با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی و آمار ۲ یازدهم

پاسخ فعالیت‌ها و پرسش‌های کتاب

پایه یازدهم · دوره دوم متوسطه · رشته‌های ادبیات و علوم انسانی و علوم و معارف اسلامی

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای در کلاس، تمرین‌ها و پرسش‌های کتاب

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۱ فصل اول — آشنایی با منطق و استدلال ریاضی ۴

۲ فصل دوم — تابع ۲۵

۳ فصل سوم — آمار ۵۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی و آمار ۲ یازدهم (انسانی) - فصل اول

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فهرست

۱ صفحه ۲ · فعالیت — درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها ۵

۲ صفحه ۳ · فعالیت — درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها ۵

۳ صفحه ۳ · فعالیت — درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها ۶

۴ صفحه ۴ · کار در کلاس — درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها ۷

۵ صفحه ۵ · فعالیت — درس ۱ ترکیب عطفی ۸

۶ صفحه ۶ · فعالیت — درس ۱ ترکیب فصلی ۹

۷ صفحه ۶ · فعالیت — درس ۱ ترکیب شرطی ۱۰

۸ صفحه ۷ · کار در کلاس — درس ۱ ترکیب شرطی ۱۱

۹ صفحه ۸ · فعالیت — درس ۱ ترکیب دو شرطی ۱۲

۱۰ صفحه ۹ · کار در کلاس — درس ۱ ترکیب دو شرطی ۱۳

۱۱ صفحه ۹ · مثال (تکمیل جدول‌ها) — درس ۱ ترکیب دو شرطی — هم‌ارزی ۱۳

۱۲ صفحه ۱۰ · تمرین — درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها ۱۵

۱۳ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها ۱۷

۱۴ صفحه ۱۱ · تمرین — درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها ۱۸

۱۵ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — درس ۲ استدلال ریاضی ۲۰

۱۶ صفحه ۱۵ · کار در کلاس — درس ۲ استدلال ریاضی — قیاس استثنایی ۲۱

۱۷ صفحه ۱۵ · کار در کلاس — درس ۲ استدلال ریاضی — قیاس استثنایی ۲۱

۱۸ صفحه ۱۵ · کار در کلاس — درس ۲ استدلال ریاضی ۲۱

۱۹ صفحه ۱۷ · کار در کلاس — درس ۲ استدلال ریاضی — کشف خطا ۲۲

۲۰ صفحه ۱۸ · تمرین — درس ۲ استدلال ریاضی ۲۳

۲۱ صفحه ۱۸ · تمرین — درس ۲ استدلال ریاضی — کشف خطا ۲۳

۲۲ صفحه ۲۰ · پرسش (خواندنی: منطق فازی) — درس ۲ — خواندنی ۲۴

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱ صفحه ۲ فعالیت

۱. کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف) شما چند سال دارید؟

ب) عدد ۲ عددی اول است.

پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است.

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است.

ث) $۲+۳\times۴=۲۰$

ج) عدد $(-1)^n$ همواره عددی مثبت است. $(n \in N)$

چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش‌مزه‌تر است.

ح) لطفاً تخته را پاک کن.

گزاره جمله‌ای خبری است که بتوان دقیقاً یکی از دو ارزش «درست» یا «نادرست» را به آن نسبت داد.

- الف) گزاره نیست؛ جمله‌ی پرسشی است و درست یا نادرست بودن ندارد.
- ب) گزاره است و ارزش آن **درست** است (۲ تنها عدد اول زوج است).
- پ) گزاره است و ارزش آن **نادرست** است؛ $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.
- ت) گزاره است و ارزش آن **نادرست** است؛ ارسطو شاگرد افلاطون بوده است.
- ث) گزاره است و ارزش آن **نادرست** است؛ چون $۲+۳\times۴ = ۲+۱۲ = ۱۴$ و $۱۴ \neq ۲۰$.
- ج) گزاره است و ارزش آن **نادرست** است؛ برای مثال به‌ازای $n=۱$ داریم $(-1)^1 = -1$ که مثبت نیست (یک مثال نقض کافی است).
- چ) گزاره نیست؛ خوش‌مزه‌تر بودن سلیقه‌ای است و نمی‌توان ارزش درست یا نادرست قطعی به آن داد.
- ح) گزاره نیست؛ جمله‌ی امری است.

۲ صفحه ۳ فعالیت

۲. دو گزاره‌ی درست و دو گزاره‌ی نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

- دو گزاره‌ی درست: «۷ عددی اول است.»؛ «مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.»
- دو گزاره‌ی نادرست: «۹ عددی اول است.»؛ «تهران پایتخت ترکیه است.»

- دو جمله که گزاره نیستند: «امروز هوا چطور است؟» (پرسشی)؛ «در را ببند.» (امری)

۳ صفحه ۳ فعالیت

در سه جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است. شما جدولی برای نمایش وضعیت ارزشی چهار گزاره تشکیل دهید.

جدول یک گزاره: ۲ حالت ($۲^۱=۲$)؛ دو گزاره: ۴ حالت ($۲^۲=۴$)؛ سه گزاره: ۸ حالت ($۲^۳=۸$).

با هر گزاره‌ی تازه، تعداد حالت‌ها دو برابر می‌شود، پس برای چهار گزاره 2^4 = 16 حالت داریم. ستون p به‌ترتیب ۸ بار «د» و ۸ بار «ن»، ستون q چهار تا چهارتا، ستون r دوتادوتا و ستون s یکی‌یکی عوض می‌شود:

جدول وضعیت ارزشی چهار گزاره (۱۶ حالت)

p	q	r	s
د	د	د	د
د	د	د	ن
د	د	ن	د
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	د	د	ن
ن	د	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	د
ن	ن	ن	ن

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴ صفحه ۴ کار در کلاس

در هر یک از حالت‌های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

الف) عدد ۵ زوج است.

ب) تساوی «۴=۲×۲» برقرار است.

پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است.

ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

ث) ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار دارد.

ج) $(3\times7) < (5\times4)$

نقیض هر گزاره ارزشی مخالف ارزش آن گزاره دارد: اگر p درست باشد، $(\sim p)$ نادرست و اگر p نادرست باشد، $(\sim p)$ درست است.

- الف) نقیض: «عدد ۵ زوج نیست» (عدد ۵ فرد است). گزاره‌ی اصلی نادرست است، پس نقیض آن **درست** است.
- ب) نقیض: «تساوی ۴=۲×۲ برقرار نیست» $(4 \neq 2\times2)$. گزاره‌ی اصلی درست است، پس نقیض آن **نادرست** است.
- پ) نقیض: «عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر نیست» (۱۲ بزرگ‌تر یا مساوی ۱۵ است). اصل درست است، پس نقیض **نادرست** است.
- ت) نقیض: «ارسطو شاگرد افلاطون نیست». اصل درست است، پس نقیض **نادرست** است.
- ث) نقیض: «ایران در منطقه‌ی غرب آسیا قرار ندارد». اصل درست است، پس نقیض **نادرست** است.
- ج) چون ۲۰=۴×۵ و ۲۱=۷×۳، گزاره‌ی اصلی $(20 < 21)$ نادرست است. نقیض آن: $(3\times7) \leq (5\times4)$ $(20 \geq 21)$ که **درست** است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵ صفحه ۵ فعالیت

در جدول زیر روبه‌روی گزاره‌های داده شده ارزش آنها را با علامت ✓ مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک گزاره‌ی ساده، گزاره‌ی مرکب را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد		
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه‌ی سوره‌های آن با بسم‌الله شروع می‌شود.		
۳	..... و ۸ زوج است.		✓
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و	✓	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		
۶	۵ < ۲ و		✓

ترکیب عطفی «p ∧ q» فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

ردیف	گزاره (پس از تکمیل)	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد	✓	
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه‌ی سوره‌های آن با بسم‌الله شروع می‌شود.		✓
۳	۵ عددی زوج است و ۸ زوج است.		✓
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و ۳۰ جزء دارد.	✓	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		✓
۶	۲ < ۵ و ۳ عددی زوج است.		✓

- ۱) شهریور ماه ششم سال است و ۳۱ روز دارد؛ هر دو گزاره درست‌اند، پس ترکیب درست است.
- ۲) سوره‌ی توبه با «بسم‌الله» شروع نمی‌شود؛ پس گزاره‌ی دوم نادرست و ترکیب نادرست است.
- ۳) برای نادرست شدن، کافی است یکی از دو گزاره نادرست باشد؛ مثلاً «۵ زوج است» نادرست است (جاهای خالی را می‌توان با گزاره‌های نادرست دیگر هم پر کرد).
- ۴) چون ترکیب درست است، گزاره‌ی دوم باید درست باشد؛ مثلاً «۳۰ جزء دارد».
- ۵) ۵۷ = ۳×۱۹ اول نیست؛ پس گزاره‌ی اول نادرست و ترکیب نادرست است.
- ۶) چون ترکیب نادرست است، کافی است گزاره‌ی دوم نادرست باشد (مثلاً «۳ زوج است»)؛ در این صورت هرچه ارزش «۵ < ۲» باشد، ترکیب نادرست می‌ماند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶ صفحه ۶ **فعالیت**

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ فرد یا عددی اول است		
۲	حضرت مهدی (عج) امام دوازدهم شیعیان است یا	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا	✓	
۴	..... یا افلاطون نویسنده‌ی کتاب ارغنون است.		✓
۵	..... یا	✓	

ترکیب فصلی «p ∨ q» فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند؛ در بقیه‌ی حالت‌ها درست است.

ردیف	گزاره (پس از تکمیل)	درست	نادرست
۱	عدد ۴ فرد یا عددی اول است		✓
۲	حضرت مهدی (عج) امام دوازدهم شیعیان است یا ۷ عددی زوج است.	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا ۲ عددی فرد است.	✓	
۴	۴ عددی فرد است یا افلاطون نویسنده‌ی کتاب ارغنون است.		✓
۵	۲ عددی اول است یا ۴ عددی فرد است.	✓	

- ۱) ۴ فرد نیست و اول هم نیست؛ هر دو نادرست، پس ترکیب نادرست است.
- ۲) گزاره‌ی اول درست است؛ پس ترکیب درست است و جای خالی را هر گزاره‌ای (درست یا نادرست) می‌توان پر کرد.
- ۳) ۹۱ = ۷×۱۳ مرکب است؛ پس ترکیب درست است و جای خالی هر گزاره‌ای می‌تواند باشد.
- ۴) ارغنون اثر ارسطوست نه افلاطون؛ پس گزاره‌ی دوم نادرست است. برای نادرست بودن ترکیب، جای خالی را با گزاره‌ی نادرست پر می‌کنیم.
- ۵) کافی است دست‌کم یکی از دو گزاره درست باشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۷ صفحه ۶ **فعالیت**

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.		
۴	اگر ..... آنگاه		✓
۵	اگر ..... آنگاه	✓	
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۷	اگر ..... آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

گزاره‌ی «$p \Rightarrow q$» فقط وقتی نادرست است که مقدم (p) درست و تالی (q) نادرست باشد؛ در بقیه‌ی حالت‌ها درست است.

ردیف	گزاره (پس از تکمیل)	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		✓
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.	✓	
۴	اگر ۴ زوج است، آنگاه ۷ زوج است.		✓
۵	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۳ زوج است.	✓	
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۷	اگر ۴ فرد است، آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

- ۱) مقدم (۷ زوج است) نادرست است؛ پس گزاره به انتفای مقدم درست است.
- ۲) مقدم درست ($۹=۳^2$) و تالی $\sqrt{9} = 3$ نادرست است (۳ مربع کامل نیست)؛ پس گزاره نادرست است.
- ۳) مقدم و تالی هر دو درست‌اند؛ پس گزاره درست است.
- ۴) برای نادرست بودن، مقدم باید درست و تالی نادرست باشد؛ مثلاً «۴ زوج است» (درست) و «۷ زوج است» (نادرست).
- ۵) کافی است مقدم نادرست باشد (یا هر دو درست)؛ در مثال، مقدم «۷ زوج است» نادرست است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

○ ۶) مقدم (۷ فرد است) درست و تالی (۵^2=۲۵) درست است؛ پس گزاره درست است.

○ ۷) ۹۹ = ۹×۱۱ اول نیست، یعنی تالی نادرست است؛ برای درست بودن گزاره باید مقدم نادرست باشد (مثلاً «۴ فرد است»).

۸ صفحه ۷ | کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

۱) r ∧ (q ⇒ p) (ارزش گزاره‌ی (q ⇒ p) به انتفای مقدم درست بوده و لذا ارزش گزاره‌ی r ∧ (q ⇒ p) به ارزش گزاره‌ی r بستگی دارد.)

۲) r ∨ (p ∨ q)

۳) r ∧ (p ⇒ q)

۴) q ∨ (r ⇒ p)

۵) q ⇒ (r ⇒ p)

۶) r ⇒ (p ⇒ q)

۷) r ⇒ (p ∧ q)

در همه‌ی حالت‌ها p درست (د) و q نادرست (ن) است.

○ ۱) p ⇒ q درست است (مقدم نادرست)، پس r ∧ (q ⇒ p) هم‌ارزش r است؛ ارزش آن به r بستگی دارد (مشخص نمی‌شود).

○ ۲) p ∨ q درست است (p درست)، پس r ∨ (p ∨ q) به‌ازای هر r **درست** است.

○ ۳) q ⇒ p نادرست است (د ⇒ ن)؛ پس ترکیب عطفی آن با r، **نادرست** است.

○ ۴) p ⇒ r درست است (تالی درست)؛ پس ترکیب فصلی آن با q **درست** است.

○ ۵) p ⇒ r درست و q نادرست است؛ پس (ن) ⇒ (د) یعنی **نادرست**.

○ ۶) p ⇒ q نادرست است؛ پس شرطی با مقدم نادرست، به‌ازای هر r **درست** است.

○ ۷) p ∧ q نادرست است؛ پس شرطی به انتفای مقدم، به‌ازای هر r **درست** است.

۹ صفحه ۸ **فعالیت**

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.		
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		
۳	..... اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓	
۴	اگر ..... آنگاه ..... و برعکس		✓
۵	یک چهارضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهارضلعی لوزی باشد.		
۶	اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشند؛ آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس		

ترکیب دو شرطی «$p \Leftrightarrow q$» وقتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند (هر دو درست یا هر دو نادرست).

ردیف	گزاره (پس از تکمیل)	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.	✓	
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		✓
۳	۱۵ مضرب ۵ است اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓	
۴	اگر ۲ زوج است آنگاه ۹ زوج است و برعکس.		✓
۵	یک چهارضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهارضلعی لوزی باشد.		✓
۶	اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشند؛ آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس	✓	

- ۱) «۲ فرد است» نادرست و «۸ اول است» نادرست؛ هم‌ارزش‌اند، پس درست است.
- ۲) «دو عدد فرد ⇒ مجموع زوج» درست است ولی برعکس آن نادرست است (مثلاً ۲+۴ زوج است اما ۲ و ۴ فرد نیستند)؛ پس دو شرطی نادرست است.
- ۳) ۱۱۹ = ۷×۱۷ مرکب است (درست)؛ برای درست بودن دو شرطی گزاره‌ی اول هم باید درست باشد، مثلاً «۱۵ مضرب ۵ است».
- ۴) برای نادرست بودن، دو گزاره باید ارزش‌های متفاوت داشته باشند؛ مثلاً «۲ زوج است» (د) و «۹ زوج است» (ن).
- ۵) هر مربع لوزی است ولی هر لوزی مربع نیست (لوزی با زاویه‌های غیرقائمه)؛ پس دو شرطی نادرست است.

○ ۶) واریانس میانگینِ مربع‌های انحراف داده‌ها از میانگین است؛ صفر بودن آن یعنی همه‌ی انحراف‌ها صفراند، یعنی همه‌ی داده‌ها با میانگین و در نتیجه با هم برابرند و برعکس. پس درست است.

۱۰ صفحه ۹ کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

۱) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$

۲) $(p \Leftrightarrow q) \vee r$ ($p \Leftrightarrow q \equiv \sim p$ پس $(\sim p \Leftrightarrow q) \equiv T$ و لذا ترکیب فصلی یک گزاره‌ی درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است.)

۳) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

۴) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

۵) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

۶) $(p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow p)$

۷) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

p درست و q نادرست است.

○ ۱) $p \Leftrightarrow q$ نادرست است (ارزش‌ها متفاوت‌اند)؛ پس عطف آن با r، به‌ازای هر r **نادرست** است.

○ ۲) $\sim p$ نادرست و q نادرست است؛ پس $\sim p \Leftrightarrow q$ درست است و ترکیب فصلی آن با r همواره **درست** است.

○ ۳) $p \Leftrightarrow q$ نادرست و $p \Rightarrow q$ هم نادرست است (د ⇒ ن)؛ دو گزاره‌ی هم‌ارزش‌اند، پس دو شرطی **درست** است.

○ ۴) $\sim p \vee q$: (ن ∨ ن) = نادرست و $p \Rightarrow q$ نادرست است؛ پس دو شرطی **درست** است (این دو گزاره هم‌ارزش‌اند).

○ ۵) $\sim p \vee \sim q$: (ن ∨ د) = درست؛ $\sim(p \vee q)$: ~(د ∨ ن) = نادرست؛ پس دو شرطی (د ⇔ ن) **نادرست** است.

○ ۶) $p \wedge q$ نادرست است. اگر r درست باشد، $r \Leftrightarrow p$ درست و شرطی (د ⇒ ن) نادرست می‌شود؛ اگر r نادرست باشد، $r \Leftrightarrow p$ نادرست و شرطی درست می‌شود. پس ارزش آن به r بستگی دارد (مشخص نمی‌شود).

○ ۷) $p \wedge q$ نادرست و $p \vee q$ درست است؛ پس دو شرطی (ن ⇔ د) **نادرست** است.

۱۱ صفحه ۹ مثال (تکمیل جدول‌ها)

با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید (در جدول‌های کتاب برخی خانه‌ها خالی است و باید پر شود):

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

پ) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

ت) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

ث) $(p \wedge \sim p) \equiv F$ و $(p \vee \sim p) \equiv T$

دو گزاره هم‌ارزند اگر ستون ارزش آن‌ها در جدول یکسان باشد. در هر جدول، دو ستون آخرِ مقایسه‌شونده (یا ستون‌های هم‌ارز) را مقایسه می‌کنیم.

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \vee p)$

p	q	~p	p ⇒ q	~p ∨ q
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

ستون $p \Rightarrow q$ و ستون $\sim p \vee q$ هر دو (د، ن، د، د) است؛ پس هم‌ارزند. (در جدول کتاب، سرستون به‌صورت $q \Rightarrow p$ چاپ شده، ولی ستون نمایش‌داده‌شده مربوط به $p \Rightarrow q$ با مقادیر د، ن، د، د است.)

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	~p	~q	p ⇒ q	~q ⇒ ~p
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

ستون $p \Rightarrow q$ و ستون $\sim q \Rightarrow \sim p$ هر دو (د، ن، د، د) است؛ پس هم‌ارزند ($\sim p \Rightarrow \sim q$ را عکس نقیض $p \Rightarrow q$ می‌نامیم).

پ) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim q \wedge \sim p)$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

p	q	~p	~q	p ∨ q	~(p ∨ q)	~p ∧ ~q
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

ستون (p ∨ q)~ و ستون ~q ∧ ~p هر دو (ن، ن، ن، د) است؛ پس هم‌ارزند (قانون دمورگان).

ت) p ∨ (p ∧ q) ≡ p

p	q	p ∧ q	p ∨ (p ∧ q)
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

ستون p ∨ (p ∧ q) با ستون p یکسان (د، د، ن، ن) است؛ پس هم‌ارزند.

ث) T ≡ (p ∨ ~p) و F ≡ (p ∧ ~p)

p	~p	p ∨ ~p	p ∧ ~p
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

ستون p ∨ ~p همواره د (همیشه درست = T) و ستون p ∧ ~p همواره ن (همیشه نادرست = F) است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ صفحه ۱۰ تمرین

۱. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزه‌ی پیامبر اسلام (ص) قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.		
۲	اگر ..... آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه		✓

۴			
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.		
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.		
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		
۸	امام خمینی (ره) در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.		
۹	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و	✓	
۱۰	اگر ..... آنگاه ..... و برعکس	✓	

ردیف	گزاره (پس از تکمیل)	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزه‌ی پیامبر اسلام (ص) قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.	✓	
۲	اگر ۶ فرد است، آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه ۶ عددی اول است.		✓
۴			✓
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.	✓	
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.	✓	
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		✓
۸	امام خمینی (ره) در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.	✓	
۹	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و ۲ عددی زوج است.	✓	
۱۰	اگر ۲ عددی زوج است آنگاه ۳ عددی فرد است و برعکس.	✓	

- ۱) هر دو جزء درست‌اند (عطفِ د و د).
- ۲) تالی («مربع هر عدد فرد زوج است») نادرست است؛ برای درست بودن شرطی، مقدم باید نادرست باشد، مثلاً «۶ فرد است».
- ۳) مقدم درست است؛ برای نادرست بودن، تالی باید نادرست باشد، مثلاً «۶ عددی اول است».
- ۴) $۲^{۳} = ۲ \times ۴$ یعنی ۸=۸ درست است؛ ولی $۸^{۲} = ۶۴$ و $۴^{۳} = ۶۴$ و «۶۴ < ۶۴» نادرست است. پس (د ⇒ ن) نادرست است.
- ۵) مقدم عطفی است که جزء «۷ زوج است» نادرست دارد؛ پس مقدم نادرست و شرطی درست است.

