲} \times \binom{۵}{۱}}{\binom{۱۷}{۳}} = \frac{۶۶ \times ۵}{۶۸۰} = \frac{۳۳۰}{۶۸۰} = \frac{۳۳}{۶۸}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۷ صفحه ۲۶ تمرین

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:

پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

ابتدا $n(S) = \binom{۱۷}{۳} = ۶۸۰$. باید ۳ سالم یا ۲ سالم و ۱ لکه‌دار باشد (اصل جمع):

$$P = \frac{۲۲۰ + ۳۳۰}{۶۸۰} = \frac{۵۵۰}{۶۸۰} = \frac{۵۵}{۶۸}$$

۱۲۸ صفحه ۲۶ تمرین

۹. عقربه‌ی دستگاه چرخنده‌ی زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.



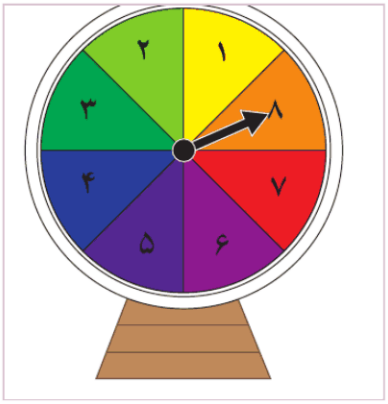
عددهای اول: ۲، ۳، ۵، ۷ (۴ عدد از ۸): $P = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۹ صفحه ۲۶ تمرین

۹. عقربه‌ی دستگاه چرخنده‌ی زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

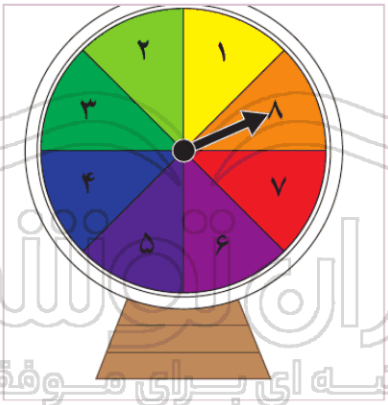


اول: {۲,۳,۵,۷}؛ فرد: {۱,۳,۵,۷}؛ اجتماع: {۱,۲,۳,۵,۷} با ۵ عضو: $P = \frac{۵}{۸}$

۱۳۰ صفحه ۲۶ تمرین

۹. عقربه‌ی دستگاه چرخنده‌ی زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.



مضرب‌های ۳: ۳ و ۶: $P = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳۱ صفحه ۲۶ تمرین

۱۰. ۷ پرچم مختلف را به هفت میله‌ی پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده‌ایم. چنانچه این پرچم‌ها به‌طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه میله‌ی پرچم‌ها با شماره‌های غیر اول در مکان‌های زوج باشند.

تعداد کل ترتیب‌ها: $n(S) = 7!$. شماره‌های غیر اول: ۱، ۴، ۶ (۳ میله) و مکان‌های زوج: ۲، ۴، ۶ (۳ مکان). این سه میله در ۳! حالت در مکان‌های زوج و ۴ میله‌ی دیگر در ۴! حالت در بقیه قرار می‌گیرند:

$$P = \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{6 \times 24}{5040} = \frac{1}{35}$$

۱۳۲ صفحه ۲۶ تمرین

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه‌ی شما به‌طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

$n(S) = 11!$. اگر دروازه‌بان و کاپیتان دقیقاً ۴ نفر فاصله داشته باشند، شماره‌ی جایگاهشان ۵ واحد تفاوت دارد: (۱,۶)، (۲,۷)، ... ، (۶,۱۱): ۶ زوج مکان و برای هر زوج ۲ حالت جابه‌جایی بین دو نفر؛ ۹ نفر دیگر در ۹! حالت قرار می‌گیرند:

$$P = \frac{6 \times 2 \times 9!}{11!} = \frac{12}{11 \times 10} = \frac{6}{55}$$

۱۳۳ صفحه ۲۷ تمرین

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت‌شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را قبل از نشان‌دار کردن، و پس از آن رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی، محیط‌بانان به‌طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند.

$n(S) = \binom{20}{7} = 77520$؛ حداکثر ۲ نشان‌دار یعنی ۰ یا ۱ یا ۲ نشان‌دار (اصل جمع):

$$n(A) = \binom{5}{0}\binom{15}{7} + \binom{5}{1}\binom{15}{6} + \binom{5}{2}\binom{15}{5} = 6435 + 25025 + 30030 = 61490$$

$$P(A) = \frac{61490}{77520} = \frac{6149}{7752} \approx 0.79$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳۴ صفحه ۲۷ تمرین

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد؛ به یک برنامه‌ی خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آنها ۳ نفر انتخاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:
الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$؛ ۲ موافق و ۱ غیرموافق، یا ۳ موافق:

$$P = \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۳}}{۱۲۰} = \frac{۵۰ + ۱۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳۵ صفحه ۲۷ تمرین

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد؛ به یک برنامه‌ی خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آنها ۳ نفر انتخاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه:
ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

از هر دسته (موافق، مخالف، ممتنع) یک نفر:

$$P = \frac{۵ \times ۳ \times ۲}{۱۲۰} = \frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۴}$$

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱۳۶ صفحه ۲۷ خواندنی

در یک مسابقه، سه دریچه مطابق شکل زیر در مقابل یک شرکت‌کننده قرار دارد. ناگهان یک دریچه به‌طور تصادفی باز می‌شود و توپی از آن به طرف شرکت‌کننده پرتاب می‌شود. اگر این فرد بتواند توپ را بگیرد، برنده است و در غیر این صورت، بازنده می‌شود. به نظر شما، احتمال پرتاب توپ از هر دریچه چقدر است؟

اگر یک دریچه را غیرفعال کنند و شرکت‌کننده شماره‌ی دریچه‌ی غیرفعال را نداند، در این صورت احتمال پرتاب توپ از هر دریچه برای شرکت‌کننده در مسابقه چقدر است؟



دریچه به‌طور تصادفی باز می‌شود و سه دریچه شانس برابر دارند: $P = \frac{۱}{۳}$ برای هر دریچه.

اگر یک دریچه غیرفعال باشد، توپ از آن پرتاب نمی‌شود و فقط از دو دریچه‌ی دیگر که شانس برابر دارند پرتاب می‌شود: احتمال هر یک از دو دریچه‌ی فعال $\frac{۱}{۲}$ و برای دریچه‌ی غیرفعال ۰ است؛ اما چون شرکت‌کننده شماره‌ی دریچه‌ی غیرفعال را نمی‌داند، از دید او هر دریچه می‌تواند باشد و برای او احتمال هر دریچه همچنان $\frac{۱}{۳}$ است.

۱۳۷ صفحه ۲۹ **فعالیت**

حدس می‌زنید دانش‌آموزان کلاس شما به‌طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این پرسش حدس و نظر شخصی است و پاسخ دقیق ندارد؛ نمونه‌ی یک پاسخ: «به‌طور متوسط حدود ۷۰ تا ۹۰ دقیقه در روز؛ بیشتر برای شبکه‌های اجتماعی، تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی و عکاسی.»

حدس خود را بنویسید و در پایان، با نتایج واقعی پرسشنامه‌ی کلاس مقایسه کنید (همان‌طور که در متن آمده، حدس زدن قبل از گردآوری داده، مرحله‌ی «بیان مسئله» را روشن‌تر می‌کند).

۱۳۸ صفحه ۲۹ فعالیت

در این پرسشنامه لازم نیست افراد نام خود را بنویسند. حفظ محرمانگی اطلاعات، چگونه کمک می‌کند داده‌های گردآوری شده به واقعیت نزدیک‌تر باشند؟ مثال دیگری بزنید که حفظ محرمانگی اطلاعات هنگام گردآوری داده‌ها مهم باشد.

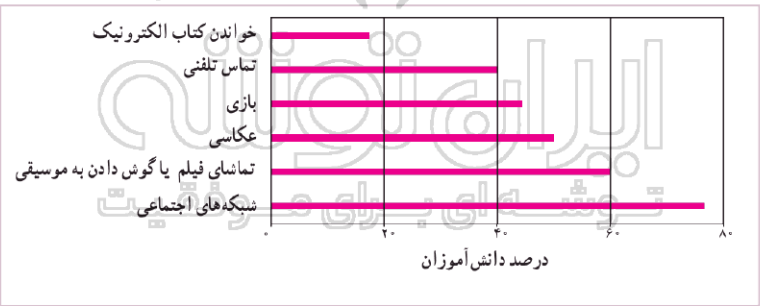
وقتی نام افراد نوشته نشود، آن‌ها نگران قضاوت یا پیامد پاسخ خود نیستند (مثلاً از زیاد بودن زمان استفاده از تلفن یا انجام کارهای ناپسند خجالت نمی‌کشند) و پاسخ‌های صادقانه‌تر و دقیق‌تری می‌دهند؛ در نتیجه داده‌ها به واقعیت نزدیک‌ترند.

مثال دیگر: نظرسنجی از کارمندان یک اداره درباره‌ی رضایت از مدیر؛ پرسش درباره‌ی میزان درآمد خانواده؛ یا پرسش از دانش‌آموزان درباره‌ی میزان تقلب در امتحان یا مصرف دخانیات. در همه‌ی این موارد، اگر هویت افراد فاش شود، پاسخ‌ها غیرواقعی خواهد بود.

۱۳۹ صفحه ۲۹ فعالیت

نتایج این نظرسنجی درباره‌ی فعالیت‌های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شد. در نمونه‌ی مورد بررسی، میانه‌ی میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷۰ دقیقه و دامنه‌ی میان‌چارکی آن ۳۵ ($Q_1 = ۶۵$, $Q_3 = ۱۰۰$) دقیقه بود.

با توجه به چارک‌های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانش‌آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟



مقدار ۱۰۰ دقیقه برابر چارک سوم (Q_3) است. چارک سوم یعنی ۷۵٪ داده‌ها از آن کمتر یا مساوی‌اند؛ پس حدود ۲۵٪ داده‌ها بیشتر از آن‌اند.

پاسخ: تقریباً ۲۵ درصد از دانش‌آموزان روزانه بیش از ۱۰۰ دقیقه با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند.

۱۴۰ صفحه ۲۹ فعالیت

چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟



در پرسش (ب) از هر دانش‌آموز خواسته شده بود سه فعالیت را علامت بزند؛ یعنی هر نفر در سه میله شمرده می‌شود و پاسخ‌ها مستقل از هم نیستند.

به همین دلیل مجموع درصدها تقریباً ۳ × ۱۰۰ = ۳۰۰ می‌شود (با مقدارهای تقریبی نمودار: ۷۷ + ۶۰ + ۵۰ + ۴۴ + ۴۰ + ۱۷ ≈ ۲۸۸٪) و کمتر از ۱۰۰ نیست. هر درصد، سهم افرادی است که آن فعالیت را انتخاب کرده‌اند، نه سهمی از کل پاسخ‌ها.

۱۴۱ صفحه ۳۰ فعالیت

باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانش‌آموزان پایه‌های ..... این مدرسه (نه دانش‌آموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از ..... (نه ابزارهای دیگر) صادق است.

اولین جای خالی: دهم، یازدهم و دوازدهم (دانش‌آموزان متوسطه‌ی دوم)؛ این همان جامعه‌ای است که نمونه از آن انتخاب شد.

دومین جای خالی: تلفن‌های هوشمند.

دلیل: نتایج یک نمونه فقط به جامعه‌ی آماری‌ای که نمونه از آن گرفته شده تعمیم داده می‌شود.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۴۲ صفحه ۳۰ فعالیت

با توجه به نمودار میله‌ای صفحه‌ی قبل، دانش‌آموزان متوسطه‌ی دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت‌هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند؟



میله‌های بلندتر، فعالیت‌هایی‌اند که درصد بیشتری از دانش‌آموزان انتخاب کرده‌اند:

1. شبکه‌های اجتماعی (حدود ۷۷٪)
2. تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی (حدود ۶۰٪)
3. عکاسی (حدود ۵۰٪)

پاسخ: بیشتر برای شبکه‌های اجتماعی، سپس تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی و بعد عکاسی. کمترین استفاده برای خواندن کتاب الکترونیک است (حدود ۱۷٪).

۱۴۳ صفحه ۳۰ فعالیت

از میانه و دامنه‌ی میان‌چارکی گزارش شده برای زمان استفاده‌ی روزانه از تلفن‌های هوشمند چه نتیجه‌ای می‌گیرید یا به زبان آماری، آن‌ها را چگونه تفسیر می‌کنید؟

میانه = ۷۰ دقیقه: نیمی از دانش‌آموزان نمونه روزانه حداکثر ۷۰ دقیقه و نیمی دیگر حداقل ۷۰ دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند.

چارک اول Q۱ = ۶۵ و چارک سوم Q۳ = ۱۰۰؛ دامنه‌ی میان‌چارکی = Q۳ − Q۱ = ۱۰۰ − ۶۵ = ۳۵ دقیقه: ۵۰٪ میانی داده‌ها (از ۶۵ تا ۱۰۰ دقیقه) در بازه‌ای به طول ۳۵ دقیقه پخش شده‌اند؛ یعنی ۲۵٪ دانش‌آموزان کمتر از ۶۵ دقیقه و ۲۵٪ بیش از ۱۰۰ دقیقه استفاده می‌کنند.

چون میانه و دامنه‌ی میان‌چارکی به داده‌های دورافتاده حساس نیستند، برای توصیف این داده‌ها (که ممکن است دانش‌آموزانی با ساعت‌های بسیار زیاد داشته باشند) مناسب‌اند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴۴ صفحه ۳۱ کار در کلاس

اکنون که چرخه‌ی حل مسئله را می‌شناسیم، می‌توانیم در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (مشاهده‌ی نمونه‌ی حل‌شده در سطر سوم می‌تواند به ما کمک کند.)

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
		راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه‌ی اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
		نتایج به‌دست‌آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد، به‌صورت یک مسئله‌ی شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
		با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
		داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح و برنامه‌ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم؛ به نمونه‌گیری، شیوه‌ی اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۵	بحث و نتیجه‌گیری	نتایج به‌دست‌آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد، به‌صورت یک مسئله‌ی شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم. (نمونه‌ی حل‌شده)
۴	تحلیل داده‌ها	با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۳	داده‌ها (گردآوری و پاک‌سازی)	داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.

ترتیب گام‌های چرخه: ۱) بیان مسئله، ۲) طرح و برنامه‌ریزی، ۳) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، ۴) تحلیل داده‌ها، ۵) بحث و نتیجه‌گیری.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۴۵ صفحه ۳۲ بحث و گفت‌وگو

چند مثال دیگر بزنید.

مسئله‌ی آماری باید جامعه‌ی محدود و هدف دقیق داشته باشد. چند مثال:

- بررسی میانگین ساعت مطالعه‌ی هفتگی دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم یک مدرسه‌ی مشخص در دوره‌ی امتحانات
- بررسی میانگین زمان رفت‌وآمد روزانه‌ی کارمندان یک اداره‌ی مشخص در تهران
- بررسی میزان رضایت مشتریان یک فروشگاه از خدمات آن در سه ماه گذشته
- بررسی تعداد کتاب‌های خوانده‌شده در سال گذشته توسط دانش‌آموزان متوسطه‌ی دوم یک شهر

۱۴۶ صفحه ۳۲ بحث و گفت‌وگو

هر یک از عوامل نام برده، (سن، محل سکونت و ...) چگونه می‌تواند بر فعالیت بدنی جامعه‌ی آماری مورد بررسی تأثیر بگذارد؟

چه عوامل دیگری به تعریف دقیق مسئله کمک می‌کند؟

گروه اجرا کننده‌ی این مطالعه باید شامل چه متخصصانی باشد و دانش هر یک چه نقشی در این مطالعه دارد؟ (مثلاً متخصصان تربیت‌بدنی چگونه می‌توانند به اندازه‌گیری متغیر «فعالیت بدنی» کمک کنند؟)

(زمینه: بررسی میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه؛ عوامل نام‌برده‌ی کتاب: سن، محل سکونت، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی و توانایی‌ها.)

الف) تأثیر عوامل بر فعالیت بدنی:

- سن: افراد جوان معمولاً فعال‌ترند؛ با افزایش سن، فعالیت بدنی معمولاً کم می‌شود.
- محل سکونت: نزدیک بودن به باشگاه، پارک یا مکان ورزشی (و فضای شهری یا روستایی) فرصت فعالیت را زیاد یا کم می‌کند.
- الگوهای فرهنگی: برخی جوامع به ورزش‌هایی مانند ورزش‌های باستانی و پهلوانی علاقه دارند و این بر فعالیت افراد اثر می‌گذارد.
- توانایی‌ها و ناتوانی‌های جسمانی: افراد دارای ناتوانی جسمی فعالیت بدنی متفاوتی دارند.

ب) عوامل دیگر: جنسیت، شغل یا تحصیل، وضعیت سلامت، بودجه و امکانات، فصل سال و وضع آب‌وهوا، ورزشی بودن یا نبودن خانواده.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) گروه اجراکننده: متخصص تربیت‌بدنی (تعریف و اندازه‌گیری فعالیت بدنی؛ مثلاً تعداد دقایق ورزش در هفته یا شدت فعالیت)، پزشک (سلامت و محدودیت‌های جسمی)، جامعه‌شناس (فرهنگ و عادت‌ها)، آمارشناس (طرح نمونه‌گیری، پرسشنامه و تحلیل) و افراد بومی (آشنا با شرایط منطقه).

۱۴۷ صفحه ۳۳ کار در کلاس

۱. برای بررسی کدام‌یک از موارد زیر به اندازه‌ی نمونه‌ی بزرگ‌تری نیاز است؟ توضیح دهید.

سن دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید.

معدل سال گذشته‌ی دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید.

هرچه پراکندگی متغیر در جامعه بیشتر باشد، برای اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به نمونه‌ی بزرگ‌تری نیاز داریم.

سن دانش‌آموزان یک کلاس تقریباً یکسان است (مثلاً همه ۱۷ یا ۱۸ ساله‌اند) و پراکندگی بسیار کمی دارد، پس با نمونه‌ی کوچک هم می‌توان آن را خوب برآورد کرد. اما معدل‌ها از دانش‌آموزی به دانش‌آموز دیگر بسیار متفاوت‌اند و پراکندگی زیادی دارند.

پاسخ: برای بررسی معدل سال گذشته به اندازه‌ی نمونه‌ی بزرگ‌تری نیاز است.

۱۴۸ صفحه ۳۳ کار در کلاس

۲. علی و امید در یک پروژه‌ی دانش‌آموزی می‌خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه‌ی ۲ آبادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت‌هایی مشغول‌اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می‌کنند.»

علی پیشنهاد می‌کند: «برای نمونه‌گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از آن‌ها بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند.»

امید پیشنهاد می‌کند: «اگر ادارهٔ آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه‌گیری فهرستی از دانش‌آموزان متوسطه‌ی اول و دوم منطقه‌ی ۲ آبادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه‌ی نمونه‌ی کافی افرادی را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش‌آموز بپرسیم در اوقات خود چه فعالیت‌هایی انجام می‌دهد و به‌صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت‌ها مشغول است.»

موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهادهای امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید اشکال مربوط به پیشنهاد علی است یا امید.

الف) کسانی که اوقات فراغتشان را در خانه می‌گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند.

ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پ) اگر مثلاً به کتابخانه برویم و از نوجوانان بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند، میانگین داده‌های به‌دست‌آمده (آمارهٔ نمونه) بزرگ‌تر از میانگین آن در جامعه‌ی آماری (پارامتر جامعه) می‌شود؛ چون نوجوانانی که اصلاً به کتابخانه نمی‌روند، در نظر گرفته نشده‌اند.
دو اشکال دیگر که به نمونه‌گیری علی وارد است، مطرح کنید.

الف) پیشنهاد علی؛ نمونه فقط از افرادی گرفته می‌شود که در همان مکان‌های عمومی حضور دارند و کسانی که اوقات فراغت را در خانه می‌گذرانند هرگز دیده نمی‌شوند.

ب) پیشنهاد امید؛ فهرست دانش‌آموزان فقط شامل کسانی است که مشغول تحصیل‌اند، پس نوجوانان ترک‌تحصیل‌کرده در جامعه‌ی مورد نظر (نوجوانان منطقه‌ی ۲) قرار دارند اما شانس انتخاب شدن ندارند.

پ) پیشنهاد علی؛ جامعه‌ی واقعی همه‌ی نوجوانان منطقه است و کسانی که به آن مکان نمی‌روند شانس حضور ندارند؛ پس میانگین نمونه از میانگین جامعه بزرگ‌تر برآورد می‌شود.

دو اشکال دیگر نمونه‌گیری علی:

1. انتخاب مکان‌ها دلخواه است، نه تصادفی؛ ممکن است مکان‌های مهمی (یا محله‌های دیگر) در نظر گرفته نشوند و نمونه نماینده‌ی کل منطقه نباشد.
2. شانس انتخاب افراد برابر نیست: کسی که بیشتر به یک مکان می‌رود یا به چند مکان سر می‌زند، احتمال بیشتری برای دیده شدن (و حتی چندبار شمرده شدن) دارد؛ همچنین پرسش فقط درباره‌ی «همان مکان» است و زمان صرف‌شده برای سایر فعالیت‌های اوقات فراغت به دست نمی‌آید.

۱۴۹ صفحه ۳۳ کار در کلاس

۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی ــ اقتصادی خانوارهای یک شهر، در کدام یک از شیوه‌های نمونه‌گیری زیر، همه‌ی قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟
الف) انتخاب تصادفی خانوارها براساس رقم اول تلفن خانه‌ها
ب) انتخاب تصادفی خانوارها براساس رقم آخر تلفن خانه‌ها.

پاسخ: شیوه‌ی (الف).

رقم‌های اول شماره‌ی تلفن ثابت در هر شهر، معمولاً نشان‌دهنده‌ی مرکز مخابراتی و در نتیجه محله یا منطقه‌ی خاصی از شهر هستند. اگر خانوارها را بر اساس رقم اول انتخاب کنیم، ممکن است محله‌هایی که با رقم‌های دیگر شروع می‌شوند (مثلاً محله‌های مرفه یا کم‌درآمد) اصلاً در نمونه نباشند؛ پس همه‌ی قشرها شانس حضور ندارند.

اما رقم آخر تلفن به محل سکونت و وضعیت اقتصادی ربطی ندارد و در همه‌ی محله‌ها تقریباً به یک اندازه پخش است؛ پس در شیوه‌ی (ب) همه‌ی قشرها (با شانس تقریباً برابر) می‌توانند در نمونه حضور یابند.

دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده‌اند که یکی از آن‌ها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه‌ی کارمندان شرکت اول، تقریباً ۷/۶ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه‌ی کارمندان شرکت دوم تقریباً ۱۰ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می‌کند.

اعظم می‌گوید: «شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.»

مریم می‌گوید «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکندگی چه فایده‌ای دارد؟» آن‌ها تصمیم می‌گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می‌کنند.

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه‌ی کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.

ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است.

اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه‌ی متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است.

در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسب است.

حقوق کارمندان (میلیون تومان)

شرکت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
شرکت اول	۷/۸	۷/۱	۹	۷/۹	۷/۴	۷/۷	۷/۲	۷/۵	۷
شرکت دوم	۶/۸	۶/۹	۱۶/۱	۷/۶	۶/۸	۱۸/۱	۱۴	۷	۶/۷

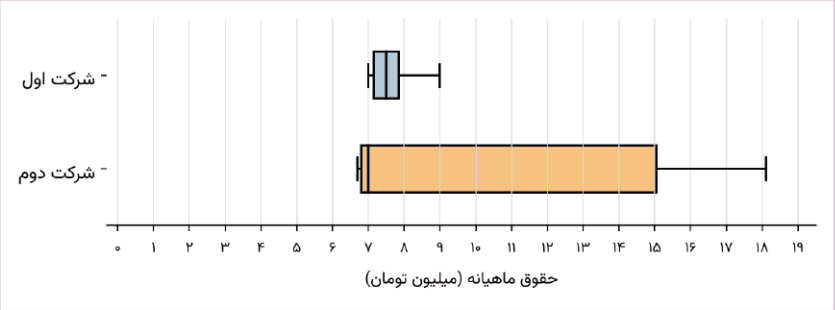
الف) داده‌ها را مرتب می‌کنیم و برای هر شرکت (n = ۹ داده) کمینه، Q۱، میانه، Q۳ و بیشینه را به دست می‌آوریم (برای n فرد، میانه از دو نیمه کنار گذاشته می‌شود):

شرکت اول: ۷ ، ۷/۱ ، ۷/۲ ، ۷/۴ ، ۷/۵ ، ۷/۷ ، ۷/۸ ، ۷/۹ ، ۹ ← کمینه = ۷، Q۱ = (۷/۱ + ۷/۲) ÷ ۲ = ۷/۱۵، میانه = ۷/۵، Q۳ = (۷/۸ + ۷/۹) ÷ ۲ = ۷/۸۵، بیشینه = ۹.

شرکت دوم: ۶/۷ ، ۶/۸ ، ۶/۸ ، ۶/۹ ، ۷ ، ۷/۶ ، ۱۴ ، ۱۶/۱ ، ۱۸/۱ ← کمینه = ۶/۷، Q۱ = (۶/۸ + ۶/۸) ÷ ۲ = ۶/۸، میانه = ۷، Q۳ = (۱۴ + ۱۶/۱) ÷ ۲ = ۱۵/۰۵، بیشینه = ۱۸/۱.

جعبه از Q۱ تا Q۳ با خطی در میانه رسم می‌شود و ضلع‌ها (خط‌های دو طرف) تا کمینه و بیشینه‌اند:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



(دامنه‌ی میان‌چارکی: شرکت اول ۷/۸۵ – ۷/۱۵ = ۰/۷ و شرکت دوم ۱۵/۰۵ – ۶/۸ = ۸/۲۵.)

ب) بررسی عبارت‌ها:

- «حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق شرکت اول است.» درست؛ کمترین حقوق شرکت اول ۷ است و میانه‌ی شرکت دوم هم ۷ است. یعنی حدود نیمی از کارمندان شرکت دوم (۴ نفر از ۹ نفر، حقوق‌های ۶/۷ تا ۶/۹) کمتر از ۷ می‌گیرند.
- «اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه‌ی متوسطی داشته باشد و ... شرکت اول برای او مناسب است.» درست؛ فرد با شایستگی متوسط در شرکت دوم احتمالاً حقوقی نزدیک میانه (۷ یا کمتر) می‌گیرد و حقوق‌های ۱۴ تا ۱۸ مخصوص تعداد کمی از کارمندان است، در حالی که در شرکت اول حقوق‌ها فشرده‌اند و میانه‌ی آن (۷/۵) از میانه‌ی شرکت دوم بیشتر است.
- «در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسب است.» نادرست؛ در شرکت دوم داده‌های دورافتاده‌ی ۱۴، ۱۶/۱ و ۱۸/۱ وجود دارد که میانگین را به ۱۰ رسانده‌اند، در حالی که اکثر کارمندان حدود ۷ می‌گیرند و هیچ کارمندی عملاً حقوقی نزدیک ۱۰ ندارد. برای این داده‌ها میانه (۷) و دامنه‌ی میان‌چارکی معیارهای مناسب‌اند.

نتیجه: حرف اعظم نادرست است؛ میانگین ۱۰ شرکت دوم گمراه‌کننده است و پراکندگی (جعبه‌ی بلند) نشان می‌دهد حقوق در شرکت دوم بسیار نایکنواخت است. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکندگی کافی نیست، همان‌طور که مریم می‌گوید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۱ صفحه ۳۷ کار در کلاس

دو مدرسه‌ی متوسطه‌ی دوم، که تعداد دانش‌آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی‌شان، وضعیت قبولی دانش‌آموزان را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود داده‌اند. مدرسه‌ی اول قبولی‌هایش ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه‌ی دوم ۲۰ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه‌ی فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمّی یا کیفی؟

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟

پ) افزایش ۲۰۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.

ت) فرض کنید در مدرسه‌ی اول، تعداد قبولی‌ها قبلاً ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است (۲۰۰٪ افزایش) و در مدرسه‌ی دوم، تعداد قبولی‌ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می‌کنید؟

ث) در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه‌ی درصد بدون مشخص‌کردن تعداد، چگونه می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟

الف) کیفی (اسمی)؛ چون مقدارهای آن «قبول شدن» و «قبول نشدن» است و عدد نیست.

ب) فقط با توجه به درصدها (۲۰۰٪ در برابر ۲۰٪)، مدرسه‌ی اول بهتر به نظر می‌رسد و ممکن است آن را پیشنهاد کنیم؛ اما این پیشنهاد هنوز دقیق نیست (ادامه را ببینید).

پ) افزایش ۲۰۰٪ یعنی مقدار جدید = مقدار قبلی + ۲ برابر مقدار قبلی = ۳ برابر مقدار قبلی؛ افزایش ۲۰٪ یعنی مقدار جدید = ۱/۲ برابر مقدار قبلی (یک‌پنجم اضافه‌تر از قبل).

ت) مدرسه‌ی اول: از ۱ به ۳ نفر رسیده است؛ مدرسه‌ی دوم: از ۷۰ به ۸۴ نفر (۷۰ × ۱/۲ = ۸۴). با توجه به تعداد قبولی‌ها، مدرسه‌ی دوم (۸۴ قبولی در برابر ۳ قبولی) را پیشنهاد می‌کنیم.

ث) درصد افزایش به مقدار قبلی (پایه) بستگی دارد. اگر مقدار اولیه‌ی کوچک باشد، افزایشی کوچک (مثلاً ۲ نفر) درصد بسیار بزرگی (۲۰۰٪) می‌دهد و تصویر بزرگ‌نمایی‌شده‌ای ایجاد می‌کند. پس «برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی)، گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.»

۱۵۲ صفحه ۳۷ گام ۵ (بحث و نتیجه‌گیری)

(از جامعه‌ای با اندازه‌ی N به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه‌ی n داشته باشیم؟)

انتخاب n عضو از N عضو، بدون توجه به ترتیب انتخاب (نمونه یک زیرمجموعه است) و بدون جایگذاری، یک ترکیب است؛ پس تعداد نمونه‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

مثال: از جامعه‌ای با N = ۵ نفر، نمونه‌های دونفری به $\binom{5}{2} = 10$ طریق ممکن است. به همین دلیل نتیجه‌ی نمونه‌ها با هم فرق می‌کند و تعمیم نتیجه به جامعه قطعی نیست.

۱۵۳ صفحه ۳۸ کار در کلاس

۱. برای احداث یک استخر در حاشیه‌ی یک کلان‌شهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره‌برداری، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی در استخر، که شناگر نبودند، به توصیه‌ی پزشکی در قسمت کم‌عمق در حال راه رفتن در آب‌اند و در قسمت عمیق فقط گاهی چند نفر شنا می‌کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقه‌ی احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ب) چگونه مشورت با افراد بومی درباره‌ی اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم‌عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟

الف) اگر میانگین (و میانه‌ی) سن ساکنان منطقه بالا بود، متخصصان می‌فهمیدند بیشتر مراجعان مسن‌اند؛ آنان معمولاً شنای عمیق انجام نمی‌دهند و برای درمان یا ورزش سبک در آب کم‌عمق راه می‌روند. بنابراین می‌شد قسمت کم‌عمق را بزرگ‌تر و قسمت عمیق را کوچک‌تر طراحی کرد و امکانات مناسب سالمندان (نرده، شیب ملایم، سرویس بهداشتی نزدیک) در نظر گرفت. این همان گام «بیان مسئله» است: شناخت درست جامعه و هدف قبل از اجرا.

ب) افراد بومی می‌توانند اطلاعاتی درباره‌ی ترکیب سنی افراد، درصد افرادی که شنا بلدند، عادت‌ها و فرهنگ ورزشی منطقه، و نیاز به توصیه‌های پزشکی و درمانی بدهند. با این اطلاعات متخصصان می‌توانند تصمیم بگیرند چه سهمی از استخر کم‌عمق (برای کودکان، مسن‌ها و افراد ناشناگر) و چه سهمی عمیق (برای شناگران) باشد؛ در نتیجه استخر متناسب با نیاز واقعی مردم ساخته می‌شود و از هزینه‌ی بیهوده جلوگیری می‌شود. این مشورت در گام‌های بیان مسئله و طرح و برنامه‌ریزی انجام می‌شود.

۱۵۴ صفحه ۳۹ **کار در کلاس**

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و بر کدام گام‌های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجراکنندگان برداشت‌های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند.

ب) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است.

پ) تمامی داده‌های دورافتاده حذف شده‌اند.

ت) براساس توزیع داده‌ها، میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی بود. اما چون مقدار میانه با آنچه انتظار می‌رفت متفاوت بود، میانگین داده‌ها گزارش شد.

ث) نتایج را فقط افراد متخصص آمار تفسیر کرده‌اند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

الف) نادرست‌انجام‌شدن گام ۱ (بیان مسئله). اثر: در گام ۲ نمونه‌گیری و اندازه‌گیری متغیرها طبق برداشت‌های متفاوت انجام می‌شود، در گام ۳ داده‌های ناهمخوان گردآوری می‌شود، در گام ۴ تحلیل بی‌معنا و در گام ۵ نتیجه‌گیری ناروشن می‌شود.

ب) نادرست‌انجام‌شدن گام ۲ (طرح و برنامه‌ریزی، شیوه‌ی اندازه‌گیری) و در اجرا گام ۳ (گردآوری). اثر: داده‌ها یکسان نیستند و پیش از تحلیل باید به یک واحد تبدیل شوند، در غیر این‌صورت میانگین، انحراف معیار و نمودارها (گام ۴) و نتیجه‌گیری (گام ۵) نادرست می‌شود.

پ) نادرست‌انجام‌شدن گام ۳ (پاک‌سازی داده‌ها)؛ فقط داده‌های اشتباه (مثل ۲۴ ساعت بیشتر در روز) باید حذف یا اصلاح شوند، نه هر داده‌ی دورافتاده. اثر: پراکندگی و میانگین واقعی تغییر می‌کند (گام ۴) و تصویر نادرستی از جامعه (گام ۵) ارائه می‌شود.

ت) نادرست‌انجام‌شدن گام ۴ (تحلیل داده‌ها: انتخاب معیار مناسب). اثر: گزارش میانگین به‌جای میانه (با وجود داده‌های دورافتاده) نتایج را نماینده‌ی واقعی داده‌ها نشان نمی‌دهد و در گام ۵ تفسیر و نتیجه‌گیری را گمراه می‌کند؛ باید تصمیم بر اساس داده‌ها باشد نه انتظار قبلی.

ث) نادرست‌انجام‌شدن گام ۵ (بحث و نتیجه‌گیری). تفسیر باید با مشورت افراد مطلع از موضوع (کارشناسان زمینه‌ی پژوهش) انجام شود؛ آمارشناس به‌تنهایی ممکن است محدودیت‌ها و معنای واقعی نتایج را در موضوع مورد بررسی نداند. اثر: نتیجه‌گیری نادرست و بی‌ارتباط با هدف، که ممکن است ما را به بازبینی گام‌های اول (بیان مسئله) و دوم بازگرداند.

۱۵۵ صفحه ۳۹ تمرین

۱. به‌نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دورهٔ دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه‌ی آماری محدود (از نظر پایه‌ی تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به‌صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

نمونه‌ی یک بیان دقیق (گام اول چرخه):

- جامعه‌ی آماری: دانش‌آموزان دختر پایه‌ی سوم دبستان‌های دولتی شهرستان زاهدان در سال تحصیلی جاری (جامعه‌ی محدود از نظر پایه، جنسیت، منطقه و سال).
- گروه‌ها: دانش‌آموزانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست در مقابل دانش‌آموزانی که زبان مادری‌شان فارسی است.
- متغیر: نمره‌ی درس ریاضی (یا علوم) در امتحان پایان ترم اول (متغیر کمّی).

بیان مسئله: «آیا میانگین (یا میانه‌ی) نمره‌ی ریاضی پایان ترم اول، در دانش‌آموزان دختر پایه‌ی سوم دبستان‌های دولتی زاهدان که زبان مادری‌شان فارسی نیست، کمتر از دانش‌آموزان همان جامعه که زبان مادری‌شان فارسی است، می‌باشد؟»

(پاسخ دیگر با جامعه یا متغیری متفاوت هم قابل قبول است، به شرط آن‌که جامعه محدود و متغیر دقیق تعریف شود.)

۱۵۶ صفحه ۴۰ تمرین

۲. با توجه به تأثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌آموزان، از آن‌ها بپرسیم، در هفته‌ی گذشته، بیشتر به کدام‌یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟

۱ــ پیاده یا با دوچرخه

۲ــ با وسایل حمل‌ونقل عمومی

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳ــ با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه‌ی آماری، نمونه‌ی آماری، اندازه‌ی جامعه و اندازه‌ی نمونه را مشخص کنید.

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روشی می‌توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده‌ها رخ دهد؟

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمّی/کیفی)، و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی ــ اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

ت) چه نمودارها و آماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

ث) آیا می‌توانیم این نتایج را به شیوه‌ی رفت و آمد دانش‌آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری آزمون‌های پایان نیم‌سال)؟ توضیح دهید.

ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، آیا دقیقاً همین نتایج حاصل می‌شد یا امکان داشت حداقل نتایج کمی تغییر کند؟ توضیح دهید.

الف) جامعه‌ی آماری: همه‌ی دانش‌آموزان این کلاس (اندازه‌ی جامعه $N = ۲۸$). نمونه‌ی آماری: ۹ دانش‌آموزی که به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند (اندازه‌ی نمونه $n = ۹$).

ب) روش گردآوری: پرسش مستقیم (مصاحبه) یا پرسشنامه‌ی کوتاه با سه گزینه از ۹ نفر؛ انتخاب تصادفی نمونه با قرعه‌کشی یا جدول اعداد تصادفی. مشکلات احتمالی: فراموش کردن یا پاسخ نادرست دانش‌آموز؛ استفاده از چند شیوه در طول هفته (و ناروشن بودن «بیشتر»)؛ غیبت یا عدم همکاری فرد منتخب؛ اشتباه در ثبت داده.

پ) متغیر: «شیوه‌ی رفت‌وآمد به مدرسه در هفته‌ی گذشته». نوع: کیفی؛ مقیاس: اسمی (سه حالت بدون ترتیب ذاتی).

ت) برای متغیر کیفی: جدول فراوانی (تعداد و درصد)، نمودار میله‌ای یا دایره‌ای و گزارش نما (پرتکرارترین شیوه). میانگین و انحراف معیار برای این متغیر معنا ندارند.

ث) خیر؛ نمونه فقط یک هفته را نشان می‌دهد و شیوه‌ی رفت‌وآمد با فصل (باران، سرما، گرما)، زمان آزمون‌ها و مانند آن تغییر می‌کند. تعمیم برای سایر هفته‌ها (جامعه‌ی دیگر) نادرست است؛ فقط برای همان هفته و همان کلاس می‌توان نتیجه گرفت.

ج) نه؛ احتمالاً نتایج کمی تفاوت می‌کرد. هر نمونه از جامعه شامل افراد متفاوتی است، پس تعداد و درصد در هر شیوه (آماره‌ی نمونه) ممکن است عوض شود، حتی اگر جامعه‌ی آماری تغییر نکرده باشد. تعداد نمونه‌های ممکن $\binom{28}{9}$ است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵۷ صفحه ۴۰ تمرین

۳. در هریک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه‌ی آماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هریک از موارد چگونه بر نتایج تأثیر می‌گذارد؟

الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان کارگاه شبانه‌روزی. نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره‌ی میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون. نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آن‌ها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

پ) مسئله: نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم منطقه‌ی ۲ بوشهر درباره‌ی اینکه به‌طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند. نمونه: دختران پایه‌ی دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به‌صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.

الف) جامعه: همه‌ی کارمندان کارگاه (در همه‌ی شیفت‌ها)؛ نمونه: فقط مدیران ارشد و فقط شیفت روز. علت نامناسب بودن: مدیران یک زیرمجموعه‌ی کوچک و متفاوت‌اند (حقوق و موقعیت بهتر) و کارمندان شیفت شب و عصر و کارگران عادی شانس حضور ندارند. نتیجه: رضایت شغلی معمولاً بیشتر از واقع برآورد می‌شود. پیشنهاد: انتخاب تصادفی از فهرست همه‌ی کارمندان، با سهم مناسب از هر شیفت و هر رده‌ی شغلی.

ب) جامعه: همه‌ی مادران شهر؛ نمونه: منازل انتخاب‌شده، با مراجعه بین ۸ تا ۱۰ صبح. در این ساعت مادران شاغل خانه نیستند و بیشتر مادران خانه‌دار (که ممکن است بیشتر تلویزیون ببینند) پاسخ می‌دهند؛ کسانی هم که در منزل نبوده‌اند، شانس حضور ندارند. نتیجه: نظر مادران شاغل دیده نمی‌شود و میزان رضایت یا نارضایتی واقعی برآورد نمی‌شود. پیشنهاد: مراجعه یا تماس در ساعت‌های مختلف (از جمله عصر و آخر هفته) یا استفاده از تلفن و روش‌های آنلاین.

پ) جامعه: همه‌ی دانش‌آموزان (دختر و پسر) پایه‌ی دوازدهم منطقه‌ی ۲ بوشهر؛ نمونه: فقط دختران یک مدرسه که داوطلب شده‌اند. پسران و دانش‌آموزان مدارس دیگر شانس حضور ندارند و داوطلب شدن نشان‌دهنده‌ی علاقه‌مندی بیشتر به موضوع است (افرادی که بیشتر درس می‌خوانند ممکن است بیشتر مشارکت کنند). نتیجه: میانگین ساعت تکلیف احتمالاً بیشتر از واقع برآورد می‌شود. پیشنهاد: انتخاب تصادفی از فهرست همه‌ی دانش‌آموزان منطقه (دختر و پسر، از همه‌ی مدارس) و پیگیری از افراد منتخب، نه داوطلبانه.

۱۵۸ صفحه ۴۱ تمرین

۴. «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم‌زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به‌صورت هم‌زمان هستیم، درواقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌پرد. مغز انسان تشنهٔ خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی

مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می‌شنویم، مغز ما، که بی‌تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می‌دهد که مثلاً اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکه‌ی اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به‌جای اینکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود، به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.»

سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه‌ی مدرسه تصمیم گرفتند نمره‌ی عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی‌دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:

الف) از مقایسه‌ی میانه‌ی گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

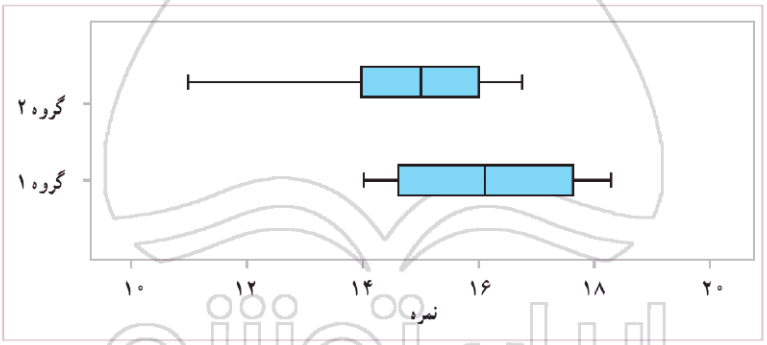
ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه‌ی تغییرات و دامنه‌ی میان چارکی مقایسه کنید.

پ) از مقایسه‌ی کمینه‌ی گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک‌ترند؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟



ابتدا از محور نمودار (مقیاس هر خانه ۲ نمره)، مقدارهای تقریبی را می‌خوانیم:

	کمینه	Q1	میانه	Q3	بیشینه
گروه ۱	۱۴	۱۴/۶ ≈	۱۶ ≈	۱۷/۶ ≈	۱۸/۳ ≈
گروه ۲	۱۱	۱۴	۱۵	۱۶	۱۶/۸ ≈

الف) میانه‌ی گروه یک (حدود ۱۶) تقریباً برابر با چارک سوم گروه دو (۱۶) است؛ یعنی نیمی از دانش‌آموزان گروه یک نمره‌ای حداقل برابر با نمره‌ی ۲۵٪ بالایی گروه دو دارند. به عبارت دیگر، حدود ۵۰٪ گروه یک از ۷۵٪ گروه دو بهترند؛ پس بی‌صدا گذاشتن تلفن همراه هنگام مطالعه با نمره‌ی بالاتر همراه است.

ب) دامنه‌ی تغییرات (بیشینه − کمینه): گروه یک ≈ ۱۸/۳ − ۱۴ ≈ ۴/۳ و گروه دو ≈ ۱۶/۸ − ۱۱ ≈ ۵/۸؛ پس پراکندگی کل داده‌ها در گروه دو بیشتر است. دامنه‌ی میان‌چارکی (Q۱ − Q۳): گروه یک ≈ ۱۷/۶ − ۱۴/۶ = ۳ و گروه دو ۱۶ − ۱۴ = ۲؛ پس پراکندگی ۵۰٪ میانی نمره‌ها در گروه یک بیشتر است.

ایران توشه
توشه‌ای برای هر موفقیت

پ) کمینه‌ی گروه یک (۱۴) تقریباً برابر با چارک اول گروه دو (۱۴) است؛ یعنی ۲۵٪ دانش‌آموزان گروه دو نمره‌ای کمتر یا برابر با کمترین نمره‌ی کل گروه یک دارند. پایین‌ترین نمره‌های گروه دو از نمره‌ی همه‌ی افراد گروه یک بدتر است.

ت) گروه دو؛ در این گروه دم سمت چپ (نمره‌های ۱۱ تا ۱۴) خیلی بلندتر از دم سمت راست است. نمره‌ی کم ۱۱ (دورافتاده) میانگین را پایین می‌کشد و انحراف معیار را بزرگ می‌کند، پس میانگین و انحراف معیار توصیف مناسبی نیستند و باید میانه و دامنه‌ی میان‌چارکی را گزارش کرد.

ث) گروه یک؛ جعبه و دُم‌های آن تقریباً متقارن‌اند (فاصله‌ی میانه تا Q۱ و تا Q۳ هر دو حدود ۱/۵ است)، پس میانگین و میانه‌ی آن به هم نزدیک‌اند. در گروه دو، میانگین به سبب دُم بلند چپ از میانه (۱۵) کمتر می‌شود.

ج) به همه‌ی دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم همان مدرسه (جامعه‌ای که نمونه از آن انتخاب شده)، به شرط اینکه نمونه‌ها تصادفی انتخاب شده باشند. به دانش‌آموزان مدارس دیگر یا پایه‌های دیگر قابل تعمیم نیست.

مقدارهای کمینه، چارک‌ها و بیشینه از روی نمودار تقریبی خوانده شده‌اند؛ نتیجه‌گیری‌های بالا فقط به رابطه‌های روشن میان آن‌ها (برابری تقریبی میانه‌ی گروه ۱ با Q۳ گروه ۲ و کمینه‌ی گروه ۱ با Q۱ گروه ۲) وابسته است.

۱۵۹ صفحه ۴۲ تمرین

۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش‌آموز علوم انسانی پایه‌ی یازدهم یک مدرسه پرسیده‌ایم که به‌نظر آن‌ها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

۱۲ ۱۴ ۲۰ ۲۲ ۱۸ ۲۰ ۰ ۴ ۶ ۱۳ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۶

الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مرتب‌شده‌ی داده‌ها: ۰، ۴، ۶، ۱۰، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۰، ۲۲ (n = ۱۵). مجموع = ۱۸۹، میانگین = ۱۸۹ ÷ ۱۵ = ۱۲/۶، میانه (هشتمین داده) = ۱۲، Q۱ = میانه‌ی هفت داده‌ی اول = ۱۰، Q۳ = میانه‌ی هفت داده‌ی آخر = ۱۸.

الف) میانه و چارک‌ها فقط به داده‌های وسط (۱۰، ۱۲، ۱۸ و داده‌های اطراف آن‌ها) بستگی دارند و تغییر دادن مقدار بیشینه، آن‌ها را عوض نمی‌کند. اما میانگین و انحراف معیار به همه‌ی داده‌ها وابسته‌اند. بیشینه‌ی ۲۲ را به ۳۰ تغییر می‌دهیم (از جای خود جابه‌جا نمی‌شود، همچنان آخرین داده است):

داده‌های جدید: ۰، ۴، ۶، ۱۰، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۰، ۳۰؛ میانه همچنان ۱۲، Q۱ = ۱۰ و Q۳ = ۱۸ است، ولی میانگین از ۱۲/۶ به حدود ۱۳/۱ می‌رسد و انحراف معیار هم از حدود ۵/۹۵ به حدود ۷/۰ بیشتر می‌شود (داده‌ی ۳۰ از میانگین دورتر است).

ب) برای ثابت ماندن میانگین (۱۲/۶)، مجموع دو داده‌ی جدید باید ۲ × ۱۲/۶ = ۲۵/۲ باشد؛ و برای ثابت ماندن میانه‌ی ۱۲ (نهمین داده از ۱۷ داده)، یکی کمتر یا مساوی ۱۲ و دیگری بیشتر یا مساوی ۱۲ باشد. مثلاً ۱۲ و ۱۳/۲ (مجموع ۲۵/۲)؛ دقت کنید که نمی‌توان هر دو داده را ۱۲/۶ گرفت، چون هر دو بزرگ‌تر از ۱۲ می‌شوند و میانه به ۱۲/۶ تغییر می‌کند.

بررسی: مجموع جدید ۱۸۹ + ۲۵/۲ = ۲۱۴/۲ و ۲۱۴/۲ ÷ ۱۷ = ۱۲/۶ و نهمین داده‌ی مرتب‌شده ۱۲ است.

۱۶۰ صفحه ۴۲ تمرین

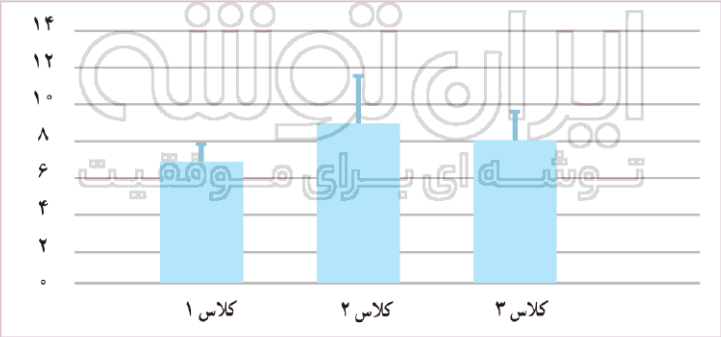
۶. با توجه به تأثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و آوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایه‌ی دهم، میانگین میزان خواب این دانش‌آموزان را در هفته‌ی گذشته برحسب ساعت پرسیدند و ثبت کردند. آن‌ها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن به‌صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده‌ی میانگین و میله‌ی خط اندازه‌ی انحراف معیار است.)

الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها، نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که از دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته‌ی گذشته می‌پرسیم آیا آن‌ها می‌توانند به درستی به یاد آورند که شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟) برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟

ب) نوع (کمّی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی ــ اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.

پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به‌صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

ت) چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟



	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین			
انحراف معیار			

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

الف) عوامل: فراموش کردن یا حدسی گفتن ساعت‌ها (به‌ویژه گزارش ساعت خواب هر شب)؛ گرد کردن عددها؛ دقیق نبودن ساعت‌ها؛ تمایل به گفتن پاسخ پسندیده (مثلاً زیاد گفتن ساعت خواب)؛ تفاوت خواب شب‌های عادی و تعطیل. راهکار: ثبت روزانه‌ی ساعت خواب در یک دفترچه یا برنامه‌ی گوشی (به‌جای پرسیدن از حافظه)، یا استفاده از ابزار اندازه‌گیری خودکار (مثل ساعت هوشمند)، و پرسشنامه‌ی بی‌نام.

ب) متغیر: میانگین ساعت خواب هر دانش‌آموز در هفته. نوع: کمّی (پیوسته)؛ مقیاس: نسبتی (صفر در آن یعنی «اصلاً نخوابیدن» و صفر مطلق دارد و نسبت‌ها معنا دارند؛ مثلاً ۸ ساعت دو برابر ۴ ساعت است).

پ) با خواندن بلندی مستطیل‌ها و طول میله‌های خطا (مقدارها تقریبی‌اند):

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	≈ ۷	≈ ۹	≈ ۸
انحراف معیار	≈ ۱	≈ ۲/۵	≈ ۱/۵

ت) والدین (ثبت ساعت خواب فرزندان)، پزشک یا متخصص خواب (اندازه‌گیری درست و کیفیت خواب)، معلمان و مشاوران مدرسه (اجرای پرسشنامه، انتخاب زمان مناسب و ثبت نمره‌ها برای رابطه با یادگیری) و آمارشناس (طراحی روش گردآوری و تحلیل). همچنین خود دانش‌آموزان با ثبت دقیق و صادقانه‌ی ساعت خواب.

مقدارهای جدول (پ) از روی نمودار و به‌صورت تقریبی خوانده شده است و ممکن است با پاسخ کتاب اندکی تفاوت داشته باشد (مثلاً انحراف معیار کلاس ۲ بین ۲/۵ تا ۳).

۱۶۱ صفحه ۴۳ تمرین

۷. مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده‌ی روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.

الف) سال گذشته چند نفر از خارج از مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ایِ داده شده، برای هریک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

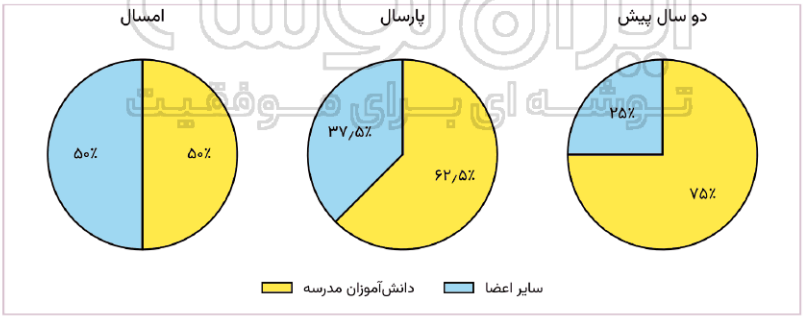


الف) «سایر اعضا» در «پارسال» (سال گذشته) میله‌ی ۳۰ دارد. پاسخ: ۳۰ نفر.

ب) فراوانی دانش‌آموزان در سه سال: ۶۰، ۵۰، ۴۰؛ یعنی هر سال ۱۰ نفر کم شده است. با ادامه‌ی همین روند، سال آینده ۴۰ − ۱۰ = ۳۰ نفر پیش‌بینی می‌شود (در همین حال، اعضای بیرونی ۲۰، ۳۰، ۴۰ هر سال ۱۰ نفر زیاد می‌شوند و پیش‌بینی آن‌ها ۵۰ نفر است).

پ) مجموع اعضای جدید هر سال ۸۰ نفر است؛ هر سال یک دایره‌ی جداگانه رسم می‌کنیم. زاویه‌ی هر قطاع = (فراوانی ÷ ۸۰) × ۳۶۰:

سال	دانش‌آموزان مدرسه	سایر اعضا
دو سال پیش	۶۰ نفر = ٪۷۵ = °۲۷۰	۲۰ نفر = ٪۲۵ = °۹۰
پارسال	۵۰ نفر = ٪۶۲/۵ = °۲۲۵	۳۰ نفر = ٪۳۷/۵ = °۱۳۵
امسال	۴۰ نفر = ٪۵۰ = °۱۸۰	۴۰ نفر = ٪۵۰ = °۱۸۰



ت) عواملی مانند: تبلیغ و معرفی کتابخانه در بیرون از مدرسه و جذب کتاب‌خوان‌های محله؛ کم شدن علاقه‌ی دانش‌آموزان به کتاب‌خوانی (مشغول شدن به تلفن همراه و شبکه‌های اجتماعی)؛ فشار درس‌ها و آزمون‌ها و کمبود وقت دانش‌آموزان؛ کهنه شدن کتاب‌های مورد نیاز دانش‌آموزان و نبودن کتاب‌های درسی‌ـمطالعاتی مناسب؛ و راحت‌تر بودن عضویت برای افراد بیرون. (پاسخ‌های منطقی دیگر هم قابل قبول است.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۶۲ صفحه ۴۳ تمرین

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای روبه‌رو نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه‌ی مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه‌ی مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)

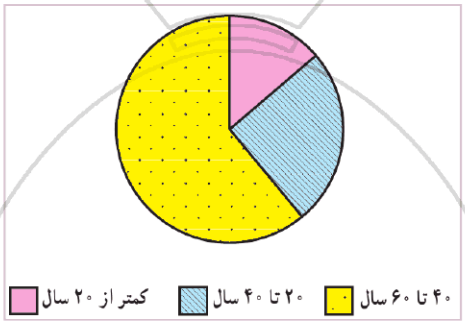
الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

ب) مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده‌ی نتایج، آن را غیرواقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام‌یک می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.

بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤال‌های پرسشگر نداشته‌اند.

گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.

هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.



الف) زاویه‌ی گروه ۴۰ تا ۶۰ سال = ۳۶۰ − (۹۰ + ۵۴) = ۳۶۰ − ۱۴۴ = ۲۱۶ درجه. درصد = ۲۱۶ ÷ ۳۶۰ × ۱۰۰ = ٪۶۰ (گروه کمتر از ۲۰ سال ۱۵٪ و گروه ۲۰ تا ۴۰ سال ۲۵٪ است). پاسخ: ۶۰ درصد.

ب) مورد اول و دوم می‌توانند نتایج را از واقعیت دور کنند:

- مورد اول: اگر بسیاری از افراد زیر ۴۰ سال پاسخ نداده باشند، سهم آن‌ها در نمونه کمتر از سهم واقعی‌شان در جامعه می‌شود (سوگیری عدم پاسخ‌گویی) و گروه ۴۰ تا ۶۰ بیش از واقعیت دیده می‌شود.
- مورد دوم: ساعات اداری، افراد شاغل (که بیشتر زیر ۴۰ سال‌اند) سر کار هستند و شانس حضور در نمونه را ندارند، در حالی که بازنشستگان بیشتر حضور دارند؛ پس نمونه نماینده‌ی جامعه نیست.
- مورد سوم: حضور بسیاری از دانش‌آموزان، نمونه را از افراد جوان‌تر پرمی‌کرد و نتیجه را به سمت «کمتر از ۴۰ سال» می‌برد، نه به سمت ۴۰ تا ۶۰؛ پس این مورد نمی‌تواند علت ادعای مسئول فروش باشد.

۱۶۳ صفحه ۴۴ تمرین

۹. جدول زیر نشان‌دهنده‌ی تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آن‌ها در زمان تصادف است.

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس: «هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.»

irantooshe.ir

نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصویر ایجاد شده است؟

سرعت (کیلومتر در ساعت)	تعداد خودروهای تصادف کرده
۰ ــ ۱۰	۴۰
۱۰ ــ ۲۰	۱۳۰
۲۰ ــ ۳۰	۲۱۰
۳۰ ــ ۴۰	۲۵۰
۴۰ ــ ۵۰	۳۵۰
۵۰ ــ ۶۰	۲۴۰
۶۰ ــ ۷۰	۱۵۰
۷۰ ــ ۸۰	۷۰
۸۰ ــ ۹۰	۴۰
۹۰ ــ ۱۰۰	۲۰
۱۰۰ ــ ۱۱۰	۲۰
۱۱۰ ــ ۱۲۰	۱۰

جمع تصادف‌ها ۱۵۳۰ است که فقط ۵۰ تا (حدود ۳٪) مربوط به سرعت بیش از ۹۰ است؛ ولی این به معنای امن بودن سرعت زیاد نیست.