- ۶) مقدم فصلی با جزء درست («۲ زوج است») درست و تالی («۵ اول است») درست است؛ پس شرطی درست است.
- ۷) مقدم درست (فارابی معلم ثانی است) و تالی نادرست (معلم اول ارسطو است)؛ پس شرطی نادرست است.
- ۸) امام خمینی (ره) در سال ۱۳۴۳ تبعید شدند و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند؛ هر دو درست و عطف درست است.
- ۹) جزء اول درست است، پس برای درست بودن عطف جزء دوم هم باید درست باشد؛ مثلاً «۲ عددی زوج است».
- ۱۰) برای درستی دو شرطی، دو گزاره هم‌ارزش باشند؛ مثلاً هر دو درست.

۱۳ صفحه ۱۱ تمرین

۲. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

الف) $p \Rightarrow (p \vee r)$

ب) $r \Rightarrow (q \wedge r)$

پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$

ت) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$

ث) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

ج) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

چ) $\sim q \Rightarrow (\sim p \Rightarrow r)$

ح) $r \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p)$

خ) $p \wedge (r \Rightarrow p)$

در همه‌ی موارد p درست (د) و q نادرست (ن) است. ارزش هر گزاره‌ی مرکب برای هر دو مقدار r هم بررسی می‌شود:

- الف) **درست** — $p \vee r$ درست است (p درست)، پس شرطی (د ⇒ د) درست است.
- ب) **درست** — $q \wedge r$ نادرست است (q نادرست)؛ مقدم نادرست، پس شرطی درست است.
- پ) **درست** — $p \wedge q$ نادرست و $\sim p \wedge r$ هم نادرست است ($\sim p$ نادرست)؛ دو شرطی (ن ⇔ ن) درست است.
- ت) **نادرست** — $p \Rightarrow \sim q$: (د ⇒ د) درست؛ $p \Leftrightarrow q$ نادرست؛ پس (د ⇔ ن) نادرست است.
- ث) **درست** — $p \Rightarrow q$ نادرست است و $\sim q \Rightarrow \sim p$: (د ⇒ ن) نادرست است؛ پس دو شرطی درست است (عکس نقیض هم‌ارز است).
- ج) **درست** — $p \Rightarrow r$ درست است (تالی درست)؛ پس تالی شرطی درست و شرطی درست است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- چ) **درست** — $\sim q$ درست است؛ تالی درست ⇒ شرطی درست.
- ح) **نادرست** — $\sim p \Rightarrow \sim q$ نادرست است (د ⇒ ن)؛ پس عطف آن با r نادرست است.
- خ) **درست** — $p \Rightarrow r$ درست است (تالی p درست) و p درست؛ پس عطف درست است.

۱۴ صفحه ۱۱ تمرین

۳. درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

الف) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

پ) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$

ث) $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

ج) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

برای هر هم‌ارزی جدول ارزش می‌سازیم و ستون دو طرف را مقایسه می‌کنیم.

الف) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	د

ستون $\sim(p \wedge q)$ با ستون $\sim p \vee \sim q$ یکسان (ن، د، د، د) است (قانون دمورگان).

ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ایران توشه

p	q	r	q ∨ r	p ∧ (q ∨ r)	p ∧ q	p ∧ r	(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ستون p ∧ (q ∨ r) با ستون آخر یکسان (د، د، ن، ن، ن، ن، ن، ن) است (پخشی عطف نسبت به فصل).

پ) p ∧ (p ∨ q) ≡ p

p	q	p ∨ q	p ∧ (p ∨ q)
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

ستون p ∧ (p ∨ q) با ستون p یکسان (د، د، ن، ن) است.

ت) T ≡ (p ⇒ p)

p	p ⇒ p
د	د
ن	د

ستون p ⇒ p فقط «د» دارد؛ پس همواره درست (T) است.

ث) p ≡ (p ∨ q) ∧ (p ∨ ~q)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

p	q	~q	p ∨ ~q	p ∨ q	(p ∨ ~q) ∧ (p ∨ q)
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

ستون آخر با ستون p یکسان (د، د، ن، ن) است.

ج) $T \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q)$

p	q	~q	p ∧ ~q	p ⇒ q	(p ∧ ~q) ∨ (p ⇒ q)
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

ستون آخر فقط «د» دارد؛ پس همواره درست (T) است.

۱۵ صفحه ۱۳ **کار در کلاس**

عبارات زیر را به‌صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) عددی به‌علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

ب) حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

ج) حاصل‌ضرب عددی در خودش به‌علاوه ۳ بزرگ‌تر از خودش است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

به‌جای «عدد» یک نماد (مثلاً x) می‌گذاریم:

- الف) عدد را x بگیریم: $x + 5 = 2x$
- ب) دو عدد حقیقی را x و y بگیریم: $x \cdot y = x + y$
- ج) عدد را x بگیریم: $x < 3 + x \cdot x$ یعنی $x^2 + 3 > x$

۱۶ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۱. با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده‌ی قیاس استثنایی $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ را نشان دهید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

ستون آخر در همه‌ی حالت‌ها «د» است؛ یعنی گزاره همواره درست است و قیاس استثنایی یک استدلال معتبر است.

۱۷ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۲. در هر یک از استدلال‌های زیر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

استدلال اول: $0 < x^2 : p > 0 \rightarrow q$ ، $3 > 0 : p$ ، ..... ∴

استدلال دوم: p : ..... ⇒ q : دو خط هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. ، ..... ، ∴ خطوط L_1 و L_2 هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

در قیاس استثنایی $p \rightarrow q$ و p را داریم و نتیجه می‌گیریم q.

- استدلال اول: چون $3 > 0$ (مقدمه‌ی p) برقرار است، نتیجه می‌شود $q : 3^2 > 0$؛ یعنی جای خالی: $3^2 > 0$ ($9 > 0$).
- استدلال دوم: p باید «دو خط موازی باشند» باشد؛ مقدمه‌ی دوم جای خالی: «خطوط L_1 و L_2 موازی‌اند.» و نتیجه q است.

۱۸ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۱. مثال سه لیوان را در حالت زیر بررسی کنید. آیا فقط یک راه حل دارد؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲. مثال سه لیوان را برای حالتی که بیش از ۳ لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان‌ها را که وارونه هستند، بررسی کنید. آیا استدلال گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر است؟

(مثال کتاب: سه لیوان A، B، C داریم؛ می‌خواهیم همه‌ی آنها رو به بالا شوند و در هر حرکت دقیقاً دو لیوان را وارونه می‌کنیم. حالت جدید: لیوان‌های A و C وارونه و B رو به بالا است.)

s را تعداد لیوان‌های وارونه می‌گیریم. هدف s=۰ است و در هر حرکت s یکی از تغییرهای ۲-، ۲+ یا ۰ را می‌کند.

- ۱) اینجا s=۲ است و رسیدن به s=۰ ممکن است. با **یک حرکت** (وارونه کردن A و C) هر دو رو به بالا می‌شوند. ولی این تنها راه نیست: مثلاً ابتدا A و B را وارونه می‌کنیم (A رو به بالا، B وارونه، C وارونه) سپس B و C را وارونه می‌کنیم؛ در دو حرکت همه رو به بالا می‌شوند. پس مسئله بیش از یک راه حل دارد.
- ۲) فرض می‌کنیم n لیوان داریم (n ≥ ۳) و تعداد فردی از آنها وارونه است، یعنی s فرد است. هر حرکت s را به اندازه‌ی ۲-، ۲+ یا ۰ تغییر می‌دهد، پس فرد بودن s همواره حفظ می‌شود و s هرگز ۰ (زوج) نمی‌شود. بنابراین رو به بالا کردن همه‌ی لیوان‌ها ممکن نیست و استدلال به حالت کلی (هر تعداد لیوان) قابل تعمیم است.

۱۹ صفحه ۱۷ کار در کلاس

سؤال زیر در یک امتحان ریاضی داده شده است.

«اگر آنگاه d را بیابید» (و a ≠ 1).

استدلال‌های زیر برای به‌دست آوردن d از برگه‌های امتحانی دانش‌آموزان آورده‌ایم. کدام یک از استدلال‌ها درست و کدام نادرست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را بیان کنید.

الف) ۱) (a سمت چپ با a صورت ساده شده) ۲) d = 0 ۳)

ب) ۱) ۲) ac − ad = a − d ۳) ac − a = ad − d ۴) a(c−1) = (a−1)d ۵) −(c−1) = d ۶)

پ) ۱) ۲) a(c−d) = a−d ۳) ac − a = ad − d ۴) ac − a = (a−1)d ۵)

راه درست: دو طرف را در (c−d) ضرب می‌کنیم (مخرج ناصفر است): a(c−d) = a−d ⟹ ac − ad = a − d ⟹ ac − a = ad − d = (a−1)d و چون a ≠ 1، .

- الف) **نادرست**. در گام اول «a» سمت چپ را با «a» داخل صورت کسر ساده کرده‌اند. ولی a در صورت، جمله‌ای از a − d است (نه عامل ضرب) و تنها عامل‌های مشترک ضرب را می‌توان ساده کرد. نتیجه‌ی غلط هم این است که d=۰ باشد (مثلاً به‌ازای a=۳ و c=۲ جواب درست d=۳/۲ است).

- ب) **نادرست**. گام‌های ۱ تا ۴ درست‌اند؛ ولی در گام ۵ «a» در صورت a(c−1) را با «a» در مخرج a − 1 ساده کرده‌اند، در حالی که a در مخرج یک جمله است نه عامل ضربی؛ پس ساده کردن مجاز نیست. (جواب درست d = a(c−1)/(a−1) است.)
- پ) **درست**. گام ۲: ضرب دو طرف در c − d ≠ ۰؛ گام ۳: انتقال جمله‌ها و ac − a = ad − d؛ گام ۴: فاکتورگیری از d؛ گام ۵: تقسیم بر a − 1 که ناصفر است. هیچ گامی خلاف قاعده نیست.

۲۰ صفحه ۱۸ تمرین

۱. گزاره‌های زیر را به‌صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به‌علاوه‌ی پنج است.

پ) مجموع معکوس‌های دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

ث) هر عدد ناصفری از معکوس خود بزرگ‌تر یا مساوی با آن است.

عدد (یا دو عدد) را x (یا a و b) می‌گیریم:

- الف)
- ب) $x^3 > 7x + 5$
- پ) (با $a \neq 0$ و $b \neq 0$)
- ت) $a^3 + b^3 \geq (a + b)^3$
- ث) یعنی به‌ازای هر $x \neq 0$، $x \geq 1/x$.

۲۱ صفحه ۱۸ تمرین

۲. در هر مورد گزاره‌ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می‌شود. (استدلال: طول x، عرض y، مساحت S=xy؛ پس 2S = 2(xy) یعنی مساحت دو برابر شده است.)

ب) در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه‌ی a و b و وتر c، اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر آن نیز دو برابر می‌شود. (استدلال: $4c^2 = 4(a^2 + b^2) = 4a^2 + b^2 = (2a)^2 + b^2 = c'^2$ پس $c' = 2c$.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پ) تساوی برقرار است. (استدلال: عدد ۳ در 3×12 با ۳ در مخرج 3×2=6 ساده شده و به جای مخرج ۲ ماند:)

- الف) خطای استدلال: وقتی هم طول و هم عرض دو برابر شوند، مساحت جدید $(2x)(2y) = 4xy = 4S$ است، نه $2(xy)$. در استدلال تنها حاصل‌ضرب را در ۲ ضرب کرده‌اند، نه هر یک از دو عامل را. پس مساحت ۴ برابر می‌شود و گزاره نادرست است.
- ب) خطای استدلال در تساوی $4(a^2 + b^2) = 4a^2 + b^2$ است؛ از b^2 هم ۴ عامل گرفته‌اند در حالی که $4(a^2 + b^2) = 4a^2 + 4b^2$. درست آن است $c'^2 = 4a^2 + b^2$ که با $4c^2 = 4a^2 + 4b^2$ برابر نیست (مگر b=۰). مثال نقض: اضلاع ۳، ۴، ۵؛ اگر a=۳ را ۶ کنیم، وتر جدید $\sqrt{(36+16)} = \sqrt{52} \approx 7{,}2$ است نه ۱۰.
- پ) خطای استدلال: برای ساده کردن باید کل صورت بر ۳ تقسیم می‌شد؛ ولی فقط جمله‌ی 3×12 را بر ۳ ساده کرده‌اند و 4×16 را بر ۳ تقسیم نکرده‌اند (در صورت جمع، ساده کردن بر عامل مشترک همه‌ی جمله‌ها مجاز است). مقدار درست: ؛ پس تساوی برقرار نیست.

۲۲ صفحه ۲۰ **پرسش (خواندنی: منطق فازی)**

در نوار زیر کدام نقطه محل رنگ آبی را مشخص می‌کند؟ آیا فقط یک نقطه وجود دارد؟ رنگ‌های متناظر با این نقاط چه تفاوتی با هم دارند؟

- رنگ آبی در یک نقطه‌ی مشخص نیست؛ از حدود وسط نوار (حوالی میان تیک چهارم و پنجم) رنگ، آبی «خالص و پررنگ» است و نقاط اطراف آن نیز به درجه‌های مختلف آبی‌اند.
- پس فقط یک نقطه وجود ندارد؛ نقاط زیادی را می‌توان «آبی» نامید.
- تفاوت رنگ‌های متناظر در «درجه‌ی آبی بودن» است: هرچه از نقطه‌ی آبی خالص به سمت چپ (تیره و مایل به سیاه) یا به سمت راست (روشن و مایل به سفید) برویم، درجه‌ی آبی بودن کمتر می‌شود. این همان ایده‌ی منطق فازی است: یک مفهوم می‌تواند درجه‌ای بین ۰ و ۱ داشته باشد، نه فقط ۰ (نادرست) یا ۱ (درست).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی و آمار ۲ یازدهم (انسانی) - فصل دوم

تابع

فهرست

۲۳ صفحه ۲۲ · فعالیت — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۲۷

۲۴ صفحه ۲۳ · کار در کلاس — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۲۷

۲۵ صفحه ۲۴ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۲۸

۲۶ صفحه ۲۴ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۲۸

۲۷ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۲۹

۲۸ صفحه ۲۷ · فعالیت — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۲۹

۲۹ صفحه ۲۸ · کار در کلاس — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۲۹

۳۰ صفحه ۲۹ · کار در کلاس — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۰

۳۱ صفحه ۲۹ · فعالیت — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۰

۳۲ صفحه ۳۰ · فعالیت — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۱

۳۳ صفحه ۳۱ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۱

۳۴ صفحه ۳۲ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۲

۳۵ صفحه ۳۲ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۲

۳۶ صفحه ۳۲ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۲

۳۷ صفحه ۳۲ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۳

۳۸ صفحه ۳۲ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۳

۳۹ صفحه ۳۲ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۳

۴۰ صفحه ۳۲ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۳

۴۱ صفحه ۳۲ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۴

۴۲ صفحه ۳۲ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۴

۴۳ صفحه ۳۳ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۴

۴۴ صفحه ۳۳ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۵

۴۵ صفحه ۳۳ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۵

۴۶ صفحه ۳۳ · تمرین — درس ۱ توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ... ۳۶

۴۷ صفحه ۳۴ · فعالیت — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۳۶

۴۸ صفحه ۳۵ · کار در کلاس — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۳۷

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۹ صفحه ۳۶ · کار در کلاس — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۳۷

۵۰ صفحه ۳۷ · فعالیت — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۳۷

۵۱ صفحه ۳۸ · کار در کلاس — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۳۸

۵۲ صفحه ۳۹ · کار در کلاس — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۳۸

۵۳ صفحه ۴۱ · فعالیت — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۳۹

۵۴ صفحه ۴۱ · کار در کلاس — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۳۹

۵۵ صفحه ۴۲ · کار در کلاس — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۴۰

۵۶ صفحه ۴۳ · تمرین — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۴۰

۵۷ صفحه ۴۳ · تمرین — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۴۱

۵۸ صفحه ۴۳ · تمرین — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۴۱

۵۹ صفحه ۴۴ · تمرین — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۴۲

۶۰ صفحه ۴۴ · تمرین — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۴۲

۶۱ صفحه ۴۴ · تمرین — درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی ... ۴۳

۶۲ صفحه ۴۵ · فعالیت — درس ۳ اعمال بر روی توابع ۴۳

۶۳ صفحه ۴۶ · فعالیت — درس ۳ اعمال بر روی توابع ۴۴

۶۴ صفحه ۴۷ · کار در کلاس — درس ۳ اعمال بر روی توابع ... ۴۴

۶۵ صفحه ۴۷ · کار در کلاس — درس ۳ اعمال بر روی توابع ... ۴۵

۶۶ صفحه ۴۹ · فعالیت — درس ۳ اعمال بر روی توابع ۴۵

۶۷ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — درس ۳ اعمال بر روی توابع ... ۴۶

۶۸ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — درس ۳ اعمال بر روی توابع ... ۴۷

۶۹ صفحه ۵۱ · فعالیت — درس ۳ اعمال بر روی توابع ۴۷

۷۰ صفحه ۵۲ · تمرین — درس ۳ اعمال بر روی توابع ۴۷

۷۱ صفحه ۵۲ · تمرین — درس ۳ اعمال بر روی توابع ۴۸

۷۲ صفحه ۵۲ · تمرین — درس ۳ اعمال بر روی توابع ۴۸

۷۳ صفحه ۵۳ · تمرین — درس ۳ اعمال بر روی توابع ۴۹

۷۴ صفحه ۵۳ · تمرین — درس ۳ اعمال بر روی توابع ۴۹

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳ صفحه ۲۲ **فعالیت**

اگر $A = \{-1/2 , 1 , 2\}$ و $f : A \to B$ با ضابطه‌ی $f(x) = 2x^2 + 1$ باشد، با توجه به نمایش‌های خوانده‌شده در سال قبل برای بیان یک رابطه، الف) نمایش پیکانی را کامل کنید و برد را بنویسید؛ ب) نمایش زوج مرتبی را کامل کنید و دامنه و برد را بنویسید؛ ج) نمایش مختصاتی را کامل کنید.

مقدار تابع در هر عضو A را حساب می‌کنیم:

،،

الف) پیکان‌ها: $3/2 \to -1/2$، $3 \to 1$، $9 \to 2$. پس برد $B = \{3/2 , 3 , 9\}$ است. این نمایش بیانگر یک تابع است؛ زیرا از هر عضو مجموعه‌ی A دقیقاً یک پیکان خارج شده است.

ب) $f = \{(-1/2 , 3/2) , (1 , 3) , (2 , 9)\}$؛ دامنه: $D_f = \{-1/2 , 1 , 2\}$ (مؤلفه‌های اول) و برد: $R_f = \{3/2 , 3 , 9\}$ (مؤلفه‌های دوم).

ج) در دستگاه مختصات سه نقطه‌ی $(3/2 , -1/2)$، $(1 , 3)$ و $(2 , 9)$ را مشخص می‌کنیم. تصویر این نقطه‌ها روی محور x ها دامنه و تصویرشان روی محور y ها برد تابع است.

۲۴ صفحه ۲۳ **کار در کلاس**

ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطه‌ی خواسته‌شده را کامل کنید. ۱. رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد. ۲. رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد. حال جدول را با توجه به رابطه‌هایی که در قسمت ۱ و ۲ «تابع» هستند، کامل کنید. با توجه به جدول بالا: الف) نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که ... ب) نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که ... ج) نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که ...

۱ـ الف) یزد ← بافق، چهارمحال و بختیاری ← کوهرنگ، گیلان ← رودسر. از هر استان دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود: **تابع است**.

۱ـ ب) سیستان و بلوچستان ← میرجاوه و زابل (دو پیکان)، هرمزگان ← بندر خمیر، و از ایلام هیچ پیکانی خارج نمی‌شود: **تابع نیست**.

۲ـ الف) سعدی ← بوستان و گلستان (دو پیکان)، سهراب سپهری ← اتاق آبی، از عطار پیکانی خارج نمی‌شود: **تابع نیست**.

۲ـ ب) ویکتور هوگو ← بینوایان، جلال آل‌احمد ← ارزیابی شتاب‌زده، خواجه نظام‌الملک ← سیاست‌نامه: **تابع است**.