اشکال: جدول فقط «تعداد» تصادف‌ها را نشان می‌دهد، نه «درصد» آن‌ها نسبت به همه‌ی خودروهایی که با آن سرعت حرکت می‌کنند. بیشتر خودروها با سرعت ۳۰ تا ۶۰ (در شهر و مسیرهای پرترافیک) حرکت می‌کنند؛ پس طبیعی است تعداد تصادف‌ها در این سرعت‌ها بیشتر باشد. تعداد خودروهایی که با سرعت بیش از ۹۰ رانندگی می‌کنند بسیار کم است و تعداد تصادف‌ها هم کم می‌شود، حتی اگر احتمال تصادف برای هر خودرو در آن سرعت بیشتر باشد.

برای مقایسه‌ی درست باید نسبت یا درصد تصادف‌ها به تعداد کل خودروهای در حال حرکت با هر سرعت (فراوانی نسبی تصادف در هر گروه سرعت) را به دست آورد. مثلاً اگر ۲۰ تصادف از ۲۰ خودرو با سرعت بیش از ۹۰ باشد، درصد بالایی است، در حالی که ۳۵۰ تصادف از چند هزار خودرو درصد کمی می‌شود. این تصویر نادرست به خاطر گزارش تعداد بدون در نظر گرفتن اندازه‌ی گروه (جامعه‌ی مرجع) ایجاد شده است؛ همان خطای گزارش بدون درصد، یا درصد بدون تعداد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶۴ صفحه ۴۴ پروژه

موضوعی دلخواه یا یکی از موضوعات زیر را انتخاب کنید و با استفاده از گام‌های چرخه‌ی آمار، نتایج حاصل را در قالب یک گزارش در کلاس ارائه کنید.

بررسی ساعات روزانه‌ی حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی

نظرسنجی درباره‌ی تغییر قوانین حاکم بر کلاس یا مدرسه

نظرسنجی درباره‌ی کلاس درسی که می‌توانید پرسش‌های خود را آزادانه در آن مطرح کنید.

نظرسنجی درباره‌ی ساعات لازم برای تدریس ریاضی در کلاس دوازدهم انسانی

بررسی ساعت‌های مطالعه‌ی آزاد دانش‌آموزان و مقایسه‌ی آن بین دو گروه از دانش‌آموزان

بررسی فعالیت‌های فوق برنامه‌ی مورد علاقه‌ی دانش‌آموزان.

این پروژه پاسخ یگانه ندارد؛ نمونه‌ی طرح گزارش برای موضوع «ساعات روزانه‌ی حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی»:

1. بیان مسئله: «میانگین (و میانه‌ی) ساعات روزانه‌ی حضور دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم مدرسه‌ی ما در شبکه‌های اجتماعی در هفته‌ی جاری چقدر است؟» (جامعه: دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم؛ متغیر: ساعت حضور روزانه، کمّی نسبتی)
2. طرح و برنامه‌ریزی: انتخاب تصادفی نمونه‌ای از دانش‌آموزان (مثلاً با قرعه‌کشی یا جدول اعداد تصادفی از فهرست مدرسه)؛ اندازه‌گیری با ثبت روزانه‌ی ساعت یا گزارش زمان استفاده‌ی خود گوشی؛ پرسشنامه‌ی بی‌نام؛ تعیین اندازه‌ی نمونه با توجه به پراکندگی.
3. گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها: جمع‌آوری برگه‌ها، وارد کردن در رایانه‌ی جدول (مانند اکسل) و بررسی اشتباه‌ها (مثلاً ساعت بیش از ۲۴ در روز).
4. تحلیل: رسم نمودار جعبه‌ای یا میله‌ای؛ محاسبه‌ی میانگین و انحراف معیار (اگر داده‌ی دورافتاده نبود) یا میانه و دامنه‌ی میان‌چارکی (اگر داده‌ی دورافتاده بود).
5. بحث و نتیجه‌گیری: تفسیر نتایج، بیان محدودیت‌ها (فقط پایه‌ی دوازدهم همین مدرسه) و پیشنهاد (مثلاً مدیریت زمان استفاده).

گزارش خود را با نمودارها و جدول‌های لازم در کلاس ارائه دهید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی و آمار ۳ دوازدهم (انسانی) - فصل دوم

الگوهای خطی

فهرست

۱۶۵ صفحه ۴۶ · فعالیت — درس ۱ · مدل‌سازی ۸۵

۱۶۶ صفحه ۴۷ · فعالیت — درس ۱ · مدل‌سازی ۸۶

۱۶۷ صفحه ۴۸ · کار در کلاس — درس ۱ · مدل‌سازی ۸۷

۱۶۸ صفحه ۴۸ · کار در کلاس — درس ۱ · مدل‌سازی ۸۸

۱۶۹ صفحه ۵۰ · فعالیت — درس ۱ · مدل‌سازی (کاربردی دیگر از مجموعه‌ی اعداد طبیعی) ۸۹

۱۷۰ صفحه ۵۲ · فعالیت — درس ۱ · دنباله ۹۰

۱۷۱ صفحه ۵۴ · کار در کلاس — درس ۱ · دنباله ۹۱

۱۷۲ صفحه ۵۶ · کار در کلاس — درس ۱ · دنباله ۹۲

۱۷۳ صفحه ۵۷ · تمرین — درس ۱ · مدل‌سازی ۹۳

۱۷۴ صفحه ۵۷ · تمرین — درس ۱ · مدل‌سازی ۹۵

۱۷۵ صفحه ۵۸ · تمرین — درس ۱ · مدل‌سازی ۹۵

۱۷۶ صفحه ۵۸ · تمرین — درس ۱ · دنباله ۹۶

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷۷ صفحه ۵۸ · تمرین — درس ۱ · دنباله ۹۷

۱۷۸ صفحه ۵۸ · تمرین — درس ۱ · دنباله ۹۷

۱۷۹ صفحه ۵۹ · تمرین — درس ۱ · دنباله ۹۷

۱۸۰ صفحه ۵۹ · تمرین — درس ۱ · دنباله ۹۸

۱۸۱ صفحه ۵۹ · تمرین — درس ۱ · دنباله ۹۸

۱۸۲ صفحه ۵۹ · تمرین — درس ۱ · دنباله (محاسبهٔ جذر در تمدن بابل) ۹۹

۱۸۳ صفحه ۶۰ · تمرین — درس ۱ · دنباله ۱۰۰

۱۸۴ صفحه ۶۰ · تمرین — درس ۱ · دنباله ۱۰۰

۱۸۵ صفحه ۶۰ · بازی و ریاضی — درس ۱ · دنباله ۱۰۱

۱۸۶ صفحه ۶۱ · فعالیت — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۰۱

۱۸۷ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۰۴

۱۸۸ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۰۵

۱۸۹ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۰۵

۱۹۰ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۰۶

۱۹۱ صفحه ۶۶ · فعالیت — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۰۶

۱۹۲ صفحه ۶۷ · کار در کلاس — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۰۸

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۹۳ صفحه ۶۸ · فعالیت — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۰۹

۱۹۴ صفحه ۶۸ · کار در کلاس — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۱۰

۱۹۵ صفحه ۷۰ · کار در کلاس — درس ۲ · مجموع جملات دنبالهٔ حسابی ۱۱۰

۱۹۶ صفحه ۷۰ · کار در کلاس — درس ۲ · مجموع جملات دنبالهٔ حسابی ۱۱۱

۱۹۷ صفحه ۷۰ · کار در کلاس — درس ۲ · مجموع جملات دنبالهٔ حسابی ۱۱۱

۱۹۸ صفحه ۷۱ · تمرین — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۱۱

۱۹۹ صفحه ۷۱ · تمرین — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۱۲

۲۰۰ صفحه ۷۱ · تمرین — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۱۲

۲۰۱ صفحه ۷۱ · تمرین — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۱۲

۲۰۲ صفحه ۷۱ · تمرین — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۱۳

۲۰۳ صفحه ۷۱ · تمرین — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۱۳

۲۰۴ صفحه ۷۱ · تمرین — درس ۲ · دنباله‌های حسابی ۱۱۴

۲۰۵ صفحه ۷۱ · تمرین — درس ۲ · مجموع جملات دنبالهٔ حسابی ۱۱۴

۲۰۶ صفحه ۷۲ · تمرین — درس ۲ · مجموع جملات دنبالهٔ حسابی ۱۱۴

۲۰۷ صفحه ۷۲ · تمرین — درس ۲ · مجموع جملات دنبالهٔ حسابی ۱۱۵

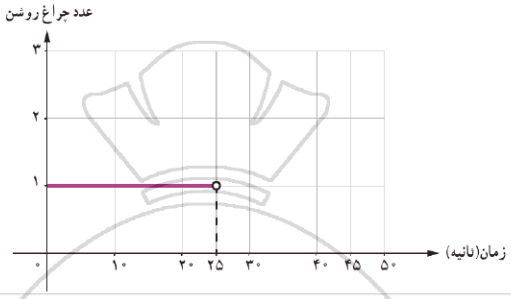
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۶۵ صفحه ۴۶ فعالیت

۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه‌ی شروع به‌کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیه‌ی اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

اگر چراغ روشنِ سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد و f(t) عدد چراغ روشن در ثانیه‌ی tام باشد، با توجه به فرض ضابطه، دامنه و برد تابع و نمودار را کامل کنید.

$$f(t)=\begin{cases}۱ & ۰\le t<۲۵\\ \cdots & ۲۵\le t<۳۰\\ ۳ & \cdots\le t<\cdots\end{cases} \qquad D_f=\{t\in\mathbb{R}\mid \cdots\le t<\cdots\},\ R_f=\{\ ,\ ,\ \}$$



چراغ ابتدا ۲۵ ثانیه سبز است (۰ تا ۲۵)، سپس ۵ ثانیه زرد (۲۵ تا ۳۰) و بعد ۱۵ ثانیه قرمز (۳۰ تا ۴۵). در هر بازه عدد چراغ روشن ثابت است، پس تابع چندضابطه‌ای است:

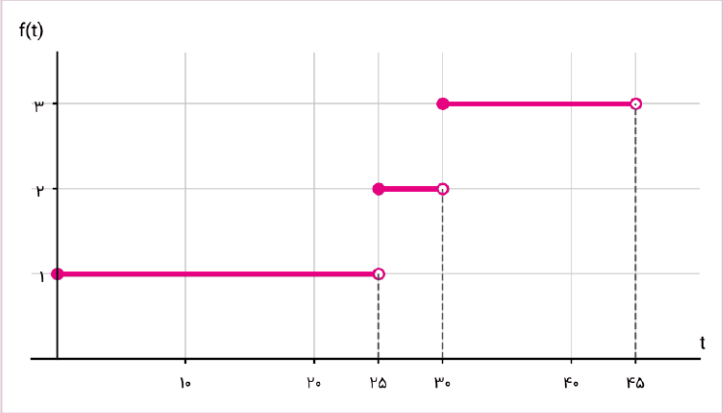
- $f(t)=1 \quad , \quad 0\le t<25$
- $f(t)=2 \quad , \quad 25\le t<30$
- $f(t)=3 \quad , \quad 30\le t<45$

دامنه همه‌ی لحظه‌های ۴۵ ثانیه‌ی اول است و چراغ فقط یکی از سه عدد ۱، ۲ یا ۳ را نشان می‌دهد:

- $D_f=\{t\in\mathbb{R}\mid 0\le t<45\}$
- $R_f=\{1,\ 2,\ 3\}$

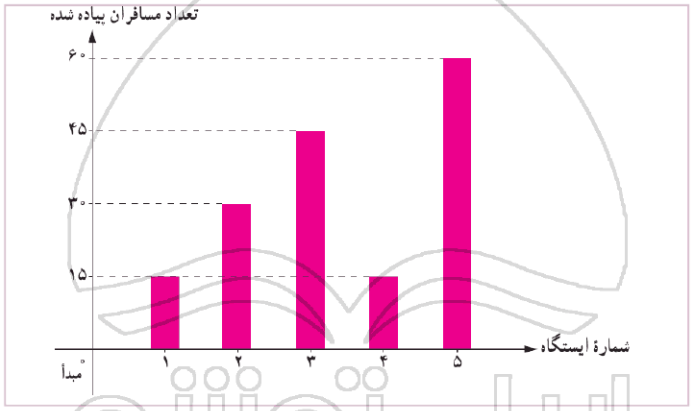
نمودار: سه پاره‌خط افقی در ارتفاع‌های ۱ و ۲ و ۳ است. ابتدای هر پاره‌خط توپر (چون ≤) و انتهای آن توخالی (چون <) رسم می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

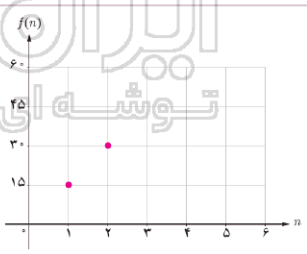


۱۶۶ صفحه ۴۷ **فعالیت**

۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران پیاده‌شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر n، شمارهٔ ایستگاه و f(n) تعداد مسافران پیاده‌شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰	.....	.....	.....



$$f(n)=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots & ۱\le n\le ۳ \quad n\in\mathbb{N} \\ ۱۵+۴۵(n-۴) & ۴\le n\le ۵ \end{cases}$$

$D_f=\{n\in\mathbb{N}|\cdots\le n\le\cdots\}$ $\qquad R_f=\{\ ,\ ,\ ,\ \}$

از ارتفاع میله‌ها می‌خوانیم: ایستگاه‌های ۱ تا ۵ به ترتیب ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۱۵ و ۶۰ مسافر دارند.

n	۱	۲	۳	۴	۵
f(n)	۱۵	۳۰	۴۵	۱۵	۶۰

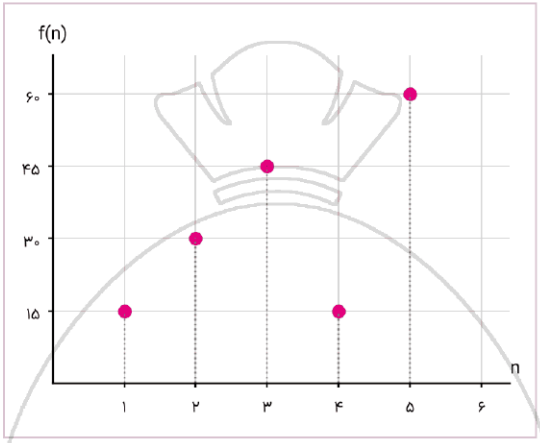
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

برای $1 \le n \le 3$ مقدارها ۱۵ برابر n هستند (۱۵، ۳۰، ۴۵). برای $4 \le n \le 5$ ضابطه‌ی داده‌شده را آزمایش می‌کنیم:

$f(4) = 15 + 45\times 0 = 15$ و $f(5) = 15 + 45\times 1 = 60$ که با نمودار می‌خواند. پس:

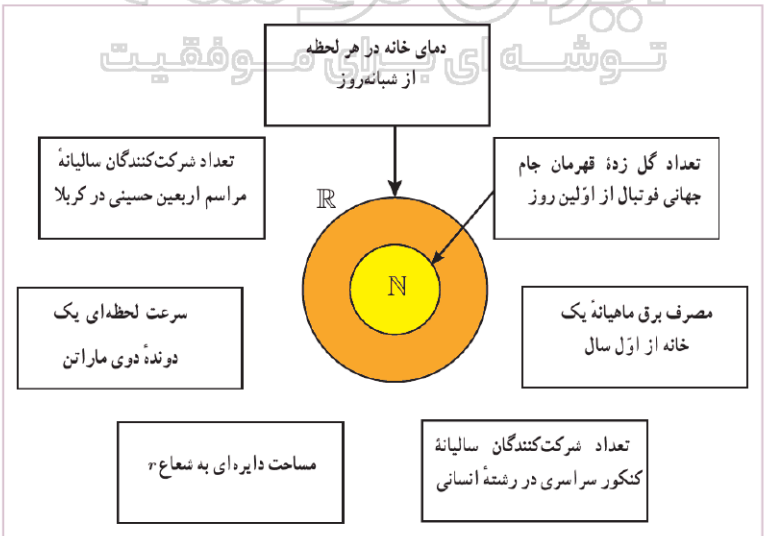
- $f(n) = 15n \quad , \quad 1 \le n \le 3$
- $f(n) = 15 + 45(n-4) \quad , \quad 4 \le n \le 5$
- $D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le 5\}$
- $R_f = \{15,\ 30,\ 45,\ 60\}$

نمودار تابع، پنج نقطه‌ی جدا از هم است (چون دامنه زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی است، نقاط را به هم وصل نمی‌کنیم):



۱۶۷ صفحه ۴۸ کار در کلاس

۱. اگر f تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، مانند نمونه، دامنه‌ی هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



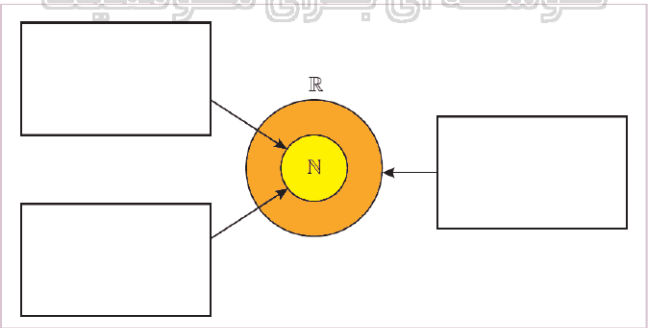
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

اگر پاسخ مسئله به زمان یا مرحله‌ی شمارش‌شده (روز اول، دوم، ... ؛ ماه اول، دوم، ... ؛ سال اول، دوم، ...) وابسته باشد دامنه زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) است، و اگر در هر لحظه یا به ازای هر مقدار حقیقی قابل بررسی باشد دامنه زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است.

مسئله	دامنه	دلیل
دمای خانه در هر لحظه از شبانه‌روز	$\mathbb{R}$	در هر لحظه‌ی دلخواه می‌توان دما را اندازه گرفت
تعداد شرکت‌کنندگان سالیانه‌ی مراسم اربعین حسینی در کربلا	$\mathbb{N}$	سال اول، دوم، ... (شماره‌ی سال)
تعداد گل زده‌ی قهرمان جام جهانی فوتبال از اولین روز (نمونه)	$\mathbb{N}$	روز اول، دوم، ...
سرعت لحظه‌ای یک دونده‌ی دوی ماراتن	$\mathbb{R}$	سرعت در هر لحظه‌ی دلخواه تعریف می‌شود
مصرف برق ماهیانه‌ی یک خانه از اول سال	$\mathbb{N}$	ماه اول، دوم، ...
تعداد شرکت‌کنندگان سالیانه‌ی کنکور سراسری در رشته‌ی انسانی	$\mathbb{N}$	سال اول، دوم، ...
مساحت دایره‌ای به شعاع r	$\mathbb{R}$	شعاع هر عدد حقیقی مثبتی می‌تواند باشد

۱۶۸ صفحه ۴۸ کار در کلاس

۲. داخل هر کدام از مستطیل‌های زیر مسئله‌ای را بنویسید که دامنه‌ی مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد.



در شکل، پیکان دو مستطیل سمت چپ به مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و پیکان مستطیل سمت راست به مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ می‌رسد. نمونه‌ی مسئله‌ها (پاسخ‌های دیگر هم درست است اگر نوع دامنه با شکل بخواند):

- مستطیل بالاچپ ($\mathbb{N}$): میزان فروش یک مغازه در هر ماه از سال (ماه اول، دوم، ...).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

- مستطیل پایین‌چپ ($\mathbb{N}$): تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه در هر سال تحصیلی.
- مستطیل سمت راست ($\mathbb{R}$): ارتفاع توپی که رها شده است، در هر لحظه‌ی دلخواه.

۱۶۹ صفحه ۵۰ **فعالیت**

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی‌ماه ۱۳۹۶ به‌طور تقریبی نشان می‌دهد:

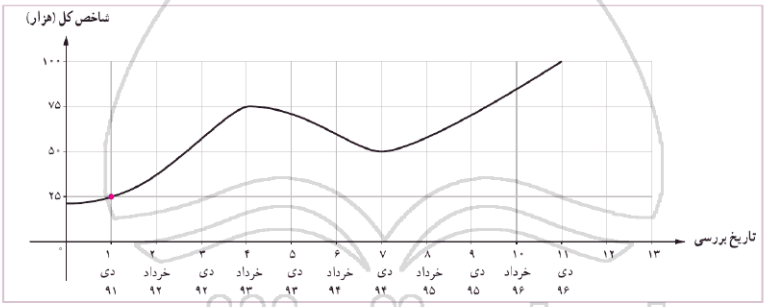
الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام در تاریخ‌های نوشته‌شده معلوم شده است. در سری زمانی بالا، شاخص کل در چه فاصله‌ای روند کاهشی و در چه فاصله‌ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟

ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و ... و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه‌ی میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی‌ماه ۱۳۹۴ تا دی‌ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک اعداد زیر تقریب بهتری برای f(۱۳) است؟ چرا؟

۱) ۸۵,۰۰۰ ۲) ۱۰۵,۰۰۰ ۳) ۱۱۲,۵۰۰ ۴) ۱۰۰,۰۰۰ ۵) ۱۲۵,۰۰۰

د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به‌دست آمده برای دی‌ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.



الف) نقطه‌ی اول روی محور (n = ۱) مقدار ۲۵ هزار را نشان می‌دهد و هر عدد صحیح روی محور افقی یک تاریخ بررسی است (دی ۹۱، خرداد ۹۲، دی ۹۲، ...، دی ۹۶). از روی نمودار:

- از n = ۱ تا n = ۴ (دی ۹۱ تا خرداد ۹۳) و نیز از n = ۷ تا n = ۱۱ (دی ۹۴ تا دی ۹۶): روند افزایشی، چون با بیشتر شدن n، نمودار بالاتر می‌رود.
- از n = ۴ تا n = ۷ (خرداد ۹۳ تا دی ۹۴): روند کاهشی، چون با بیشتر شدن n، نمودار پایین می‌آید.

ب) مقدار نمودار را در هر عدد n می‌خوانیم (مقدارها تقریبی‌اند):

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
f(n) (هزار)	۲۵	۳۷	۵۷	۷۵	۷۰	۶۰	۵۰	۵۸	۷۰	۸۵	۱۰۰

ج) از n = ۷ تا n = ۱۱ شاخص از ۵۰ هزار به ۱۰۰ هزار رسیده است؛ یعنی در ۴ گام ۵۰ هزار افزایش، میانگین افزایش هر گام حدود ۱۲٫۵ هزار. اگر رفتار همین‌طور ادامه یابد، f(۱۲) ≈ ۱۱۲,۵۰۰ و f(۱۳) ≈ ۱۱۲,۵۰۰ + ۱۲,۵۰۰ = ۱۲۵,۰۰۰. پس گزینه‌ی **۵** (۱۲۵,۰۰۰) تقریب بهتری است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

د) این قسمت به مراجعه به پایگاه اینترنتی بورس نیاز دارد. شاخص کل در دی ۱۳۹۷ بسیار بیشتر از ۱۲۵ هزار بود؛ یعنی رشد شاخص پس از دی ۹۶ از روند خطی گام‌های قبل تندتر شد و تقریب بالا مقدار واقعی را کمتر از حد برآورد می‌کند. (مقدار دقیق را از پایگاه گفته‌شده بخوانید.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۰ صفحه ۵۲ فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث زیر، اعداد هر سطر را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

اگر n شمارهٔ هر سطر و a_n (جملهٔ nام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

الف) با محاسبهٔ مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

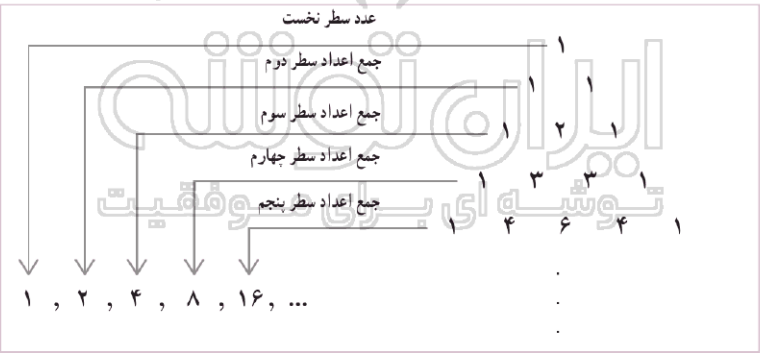
ب) بر اساس رابطهٔ میان a_1 و a_2 و رابطهٔ میان a_2 و a_3 و نیز a_3 و a_4 می‌توان مقادیر a_4 و a_5 را مشخص کرد؟ چگونه؟

ج) آیا به کمک قسمت ب، می‌توانیم رابطهٔ میان هر دو جملهٔ متوالی، یعنی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به‌دست می‌آید؟ چرا؟

د) رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطهٔ بازگشتی می‌نامیم. برای دنبالهٔ اعداد بالا رابطه‌ای بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنبالهٔ بالا را مشخص کند.

هـ) رابطه‌ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

و) رابطهٔ بازگشتی به‌دست‌آمده در قسمت «د» چه تفاوتی با ضابطهٔ به‌دست‌آمده از قسمت «ج» دارد؟



الف) سطر ششم: $1, 5, 10, 10, 5, 1$ با مجموع $a_6 = 32$؛ سطر هفتم: $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$ با مجموع $a_7 = 64$.

ب) دنباله‌ی مجموع‌ها $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ است. هر جمله دو برابر جمله‌ی قبل است: $a_2 = 2a_1$ و $a_3 = 2a_2$. پس بله: $a_4 = 2a_3 = 8$ و $a_5 = 2a_4 = 16$ (که با سطرهای چهارم و پنجم مثلث می‌خواند).

ج) بله، رابطه‌ی میان هر دو جمله‌ی متوالی $a_{n+1} = 2a_n$ است. ولی این رابطه فقط این دنباله را نمی‌دهد: مثلاً با $a_1 = 3$ دنباله‌ی $3, 6, 12, 24, \ldots$ هم از آن به‌دست می‌آید؛ چون رابطه به جمله‌ی اول بستگی ندارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

د) رابطه‌ی بازگشتی دنباله‌ی بالا: $a_1 = 1$ ، $a_{n+1} = 2a_n$ (با مشخص کردن جمله‌ی اول، فقط همین دنباله ساخته می‌شود).

هـ) $a_n = 2^{n-1}$ ؛ زیرا $a_1 = 2^0 = 1$ ، $a_2 = 2^1 = 2$ ، $a_3 = 2^2 = 4$ و ... .

و) در رابطه‌ی بازگشتی برای رسیدن به یک جمله مثل جمله‌ی دهم باید جمله‌های قبلی را یکی‌یکی حساب کنیم (از a_9 ، و آن هم از a_8 و ...). اما در ضابطه‌ی $a_n = 2^{n-1}$ هر جمله مستقیم و فقط با دانستن n به‌دست می‌آید؛ مثلاً $a_{10} = 2^9 = 512$.

۱۷۱ صفحه ۵۴ **کار در کلاس**

با توجه به ضابطهٔ دنبالهٔ داده‌شده، جاهای خالی را پر کنید.

پنج جملهٔ اول دنباله	جملهٔ nاُم
۱ , ۴ , ۷ , ۱۰ , ۱۳	$a_n = ۳n - ۲$
۰ , ۳ , ۸ , ... , ۲۴	$b_n = n^۲ - ۱$
..... , $\frac{۱}{۲}$, ... , ... , ...	$c_n = \frac{۱}{n}$
$-۱ , \frac{۱}{۲} , -\frac{۱}{۳}$, ... , ...	$d_n = \frac{(-۱)^n}{n}$

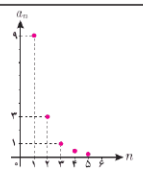
در هر ضابطه به جای n به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌گذاریم:

امn جمله‌ی	پنج جمله‌ی اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	۱ ، ۴ ، ۷ ، ۱۰ ، ۱۳
$b_n = n^2 - 1$	۰ ، ۳ ، ۸ ، ۱۵ ، ۲۴
$c_n = \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$

مثلاً برای b_n : $b_4 = 4^2 - 1 = 15$ ؛ و برای d_n : $d_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$ و $d_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

جدول زیر را کامل کنید.