تکمیل جدول (دو رابطه‌ی تابع: ۱ـ الف و ۲ـ ب)

ردیف	نمایش پیکانی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی
۱	سه استان در مجموعه‌ی اول و شهرهای متناظر در مجموعه‌ی دوم، از هر استان یک پیکان	{(یزد، بافق) , (چهارمحال و بختیاری، کوهرنگ) , (گیلان، رودسر)}	سه نقطه؛ روی محور x ها استان‌ها و روی محور y ها شهر متناظر
۲	هوگو، آل‌احمد و نظام‌الملک در مجموعه‌ی اول و کتاب‌ها در دوم، از هر نویسنده یک پیکان	{(هوگو، بینوایان) , (آل‌احمد، ارزیابی شتاب‌زده) , (نظام‌الملک، سیاست‌نامه)}	سه نقطه؛ روی محور x ها نویسنده‌ها و روی محور y ها کتاب متناظر

- **الف)** نمایش پیکانی یک رابطه وقتی تابع است که از هر عضو مجموعه‌ی اول (دامنه) دقیقاً یک پیکان خارج شود.
- **ب)** نمایش زوج مرتبی یک رابطه وقتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متفاوتی مؤلفه‌ی اول یکسان نداشته باشند (به ازای هر مؤلفه‌ی اول فقط یک مؤلفه‌ی دوم باشد).
- **ج)** نمایش مختصاتی یک رابطه وقتی تابع است که روی خط عمودی که از هر عضو دامنه می‌گذرد، دقیقاً یک نقطه از نمودار باشد (هر خط عمود بر محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند).

۲۵ صفحه ۲۴ **تمرین**

۱. کدام‌یک از رابطه‌هایی که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟ چرا؟

در نمودار **الف** از هر دو عضو مجموعه‌ی اول (۱ و ۲) یک پیکان خارج شده است (هر دو به a)؛ پس تابع است.

در نمودار **ب** از عدد ۱ دو پیکان (به a و به b) خارج شده و از عدد ۲ هیچ پیکانی خارج نشده است؛ پس **ب تابع نیست**.

۲۶ صفحه ۲۴ **تمرین**

۲. کامل کنید: (۱) $f: A \to B$ با $f(x) = x^2 - 1$ و $D_f = A = \{2, -1, -2\}$؛ (۲) f تابعی خطی از A به B با $D_f = \{-1/2 , 0 , 2\}$ و $R_f = \{-3/2 , 0 , 6\}$؛ (۳) $f(x) = 1/x$ با $R_f = \{1 , 1/2 , 1/5\}$؛ (۴) $f(x) = (x-1)^2$ با نمودار داده‌شده.

(۱) $f(-2)=3 , f(-1)=0 , f(2)=3 \Rightarrow R_f = \{0 , 3\}$ (عدد ۳ دو بار آمده ولی یک بار می‌نویسیم). نقطه‌ها: (2,3)، (-1,0)، (-2,3).

(۲) تابع خطی به شکل $f(x) = ax$ است (چون $f(0)=0$). از $f(2)=6$ نتیجه می‌شود $a = 3$ و $f(x) = 3x$. بررسی: $f(-1/2) = -3/2$ ✓. نقطه‌ها: (-3/2 , -1/2)، (0,0)، (2,6).

(۳) از $1/x = 1 , 1/2 , 1/5$ به دست می‌آید $x = 1 , 2 , 5$؛ پس $D_f = \{1 , 2 , 5\}$. نقطه‌ها: (1,1)، (2,1/2)، (5,1/5).

(۴) نقطه‌های نمودار (0,1)، (1,0) و (2,1) هستند؛ پس $D_f = \{0 , 1 , 2\}$ و $R_f = \{0 , 1\}$. بررسی: $(0-1)^2=1 , (2-1)^2=1 , (1-1)^2=0$ ✓.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۷ صفحه ۲۶ | کار در کلاس

یک‌شنبه: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه‌ی دریافتی مطابق جدول ۲، نمودار زیر را کامل کنید.

در جدول ۱ در روز یک‌شنبه میانگین ورود خودرو در هر ۱۲ ساعت کاری بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ است (مثلاً ۱۱۰، ۱۳۰، ۱۵۰، ...، ۱۷۰). طبق جدول ۲ در این دسته هزینه‌ی هر خودرو ۵۰۰ تومان است؛ پس برای $n = 1, 2, \dots, 12$ همیشه $C(n) = 500$.

به نمودار، ده نقطه‌ی دیگر $(12,500), \dots, (4,500), (3,500)$ را هم اضافه می‌کنیم؛ همه روی خط افقی $y = 500$ قرار می‌گیرند. تابع ثابت است: $C(n) = 500$، $R = \{500\}$.

۲۸ صفحه ۲۷ | فعالیت

دوشنبه: با استفاده از جدول ۱ و ۲ همانند روزهای شنبه و یک‌شنبه، نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید و دامنه و برد و ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید. توجه داشته باشید که در این نمودار محور x برخلاف روزهای شنبه و یک‌شنبه بیانگر زمان ورود خودرو به توقفگاه است. ـ دامنه‌ی نمودار در روز دوشنبه چه تفاوتی با دامنه‌ی نمودار در روزهای شنبه و یک‌شنبه دارد؟ ـ تفاوت این دامنه‌ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

در روز دوشنبه میانگین ورود خودرو در همه‌ی ساعت‌ها بین ۲۰۰ تا ۳۰۰ است (۲۰۰ تا ۲۵۰)؛ طبق جدول ۲ هزینه‌ی هر خودرو در همه‌ی ساعت‌ها ۱۰۰۰ تومان است.

$C : A \to B,\ C(x) = 1000$، $D = \{x \in R \mid 8 \le x \le 20\}$، $R = \{1000\}$

- **تفاوت دامنه:** در شنبه و یک‌شنبه x شماره‌ی ساعت کاری است و دامنه فقط ۱۲ عدد طبیعی $\{1, 2, \dots, 12\}$ است. در دوشنبه x زمان ورود است و هر لحظه‌ی بین ساعت ۸ تا ۲۰ می‌تواند باشد؛ پس دامنه یک بازه‌ی از اعداد حقیقی است.
- **تأثیر بر نمودار:** چون دامنه ۱۲ عدد جدا از هم بود، نمودار ۱۲ نقطه‌ی جدا بود؛ ولی در دوشنبه دامنه بازه است و نمودار یک پاره‌خط پیوسته (افقی) می‌شود.

۲۹ صفحه ۲۸ | کار در کلاس

چهارشنبه: در این روز با توجه به جدول ۱ و ۲ ضابطه‌ی تابع به صورت داده‌شده مشخص می‌شود ($C(n) = 0$ برای $1 \le n \le 6$ و $C(n) = 500 \times (n-6)$ برای $7 \le n \le 12$). نمودار این تابع را رسم کنید. ۲. درآمد توقفگاه در این روز چقدر است؟

۱) برای $n = 1, \dots, 6$ مقدار تابع صفر است؛ و برای $n = 7, \dots, 12$ مقدارها به ترتیب 500 , 1000 , 1500 , 2000 , 2500 , 3000 می‌شود. این ۱۲ نقطه را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم (نقطه‌ها روی یک خط نیستند و نمودار دوضابطه‌ای است).

توشه‌ای برای موفقیت

۲) درآمد = مجموع (تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت × هزینه‌ی همان ساعت). تعداد خودروها در ساعت‌های هفتم تا دوازدهم از جدول ۱: ۱۸۰، ۲۷۰، ۳۵۰، ۴۹۰، ۵۷۰، ۶۸۰ (ساعت‌های اول تا ششم هزینه‌ی صفر دارند):

= ۹۰,۰۰۰ + ۲۷۰,۰۰۰ + ۵۲۵,۰۰۰ + ۹۸۰,۰۰۰ + ۱,۴۲۵,۰۰۰ + ۲,۰۴۰,۰۰۰ = **۵,۳۳۰,۰۰۰ تومان**

---

۳۰ صفحه ۲۹ کار در کلاس

ضابطه‌ی تابع و نمودار آن را کامل کنید. $f(x) = x + 1$ برای $-1 \le x < 3$ و $f(x) = \dots$ برای $3 \le x \le 6$ (نمودار قسمت دوم داده شده است).

قسمت رسم‌شده پاره‌خطی از (3,3) تا (6,0) است. شیب آن $(0-3)/(6-3) = -1$ و $f(3) = 3$ است؛ پس $y = -x + b$ و $3 = -3 + b \Rightarrow b = 6$.

$f(x) = x + 1 \ (-1 \le x < 3)$ ، $f(x) = 6 - x \ (3 \le x \le 6)$

برای کامل‌کردن نمودار، قسمت اول را از نقطه‌ی توپر (−1,0) تا نقطه‌ی توخالی (3,4) رسم می‌کنیم (چون $x = 3$ در قسمت اول نیست).

---

۳۱ صفحه ۲۹ فعالیت

نمودار زیر قطاری را نشان می‌دهد که از تهران به مشهد رفته است. ۱. مفهوم قسمت‌هایی که نمودار تابع ثابت است چیست؟ ۲. ضابطه‌ی تابع «مکان-زمان» قطار از لحظه‌ی رسیدن به شاهرود تا لحظه‌ی ترک نیشابور را به‌دست آورید. ۳. اگر قطار مطابق ضابطه‌ی بخش ۵ و بدون توقف در نیشابور به مسیر خود ادامه دهد، در چه زمانی به مشهد می‌رسد؟

۱) قسمت‌های (۲)، (۴) و (۶) افقی‌اند: در این بازه‌ها مسافت طی‌شده تغییر نمی‌کند؛ یعنی قطار در ایستگاه‌های سمنان، شاهرود و نیشابور **توقف** دارد (مکان ثابت، با گذشت زمان).

۲) قطار در ساعت ۴/۵ به شاهرود (کیلومتر ۴۵۰) می‌رسد، تا ساعت ۵ می‌ایستد، سپس (قسمت ۵) از نقطه‌ی (5,450) تا (7.5,825) حرکت می‌کند، تا ساعت ۸ در نیشابور می‌ایستد. شیب قسمت ۵: $(825-450)/(7.5-5) = 150$ (کیلومتر بر ساعت)، پس $y - 450 = 150(t - 5)$ یعنی $y = 150t - 300$.

```
y(t) = 450          (4.5 <= t <= 5)
       150t - 300    (5 < t < 7.5)
       825           (7.5 <= t <= 8)
```

۳) اگر با همان سرعت ۱۵۰ کیلومتر بر ساعت ادامه دهد: $150t - 300 = 945 \Rightarrow t = 1245/150 = 8.3$. یعنی ۸/۳ ساعت پس از حرکت (۸ ساعت و ۱۸ دقیقه) به مشهد می‌رسد.

۳۲ صفحه ۳۰ **فعالیت**

پنج‌شنبه: به‌دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند؛ یعنی اگر خودرو در n امین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینه‌ی دریافتی n واحد (هر واحد ۵۰۰ تومان) باشد. مجموعه‌ی نقاط نمودار را به‌صورت زوج مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان دامنه و برد این تابع برقرار است؟ آیا می‌توانید ضابطه‌ی این تابع را حدس بزنید؟ اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالت دامنه و برد آن چه تغییری می‌کند؟

{(12,12) , ... , (3,3) , (2,2) , (1,1)} (مؤلفه‌ی دوم برحسب واحد ۵۰۰ تومان).

D = {1 , 2 , ... , 12} و R = {1 , 2 , ... , 12}؛ دامنه و برد با هم برابرند و هر عضو دامنه به خودش نسبت داده می‌شود؛ پس ضابطه f(x) = x است (هزینه = ۵۰۰n تومان).

اگر نقطه‌ها را به هم وصل کنیم، نمودار یک پاره‌خط روی نیمساز ناحیه‌ی اول است و بیانگر آن است که ورود خودرو در هر لحظه‌ی دلخواه بین ساعت ۱ تا ۱۲ ممکن است (زمان پیوسته). در این حالت دامنه و برد هر دو بازه‌ی [1 , 12]] از اعداد حقیقی می‌شوند: D = R_f = {x ∈ R | 1 ≤ x ≤ 12}.

۳۳ صفحه ۳۱ **تمرین**

۱. با توجه به معرفی محور x و y در دستگاه مختصات، با هرکدام از توضیحات زیر کدام‌یک از توابع ثابت، چندضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید. الف) به مناسبت روز درخت‌کاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد (محورها: تعداد دانش‌آموز، تعداد نهال). ب) هزینه‌ی یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است. ج) برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان یک قوطی رنگ کوچک استفاده می‌شود (محورها: متر مربع نقاشی، تعداد قوطی رنگ). د) بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است. هـ) دونده‌ای، کنار یک زمین فوتبال، با سرعت ثابت از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B شروع به دویدن می‌کند و دوباره به نقطه‌ی A برمی‌گردد (محورها: زمان، فاصله از نقطه‌ی A).

- **الف)** تعداد نهال = تعداد دانش‌آموزان: y = x؛ **تابع همانی** (نقطه‌هایی روی نیمساز، چون تعداد عددی طبیعی است).
- **ب)** در هر زمان، قیمت ۱۰۰۰ تومان: y = 1000؛ **تابع ثابت** (پاره‌خط افقی روی بازه‌ی ۰ تا ۲۴ ساعت).
- **ج)** هر متر مربع یک قوطی: y = x؛ **تابع همانی**.
- **د)** f(x) = 2000 برای سانس‌های ۱ تا ۳، f(x) = 3000 برای سانس‌های ۴ تا ۷ و f(x) = 1500 برای سانس‌های ۸ و ۹؛ **تابع چندضابطه‌ای** (با سه ضابطه‌ی ثابت؛ ۹ نقطه).

- **هـ)** رفتن: فاصله با زمان به‌طور خطی زیاد می‌شود ($y = kt$) و برگشت: به‌طور خطی کم می‌شود ($y = d - kt$) تا به صفر برسد؛ **تابع چندضابطه‌ای** با دو ضابطه‌ی خطی (نمودار شبیه حرف ۸).

۳۴ صفحه ۳۲ **تمرین**

۲. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟ الف. اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است. ب. اگر دامنه‌ی یک تابع همانی مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است. ج. اگر f یک تابع ثابت باشد، آن‌گاه $f(kx) = kf(x)$.

الف) نادرست. مثال: $f = \{(1,2) , (2,1)\}$؛ دامنه و برد هر دو $\{1,2\}$ است ولی تابع همانی نیست (برای همانی باید $f(x) = x$ باشد).

ب) درست. برای تابع همانی $f(x) = x$ داریم $f(-x) = -x$؛ پس $f(x) + f(-x) = x + (-x) = 0$.

ج) نادرست. اگر $f(x) = c$ آن‌گاه $f(kx) = c$ ولی $kf(x) = kc$؛ این دو فقط وقتی برابرند که $k = 1$ یا $c = 0$. مثال: $f(x) = 2$ و $k = 3$: $f(3x) = 2 \neq 6 = 3f(x)$.

۳۵ صفحه ۳۲ **تمرین**

۳. اگر $A = \{(2, b) , (a, 4) , (7, a+b)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a کدام است؟

در تابع ثابت همه‌ی مؤلفه‌های دوم برابرند: $b = 4 = a + b$. از $b = 4$ و $a + 4 = 4$ نتیجه می‌شود $a = 0$. (مؤلفه‌های اول 7 , 0 , 2 متمایزند.) پاسخ: **a = ۰**.

۳۶ صفحه ۳۲ **تمرین**

۴. اگر $A = \{(x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)\}$ یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر y_3 ،y_2 ،y_1 را به‌دست آورید.

در تابع ثابت $y_1 = y_2 = y_3 = c$. داده‌ها c , c , c هستند؛ پس:

- میانگین: $(c+c+c)/3 = c$
- میانه: c
- واریانس: چون همه‌ی داده‌ها با میانگین برابرند، $\sigma^2 = 0$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۷ صفحه ۳۲ تمرین

۵. کدام‌یک از نمایش‌های پیکانی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟

نمودار **سمت چپ** (که از هر چهار عضو ۱، ۲، ۳ و ۴ یک پیکان به عدد ۳- رفته است): هر عضو دامنه به یک عدد ثابت نسبت داده شده؛ تابع ثابت $f(x) = -3$.

نمودار سمت راست اصلاً تابع نیست؛ زیرا از عدد ۳ چهار پیکان خارج شده است.

۳۸ صفحه ۳۲ تمرین

۶. در تابع ثابت $f(x) = c$: الف. مقادیر $f(a)$، $f(b)$ و $f(a+b)$ را مشخص کنید. ب. اگر در این تابع $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

الف) $f(a) = c \, , \, f(b) = c \, , \, f(a+b) = c$.

ب) $c = c \times c \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c(c-1) = 0$؛ پس **$c = ۰$ یا $c = ۱$**.

۳۹ صفحه ۳۲ تمرین

۷. اگر $A = \{(a,۱) \, , \, (b,۲) \, , \, (c,۵)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را به‌دست آورید.

در تابع همانی مؤلفه‌ی اول و دوم برابرند: $a = 1 \, , \, b = 2 \, , \, c = 5$. میانگین: .

۴۰ صفحه ۳۲ تمرین

۸. در هر یک از زوج‌مرتب‌های زیر $n \in \mathbb{N}$ را به‌گونه‌ای تعیین کنید که زوج‌مرتب داده‌شده روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم باشد: $(n^2 - ۳n + ۴ \, , ۲)$ و $(n^2 - ۴n + ۲ \, , -۱)$.

نقطه‌های نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم مختصات برابر دارند $(y = x)$.

الف) $n^2 - 3n + 4 = 2 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow (n-1)(n-2) = 0$؛ **$n = ۱$ یا $n = ۲$**.

ب) $n^2 - 4n + 2 = -1 \Rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \Rightarrow (n-1)(n-3) = 0$؛ **$n = ۱$ یا $n = ۳$**. (هر چهار مقدار طبیعی‌اند.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۱ صفحه ۳۲ تمرین

۹. اگر f یک تابع ثابت با دامنه‌ی دو عضوی و $n \in \mathbb{N}$ و m باشد، مقدار m + t را به‌دست آورید. $f = \{(-1, n^2) - (m + n, t), (m - 4, 3), (2n)\}$

مؤلفه‌های دوم باید برابر باشند: $n^2 - 2n - 3 = t$؛ از $n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow (n-3)(n+1) = 0$ و $n \in N$ داریم $n = 3$ و $t = 3$.

f سه زوج دارد ولی دامنه دو عضوی است؛ پس دو مؤلفه‌ی اول برابرند. مؤلفه‌های اول: $m+3 , m-4 , -1$ و $m+3 \neq m-4$؛ بنابراین $m-4 = -1$ یعنی $m = 3$ (حالت $m+3 = -1$ به $m = -4$ می‌انجامد که طبیعی نیست). دامنه $\{6 , -1\}$ دو عضو دارد ✓.

$m + t = 3 + 3 = 6 \Rightarrow$ ۶

این جواب ممکن است دقیق نباشد؛ شرط روی m در صورت مسئله خوانا نبود (اگر m هر عدد حقیقی باشد، $m = -4$ و $m + t = -1$ نیز ممکن است).

۴۲ صفحه ۳۲ تمرین

۱۰. ضابطه‌ی تابع زیر را مشخص کنید.

نمودار سه قسمت دارد: برای $x < 0$ نیم‌خطی با شیب ۱- که از (2,2-) و (0,0) می‌گذرد ($y = -x$)؛ از (0,0) تا (2,2) پاره‌خطی با شیب ۱ ($y = x$)؛ و برای $x > 2$ نیم‌خط افقی $y = 2$.

```
f(x) = -x    (x < 0)
       x     (0 <= x <= 2)
       2     (x > 2)
```

(در $x < 0$ و $0 \le x \le 2$ می‌توان نوشت $f(x) = |x|$.)

۴۳ صفحه ۳۳ تمرین

۱۱. در تابع $f(x) = x$ برای $x < -1$؛ x^2 برای $-1 \le x \le 2$؛ ۵ برای $x > 2$؛ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید: f(۲)، $f(\sqrt{2})+f(5)$، $f(-\sqrt{2})+f(\sqrt{3})$، $f(3)+f(-1)$.

- $f(2) = 2^2 = 4$ (چون $-1 \le 2 \le 2$)
- $f(3) = 5$ (چون $3 > 2$) و $f(-1) = (-1)^2 = 1$؛ پس $f(3)+f(-1) = 6$
- $-1 < -1.41 \approx -\sqrt{2} \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$؛ $\sqrt{3} \approx 1.73$ در $[-1,2]$ است $\Rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$؛ پس مجموع $3 - \sqrt{2}$
- $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$ و $f(5) = 5$؛ پس مجموع 7

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۴ صفحه ۳۳ تمرین

۱۲. نمودار زیر به کدام داستان مربوط است؟ (محور افقی: زمان، محور عمودی: فاصله از خانه). الف) آوا و مادربزرگش برای قدم‌زدن در بوستان از خانه خارج شدند. آنها در ابتدا آهسته قدم می‌زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند. ب) علی با دوچرخه‌اش از خانه به سمت بالای تپه روبه‌روی خانه‌شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرازیر شد. ج) محمدرضا برای دویدن روزانه‌اش از خانه خارج شد. هنگام دویدن با دوستش که در حال دویدن بود برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.

نمودار از (0,0) با شیب تند (سرعت زیاد) بالا می‌رود، سپس شیب کمتر می‌شود (سرعت کم)، و در پایان با شیب تند به صفر (خانه) برمی‌گردد.

داستان الف نمی‌خواند (آوا ابتدا آهسته است، ولی نمودار با سرعت زیاد شروع شده). داستان ب هم نمی‌خواند؛ زیرا علی از تپه پایین می‌آید ولی فاصله‌اش از خانه به صفر نمی‌رسد. **داستان ج** با نمودار می‌خواند: سرعت زیاد، سپس کاهش سرعت (برخورد با دوست)، سپس بازگشت سریع به خانه.