نمودار دنباله	ضابطهٔ دنباله	فرمول بازگشتی	جملات دنباله
	$a_n=3^{3-n}$	$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$ $a_1=9$	$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$
		$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$ $a_1=1$	
	$a_n=2n+1$		
		$a_{n+1}=a_n+n$ $a_1=1$	
			$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots$
			$-1, -4, -9, -16, \ldots$
		$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $a_1=a_2=1$*	

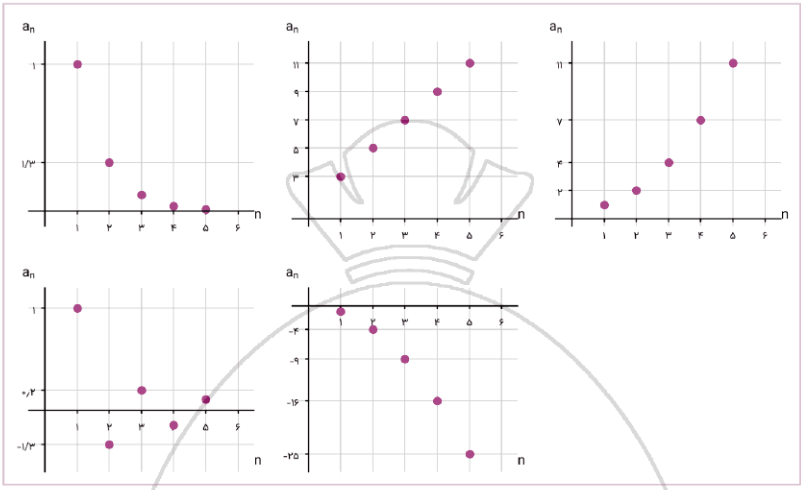
خانه‌های خاکستری نیاز به پر کردن ندارند. هر ردیف را از اطلاعات موجود کامل می‌کنیم:

ردیف	جملات دنباله	فرمول بازگشتی	ضابطه‌ی دنباله
۲	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$	$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n,\ a_1=1$	$a_n=(\frac{1}{3})^{n-1}=3^{1-n}$
۳	$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$	$a_{n+1}=a_n+2,\ a_1=3$	$a_n=2n+1$
۴	$1, 2, 4, 7, 11, \ldots$	$a_{n+1}=a_n+n,\ a_1=1$	—
۵	$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots$	—	$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
۶	$-1, -4, -9, -16, \ldots$	—	$a_n=-n^2$
۷	$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$	$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\ a_1=a_2=1$	—

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

توضیح: ردیف ۲: هر جمله $\frac{1}{3}$ جمله‌ی قبل است (۱ ، ۱/۳ ، ۱/۹ ، ...) و چون $a_1 = 1 = (\frac{1}{3})^0$ ضابطه $(\frac{1}{3})^{n-1}$ است. ردیف ۳: ضابطه، $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ \ldots$ را می‌دهد و هر جمله ۲ واحد بیشتر از قبلی است. ردیف ۴: $a_2 = 1 + 1 = 2,\ a_3 = 2 + 2 = 4,\ a_4 = 4 + 3 = 7,\ a_5 = 7 + 4 = 11$. ردیف ۵: مخرج‌ها اعداد فرد $2n - 1$ و علامت‌ها یکی در میان‌اند (n فرد مثبت). ردیف ۶: $\ldots, -(3^2), -(2^2), -(1^2)$. ردیف ۷: دنباله‌ی فیبوناچی؛ هر جمله مجموع دو جمله‌ی قبل است.

نمودار ردیف‌های ۲ تا ۶ (نقاط جدا از هم، به ازای $n = 1$ تا ۵) به ترتیب زیر است (سطر بالا از چپ به راست: ردیف ۲، ۳، ۴ ؛ سطر پایین: ردیف ۵ و ۶):



۱۷۳ صفحه ۵۷ تمرین

۱. برای محاسبهٔ قبض آب (آب‌بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقهٔ مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطهٔ زیر، آب‌بها محاسبه می‌شود: هزینهٔ هر متر مکعب با توجه به طبقهٔ مصرف × میانگین مصرف = آب‌بها

الف) نمودار «طبقهٔ مصرف ــ آب‌بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی در تهران در یک ماه $20/49\ m^3$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب‌بها را مشخص می‌کند؟

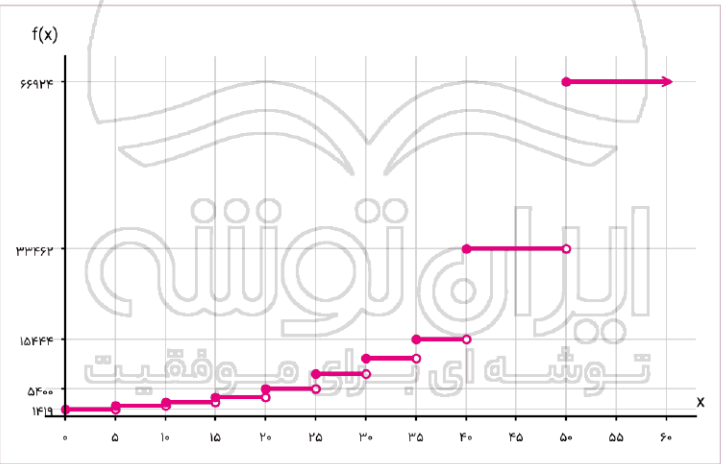
هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۸/۴۹۶	$25 \le x < 30$
۱۱/۵۸۰	$30 \le x < 35$
۱۵/۴۴۴	$35 \le x < 40$
۳۳/۴۶۲	$40 \le x < 50$
۶۶/۹۲۴	$x \ge 50$

هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۱/۴۱۹	$0 \le x < 5$
۲/۱۲۳	$5 \le x < 10$
۲/۸۲۷	$10 \le x < 15$
۳/۷۰۳	$15 \le x < 20$
۵/۴۰۰	$20 \le x < 25$

ایران توشه
irantooshe.ir

الف) مقدار هزینه برای همه‌ی x های هر طبقه ثابت است؛ پس تابع پلکانی (چندضابطه‌ای) است. اگر x میانگین مصرف (متر مکعب) و f(x) هزینه‌ی هر متر مکعب (ریال) باشد:

- $f(x) = 1419 \ , \ 0 \le x < 5$
- $f(x) = 2123 \ , \ 5 \le x < 10$
- $f(x) = 2827 \ , \ 10 \le x < 15$
- $f(x) = 3703 \ , \ 15 \le x < 20$
- $f(x) = 5400 \ , \ 20 \le x < 25$
- $f(x) = 8496 \ , \ 25 \le x < 30$
- $f(x) = 11580 \ , \ 30 \le x < 35$
- $f(x) = 15444 \ , \ 35 \le x < 40$
- $f(x) = 33462 \ , \ 40 \le x < 50$
- $f(x) = 66924 \ , \ x \ge 50$
- $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$
- $R_f = \{1419, 2123, 2827, 3703, 5400, 8496, 11580, 15444, 33462, 66924\}$



ب) برای میانگین مصرف x، سطح زیر نمودار از ۰ تا x مستطیلی به عرض x و ارتفاع f(x) است. مساحت آن برابر $x \cdot f(x)$، یعنی همان آب‌بها است. پس تابع آب‌بها $g(x) = x \cdot f(x)$ است (مثلاً $g(x) = 1419x$ برای $0 \le x < 5$ و $g(x) = 5400x$ برای $20 \le x < 25$).

برای $x = 20.49$: چون $20 \le 20.49 < 25$ ، $f(20.49) = 5400$ و آب‌بها $g(20.49) = 20.49 \times 5400 = 110646$ ریال است.

۱۷۴ صفحه ۵۷ تمرین

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هرکدام از مسائل زیر باشد، دامنهٔ هرکدام از آنها را مشخص کنید. (هر مورد: $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{R}$)

الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر

ب) میزان استفادهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت

ج) حجم مکعبی به ضلع x

د) تغییرات سطح دریاچهٔ ارومیه در بیست سال اخیر

هـ) میزان مصرف ماهیانهٔ آب در یک واحد مسکونی

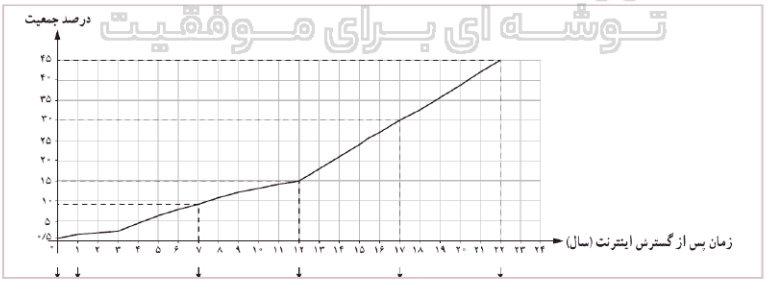
- **الف)** $\mathbb{R}$؛ ارتفاع هر مقدار حقیقی بین ۰ تا ۱۵ کیلومتر می‌تواند باشد.
- **ب)** $\mathbb{N}$؛ ساعت اول، دوم، ... (شماره‌ی ساعت).
- **ج)** $\mathbb{R}$؛ طول ضلع هر عدد حقیقی مثبت می‌تواند باشد.
- **د)** $\mathbb{N}$؛ سال اول، دوم، ... (شماره‌ی سال، ۲۰ سال).
- **هـ)** $\mathbb{N}$؛ ماه اول، دوم، ... (شماره‌ی ماه).

۱۷۵ صفحه ۵۸ تمرین

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند.

الف) اگر f(n) درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده‌شده مقادیر f(۱) و f(۷) را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟



الف) از نمودار: $f(1) \approx 1$ و $f(7) \approx 9$ (مقدارها تقریبی‌اند). معنا: یک سال پس از گسترش اینترنت (۱۹۹۴) حدود ۱٪ جمعیت جهان و ۷ سال پس از آن (سال ۲۰۰۰) حدود ۹٪ جمعیت جهان از اینترنت استفاده می‌کردند.

توشه ای برای موفقیت

ب) سال ۲۰۰۵ برابر $n = 12$ و سال ۲۰۱۵ برابر $n = 22$ است؛ از نمودار $f(12) = 15$ و $f(22) = 45$. شیب خط گذرنده از دو نقطه:

$$\frac{45 - 15}{22 - 12} = 3$$

ضابطه: $f(n) = 3n - 21 \Rightarrow f(n) - 15 = 3(n - 12)$. سال ۲۰۲۰ یعنی $n = 27$ (۲۰۲۰ − ۱۹۹۳):

$$f(27) = 3 \times 27 - 21 = 60$$

طبق این مدل خطی، در سال ۲۰۲۰ حدود **۶۰ درصد** جمعیت جهان از اینترنت استفاده خواهند کرد.

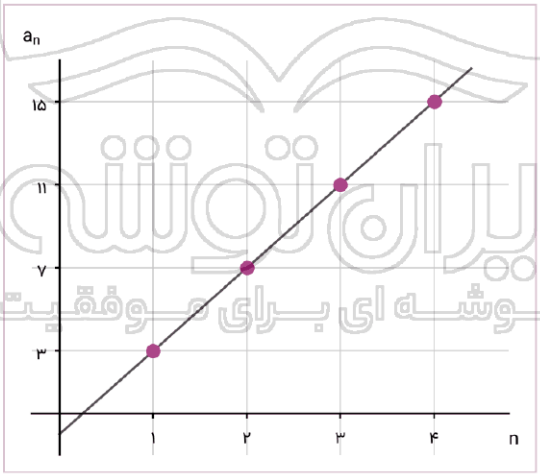
۱۷۶ صفحه ۵۸ تمرین

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنهٔ دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطهٔ بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطهٔ بازگشتی دنباله دارد؟

الف) دامنه‌ی دنباله $\mathbb{N}$ است؛ پس به جای x فقط اعداد طبیعی می‌گذاریم: $y(1) = 3,\ y(2) = 7,\ y(3) = 11,\ y(4) = 15,\ \ldots$. نمودار تابع یک خط راست است و نمودار دنباله فقط نقطه‌هایی از این خط است که طولشان عدد طبیعی است:



ب) نمایش تابعی: $a_n = 4n - 1$ ؛ رابطه‌ی بازگشتی: $a_1 = 3\ ,\ a_{n+1} = a_n + 4$ (زیرا $a_{n+1} - a_n = 4(n + 1) - 1 - (4n - 1) = 4$).

شیب خط (۴) همان عددی است که در رابطه‌ی بازگشتی در هر مرحله به جمله‌ی قبل اضافه می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷۷ صفحه ۵۸ تمرین

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ، $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت‌های خواسته‌شده را به‌دست آورید.

الف) $a_2 + b_1$ **ب)** $d_1 - c_2$ **ج)** $d_2 + b_4$

الف) $a_2 = 3^2 = 9$ و $b_1 = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ؛ پس $a_2 + b_1 = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$.

ب) $c_2 = \frac{1}{3\times 2 - 1} = \frac{1}{5}$ و $d_1 = 1^2 - 1 = 0$ ؛ پس $c_2 - d_1 = \frac{1}{5}$.

ج) $b_4 = (-\frac{1}{2})^5 = -\frac{1}{32}$ و $d_2 = 2^2 - 1 = 3$ ؛ پس $b_4 + d_2 = 3 - \frac{1}{32} = \frac{95}{32}$.

۱۷۸ صفحه ۵۸ تمرین

۶. جملهٔ پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = (1/3)\, a_n$ ، $a_1 = ۲-$ **ب)** $a_{n+1} = (a_n + 1)/1$ ، $a_1 = ۱$

ج) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = ۱$ **د)** $a_{n+1} = a_n + (-۱)^n$ ، $a_1 = ۱$

الف) $a_5 = -\frac{2}{81}$, $a_4 = -\frac{2}{27}$, $a_3 = -\frac{2}{9}$, $a_2 = -\frac{2}{3}$ ؛ پس جمله‌ی پنجم $-\frac{2}{81}$ است.

ب) $a_5 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$, $a_4 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

ج) $a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 3$ و $a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5$.

د) $a_5 = 0 + (-1)^4 = 1$, $a_4 = 1 + (-1)^3 = 0$, $a_3 = 0 + (-1)^2 = 1$, $a_2 = 1 + (-1)^1 = 0$ ؛ جمله‌ی پنجم ۱ است.

۱۷۹ صفحه ۵۹ تمرین

۷. جدول زیر را کامل کنید.

دنبالهٔ دو ضابطه‌ای	ضابطهٔ دنباله	رابطهٔ بازگشتی	جملات دنباله
✕			۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...
	✕		۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...
	✕	✕	۱, $\frac{۱}{۲}$, ۳, $\frac{۱}{۴}$, ۵, $\frac{۱}{۶}$, ...
✕		✕	$\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}$, ...

خانه‌های خاکستری (ضربدردار) پر نمی‌شوند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

جملات دنباله	رابطه‌ی بازگشتی	ضابطه‌ی دنباله	دنباله‌ی دو ضابطه‌ای
$5, 8, 11, 14, 17, \ldots$	$a_{n+1} = a_n + 3,\ a_1 = 5$	$a_n = 3n + 2$	—
$4, 1, 4, 1, 4, 1, \ldots$	$a_{n+1} = 5 - a_n,\ a_1 = 4$	—	$a_n = 4$ (n odd), $a_n = 1$ (n even)
$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$	—	—	$a_n = n$ (n odd), $a_n = \frac{1}{n}$ (n even)
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$	—	$a_n = \frac{n}{n+1}$	—

توضیح: ردیف ۱ هر بار ۳ واحد اضافه می‌شود: $a_n = 5 + 3(n - 1) = 3n + 2$. ردیف ۲ بین ۴ و ۱ برمی‌گردد و $a_{n+1} = 5 - a_n$ (در جمله‌های فرد ۴ و در جمله‌های زوج ۱ است). پس $5 = 1 + 4$ ؛ ردیف ۳: جمله‌های فرد خودِ n و جمله‌های زوج $\frac{1}{n}$ هستند. ردیف ۴: صورت n و مخرج یکی بیشتر یعنی $n + 1$ است.

۱۸۰ صفحه ۵۹ تمرین

۸. شش جملهٔ اوّل دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1} = a_n (1/2)$ برای n زوج و $a_{n+1} = 3 a_n + 1$ برای n فرد را برای هرکدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$ ب) $a_1 = 25$

قاعده بر اساس زوج یا فرد بودن شماره‌ی جمله (n) است: n فرد: $a_{n+1} = 3a_n + 1$ ؛ n زوج: $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.

الف) $a_1 = 11$ ؛ $a_2 = 3 \times 11 + 1 = 34$ (n=1 فرد) ؛ $a_3 = \frac{34}{2} = 17$ (n=2 زوج) ؛ $a_4 = 3 \times 17 + 1 = 52$ ؛ $a_5 = \frac{52}{2} = 26$ ؛ $a_6 = 3 \times 26 + 1 = 79$. شش جمله: ۱۱ ، ۳۴ ، ۱۷ ، ۵۲ ، ۲۶ ، ۷۹

ب) $a_1 = 25$ ؛ $a_2 = 3 \times 25 + 1 = 76$ ؛ $a_3 = \frac{76}{2} = 38$ ؛ $a_4 = 3 \times 38 + 1 = 115$ ؛ $a_5 = \frac{115}{2} = 57.5$ ؛ $a_6 = 3 \times 57.5 + 1 = 173.5$. شش جمله: ۲۵ ، ۷۶ ، ۳۸ ، ۱۱۵ ، ۵۷٫۵ ، ۱۷۳٫۵

۱۸۱ صفحه ۵۹ تمرین

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $n \le 5$ رسم کنید.

الف) $a_n = -(1/2)^n$ ب) $a_n = 3(1/2)^n + n$

ج) $a_{n+1} = a_n / 1$ ، $a_1 = 2$ د) $a_n = 1$ (n زوج) ، $a_n = n/1$ (n فرد)

ابتدا جمله‌های اول تا پنجم را حساب می‌کنیم و سپس نقطه‌های (n, a_n) را رسم می‌کنیم:

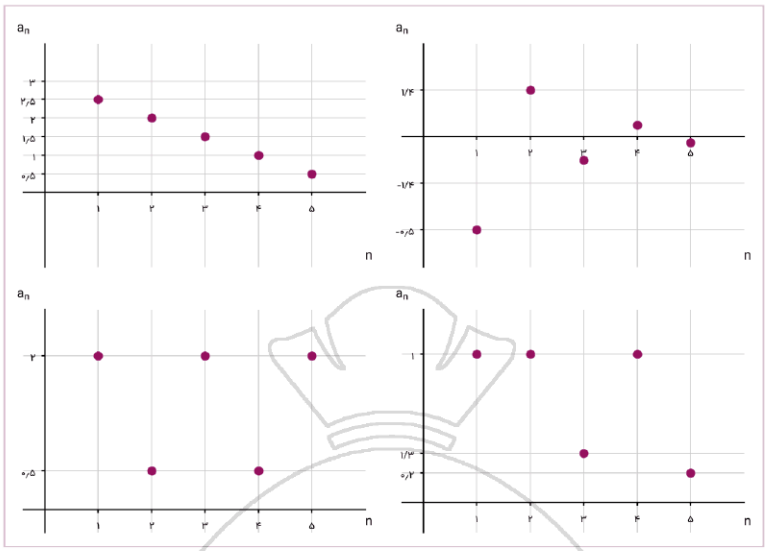
- الف) $2.5,\ 2,\ 1.5,\ 1,\ 0.5$

ب) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$

ج) $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$

د) $1, \frac{1}{5}, 1, \frac{1}{3}, 1, 1$

نمودارها (سطر بالا از چپ به راست: الف و ب؛ سطر پایین از چپ به راست: ج و د):



۱۸۲ صفحه ۵۹ **تمرین**

۱۰. محاسبهٔ جذر اعداد در تمدن بابل ــ با نوشتن جملات دنبالهٔ بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد k یعنی $\sqrt{k}$ نزدیک شویم.

$a_{n+1} = (1/2)(a_n + k/a_n)$ ، $a_1 = k$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است. به کمک دنبالهٔ بازگشتی بالا، اگر a_3 را تقریبی برای $\sqrt{k}$ در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

الف) $k = 2$: $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{2}) = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}) = \frac{17}{12} \approx 1.417$ ؛ پس $\sqrt{2} \approx 1.417$ (مقدار واقعی ۱٫۴۱۴...).

ب) $k = 3$: $a_1 = 3,\ a_2 = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2,\ a_3 = \frac{1}{2}(2 + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4} = 1.75$ ؛ پس $\sqrt{3} \approx 1.75$ (مقدار واقعی ۱٫۷۳۲...).

ج) $k = 5$: $a_1 = 5,\ a_2 = \frac{1}{2}(5 + 1) = 3,\ a_3 = \frac{1}{2}(3 + \frac{5}{3}) = \frac{7}{3} \approx 2.33$ ؛ پس $\sqrt{5} \approx 2.33$ (مقدار واقعی ۲٫۲۳۶...).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مزیت: بله؛ این روش فقط از چهار عمل اصلی (جمع، تقسیم و ضرب در ½) استفاده می‌کند و بدون ماشین حساب هم با دست قابل انجام است. هرچه جمله‌های بیشتری بنویسیم، تقریب دقیق‌تر می‌شود. (ماشین حساب در حالت کلی سریع‌تر جذر را می‌دهد، ولی خودش هم برای محاسبه‌ی جذر از روش‌هایی مثل همین استفاده می‌کند.)

۱۸۳ صفحه ۶۰ تمرین

۱۱. جملات دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ ، $a_1 = 1$ رأس کدام‌یک از الگوهای زیر را مشخص می‌کنند؟



جمله‌های دنباله: $a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 2 = 3,\ a_3 = 3 + 3 = 6,\ a_4 = 6 + 4 = 10,\ \ldots$

الگوی (الف): تعداد رأس‌ها (نقطه‌های صورتی) ۱ ، ۳ ، ۶ است (نقطه، مثلث با ۳ رأس، مثلث با ۶ نقطه که ۳ نقطه‌ی میانی هم دارد). الگوی (ب): ۱ ، ۴ ، ۹ (۹ نقطه در شکل سوم) که با دنباله‌ی ۱ ، ۳ ، ۶ نمی‌خواند.

پس دنباله، تعداد رأس‌های الگوی **(الف)** (عددهای مثلثی) را مشخص می‌کند.

۱۸۴ صفحه ۶۰ تمرین

۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پس‌ماندهای صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، ۲۵۰ تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط‌زیست دریاچه سالیانه ۱۰٪ فاضلاب صنعتی را به‌صورت خنثی و بی‌اثر می‌کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به ۱۵ تن در سال کاهش داده است.

اگر $P_1 = 250$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطهٔ بازگشتی، میزان مواد آلودهٔ صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

در هر سال ۱۰٪ آلودگی از بین می‌رود (۹۰٪ می‌ماند) و ۱۵ تن آلودگی تازه وارد می‌شود:

$$P_{n+1} = 0.9\,P_n + 15 \quad , \quad P_1 = 250$$

چون P_1 آلودگی فعلی (سال صفر) است، بعد از دو سال P_3 و بعد از پنج سال P_6 را می‌خواهیم:

$$P_2 = 0.9 \times 250 + 15 = 240 \ ؛\ P_3 = 0.9 \times 240 + 15 = 231 \ ؛\ P_4 = 0.9 \times 231 + 15 = 222.9$$

$$P_5 = 0.9 \times 222.9 + 15 = 215.61 \ ؛\ P_6 = 0.9 \times 215.61 + 15 = 209.049$$

بعد از دو سال ۲۳۱ تن و بعد از پنج سال حدود ۲۰۹٫۰۵ تن مواد آلوده‌ی صنعتی در دریاچه باقی می‌ماند.

۱۸۵ صفحه ۶۰ بازی و ریاضی

آیا می‌توانید ده جملهٔ اوّل دنبالهٔ زیر را مشخص کنید؟ $a_1 = a_2 = 1$ ، $a_n = a_{n-a_{n-1}} + a_{n-a_{n-2}}$

هر جمله را از دو جمله‌ی قبل ولی با اندیس‌های جابه‌جاشده می‌سازیم:

- $a_3 = a_{3-a_2} + a_{3-a_1} = a_2 + a_2 = 2$
- $a_4 = a_{4-a_3} + a_{4-a_2} = a_2 + a_3 = 3$
- $a_5 = a_{5-a_4} + a_{5-a_3} = a_2 + a_3 = 3$
- $a_6 = a_{6-a_5} + a_{6-a_4} = a_3 + a_3 = 4$
- $a_7 = a_{7-a_6} + a_{7-a_5} = a_3 + a_4 = 5$
- $a_8 = a_{8-a_7} + a_{8-a_6} = a_3 + a_4 = 5$
- $a_9 = a_{9-a_8} + a_{9-a_7} = a_4 + a_4 = 6$
- $a_{10} = a_{10-a_9} + a_{10-a_8} = a_4 + a_5 = 6$

ده جمله‌ی اول: 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6

۱۸۶ صفحه ۶۱ فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان ــ زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طبس حرکت می‌کند.

الف) ضابطهٔ تابع و دامنه و برد آن را به‌دست آورید.

ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی‌شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.

ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

د) جدول ۱ را به کمک نقشهٔ داده‌شده کامل کنید.

هـ) با فرض اینکه a_n مسافت طی‌شدهٔ قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

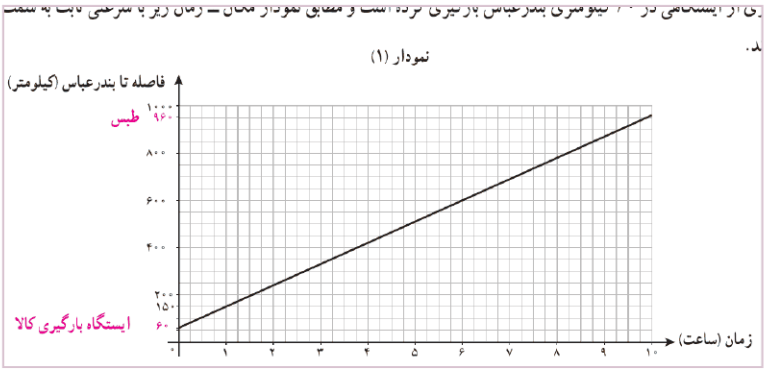
و) با مقایسهٔ جدول‌های ۱ و ۲، کدام ایستگاه‌ها محل تماس راهبر قطار بوده‌اند؟ چرا؟

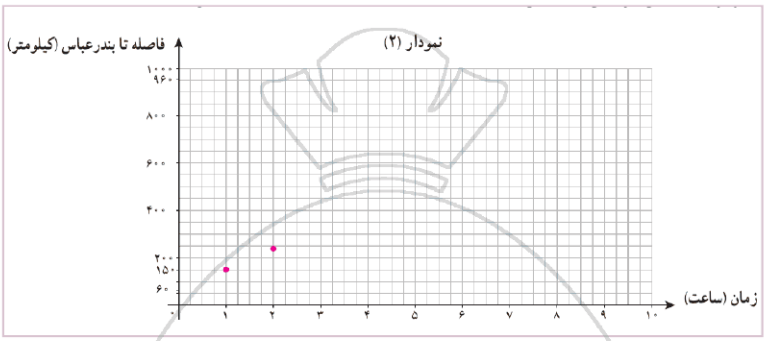
ز) با توجه به جدول ۲، ابتدا تساوی‌های زیر را کامل کنید: $a_3 = a_2 + \ldots$ ؛ $a_3 = a_1 + \ldots \times ۹۰$ ؛ $a_7 = a_6 + \ldots$ ؛ $a_7 = a_1 + \ldots \times ۹۰$ ؛ $a_{11} = a_{10} + \ldots$ ؛ $a_{11} = a_1 + \ldots \times ۹۰$ ؛ $a_8 = a_2 + \ldots \times ۹۰$ ؛ $a_8 = a_5 + \ldots \times ۹۰$. از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت: $a_n = a_1 + (\ldots) \times ۹۰$ (۱) ؛ $a_n - a_{n-1} = \ldots$ (رابطهٔ بازگشتی) ؛ $a_n - a_m = (\ldots) \times ۹۰$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ح) کدام ویژگی دنبالهٔ a_n باعث برقراری روابط بالا شده است؟

ط) رابطهٔ (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با ضابطهٔ تابع به‌دست‌آمده در قسمت «الف» دارد؟





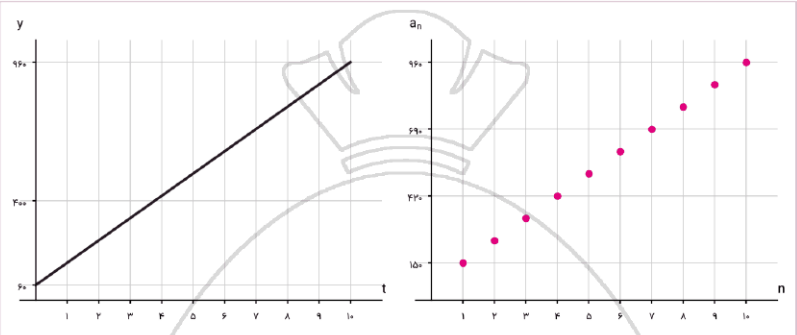


ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) مبدأ نمودار در ۶۰ کیلومتری بندرعباس است و پس از ۱۰ ساعت قطار در طبس (۹۶۰ کیلومتری) است؛ پس سرعت $\frac{960 - 60}{10} = 90$ کیلومتر بر ساعت است (شیب خط):

- $f(t) = 60 + 90t$
- $D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \le t \le 10\}$
- $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid 60 \le y \le 960\}$

ب) در پایان هر ساعت ($t = 1$ تا ۱۰) نقطه‌هایی روی نمودار (۱) را به نمودار (۲) منتقل می‌کنیم: $(1, 150), (2, 240), (3, 330), \dots, (10, 960)$. نمودار (۱) خط پیوسته و نمودار (۲) نقطه‌های جداست:



ج) ضابطه در هر دو $60 + 90t$ است (در (۲) با نماد n)، ولی دامنه‌ی نمودار (۱) بازه‌ی $[0, 10]$ از اعداد حقیقی (خط پیوسته) و دامنه‌ی نمودار (۲) $\{1, 2, \dots, 10\}$ (زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$، نقطه‌های جدا) است. برد (۱) بازه‌ی $[60, 960]$ و برد (۲) فقط ده عدد $\{150, 240, \dots, 960\}$ است.

د) هر فاصله‌ی «فاصله تا بندرعباس» از جمع فاصله‌ی قبل و مسافت همان قطعه به‌دست می‌آید (۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵ و ...):

جدول ۱

نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری ــ تزرج	۱۲۵	۱۸۵ = ۱۲۵ + ۶۰
تزرج ــ گل‌گهر	۱۴۵	۳۳۰ = ۱۴۵ + ۱۸۵
گل‌گهر ــ سیرجان	۶۰	۳۹۰ = ۶۰ + ۳۳۰
سیرجان ــ میمند	۱۵۵	۵۴۵ = ۱۵۵ + ۳۹۰
میمند ــ بافق	۱۴۵	۶۹۰ = ۱۴۵ + ۵۴۵
بافق ــ جندق	۱۳۰	۸۲۰ = ۱۳۰ + ۶۹۰
جندق ــ طبس	۱۴۰	۹۶۰ = ۱۴۰ + ۸۲۰

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

هـ) در هر ساعت ۹۰ کیلومتر به مسافت قبلی اضافه می‌شود، $a_n = a_{n-1} + 90$:

جدول ۲

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
a_n	۱۵۰	۲۴۰	۳۳۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۰۰	۶۹۰	۷۸۰	۸۷۰	۹۶۰

(مثلاً $a_3 = a_2 + 90 = 240 + 90 = 330$ و $a_4 = 330 + 90 = 420$؛ هر مقدار a_n برابر فاصله‌ی قطار تا بندرعباس در پایان ساعت nام است.)