۴۵ صفحه ۳۳ تمرین

۱۳. اگر هزینه‌ی توقفگاه در روز جمعه بر اساس مدت زمان سپری‌شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع $C(x) = 1$ برای $0 \le x < 2$؛ $x + 1$ برای $2 \le x < 10$؛ 0 برای $10 \le x \le 12$ پیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینه‌ی توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور y ها معادل ۵۰۰ تومان است.)

نمودار: پاره‌خط افقی $y = 1$ روی $[0 , 2)$؛ پاره‌خط $y = x + 1$ از نقطه‌ی توپر (2,3) تا توخالی (10,11)؛ و پاره‌خط روی محور x ها از $x = 10$ تا 12 (هزینه صفر).
با خواندن نمودار (x = ساعات پس از ۸ صبح، هر واحد ۵۰۰ تومان):

زمان ورود	x	C(x)	هزینه
۸:۰۰	۰	۱	۵۰۰ تومان
۹:۳۰	۱/۵	۱	۵۰۰ تومان
۱۰:۰۰	۲	۳	۱۵۰۰ تومان
۱۲:۳۰	۴/۵	۵/۵	۲۷۵۰ تومان
۱۷:۰۰	۹	۱۰	۵۰۰۰ تومان
۱۸:۰۰ تا ۲۰:۰۰	۱۰ تا ۱۲	۰	رایگان

۴۶ صفحه ۳۳ تمرین

*** ۱۴. درآمد فروشگاه از توقفگاه را از روز شنبه تا چهارشنبه در دو حالت زیر مقایسه کنید. الف. قبل از هوشمندسازی و بر اساس هزینه‌ی ثابت ۷۰۰ تومان برای هر خودرو که مستقل از روز و ساعت ورود به توقفگاه است. ب. بر اساس هوشمندسازی. در هر دو حالت از اطلاعات جدول ۱ استفاده کنید. (حل این تمرین اجباری نیست)**

درآمد هر روز = (مجموع میانگین خودروهای ۱۲ ساعت) × ۷۰۰ در حالت الف؛ و در حالت ب برابر مجموع (تعداد خودرو در هر ساعت × هزینه‌ی همان ساعت بر اساس ضابطه‌ی آن روز) است.

درآمد توقفگاه (تومان)

روز	مجموع خودروها	حالت الف (۷۰۰ تومان ثابت)	حالت ب (هوشمند)
شنبه	۵۲۰	۳۶۴,۰۰۰	۰
یک‌شنبه	۱,۷۷۰	۱,۲۳۹,۰۰۰	۸۸۵,۰۰۰
دوشنبه	۲,۶۶۰	۱,۸۶۲,۰۰۰	۲,۶۶۰,۰۰۰
سه‌شنبه	۲,۵۸۰	۱,۸۰۶,۰۰۰	۲,۶۵۰,۰۰۰
چهارشنبه	۲,۹۰۰	۲,۰۳۰,۰۰۰	۵,۳۳۰,۰۰۰
جمع	۱۰,۴۳۰	۷,۳۰۱,۰۰۰	۱۱,۵۲۵,۰۰۰

نتیجه: در شنبه و یک‌شنبه (روزهای کم‌رفت‌وآمد) درآمد کم‌تر شده یا صفر است و در دوشنبه، سه‌شنبه و به‌ویژه چهارشنبه (روزهای شلوغ) درآمد بیشتر شده است؛ در مجموع پنج روز، درآمد از ۷,۳۰۱,۰۰۰ تومان به ۱۱,۵۲۵,۰۰۰ تومان (حدود ۱/۵۸ برابر) می‌رسد. (سه‌شنبه: ۸ ساعت اول ۵۰۰ و ۴ ساعت آخر ۱۵۰۰ تومان.)

۴۷ صفحه ۳۴ فعالیت

به کمک نمودار پلکانی رسم‌شده هزینه‌ی برق مصرفی یک خانه را محاسبه کنید: ۱. هزینه‌ی ۱۰۰ kwh اول چگونه محاسبه می‌شود؟ آیا می‌توانیم مساحتی را در نمودار داده‌شده مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟ ۲. مساحت قسمت هاشورخورده‌ی زیر بیانگر چه مفهومی است؟ ۳. هزینه‌ی کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید.

محور y نرخ هر کیلووات‌ساعت (ریال) است: ۴۵۰ ریال برای ۰ تا ۱۰۰، ۵۲۵ ریال برای ۱۰۰ تا ۲۰۰، ۱۱۲۵ ریال برای ۲۰۰ تا ۳۰۰ و ... ؛ مصرف این خانه ۲۴۶/۲۳ kwh است.

۱) هزینه‌ی ۱۰۰ kwh اول = ۱۰۰ × ۴۵۰ = ۴۵,۰۰۰ ریال. این عدد برابر مساحت مستطیلی است که قاعده‌اش از ۰ تا ۱۰۰ و ارتفاعش ۴۵۰ است (مساحت = طول × عرض = مقدار مصرف × نرخ). پس بله.

۲) قسمت هاشورخورده مستطیلی با قاعده‌ی ۱۰۰ (از ۱۰۰ تا ۲۰۰) و ارتفاع ۵۲۵ است: مساحت آن = 525 × 100 = 52500 بیانگر هزینه‌ی ۱۰۰ kwh دوم است.

۳) هزینه‌ی کل برابر مجموع مساحت سه مستطیل از ۰ تا ۲۴۶/۲۳ است (سه مستطیل را هاشور می‌زنیم):

پس هزینه‌ی کل حدود **۱۴۹,۵۰۹ ریال** می‌شود. (در جدول کتاب سطر سوم ≈ ۵۲,۰۰۹ است که با ۵۲,۰۰۸/۷۵ سازگار است.)

---

۴۸ صفحه ۳۵ | کار در کلاس

بر اساس ضابطه‌ی تابع پلکانی y = f(x)، نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید. f(x) = ۱ برای x > ۰؛ ۰ برای x = ۰؛ −۱ برای x < ۰.

برای x های مثبت مقدار ۱ (نیم‌خط افقی با ابتدای توخالی در مبدأ)، برای x = ۰ فقط نقطه‌ی (0,0)، و برای x های منفی مقدار ۱− (نیم‌خط افقی با انتهای توخالی در مبدأ).
D = R و R = {−1 , 0 , 1}. (این همان تابع علامت y = sign(x) است.)

---

۴۹ صفحه ۳۶ | کار در کلاس

۱. نمودار زیر چه مفهوم ریاضی را بیان می‌کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت‌هایی هستند؟ واحدهای آنها را مشخص کنید. ضابطه‌ی تابع را بنویسید. ۲. هر کدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.

۱) این نمودار «شماره‌ی ماه سال» را برحسب «شماره‌ی روز سال» نشان می‌دهد. محور x شماره‌ی روز سال (واحد: روز، از ۱ تا ۳۶۵) و محور y شماره‌ی ماه (۱ تا ۱۲) است. شش ماه اول ۳۱ روزه‌اند و شش ماه بعد ۳۰ روزه.

```
f(x) = 1    (0 < x <= 31)
       2    (31 < x <= 62)
       3    (62 < x <= 93)
       ...
       12   (336 < x <= 365)
```

۲) ساعت شنی: ریختن شن با سرعت ثابت در یک ساعت (مقدار شن پایین رفته‌ی خطی از ۰ تا ۱ و سپس دوباره شروع) ⇐ نمودار **دندانه‌ای وسط** (خطوط مایل که در هر ساعت از ۰ تا ۱ بالا می‌روند). پرنده‌ی ساعت دیواری که فقط در رأس هر ساعت بیرون می‌آید ⇐ نمودار **سمت پایین** (نقطه‌ی ۱ در ساعت‌های ۰، ۱، ۲، ۳ و در غیر آن ۰). چراغ راهنمایی سه‌حالته ⇐ نمودار **بالا** (سه مقدار ۰، ۱، ۲ که تکرار می‌شوند).

---

۵۰ صفحه ۳۷ | فعالیت

فرض کنید g تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی، عدد صحیح کوچک‌تر را نسبت می‌دهد. مطابق تعریف تابع g، اگر x عددی بین دو عدد صحیح

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

متوالی ۲- و ۳- باشد، این تابع مقادیر x را به عدد ... نسبت می‌دهد (شکل ۲). و اگر x عددی بین اعداد ۲ و ۳ باشد، این تابع مقادیر x را به عدد ... نسبت می‌دهد (شکل ۳). [... = x < ... ⟹ g(x) ≥ ...]

شکل ۲: x بین ۳- و ۲- است، عدد صحیح کوچک‌تر ۳- است: $-3 \leq x < -2 \Longrightarrow g(x) = -3$.

شکل ۳: x بین ۲ و ۳ است، عدد صحیح کوچک‌تر ۲ است: $2 \leq x < 3 \Longrightarrow g(x) = 2$.

۵۱ صفحه ۳۸ کار در کلاس

به کمک تابع g که در فعالیت صفحه‌ی قبل تعریف شده است، جدول زیر را کامل کنید (نمودار تابع، جواب تابع g و حدود x).

x حدود	g(x)	نمودار
$2 \leq x < 3$	2	پاره‌خط افقی در ارتفاع ۲ از (۲، ۲) توپر تا (۳، ۲) توخالی
$1 \leq x < 2$	1	پاره‌خط افقی در ارتفاع ۱ (داده‌شده)
$0 \leq x < 1$	0	پاره‌خط روی محور x ها از ۰ (توپر) تا ۱ (توخالی) (داده‌شده)
$-1 \leq x < 0$	-1	پاره‌خط افقی در ارتفاع ۱- (داده‌شده)
$-2 \leq x < -1$	-2	پاره‌خط افقی در ارتفاع ۲- (داده‌شده)

(در هر حالت x در بازه‌ی $k \leq x < k+1$ است و $g(x) = k$؛ ابتدای پاره‌خط توپر و انتهایش توخالی است.)

۵۲ صفحه ۳۹ کار در کلاس

به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته‌شده را به‌دست آورید:

[۲]، [۲/۷]، [-۲/۷]، [۰/۷]، [-۰/۷]، [۰/۰۷]، [-۳/۲]، [π-]، [-۲/۲].

[x] بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است (عدد صحیح سمت چپ x روی محور).

عبارت	حاصل	عبارت	حاصل	عبارت	حاصل
[[2]]	۲	[[2.7]]	۲	[[-2.7]]	-۳
[[0.7]]	۰	[[-0.7]]	-۱	[[-0.07]]	-۱
[[-3.2]]	-۴	[[-π]]	-۴	[[-2.2]]	-۳

(مثلاً 2.7- بین 3- و 2- است؛ عدد صحیح سمت چپ آن 3- است. $\pi \approx 3.14$ پس $-\pi \approx -3.14$ و جزء صحیح آن ۴- است.)

۵۳ صفحه ۴۱ فعالیت

فعالیت ۲. [پل سیمینه‌رود: پیمانکار و وزارت راه، پل باید تیر ۱۳۹۵ افتتاح شود؛ به ازای هر ماه اختلاف با زمان تحویل، پیمانکار متعهد است یک‌میلیون تومان جریمه پرداخت کند.] الف. نمودار تابع جریمه برحسب زمان تحویل پروژه در ماه‌های مختلف را کامل کنید. ب. آیا می‌توانید این نمودار را به زبان یک تابع قدر مطلقی بیان کنید؟ ج. اگر پیمانکار چهارمیلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحویل پروژه در چه ماه یا ماه‌هایی می‌تواند انجام شده باشد؟ چرا؟ پاسخ این پرسش را به کمک نمودار بالا و ضابطه‌ی تابع قدر مطلق به‌دست‌آمده توضیح دهید.

اگر ماه تحویل را با x نشان دهیم (x = ۳ خرداد، x = ۴ تیر، ...)، موعد تحویل x = 4 (تیر ۱۳۹۵) است و جریمه برابر ۱ میلیون به ازای هر ماه اختلاف (چه زودتر چه دیرتر) است: ۲ ماه زودتر یا ۲ ماه دیرتر = ۲ میلیون، و در تیر جریمه ۰ است.

الف) نقطه‌های (|x−4| , x) را کامل می‌کنیم:

جریمه (میلیون تومان) برحسب ماه تحویل

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
جریمه	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ب) بله: $y = |x - 4|$؛ فاصله‌ی ماه تحویل از ماه ۴ (تیر).

ج) $|x - 4| = 4 \Rightarrow x - 4 = 4$ یا $x - 4 = -4 \Rightarrow x = 8$ یا $x = 0$. یعنی تحویل در ماه ۸ (آبان ۱۳۹۵)، یا در ماه ۰ (اسفند ۱۳۹۴؛ ۴ ماه زودتر). در نمودار نیز خط افقی y = 4 نمودار را در این دو نقطه قطع می‌کند.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۵۴ صفحه ۴۱ کار در کلاس

با توجه به نمودار: الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید. ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه‌ی هریک از نیم‌خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به‌دست آورید. ج. به کمک تعریف قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید. د. شیب خط در تابع به‌دست‌آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟

نمودار V شکل است: از (0,4) به رأس (2,0) (اردیبهشت ۹۷) و از آنجا به (4,4).

- **الف)** موعد تحویل ماه ۲ (اردیبهشت ۱۳۹۷) است؛ اگر پروژه زودتر یا دیرتر از آن تحویل شود، پیمانکار جریمه می‌شود و اگر دقیقاً در همان ماه باشد جریمه صفر است.

- **ب)** نیم‌خط راست: شیب $\frac{(4-0)}{(4-2)} = 2$ ⇒ $y = 2(x-2) = 2x - 4$ برای $x \geq 2$؛ نیم‌خط چپ: شیب $\frac{(0-4)}{(2-0)} = -2$ ⇒ $y = -2x + 4$ برای $x < 2$.
- **ج)** $y = 2|x - 2|$
- **د)** قدر مطلق شیب (۲) یعنی به ازای هر ماه فاصله با موعد تحویل (زودتر یا دیرتر)، جریمه ۲ میلیون تومان زیاد می‌شود؛ شیب مثبت مربوط به تأخیر و شیب منفی مربوط به تحویل زودتر از موعد است.

۵۵ صفحه ۴۲ — کار در کلاس

الف. نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کنید. ب. نمودار $y = |x|$ را در همین صفحه‌ی مختصات رسم کنید. ج. آیا می‌توان بدون مراحل حل بالا (حل یک مسئله)، بر اساس نمودار $y = |x|$، نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کرد؟ چگونه؟ د. نمودار $y = |x - 3|$ و $y = |x + 1|$ را با توجه به «ج» رسم کنید. هـ. نمودار $y = |x| + 1$ را چگونه می‌توان بر اساس نمودار $y = |x|$ رسم نمود؟

الف و ب) $|x-4| = x-4$ برای $x \geq 4$ و $4-x$ برای $x < 4$: رأس (4,0). نمودار $|x|$ رأس (0,0) دارد (نمودارها در شکل دیده می‌شوند).

ج) بله. نمودار $y = |x - 4|$ همان نمودار $y = |x|$ است که ۴ واحد به سمت راست منتقل شده است (به ازای هر x مقدار $|x-4|$ همان مقدار $|x|$ در نقطه‌ی $x-4$ است).

د) $y = |x - 3|$: انتقال $|x|$ به اندازه‌ی ۳ واحد به راست (رأس (3,0)). $y = |x + 1| = |x - (-1)|$: انتقال به اندازه‌ی ۱ واحد به چپ (رأس (-1,0)).

هـ) نمودار $|x|$ را ۱ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم (رأس (0,1))؛ چون به هر مقدار $|x|$ یک واحد اضافه می‌شود.

۵۶ صفحه ۴۳ — تمرین

۱. به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور زیر حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید: [۴/۲]، [-۴/۲]، [۳/۹۹]، [-۱/۲]، [-۲]، [π].

عبارت	[4.2]	[-4.2]	[3.99]	[-1.2]	[-2]	[π]
حاصل	۴	-۵	۳	-۲	-۲	۳

۵۷ صفحه ۴۳ تمرین

۲. با توجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید: $f(x) = [x]$ به‌ازای $x = -۲/۳$ و $x = ۵$؛ $f(x) = [-x]$ به‌ازای $x = ۱/۷$ و $۲/۳$؛ $f(x) = [-x] + [x]$ به‌ازای $x = ۱$ و $۱/۳$ و $۱/۷$ و ۲؛ $f(x) = [۳x]$ به‌ازای $x = ۱$ و $۰/۲$ و $۱/۳$.

ضابطه	x مقدار	f(x) مقدار
$[f(x) = [x$	$x = -2.3$	$[-2.3] = -3$
	$x = 5$	$[5] = 5$
$[f(x) = [-x$	$x = 1.7$	$[-1.7] = -2$
	$x = 2.3$	$[-2.3] = -3$
$[f(x) = [x] + [-x$	$x = 1$	$1 + (-1) = 0$
	$x = 1.3$	$1 + (-2) = -1$
	$x = 1.7$	$1 + (-2) = -1$
	$x = 2$	$2 + (-2) = 0$
$[f(x) = [3x$	$x = 1$	$[3] = 3$
	$x = 0.2$	$[0.6] = 0$
	$x = 1.3$	$[3.9] = 3$

نتیجه: برای عدد صحیح $[x] + [-x] = 0$ و برای عدد غیرصحیح برابر ۱- است.

۵۸ صفحه ۴۳ تمرین

۳. جدول مالیاتی زیر را که توسط هیئت مدیره‌ی یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید (حقوق تا ۱/۳۰۰/۰۰۰ تومان: معاف از مالیات؛ مازاد بر ۱/۳۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰: ۱۰ درصد؛ مازاد بر ۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۴/۵۰۰/۰۰۰: ۱۵ درصد؛ مازاد بر ۴/۵۰۰/۰۰۰: ۲۵ درصد). الف. نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید. ب. به کمک نمودار پلکانی و محاسبه‌ی سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را محاسبه کنید: حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان، ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان، ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان.

الف) محور x حقوق (میلیون تومان) و محور y نرخ مالیات (درصد): ارتفاع ۰ تا ۱/۳، ارتفاع ۱۰ از ۱/۳ تا ۲/۵، ارتفاع ۱۵ از ۲/۵ تا ۴/۵ و ارتفاع ۲۵ بعد از ۴/۵.

ب) مالیات = مساحت زیر نمودار از ۰ تا حقوق (نرخ × مقدار مازاد در همان پله):

- حقوق ۱,۲۰۰,۰۰۰: کاملاً در پله‌ی اول است ⇒ مالیات ۰ (معاف).
- حقوق ۲,۴۰۰,۰۰۰: 110,000 = 0.1 × 1,100,000 = 10% × (2,400,000 − 1,300,000) تومان.
- حقوق ۶,۰۰۰,۰۰۰: 120,000 = 10% × 1,200,000؛ 300,000 = 15% × 2,000,000؛ 375,000 = 25% × 1,500,000؛ مجموع **۷۹۵,۰۰۰ تومان**.

---

۵۹ صفحه ۴۴ تمرین

۴. با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می‌کند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ (۱) الف) y = |x| + ۲ ب) y = |x| − ۳ (۲) الف) y = |x + ۱| ب) y = |x − ۴| (۳) الف) y = −|x| ب) y = −|x + ۱|

- **(۱)** y = |x|+۲: رأس (۰، ۲) بالای محور x ها ⇒ نمودار **سمت چپ** (الف)؛ y = |x|−۳: رأس (۰، −۳) ⇒ نمودار **سمت راست** (ب). نتیجه: افزودن عدد ثابت به |x| نمودار را به همان اندازه به بالا (مثبت) یا پایین (منفی) می‌برد.
- **(۲)** y = |x+۱|: رأس (−۱، ۰) در سمت چپ مبدأ ⇒ نمودار **سمت راست** (الف)؛ y = |x−۴|: رأس (۴، ۰) ⇒ نمودار **سمت چپ** (ب). نتیجه: |x − a| نمودار را به اندازه‌ی a به راست و |x + a| به چپ می‌برد.
- **(۳)** y = −|x|: ۸ با رأس در مبدأ ⇒ نمودار **سمت راست** (الف)؛ y = −|x|+۱: همان ۸ با رأس (۰، ۱) ⇒ نمودار **سمت چپ** (ب). نتیجه: علامت منفی نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کند و ثابت ۱ آن را یک واحد بالا می‌برد.

چون ترتیب شکل‌ها در تصویر (راست به چپ یا چپ به راست) برای هر ردیف باید با نمودار کتاب تطبیق داده شود، تشخیص سمت هر نمودار بر اساس محل رأس انجام شد؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۶۰ صفحه ۴۴ تمرین

۵. نمودار توابع زیر را رسم کنید. الف) y = |۲x − ۳| ب) y = |۳x + ۱|

الف) 2x − 3 ≥ 0 ⇒ x ≥ 3/2؛ پس y = 2x − 3 برای x ≥ 3/2 و y = −2x + 3 برای x < 3/2. رأس (3/2 , 0) و نقطه‌ی برخورد با محور y ها (0,3).