و) فاصله‌های جدول ۱ عبارت‌اند از ۱۸۵، ۳۳۰، ۳۹۰، ۵۴۵، ۶۹۰، ۸۲۰ و ۹۶۰ و جدول ۲ شامل ۱۵۰، ۲۴۰، ۳۳۰، ...، ۹۶۰ است. اعداد مشترک ۳۳۰ و ۶۹۰ و ۹۶۰ هستند؛ یعنی راهبر در پایان ساعت‌های سوم، هفتم و دهم دقیقاً در ایستگاه بوده است: **گل‌گهر (۳۳۰)، بافق (۶۹۰) و طبس (۹۶۰)**. زیرا راهبر فقط در پایان هر ساعت گزارش می‌دهد؛ پس یک ایستگاه زمانی محل تماس است که فاصله‌اش تا بندرعباس در جدول ۲ هم آمده باشد.

ز) در هر ساعت ۹۰ کیلومتر اضافه می‌شود:

- $a_3 = a_2 + 90$, $a_3 = a_1 + 2 \times 90$
- $a_7 = a_6 + 90$, $a_7 = a_1 + 6 \times 90$
- $a_{11} = a_{10} + 90$, $a_{11} = a_1 + 10 \times 90$
- $a_8 = a_2 + 6 \times 90$, $a_8 = a_5 + 3 \times 90$
- $a_n = a_1 + (n - 1) \times 90$ (1)
- $a_n - a_{n-1} = 90$ (recursive)
- $a_n - a_m = (n - m) \times 90$

ح) ویژگی دنباله این است که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن عددی ثابت (۹۰) است؛ یعنی هر جمله با اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله‌ی قبل به‌دست می‌آید.

ط) چون $a_1 = 150$ ، رابطه‌ی (۱) می‌شود $a_n = 150 + (n - 1) \times 90 = 60 + 90n$ که همان ضابطه‌ی تابع قسمت (الف) است (با جایگذاری n به جای t).

۱۸۷ صفحه ۶۴ **کار در کلاس**

۱. ضابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

در دنباله‌ی حسابی هر جمله از اضافه شدن d به جمله‌ی قبل به‌دست می‌آید:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$a_{n+1} = a_n + d$ (یعنی $a_n - a_{n-1} = d$) و جملهٔ اول a_1 داده می‌شود.

۱۸۸ صفحه ۶۴ — کار در کلاس

۲. مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک»، d، چه تأثیری در جملات دنبالهٔ حسابی دارد؟

- $d > 0$: هر جمله از قبلی بزرگ‌تر است؛ دنباله افزایشی (صعودی) است، مثل ۲ ، ۵ ، ۸ ، ....
- $d < 0$: هر جمله از قبلی کوچک‌تر است؛ دنباله کاهشی (نزولی) است، مثل ۴ ، ۱ ، ۲- ، ....
- $d = 0$: همه‌ی جمله‌ها برابرند؛ دنباله ثابت است، مثل ۵ ، ۵ ، ۵ ، ....

۱۸۹ صفحه ۶۴ — کار در کلاس

۳. جدول زیر را کامل کنید.

a_n	پنج جملهٔ اول	اختلاف مشترک	جملهٔ اول
		d	a
$a_n = ۲ + ۳(n-۱)$	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴	۳	۲
	۴, ۱, -۲, -۵, -۸		
		$-\frac{۱}{۲}$	۴
$a_n = -۳ + ۵(n-۱)$			

از رابطه‌ی $a_n = a + (n-1)d$ و فرمول اختلاف مشترک $d = a_2 - a_1$ استفاده می‌کنیم:

جمله‌ی اول	اختلاف مشترک	پنج جمله‌ی اول	a_n
a	d	a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d	$a_n = a + (n-1)d$
۲	۳	۲ ، ۵ ، ۸ ، ۱۱ ، ۱۴	$a_n = 2 + 3(n-1)$
۴	۳-	۴ ، ۱ ، ۲- ، ۵- ، ۸-	$a_n = 4 - 3(n-1)$
۴	$-\frac{1}{2}$	$4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 2$	$a_n = 4 - \frac{1}{2}(n-1)$
۳-	۵	۳- ، ۲ ، ۷ ، ۱۲ ، ۱۷	$a_n = -3 + 5(n-1)$

مثلاً در ردیف سوم $d = 1 - 4 = -3$ ؛ و در ردیف چهارم $a_2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ و $a_3 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$.

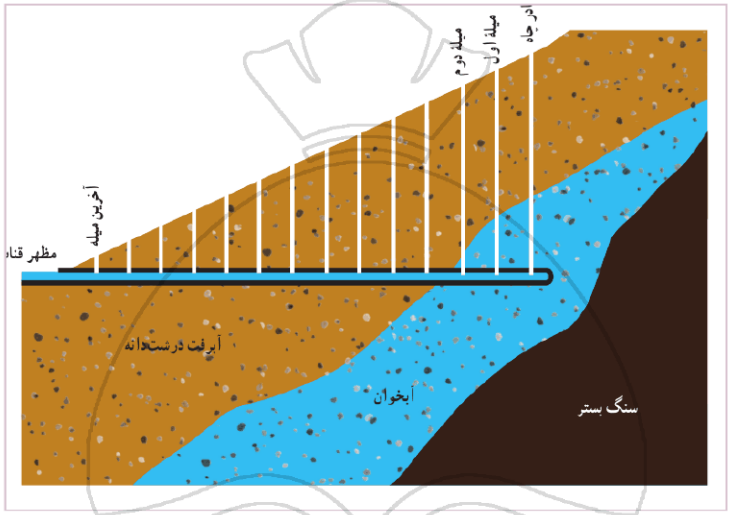
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۹۰ صفحه ۶۴ کار در کلاس

قنات یا کاریز، راهِ آب یا کانالی است که در زیرزمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادرچاه» به‌دست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌کنند. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقنّی در خارج‌کردن خاک‌های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات‌ها حفر می‌شوند.

در یک منطقه، مقنّی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میلهٔ اول ۲۹/۵ متر و میلهٔ دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است.

اگر عمق آخرین میله ۱/۵ متر باشد، این مقنّی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟



عمق چاه‌ها (مادرچاه، میله‌ی اول، میله‌ی دوم، ...) دنباله‌ی حسابی است: 30, 29.5, 29, ... , 1.5 با $a_1 = 30$ و $d = -0.5$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 1.5 = 30 + (n-1)(-0.5)$$

$$-28.5 = -0.5(n-1) \Rightarrow n - 1 = 57 \Rightarrow n = 58$$

مقنّی در مجموع **۵۸ چاه** (یک مادرچاه و ۵۷ میله) حفر کرده است.

۱۹۱ صفحه ۶۶ فعالیت

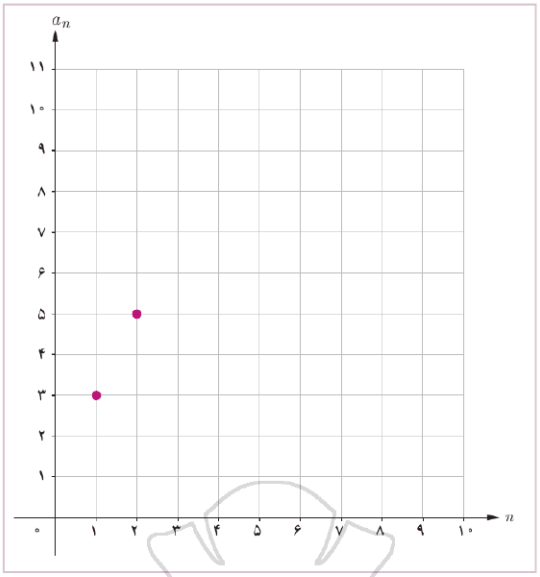
دنبالهٔ حسابی $a_n = ۳ + ۲(n-۱)$ را در نظر بگیرید.

الف) با محاسبهٔ سه جملهٔ دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادلهٔ خطی را که از دو نقطهٔ اول و دوم می‌گذرد، به‌دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطهٔ خط به‌دست‌آمده صدق می‌کنند؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ج) شیب خط به‌دست‌آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنبالهٔ حسابی) دارد؟

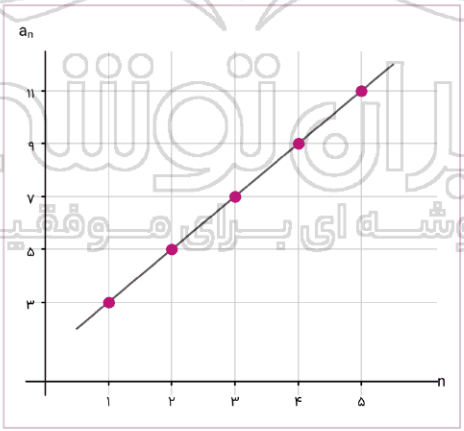


الف) $a_3 = 3 + 2 \times 2 = 7,\ a_4 = 3 + 2 \times 3 = 9,\ a_5 = 3 + 2 \times 4 = 11$ ؛ نقاط $(3,7),\ (4,9),\ (5,11)$ را روی نمودار می‌گذاریم.

ب) نقطه‌های اول و دوم: $(1,3)$ و $(2,5)$. شیب: $\frac{5-3}{2-1} = 2$ ؛ معادله: $y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 1$.

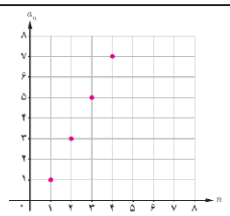
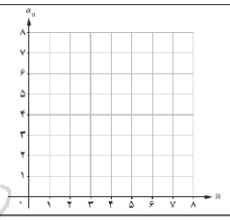
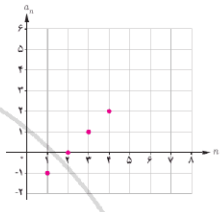
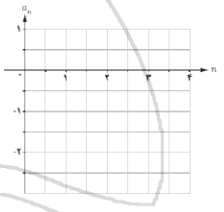
برای نقطه‌های دیگر داریم: $2 \times 3 + 1 = 7,\ 2 \times 4 + 1 = 9,\ 2 \times 5 + 1 = 11$ ؛ پس همه‌ی نقاط دنباله روی این خط‌اند. (در واقع $a_n = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$).

ج) شیب خط (۲) برابر اختلاف مشترک دنباله ($d = 2$) است.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

جدول زیر را کامل کنید.

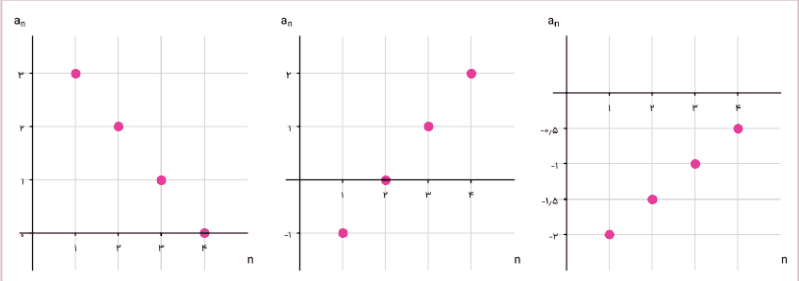
نمودار دنباله	چهار جملهٔ اول دنباله	دنبالهٔ ساخته شده از تابع	ضابطهٔ تابع
	۱، ۳، ۵، ۷	$a_n = ۲n - ۱$	$y = ۲x - ۱$
			$y = -x + ۴$
			
	$-۲, -\frac{۳}{۲}, -۱, -\frac{۱}{۲}$		

هر تابع خطی $y = ax + b$ با دامنه‌ی $\mathbb{N}$ یک دنباله‌ی حسابی با اختلاف مشترک $d = a$ (شیب خط) می‌سازد؛ و برعکس.

ضابطه‌ی تابع	دنباله‌ی ساخته‌شده از تابع	چهار جمله‌ی اول دنباله
$y = -x + 4$	$a_n = -n + 4$	۰، ۱، ۲، ۳
$y = x - 2$	$a_n = n - 2$	-۱، ۰، ۱، ۲
$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$	$a_n = \frac{1}{2}n - \frac{5}{2}$	$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$

ردیف سوم (از روی نمودار): نقطه‌های $(1, -1), (2, 0), (3, 1), (4, 2)$ شیب $d = 1$ و $a_1 = -1$ دارند؛ پس $a_n = -1 + (n - 1) = n - 2$ و تابع $y = x - 2$. ردیف چهارم (از جمله‌ها): $a_1 = -2, d = \frac{1}{2}$؛ $a_n = -2 + \frac{1}{2}(n - 1) = \frac{n - 5}{2}$ و تابع $y = \frac{x - 5}{2}$. نمودار ردیف‌های ۲ و ۳ و ۴ (از چپ به راست):

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



۱۹۳ صفحه ۶۸ فعالیت

پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می‌شود. اگر شخصی که سابقهٔ سکتهٔ قلبی دارد، با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی‌گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی‌گرم دارو در سطح خونش کاهش یابد:

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳۰ میلی‌گرم می‌شود؟

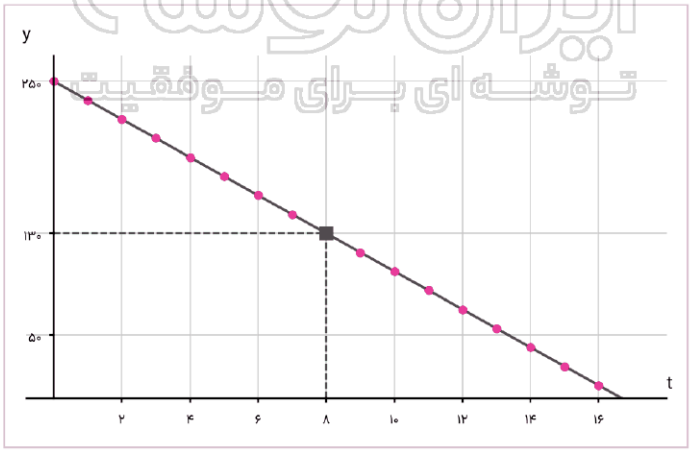
ب) نمودار «سطح دارو در بدن ــ زمان» مسئلهٔ بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳۰ میلی‌گرم خواهد شد؟

اگر y سطح دارو (میلی‌گرم) و t زمان بر حسب ساعت باشد، هر ساعت ۱۵ واحد کم می‌شود: $y = 250 - 15t$.

الف) $250 - 15t = 130 \Rightarrow 15t = 120 \Rightarrow t = 8$ ؛ پس **۸ ساعت** بعد از مصرف دارو.

ب) نمودار پاره‌خطی است که از نقطه‌ی $(0, 250)$ شروع می‌شود و با شیب -15 پایین می‌آید تا در $t = \frac{250}{15} \approx 16.7$ ساعت به صفر برسد (نقطه‌های هر ساعت: $250, 235, 220, \ldots$). نقطه‌ی (۸ ، ۱۳۰) روی نمودار است.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ج) پس از ۵ ساعت سطح دارو $250 - 15 \times 5 = 175$ است. با مصرف قرص دوم ۲۵۰ میلی‌گرم اضافه می‌شود: $175 + 250 = 425$. از آن لحظه: $425 - 15t = 130 \Rightarrow t = \frac{295}{15} = \frac{59}{3} \approx 19.7$ ساعت. یعنی حدود ۱۹ ساعت و ۴۰ دقیقه پس از مصرف قرص دوم (حدود ۲۴٫۷ ساعت پس از مصرف قرص اول) سطح دارو ۱۳۰ میلی‌گرم می‌شود.

---

۱۹۴ صفحه ۶۸ کار در کلاس

درآمد کارمندی در یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۷/۸۰۰/۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به‌عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه‌کاری ۳۳ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه‌کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه‌کاری دریافتی خالص ماهیانهٔ او ۹ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید.)

با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت ۳۳ هزار تومان اضافه‌کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه‌کاری از یک دنبالهٔ عددی پیروی می‌کند. بنابراین، اگر a_1 میزان دریافتی شخص پس از یک ساعت اضافه‌کاری باشد، جملهٔ آخر دنباله باید برابر با مبلغ ..... تومان باشد؛ یعنی در رابطهٔ $a_n = a_1 + d(n-1)$ باید .....

حقوق خالص بدون اضافه‌کاری: $7,800,000 - 10\% \times 7,800,000 = 7,020,000$ تومان. برای رسیدن به ۹ میلیون باید $9,000,000 - 7,020,000 = 1,980,000$ تومان از اضافه‌کاری به دست آید.

دریافتی بعد از ۱، ۲، ۳، ... ساعت: ۳۳,۰۰۰ ، ۶۶,۰۰۰ ، ۹۹,۰۰۰ ، ... دنباله‌ی حسابی با $a_1 = 33000$ و $d = 33000$ است. جمله‌ی آخر باید ۱,۹۸۰,۰۰۰ تومان باشد، یعنی در $a_n = a_1 + (n-1)d$ باید $1980000 = 33000 + (n-1) \times 33000$:

$$(n-1) = \frac{1980000 - 33000}{33000} = 59 \Rightarrow n = 60$$

۶۰ ساعت اضافه‌کاری در ماه لازم است؛ در ماه ۳۰ روزه، $\frac{60}{30} = 2$ ساعت اضافه‌کاری در روز. پاسخ: **روزانه ۲ ساعت**.

---

۱۹۵ صفحه ۷۰ کار در کلاس

۱. مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱- و ۴ و ۹ و ..... و ۱۹۹ ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ ، $a_1 = -2$ ، $S_{10} = ?$

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطهٔ بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)

از $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ استفاده می‌کنیم.

الف) $a_1 = -1,\ d = 5,\ a_n = 199$ ؛ $199 = -1 + (n-1)5 \Rightarrow n = 41$ و

$S_{41} = \frac{41}{2}(-1 + 199) = 41 \times 99 = 4059$.

ب) جمله‌ها: $-2, 3, 8, 13, \ldots$ (هر بار ۵ واحد بیشتر) ؛ $a_{10} = -2 + 9 \times 5 = 43$ و

$S_{10} = \frac{10}{2}(-2 + 43) = 5 \times 41 = 205$.

---

۱۹۶ صفحه ۷۰ کار در کلاس

۲. مجموع سی جملهٔ اول اعداد فرد را به‌دست آورید. $a_1 = ۱$ ، $a_n = a_1 + (n - ۱)d = \ldots\ldots$ ، $S_{30} = \ldots\ldots = (a_1 + a_{30})$

اعداد فرد: $1, 3, 5, \ldots$ با $a_1 = 1$ و $d = 2$ ؛ پس $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$ و $a_{30} = 59$.

$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = 15 \times (1 + 59) = 900$

---

۱۹۷ صفحه ۷۰ کار در کلاس

۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

با توجه به معلوم بودن $S_n = ۸۷۰$ برای به‌دست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطهٔ $S_n = (n/2)(۲a_1 + (n-۱)d)$ با جای‌گذاری $d = \ldots\ldots$ در رابطهٔ بالا $n = \ldots\ldots$ به‌دست می‌آید.

تعداد صندلی‌ها دنباله‌ی حسابی $15, 18, 21, \ldots$ با $a_1 = 15$ و $d = 3$ است. با جای‌گذاری در $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$:

$870 = \frac{n}{2}(30 + 3(n-1)) \Rightarrow 1740 = n(3n + 27) \Rightarrow n^2 + 9n - 580 = 0$

$(n - 20)(n + 29) = 0 \Rightarrow n = 20$ (مقدار منفی ۲۹- قابل قبول نیست). سالن باید **۲۰ ردیف** صندلی داشته باشد.

بررسی: $a_{20} = 15 + 19 \times 3 = 72$ و $S_{20} = 10(15 + 72) = 870$.

---

۱۹۸ صفحه ۷۱ تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنبالهٔ حسابی است.

الف) $a_{n+1} = a_n / ۱$ **ب)** $a_1 = ۲$ ، $a_{n+1} = a_n + ۵$ ، $a_1 = -۱$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$، $a_1 = -1$ د) $a_n - a_{n+1} = n$

دنباله‌ی حسابی یعنی اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی ثابت باشد.

- الف) $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ ثابت نیست؛ حسابی نیست. ؛ اختلاف‌ها $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots$
- ب) $-1, 4, 9, 14, \ldots$ ؛ اختلاف همیشه ۵ است؛ **حسابی است**.
- ج) $-3, -15, \ldots, -19, -4, -1$ ؛ اختلاف‌ها ؛ حسابی نیست.
- د) $a_{n+1} - a_n = n$: اختلاف‌ها ۱، ۲، ۳، ... است و ثابت نیست؛ حسابی نیست.

فقط دنباله‌ی (ب) حسابی است.

۱۹۹ صفحه ۷۱ تمرین

۲. در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جملهٔ دنباله برابر ۵۵۵ است؟

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 555 = -5 + (n-1) \times 8$

$560 = 8(n-1) \Rightarrow n - 1 = 70 \Rightarrow n = 71$

جمله‌ی **هفتاد و یکم** برابر ۵۵۵ است.

۲۰۰ صفحه ۷۱ تمرین

۳. یازدهمین جملهٔ یک دنبالهٔ حسابی ۵۲ و جملهٔ نوزدهم آن ۹۲ است. جملهٔ سی‌اُم این دنباله را مشخص کنید.

از رابطه‌ی $a_n - a_m = (n-m)d$: $a_{19} - a_{11} = 8d \Rightarrow 92 - 52 = 8d \Rightarrow d = 5$.

$a_{30} = a_{19} + 11d = 92 + 11 \times 5 = 147$

(بررسی: $a_1 = 52 - 10 \times 5 = 2$ و $a_{30} = 2 + 29 \times 5 = 147$)

۲۰۱ صفحه ۷۱ تمرین

۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصلهٔ اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصلهٔ هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

فاصله‌ی چرخ‌ها از موتور (محور چرخش) دنباله‌ی حسابی $3, 8, 13, \dots$ با $a_1 = 3$ و $d = 5$ است. آخرین چرخ (دوازدهم) در انتهای میله است:

$$a_{12} = 3 + 11 \times 5 = 58$$

میله با طول ۵۸ متر حول محور می‌چرخد و دایره‌ای به شعاع ۵۸ متر را آبیاری می‌کند:

$$S = \pi r^2 = \pi \times 58^2 = 3364\pi \approx 10563$$

مساحت آبیاری‌شده حدود **۱۰,۵۶۳ ≈ ۳۳۶۴π متر مربع** (با $\pi \approx 3{,}14$) است.

۲۰۲ صفحه ۷۱ تمرین

۵. در یک کارخانهٔ سنگبری برای صیقل‌دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفادهٔ مداوم وزن صفحه چقدر است؟

وزن صفحه بعد از هر هفته ۱۸۷۵ گرم کم می‌شود؛ دنباله‌ی حسابی با $a_1 = 12500$ (شروع) و $d = -1875$.

بعد از ۶ هفته:

$$12500 - 6 \times 1875 = 12500 - 11250 = 1250$$

وزن صفحه پس از شش هفته **۱۲۵۰ گرم** است. (جمله‌ی هفتم دنباله: $a_7 = a_1 + 6d = 1250$)

۲۰۳ صفحه ۷۱ تمرین

۶. میان دو عدد a و b، n عدد را به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطهٔ $d = (b - a)/(n + 1)$ به‌دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n + 2)$ جمله است.)

جمله‌ی اول a و جمله‌ی آخر (جمله‌ی $(n + 2)$ ام) برابر b است. طبق $a_k = a_1 + (k - 1)d$:

$$b = a + (n + 2 - 1)d = a + (n + 1)d$$

$$(n + 1)d = b - a \Rightarrow d = \frac{b - a}{n + 1}$$

و این همان حکم خواسته‌شده است. ∎

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰۴ صفحه ۷۱ تمرین

۷. براساس رابطهٔ به‌دست‌آمده در مسئلهٔ ۶، سه عدد را به‌گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند.

$a = 10,\ b = 18,\ n = 3$

$d = \frac{18 - 10}{3 + 1} = 2$

دنباله: ۱۰ ، ۱۲ ، ۱۴ ، ۱۶ ، ۱۸ ؛ پس سه عدد **۱۲ ، ۱۴ و ۱۶** هستند.

۲۰۵ صفحه ۷۱ تمرین

۸. مجموع عددهای زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱ و ۵ و ۹ و ..... و ۴۰۱ ب) ۱۳ و ..... و ۸۱ و ۸۵ و ۸۹

الف) $a_1 = 1,\ d = 4,\ a_n = 401$ ؛ $401 = 1 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 101$ ؛

$S_{101} = \frac{101}{2}(1 + 401) = 101 \times 201 = 20301$.

ب) $d = 85 - 81 = 4$ ؛ $a_1 = 13,\ a_n = 89$ ؛ $89 = 13 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 20$ ؛

$S_{20} = \frac{20}{2}(13 + 89) = 10 \times 102 = 1020$.

۲۰۶ صفحه ۷۲ تمرین

۹. باغ‌داران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پلهٔ این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پلهٔ آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پلهٔ پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

عرض پله‌ها دنباله‌ی حسابی $125, 115, 105, \ldots, 45$ با $a_1 = 125$ و $d = -10$ است:

$45 = 125 + (n - 1)(-10) \Rightarrow n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9$

نردبان ۹ پله دارد. مجموع عرض پله‌ها (طول چوب لازم برای پله‌ها):

$S_9 = \frac{9}{2}(125 + 45) = 9 \times 85 = 765\ cm = 7.65\ m$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

برای ساخت پله‌ها **۷٫۶۵ متر** چوب لازم است.

۲۰۷ صفحه ۷۲ تمرین

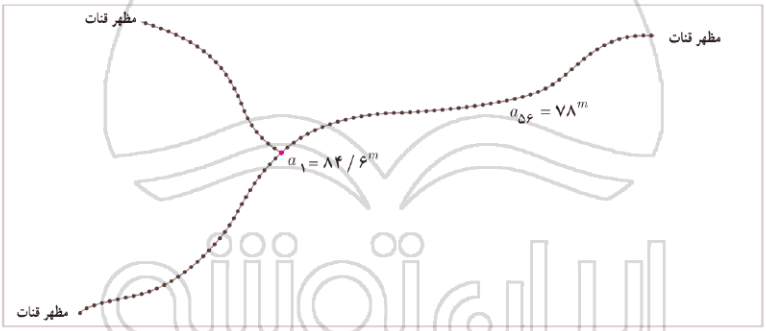
۱۰. ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران ــ عمق مادرچاه قنات زارچ ۸۴/۶ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق میلهٔ پنجاه و ششم ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصلهٔ میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود:

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفرشده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفرشده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینهٔ حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵۰ هزار تومان باشد، هزینهٔ حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ، در مجموع طول کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینهٔ ۳۵۰ هزار تومان برای حفر کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی: a_n را عمق چاه nام تا کانال قنات و a_1 را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



ایران توشه
توشه‌ای برای سوختیت

عمق چاه‌ها دنباله‌ی حسابی با $a_1 = 84.6$ (مادرچاه) است و $a_{56} = 78$:

$$d = \frac{a_{56} - a_1}{55} = \frac{78 - 84.6}{55} = -0.12$$

الف) عمق آخرین چاه ۱۲۰ سانتی‌متر یعنی ۱٫۲ متر است:

$$1.2 = 84.6 + (n - 1)(-0.12) \Rightarrow n - 1 = 695 \Rightarrow n = 696$$

در هر شاخه ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله وجود دارد؛ یعنی هر شاخه **۶۹۵ میله** دارد.

ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر (شاخه):

$$S_{696} = \frac{696}{2}(84.6 + 1.2) = 348 \times 85.8 = 29858.4$$

یعنی ۲۹,۸۵۸٫۴ متر. در کل قنات سه شاخه داریم که مادرچاه مشترک است (۸۴٫۶ متر را دو بار اضافه شمرده‌ایم):

$3 \times 29858.4 - 2 \times 84.6 = 89575.2 - 169.2 = 89406$

مجموع طول چاه‌ها در کل قنات ۸۹٬۴۰۶ متر است.

ج) $89406 \times 250000 = 22{,}351{,}500{,}000$ تومان (حدود ۲۲٫۳۵ میلیارد تومان).