ب) 3x + 1 ≥ 0 ⇒ x ≥ −1/3؛ پس y = 3x + 1 برای x ≥ −1/3 و y = −3x − 1 برای x < −1/3. رأس (−1/3 , 0) و نقطه‌ی برخورد با محور y ها (0,1).

۶۱ صفحه ۴۴ تمرین

۶. با توجه به نمودار (رأس در (−۲، ۰) در دی‌ماه ۹۵ و عبور از (۰، ۲))؛ الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید. ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه‌ی هر یک از نیم‌خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به‌دست آورید. ج. به کمک تعریف قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید. د. شیب خط در تابع به‌دست‌آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟ افزایش یا کاهش شیب خط به چه معناست؟

- **الف)** موعد تحویل دی‌ماه ۱۳۹۵ ($x = -2$) است؛ تحویل زودتر یا دیرتر از آن، جریمه دارد و در دی‌ماه جریمه صفر است.
- **ب)** نیم‌خط راست از (−2,0) و (0,2): شیب $(2-0)/(0+2) = 1$ ⇒ $y = x + 2$ برای $x \geq -2$؛ نیم‌خط چپ: شیب -1 ⇒ $y = -(x+2) = -x - 2$ برای $x < -2$.
- **ج)** $y = |x + 2|$
- **د)** قدر مطلق شیب (۱) یعنی به ازای هر ماه اختلاف با موعد، ۱ میلیون تومان جریمه. هرچه شیب بیشتر باشد، جریمه‌ی هر ماه تأخیر (یا زودکرد) بیشتر و قرارداد سخت‌گیرانه‌تر است؛ شیب کمتر یعنی جریمه‌ی هر ماه کمتر است.

۶۲ صفحه ۴۵ فعالیت

علیرضا ... می‌خواهد در جشنواره‌ی فیلم و تئاتر دهه‌ی فجر امسال اعضای خانواده‌اش را به تماشای یک فیلم یا تئاتر دعوت کند. ... جدول زیر هزینه‌ی بلیت سینما و تئاتر را برای گروه‌های مختلف مشخص کرده است. مسئولان جشنواره در بخش‌هایی برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف‌هایی قائل شده‌اند. لطفاً جدول را کامل کنید. (جدول ۱. هزینه‌ی بلیت با توجه به گروه‌های مختلف)

فرد عادی: سینما ۱۰,۰۰۰، تئاتر ۳۰,۰۰۰، سینمای کودک و نوجوان ۴۰۰۰ تومان. دانشجو ۲۰٪ تخفیف دارد (جز در سینمای کودک که ۴۰۰۰ است) و کودک و نوجوان ۵۰٪ تخفیف در تئاتر و سینمای کودک.

جدول ۱ تکمیل‌شده (تومان)

گروه سنی	سینما	تئاتر	سینمای کودک و نوجوان
فرد عادی	۱۰,۰۰۰	۳۰,۰۰۰	۴۰۰۰
دانشجو	10000 − 20% = 8000	30000 − 20% = 24000	۴۰۰۰
کودک و نوجوان	۱۰۰۰	30000 × 50% = 15000	4000 × 50% = 2000

در جدول کتاب، هزینه‌ی کودک و نوجوان در سینما ۱۰۰۰ تومان نوشته شده است؛ همان مقدار آمده است و در بقیه‌ی پاسخ‌ها استفاده نمی‌شود.

۶۳ صفحه ۴۶ فعالیت

علیرضا نتایج پرسش‌نامه را در جداول ۲ تا ۴ مشخص کرد. در نخستین روز هفته (شنبه)، علیرضا می‌خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینمای کودک و نوجوان ببرد. او باید دو نکته را مشخص کند: ۱. به دیدن چه سبک فیلمی می‌روند؟ ۲. هزینه‌ی بلیت آنها چقدر است؟ ... نمایش‌های پیکانی این دو تابع (سبک فیلم ← هزینه‌ی بلیت) برای مریم و علیرضا را کامل کنید. پس اشتراک فیلم مورد علاقه‌شان دو سبک ... و ... است ... این مطلب را می‌توانیم چنین نشان دهیم: علیرضا = {(, ۴۰۰۰) و ... } ، مریم = {( ) , (کمدی ,) و ... } ، مریم + علیرضا = {(, ۴۰۰۰) و ... }

از جدول ۲: مریم: علمی‌ـتخیلی، انیمیشن، کمدی؛ علیرضا: علمی‌ـتخیلی، انیمیشن، تاریخی. سبک‌های مشترک: **علمی‌ـتخیلی و انیمیشن**.

هزینه‌ی بلیت در سینمای کودک و نوجوان: علیرضا (دانشجو) ۴۰۰۰ تومان و مریم (دوازده‌ساله) ۲۰۰۰ تومان.

نمایش پیکانی: علیرضا: سه سبک (تاریخی، علمی‌ـتخیلی، انیمیشن) همگی ← ۴۰۰۰؛ مریم: کمدی، علمی‌ـتخیلی، انیمیشن همگی ← ۲۰۰۰.

علیرضا = {(تاریخی , 4000) , (علمی‌ـتخیلی , 4000) , (انیمیشن , 4000)}

مریم = {(کمدی , 2000) , (علمی‌ـتخیلی , 2000) , (انیمیشن , 2000)}

, مریم + علیرضا = {(علمی‌ـتخیلی , 2000 + 4000) , (انیمیشن , 2000 + 4000)} = {(علمی‌ـتخیلی , 6000) (انیمیشن , 6000)}

پس برای رفتن با هم به سینمای کودک و نوجوان، دو سبک علمی‌ـتخیلی یا انیمیشن مناسب است و هزینه‌ی بلیت دو نفر ۶۰۰۰ تومان است (دامنه‌ی مجموع: اشتراک دامنه‌ها).

۶۴ صفحه ۴۷ کار در کلاس

۱. اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواهد مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جدول ۱ و جدول ۳: الف. نمایش‌های پیکانی مشابه فعالیت صفحه‌ی قبل را برای هرکدام رسم کنید. ب. با توجه به اشتراک سبک فیلم موردعلاقه‌ی هرکدام، نمایش زوج‌مرتبی تابعی را بنویسید که علیرضا و مادرش می‌توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند. ج. هزینه‌ای که در این روز علیرضا صرف می‌کند، چقدر است؟

از جدول ۳ (سینما): علیرضا: علمی‌ـتخیلی، اجتماعی، دفاع مقدس؛ مادر: علمی‌ـتخیلی، اجتماعی، کمدی. بلیت سینما: علیرضا (دانشجو) ۸۰۰۰ و مادر ۱۰،۰۰۰ تومان.

الف) در نمایش پیکانی علیرضا هر سه سبک (علمی‌ـتخیلی، اجتماعی، دفاع مقدس) به ۸۰۰۰ و در نمایش مادر هر سه سبک (علمی‌ـتخیلی، اجتماعی، کمدی) به ۱۰،۰۰۰ وصل می‌شوند.

ب) سبک‌های مشترک: علمی‌ـتخیلی و اجتماعی:

, علیرضا + مادر = {(علمی‌ـتخیلی , 8000 + 10000) , (اجتماعی , 8000 + 10000)} = {(علمی‌ـتخیلی , 18000) , (اجتماعی , 18000)}

ج) علیرضا مادرش را دعوت کرده است و بلیت هر دو را می‌خرد: 18000 = 10000 + 8000 تومان (۸۰۰۰ تومان بلیت خودش).

این جواب ممکن است دقیق نباشد؛ در صورت مسئله مشخص نیست که «هزینه‌ی علیرضا» فقط بلیت خودش (۸۰۰۰) است یا بلیت هر دو (۱۸۰۰۰).

۶۵ صفحه ۴۷ کار در کلاس

۲. پنج‌شنبه علیرضا می‌خواهد همه‌ی اعضای خانواده‌اش را به تماشای یک تئاتر ببرد. با استفاده از جدول ۱ و جدول ۴، الف. نمایش زوج‌مرتبی هرکدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج‌مرتبی شرایطی را که همه‌ی آنها به تماشای یک تئاتر می‌روند، مشخص کنید. ب. علیرضا در این روز چه میزان هزینه می‌کند؟

بلیت تئاتر: پدر و مادر ۳۰,۰۰۰، علیرضا (دانشجو) ۲۴,۰۰۰، مریم ۱۵,۰۰۰ تومان. سبک‌های مورد علاقه‌ی تئاتر (جدول ۴): مادر: کمدی، دفاع مقدس، تاریخی؛ پدر: دفاع مقدس، تاریخی، اجتماعی؛ مریم: کمدی، تاریخی؛ علیرضا: تاریخی.

الف)

- مادر = {(کمدی , 30000) , (دفاع مقدس , 30000) , (تاریخی , 30000)}
- پدر = {(دفاع مقدس , 30000) , (تاریخی , 30000) , (اجتماعی , 30000)}
- مریم = {(کمدی , 15000) , (تاریخی , 15000)}
- علیرضا = {(تاریخی , 24000)}

تنها سبک مشترک همه، **تاریخی** است (اشتراک دامنه‌ها):

مادر + پدر + مریم + علیرضا = {(تاریخی , 30000 + 15000 + 30000 + 24000)} = {(تاریخی , 99000)}

ب) هزینه‌ی علیرضا برای بلیت همه‌ی اعضا: **۹۹,۰۰۰ تومان**.

۶۶ صفحه ۴۹ فعالیت

با توجه به ضابطه‌های $f_1(x) = x^2 - 1$ و $f_2(x) = x + 1$، ضابطه‌ی توابع f_3 تا f_8 را به‌دست آورید ($f_3 = f_1+f_2$، $f_4 = f_1-f_2$، $f_5 = f_2-f_1$، $f_6 = f_1\times f_2$، $f_7 = f_1/f_2$، $f_8 = f_2/f_1$). اگر مقادیر توابع f_1 تا f_8 به‌ازای $x = 2$ نمادهای وزنه‌ی کفه‌های ترازو باشند، چرا دو کفه‌ی ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟

- $f_3(x) = (x^2-1)+(x+1) = x^2 + x$
- $f_4(x) = (x^2-1)-(x+1) = x^2 - x - 2$
- $f_5(x) = (x+1)-(x^2-1) = -x^2 + x + 2$
- $f_6(x) = (x^2-1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$
- $(x \neq -1)\ f_7(x) = (x^2-1)/(x+1) = (x-1)(x+1)/(x+1) = x - 1$

- $(x \neq \pm 1)\ f_8(x) = (x+1)/(x^2-1) = 1/(x-1)$

مقدارها در $x = 2$: $f_8 = 1$ ، $f_7 = 1$ ، $f_6 = 9$ ، $f_5 = 0$ ، $f_4 = 0$ ، $f_3 = 6$ ، $f_2 = 3$ ، $f_1 = 3$. کفه‌ی چپ: $17 = 1 + 1 + 0 + 0 + 6 + 9$ و کفه‌ی راست: $17 = 1 + 1 + 6 + 9 + 0 + 0$.

چرا برابرند؟ عبارت‌های دو کفه دو به دو یکسانند: $f_6 = f_1 \times f_2$، $f_1 + f_2 = f_3$، $|f_4| = |f_5|$ (چون $f_5 = -f_4$)، $|f_2 - f_1| = |f_1 - f_2|$، $f_7 = f_1/f_2$ و $f_8 = f_2/f_1$.

نتیجه: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم توابع همان تعریف مقدارها در هر x را دارند: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ و مانند آن؛ و $|a - b| = |b - a|$، $a-$ هم‌قدرمطلق a است.

۶۷ صفحه ۵۰ **کار در کلاس**

۱. با توجه به ضابطه‌ی $f_1(x) = x + 1$ و $f_2(x) = x - 1$ درخت زیر را به‌ازای $x = 2$ کامل کنید.

$f_1 = 3$ ، $f_2 = 1$، سپس:

تابع	محاسبه	مقدار
$f_3 = f_1 + f_2$	$3 + 1$	۴
$f_4 = f_1 - f_2$	$3 - 1$	۲
$f_5 = f_2 - f_1$	$1 - 3$	۲-
$f_6 = f_1 \times f_2$	3×1	۳
$f_7 = f_1 / f_2$	$3 / 1$	۳
$f_8 = f_2 / f_1$	$1 / 3$	۱/۳
$f_9 = f_3 / f_5$	$4 / (-2)$	۲-
$f_{10} = f_4 \times f_6$	2×3	۶
$f_{11} = f_7 + f_8$	$3 + 1/3$	۱۰/۳
$f_{12} = f_{10} \times f_{11}$	$6 \times 10/3$	۲۰
$f_{13} = f_9 \times f_{12}$	$(-2) \times 20$	۴۰-

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۸ صفحه ۵۰ کار در کلاس

۲. اگر $\{(۲,۰),(۱-,۴),(۳,۱-)\}=f$ و $\{(۵,۲),(۱-,۳-),(۲,۱-)\}=g$ باشد، توابع زیر را مشخص کنید: $f+g$ ، $g-f$ ، $f-g$ ، f/g ، g/f ، $f\times g$.

دامنه‌ها: $D_f=\{2,4,-1\}$ و $D_g=\{2,-3,-1\}$؛ اشتراک: $\{2,-1\}$. مقدارها: $f(-1)=3$, $g(-1)=2$, $f(2)=0$, $g(2)=5$.

- $f+g=\{(-1,5),(2,5)\}$
- $f\times g=\{(-1,6),(2,0)\}$
- g/f: $f(2)=0$ پس 2 از دامنه حذف می‌شود: $g/f=\{(-1,2/3)\}$
- $f/g=\{(-1,3/2),(2,0)\}$ (g در هیچ‌کدام صفر نیست)
- $f-g=\{(-1,1),(2,-5)\}$
- $g-f=\{(-1,-1),(2,5)\}$

ترتیب مؤلفه‌ها و علامت‌ها در صورت (متن راست‌به‌چپ و بسیار ریز) به‌سختی خوانده می‌شود؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۹ صفحه ۵۱ فعالیت

به کمک نمودارهای رسم‌شده‌ی توابع f و g، نمودار تابع f + g را ابتدا فقط در نقاط داده‌شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع f + g را به کمک ضابطه‌ی آن و نیز نقاط مشخص‌شده از تابع، رسم کنید. (۱) $f(x)=x$ و $g(x)=۱$ در $x=-۱،۰،۱$؛ (۲) $f(x)=x^2$ و $g(x)=\text{sign}(x)$ در $x=-۱،۰،۱،۲$.

(۱) $(f+g)(x)=x+1$: $x=-1\Rightarrow 0$، $x=0\Rightarrow 1$، $x=1\Rightarrow 2$. نقطه‌های $(1,2)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ روی خط $y=x+1$ هستند.

(۲) $(f+g)(x)=x^2+\text{sign}(x)$: $x=-1\Rightarrow 1+(-1)=0$، $x=0\Rightarrow 0+0=0$، $x=1\Rightarrow 1+1=2$، $x=2\Rightarrow 4+1=5$.

ضابطه: x^2-1 برای $x<0$، 0 برای $x=0$ و x^2+1 برای $x>0$ (نقطه‌های توخالی $(-1,0)$ و $(0,1)$ و نقطه‌ی توپر $(0,0)$).

۷۰ صفحه ۵۲ تمرین

۱. در هر حالت با توجه به نمودار توابع f و g، نمودار توابع خواسته‌شده را رسم کنید. الف) $f+g$ روی بازه‌های $[۱,۲]$ و $[۳,۴]$ برابر ۱ و g روی $[۰,۱]$، $[۲,۳]$ و $[۴,۵]$ برابر ۱). ب) $|f(x)|=|x|$ و $|g(x)|=|x|$؛ $f\cdot g$ و f/g.

الف) دامنه‌ی $f+g$ اشتراک دامنه‌هاست. دامنه‌ی f فقط $[1,2]\cup[3,4]$ و دامنه‌ی g فقط $[0,1]\cup[2,3]\cup[4,5]$ است؛ اشتراک: $\{1,2,3,4\}$. در این نقطه‌ها $f=1$ و $g=1$؛ پس $f+g=2$: چهار نقطه‌ی $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,2)$, $(4,2)$.

ب) $(f\cdot g)(x)=|x|\cdot|x|=|x|^2=x^2$: سهمی با رأس مبدأ. $(f/g)(x)=|x|/|x|=1$ برای $x\neq 0$: خط افقی $y=1$ با نقطه‌ی توخالی $(0,1)$.

نقطه‌چین‌ها و خالی‌ها در نمودارهای بخش الف با توجه به تصویر کوچک تعیین شد؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

irantooshe.ir

۷۱ صفحه ۵۲ تمرین

۲. یک شرکت هولدینگ دارای دو کارخانه‌ی A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه‌ی A به ترتیب $-2x^2 + 16x$ و $8x + 6$ و در کارخانه‌ی B به ترتیب $-x^2 + 12x$ و $2x + 9$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان): الف. تابع سود شرکت هولدینگ را به‌دست آورید. ب. این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟

سود = درآمد − هزینه:

$$P_A(x) = (-2x^2 + 16x) - (8x + 6) = -2x^2 + 8x - 6$$

$$P_B(x) = (-x^2 + 12x) - (2x + 9) = -x^2 + 10x - 9$$

الف) $P(x) = P_A(x) + P_B(x) = -3x^2 + 18x - 15$ (واحد: میلیون تومان).

ب) چون $-3(x-3)^2 \le 0$، بیشینه وقتی است که $x = 3$: سود ماکزیمم 12 میلیون تومان در تولید **۳ تن** کاشی (در هر کارخانه).

ضابطه‌های درآمد و هزینه از متن ریز و راست‌به‌چپ صورت خوانده شد (مثلاً ۶+۸x برای هزینه‌ی A)؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۲ صفحه ۵۲ تمرین

۳. اگر $f(x) = [x]$ با دامنه‌ی $0 \le x \le 1$ و $g(x) = |x|$ با دامنه‌ی $1 \ge x \ge 2$ و $h(x) = x^2 - 4$ با دامنه‌ی $-1 \le x \le 1$ در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید: $s(x) = f(x) + g(x)$؛ $q(x) = h(x)/f(x)$؛ $p(x) = h(x) \times g(x)$.

دامنه‌ی هر تابع جدید اشتراک دامنه‌هاست (و در تقسیم، ریشه‌های مخرج حذف می‌شوند):

تابع	دامنه	ضابطه	نمودار
s = f + g	$[0,1] \cap [1,2] = \{1\}$	$s(1) = [1] + \lvert 1\rvert = 2$	یک نقطه (1 , 2)
q = h / f	$[0,1] = [-1,1] \cap [0,1]$ و $f(x) = [x] = 0$ برای $0 \le x < 1$ ⇒ (حذف) $\{1\}$	$q(1) = (1 - 4)/[1] = -3$	یک نقطه (1 , −3)
p = h × g	$[-1,1] \cap [1,2] = \{1\}$	$p(1) = (1-4) \times \lvert 1\rvert = -3$	یک نقطه (1 , −3)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۳ صفحه ۵۳ تمرین

۴. اگر $f(x) = x^2$ و تابع $(f/g)(x)$ به‌صورت نمودار زیر باشد (خطی که از مبدأ و نقطه‌ی (۱، ۲) می‌گذرد)، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به‌دست آورید.

خط از (0,0) و (1,2) می‌گذرد: شیب ۲ پس $(f/g)(x) = 2x$.

$g(x) = x/2$. پاسخ: $x^2/g(x) = 2x \Rightarrow g(x) = x^2/(2x) = x/2$ (برای $x \neq 0$، چون $g(0)$ نمی‌تواند در مخرج صفر باشد).

بررسی: $x = 1$: $f/g = 1/(1/2) = 2$ ✓.

۷۴ صفحه ۵۳ تمرین

۵. به کمک نمودارهای رسم‌شده‌ی توابع f و g ($f(x) = -x$ و $g(x) = x$)، نمودار تابع f + g را ابتدا فقط در نقاط داده‌شده، مشخص کنید ($x = -۲، ۰، ۱، ۲$). سپس نمودار کلی تابع $(f + g)(x)$ را به کمک ضابطه‌ی آن و نیز نقاط مشخص‌شده از تابع، رسم کنید.