د) هزینه‌ی کانال: $71000 \times 350000 = 24{,}850{,}000{,}000$ تومان. ارزش کل قنات:

$22{,}351{,}500{,}000 + 24{,}850{,}000{,}000 = 47{,}201{,}500{,}000$

یعنی حدود ۴۷٫۲ میلیارد تومان.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی و آمار ۳ دوازدهم (انسانی) - فصل سوم

الگوهای غیرخطی

فهرست

۲۰۸	صفحه ۷۵ · فعالیت — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۲
۲۰۹	صفحه ۷۶ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۳
۲۱۰	صفحه ۷۷ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۳
۲۱۱	صفحه ۷۷ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۳
۲۱۲	صفحه ۷۷ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۴
۲۱۳	صفحه ۷۸ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۵
۲۱۴	صفحه ۷۹ · فعالیت — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۵
۲۱۵	صفحه ۷۹ · فعالیت — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۶
۲۱۶	صفحه ۷۹ · فعالیت — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۶
۲۱۷	صفحه ۷۹ · فعالیت — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۷
۲۱۸	صفحه ۸۰ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۷
۲۱۹	صفحه ۸۱ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی	۱۲۸

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲۰ صفحه ۸۱ · کار در کلاس — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۲۸

۲۲۱ صفحه ۸۳ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۲۹

۲۲۲ صفحه ۸۳ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۲۹

۲۲۳ صفحه ۸۳ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۲۹

۲۲۴ صفحه ۸۳ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۲۹

۲۲۵ صفحه ۸۳ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۳۰

۲۲۶ صفحه ۸۳ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۳۰

۲۲۷ صفحه ۸۴ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۳۱

۲۲۸ صفحه ۸۴ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۳۱

۲۲۹ صفحه ۸۴ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۳۱

۲۳۰ صفحه ۸۴ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۳۲

۲۳۱ صفحه ۸۴ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۳۲

۲۳۲ صفحه ۸۵ · تمرین — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۳۳

۲۳۳ صفحه ۸۵ · بازی و ریاضی — درس ۱: دنباله‌ی هندسی ۱۳۴

۲۳۴ صفحه ۸۶ · فعالیت — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۴

۲۳۵ صفحه ۸۶ · فعالیت — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۴

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۳۶ صفحه ۸۷ · فعالیت — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۵

۲۳۷ صفحه ۸۸ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۶

۲۳۸ صفحه ۸۸ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۶

۲۳۹ صفحه ۹۰ · فعالیت — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۷

۲۴۰ صفحه ۹۱ · فعالیت — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۷

۲۴۱ صفحه ۹۲ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۷

۲۴۲ صفحه ۹۲ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۸

۲۴۳ صفحه ۹۲ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۸

۲۴۴ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۸

۲۴۵ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۸

۲۴۶ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۹

۲۴۷ صفحه ۹۳ · تمرین — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۹

۲۴۸ صفحه ۹۳ · تمرین — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۳۹

۲۴۹ صفحه ۹۴ · تمرین — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۴۰

۲۵۰ صفحه ۹۴ · تمرین — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۴۰

۲۵۱ صفحه ۹۴ · تمرین — درس ۲: ریشه‌ی nام و توان گویا ۱۴۰

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۵۲ صفحه ۹۵ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۱

۲۵۳ صفحه ۹۶ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۱

۲۵۴ صفحه ۹۶ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۲

۲۵۵ صفحه ۹۶ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۲

۲۵۶ صفحه ۹۷ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۳

۲۵۷ صفحه ۹۸ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۴

۲۵۸ صفحه ۹۹ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۴

۲۵۹ صفحه ۱۰۰ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۵

۲۶۰ صفحه ۱۰۱ · کار در کلاس — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۷

۲۶۱ صفحه ۱۰۱ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۷

۲۶۲ صفحه ۱۰۱ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۸

۲۶۳ صفحه ۱۰۱ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۹

۲۶۴ صفحه ۱۰۲ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی ۱۴۹

۲۶۵ صفحه ۱۰۲ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی ۱۵۰

۲۶۶ صفحه ۱۰۲ · فعالیت — درس ۳: تابع نمایی ۱۵۰

۲۶۷ صفحه ۱۰۳ · کار در کلاس — درس ۳: تابع نمایی ۱۵۱

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶۸ صفحه ۱۰۴ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی ۱۵۱

۲۶۹ صفحه ۱۰۴ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی ۱۵۲

۲۷۰ صفحه ۱۰۴ · تمرین — درس ۳: تابع نمایی ۱۵۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

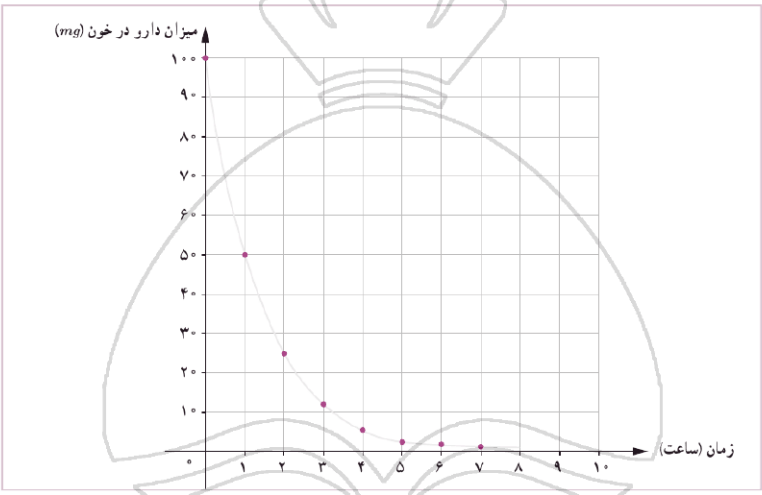
۲۰۸ صفحه ۷۵ **فعالیت**

شخصی ۱۰۰ میلی‌گرم از دارویی که نیمه‌عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. با توجه به نمودار «میزان دارو در خون ـ زمان» به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه‌عمر، کمتر از ۲۰ میلی‌گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از nامین نیمه‌عمر باشد، رابطه‌ی بازگشتی دنباله در بدن شخص چگونه است؟ با توجه به تعریف دنباله‌ی a_n و نیز تعریف نیمه‌عمر، هر جمله‌ی دنباله از حاصل‌ضرب عدد ثابت ..... در جمله‌ی پیشین به‌دست می‌آید؛ یعنی: $a_1 = ۵۰$ ، $a_{n+1} = a_n$ .....

ج) ضابطه‌ی تابعی (جمله‌ی عمومی) دنباله را مشخص کنید. $a_1 = ۵۰$ ، $a_۲ = ۵۰\times ½$ ، $a_۳ = ½(۵۰\times ½) =$ $a_۴ = ...$ ، $۵۰\times(½)^2$ $\Longrightarrow$ $a_n = ... \times ۵۰$



الف) مقدار دارو هر نیمه‌عمر نصف می‌شود: ۱۰۰ ← ۵۰ ← ۲۵ ← ۱۲/۵. پس از نیمه‌عمر دوم ۲۵ (هنوز بیشتر از ۲۰) و پس از نیمه‌عمر سوم ۱۲/۵ میلی‌گرم است. پس **پس از ۳ نیمه‌عمر** (۳ ساعت) مقدار دارو کمتر از ۲۰ میلی‌گرم می‌شود.

میزان دارو هرگز دقیقاً صفر نمی‌شود، زیرا نصف کردن یک عدد مثبت همیشه عددی مثبت می‌دهد (نمودار نیز به محور افقی نزدیک می‌شود ولی آن را قطع نمی‌کند).

ب) هر جمله از ضرب عدد ثابت $\frac{۱}{۲}$ در جمله‌ی قبل به‌دست می‌آید: $a_1 = ۵۰$ ، $a_{n+1} = \frac{۱}{۲} a_n$

ج) $a_۴ = \frac{۱}{۲} \times (\frac{۱}{۲})^۲ \times ۵۰ = (\frac{۱}{۲})^۳ \times ۵۰$ پس $a_n = (\frac{۱}{۲})^{n-۱} \times ۵۰$ (دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۵۰ و نسبت مشترک $\frac{۱}{۲}$).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰۹ صفحه ۷۶ کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید. (ردیف‌های اول تا پنجم: ردیف اول نمونه است. ردیف دوم: $a_1 = ۱/۸۱$ ، $r = ۳/۲$ ؛ ردیف سوم: $a_1 = ۴$ ، $r = -۱/۲$ و $a_{n+1} = (-۱/۲)a_n$ ؛ ردیف چهارم: ۱ , ۱/۵ , ۱/۲۵ , ۱/۱۲۵ , ۱/۶۲۵ ؛ ردیف پنجم: $a_n = ۱۰۰(۱/۴)^{n-۱}$)

جمله‌ی اول	نسبت مشترک	پنج جمله‌ی اول	ضابطه‌ی بازگشتی	جمله‌ی عمومی دنباله
$a_1 = \frac{۱}{۸۱}$	$r = \frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۸۱}, \frac{۱}{۵۴}, \frac{۱}{۳۶}, \frac{۱}{۲۴}, \frac{۱}{۱۶}$	$a_{n+1} = \frac{۳}{۲}a_n,\ a_1 = \frac{۱}{۸۱}$	$a_n = \frac{۱}{۸۱}(\frac{۳}{۲})^{n-۱}$
$a_1 = ۴$	$r = -\frac{۱}{۲}$	$۴, -۲, ۱, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}$	$a_{n+1} = (-\frac{۱}{۲})a_n,\ a_1 = ۴$	$a_n = ۴(-\frac{۱}{۲})^{n-۱}$
$a_1 = ۱$	$r = \frac{۱}{۵}$	$۱, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۲۵}, \frac{۱}{۱۲۵}, \frac{۱}{۶۲۵}$	$a_{n+1} = \frac{۱}{۵}a_n,\ a_1 = ۱$	$a_n = (\frac{۱}{۵})^{n-۱}$
$a_1 = ۱۰۰$	$r = \frac{۱}{۴}$	$۱۰۰, ۲۵, \frac{۲۵}{۴}, \frac{۲۵}{۱۶}, \frac{۲۵}{۶۴}$	$a_{n+1} = \frac{۱}{۴}a_n,\ a_1 = ۱۰۰$	$a_n = ۱۰۰(\frac{۱}{۴})^{n-۱}$

روش: نسبت مشترک = هر جمله ÷ جمله‌ی قبل؛ جمله‌ی بعد = جمله‌ی قبل × r ؛ جمله‌ی عمومی $a_n = a_1 r^{n-۱}$.

۲۱۰ صفحه ۷۷ کار در کلاس

۲. با توجه به جدول قبل، در هر دنباله‌ی هندسی به‌صورت $a_n = a_1 r^{(n-۱)}$ با فرض $a_1 > ۰$:

الف) اگر $۰ < r < ۱$ ، دنباله‌ی a_n ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است.

ب) اگر $r > ۱$ ، دنباله‌ی a_n ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است.

ج) اگر $r = ۱$ ، دنباله‌ی a_n ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است.

الف) هر جمله از ضرب جمله‌ی قبل در عددی بین صفر و یک (کوچک‌تر از ۱) به‌دست می‌آید و کوچک‌تر می‌شود (مثل ۱, ۱/۳, ۱/۹, ...): **کاهشی**.

ب) ضرب در عددی بزرگ‌تر از ۱ جمله را بزرگ‌تر می‌کند (مثل ۱/۸۱, ۱/۵۴, ...): **افزایشی**.

ج) همه‌ی جمله‌ها برابر a_1 هستند: **ثابت**.

۲۱۱ صفحه ۷۷ کار در کلاس

ضابطه‌ی بازگشتی دنباله‌ی هندسی $a , ar , ar^2 , ar^3 , ...$ را مشخص کنید.

هر جمله از ضرب جمله‌ی قبل در r به‌دست می‌آید:

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = r\,a_n$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

(هزینه‌ی استهلاک) شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹/۶۰۰/۰۰۰ تومان خریده است. هزینه‌ی استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر، n سال پس از خرید باشد :

الف) ضابطه‌ی تابعی دنباله‌ی v_n را به‌دست آورید. با توجه به هزینه‌ی استهلاک ۱۰٪، ارزش یخچال فریزر در هر سال ۹۰٪ سال قبل خواهد بود؛ یعنی: $v_1 = 9/600/000$ ، $v_2 = 9/600/000 \times 90/100 = ...$ ، $v_3 = ...$ ، $v_n = ...$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش را مشخص کنید؟ چرا؟ با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ۱۰٪ کاهش می‌یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان کاهش ۱۰٪ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین ...

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطه‌ی v_n را به‌گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنباله‌ی v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟ (راهنمایی: با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹/۶۰۰/۰۰۰ تومان، نصف ارزش آن ۴/۸۰۰/۰۰۰ تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $v_n <$ ۴/۸۰۰/۰۰۰ را تأمین می‌کند، مشخص کنیم.)

هـ) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کم شود، با حالتی که k درصد از آن کم شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله‌ی حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله‌ی هندسی است؟

الف)

$v_2 = 9600000 \times \frac{90}{100} = 8640000$ ، $v_3 = 9600000 \times (0/9)^2 = 7776000$ ، $v_n = 9600000 \times (0/9)^{n-1}$ (دنباله‌ی هندسی با $r = 0/9$).

ب)

کاهش ارزش در سال اول بیشترین است (از v_1 به v_2: ۹۶۰/۰۰۰ تومان)؛ چون ارزش در سال‌های بعد کمتر است، ۱۰٪ آن (مقدار کاهش) هم کمتر است. کمترین کاهش وجود ندارد، زیرا ارزش یخچال هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و مقدار کاهش هر سال کمی از سال پیش کوچک‌تر ولی همیشه مثبت است.

ج)

چون هر بار ۹۰٪ ارزش قبلی باقی می‌ماند و ضرب عددی مثبت در عددی مثبت هرگز صفر نمی‌شود، ارزش هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. اگر فرض کنیم هر سال مقدار ثابتی (یک دهم قیمت خرید، یعنی ۹۶۰/۰۰۰ تومان) از ارزش کم شود، ارزش پس از ۱۰ سال صفر می‌شود:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$v_n = 9600000 - 960000(n-1)$ ، که در آن $v_1 = 17$ (ده سال پس از v_1). این دنباله **حسابی** است (قدر نسبت $-960/000$).

د)

$(0/9)^{n-1} < 0/5 \Rightarrow 9600000(0/9)^{n-1} < 4800000$. چون $(0/9)^6 \approx 0/531$ و $(0/9)^7 \approx 0/478$ ، کوچک‌ترین $n-1$ برابر ۷ و $n = 8$ است ($v_8 \approx 4/591/650$). یعنی ۷ سال پس از خرید (v_1 قیمت خرید است) ارزش از نصف قیمت کمتر می‌شود.

هـ)

اگر در هر مرحله k واحد کم شود، تفاوت دو جمله‌ی متوالی ثابت ($-k$) است: دنباله‌ی **حسابی**. اگر k درصد از جمله‌ی قبل کم شود، جمله‌ی بعد ($1-k/100$) برابر جمله‌ی قبل است (نسبت دو جمله‌ی متوالی ثابت): دنباله‌ی **هندسی**.

۲۱۳ صفحه ۷۸ **کار در کلاس**

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه‌عمر ماده‌ی کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی‌گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه‌عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی‌گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

میزان کافئین پس از n نیمه‌عمر: $80 \times (\frac{1}{2})^n$. باید کمتر از ۰/۵ شود:

$80 \times (\frac{1}{2})^n < 0/5 \Rightarrow 2^n > 160$

چون $2^7 = 128$ (کمتر از ۱۶۰) و $2^8 = 256$ (بیشتر از ۱۶۰)، کوچک‌ترین n برابر ۸ است ($80/256 = 0/3125$ میلی‌گرم). پس **پس از ۸ نیمه‌عمر، یعنی ۸×۶ = ۴۸ ساعت (دو شبانه‌روز)** می‌توان دوباره چای یا قهوه مصرف کرد.

۲۱۴ صفحه ۷۹ **فعالیت**

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حاوی ۸۰ میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد است. با توجه به اینکه نیمه‌عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص‌ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید. (S_n میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص است.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

جدول: n=۱: ۱۵ بهمن، ۰۰:۰۰ بامداد، $S_۱$ = ۸۰ mg ؛ n=۲: ۱۵ بهمن، ۸:۰۰ صبح، $S_۲$ = $S_۱$ + ½ = ۸۰ + ۴۰ = ۱۲۰ ؛ n=۳: ۱۵ بهمن، ۴:۰۰ بعد از ظهر، $S_۳$ = $S_۲$ + ½ = ۸۰ + ۶۰ = ۱۴۰ ؛ n=۴: ۱۶ بهمن، ۰۰:۰۰ بامداد، $S_۴$ = ... = ۸۰ + ... ؛ n=۵: ۱۶ بهمن، ....., $S_۵$ = ... = ... ؛ n=۶: ....., ..., $S_۶$ = ... + ... =

n	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی‌گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	۸۰
۲	۱۵ بهمن	۸:۰۰ صبح	۱۲۰ = ۸۰ + ۴۰
۳	۱۵ بهمن	۴:۰۰ بعد از ظهر	۱۴۰ = ۸۰ + ۶۰
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	۱۵۰ = ۸۰ + ۷۰ = ۸۰ + ۱۴۰×½
۵	۱۶ بهمن	۸:۰۰ صبح	۱۵۵ = ۸۰ + ۷۵ = ۸۰ + ۱۵۰×½
۶	۱۶ بهمن	۴:۰۰ بعد از ظهر	۱۵۷/۵ = ۸۰ + ۷۷/۵ = ۸۰ + ۱۵۵×½

پس از ۳ بار مصرف ۱۴۰ میلی‌گرم و پس از ۶ بار مصرف ۱۵۷/۵ میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک در بدن بیمار است. (هر ۸ ساعت یک قرص؛ نصف مقدار قبلی می‌ماند و ۸۰ میلی‌گرم اضافه می‌شود.)

۲۱۵ صفحه ۷۹ **فعالیت**

ب) با توجه به نحوه‌ی کامل کردن جدول بالا، رابطه‌ی بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود : $S_{n+۱}$ = ... + S_n ½ ، $S_۱$ = ...

$S_۱ = ۸۰$ ، $S_{n+۱} = ۸۰ + \frac{۱}{۲}S_n$ (پس از هر بار مصرف نصف مقدار قبلی می‌ماند و ۸۰ میلی‌گرم اضافه می‌شود).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱۶ صفحه ۷۹ **فعالیت**

ج) برای نوشتن ضابطه‌ی تابعی دنباله‌ی S_n برحسب n، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را A میلی‌گرم در نظر بگیریم (در این مسئله A = ۸۰ mg است)، با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی به‌دست آمده در قسمت ب : $S_۱$ = A ؛ $S_۲ = S_۱ ½ + A$ = ... ؛ $S_۳$ = ... + ... = $A + ½A + (½)^۲A = A + ½(A + ½A)$ ؛ به همین صورت برای محاسبه‌ی $S_۶$: $S_۶ = A (½)^{۰۰} + ... + A + ½A + (½)^۲A$ ؛ پس برای محاسبه‌ی مجموع آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف : (۱) $S_n = A (½)^{n-۱} + ... + A + ½A + (½)^۲A$. اگر طرفین رابطه‌ی (۱) را در ضریب ½ ضرب کنیم : (۲)

S_n ½ = A½ + ... + ... + ... با تفاضل (۱) از (۲) رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید ... (ضابطه‌ی تابعی S_n را بنویسید و به ازای A = ۸۰ ساده کنید.)

$S_۳ = A + \frac{۱}{۲}S_۲ = A + \frac{۱}{۲}A + (\frac{۱}{۲})^۲A$, $S_۲ = A + \frac{۱}{۲}A$ ؛ در $S_۶$ جمله‌ی آخر $(\frac{۱}{۲})^۵A$ است.

طرفین (۱) را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}S_n = \frac{۱}{۲}A + (\frac{۱}{۲})^۲A + \cdots + (\frac{۱}{۲})^{n-۱}A + (\frac{۱}{۲})^nA \quad (۲)$$

(۱) − (۲) :

$$S_n - \frac{۱}{۲}S_n = A - (\frac{۱}{۲})^nA \Rightarrow S_n(۱ - \frac{۱}{۲}) = A(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$$

$$S_n = A \times \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^n}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۲A(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$$ و با A = ۸۰ : $S_n = ۱۶۰(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$

۲۱۷ صفحه ۷۹ **فعالیت**

د) با توجه به رابطه‌ی به‌دست آمده برای S_n : $S_۱ = ۱۶۰(۱ - (½)^۱) = ۱۶۰ \times ½ = ۸۰$ ، $S_۲ =$ ..... ، $S_۶ =$ ..... . با جای‌گذاری مقادیر n=۱ تا n=۶ در رابطه‌ی به‌دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به‌دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

$S_۲ = ۱۶۰(۱ - \frac{۱}{۴}) = ۱۶۰ \times \frac{۳}{۴} = ۱۲۰$

$S_۶ = ۱۶۰(۱ - \frac{۱}{۶۴}) = ۱۶۰ \times \frac{۶۳}{۶۴} = ۱۵۷/۵$

همچنین $S_۳ = ۱۶۰ \times ۷/۸ = ۱۴۰$ ، $S_۴ = ۱۶۰ \times ۱۵/۱۶ = ۱۵۰$ و $S_۵ = ۱۶۰ \times ۳۱/۳۲ = ۱۵۵$. همه با جدول قسمت الف برابرند.

۲۱۸ صفحه ۸۰ **کار در کلاس**

در فعالیت صفحه‌ی پیش :

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

ب) ضابطه‌های دنباله‌های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای $a_۲$ و $S_۲$ چیست؟

الف) جمله‌ی اول (مقدار یک قرص) a = ۸۰ و نسبت مشترک $r = \frac{۱}{۲}$ است.

ب) $a_n = ۸۰(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$ ، $S_n = ۸۰ \times \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^n}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱۶۰(۱ - (\frac{۱}{۲})^n)$

$a_۲ = ۴۰$: مقدار آنتی‌بیوتیکی است که از قرص اول، پس از ۸ ساعت (یک نیمه‌عمر) در بدن مانده است. $S_۲ =$ ۱۲۰ : مجموع ۲ جمله‌ی اول (۸۰ + ۴۰) یعنی کل آنتی‌بیوتیک موجود در بدن پس از مصرف قرص دوم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱۹ صفحه ۸۱ کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

(جمله‌های دنباله، مجموع n جمله‌ی اول S_n) ردیف اول: ½ , ۱/۶ , ۱/۱۸ , ۱/۵۴ , ... با a_1 = ½ ، r = ⅓ ، S_5 = ۱۲۱/۱۶۲ و S_1 = ۰ ؛ ردیف دوم: ¼ , ۱/۱۶ , ۱/۶۴ , ... ، S_4 و S_8 = ؛ ردیف سوم: ۲/۵ , ۱/۵ , ۱/۱۰ , ... ، S_3 و S_9 = ؛ ردیف چهارم: ۲/۵ , ۲ , ۱۰ , ... ، S_6 = .

دنباله	a_1	r	جمله‌ی اول n مجموع
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$S_{10} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{3})^{10})}{1-\frac{1}{3}} = \frac{14762}{19683}$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$S_4 = \frac{85}{256}$ ، $S_8 = \frac{21845}{65536}$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$S_3 = \frac{7}{10}$ ، $S_9 = \frac{511}{640}$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$\frac{2}{5}$	5	$S_6 = \frac{\frac{2}{5}(5^6-1)}{5-1} = \frac{7812}{5} = 1562/4$

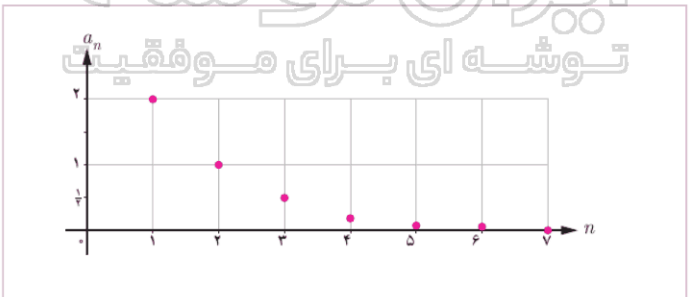
فرمول: $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$. مثلاً $S_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^4}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \times \frac{255}{256} = \frac{85}{256}$ ؛ $S_3 = \frac{2}{5} \times \frac{1-\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{10}$.

۲۲۰ صفحه ۸۱ کار در کلاس

۲. نمودار زیر یک دنباله‌ی هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جمله‌ی اول آن و محاسبه‌ی نسبت مشترک دنباله‌ی هندسی :

الف) جمله‌ی عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) حاصل $S_1$۰ را به‌دست آورید.



از نمودار: $a_1 = 2$ ، $a_2 = 1$ ، $a_3 = \frac{1}{2}$. نسبت مشترک $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2} = 2 \div ... = \frac{1}{2}$.

الف) $a_n = 2(\frac{1}{2})^{n-1}$

ب) $S_{10} = 2 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 4(1-\frac{1}{1024}) = \frac{1023}{256} \approx 3/996$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲۱ صفحه ۸۳ تمرین

۱. با نوشتن جمله‌های رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله‌ی هندسی را تشکیل می‌دهد.

۱) $a_{n+1} = (a_n)^2$ ، $a_1 = \frac{1}{2}$ **۲)** $a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n$ ، $a_1 = \frac{1}{2}$ **۳)** $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{1}$ ، $a_1 = 1$ **۴)** $a_{n+1} = 2 a_n$ ، $a_1 = 1$

۱) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$: نسبت‌ها $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ برابر نیستند؛ هندسی نیست.

۲) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$: هر جمله $\frac{2}{3}$ برابر قبلی است؛ **هندسی** ($r = \frac{2}{3}$).

۳) $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$: $\frac{2/3}{1/2} \neq \frac{1/2}{1}$ ؛ هندسی نیست.

۴) $1, 2, 4, 8, \ldots$: **هندسی** ($r = 2$).

پس گزینه‌های (۲) و (۴) دنباله‌ی هندسی‌اند.

۲۲۲ صفحه ۸۳ تمرین

۲. با توجه به مفهوم دنباله‌ی هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله‌ی هندسی ثابت کنید هرگاه c و b و a سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه b) $a \times c = b^2$ را واسطه‌ی هندسی میان a و c می‌نامند.)

فرض کنیم نسبت مشترک r باشد؛ در این صورت $b = ar$ و $c = br = ar^2$. پس $a \times c = a \times ar^2 = a^2r^2 = (ar)^2 = b^2$. (یا از $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = r$ نتیجه می‌شود $b^2 = ac$.)

۲۲۳ صفحه ۸۳ تمرین

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار x را به‌دست آورید.

طبق تمرین ۲ (واسطه‌ی هندسی): $(x+2)^2 = x(x+3)$.

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x \Rightarrow x = -4$

بررسی: جمله‌ها $-1, -2, -4$ هستند که با نسبت ۲ دنباله‌ی هندسی‌اند.

۲۲۴ صفحه ۸۳ تمرین

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده‌ی سرطانی او در ابتدا $۱۰^{۱۲}$ سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی‌درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی‌درمانی، رشد توده‌ی سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به‌طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی‌درمانی کمتر از ۷×۱۰^{۶} سلول شود و سپس با کوچک شدن توده‌ی سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده‌ی سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی‌درمانی شود؟

الف) هر بار ۴۰٪ سلول‌ها باقی می‌ماند، پس دنباله‌ی هندسی با $r = ۰/۴$ داریم:

$$۱۰^{۱۲} \times (۰/۴)^{۳} = ۱۰^{۱۲} \times ۰/۰۶۴ = ۶/۴ \times ۱۰^{۱۰}$$ سلول.

ب) $(۰/۴)^{۱۲} \approx ۱/۶۸ \times ۱۰^{-۵}$ (هنوز بزرگ‌تر) و $(۰/۴)^{n} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۱۰^{۱۲} \times (۰/۴)^{n} < ۷ \times ۱۰^{۶}$. با ماشین حساب: $(۰/۴)^{۱۳} \approx ۶/۷۱ \times ۱۰^{-۶}$ (کوچک‌تر از ۷×۱۰^{-۶}). پس باید **۱۳ مرتبه** شیمی‌درمانی شود.

۲۲۵ صفحه ۸۳ تمرین

۵. میان دو عدد a و b ، n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله‌ی شروع از a و ختم به b یک دنباله‌ی هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه‌ی $b/a = r^{n+۱}$ به‌دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات (n+۲) جمله است.)

دنباله: $a , ar , ar^{۲} , \dots$ و جمله‌ی $(n+۲)$ام برابر b است. طبق $a_k = a_۱ r^{k-۱}$:

$$b = a\, r^{(n+۲)-۱} = a\, r^{n+۱} \Rightarrow r^{n+۱} = \frac{b}{a}$$

۲۲۶ صفحه ۸۳ تمرین

۶. جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی هندسی ۲۷ و جمله‌ی پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله‌ی هفتم این دنباله‌ی هندسی را به‌دست آورید.

$$a_۵ = a_۳ r^{۲} \Rightarrow ۲۴۳ = ۲۷r^{۲} \Rightarrow r^{۲} = ۹$$

$a_۷ = a_۵ r^{۲} = ۲۴۳ \times ۹ = ۲۱۸۷$ (چه $r = ۳$ و چه $r = -۳$، جواب یکی است).

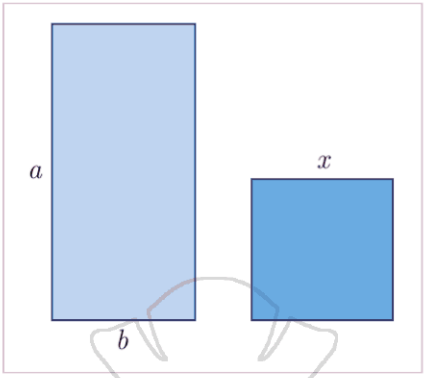
بررسی با $r = ۳$: $a_۱ = ۳$ و جمله‌ها $۳ , ۹ , ۲۷ , ۸۱ , ۲۴۳ , ۷۲۹ , ۲۱۸۷$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲۷ صفحه ۸۴ تمرین

۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم‌مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند؟

الف) x و b و a ب) b و x و a پ) x و a و b



مساحت‌ها برابرند: $x^2 = ab$. طبق تمرین ۲، اگر x واسطه‌ی هندسی دو عدد باشد، سه عدد (با x در وسط) دنباله‌ی هندسی‌اند.

پس دنباله‌ی «b و x و a» یعنی گزینه‌ی **ب** هندسی است (نسبت‌ها: $x/b = a/x$ چون $x^2 = ab$). در گزینه‌های دیگر x در وسط نیست و در حالت کلی هندسی نیستند.

۲۲۸ صفحه ۸۴ تمرین

۸. یک شهاب‌سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جوّ زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب‌سنگ به جوّ زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

هر دقیقه ۸۵٪ باقی می‌ماند ($r = ۰/۸۵$):

$۱۵۰۰۰ \times (۰/۸۵)^5 \approx ۱۵۰۰۰ \times ۰/۴۴۳۷ = ۶۶۵۵/۶$ کیلوگرم (حدود ۶۶۵۶ کیلوگرم).