$(f+g)(x) = -x + x = 0$. در نقاط: $x=-2 \Rightarrow 2 + (-2) = 0$، $x=0 \Rightarrow 0 = 0$، $x=1 \Rightarrow -1 + 1 = 0$، $x=2 \Rightarrow -2 + 2 = 0$. نمودار همان محور x ها است (تابع ثابت $y = 0$).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی و آمار ۲ یازدهم (انسانی) - فصل سوم

آمار

فهرست

۷۵ صفحه ۵۶ · پرسش — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۱
۷۶ صفحه ۵۶ · فعالیت — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۱
۷۷ صفحه ۵۷ · کار در کلاس — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۲
۷۸ صفحه ۵۷ · کار در کلاس — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۳
۷۹ صفحه ۵۸ · فعالیت — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۴
۸۰ صفحه ۵۹ · کار در کلاس — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۴
۸۱ صفحه ۵۹ · کار در کلاس — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۵
۸۲ صفحه ۶۰ · پرسش — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۵
۸۳ صفحه ۶۰ · کار در کلاس — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۵
۸۴ صفحه ۶۱ · تمرین — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۶
۸۵ صفحه ۶۱ · تمرین — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۶
۸۶ صفحه ۶۱ · تمرین — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۶
۸۷ صفحه ۶۱ · تمرین — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۷
۸۸ صفحه ۶۱ · تمرین — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۷
۸۹ صفحه ۶۱ · تمرین — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۸
۹۰ صفحه ۶۲ · تمرین — درس ۱ شاخص‌های آماری ۵۹
۹۱ صفحه ۶۲ · تمرین — درس ۱ شاخص‌های آماری ۶۰
۹۲ صفحه ۶۳ · پرسش — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۰
۹۳ صفحه ۶۳ · فعالیت — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۰
۹۴ صفحه ۶۴ · پرسش — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۱
۹۵ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۲
۹۶ صفحه ۶۵ · فعالیت — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۳
۹۷ صفحه ۶۶ · فعالیت — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۳
۹۸ صفحه ۶۷ · کار در کلاس — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۴
۹۹ صفحه ۶۷ · پرسش — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۵
۱۰۰ صفحه ۶۸ · فعالیت — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۵
۱۰۱ صفحه ۶۸ · تمرین — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۶
۱۰۲ صفحه ۶۸ · تمرین — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۶
۱۰۳ صفحه ۶۹ · تمرین — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۶
۱۰۴ صفحه ۶۹ · تمرین — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۷
۱۰۵ صفحه ۶۹ · تمرین — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۷
۱۰۶ صفحه ۶۹ · تمرین — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۸
۱۰۷ صفحه ۶۹ · تمرین — درس ۲ سری‌های زمانی ۶۸

irantooshe.ir

۷۵ صفحه ۵۶ پرسش

آیا می‌توانید چند کمیت را که در سال قبل با آن آشنا شدید، نام ببرید؟ نام این کمیت‌ها چه بود؟

در کتاب ریاضی و آمار (۱) پایهٔ دهم با کمیت‌هایی آشنا شدیم که هر کدام یک ویژگی از داده‌ها یا جامعه را با یک عدد نشان می‌دهند:

- شاخص‌های مرکزی: میانگین، میانه و مد؛
- شاخص‌های پراکندگی: دامنهٔ تغییرات، واریانس و انحراف معیار؛
- چارک‌ها (چارک اول، دوم و سوم) و دامنهٔ میان‌چارکی.

۷۶ صفحه ۵۶ فعالیت

فرض کنید، می‌خواهیم متوسط درآمد کارکنان یک مؤسسهٔ تجاری را محاسبه کنیم. ده نفر از کارکنان را به‌صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر درآمد ماهیانهٔ ده نفر برحسب هزار تومان به‌صورت زیر باشد، میانگین و میانهٔ درآمد ماهیانهٔ آنها چقدر است؟

هیئت مدیرهٔ مؤسسهٔ تجاری تصمیم دارد به کارکنانی که درآمد کمتری دارند، یارانه پرداخت کند. به نظر شما باید به چه کسانی یارانه پرداخت شود؟ اگر تعداد اعضای خانوادهٔ هر عضو نمونه به‌صورت زیر باشد، میانگین و میانهٔ درآمد هر فرد از اعضای خانوار چقدر است؟ آیا با داشتن این داده‌ها نظر شما دربارهٔ سؤال قبل تغییر کرده است؟ یعنی به کدام‌یک از کارکنان مؤسسه یارانه پرداخت کنیم؟

ردیف	درآمد ماهیانه (هزار تومان)	تعداد اعضای خانوار	متوسط درآمد هر عضو
۱	۱۰۰۰	۳	
۲	۳۰۰۰	۴	
۳	۱۰۰۰	۱	
۴	۴۰۰۰	۵	
۵	۳۰۰۰	۱	
۶	۳۰۰۰	۷	
۷	۲۰۰۰	۳	
۸	۱۰۰۰	۴	
۹	۲۰۰۰	۲	
۱۰	۱۰۰۰	۱	

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

قسمت اول: داده‌ها را مرتب می‌کنیم: ۱۰۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ۲۰۰۰، ۳۰۰۰، ۳۰۰۰، ۳۰۰۰، ۴۰۰۰.

- میانگین = (1000×4 + 2000×2 + 3000×3 + 4000) ÷ 10 = 21000 ÷ 10 = **۲۱۰۰ هزار تومان**
- چون تعداد داده‌ها زوج است، میانه میانگین دو دادهٔ وسط (پنجم و ششم) است: (2000 + 2000) ÷ 2 = **۲۰۰۰ هزار تومان**

قسمت دوم: درآمد هر عضو خانوار برابر است با درآمد ماهیانه ÷ تعداد اعضای خانوار. این مقدار در ستون آخر جدول (برحسب هزار تومان) آمده است:

ردیف	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
متوسط درآمد هر عضو	۳۳۳/۳	۷۵۰	۱۰۰۰	۸۰۰	۳۰۰۰	۴۲۸/۶	۶۶۶/۷	۲۵۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰

- مرتب‌شده: ۲۵۰، ۳۳۳/۳، ۴۲۸/۶، ۶۶۶/۷، ۷۵۰، ۸۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰، ۳۰۰۰
- میانگین = 9228.6 ÷ 10 ≈ **۹۲۲/۹ هزار تومان**
- میانه = (750 + 800) ÷ 2 = **۷۷۵ هزار تومان**

نتیجه: بله، نظر ما تغییر می‌کند. درآمد کل خانوار به‌تنهایی معیار خوبی نیست؛ مهم این است که درآمد بین چند نفر تقسیم می‌شود. مثلاً ردیف ۸ (درآمد ۱۰۰۰ برای ۴ نفر) درآمد سرانهٔ فقط ۲۵۰ دارد، ولی ردیف ۵ (درآمد ۳۰۰۰ برای یک نفر) درآمد سرانهٔ ۳۰۰۰ دارد. بنابراین یارانه را باید بر اساس درآمد هر عضو خانوار (سرانه) پرداخت کرد؛ کسانی که درآمد سرانهٔ آنها کمتر است (مثل ردیف‌های ۸، ۱ و ۶) نیازمندترند.

۷۷ صفحه ۵۷ **کار در کلاس**

در فعالیت قبل خط فقر را به دو روش ذکرشده محاسبه کنید. هیئت مدیرهٔ مؤسسهٔ تجاری تصمیم دارد مقدار یارانه را براساس نصف میانهٔ محاسبه کند. به کدام‌یک از کارکنان چه میزان یارانه بدهند که خانوادهٔ او حداقل درآمدی بیش از خط فقر داشته باشد؟

طبق تعریف کتاب، خط فقر برابر است با نصف میانگین یا نصف میانهٔ درآمد (ماهیانهٔ هر فرد). از درآمد سرانهٔ فعالیت قبل استفاده می‌کنیم (واحد: هزار تومان):

- روش اول (نصف میانگین): 922.9 ÷ 2 ≈ **۴۶۱/۴**
- روش دوم (نصف میانه): 775 ÷ 2 = **۳۸۷/۵**

یارانه براساس نصف میانه (خط فقر ۳۸۷/۵): فقط کارکنانی که درآمد سرانهٔ آنها کمتر از ۳۸۷/۵ است، یارانه می‌گیرند:

ردیف	درآمد سرانه	کمبود به‌ازای هر نفر	یارانهٔ خانوار (هزار تومان)
۱ (۳ نفر)	۳۳۳٫۳	387.5 − 333.3 = 54.2	3 × 387.5 − 1000 = 162.5
۸ (۴ نفر)	۲۵۰	387.5 − 250 = 137.5	4 × 387.5 − 1000 = 550

به بقیهٔ کارکنان یارانه‌ای تعلق نمی‌گیرد، زیرا درآمد سرانهٔ آنها بیش از ۳۸۷٫۵ است. (اگر خط فقر را نصف میانگین، یعنی ۴۶۱٫۴ بگیریم، ردیف ۶ نیز یارانه می‌گیرد.)

۷۸ صفحه ۵۷ کار در کلاس

خط فقر بین‌المللی توسط بانک جهانی در سال جاری حدود چهار هزار تومان (۱/۲۵ دلار آمریکا) برای هر نفر در روز تعیین شده است.

۱. در فعالیت قبل چند خانوار درآمدی کمتر از چهار هزار تومان دارند؟

۲. اگر درآمد یک خانوادهٔ سه‌نفری در یک ماه دو میلیون تومان باشد، طبق این تعریف این خانواده چه وضعیتی دارد؟

۳. متوسط درآمد ماهیانهٔ یک خانوادهٔ سه‌نفره در ماه حداقل چقدر باشد تا شخص فقیر نباشد؟

۴. در فعالیت قبل میزان یارانه را با خط فقر بین‌المللی برای هریک از کارکنان محاسبه کنید.

۵. چه موقع دو روش محاسبهٔ خط فقر تفاوت زیادی باهم دارند؟ چرا؟

خط فقر بین‌المللی: ۴۰۰۰ تومان برای هر نفر در روز، یعنی 120 = 30 × 4000,۰۰۰ تومان = **۱۲۰ هزار تومان** برای هر نفر در ماه.

1. هیچ خانواری. کمترین درآمد ماهیانهٔ خانوارها در فعالیت قبل ۱۰۰۰ هزار تومان (یعنی یک میلیون تومان) است. درآمد سرانهٔ همهٔ خانوارها (کمینه ۲۵۰ هزار تومان در ماه، یعنی بیش از ۸۰۰۰ تومان در روز) هم بیشتر از خط فقر است؛ پس پاسخ **صفر** است.
2. درآمد سرانه = 6662,۰۰۰, ≈ 3 ÷ 700000, تومان در ماه، یعنی حدود ۲۲,۲۰۰ تومان در روز که بسیار بیشتر از ۴۰۰۰ تومان است. پس این خانواده **زیر خط فقر نیست**.
3. 120 × 3,۰۰۰ = **۳۶۰,۰۰۰ تومان** در ماه (روزی ۱۲,۰۰۰ تومان برای سه نفر).
4. چون درآمد سرانهٔ هیچ‌یک از خانوارها کمتر از ۱۲۰ هزار تومان در ماه نیست، برای هیچ‌یک از کارکنان یارانه‌ای لازم نیست (میزان یارانه **صفر** است).
5. میانگین به داده‌های دور از بقیه (خیلی بزرگ یا خیلی کوچک) حساس است ولی میانه حساس نیست. پس وقتی توزیع درآمد نامتقارن باشد و درآمد چند نفر بسیار بالا باشد، میانگین خیلی بزرگ‌تر از میانه می‌شود و دو روش خط فقرهای بسیار متفاوتی می‌دهند. وقتی داده‌ها تقریباً متقارن باشند (مثل داده‌های فعالیت قبل: ۹۲۲٫۹ در برابر ۷۷۵) دو روش به هم نزدیک‌اند.

۷۹ صفحه ۵۸ فعالیت

می‌خواهیم با پرداخت یارانهٔ ثابت به خانوارها تعداد کسانی را که درآمدی کمتر از خط فقر دارند، کاهش دهیم. اگر بودجهٔ این کار ثابت باشد، به نظر شما آن را بین همهٔ خانوارها تقسیم کنیم یا خانوارهایی که درآمدی کمتر از خط فقر داشته‌اند؟ پاسخ خود را برای خط فقر بین‌المللی نیز بیان کنید.

فرض کنید هدف ما کنترل فقر با شاخص خط فقر بین‌المللی آن باشد و تصمیم گرفته‌ایم که به خانوارهایی که درآمدی کمتر از خط فقر دارند، یارانه دهیم. آیا با این تصمیم به هدف خود رسیده‌ایم؟

تقسیم بودجه: بودجهٔ ثابت را فقط بین خانوارهایی که درآمدشان کمتر از خط فقر است تقسیم می‌کنیم، نه بین همه. در این صورت سهم هر خانوار نیازمند بیشتر می‌شود و ممکن است درآمد او را از خط فقر بالاتر ببرد؛ اما اگر بودجه بین همه تقسیم شود، سهم هر نفر کم می‌شود و کسی از زیر خط فقر خارج نمی‌شود. این استدلال برای هر دو خط فقر (نصف میانه/میانگین و خط فقر بین‌المللی) یکسان است.

آیا به هدف رسیده‌ایم؟ لزوماً نه. یارانهٔ ثابت یک مبلغ معین پول است، ولی قیمت کالاها و خدمات در طول زمان تغییر می‌کند (معمولاً بالا می‌رود). نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی نشان می‌دهد در چند سال شاخص کل از ۱۰۰ به بیش از ۲۵۰ رسیده است؛ یعنی هزینهٔ زندگی بیش از دو برابر شده و خط فقر هم بالا رفته است. پس همان مبلغ ثابت دیگر خانوار را بالاتر از خط فقر نگه نمی‌دارد. برای پاسخ دقیق‌تر باید با شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی آشنا شویم و مبلغ یارانه را با آن تعدیل کنیم.

۸۰ صفحه ۵۹ کار در کلاس

۱. در نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات محور طول‌ها نشان‌دهندهٔ ..... و محور عرض‌ها نشان‌دهندهٔ ..... است.

۲. شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه‌گیری بستگی .....

۳. به نظر می‌رسد افزایش شاخص بهای کالاها و خدمات نشان‌دهندهٔ ..... شدن هزینهٔ اقلام خوراکی و ..... است.

۴. شاخص بهای کالاها و خدمات براساس تعداد ..... متغیر محاسبه می‌شود.

۵. اهمیت شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

1. محور طول‌ها نشان‌دهندهٔ **زمان (دوره)** و محور عرض‌ها نشان‌دهندهٔ **عدد شاخص** است.
2. شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه‌گیری **بستگی ندارد** (عددی بدون واحد است که نسبت قیمت‌ها را نسبت به سال پایه نشان می‌دهد؛ مثلاً سال پایه ۱۳۹۰ برابر ۱۰۰ است).
3. افزایش شاخص نشان‌دهندهٔ **گران‌تر (بیشتر)** شدن هزینهٔ اقلام خوراکی و **غیرخوراکی (مثل پوشاک، مسکن، آب، برق و سوخت)** است.
4. شاخص بر اساس تعداد **زیادی (حدود ۳۰۰ قلم)** کالا و خدمت که قیمتشان تغییر می‌کند (متغیر) محاسبه می‌شود.

5. این شاخص نشان می‌دهد با یک مقدار پول چه مقدار کالا و خدمت می‌توان خرید (قدرت خرید)، تغییر سطح قیمت‌ها را در طول زمان نشان می‌دهد و با آن می‌توان تورم را محاسبه کرد؛ همچنین امکان بررسی تأثیر سیاست‌های دولت و تعدیل حقوق و یارانه‌ها را فراهم می‌کند.

۸۱ صفحه ۵۹ کار در کلاس

حال به سؤال قبل باز می‌گردیم. آیا پرداخت یارانهٔ ثابت طی سال‌های آتی (مثلاً ۴۵۰۰۰۰ تومان به ازای هر نفر) می‌تواند در همهٔ این مدت درآمد خانوار را بیشتر از خط فقر نگه دارد؟

خیر. با افزایش قیمت‌ها (تورم)، خط فقر که حداقل درآمد لازم برای زندگی است هر سال بالاتر می‌رود، ولی مبلغ یارانهٔ ثابت تغییر نمی‌کند و قدرت خرید آن کم می‌شود. مثلاً اگر تورم سالانه ۴۰٪ باشد، چیزی که امسال ۴۵۰۰۰۰ تومان می‌خرد، سال بعد 450000 × 1.4 = 630000 تومان لازم دارد. بنابراین مبلغ یارانه باید همراه با شاخص بهای کالاها و خدمات تعدیل شود.

۸۲ صفحه ۶۰ پرسش

به نظر شما رابطهٔ بین تورم و شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

تورم همان درصد تغییر شاخص بهای کالاها و خدمات نسبت به سال پایه (یا سال قبل) است:

تورم = (شاخص سال مورد نظر − شاخص سال پایه) ÷ ۱۰۰ (به‌صورت درصد)؛ یعنی تورم برابر است با تفاضل شاخص سال مورد نظر و سال پایه، تقسیم بر ۱۰۰.

هرچه شاخص نسبت به سال پایه بیشتر افزایش یابد، تورم بیشتر است. مثلاً اگر شاخص نان و گوشت از ۱۰۰ به ۱۴۰٫۵ برسد، تورم برابر (140.5 − 100) ÷ 100 = 0.405 ≈ 40٪ است.

۸۳ صفحه ۶۰ کار در کلاس

آیا به نظر شما شاخص بیکاری برای چهار زیرگروه رشته‌های تحصیلی یکسان است؟ در هر رشته چطور؟

نرخ بیکاری عبارت است از نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال. (متن کتاب دربارهٔ نرخ بیکاری تحصیل‌کردگان آموزش عالی.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

خیر، یکسان نیست. نرخ بیکاری (جمعیت بیکار ÷ جمعیت فعال) را می‌توان برای هر گروه از فارغ‌التحصیلان جداگانه حساب کرد. چون نیاز بازار کار به رشته‌های مختلف (مثلاً ریاضی و فنی‌مهندسی، علوم تجربی و پزشکی، علوم انسانی، هنر و ...) متفاوت است و تعداد فارغ‌التحصیلان هر رشته هم فرق می‌کند، نرخ بیکاری رشته‌ها با هم تفاوت دارد؛ رشته‌ای که تقاضای کار برایش بیشتر از تعداد فارغ‌التحصیلانش است نرخ بیکاری کمتری دارد و برعکس.

پس شاخص بیکاری کل (مثل ۳۶٪ یا ۴۸٪ در متن) میانگینی از وضعیت همهٔ رشته‌هاست و برای تصمیم دربارهٔ یک رشتهٔ خاص باید نرخ همان رشته را حساب کرد.

۸۴ صفحه ۶۱ تمرین

۱. اگر میانگین درآمد خانوارهای کشور ۳۵۰۰۰۰۰۰۰ ریال باشد، حداقل حقوق دریافتی کارکنان شرکت الف چقدر باشد تا هیچ کارمندی در این شرکت زیر خط فقر نباشد؟ چه زمانی از میانهٔ درآمد خانوارها برای محاسبهٔ خط فقر استفاده می‌کنیم؟

خط فقر = نصف میانگین درآمد = ۳۵۰,۰۰۰,۰۰۰ ÷ ۲ = **۱۷۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال** (۱۷,۵۰۰,۰۰۰ تومان). پس حداقل حقوق باید ۱۷۵ میلیون ریال باشد.

وقتی درآمدها داده‌های دور از بقیه (مثلاً درآمد چند نفر بسیار بالا) داشته باشند و میانگین را زیاد کنند، میانه معیار مطمئن‌تری است و از آن برای محاسبهٔ خط فقر استفاده می‌کنیم.

۸۵ صفحه ۶۱ تمرین

۲. خانواده‌ای شش‌نفره در یکی از کشورهای در حال توسعه زندگی می‌کنند. با توجه به تعریف خط فقر بین‌المللی درآمد ماهانهٔ این خانواده باید چند دلار باشد تا زیر خط فقر نباشند؟

خط فقر بین‌المللی ۱٫۲۵ دلار برای هر نفر در روز است:

۶ × 1.25 × 30 = 225 دلار در ماه

پس درآمد ماهانهٔ این خانواده باید **حداقل ۲۲۵ دلار** باشد.

۸۶ صفحه ۶۱ تمرین

۳. در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل‌اند. در این منطقه ۲۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار می‌باشند.

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ب) حداقل چند شغل در این منطقه باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه برابر ۵ درصد باشد؟

جمعیت فعال = شاغلان + جویای کار = 1400 = 200 + 1200 نفر. بیکار = جویای کار = ۲۰۰ نفر.

الف) نرخ بیکاری = 100 × 1400 ÷ 200 ≈ **۱۴٫۳ درصد**

ب) با ایجاد x شغل، x نفر از جویای کار شاغل می‌شوند و جمعیت فعال همان ۱۴۰۰ می‌ماند. باید (200 − x) ÷ 0.05 ≤ 1400 باشد، یعنی 70 ≤ 200 − x و 130 ≤ x. پس حداقل **۱۳۰ شغل** باید ایجاد شود.

۸۷ صفحه ۶۱ تمرین

۴. خانوادهٔ آقای صالحی در فروردین ماه سال ۱۳۹۰، پانصد هزار تومان هزینهٔ ماهانهٔ مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌ها داشته است. در همان تاریخ هزینهٔ ماهانهٔ خوراکی‌ها و آشامیدنی‌های این خانواده دویست و پنجاه هزار تومان بوده است. اگر تعداد افراد این خانواده تغییری نکرده باشد، بر مبنای نمودار شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی موارد زیر را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

الف) هزینهٔ ماهانهٔ مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌های این خانواده در خردادماه ۱۳۹۳

ب) هزینهٔ ماهانهٔ خوراکی‌ها و آشامیدنی‌های این خانواده در مهرماه ۱۳۹۵

سال پایه ۱۳۹۰ است و شاخص آن ۱۰۰ است؛ پس هزینه در هر زمان = هزینهٔ پایه × شاخص ÷ ۱۰۰.

الف) از نمودار، شاخص «مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌ها» (خط‌چین بلند، پایین‌ترین منحنی) در خرداد ۱۳۹۳ حدود **۱۵۰** است: 750 = 100 ÷ 150 × 500 هزار تومان.

ب) شاخص «خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها» (نقطه‌چین) در مهر ۱۳۹۵ حدود **۲۶۰** است: 650 = 100 ÷ 260 × 250 هزار تومان.

جواب‌ها تقریبی‌اند و به خواندن نمودار بستگی دارند: الف ≈ ۷۵۰ هزار تومان، ب ≈ ۶۵۰ هزار تومان.

خواندن عدد شاخص از نمودار تقریبی است؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۸ صفحه ۶۱ تمرین

۵. نماتوپ یا شاخص تودهٔ بدنی که در سال گذشته آن را در کتاب ریاضی و آمار خود دیدید، یکی دیگر از شاخص‌های مهم آماری است که به شاخص سلامت معروف است. برای محاسبهٔ آن باید وزن فرد را به کیلوگرم بر توان دوم قدش بر حسب متر تقسیم کرد.

جدول زیر اطلاعات خانوادهٔ صالحی را نشان می‌دهد. اکنون با توجه به جدول بالا مشخص کنید کدام یک از افراد این خانواده وزن مطلوبی دارند؟

افراد خانواده	سن (سال)	وزن (کیلوگرم)	قد (سانتی‌متر)
صالح	۱۷	۶۲	۱۷۷
برادر	۲۲	۸۵	۱۸۳
خواهر	۲۵	۵۳	۱۷۰
مادر	۵۰	۶۰	۱۶۵
پدر	۵۵	۸۱	۱۷۴

شاخص BMI = وزن (کیلوگرم) ÷ مجذور قد (متر). بازهٔ مطلوب (طبیعی) ۱۸٫۵ تا ۲۴٫۹ است.

فرد	محاسبه	شاخص	وضعیت
صالح	$62 \div 1.77^2$	۱۹/۸	مطلوب
برادر	$85 \div 1.83^2$	۲۵/۴	اضافه‌وزن (بالاتر از ۲۴٫۹)
خواهر	$53 \div 1.70^2$	۱۸/۳	کمی کمتر از ۱۸٫۵ (کم‌وزن)
مادر	$60 \div 1.65^2$	۲۲/۰	مطلوب
پدر	$81 \div 1.74^2$	۲۶/۸	اضافه‌وزن

پس **صالح و مادر** وزن مطلوب دارند؛ برادر و پدر کمی بیش از حد و خواهر کمی کمتر از حد مطلوب هستند.

۸۹ صفحه ۶۱ تمرین

۶. در موقع خرید کتاب‌های داستان معمولاً به سطح کتاب برای ردهٔ سنی مشخص شده، توجه می‌کنیم. به نظر شما چگونه این کار را انجام می‌دهند؟ آیا نظر افراد با تجربه برای تعیین سطح یک متن به‌خصوص همیشه یکسان است؟ ارزیابی آنها کیفی است یا کمی؟

خوانایی متن میزان سهولت درک متن از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت دستور نگارش است. یکی از شاخص‌های خوانایی که سال‌های تحصیل خوانندهٔ متون انگلیسی را تخمین می‌زند، به‌صورت زیر تعریف‌شده است. شاخص پایهٔ آموزش = ۰/۴ × (میانگین تعداد کلمات در هر جمله + درصد کلمات «دشوار»)

الف) برای کتابی با متوسط طول جملات ۸ کلمه‌ای و ۲۰ درصد کلمهٔ سخت، شاخص پایهٔ آموزش را محاسبه کنید. این کتاب مناسب دانش‌آموزان چه پایه‌ای است؟ پاسخ: این کتاب مناسب دانش‌آموزانی است که پایهٔ ..... را به پایان رسانده‌اند.

ب) مزایا و محدودیت‌های این شاخص چیست؟ پاسخ: استفاده از این شاخص ساده است. با این حال، فرض می‌کند که کلمات بزرگ‌تر و جملات طولانی‌تر باعث ..... شدن متن می‌شوند، اما یک نویسندهٔ چیره‌دست می‌تواند با کلمات و جملات دیگری باعث ..... متن شود.

ج) همان‌گونه که متوجه شده‌اید، این شاخص بر اساس دو آمار از دو متغیر تعریف شده است. آنها را نام ببرید.

خرید کتاب: ناشران و کارشناسان با خواندن متن و براساس تجربه (مثل دشواری واژه‌ها، طول جمله‌ها، موضوع و تصاویر) ردهٔ سنی را تعیین می‌کنند. نظر افراد با تجربه همیشه یکسان نیست، چون این ارزیابی به سلیقه و تجربهٔ هر فرد بستگی دارد؛ بنابراین ارزیابی آنها **کیفی** است (برخلاف شاخص خوانایی که عددی و کمّی است).

الف) شاخص = 0.4 × (8 + 20) × 0.4 = **۱۱٫۲**. این کتاب مناسب دانش‌آموزانی است که پایهٔ **یازدهم** (حدود ۱۱) را به پایان رسانده‌اند.

ب) مزیت: ساده و سریع محاسبه می‌شود و عددی است که مقایسه را آسان می‌کند. محدودیت: فرض می‌کند کلمات بزرگ‌تر و جملات طولانی‌تر باعث **سخت (دشوار)** شدن متن می‌شوند، اما یک نویسندهٔ چیره‌دست می‌تواند با کلمات و جملات دیگری باعث **روان (خوانا)** شدن متن شود. همچنین مفهوم و موضوع متن را در نظر نمی‌گیرد.

ج) دو آمار: **میانگین تعداد کلمات در هر جمله** و **درصد کلمات «دشوار»**.

۹۰ صفحه ۶۲ تمرین

۷. هزینه‌های زندگی خانوادهٔ آقای صالحی در سال ۱۳۹۰ در جدول زیر آمده است. با توجه به نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی جدول زیر را کامل کنید.

	۱۳۹۰	مهر ماه ۱۳۹۳	دی‌ماه ۱۳۹۶
هزینهٔ خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها (برحسب هزار تومان)	۲۱۰	210×225 ÷ 100 = 472.50	
هزینهٔ کل (برحسب هزار تومان)	۸۵۰	.....×202 ÷ 100 = ...	

هزینه = هزینهٔ سال ۱۳۹۰ × شاخص ÷ ۱۰۰. شاخص کل در مهر ۱۳۹۳ حدود ۲۰۲ است (طبق جدول)؛ برای دی‌ماه ۱۳۹۶ از انتهای نمودار (شاخص خوراکی‌ها ≈ ۳۰۰ و شاخص کل ≈ ۲۶۵) استفاده می‌کنیم.

	۱۳۹۰	مهر ۱۳۹۳	دی ۱۳۹۶ (تقریبی)
هزینهٔ خوراکی‌ها (هزار تومان)	۲۱۰	۴۷۲/۵	210×300÷100 = 630
هزینهٔ کل (هزار تومان)	۸۵۰	850×202÷100 = 1717	850×265÷100 ≈ 2252.5

irantooshe.ir

نمودار کتاب تا ابتدای سال ۱۳۹۶ را نشان می‌دهد و اعداد ستون آخر از انتهای نمودار خوانده شده‌اند؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۱ صفحه ۶۲ تمرین

۸. شاخص پوسیدگی دندان (DMFT) در ایران برای سال ۱۳۶۰ برابر ۳ بوده است؛ یعنی هر ایرانی به طور متوسط دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پُر شده است. این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است. این شاخص را در سال ۱۳۹۵ تفسیر کنید. شاخص در سال ۱۳۹۵ چند درصد افزایش داشته است؟ این شاخص در سال ۱۳۶۰ نسبت به ۱۳۹۵ چند درصد کاهش داشته است؟

تفسیر: شاخص ۶ در سال ۱۳۹۵ یعنی هر ایرانی به طور متوسط ۶ دندان کشیده‌شده، پوسیده یا پُرشده دارد (مثلاً دو دندان کشیده، دو دندان پوسیده و دو دندان پُرشده).

- افزایش سال ۱۳۹۵ نسبت به ۱۳۶۰: $(6 - 3) \div 3 \times 100 = 100\%$
- کاهش سال ۱۳۶۰ نسبت به ۱۳۹۵: $(6 - 3) \div 6 \times 100 = 50\%$

توجه: درصد افزایش و درصد کاهش با هم برابر نیستند، چون مبنای مقایسه در این دو حالت فرق می‌کند.

۹۲ صفحه ۶۳ پرسش

به نظر شما دستیابی به کدام یک از اطلاعات زیر جالب‌تر است؟ دمای هوای شهر محل زندگی ما در هفتهٔ آینده. میزان آلاینده‌های شهر محل زندگی ما در ماه آینده. نرخ بیکاری در زمان اخذ دیپلم.
آیا به نظر شما مجموعه‌ای از داده‌های آماری که در فواصل زمانی مساوی و منظم جمع‌آوری شده باشند، می‌توانند پیش‌بینی خوبی برای تصمیم‌گیری ما باشند؟

هر سه اطلاعات جالب و مفیدند؛ پاسخ اول به سلیقه و نیاز شما بستگی دارد (مثلاً پیش‌بینی دما برای برنامه‌ریزی سفر و آلودگی برای حفظ سلامت، و نرخ بیکاری برای انتخاب رشته و آینده شغلی).

بله. وقتی داده‌ها در فواصل زمانی مساوی و منظم جمع‌آوری شوند (سری زمانی)، می‌توان الگوی تغییرات آنها را در گذشته دید (روند، تکرار یا نوسان) و با ادامهٔ این الگو برای آینده پیش‌بینی کرد؛ هرچند پیش‌بینی همیشه با کمی خطا همراه است.

۹۳ صفحه ۶۳ فعالیت

میزان بارندگی در شش ماه دوم سال دو شهر آ و ب برحسب میلی‌متر در جدول زیر آمده است.
جدول را کامل کنید.
میانگین و انحراف معیار بارندگی در شهرها را مقایسه کنید.

نمودار پراکنش نگاشت هر دو شهر را برحسب ماه‌های سال با یک مقیاس بر روی یک محور رسم کنید. نقاط را به هم وصل کنید. برای مشخص شدن هر شهر از یک رنگ متفاوت استفاده کنید.

کدام شهر میزان بارندگی بیشتری در پاییز نسبت به زمستان دارد؟

	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند	مجموع	میانگین	انحراف معیار
شهر آ	۱۵	۲۰	۳۰	۳۵	۳۰	۳۰			
شهر ب	۲۳۰	۱۷۰	۱۵۰	۱۳۰	۱۱۰	۱۱۰			

از فرمول‌های کتاب استفاده می‌کنیم: میانگین = مجموع داده‌ها ÷ تعداد، و انحراف معیار = جذر میانگین مربع انحراف‌ها از میانگین.

	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند	مجموع	میانگین	انحراف معیار
شهر آ	۱۵	۲۰	۳۰	۳۵	۳۰	۳۰	۱۶۰	۲۶/۶۷	۶/۸۷
شهر ب	۲۳۰	۱۷۰	۱۵۰	۱۳۰	۱۱۰	۱۱۰	۹۰۰	۱۵۰	۴۱/۶۳

- شهر آ: انحراف‌ها از ۲۶٫۶۷ به ترتیب −۱۱٫۶۷، −۶٫۶۷، ۳٫۳۳، ۸٫۳۳، ۳٫۳۳، ۳٫۳۳ هستند. مجموع مربع‌ها ≈ ۲۸۳٫۳۳ است؛ واریانس = 47.22 ≈ 6 ÷ 283.33 و انحراف معیار = جذر 6.87 ≈ 47.22.
- شهر ب: انحراف‌ها از ۱۵۰ برابر ۸۰، ۲۰، ۰، −۲۰، −۴۰، −۴۰ هستند. مجموع مربع‌ها = ۱۰۴۰۰؛ واریانس = 1733.33 ≈ 6 ÷ 10400 و انحراف معیار ≈ ۴۱٫۶۳.

مقایسه: شهر ب هم میانگین بارندگی بیشتری دارد (۱۵۰ در برابر ۲۶٫۶۷) و هم انحراف معیار بزرگ‌تری (۴۱٫۶۳ در برابر ۶٫۸۷)؛ یعنی بارندگی آن از ماهی به ماه دیگر تغییرات بیشتری دارد و بارندگی شهر آ یکنواخت‌تر است.

نمودار: محور افقی ماه‌ها (۱ = مهر تا ۶ = اسفند) و محور عمودی بارندگی است؛ شهر آ با رنگ آبی و شهر ب با رنگ قرمز.

پاییز و زمستان: شهر آ: پاییز 65 = 30+20+15 و زمستان 95 = 30+30+35 (زمستان بیشتر). شهر ب: پاییز 550 = 150+170+230 و زمستان 350 = 110+110+130 (پاییز بیشتر). پس **شهر ب** در پاییز بارندگی بیشتری نسبت به زمستان دارد.

۹۴ صفحه ۶۴ پرسش

حال نمودار پراکنش نگاشت دما و نمودار میله‌ای بارندگی‌های همان دو شهر را با مقیاس‌های متفاوت برای یک سال به‌ویژه در یک محور رسم کرده‌ایم.

• در چه فصلی از سال بارندگی بیشتر است؟

• متوسط دمای کدام شهر کمتر است؟ آیا در تمام ماه‌های سال به همین نحو است؟

نمودار سمت راست نمودار سمت چپ

فصل پربارش: در نمودار سمت چپ میله‌های بارندگی در دی، بهمن و اسفند (زمستان) از همه بلندترند (حدود ۳۰ تا ۳۶ میلی‌متر)، پس بیشترین بارندگی در **زمستان** است و در تابستان تقریباً بارندگی نیست. در نمودار سمت راست بلندترین میله‌ها در شهریور، مهر، آبان و آذر هستند و بیشترین بارندگی (حدود ۲۲۰ میلی‌متر در مهر) در **پاییز** است.

دما: در نمودار سمت چپ دما از حدود ۳ درجه (دی) تا حدود ۲۹ درجه (تیر) تغییر می‌کند و متوسط آن حدود ۱۷ درجه است. در نمودار سمت راست دما از حدود ۷ درجه (دی و بهمن) تا حدود ۲۵ درجه (مرداد) می‌رود و متوسط آن حدود ۱۶ درجه است. پس متوسط دمای شهر **نمودار سمت راست** اندکی کمتر است.

ولی در تمام ماه‌ها این‌گونه نیست: در ماه‌های سرد (دی، بهمن) شهر سمت راست گرم‌تر از شهر سمت چپ است، و در ماه‌های گرم (فروردین تا شهریور) شهر سمت چپ گرم‌تر است.

اعداد دما از روی نمودار خوانده شده‌اند و تقریبی‌اند؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۹۵ صفحه ۶۴ کار در کلاس

سری زمانی زیر نشان‌دهندهٔ ۶ روز درجه حرارت بدن یک بیمار مبتلا به بیماری میکروبی است. او بستری شده و درمانش با آنتی‌بیوتیک آغاز شده است.

• هر روز چند درجه حرارت خوانده شده ثبت شده است؟

• درجه حرارت بیمار در لحظهٔ بستری شدن چند درجه است؟

• پس از چند روز درجه حرارت بیمار به حالت طبیعی بازگشته است؟

• اگر اولین زمان ثبت درجه حرارت ساعت ۷ صبح باشد، نمودار را فقط برای ساعات ۷ صبح رسم کنید. کدام نمودار ساده‌تر به نظر می‌رسد؟ کدام‌یک جزئیات بیشتری را نشان می‌دهد؟

- در نمودار ۲۴ نقطه برای ۶ روز ثبت شده است: 6 ÷ 24 = **۴ بار در روز** (هر ۶ ساعت یک بار).
- درجهٔ حرارت در لحظهٔ بستری (اولین نقطه) حدود **۳۶٫۷** درجه است. (بیمار همان روز تب‌های بالای ۴۱ درجه نشان می‌دهد.)
- درجه حرارت در روزهای اول تا چهارم هنوز نوسان و تب (بیش از ۳۸) دارد؛ از روز پنجم به‌تدریج فروکش می‌کند و در روز ششم همهٔ مقادیر بین ۳۶٫۵ و ۳۷٫۶ است. پس بیمار پس از حدود **۵ روز** به حالت طبیعی برگشته است.
- اگر فقط اولین ثبت هر روز (ساعت ۷ صبح) را برداریم، شش نقطه خواهیم داشت: ۳۶٫۷، ۳۸٫۶، ۳۷٫۸، ۳۷٫۷، ۳۶٫۵، ۳۶٫۵. نمودار آن:

نمودار ۷ صبح **ساده‌تر** است و روند کلی کاهش تب را نشان می‌دهد، ولی نمودار ۲۴ نقطه‌ای **جزئیات بیشتری** دارد؛ مثلاً اوج‌های تب (بالای ۴۱ درجه) که در ساعات دیگر روز رخ داده‌اند، در نمودار ۷ صبح دیده نمی‌شوند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۶ صفحه ۶۵ **فعالیت**

درجه حرارت بدن یک انسان سالم هر ساعت طی ۳ روز از ۷ صبح اندازه‌گیری شده است.

• بیشترین دمای بدن چقدر است؟

• دمای بدن در طول روز اول چه تغییراتی کرده است؟ تغییرات دمای بدن در روز اول را توصیف کنید.

• آیا این تغییرات در روزهای بعد نیز تکرار شده است؟

• این منحنی چه ویژگی دارد؟ (خطی، صعودی یا تناوبی)

- بیشترین دمای بدن حدود **۳۷٫۶ درجهٔ سانتی‌گراد** است (در بخش میانی روز دوم).
- روز اول: ساعت ۷ صبح دما حدود ۳۶٫۲ است؛ تا حدود ساعت ۱۰ به ۳۶٫۷ می‌رسد و بعد از آن (حدود ظهر) ناگهان به حدود ۳۷٫۳ تا ۳۷٫۵ بالا می‌رود. تا حدود ۹ یا ۱۰ شب دما در همین حدود می‌ماند، سپس حوالی نیمه‌شب شدیداً کاهش می‌یابد و در شب و صبح زود به کمترین مقدار (حدود ۳۶٫۲ تا ۳۶٫۴) می‌رسد.
- بله، همین الگو (افزایش در طول روز و کاهش در شب) در روز دوم و سوم تقریباً عیناً تکرار شده است؛ یعنی هر ۲۴ ساعت یک بار.
- منحنی **تناوبی** (دوره‌ای) است؛ نه خطی است و نه فقط صعودی، زیرا بالا و پایین می‌رود و هر ۲۴ ساعت تکرار می‌شود.

مقدارهای عددی از روی نمودار خوانده شده‌اند؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۷ صفحه ۶۶ **فعالیت**

در یک مرکز خرید تعداد مشتری‌ها بین ساعت ۹ تا ۲۱ به‌صورت زیر ثبت شده است.

نمودار سری زمانی را رسم کنید.

می‌خواهیم تعداد مشتری‌های ساعت ۱۰ را حدس بزنیم. به نظر شما کدام‌یک از نمودارهای زیر واقعی‌تر است؟

اگر فرض کنیم تعداد مشتری‌ها در فاصلهٔ زمانی ۹ تا ۱۱ به‌صورت یکنواخت تغییر کرده است، به سؤال قبل پاسخ دهید.

ساعت (T)	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
تعداد مشتری (N)	۳۵۰	۷۵۰	۸۰۰	۶۵۰	۳۰۰	۵۰۰	۲۵۰

نمودار سری زمانی: نقاط (T, N) به‌صورت (۹، ۳۵۰)، (۱۱، ۷۵۰)، (۱۳، ۸۰۰)، (۱۵، ۶۵۰)، (۱۷، ۳۰۰)، (۱۹، ۵۰۰) و (۲۱، ۲۵۰) را روی نمودار می‌گذاریم و به ترتیب به هم وصل می‌کنیم. تعداد مشتری‌ها از ۹ تا ۱۳ بالا می‌رود، بعد تا ساعت ۱۷ کم می‌شود، سپس دوباره بالا می‌رود و در پایان کم می‌شود.

حدس ساعت ۱۰: تعداد مشتری‌های ساعت ۱۰ باید بین ۳۵۰ (ساعت ۹) و ۷۵۰ (ساعت ۱۱) باشد؛ بنابراین نمودار «ب» (که پایین‌تر از هر دو می‌رود) معقول نیست. نمودارهای «الف» و «پ» (رشد سریع‌تر در ابتدا و کندتر در انتها) و «ت» (خطی) هر سه ممکن‌اند و بدون اطلاعات بیشتر نمی‌توان یکی را قطعی دانست.

تغییر یکنواخت: یعنی نمودار پاره‌خطی است و مقدار ساعت ۱۰ وسط دو مقدار است: 2 ÷ (750 + 350) = **۵۵۰**.

این مقدار با نمودار «ت» (خطی) سازگار است.

قسمت دوم (انتخاب «واقعی‌ترین» نمودار) نظرسنجی و بدون پاسخ قطعی است؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۸ صفحه ۶۷ کار در کلاس

می‌خواهیم تعداد مشتری‌های ساعت ۱۰ در فعالیت قبل را درون‌یابی کنیم. فرض می‌کنیم تعداد مشتری‌ها در فاصلهٔ زمانی ۹ تا ۱۱ به‌صورت یکنواخت تغییر کرده است.

- **معادلهٔ خط بین دو ساعت (۹، ۳۵۰) و (۱۱، ۷۵۰) را به‌دست آورید.**
- **خط را رسم کنید.**
- **مقدار این خط در ساعت ۱۰ چقدر است؟**
- **این مقدار به درون‌یابی کدام‌یک از شکل‌های فعالیت قبل نزدیک‌تر است؟**
- **اگر مقادیر واقعی را به‌صورت ساعتی جمع‌آوری کرده باشیم که در شکل زیر با خط توپر نشان داده شده است، خطای درون‌یابی ساعت ۱۰ چقدر است؟ N نشان‌دهندهٔ تعداد مشتری‌ها و T نشان‌دهندهٔ زمان است. (خطا برای هر نقطه برابر است با قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی هر نقطه از درون‌یابی آن).**
- **خطای درون‌یابی بقیهٔ نقاط را از روی شکل محاسبه کنید.**

معادلهٔ خط: شیب = 200 = (9 − 11) ÷ (350 − 750). معادله: N − 350 = 200(T − 9) که می‌شود N = 200T − 1450. (بررسی: برای T=11 داریم 2200 − 1450 = 750.)

مقدار در ساعت ۱۰: N = 200×10 − 1450 = **۵۵۰**. این مقدار به نمودار «ت» (خطی) نزدیک است.

خطای ساعت ۱۰: مقدار واقعی در شکل حدود ۶۰۰ است؛ خطا = |600 − 550| = **۵۰**.

بقیهٔ نقاط: درون‌یابی هر ساعت زوج، میانگین دو ساعت فرد مجاور است:

ساعت	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
درون‌یابی	(750+800)÷2 = 775	(800+650)÷2 = 725	(650+300)÷2 = 475	(300+500)÷2 = 400	(500+250)÷2 = 375
مقدار واقعی (از شکل)	۸۵۰	۷۰۰	۴۰۰	۴۰۰	۴۵۰
خطا	۷۵	۲۵	۷۵	۰	۷۵

مقدارهای واقعی از روی شکل خوانده شده‌اند و ممکن است چند واحد اختلاف داشته باشند؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۹۹ صفحه ۶۷ پرسش

نمودار شاخص قیمت واقعی و اسمی بورس تهران در ماه‌های گذشته. رفتار این شاخص در آینده چگونه خواهد بود؟

شاخص بورس یک سری زمانی است. در نمودار، شاخص در یک دورهٔ طولانی بالا رفته، سپس افت کرده و در انتها دوباره روند صعودی با نوسان دارد. با ادامهٔ این روند می‌توان گفت احتمالاً در کوتاه‌مدت با نوسان همراه با افزایش ادامه می‌یابد؛ اما این فقط یک برون‌یابی است و چون بورس به عوامل زیادی (مانند شرایط اقتصادی) بستگی دارد، پیش‌بینی دقیق ممکن نیست و نمودار گذشته تنها یک تخمین می‌دهد.

این پرسش پاسخ عددی ندارد و پیش‌بینی است؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۰ صفحه ۶۸ فعالیت

میزان فروش یک شرکت در ۵ سال متوالی برحسب میلیارد ریال به‌صورت زیر است

- **سری زمانی را رسم کنید.**
- **فروش در سال هفتم را حدس بزنید.**
- **میانگین سال و فروش را محاسبه کنید و روی نمودار نمایش دهید.**
- **یک خط از نقطهٔ میانگین‌ها به نقطهٔ (۵، ۱۹) وصل کنید.**
- **معادلهٔ خط را به دست آورید.**
- **اگر به‌جای x در معادله، مقدار ۶ قرار دهید، عدد به دست آمده چقدر است؟ آیا می‌توان این مقدار را به‌عنوان تخمین فروش در سال آیندهٔ تصور کرد؟**

x سال	۱	۲	۳	۴	۵
فروش y	۶	۹	۱۱	۱۵	۱۹

- **سری زمانی:** نقاط (۱،۶)، (۲،۹)، (۳،۱۱)، (۴،۱۵) و (۵،۱۹) را رسم و به هم وصل می‌کنیم؛ فروش هر سال بیشتر شده است.
- **میانگین‌ها:** میانگین $x = (1+2+3+4+5)\div 5 = 3$ و میانگین $y = (6+9+11+15+19)\div 5 = 60\div 5 = 12$؛ نقطهٔ میانگین‌ها (۳، ۱۲) است.
- **معادلهٔ خط** از (۳،۱۲) و (۵،۱۹): شیب $= (19-12)\div(5-3) = 3.5$. پس $y-12 = 3.5(x-3)$ و $y = 3.5x + 1.5$.
- **سال ششم:** $y = 3.5\times 6 + 1.5 = 22.5$ **۲۲٫۵** میلیارد ریال. بله، می‌توان آن را تخمینی برای فروش سال آینده (سال ششم) دانست؛ چون سال ششم بعد از دادهٔ ثبت‌شده است، این کار برون‌یابی است. (برای سال هفتم هم همین خط: $3.5\times 7+1.5 = 26$ میلیارد ریال، که حدسی نزدیک به حدس اولیه است.)

۱۰۱ صفحه ۶۸ تمرین

۱ـ کدام‌یک از داده‌های زیر سری زمانی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) تعداد مسافران فرودگاه بوشهر در هر ماه در ۱۰ سال گذشته.

ب) تعداد مشتریان یک تاجر برحسب مدت زمانی که صرف بازاریابی می‌کند.

ج) تعداد ساعاتی که در معرض نور مستقیم خورشید قرار داریم؛ شدت آفتاب سوختگی.

- الف) **سری زمانی است**؛ داده‌ها در فواصل زمانی مساوی و منظم (هر ماه) در طول ۱۰ سال جمع‌آوری شده‌اند.
- ب) سری زمانی نیست؛ متغیر مستقل «مدت زمان بازاریابی» است و داده‌ها در فواصل منظم زمانی ثبت نشده‌اند، بلکه رابطهٔ دو متغیر را نشان می‌دهند.
- ج) سری زمانی نیست؛ شدت آفتاب‌سوختگی به مدت قرار گرفتن در معرض نور بستگی دارد و داده‌ها در فواصل زمانی منظم گرفته نشده‌اند.

۱۰۲ صفحه ۶۸ تمرین

۲ـ اگر نمودارهای شکل زیر یک سری زمانی باشند، در کدام حالت درون‌یابی و برون‌یابی خطی بهتر امکان‌پذیر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

درون‌یابی و برون‌یابی خطی در دو نمودار **بالایی** (بنفش با روند صعودی و آبی با روند نزولی) بهتر است، چون نقاط تقریباً روی یک خط راست قرار دارند و روند یکنواخت است. در دو نمودار پایینی (قرمز و سبز) داده‌ها بالا و پایین می‌روند (نوسان دارند) و یک خط نمی‌تواند مقدارهای میانی یا بعدی را خوب تخمین بزند.

۱۰۳ صفحه ۶۹ تمرین

۳ـ یک دکه‌دار تعداد بطری‌های آب فروخته‌شده، از شروع فصل گرما و یک روز در میان مطابق با جدول زیر ثبت کرده است.

الف) سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) تعداد بطری‌های فروخته‌شدهٔ روزهای فرد را درون‌یابی کنید.

ج) تعداد بطری‌های فروخته‌شدهٔ دوشنبهٔ دوم را برون‌یابی کنید.

روز	شنبه	دوشنبه	چهارشنبه	جمعه	یکشنبه	سه‌شنبه	پنجشنبه	شنبه
تعداد بطری‌ها	۸	۱۳	۱۶	۲۵	۱۸	۲۲	۲۱	۲۳

روزها را از شنبهٔ اول شماره‌گذاری می‌کنیم: داده‌ها مربوط به روزهای ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵ هستند (شنبه، دوشنبه، چهارشنبه، جمعه، یکشنبه، سه‌شنبه، پنجشنبه، شنبه).

الف) نقاط (۱،۸)، (۳،۱۳)، (۵،۱۶)، (۷،۲۵)، (۹،۱۸)، (۱۱،۲۲)، (۱۳،۲۱) و (۱۵،۲۳) را رسم می‌کنیم (نقاط آبی).

ب) روزهای بین دو ثبت متوالی (که در جدول نیامده‌اند) را با میانگین دو روز مجاور درون‌یابی می‌کنیم:

روز	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
مقدار	2÷(8+13) = 10.5	2÷(13+16) = 14.5	2÷(16+25) = 20.5	2÷(25+18) = 21.5	2÷(18+22) = 20	2÷(22+21) = 21.5	2÷(21+23) = 22

ج) دوشنبهٔ دوم، روز دهم است و بین یکشنبه (روز ۹: مقدار ۱۸) و سه‌شنبه (روز ۱۱: مقدار ۲۲) قرار دارد؛ پس مقدار آن 2÷(18+22) = **۲۰ بطری** است.

عبارت «روزهای فرد» در صورت سؤال مبهم است (روزهای ثبت‌شده خودشان فردند)؛ آن را «روزهای ثبت‌نشدهٔ بین داده‌ها» و دوشنبهٔ دوم را روز دهم گرفتم. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۴ صفحه ۶۹ تمرین

۴ـ تعداد گل‌های زده شده در لیگ برتر فوتبال جام خلیج فارس در هفته‌های زوج و پایانی در جدول زیر آمده است.

سری زمانی مربوط به آن را رسم کنید. تعداد گل‌های هفتهٔ ۳۰ام را برون‌یابی کنید.

هفته	۲۰	۲۲	۲۴	۲۶	۲۸
تعداد گل‌ها	۳۰	۲۷	۳۲	۳۵	۳۵

از روش کتاب استفاده می‌کنیم: خطی از نقطهٔ میانگین‌ها به آخرین نقطه رسم می‌کنیم.

- میانگین هفته‌ها = 5÷(28+26+24+22+20) = 24؛ میانگین گل‌ها = 5÷(35+32+35+27+30) = 159÷5 = 31.8
- شیب خط بین (۲۴، ۳۱٫۸) و (۲۸، ۳۵): (28 − 24) ÷ (35 − 31.8) = 0.8
- معادله: y − 31.8 = 0.8(x − 24) یعنی y = 0.8x + 12.6
- برای هفتهٔ ۳۰: y = 0.8×30 + 12.6 = **۳۶٫۶** یعنی حدود **۳۷ گل**.

۱۰۵ صفحه ۶۹ تمرین

۵ـ میانگین افزایش خدمات یک تعمیرگاه نسبت به سال اول (سال پایه) برحسب درصد در جدول زیر آمده است.

الف) سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) درصد افزایش خدمات سال هفتم این تعمیرگاه را نسبت به سال پایه برون‌یابی کنید.

سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درآمد	۱۹/۵	۲۹	۳۸/۵	۴۸	۵۸	۶۷

الف) نقاط (۱، ۱۹٫۵)، (۲، ۲۹)، (۳، ۳۸٫۵)، (۴، ۴۸)، (۵، ۵۸) و (۶، ۶۷) را رسم می‌کنیم؛ تقریباً روی یک خط‌اند.

- میانگین سال‌ها = ۳٫۵؛ میانگین درصدها = 260 ÷ 6 ≈ 43.33
- شیب خط بین (۳٫۵، ۴۳٫۳۳) و (۶، ۶۷): (67 − 43.33) ÷ 2.5 ≈ 9.47
- معادله: y = 9.47x + 10.2
- برای سال هفتم: y ≈ 9.47×7 + 10.2 ≈ **۷۶٫۵ درصد**

۱۰۶ صفحه ۶۹ تمرین

۶ـ تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر در جهان مطابق جدول زیر برای ده سال ثبت‌شده است.

الف) سری زمانی آن را رسم کنید.

ب) میانگین سال و تعداد زلزله‌ها را به دست آورید.

ج) معادلهٔ خطی که نقطهٔ (۲۱ و ۱۰) را به میانگین سال و تعداد زلزله‌ها وصل می‌کند، به دست آورید.

د) با استفاده از خطی که معادلهٔ آن را به دست آورده‌اید، تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر را در سال یازدهم در جهان برون‌یابی کنید.

ه) اگر بدانیم در سال یازدهم دقیقاً ۲۵ زلزله آمده است، خطای برون‌یابی چقدر است؟

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
تعداد زلزله‌های بالای ۷ ریشتر	۳۰	۲۸	۲۹	۲۳	۲۰	۱۶	۲۱	۲۵	۱۶	۲۱

الف) نقاط (۱،۳۰)، (۲،۲۸)، ...، (۱۰،۲۱) را رسم می‌کنیم؛ روند کلی نزولی با نوسان است.

- ب) میانگین سال‌ها = ۵٫۵؛ مجموع زلزله‌ها = ۲۲۹ و میانگین = 10 ÷ 229 = **۲۲٫۹**؛ نقطهٔ (۵٫۵، ۲۲٫۹).
- ج) نقطهٔ داده‌شده (سال دهم، ۲۱) است: (۱۰، ۲۱). شیب = (21 − 22.9) ÷ (10 − 5.5) = −1.9 ÷ 4.5 ≈ −0.422. معادله: y − 21 = −0.422(x − 10) یعنی y = −0.422x + 25.22
- د) x=11: y = −0.422×11 + 25.22 ≈ 20.6، یعنی حدود **۲۱ زلزله**.
- ه) خطا = |25 − 20.6| ≈ **۴٫۴** (حدود ۴ زلزله).

۱۰۷ صفحه ۶۹ تمرین

۷ـ نرخ تورم در ایران بین سال‌های ۱۳۱۶ تا ۱۳۹۵ در جدول زیر داده‌شده است.

الف) نمودار سری زمانی داده‌ها را ده سال در میان رسم کنید.

ب) داده‌ها را با استفاده از قسمت قبل درون‌یابی کنید.

ج) بر روی همان سری زمانی داده‌ها پنج سال در میان را با استفاده از جدول به‌روی همان نمودار رسم و خطای درون‌یابی را محاسبه کنید.

(جدول نرخ تورم سال‌های ۱۳۱۶ تا ۱۳۹۵ در صفحهٔ ۷۰ کتاب آمده است.)

الف) سال‌های ۱۳۱۶، ۱۳۲۶، ۱۳۳۶، ...، ۱۳۸۶ را برمی‌داریم (۸ نقطه): ۲۱٫۲، ۶٫۶، ۴٫۴، ۰٫۸، ۲۵٫۱، ۲۷٫۷، ۱۷٫۳، ۱۸٫۴ و به هم وصل می‌کنیم (نمودار با نقطه‌های آبی در شکل زیر؛ خط‌چین قرمز درون‌یابی است).

ب) بین دو سال متوالی از این ۸ سال، با خط واصل درون‌یابی می‌کنیم: $y = y1 + (y2 - y1)/(x2 - x1) \times (x - x1)$. مثلاً بین ۱۳۱۶ (۲۱٫۲) و ۱۳۲۶ (۶٫۶) شیب $-1.46 = 10 \div (6.6 - 21.2)$ است، پس برای ۱۳۱۷: $21.2 - 1.46 \approx 19.7$. مقدارهای درون‌یابی‌شدهٔ بقیهٔ سال‌ها:

ستون‌ها مقدار درون‌یابی‌شدهٔ سال‌های ۱+ تا ۹+ بعد از سال ابتدای بازه (مثلاً «۱+» در بازهٔ ۱۳۱۶ تا ۱۳۲۶ یعنی سال ۱۳۱۷) هستند:

بازه	۱+	۲+	۳+	۴+	۵+	۶+	۷+	۸+	۹+
۱۳۱۶ تا ۱۳۲۶	۱۹/۷	۱۸/۳	۱۶/۸	۱۵/۴	۱۳/۹	۱۲/۴	۱۱/۰	۹/۵	۸/۱
۱۳۲۶ تا ۱۳۳۶	۶/۴	۶/۲	۵/۹	۵/۷	۵/۵	۵/۳	۵/۱	۴/۸	۴/۶
۱۳۳۶ تا ۱۳۴۶	۴/۰	۳/۷	۳/۳	۳/۰	۲/۶	۲/۲	۱/۹	۱/۵	۱/۲
۱۳۴۶ تا ۱۳۵۶	۳/۲	۵/۷	۸/۱	۱۰/۵	۱۳/۰	۱۵/۴	۱۷/۸	۲۰/۲	۲۲/۷
۱۳۵۶ تا ۱۳۶۶	۲۵/۴	۲۵/۶	۲۵/۹	۲۶/۱	۲۶/۴	۲۶/۷	۲۶/۹	۲۷/۲	۲۷/۴
۱۳۶۶ تا ۱۳۷۶	۲۶/۷	۲۵/۶	۲۴/۶	۲۳/۵	۲۲/۵	۲۱/۵	۲۰/۴	۱۹/۴	۱۸/۳
۱۳۷۶ تا ۱۳۸۶	۱۷/۴	۱۷/۵	۱۷/۶	۱۷/۷	۱۷/۹	۱۸/۰	۱۸/۱	۱۸/۲	۱۸/۳

ج) این بار سال‌های ۱۳۱۶، ۱۳۲۱، ۱۳۲۶، ...، ۱۳۹۱ را به‌عنوان نقطه می‌گیریم و بین هر دو نقطه با خط درون‌یابی می‌کنیم. خطا = |نرخ واقعی − مقدار درون‌یابی|. نمودار (نقطه‌های آبی؛ خط‌چین قرمز درون‌یابی؛ خط خاکستری مقدار واقعی):

در جدول زیر، ستون‌های «۱+» تا «۴+» مقدار درون‌یابی سال‌های ۱ تا ۴ سال بعد از ابتدای بازه و ستون‌های «خطا» قدر مطلق اختلاف آن با نرخ واقعی است:

بازه	۱+	۲+	۳+	۴+	خطا ۱+	خطا ۲+	خطا ۳+	خطا ۴+
۱۳۱۶ تا ۱۳۲۱	۳۶/۲	۵۱/۲	۶۶/۲	۸۱/۲	۲۷/۴	۴۳/۲	۵۲/۴	۳۱/۷
۱۳۲۱ تا ۱۳۲۶	۷۸/۳	۶۰/۴	۴۲/۴	۲۴/۵	۳۲/۲	۵۷/۷	۵۶/۸	۳۶/۰
۱۳۲۶ تا ۱۳۳۱	۶/۷	۶/۸	۷/۰	۷/۱	۴/۴	۴/۵	۲۴/۲	۱/۲

۱۳۳۱ تا ۱۳۳۶	۶/۶	۶/۱	۵/۵	۵/۰	۲/۶	۹/۸	۳/۸	۳/۸
۱۳۳۶ تا ۱۳۴۱	۳/۷	۳/۰	۲/۳	۱/۶	۲/۷	۱۰/۰	۵/۶	۰/۰
۱۳۴۱ تا ۱۳۴۶	۰/۹	۰/۹	۰/۸	۰/۸	۰/۱	۳/۶	۰/۵	۰/۰
۱۳۴۶ تا ۱۳۵۱	۱/۹	۳/۰	۴/۱	۵/۲	۰/۴	۰/۶	۲/۶	۰/۳
۱۳۵۱ تا ۱۳۵۶	۱۰/۱	۱۳/۸	۱۷/۶	۲۱/۳	۱/۱	۱/۷	۷/۷	۴/۷
۱۳۵۶ تا ۱۳۶۱	۲۳/۹	۲۲/۷	۲۱/۶	۲۰/۴	۱۳/۹	۱۱/۳	۱/۹	۲/۴
۱۳۶۱ تا ۱۳۶۶	۲۰/۹	۲۲/۶	۲۴/۳	۲۶/۰	۶/۱	۱۲/۲	۱۷/۴	۲/۳
۱۳۶۶ تا ۱۳۷۱	۲۷/۰	۲۶/۴	۲۵/۷	۲۵/۱	۱/۹	۹/۰	۱۶/۷	۴/۴
۱۳۷۱ تا ۱۳۷۶	۲۳/۰	۲۱/۶	۲۰/۱	۱۸/۷	۰/۱	۱۳/۶	۲۹/۳	۴/۵
۱۳۷۶ تا ۱۳۸۱	۱۷/۰	۱۶/۷	۱۶/۴	۱۶/۱	۱/۱	۳/۴	۳/۸	۴/۷
۱۳۸۱ تا ۱۳۸۶	۱۶/۳	۱۶/۸	۱۷/۴	۱۷/۹	۰/۷	۱/۶	۷/۰	۶/۰
۱۳۸۶ تا ۱۳۹۱	۲۰/۸	۲۳/۲	۲۵/۷	۲۸/۱	۴/۶	۱۲/۴	۱۳/۳	۶/۶

میانگین خطای ۶۰ سال درون‌یابی‌شده حدود **۱۰/۸** و بیشترین خطا حدود **۵۷/۷** (سال ۱۳۲۳) است؛ خطا در سال‌های با نوسان شدید (مثل ۱۳۲۰ تا ۱۳۲۴ و ۱۳۷۴) بزرگ و در سال‌های آرام (۱۳۴۰ تا ۱۳۵۰) بسیار کوچک است. (برای سال‌های ۱۳۹۲ تا ۱۳۹۵ نقطهٔ بعدی نداریم و درون‌یابی ممکن نیست.)

عبارت «ده سال در میان / پنج سال در میان» مبهم است (نقطهٔ شروع را ۱۳۱۶ گرفتم)؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

توشه ای برای موفقیت