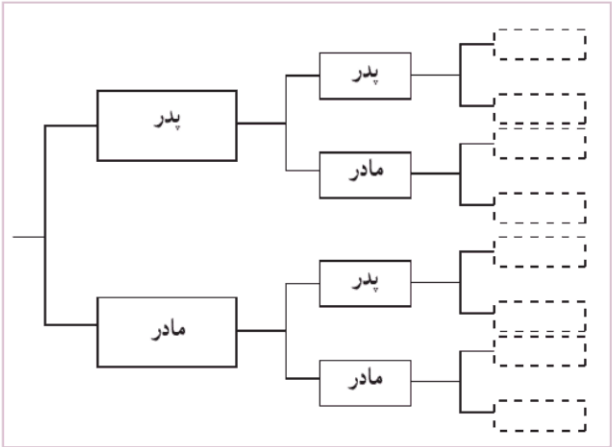
۲۲۹ صفحه ۸۴ تمرین

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادربزرگ، چهار پدر پدربزرگ و چهار مادر مادربزرگ و ... دارد.

الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟



تعداد نیاکان در نسل‌ها: ۲, ۴, ۸, ... دنباله‌ی هندسی با $a = ۲$ و $r = ۲$ است.

الف) $a_{۱۰} = ۲ \times ۲^{۹} = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$ نفر.

ب) $S_{۱۰} = ۲ \times \frac{۲^{۱۰} - ۱}{۲ - ۱} = ۲ \times ۱۰۲۳ = ۲۰۴۶$ نفر.

۲۳۰ صفحه ۸۴ تمرین

۱۰. مجموع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱ + ۴ + ۱۶ + ... + ۴۰۹۶

ب) ۱/۵ + ۱/۱۰ + ۱/۲۰ + ... + ۱/۶۴۰

الف) $a = ۱$ ، $r = ۴$ و $۴۰۹۶ = ۴^{۶}$ پس جمله‌ی هفتم است ($n = ۷$):

$$S_{۷} = ۱ \times \frac{۴^{۷} - ۱}{۴ - ۱} = \frac{۱۶۳۸۳}{۳} = ۵۴۶۱$$

ب) $a = \frac{۱}{۵}$ ، $r = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۶۴۰} = \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۱۲۸} = \frac{۱}{۵}(\frac{۱}{۲})^{۷}$ پس جمله‌ی هشتم است ($n = ۸$):

$$S_{۸} = \frac{۱}{۵} \times \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^{۸}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{۵} \times \frac{۲۵۵}{۲۵۶} = \frac{۵۱}{۱۲۸}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳۱ صفحه ۸۴ تمرین

۱۱. نخستین جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله‌ی هندسی ½ است. کدام جمله‌ی دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به‌دست آورید.

$$۱۵۳۶(\frac{۱}{۲})^{n-۱} = ۶ \Rightarrow ۲^{n-۱} = \frac{۱۵۳۶}{۶} = ۲۵۶ = ۲^{۸} \Rightarrow n = ۹$$

پس جمله‌ی نهم برابر ۶ است.

$$S_9 = 1536 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^9}{\frac{1}{2}} = 3072 \times \frac{511}{512} = 6 \times 511 = 3066$$

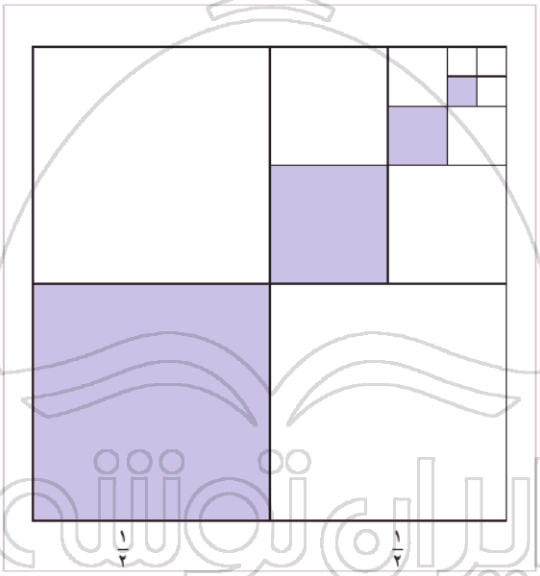
۲۳۲ صفحه ۸۵ تمرین

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.

الف) چرا دنباله‌ی مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله‌ی هندسی را تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

الف) ضلع مربع اول $\frac{1}{2}$ ، مساحت $\frac{1}{4}$. در هر مرحله مربع تقسیم‌شده نصف ضلع دارد و مربع رنگی نیز نصف ضلع مربع قبلی را دارد؛ پس مساحت هر مربع رنگی $\frac{1}{4}$ برابر مساحت مربع رنگی قبلی است: مساحت‌ها $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$ با نسبت ثابت $\frac{1}{4}$ ، یعنی دنباله‌ی هندسی.

ب) $S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1-(\frac{1}{4})^n\right)$

پ) $S_6 = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4096}) = \frac{1}{3} \times \frac{4095}{4096} = \frac{1365}{4096} \approx 0/333$ متر مربع.

۲۳۳ صفحه ۸۵ بازی و ریاضی

مربع‌های زیر را با اعداد مثبت به‌گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول روبه‌رو یک دنباله‌ی هندسی تشکیل بدهد. (اعداد داده‌شده در شکل: ۲ ، ۱۸ ، ۱/۴ ، ۹ ، ۳۲ ، ۱۰۰)

راه حل: در یک دنباله‌ی هندسی هر جمله واسطه‌ی هندسی دو جمله‌ی کناری است. با دو عدد در یک سطر یا ستون، بقیه‌ی خانه‌ها پیدا می‌شوند؛ مثلاً در ستون چهارم از ۲ و ۳۲ (چهار خانه فاصله) r = ۲ و ستون ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴ ؛ در سطر ۲ و ۱۸ (دو خانه فاصله) r = ۳ و سطر ... ۲/۳ ، ۲ ، ۶ ، ۱۸ ، ۵۴ و ستون ۵۴ ، ۹ ، ۳/۲ ، ۱/۴ ؛ ... با ادامه‌ی همین روش خانه‌ها یکی‌یکی پر می‌شوند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۴ صفحه ۸۶ فعالیت

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$۴^{۳} = (۲)^{-۷} = (\frac{۲}{۵})^{۴} = ۷۳^{۱} = (-۳)^{۶} = -۳^{۶} = (۰/۰۱)^{۵} = (۱\frac{۱}{۲})^{۰} =$

$۴^{۳} = ۶۴$ ؛ $۲^{-۷} = \frac{۱}{۲^{۷}} = \frac{۱}{۱۲۸}$ ؛ $(\frac{۲}{۵})^{۴} = \frac{۱۶}{۶۲۵}$ ؛ $۷۳ = ۷۳^{۱}$

$(-۳)^{۶} = ۷۲۹$ ؛ $-۳^{۶} = -۷۲۹$ (توان فقط روی ۳ است) ؛ $(۰/۰۱)^{۵} = (۱۰^{-۲})^{۵} = ۱۰^{-۱۰}$ ؛ $(۱\frac{۱}{۲})^{۰} = ۱$

۲۳۵ صفحه ۸۶ فعالیت

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند.)

$(۱۰^{۶})^{۸} = (۴/۷)^{۸} \div (۴/۷)^{۵} = (-۵)^{۳} \times (-۴)^{۳}$ (نمونه) $(۲/۱)^{۱۱} = (۲۱/۱۰)^{۴} \times (۲۱/۱۰) \times (۲/۱)^{۶} = ۹^{۷} \div (-۳۶)^{۷}$

=

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها یا مثال‌های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید. (جدول: ردیف‌ها a^{m} ۰

با نمونه‌ی $a^{m+n} = a^{n}$ ؛ ردیف $a^{m-n} = a^{n} / a^{m}$ با نمونه‌ی $۵^{۱۵} = ۵^{۸} \times ۵^{۷}$ ؛ $(ab)^{m} = b^{m} \cdot a^{m}$ ؛ $۹^{۴} = ۹^{۶} \div ۹^{۱۰}$ ؛ $(a/b)^{m} = b^{m} / a^{m}$ ؛ $a^{mn} = (a^{m})^{n}$ با نمونه‌ی $۲^{۱۲} = ۲^{۳\times۴} = (۲^{۳})^{۴}$.)

الف) جای هر عبارت در جدول:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

رابطه	مثال
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(۲/۱)^۶ \times (\frac{۲۱}{۱۰}) \times (۲\frac{۱}{۱۰})^۴ = (۲/۱)^{۱۱}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(\frac{۴}{۷})^۵ \div (\frac{۴}{۷})^۸ = (\frac{۴}{۷})^{۵-۸} = (\frac{۴}{۷})^{-۳}$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$(-۴)^۳ \times (-۵)^۳ = [(-۴)(-۵)]^۳ = ۲۰^۳$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$(-۳۶)^۷ \div ۹^۷ = (\frac{-۳۶}{۹})^۷ = (-۴)^۷$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(۱۰^۶)^۸ = ۱۰^{۴۸}$

ب) (هر مثال می‌تواند متفاوت باشد):

رابطه	مثال
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$۵^۷ \times ۵^۸ = ۵^{۱۵}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$۹^{۱۰} \div ۹^۶ = ۹^۴$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	$۲^۳ \times ۵^۳ = ۱۰^۳$
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$\frac{۶^۴}{۳^۴} = ۲^۴$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(۲^۳)^۴ = ۲^{۱۲}$

۲۳۶ صفحه ۸۷ فعالیت

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه‌های دوم عدد a همان ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 = a$ هستند. برای مثال، ریشه‌های دوم عدد ۱۶ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 = ۱۶$ هستند و چون $۴^2 = ۱۶$ و $(-۴)^2 = ۱۶$، پس ۴ و ۴- یا $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ ریشه‌های دوم عدد ۱۶ هستند. همچنین، ریشه‌ی سوم عدد حقیقی مانند a، ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 = a$ است. برای مثال، ریشه‌ی سوم عدد ۲۷، ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 = ۲۷$ است که برابر ۳ می‌باشد. با همین استدلال، ریشه‌ی پنجم عدد ۳۲-، پاسخ معادله‌ی $x^5 = -۳۲$ است که برابر ..... و ریشه‌های ششم عدد ۶۴، ریشه‌های معادله‌ی $x^6 =$ ..... هستند که برابر ۲+ و ۲- می‌باشند. جدول صفحه‌ی بعد را مانند نمونه کامل کنید.

$x^5 = -۳۲ \Rightarrow x = -۲$ (چون $(-۲)^5 = -۳۲$)؛ و ریشه‌های ششم عدد ۶۴ ریشه‌های معادله‌ی $x^6 = ۶۴$ هستند ($۲^۶ = ۶۴$ و $(-۲)^۶ = ۶۴$).

عدد (a)	۶۴	-۶۴
ریشه‌های چهارم	$\pm\sqrt[4]{64}$ (≈ ±۲/۸۳)	وجود ندارد
$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{64} \approx$ ۲/۸۳	وجود ندارد
ریشه‌ی پنجم	$\sqrt[5]{64} \approx$ ۲/۲۹۷	$\sqrt[5]{-64} \approx$ -۲/۲۹۷
$\sqrt[5]{a}$	$\sqrt[5]{64} \approx$ ۲/۲۹۷	$\sqrt[5]{-64} \approx$ -۲/۲۹۷
ریشه‌های ششم	$(\pm\sqrt[6]{64})$ ۲ و -۲	وجود ندارد
$\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[6]{64} =$ ۲	وجود ندارد
ریشه‌ی هفتم	$\sqrt[7]{64} \approx$ ۱/۸۱۱	$\sqrt[7]{-64} \approx$ -۱/۸۱۱
$\sqrt[7]{a}$	$\sqrt[7]{64} \approx$ ۱/۸۱۱	$\sqrt[7]{-64} \approx$ -۱/۸۱۱

نتیجه: برای n زوج، عدد مثبت دو ریشه‌ی nام (قرینه) دارد و عدد منفی ریشه ندارد؛ برای n فرد، هر عدد دقیقاً یک ریشه‌ی nام دارد.

۲۳۷ صفحه ۸۸ **کار در کلاس**

۱ـ با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال‌ها را می‌توانید به کمک ماشین حساب به‌دست آورید.

$a \geq 0$ و n زوج است : $n = 8$ ، $a = 25$ $\Longrightarrow$ ریشه‌های ۸ام عدد ۲۵ = $\sqrt[8]{25} \approx$ ۱/۴۹۵ ، $-\sqrt[8]{25} \approx$ -۱/۴۹۵ (نمونه)

$a \geq 0$ و n فرد است : $a < 0$ $\Longrightarrow$ $n =$, $a =$ و n زوج است : $a < 0$ $\Longrightarrow$ $n =$, $a =$ و n فرد است : $n =$, $a =$ $\Longrightarrow$

- $a \geq 0$ و n فرد: $n = 3$ ، $a = 7$ $\Longrightarrow$ ریشه‌ی سوم عدد ۷ فقط $\sqrt[3]{7} \approx$ ۱/۹۱۳ است.
- $a < 0$ و n زوج: $n = 4$ ، $a = -9$ $\Longrightarrow$ ریشه‌ی چهارم عدد -۹ وجود ندارد (هیچ عددی به توان زوج منفی نمی‌شود).
- $a < 0$ و n فرد: $n = 5$ ، $a = -20$ $\Longrightarrow$ ریشه‌ی پنجم عدد -۲۰ برابر $\sqrt[5]{-20} \approx$ -۱/۸۲۱ است (فقط یک ریشه).

۲۳۸ صفحه ۸۸ **کار در کلاس**

۲. با توجه به اینکه $\sqrt{(a^2)} = |a|$ و $\sqrt[3]{(a^3)} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است؛ یعنی: $\sqrt[n]{(a^n)} = |a|$ اگر n زوج است و $a =$ اگر n فرد است. برای مثال، $\sqrt{(-15)^{10}} = |-15| =$ ۱۵ و $\sqrt[5]{(-8/3)^5} =$ $-8/3$ ، همچنین $\sqrt[4]{(-3)^4} =$ ..... و $\sqrt{()^{12}} =$ ۵

$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| =$ ۳ ($n =$ ۴ زوج است).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$۵ = |\pm ۵| = \sqrt[۱۲]{(\pm ۵)^{۱۲}}$: داخل پرانتز می‌تواند ۵ یا ۵- باشد (n = ۱۲ زوج است).

۲۳۹ صفحه ۹۰ **فعالیت**

۱. پدر محمد زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. ... در زیر میکروسکوپ، نشانش داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه‌ی باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت): ۱ ، ۲ ، ۳ ، .....(۴) ، ۵ ، .....(۶) ، ۷ ، ..... ، t جرم (گرم): ..... ، ..... ، ..... ، $۲^۴ = ۱۶$ ، ..... ، $۲^۶ = ۶۴$ ، ..... ، ..... ، ۲^t

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	t
جرم (گرم)	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۲^t

جرم هر ساعت دو برابر می‌شود، پس پس از t ساعت جرم ۲^t گرم است (دنباله‌ی هندسی با r = ۲).

۲۴۰ صفحه ۹۱ **فعالیت**

حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به‌دست آورید.

پس از ۱۰ دقیقه (⅙ ساعت) = $۲\sqrt{}^۶$ (نمونه) پس از ۲۰ دقیقه (..... ساعت) = ...

۲۰ دقیقه = $\frac{۱}{۳}$ ساعت. جرم $۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲} \approx ۱/۲۶$ گرم است.

(بررسی: اگر در هر ۲۰ دقیقه جرم a برابر شود، پس از سه بار $a^۳ = ۲$ و $a = \sqrt[۳]{۲}$ ؛ همچنین پس از ۱۰ دقیقه $۲^{\frac{۱}{۶}} = \sqrt[۶]{۲} \approx ۱/۱۲$ گرم.)

۲۴۱ صفحه ۹۲ **کار در کلاس**

اعداد توان‌دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$۵^{۳/۴} = ۶^{۷/۹} = ۱۲^{-۲/۱۱} = (۲\frac{۱}{۳})^{-۸/۳} = (۰/۰۰۱)^{۱۴/۴} =$

$۶^{\frac{۷}{۹}} = \sqrt[۹]{۶^۷}$ ؛ $۵^{\frac{۳}{۴}} = \sqrt[۴]{۵^۳} = \sqrt[۴]{۱۲۵}$

$۱۲^{-\frac{۲}{۱۱}} = \frac{۱}{۱۲^{\frac{۲}{۱۱}}} = \frac{۱}{\sqrt[۱۱]{۱۲^۲}} = \frac{۱}{\sqrt[۱۱]{۱۴۴}}$

$(۲\frac{۱}{۳})^{-\frac{۸}{۳}} = (\frac{۷}{۳})^{-\frac{۸}{۳}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۷}{۳})^۸}} = \sqrt[۳]{(\frac{۳}{۷})^۸}$

$(۰/۰۰۱)^{\frac{۱۴}{۴}} = (۰/۰۰۱)^{\frac{۷}{۲}} = \sqrt{(۰/۰۰۱)^۷} = \sqrt{۱۰^{-۲۱}} \approx ۳/۱۶ \times ۱۰^{-۱۱}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴۲ صفحه ۹۲ | کار در کلاس

۱. هر یک از عبارت‌های توانی زیر را به‌صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به‌صورت توان‌دار بنویسید.

$۳^{۱/۴} = ۷^{۱/۸} = ۲۵\sqrt{۳} = (۲/۷)\sqrt{۱۲} = (۰/۳۱)^{۱/۲} = ۱\sqrt{۱۰} =$

$\sqrt[۴]{۳} = ۳^{\frac{۱}{۴}}$ ؛ $\sqrt[۸]{۷} = ۷^{\frac{۱}{۸}}$ ؛ $۲۵^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲۵}$

$(۲/۷)^{\frac{۱}{۱۲}} = \sqrt[۱۲]{۲/۷}$ ؛ $(۰/۳۱)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۰/۳۱}$ ؛ $۱^{\frac{۱}{۱۰}} = ۱ = \sqrt[۱۰]{۱}$

۲۴۳ صفحه ۹۲ | کار در کلاس

۲. با توجه به مسئله‌ی بیان شده در ابتدای معرفی توان‌های گویا، سرمایه‌ی شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان‌های خواسته شده به‌دست آورید. (سرمایه = ۱۰۰ × $(۱/۲)^t$ بر حسب میلیون تومان، t به سال)

۶ ماه (½ سال) بعد : ۱۰۰ × $(۱/۲)^{۱/۲}$ = ۱۰۰ × $\sqrt{۱/۲}$ (نمونه) ۱ سال و ۲ ماه بعد : ۳ سال و ۶ ماه بعد : ۲۰۰ روز بعد :

۱ سال و ۲ ماه = $۱\frac{۱}{۶} = \frac{۷}{۶}$ سال: $(۱/۲)^{\frac{۷}{۶}} = ۱۰۰\sqrt[۶]{۱/۲^۷} \approx ۱۲۳/۷$ میلیون تومان.

۳ سال و ۶ ماه = $\frac{۷}{۲}$ سال: $(۱/۲)^{\frac{۷}{۲}} = ۱۰۰\sqrt{۱/۲^۷} \approx ۱۸۹/۳$ میلیون تومان.

۲۰۰ روز = $\frac{۲۰۰}{۳۶۵} = \frac{۴۰}{۷۳}$ سال: $(۱/۲)^{\frac{۴۰}{۷۳}} \approx ۱۱۰/۵$ میلیون تومان. (نمونه: ≈ ۱۰۹/۵ میلیون تومان)

۲۴۴ صفحه ۹۳ | کار در کلاس

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$۴^{۱/۲} = (۲^۲)^{۱/۲} = ۲^{۲\times۱/۲} = ۲$ **(نمونه)** $= ۱۲۵^{-۱/۳} = ۱۰۰^{۱/۲} = ۳۲^{۱/۵} =$

$۱۲۵^{-\frac{۱}{۳}} = (۵^۳)^{-\frac{۱}{۳}} = ۵^{-۱} = \frac{۱}{۵}$

$۱۰ = (۱۰^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰۰^{\frac{۱}{۲}}$ ؛ $۳۲^{\frac{۱}{۵}} = (۲^۵)^{\frac{۱}{۵}} = ۲$

۲۴۵ صفحه ۹۳ | کار در کلاس

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$(۲\times۸)^{۱/۴} = -۴$ **(۱۰۰۰)$^{۱/۳}$ =** $۳^{۱/۳} \times ۳^{۲/۳} = ۳ = ۷^{۳/۴} \times ۷^{۵/۴} = ۷^۲ = ۴۹ = ۱۲۵^{۲/۳} \div ۱۲۵^{۱/۴} = ۱۲۵^{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}} = ۱۲۵^{\frac{۵}{۱۲}} = (۵^۳)^{\frac{۵}{۱۲}} = ۵^{\frac{۵}{۴}} = ۵\sqrt[۴]{۵}$

$(۱/۵)^{۲/۷} \times ۸^{۲/۷} = (۱/۵ \times ۸)^{۲/۷} = ۴۰^{۲/۷}$

$-۴(۱۰۰۰)^{\frac{۱}{۳}} = -۴ \times ۱۰ = -۴۰$ ؛ $(۲ \times ۸)^{\frac{۱}{۴}} = ۱۶^{\frac{۱}{۴}} = ۲$

$۷^{\frac{۳}{۴}} \times ۷^{\frac{۵}{۴}} = ۷^۲ = ۴۹$ ؛ $۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۲}{۳}} = ۳^۱ = ۳$

$۱۲۵^{\frac{۲}{۳}} \div ۱۲۵^{\frac{۱}{۴}} = ۱۲۵^{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}} = ۱۲۵^{\frac{۵}{۱۲}} = (۵^۳)^{\frac{۵}{۱۲}} = ۵^{\frac{۵}{۴}} = ۵\sqrt[۴]{۵}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

«(۱/۵)» در کتاب به‌معنی عدد اعشاری ۱/۵ (یک و نیم) خوانده شد: $\sqrt[۷]{۱۴۴} = ۱۲^{\frac{۲}{۷}} = (۸ \times ۱/۵)^{\frac{۲}{۷}} = ۸^{\frac{۲}{۷}} \times (۱/۵)^{\frac{۲}{۷}}$.
اگر منظور کسر یک‌پنجم باشد جواب $(\frac{۸}{۵})^{\frac{۲}{۷}}$ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۴۶ صفحه ۹۳ کار در کلاس

۵. دانش‌آموزی $\sqrt[۳]{-۸}$ را به‌صورت $(-۸)^{۱/۳}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[۳]{-۸}$ به‌صورت $(-۸)^{۱/۳}$ نادرست است.

در این کتاب توان گویای $a^{۱/n}$ فقط برای $a > ۰$ تعریف شده است: $a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (a مثبت). چون پایه‌ی (−۸) منفی است، $(-۸)^{۱/۳}$ در این کتاب تعریف نشده است؛ پس نوشتن $\sqrt[۳]{-۸} = (-۸)^{۱/۳}$ درست نیست، هرچند $\sqrt[۳]{-۸} = -۲$ وجود دارد.

(مثلاً اگر اجازه می‌دادیم، $(-۸)^{۲/۶}$ با $(-۸)^{۱/۳}$ برابر می‌شد، ولی $(-۸)^{۲/۶} = \sqrt[۶]{(۶۴)^{۲}} = ۲$ و $\sqrt[۳]{-۸} = -۲$ ؛ تناقض.)

---

۲۴۷ صفحه ۹۳ تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt{۵}$ ، $\sqrt[۴]{(۵^{۲})}$ ، $\sqrt[۶]{(۵^{۳})}$ با هم برابرند.

$\sqrt{۵} = ۵^{\frac{۱}{۲}} = ۵^{\frac{۲}{۴}} = (۵^{۲})^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۵^{۲}}$

$\sqrt{۵} = ۵^{\frac{۱}{۲}} = ۵^{\frac{۳}{۶}} = (۵^{۳})^{\frac{۱}{۶}} = \sqrt[۶]{۵^{۳}}$. پس هر سه برابرند.

---

۲۴۸ صفحه ۹۳ تمرین

۲. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

$۳^{۱/۳} \times ۳^{۱/۴} = ۳^{۱/۴} \times ۵^{(-۱/۴)} = ۸^{۱/۲} \times ۲^{۱/۲} = (۲۶)^{۱/۳} =$

$= (m^{۲}n^{۳})^{۱/۲}{}^{۲}(n^{۱/۲} \cdot m^{۳/۴}) = ۳^{۰/۷۴} \times ۳^{۰/۲۶} = (a^{-۱/۲}/a^{-۱/۴})^{-۴} = (۳^{۴}/۲۶)^{۱/۲} =$

$۳^{\frac{۷}{۱۲}} = ۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} = ۳^{۰} = ۱ = ۵^{۰} = ۵^{\frac{۱}{۴}} \times ۵^{-\frac{۱}{۴}} = ۱۶^{\frac{۱}{۲}} = ۴ = ۸^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = (۲^{۶})^{\frac{۱}{۳}} = ۲^{۲} = ۴$ ؛

$\frac{۹}{۸} = \frac{۳^{۲}}{۲^{۳}} = (\frac{۳^{۴}}{۲^{۶}})^{\frac{۱}{۲}} = a$ ؛ $(\frac{a^{-\frac{۱}{۲}}}{a^{-\frac{۱}{۴}}})^{-۴} = (a^{-\frac{۱}{۴}})^{-۴} = ۳^{۱} = ۳ = ۳^{۰/۷۴} \times ۳^{۰/۲۶}$

$(m^{\frac{۳}{۴}}n^{\frac{۱}{۲}})^{۲}(m^{۲}n^{۳})^{\frac{۱}{۲}} = m^{\frac{۳}{۲}}n \times m\,n^{\frac{۳}{۲}} = m^{\frac{۵}{۲}}n^{\frac{۵}{۲}} = (mn)^{\frac{۵}{۲}}$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۴۹ صفحه ۹۴ تمرین

۳. در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$8^x \times 9^5 = 72^5$ $(0/36)^4 \times (0/36)^x \times (0/36)^{-6} = (0/36)^7$ $(3^x)^6 / 1/3^2 \times x^5 \times 15^3 = (3 \times 3^5 \times 3^2) / 5^8$

۱) $72 = 8 \times 9$ ، پس $72^5 = 8^5 \times 9^5$ و $8^x = 8^5 \Rightarrow x = 5$.

۲) $x - 6 + 4 = 7 \Rightarrow x = 9$.

۳) $3^{6x} = 3^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$.

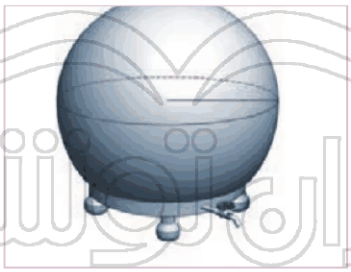
۴) مخرج $3^8 = 3 \times 3^5 \times 3^2$ ، پس $x = 15 \Rightarrow x^5 = 15^5 \Rightarrow x^5 = 15^8 = 3^8 \times 5^8$.

۲۵۰ صفحه ۹۴ تمرین

۴. همان‌طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v = (4/3)\pi r^3$ (v حجم کره) به‌دست می‌آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای را از فرمول زیر به‌دست آورد. $r = (3v/4\pi)^{1/3}$

ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $32\pi/3$ است، به‌دست آورید.



الف) $v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{3v}{4\pi}$. ریشه‌ی سوم دو طرف (r مثبت است): $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}} = (\frac{3v}{4\pi})^{\frac{1}{3}}$.

ب) $r = (\frac{3 \times \frac{32\pi}{3}}{4\pi})^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = 2$ واحد (شعاع ۲).

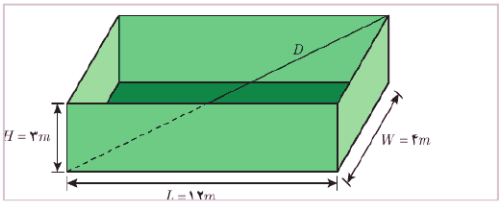
۲۵۱ صفحه ۹۴ تمرین

۵. اگر D قطر جعبه‌ی زیر باشد، اندازه‌ی آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{1/2}$ (L طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به‌دست می‌آید.

الف) با توجه به شکل، اندازه‌ی D را به‌دست آورید. ($L = 12m$ ، $W = 4m$ ، $H = 3m$)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) اگر اندازه‌ی L = W = H = ۱m باشد، اندازه‌ی D را به‌دست آورید.



الف) $D = (۱۲^۲ + ۴^۲ + ۳^۲)^{\frac{۱}{۲}} = (۱۴۴ + ۱۶ + ۹)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۶۹^{\frac{۱}{۲}} = ۱۳$ متر.

ب) $D = (۱ + ۱ + ۱)^{\frac{۱}{۲}} = ۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳} \approx ۱/۷۳$ متر.

۲۵۲ صفحه ۹۵ فعالیت

«بنیاد ملی بازی‌های رایانه‌ای» ... بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می‌شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله‌ی اوّل، یکی از عوامل آلوده‌کننده‌ی محیط‌زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می‌گیرد. در مرحله‌ی دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط‌زیست می‌شود شناسایی و نابود کند ۹ امتیاز می‌گیرد و به همین ترتیب در مرحله‌ی بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحله‌ی بعد از آن ۸۱ امتیاز و ... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می‌شود که بازیکن به امتیاز ۴۳۰۴۶۷۲۱ برسد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱. فکر می‌کنید در مرحله‌ی ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟ برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید. (جدول ۱: تعداد مراحل بازی ۰ تا ۱۰ و میزان امتیازهای کسب شده؛ $۳^۰=۱$ ، $۳^۱=۳$ ، $۳^۲=۹$ ، $۳^۳=۲۷$ ، ؟ برای مرحله‌ی ۴ ، ۲۴۳ برای ؟ ، مراحل ۶ تا ۱۰ ؟)

تعداد مراحل بازی	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
امتیاز کسب شده	$۳^۰=۱$	$۳^۱=۳$	$۳^۲=۹$	$۳^۳=۲۷$	$۳^۴=۸۱$	$۳^۵=۲۴۳$	$۳^۶=۷۲۹$	$۳^۷=۲۱۸۷$	$۳^۸=۶۵۶۱$	$۳^۹=۱۹۶۸۳$	$۳^{۱۰}=۵۹۰۴۹$

در مرحله‌ی ششم $۳^۶ = ۷۲۹$ امتیاز می‌گیرد؛ ۲۴۳ مربوط به مرحله‌ی ۵ است.

۲۵۳ صفحه ۹۶ فعالیت

۲. در کدام مرحله، میزان امتیازهای کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟

۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازهای کسب شده، رابطه‌ای به‌دست آورید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴. با توجه به رابطه‌ی به‌دست آمده در قسمت قبل، آیا می‌توانید امتیازهای کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله‌ی nام را به‌دست آورید؟

۲. $n = ۸ \Rightarrow ۳^n = ۶۵۶۱ = ۳^۸$ ، یعنی در مرحله‌ی هشتم.

۳. بله؛ هر مرحله ۳ برابر مرحله‌ی قبل است: امتیاز مرحله‌ی n برابر $f(n) = ۳^n$ است.

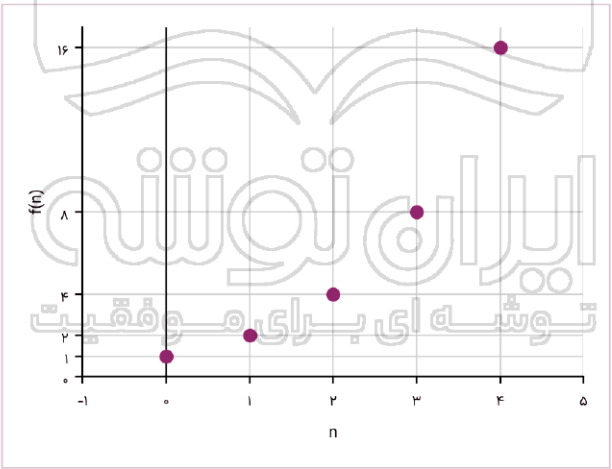
۴. مرحله‌ی دهم: $۳^{۱۰} = ۵۹۰۴۹$ ؛ مرحله‌ی بیستم: $۳^{۲۰} = ۳۴۸۶۷۸۴۴۰۱$ ؛ مرحله‌ی n ام: ۳^n . (امتیاز $۳^{۱۶} = ۴۳۰۴۶۷۲۱$ یعنی پایان بازی در مرحله‌ی شانزدهم.)

۲۵۴ صفحه ۹۶ **فعالیت**

در بخش دنباله‌ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به‌دست آوردیم که به‌عنوان تابع از ضابطه‌ی $f(n) = ۲^n$ پیروی می‌کرد. دوباره به این فعالیت برمی‌گردیم؛

۱. مقادیر به‌دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به‌دست آمده را روی دستگاه مختصات نمایش دهید.

n	۰	۱	۲	۳	۴
$f(n) = ۲^n$	۱	۲	۴	۸	۱۶



نقاط (۰,۱) ، (۱,۲) ، (۲,۴) ، (۳,۸) ، (۴,۱۶) هستند؛ این نقاط روی یک خط نیستند و به‌سرعت بالا می‌روند.

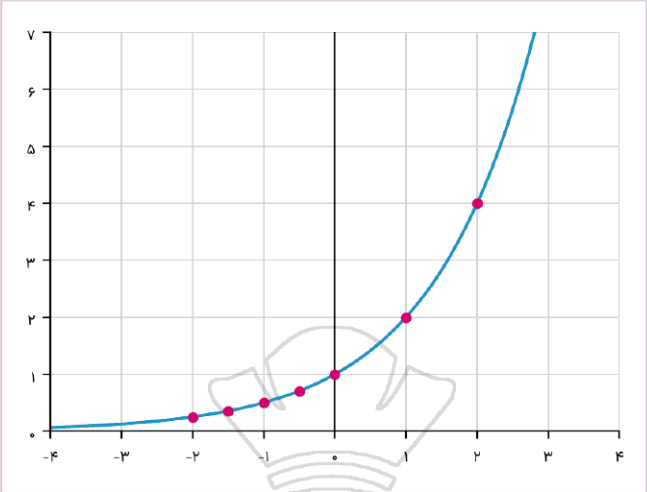
۲۵۵ صفحه ۹۶ **فعالیت**

۲. جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده‌ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

2^x و x : ۰ ، $-\frac{1}{2}$ ، -1 ، $-\frac{3}{2}$ ، -2 : ۱ ، ۰/۷۰۷ ، ۰/۵۰۰ ، ۰/۳۵۳ ، ۰/۲۵۰

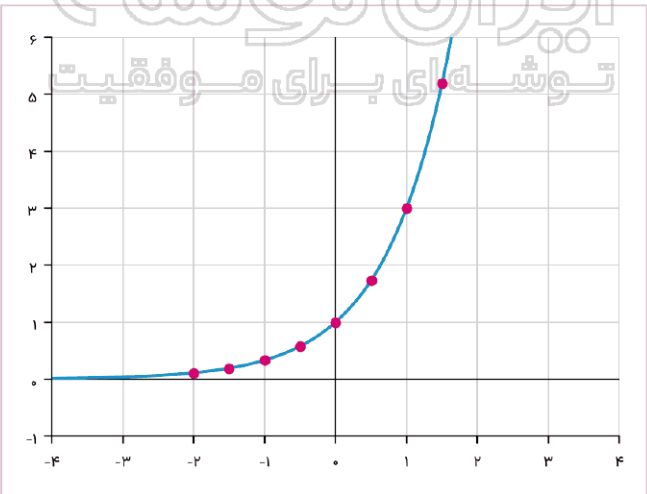
نقاط: (۰, ۱) ، (−۰/۵ , ۰/۷۰۷) ، (−۱ , ۰/۵) ، (−۱/۵ , ۰/۳۵۳) ، (−۲ , ۰/۲۵). مقدارها مثبت‌اند و هرچه x کوچک‌تر (منفی‌تر) می‌شود به صفر نزدیک‌تر می‌شوند.



۲۵۶ صفحه ۹۷ **فعالیت**

الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = 3^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحه‌ی بعد را روی محورهای مختصات بیاورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.

نقاط جدول ۲: (−۲ , ۰/۱۱۱) ، (−۱/۵ , ۰/۱۹۲) ، (−۱ , ۰/۳۳۳) ، (−۰/۵ , ۰/۵۷۷) ، (۰ , ۱) ، (۰/۵ , ۱/۷۳۲) ، (۱ , ۳) ، (۱/۵ , ۵/۱۹۶) ، (۲ , ۹) . با وصل کردن آنها منحنی صعودی زیر به‌دست می‌آید که محور y ها را در (۰,۱) قطع می‌کند؛ نمودار بالای محور x است و به آن نزدیک می‌شود ولی قطعش نمی‌کند.



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۵۷ صفحه ۹۸ **فعالیت**

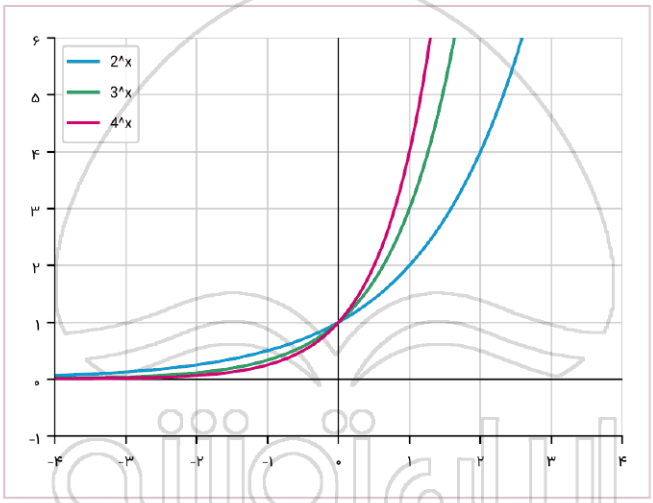
ب) با استفاده از نمودار تابع $y = ۳^x$ ، مقدار تقریبی عدد $۳^{۵/۲}$ را به‌دست آورید.

پ) نمودار توابع $y = ۲^x$ ، $y = ۳^x$ و $y = ۴^x$ را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت‌ها و شباهت‌های بین این سه تابع را بیان کنید.

ب) $۳^{\frac{۵}{۲}} = ۳^{۲} \times ۳^{\frac{۱}{۲}} = ۹\sqrt{۳}$. از نمودار، به ازای $x = ۰/۵$ مقدار $y \approx ۱/۷$ است؛ پس $۹ \times ۱/۷۳ \approx ۱۵/۶$.

پ) در شکل کتاب، نمودار آبی (کم‌شیب‌ترین) مربوط به $y = ۲^x$ ، سبز مربوط به $y = ۳^x$ و صورتی (تندترین) مربوط به $y = ۴^x$ است؛ زیرا برای $x > ۰$ هرچه پایه بزرگ‌تر، y بزرگ‌تر است.

- شباهت‌ها: هر سه از نقطه‌ی (۰،۱) می‌گذرند؛ بالای محور x هستند ($y > ۰$)؛ صعودی‌اند؛ هرچه x کوچک‌تر شود به محور x نزدیک می‌شوند بی‌آنکه آن را قطع کنند.
- تفاوت‌ها: برای $x > ۰$ هرچه پایه بزرگ‌تر باشد، نمودار سریع‌تر بالا می‌رود (۴^x از ۳^x و آن از ۲^x تندتر)؛ برای $x < ۰$ هرچه پایه بزرگ‌تر باشد نمودار زودتر به محور x نزدیک می‌شود.

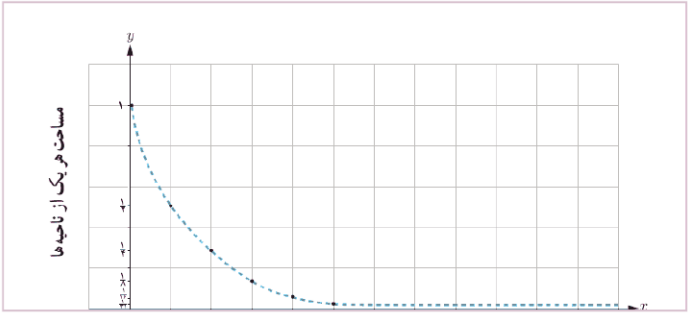


۲۵۸ صفحه ۹۹ **فعالیت**

یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک‌بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی ¼ مساحت اولیه است. در جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌هایی که بر اثر تا زدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند، نشان داده شده است. (تعداد تا زدن ۰: ۱ ؛ ۱: ½ ؛ ۲: ¼ ؛ ۳: ⅛ ؛ ۴: ؟ ؛ ؟: ۱/۳۲ ؛ ... ؛ ۸: ؟ ؛ ؟: ۱/۱۰۲۴)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می‌توانید پیشنهاد دهید؟ در نمودار زیر، رابطه‌ی تعداد تا زدن‌ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها نمایش داده شده است. نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور y ها چیست؟



تعداد تا زدن‌ها	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۸	۱۰
مساحت هر ناحیه	$\frac{۱}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۳۲}$	$\frac{۱}{۲۵۶}$	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$

الگو: مساحت هر ناحیه پس از n بار تا زدن $\frac{۱}{۲^n} = (\frac{۱}{۲})^n = f(n)$ است ($۲^{-۱۰} = ۱/۱۰۲۴$ مربوط به $n = ۱۰$). منحنی محور y ها را در نقطه‌ی $(۰ , ۱)$ قطع می‌کند ($n = ۰$: مساحت کامل = ۱).

۲۵۹ صفحه ۱۰۰ **فعالیت**

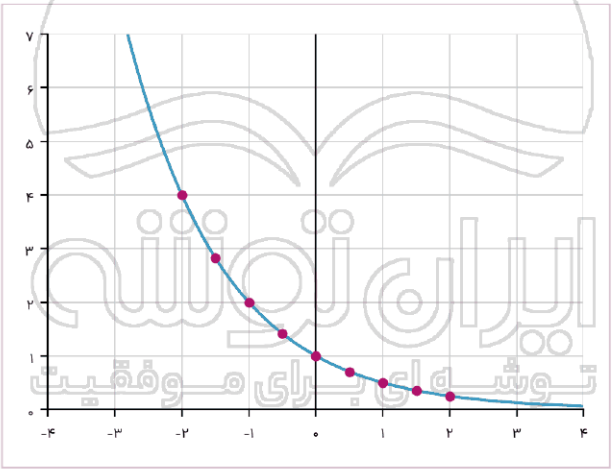
۱. تابع $y = (½)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید. (جدول ۴: ستون‌ها x ، $(½)^x$ ، y ، محاسبه‌ی y با ماشین حساب تا ۳ رقم اعشار؛ $x = -۲ ، -۳/۲ ، -۱ ، -۱/۲ ، ۰ ، ½ ، ۱ ، ۳/۲ ، ۲$ ؛ نمونه: $x = -۲ \Longrightarrow (½)^{-۲} = ۴$)

۲. نقاط به‌دست آمده در جدول بالا را روی صفحه‌ی مختصات به‌دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می‌توانید به کمک نمودار، مقدار تابع $(½)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳. نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ را با نمودار تابع $y = 2^x$ ، که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟

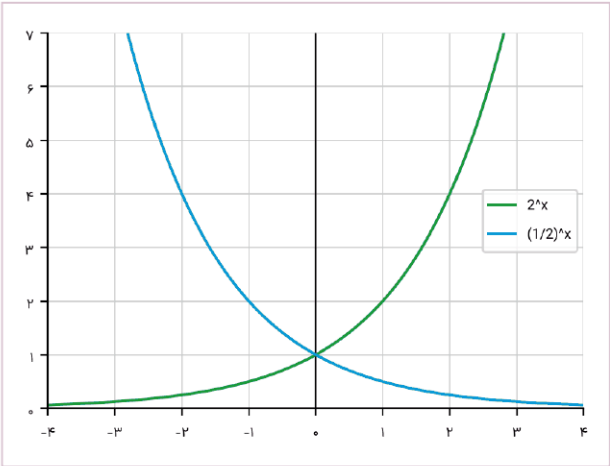
x	$(\frac{1}{2})^x$	y	مقدار با ماشین حساب
-2	$(\frac{1}{2})^{-2}$	۴	۴
$-3/2$	$(\frac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}$	$2\sqrt{2}$	۲/۸۲۸
-1	$(\frac{1}{2})^{-1}$	۲	۲
$-1/2$	$(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}$	۱/۴۱۴
۰	$(\frac{1}{2})^{0}$	۱	۱
۱/۲	$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۰/۷۰۷
۱	$(\frac{1}{2})^{1}$	$\frac{1}{2}$	۰/۵۰۰
۳/۲	$(\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	۰/۳۵۴
۲	$(\frac{1}{2})^{2}$	$\frac{1}{4}$	۰/۲۵۰



۲. بله؛ نمودار پیوسته است و برای هر x می‌توان y را از روی منحنی تقریباً خواند (همیشه مثبت).

۳. دو نمودار نسبت به محور y ها قرینه‌اند: $y = 2^x$ صعودی است (x بزرگ‌تر، y بزرگ‌تر) ولی $y = (\frac{1}{2})^x$ نزولی است (x بزرگ‌تر، y کوچک‌تر). هر دو از (۰,۱) می‌گذرند و بالای محور xاند.

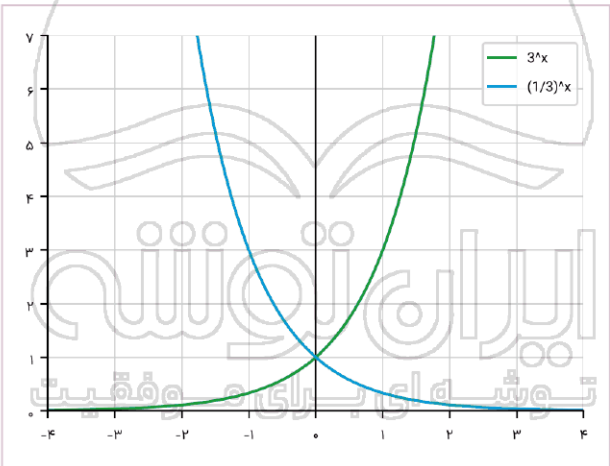
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



۲۶۰ صفحه ۱۰۱ **کار در کلاس**

تابع نمایی $f(x) = a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد $a (a > 1)$، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x) = (1/a)^x$ را در همان صفحه‌ی مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را با هم مقایسه کنید.

مثلاً $a = 3$: $f(x) = 3^x$ و $g(x) = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$. چون $g(x) = f(-x)$ ، نمودار g قرینه‌ی نمودار f نسبت به محور y ها است. f صعودی و g نزولی است؛ هر دو از (۰,۱) می‌گذرند، بالای محور x هستند و به آن نزدیک می‌شوند.



۲۶۱ صفحه ۱۰۱ **تمرین**

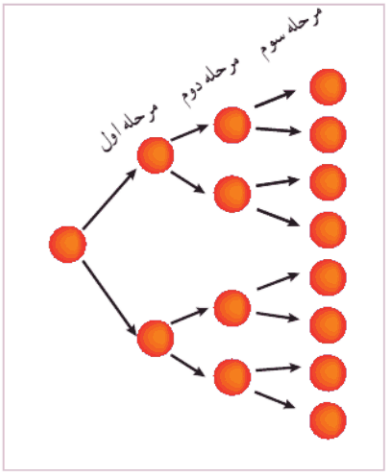
۱. در پژوهشکده‌ی رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه‌ی قلب را به‌وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است. اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند :

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

ب) در مرحله‌ی هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟



در مرحله‌ی اول ۲ سلول، دوم ۴ و سوم ۸ سلول داریم؛ هر مرحله دو برابر قبلی است.

الف) $n = ۱۱ \Rightarrow ۲^{۱۱} = ۲۰۴۸ = ۲^n$ ، یعنی پس از ۱۱ مرحله.

ب) $۲^۸ = ۲۵۶$ سلول.

پ) تعداد سلول‌ها در مرحله‌ی n ام $f(n) = ۲^n$ است (تابع نمایی).

۲۶۲ صفحه ۱۰۱ تمرین

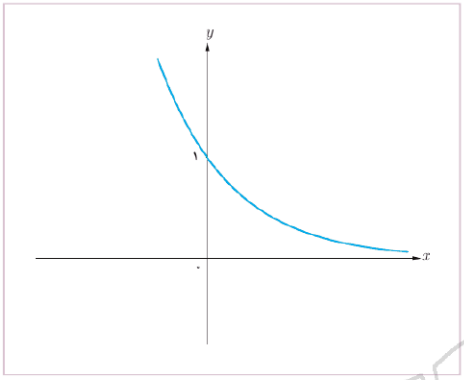
۲. یک نمونه‌ی واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

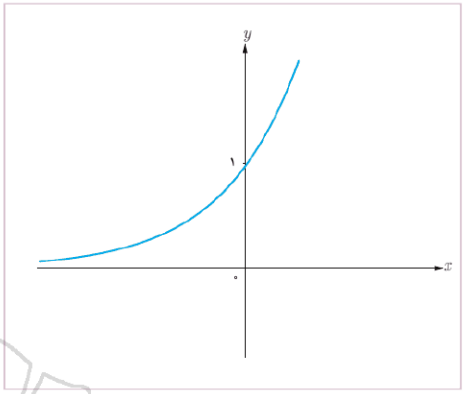
مثال: یک باکتری که هر ساعت به دو باکتری تقسیم می‌شود؛ پس از t ساعت تعداد باکتری‌ها ۲^t برابر اولیه است. نمونه‌های دیگر: انتشار یک شایعه (هر نفر به ۳ نفر می‌گوید: ۳^n نفر در مرحله‌ی n ام)؛ رشد جمعیت یا سرمایه‌ی بانکی با سود مرکب؛ کاهش نمایی مقدار دارو در خون.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶۳ صفحه ۱۰۱ تمرین

۳. در شکل صفحه‌ی بعد، نمودار دو تابع $y = (\frac{1}{4})^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



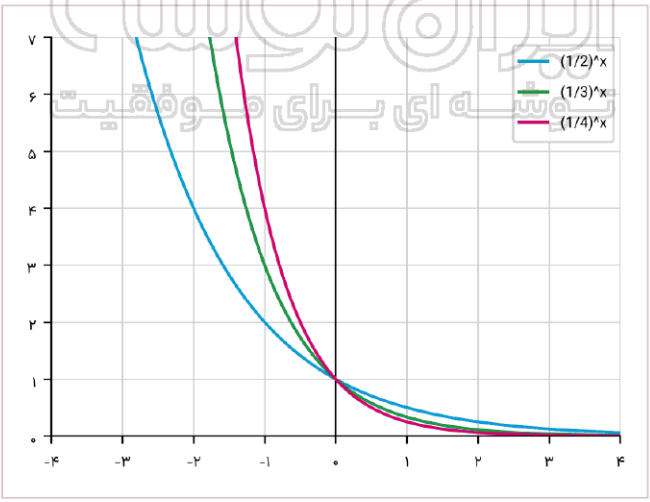


نمودار سمت چپ (صعودی) مربوط به $y = 4^x$ است چون پایه‌ی آن بزرگ‌تر از ۱ است و با افزایش x مقدار y زیاد می‌شود.

نمودار سمت راست (نزولی) مربوط به $y = (\frac{1}{4})^x$ است چون پایه‌ی آن بین ۰ و ۱ است و با افزایش x مقدار y کم می‌شود. (هر دو از (۰،۱) می‌گذرند.)

۲۶۴ صفحه ۱۰۲ تمرین

۴. نمودار توابع $y = (\frac{1}{2})^x$ ، $y = (\frac{1}{3})^x$ و $y = (\frac{1}{4})^x$ را در یک دستگاه (صفحه‌ی مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.



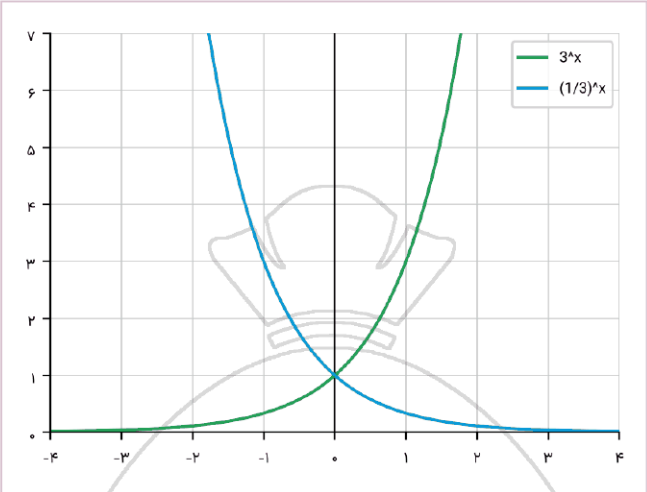
- شباهت‌ها: هر سه از (۰،۱) می‌گذرند؛ بالای محور x هستند؛ نزولی‌اند و برای x های بزرگ به محور x نزدیک می‌شوند (آن را قطع نمی‌کنند)؛ دامنه‌ی هر سه $\mathbb{R}$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- تفاوت‌ها: برای $x > 0$ هرچه پایه کوچک‌تر (مثل ¼) باشد، نمودار سریع‌تر به محور x نزدیک می‌شود؛ برای $x < 0$ هرچه پایه کوچک‌تر باشد، y سریع‌تر زیاد می‌شود (نمودار ¼ بالاتر از ⅓ و آن بالاتر از ½).

۲۶۵ صفحه ۱۰۲ **تمرین**

۵. نمودار توابع $y = (\frac{1}{3})^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.



$3^{-x} = (\frac{1}{3})^x$ ، پس دو نمودار نسبت به محور y ها قرینه‌اند: $y = 3^x$ صعودی و $y = (\frac{1}{3})^x$ نزولی است. هر دو از (۰,۱) می‌گذرند و هیچ‌کدام محور x را قطع نمی‌کنند.

۲۶۶ صفحه ۱۰۲ **فعالیت**

احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه‌گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرمودهٔ رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام‌گذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکننده‌ی کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی‌اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی‌الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد. جدول زیر (جدول ۵: سن احسان ۱۷ ، ۱۸ ، ۱۹ ، ... ، ۲۳ و مبلغ سرمایه‌گذاری شده؛ برای سن ۱۷ : ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان) را در نظر بگیرید؛ برای تکمیل جدول ۵، ابتدا مبلغ سرمایه‌گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان (یک‌سال بعد از سپرده‌گذاری در شرکت) را به‌دست آورید:

۱۰,۰۰۰,۰۰۰ + (... × ۱۴/۱۰۰) = ... + ۱,۴۰۰,۰۰۰ = ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ . اکنون سطر سوم جدول را محاسبه کنید:

۱۱,۴۰۰,۰۰۰ + ... = ... + ... = ... با توجه به فرمول ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ × $(1/14)^2$ = ۱۲,۹۹۶,۰۰۰ ، میزان موجودی را در ۲۳ سالگی احسان به‌دست آورید و جدول صفحه‌ی قبل را کامل کنید.

هر سال مبلغ ۱/۱۴ برابر می‌شود (۱۰۰٪ + ۱۴٪)؛ دنباله‌ی هندسی با $r = 1/14$:

۱۸ سالگی: ۱۱۴۰۰۰۰۰ = ۱۴۰۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰۰ = (۱۰۰۰۰۰۰۰ × $\frac{14}{100}$) + ۱۰۰۰۰۰۰۰

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۹ سالگی: ۱۲۹۹۶۰۰۰ = ۱۵۹۶۰۰۰ + ۱۱۴۰۰۰۰۰ = (۱۱۴۰۰۰۰۰ × $\frac{۱۴}{۱۰۰}$) + ۱۱۴۰۰۰۰۰

سن احسان	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳
مبلغ (تومان)	۱۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۱,۴۰۰,۰۰۰	۱۲,۹۹۶,۰۰۰	۱۴,۸۱۵,۴۴۰	۱۶,۸۸۹,۶۰۲	۱۹,۲۵۴,۱۴۶	۲۱,۹۴۹,۷۲۶

۲۳ سالگی (۶ سال بعد): ۱۰۰۰۰۰۰۰ × $(۱/۱۴)^{۶}$ ≈ ۲۱۹۴۹۷۲۶ تومان.

۲۶۷ صفحه ۱۰۳ **کار در کلاس**

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره‌ی زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره‌ی زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره‌ی زمین چه میزان خواهد شد؟ آیا می‌توانید وضع جمعیت کره‌ی زمین را در هر دوره‌ی زمانی ۳۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

طبق $f(t) = c(۱ + r)^t$ با $c = ۵/۲$ و $r = ۰/۰۲$:

پس از (سال)	۳۰	۳۵	۷۰	۱۰۵
جمعیت (میلیارد)	$۵/۲ \times ۱/۰۲^{۳۰} \approx ۹/۴۲$	$۵/۲ \times ۱/۰۲^{۳۵} \approx ۱۰/۴$	$۵/۲ \times ۱/۰۲^{۷۰} \approx ۲۰/۸$	$۵/۲ \times ۱/۰۲^{۱۰۵} \approx ۴۱/۶$

چون $۱/۰۲^{۳۵} \approx ۲$ ، در هر دوره‌ی ۳۵ ساله جمعیت تقریباً **دو برابر** می‌شود (۵/۲ ← ۱۰/۴ ← ۲۰/۸ ← ۴۱/۶).

یعنی رشد نمایی با افزایش ثابت درصدی، با گذشت زمان به افزایش‌های مطلق بسیار بزرگ‌تر می‌انجامد.

۲۶۸ صفحه ۱۰۴ **تمرین**

۱. در یکی از فعالیت‌های بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکننده‌ی محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام‌داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه‌گذاری کند، پس از ده سال، چه مبلغی به سرمایه‌ی این سهام‌دار اضافه خواهد شد؟

سود ۱۴٪ در سال: ۴۰۰۰۰۰۰۰ × $(۱/۱۴)^{۱۰}$ ≈ ۱۴۸۲۸۸۸۵۳ = f(۱۰) تومان.

مبلغ اضافه‌شده: ۱۴۸۲۸۸۸۵۳ - ۴۰۰۰۰۰۰۰ ≈ ۱۰۸۲۸۸۸۵۳ تومان (حدود ۱۰۸ میلیون تومان).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶۹ صفحه ۱۰۴ تمرین

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به‌صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

$f(10) = 1000000 \times (1/06)^{10} \approx 1790848$ نفر.

۲۷۰ صفحه ۱۰۴ تمرین

۳. جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش‌ها را در ۱۰ سال متوالی به‌دست آورید.

ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟

ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟

موش‌ها: $23576 \times (0/975)^n$ ؛ گربه‌ها: $15786 \times (1/018)^n$ (n سال پس از سال اول، گرد شده به عدد صحیح).

n (سال)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
موش‌ها	۲۳۵۷۶	۲۲۹۸۷	۲۲۴۱۲	۲۱۸۵۲	۲۱۳۰۵	۲۰۷۷۳	۲۰۲۵۳	۱۹۷۴۷	۱۹۲۵۳	۱۸۷۷۲	۱۸۳۰۳
گربه‌ها	۱۵۷۸۶	۱۶۰۷۰	۱۶۳۵۹	۱۶۶۵۴	۱۶۹۵۴	۱۷۲۵۹	۱۷۵۶۹	۱۷۸۸۶	۱۸۲۰۸	۱۸۵۳۵	۱۸۸۶۹

پ) در سال نهم هنوز موش‌ها بیشترند (۱۸۷۷۲ در برابر ۱۸۵۳۵) ولی در **سال دهم** گربه‌ها بیشتر می‌شوند (۱۸۸۶۹ در برابر ۱۸۳۰۳).

ت) برابری در بین سال نهم و دهم، حدود ۹/۳ سال پس از آغاز رخ می‌دهد: $\left(\frac{1/018}{0/975}\right)^n = \frac{23576}{15786} \approx 1/493 \Rightarrow n \approx 9/3$ ؛ در سال‌های صحیح دقیقاً برابر نمی‌شوند.

ث) جمعیت موش‌ها هر سال ۰/۹۷۵ برابر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود (هیچ‌گاه دقیقاً صفر نمی‌شود)، ولی جمعیت گربه‌ها هر سال ۱/۰۱۸ برابر می‌شود و بدون کران زیاد می‌شود. (در واقعیت با کم شدن غذا رشد گربه‌ها محدود می‌شود.)

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت