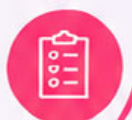


با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضیات گسسته دوازدهم

پاسخ فعالیت‌ها، کارهای در کلاس و تمرین‌های کتاب

پایه دوازدهم • دوره دوم متوسطه • رشته ریاضی و فیزیک

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای در کلاس و تمرین‌های کتاب

تهیه شده در ایران توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۱ فصل اول — آشنایی با نظریهٔ اعداد ۴

۲ فصل دوم — گراف و مدل‌سازی ۴۱

۳ فصل سوم — ترکیبیات (شمارش) ۷۴



گام به گام ریاضیات گسسته دوازدهم - فصل اول

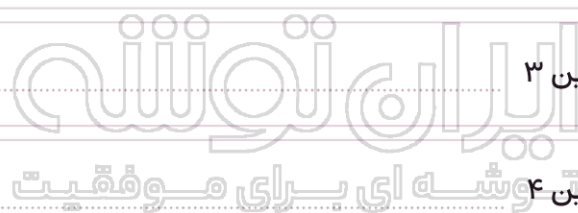
آشنایی با نظریه اعداد

فهرست

۱	صفحه ۰۲ پرسش — کافی بودن مثال برای اثبات	۱۰
۲	صفحه ۰۳ کار در کلاس — اثبات یا رد با مثال نقض	۱۰
۳	صفحه ۰۴ چرا؟ — اثبات $a \cdot b = 0$	۱۱
۴	صفحه ۰۵ کار در کلاس — اثبات مستقیم و بررسی حالت‌ها	۱۱
۵	صفحه ۰۶ چرا؟ — عامل‌های فرد	۱۲
۶	صفحه ۰۶ کار در کلاس — اثبات به روش برهان خلف	۱۲
۷	صفحه ۰۶ چرا؟ — هم‌ارزی $a = b$ و $a^2 = b^2$	۱۳
۸	صفحه ۰۷ کار در کلاس — هم‌ارزی و نابرابری	۱۳
۹	صفحه ۰۷ پرسش — هم‌ارزی دو شرط (مثال $a + 1/a \geq 2$)	۱۳
۱۰	صفحه ۰۸ کار در کلاس — هم‌ارزی زوج بودن n و n^2	۱۴
۱۱	صفحه ۰۸ تمرین — تمرین ۱ — اثبات به روش بازگشتی	۱۴
۱۲	صفحه ۰۸ تمرین — تمرین ۲	۱۵

۱۳	صفحه ۸۰ تمرین — تمرین ۳	۱۵
۱۴	صفحه ۸۰ تمرین — تمرین ۴	۱۵
۱۵	صفحه ۸۰ تمرین — تمرین ۵	۱۵
۱۶	صفحه ۸۰ تمرین — تمرین ۶	۱۶
۱۷	صفحه ۱۰۰ کار در کلاس — تکمیل رابطه عادی کردن	۱۶
۱۸	صفحه ۱۰۰ کار در کلاس — رابطه عادی کردن و توان	۱۷
۱۹	صفحه ۱۰۰ سؤال — $a \mid bc$ و عادی کردن یکی از عوامل	۱۷
۲۰	صفحه ۱۰۰ سؤال — $a \mid b$ و $ka \mid kb$	۱۷
۲۱	صفحه ۱۱ تکمیل اثبات — ویژگی ۲ (تعدی)	۱۸
۲۲	صفحه ۱۱ سؤال — $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$	۱۸
۲۳	صفحه ۱۱ تکمیل اثبات — ویژگی ۳ (مجموع و تفاضل)	۱۸
۲۴	صفحه ۱۱ سؤال — $a \mid b + c$	۱۸
۲۵	صفحه ۱۱ تکمیل اثبات — ویژگی ۴ و نتیجه آن	۱۹
۲۶	صفحه ۱۱ کار در کلاس — کار در کلاس ۱ — $a \mid 7m+6$ و $a \mid 6m+5$	۱۹
۲۷	صفحه ۱۲ کار در کلاس — کار در کلاس ۲ تا ۴	۱۹
۲۸	صفحه ۱۲ تکمیل مثال — $a \mid 9k+7$ و $a \mid 7k+6$	۱۹

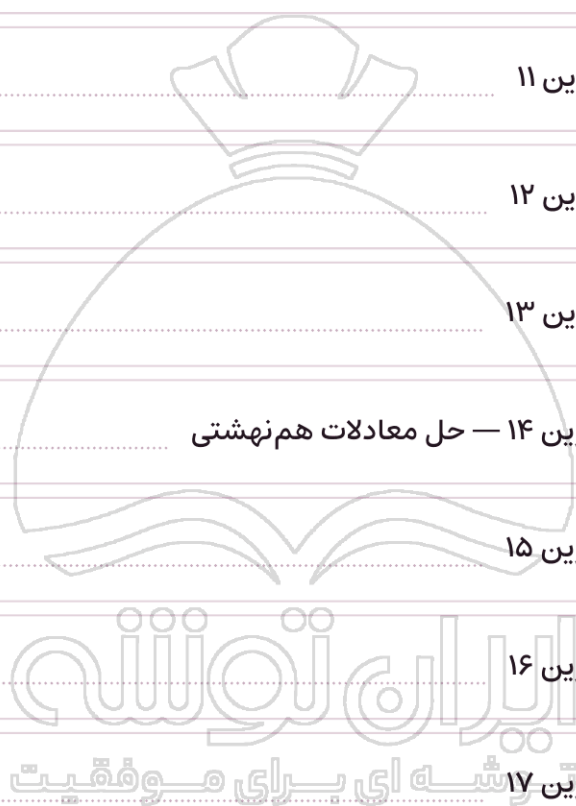
۲۹	صفحه ۱۲۰ چرا؟ — عاد کردن n ! توسط اعداد ۱ تا n	۲۰
۳۰	صفحه ۱۳۰ پرسش — توضیح شرط‌های b م و k م	۲۰
۳۱	صفحه ۱۳۰ کار در کلاس — b م و k م وقتی $a b$	۲۰
۳۲	صفحه ۱۴۰ کار در کلاس — $l = (p, a)$	۲۱
۳۳	صفحه ۱۴۰ تکمیل مثال — باقیمانده $5n - 2m$ بر ۱۷	۲۱
۳۴	صفحه ۱۵۰ مسئله — مسئله ۱ — زوج یا فرد بودن m	۲۱
۳۵	صفحه ۱۵۰ مسئله — مسئله ۲ — اعداد اول بزرگ‌تر از ۳	۲۲
۳۶	صفحه ۱۵۰ مسئله — مسئله ۳ — مربع عدد فرد	۲۲
۳۷	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۱	۲۳
۳۸	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۲	۲۳
۳۹	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۳	۲۳
۴۰	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۴	۲۴
۴۱	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۵	۲۴
۴۲	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۶	۲۴
۴۳	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۷	۲۴
۴۴	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۸	۲۵



۴۵	صفحه ۱۶ تمرین — تمرین ۹	۲۵
۴۶	صفحه ۱۶ تمرین — تمرین ۱۰	۲۵
۴۷	صفحه ۱۶ تمرین — تمرین ۱۱	۲۵
۴۸	صفحه ۱۷ تمرین — تمرین ۱۲	۲۶
۴۹	صفحه ۱۷ تمرین — تمرین ۱۳	۲۶
۵۰	صفحه ۱۷ تمرین — تمرین ۱۴	۲۶
۵۱	صفحه ۱۷ تمرین — تمرین ۱۵	۲۶
۵۲	صفحه ۱۷ تمرین — تمرین ۱۶ — ب م و ک م م	۲۷
۵۳	صفحه ۱۸ فعالیت — فعالیت ۱ تا ۴ — دسته اعداد با باقی مانده یکسان	۲۷
۵۴	صفحه ۱۹ تکمیل اثبات — ویژگی ۱ هم نهشتی	۲۸
۵۵	صفحه ۱۹ تکمیل اثبات — ویژگی ۲ هم نهشتی	۲۸
۵۶	صفحه ۲۰ تکمیل اثبات — ویژگی ۳ هم نهشتی	۲۸
۵۷	صفحه ۲۰ تکمیل اثبات — ویژگی ۴ هم نهشتی	۲۹
۵۸	صفحه ۲۱ تکمیل مثال — باقیمانده ۲۹۶ بر ۱۱	۲۹
۵۹	صفحه ۲۲ فعالیت — فعالیت — بسط در مبنای ده و باقی مانده تقسیم بر ۹	۲۹
۶۰	صفحه ۲۳ فعالیت — فعالیت (ادامه) — قاعده باقی مانده بر ۹	۳۰

۳۰	صفحه ۲۳ کار در کلاس — کار در کلاس ۱ — پیمانه ۳	۶۱
۳۱	صفحه ۲۳ کار در کلاس — کار در کلاس ۲ — پیمانه ۱۱	۶۲
۳۱	صفحه ۲۳ کار در کلاس — کار در کلاس ۳ — پیمانه های ۲، ۵ و ۱۰	۶۳
۳۱	صفحه ۲۴ فعالیت — فعالیت ۱ — روز هفته ۱۲ بهمن	۶۴
۳۲	صفحه ۲۴ فعالیت — فعالیت ۲ — ۲۲ بهمن	۶۵
۳۲	صفحه ۲۵ چرا؟ — معادله $6x \equiv 11 \pmod{9}$	۶۶
۳۳	صفحه ۲۶ فعالیت — فعالیت ۱ — وزن کردن کیسه ۱۹ کیلویی	۶۷
۳۳	صفحه ۲۷ کار در کلاس — کار در کلاس ۱ — حل معادله $4x + 5y = 9$	۶۸
۳۴	صفحه ۲۷ کار در کلاس — کار در کلاس ۲ — تعداد روش های وزن کردن ۱۹ کیلو	۶۹
۳۴	صفحه ۲۸ مثال — تکمیل راه حل: تبدیل ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی	۷۰
۳۴	صفحه ۲۸ مثال — تکمیل راه حل: سفارش غذای ۵ نفر در رستوران	۷۱
۳۵	صفحه ۲۹ تمرین — تمرین ۱	۷۲
۳۵	صفحه ۲۹ تمرین — تمرین ۲	۷۳
۳۵	صفحه ۲۹ تمرین — تمرین ۳	۷۴
۳۶	صفحه ۲۹ تمرین — تمرین ۴	۷۵
۳۶	صفحه ۲۹ تمرین — تمرین ۵	۷۶

۳۶		صفحه ۲۹۰ تمرین — تمرین ۶	۷۷
۳۶		صفحه ۲۹۰ تمرین — تمرین ۷	۷۸
۳۷		صفحه ۲۹۰ تمرین — تمرین ۸	۷۹
۳۷		صفحه ۲۹۰ تمرین — تمرین ۹	۸۰
۳۷		صفحه ۲۹۰ تمرین — تمرین ۱۰	۸۱
۳۷		صفحه ۲۹۰ تمرین — تمرین ۱۱	۸۲
۳۸		صفحه ۲۹۰ تمرین — تمرین ۱۲	۸۳
۳۸		صفحه ۲۹۰ تمرین — تمرین ۱۳	۸۴
۳۸		صفحه ۳۰۰ تمرین — تمرین ۱۴ — حل معادلات هم‌نهشتی	۸۵
۳۹		صفحه ۳۰۰ تمرین — تمرین ۱۵	۸۶
۳۹		صفحه ۳۰۰ تمرین — تمرین ۱۶	۸۷
۳۹		صفحه ۳۰۰ تمرین — تمرین ۱۷	۸۸
۳۹		صفحه ۳۰۰ تمرین — تمرین ۱۸	۸۹
۴۰		صفحه ۳۰۰ تمرین — تمرین ۱۹	۹۰
۴۰		صفحه ۳۰۰ تمرین — تمرین ۲۰	۹۱



آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

خیر. مثال‌ها فقط درستی گزاره را در چند حالت خاص نشان می‌دهند و هرگز نمی‌توانند درستی گزاره را برای همه حالت‌ها ثابت کنند؛ حتی با افزودن مثال‌های بیشتر هم نمی‌توان از درستی در چند مورد، درستی در همه موارد را نتیجه گرفت.

برای نمونه، گزاره ب برای $n = 1, 2, 3, 4$ درست است (۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ اول‌اند) ولی برای $n = 5$ داریم $2^{25} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ که اول نیست. پس یک مثال نقض برای رد گزاره کافی است، اما برای اثبات یک گزاره کلی باید استدلالی بنویسیم که همه حالت‌ها را پوشش دهد.

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ث) اگر برای سه مجموعه A ، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$.

ج) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

۱. درست است. دو عدد فرد را $2a+1$ و $2b+1$ می‌گیریم ($a, b \in \mathbb{Z}$). آنگاه $(2a+1) + (2b+1) = 2(a+b+1)$ که مضرب ۲ و در نتیجه زوج است.
۲. نادرست است. مثال نقض: $x=y=1$; آنگاه $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1/41$ ولی $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$.
۳. نادرست است. مثال نقض: $n=4$; عدد $2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5$ اول نیست.
۴. درست است. دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ (با $b, d \neq 0$ و صحیح بودن a, b, c, d) را در نظر می‌گیریم: صورت و مخرج کسر حاصل صحیح‌اند و $bd \neq 0$ ، پس حاصل گویاست. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
۵. نادرست است. مثال نقض: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$; در این صورت $A \cup B = \{1, 2\} = A \cup C$ ولی $B \neq C$.

6. درست است. فرض کنیم دو عدد طبیعی متوالی n و $n+1$ باشند، یعنی $k = n(n+1)$. آنگاه $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4k + 1$ که مربع کامل است.

چرا؟

صفحه ۴

۳

(مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$) الف) اگر $a = 0$ ، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟)

حکمی که باید ثابت شود به صورت « $a = 0$ یا $b = 0$ » است. وقتی $a = 0$ باشد، جمله نخست این «یا» درست است و گزاره ترکیبی « p یا q » هرگاه یکی از اجزایش درست باشد، درست است؛ بنابراین بدون هیچ محاسبه دیگری حکم برقرار می ماند.

کار در کلاس

صفحه ۵

۴

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.
ب) $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ است و $n \in S$ ، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

الف) اگر a زوج بود، ab هم زوج می شد؛ پس چون ab فرد است، هم a و هم b فرد هستند:
 $a = 2k+1$, $b = 2l+1$

$$a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 2(2k^2 + 2k + 2l^2 + 2l + 1)$$

که عددی زوج است.

ب) همه حالت های n در S را بررسی می کنیم:

n	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	زوج یا فرد	$n \in A$ ؟
۱	۱	فرد	—
۲	۹	فرد	—
۳	۳۶	زوج	بله
۴	۱۰۰	زوج	بله
۵	۲۲۵	فرد	—
۶	۴۴۱	فرد	—

تنها به ازای $n = 3$ و $n = 4$ حاصل عبارت زوج می‌شود و این دو عدد در A قرار دارند؛ پس هرگاه حاصل زوج باشد، $n \in A$.

۵

صفحه ۶

چرا؟

(مثال: a_1, a_2, a_3 اعداد صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.) ... پس هر سه عامل $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3$ هم باید عددی فرد باشند (چرا؟) و در نتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد.

حاصل ضرب چند عدد صحیح فقط وقتی فرد است که همه عواملها فرد باشند؛ زیرا اگر دست‌کم یکی از عامل‌ها زوج باشد (مضرب ۲)، کل حاصل ضرب مضرب ۲ و زوج می‌شود. پس فرض فرد بودن حاصل ضرب، فرد بودن هر سه عامل را نتیجه می‌دهد.

مجموع سه عدد فرد نیز فرد است (فرد + فرد = زوج و زوج + فرد = فرد). ولی چون b_i ها همان a_i ها با ترتیب دیگرند، مجموع $(a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$ زوج است. این تناقض نشان می‌دهد فرض (فرد بودن حاصل ضرب) نادرست است.

۶

صفحه ۶

کار در کلاس

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

(الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

(ب) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

(الف) فرض خلف: $\frac{1}{x}$ گویا باشد، یعنی $\frac{1}{x} = \frac{p}{q}$ با $p, q \in \mathbb{Z}$. چون $\frac{1}{x} \neq 0$ پس $p \neq 0$ و $x = \frac{q}{p}$ که نسبت دو عدد صحیح است و x را گویا می‌کند. این با گنگ بودن x در تناقض است. پس $\frac{1}{x}$ گنگ است.

(ب) فرض خلف: $f + g$ در $x = a$ پیوسته باشد. چون f هم در a پیوسته است و تفاضل دو تابع پیوسته در یک نقطه، پیوسته است، تابع $g = (f + g) - f$ در a پیوسته می‌شود. این با ناپیوسته بودن g در a تناقض دارد. پس $f + g$ در a ناپیوسته است.

(مثال: ترکیب دو شرطی $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ درست نیست چرا؟)

یک شرطی $a = b \Rightarrow a^3 = b^3$ و برعکس آن $a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$ هر دو درست‌اند، زیرا $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ و عامل دوم جز برای $a = b = 0$ مثبت است. اما در $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ جهت $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ نادرست است: برای $a = 2$ و $b = -2$ داریم $a^2 = b^2 = 4$ ولی $a \neq b$. (در واقع $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$). پس این ترکیب دو شرطی درست نیست.

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

(الف) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (ب) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

(الف) نادرست است. برای $a = -3$ و $b = 2$ داریم $a < b$ ولی $a^2 = 9 > 4 = b^2$. همچنین جهت عکس هم برقرار نیست: برای $a = 2$ و $b = -3$ داریم $a^2 = 4 < 9 = b^2$ ولی $a > b$.
(ب) درست است. چون $b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$ و $b^3 - a^3 = \left(a + \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$ برای $a \neq b$ همواره مثبت است، علامت $b^3 - a^3$ همان علامت $b - a$ است. پس $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$.

(مثال: اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$). ... این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم‌ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم‌ارز هستند؟ اثبات کدام یک ساده‌تر است؟

چون $a > 0$ است، ضرب دو طرف نابرابری $a + \frac{1}{a} \geq 2$ در عدد مثبت a جهت نابرابری را تغییر نمی‌دهد و نابرابری $a^2 + 1 \geq 2a$ به دست می‌آید؛ و برعکس، تقسیم بر $a > 0$ هم جهت را حفظ می‌کند. پس هر دو گزاره هم‌زمان درست یا هم‌زمان نادرست‌اند و هم‌ارزند.
اثبات گزاره دوم، یعنی $a^2 + 1 \geq 2a$ ساده‌تر است، زیرا کسر ندارد و با انتقال همه جمله‌ها به یک طرف به $(a - 1)^2 \geq 0$ می‌رسد که همواره درست است.

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

۱) نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۲) فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

الف) بله. اگر n زوج باشد، $n = 2k$ و $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ زوج است. برعکس اگر n زوج نباشد، $n = 2k + 1$ و $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ فرد است؛ یعنی (با عکس نقیض) اگر n^2 زوج باشد، n زوج است. پس دو گزاره هم‌ارزند.

ب) بله. طبق قضیه عمود منصف، هر نقطه روی عمود منصف پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است ($1 \Rightarrow 2$) و برعکس، نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن قرار دارد ($2 \Rightarrow 1$). چون هر دو جهت درست است، گزاره‌ها هم‌ارزند.

۱- گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت باشند داریم: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x, y و z داریم: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

الف) چون x و y هم‌علامت‌اند، $xy > 0$ و ضرب دو طرف در xy جهت نابرابری را حفظ می‌کند:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

آخرین گزاره همواره درست است؛ پس حکم ثابت شد.

ب) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$$

که همواره درست است.

پ) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$$

که همواره درست است.

۲- عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$.

$x = -1$: $x^2 = 1 < -1 = x^3$. (همچنین $x = \frac{1}{4} : \frac{1}{4} < \frac{1}{8}$ در واقع هر $x < 1$ با $x \neq 0$ جواب است.)

۳- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

فرض کنیم $\alpha + \beta = s$ با s گویا.

گنگ بودن $\alpha - \beta$: فرض خلف: $\alpha - \beta = r$ گویا باشد. با جمع کردن دو رابطه $2\alpha = r + s$ و در نتیجه $\alpha = \frac{r+s}{2}$ گویا می شود که با گنگ بودن α تناقض دارد.

گنگ بودن $\alpha + 2\beta$: فرض خلف: $\alpha + 2\beta = t$ گویا باشد. آنگاه $\beta = (\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = t - s$ گویا می شود که با گنگ بودن β تناقض دارد.

۴- آیا اعداد صحیحی مانند x و y وجود دارند که $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ ؟

بله. $xy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2$ ؛ یعنی هر زوج (x, y) که دست کم یکی از آنها صفر باشد، مثلاً $x = 0$ و $y = 5$: $0 + 25 = (0 + 5)^2$.

توشه ای برای موفقیت

۵- آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($a + b \neq 0$)

فرض کنیم چنین a و b وجود داشته باشند. با ضرب دو طرف در $ab(a + b) \neq 0$:

$$ab = (a + b)^2 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \Rightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = 0$$

مجموع دو عبارت نامنفی فقط وقتی صفر است که هر دو صفر باشند، پس $b = 0$ و سپس $a = 0$ که با ناصفر بودن a و b تناقض دارد. بنابراین چنین مقادیری وجود ندارد.

۶- گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.
 الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.
 ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

الف) درست است. فرض کنیم $n = 2k + 1$. آنگاه $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ و $n^3 = n^2 \cdot n$ حاصل ضرب دو عدد فرد است و فرد است (یا مستقیماً $n^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$).

ب) درست است. پنج عدد متوالی را $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ می‌گیریم. مجموع آنها $5n$ است و میانگین $\frac{5n}{5} = n$ که همان عدد وسطی است.

۱- با توجه به تعریف رابطه عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $7 \mid 63 \Leftrightarrow 63 = \dots \times \dots$

ب) $\dots \mid 91 \Leftrightarrow 91 = 7 \times \dots$

پ) $-6 \mid 54 \Leftrightarrow \dots = \dots \times (-6)$

ت) $5 \mid -35 \Leftrightarrow \dots = 5 \times \dots$

ث) $\dots \mid 18 \Leftrightarrow 0 = 18 \times \dots$

ج) $a = \dots$ یا $a \mid 1 \Rightarrow a = \dots$

چ) $\dots \mid 26$ و $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 \mid 26$

۱. $7 \mid 63 \Leftrightarrow 63 = 7 \times 9$ ☐

۲. $7 \mid 91 \Leftrightarrow 91 = 7 \times 13$ ☐

۳. $-6 \mid 54 \Leftrightarrow 54 = (-9) \times (-6)$ ☐

۴. $5 \mid -35 \Leftrightarrow -35 = 5 \times (-7)$ ☐

۵. هر عدد (مثلاً ۱۸) : $18 \mid 18 \Leftrightarrow 0 = 18 \times 0$ ؛ در واقع $a \mid 0$ برای هر عدد صحیح ناصفر a درست است ($q = 0$). ☐

۶. $a = -1$ یا $a \mid 1 \Rightarrow a = 1$ ☐

۷. $13 \mid 26$ و $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 \mid 26$ ☐

۲- با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که

$$3^5 \mid 3^9 \text{ و سپس ثابت کنید:}$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

$$(\text{راهنمایی: } 3^9 = 3^5 \times 3^4 \text{ و } 3^4 = q)$$

(الف) $3^9 = 3^5 \times 3^4$ ؛ اگر $3^4 = q$ قرار دهیم، $3^9 = 3^5 \cdot q$ با $q \in \mathbb{Z}$ ؛ پس طبق تعریف $3^5 \mid 3^9$.

حالت کلی: فرض کنیم $m \leq n$. آنگاه $a^n = a^m \cdot a^{n-m}$ و چون $n - m \geq 0$ عدد $q = a^{n-m}$ صحیح است. پس طبق تعریف عاد کردن $a^m \mid a^n$.

سؤال: آیا از اینکه $a \mid bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید:

$$(الف) 3 \mid 6 \times 9 \text{ و } 3 \mid 6$$

$$(ب) 3 \mid 6 \times 5 \text{ و } 3 \mid 6$$

$$(ج) 6 \mid 3 \times 4 \text{ و } 6 \mid 3$$

خیر؛ نمی‌توان نتیجه گرفت. در موارد (الف) و (ب) a یکی از دو عدد (یا هر دو) را عاد می‌کند، ولی در مورد (ج) داریم $12 = 3 \times 4 = 6 \mid 3 \times 4$ در حالی که 6 نه 3 را عاد می‌کند و نه 4 را. پس این مثال نقض نشان می‌دهد حکم در حالت کلی برقرار نیست. (اگر a عددی اول باشد این نتیجه درست است.)

سؤال: آیا از اینکه $a \mid b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka \mid kb$ ؟ آیا از $ka \mid kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a \mid b$ ؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$a \mid b \Rightarrow b = \overset{\text{برض رد } k}{\dots} \Rightarrow kb = \dots \Rightarrow \dots$$

$$ka \mid kb \Rightarrow kb = \overset{\text{میسقت رب } k}{\dots} \Rightarrow b = \dots \Rightarrow \dots$$

جهت اول: $a \mid b \Rightarrow b = aq \overset{*k}{\Rightarrow} kb = (ka)q \Rightarrow ka \mid kb$. این جهت برای هر عدد صحیح k برقرار است.

جهت دوم: $ka \mid kb \Rightarrow kb = (ka)q \overset{*k}{\Rightarrow} b = aq \Rightarrow a \mid b$. تقسیم بر k فقط برای $k \neq 0$ مجاز است؛ پس اگر $k \neq 0$ باشد از $ka \mid kb$ نتیجه می‌شود $a \mid b$.

ویژگی ۲: $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$ ؛ اثبات: (۱) $a \mid b \Rightarrow b = a q_1$ و $b \mid c \Rightarrow c = b q_2$ ؛
(جاهای خالی را پر کنید.) $c = b q_2 \xRightarrow{(1)} c = \dots q_2 \xRightarrow{q_1 q_2 = q} c = a \dots \Rightarrow a \mid c$

$$c = b q_2 \xRightarrow{(1)} c = (a q_1) q_2 = a (q_1 q_2) \xRightarrow{q_1 q_2 = q} c = a q$$

چون حاصل ضرب دو عدد صحیح، صحیح است، $q \in \mathbb{Z}$ و بنابراین $a \mid c$.

سؤال: با استفاده از خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن، نشان دهید که $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$ ؛ اثبات: طبق فرض
 $a \mid b$ و می‌دانیم $b \mid b^n$ ، پس **(تعدی)** $\dots \mid \dots \mid \dots$

طبق فرض $a \mid b$ از طرفی $b^n = b \cdot b^{n-1}$ و در نتیجه $b \mid b^n$. حال طبق خاصیت تعدی:
 $a \mid b \wedge b \mid b^n \xRightarrow{\text{تعدی}} a \mid b^n$

ویژگی ۳: $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$ ؛ اثبات: $a \mid b \Rightarrow b = \dots \times q_1$ ، $a \mid c \Rightarrow \dots = a q_2 \Rightarrow$
(جاهای خالی را پر کنید.) $b \pm c = \dots (q_1 \pm q_2) \Rightarrow a \mid \dots$

$$a \mid b \Rightarrow b = a \times q_1, \quad a \mid c \Rightarrow c = a q_2$$

$$\Rightarrow b \pm c = a q_1 \pm a q_2 = a (q_1 \pm q_2) = a q \Rightarrow a \mid b \pm c \quad (\text{چون } q = q_1 \pm q_2 \text{ صحیح است}).$$

توشه‌ای برای موفقیت

سؤال: آیا از اینکه $a \mid b + c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a \mid b$ یا $a \mid c$ ؟

خیر. مثال نقض: $a = 5, b = 2, c = 3$ ؛ در اینجا $5 \mid 2 + 3 = 5$ ولی $5 \nmid 2$ و $5 \nmid 3$. (اگر علاوه بر آن a یکی از دو عدد را عاد کند، آن‌گاه عدد دیگر هم بر a بخش پذیر است.)

ویژگی ۴: اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ آنگاه $|a| \leq |b|$. اثبات: چون $a \mid b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq 0$ پس $q \neq 0$ و چون

$$q \in \mathbb{Z} \text{ لذا } |q| \geq 1 \Rightarrow |a| \leq |a| \times |q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |b|$$

نتیجه: اگر $a \mid b$ و $a \mid b$ آنگاه $a = \pm b$. اثبات: $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$ ، $b \mid a \Rightarrow |b| \leq |a|$ (۴) $\Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

ویژگی ۴: $|a| \leq |aq| = |b|$ ؛ یعنی $|a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |b|$ ؛ زیرا $|q| \geq 1$ (زیرا $aq = b$).

نتیجه: $|a| \leq |b| \Rightarrow a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$ و $b \mid a \Rightarrow |b| \leq |a|$ پس $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$ (۴)

۱- اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(\nu m + 6)$ و $(\epsilon m + 5)$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

$$a \mid (\nu m + 6) \Rightarrow a \mid 42m + 36, \quad a \mid (\epsilon m + 5) \Rightarrow a \mid 42m + 35 \Rightarrow a \mid (42m + 36) - (42m + 35) = 1 \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

(چرا؟)

$$a \mid \nu m + 6 \Rightarrow a \mid 42m + 36, \quad a \mid \epsilon m + 5 \Rightarrow a \mid 42m + 35$$

$$\Rightarrow a \mid (42m + 36) - (42m + 35) = 1 \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

(چرا؟) تنها عددهای صحیحی که ۱ را عاد می کنند ۱ و -۱ هستند؛ زیرا طبق ویژگی ۴ باید $|a| \leq 1$ و $a \neq 0$ باشد.

۲- اگر $a \mid b$ نشان دهید که $a^n \mid b^n$.

۳- اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ نشان دهید که $ac \mid bd$.

۴- اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ نشان دهید که $a \mid mb \pm nc$ (از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

$$(۲) \quad a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \text{ پس } a^n \mid b^n \text{ چون } q^n \in \mathbb{Z}$$

$$(۳) \quad a \mid b \Rightarrow b = aq_1 \text{ و } c \mid d \Rightarrow d = cq_2 \text{ ؛ ضرب دو رابطه: } bd = (ac)(q_1q_2) \text{ و چون } q_1q_2 \text{ صحیح است، } ac \mid bd$$

$$(۴) \quad \text{طبق ویژگی ۱: } a \mid b \Rightarrow a \mid mb \text{ و } a \mid c \Rightarrow a \mid nc \text{ (مجموع و تفاضل): } a \mid mb \pm nc$$

مثال: اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k + 7)$ و $(7k + 6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 5$.

$$\Rightarrow a \mid 7k + 6 \Rightarrow a \mid 9 \times (7k + 6) \Rightarrow a \mid \dots + 54, \quad a \mid 9k + 7 \Rightarrow a \mid 7 \times (9k + 7) \Rightarrow a \mid 63k + \dots$$

$$a = \dots \text{ یا } a \mid (\dots + 54) - (63k + \dots) \Rightarrow a \mid 5 \Rightarrow a = \dots$$

$$a \mid 7(9k + 7) \Rightarrow a \mid 63k + 49, \quad a \mid 9(7k + 6) \Rightarrow a \mid 63k + 54$$

$$. (a \in \mathbb{N} \text{ چون } a = 5 \Rightarrow a \mid (63k + 54) - (63k + 49) \Rightarrow a \mid 5 \Rightarrow a = 1$$

چرا؟

صفحه ۱۲

۲۹

(خواندنی: می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ عدد ۱۰! را عاد می‌کند (چرا؟) و به طور کلی

می‌توان نوشت: $\forall k \leq n, k \mid n!$

چون $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ حاصل ضرب همه اعداد طبیعی از ۱ تا n است، هر عدد $k \leq n$ یکی از عامل‌های این حاصل ضرب است: $n! = k \times (1 \times 2 \times \dots \times (k-1) \times (k+1) \times \dots \times n)$ و عامل دوم عددی صحیح است؛ پس $k \mid n!$. برای $n = 10$ نیز هر عدد ۱ تا ۱۰ عدد ۱۰! را عاد می‌کند.

پرسش

صفحه ۱۳

۳۰

(تعریف ب م و ک م) توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

در ب م م (تعریف $(a, b) = d$): شرط (الف) $d \mid a, d \mid b$ تضمین می‌کند که d یک مقسوم‌علیه مشترک a و b است؛ و شرط (ب) $\forall m > 0: m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d$ نشان می‌دهد d از هر مقسوم‌علیه مشترک مثبت دیگر بزرگ‌تر یا مساوی است، یعنی «بزرگ‌ترین» است.

در ک م م (تعریف $[a, b] = c$): شرط (الف) $a \mid c, b \mid c$ تضمین می‌کند c یک مضرب مشترک a و b است؛ و شرط (ب) $\forall m > 0: a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m$ نشان می‌دهد c از هر مضرب مشترک مثبت دیگر کوچک‌تر یا مساوی است، یعنی «کوچک‌ترین» است.

کار در کلاس

صفحه ۱۳

۳۱

۱- با توجه به تعریف ب م و ک م ثابت کنید:

(الف) $a \mid b \Rightarrow (a, b) = a$

(ب) $a \mid b \Rightarrow [a, b] = b$

راهنمایی: برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که $|a| \mid a$ و $|a| \mid b$ و نیز برای هر $m > 0$ که $m \mid a$ و $m \mid b$ نشان دهیم $m \leq |a|$ و همین طور برای اثبات (ب).

الف) (شرط الف) $|a| \mid a$ (چون $a = (\pm 1)|a|$) و چون $a \mid b$ طبق تعدی $|a| \mid b$. (شرط ب) اگر $m \mid a$ و $m > 0$ ، پس $(a, b) = |a|$ ، آنگاه $m \mid a$ و طبق ویژگی ۴ $m \leq |a|$.

ب) (شرط الف) $a \mid |b|$ (چون $a \mid b$ و $|b| = \pm b$) و $b \mid |b|$. (شرط ب) اگر $m \mid a$ و $m \mid b$ و $m > 0$ ، آنگاه از $b \mid m$ و ویژگی ۴ نتیجه می شود $|b| \leq m$. پس $[a, b] = |b|$.

کار در کلاس

صفحه ۱۴

۳۲

۲- اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، ثابت کنید $(p, a) = 1$.

فرض کنید $(p, a) = d$ $\leftarrow d \mid p \stackrel{p \text{ اول}}{\Rightarrow} d = 1$ یا $d \mid a$ ؛ (۱) اگر $d = p \stackrel{(۱)}{\Rightarrow} p \mid a$ تناقض دارد (و این با فرض $p \nmid a$ ؛ پس فقط $d = \dots$ یا $(p, a) = \dots$

فرض کنیم $(p, a) = d$. آنگاه $d \mid p$ و $d \mid a$. چون p اول است، تنها مقسوم علیه های مثبت آن ۱ و p هستند؛ پس $d = 1$ یا $d = p$.

اگر $d = p$ باشد، از (۱) نتیجه می شود $p \mid a$ که با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد. پس فقط $d = 1$ ، یعنی $(p, a) = 1$.
تذکر: برای اعداد غیر اول این حکم برقرار نیست؛ مثلاً $(4, 6) = 2 \neq 1$ ولی $4 \nmid 6$.

تکمیل مثال

صفحه ۱۴

۳۳

مثال: اگر باقی مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را به دست آورید. — جاهای خالی راه حل کتاب را کامل کنید.

طبق فرض $m = 17q_1 + 5$ و $n = 17q_2 + 3$ ؛ پس $2m - 5n = 17(2q_1 - 5q_2) + 10 - 15 = 17(2q_1 - 5q_2) - 5$ ؛
 $= 17(2q_1 - 5q_2) - 17 + 17 - 5 = 17(2q_1 - 5q_2 - 1) + 12$
چون $0 \leq 12 < 17$ ، طبق قضیه تقسیم باقی مانده $r = 12$ است.

مسئله

صفحه ۱۵

۳۴

مسئله ۱: اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k+1$ (زوج یا فرد) می توان نوشت.

حل: کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیه تقسیم: $m = 2k + r, 0 \leq r < 2 \Rightarrow m = \dots$ یا

$$m = \dots$$

طبق قضیه تقسیم، اعداد صحیح یکتای k و r وجود دارند که $m = 2k + r$ و $0 \leq r < 2$. پس $r = 0$ یا $r = 1$ و در نتیجه $m = 2k$ (زوج) یا $m = 2k + 1$ (فرد).

مسئله

صفحه ۱۵

۳۵

مسئله ۲: ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود.

حل: کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت: $p = 6k$ (۱)،

$$(۲) p = 6k + 1, (۳) p = 6k + 2, (۴) p = 6k + 3, (۵) p = 6k + 4, (۶) p = 6k + 5$$

بررسی شش حالت:

○ حالت‌های (۱)، (۳) و (۵): $p = 6k, 6k + 2, 6k + 4$ همگی زوج‌اند؛ چون $p > 3$ است، p زوج بزرگ‌تر از ۲ می‌شود و اول نیست (تناقض).

○ حالت (۴): $p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ ؛ پس $3 \mid p$ و چون $p > 3$ ، p اول نیست (تناقض).

تنها حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌مانند، یعنی $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$. (عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست؛ مثلاً $25 = 6 \times 4 + 1$ اول نیست.)

مسئله

صفحه ۱۵

۳۶

مسئله ۳: ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(8t + 1)$ نوشته می‌شود (باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است).

اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم، یکی از چهار حالت $a = 4k, 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3$ رخ می‌دهد. حالت‌های $4k$ و $4k + 2 = 2(2k + 1)$ زوج‌اند؛ پس عدد فرد a یا $4k + 1$ است یا $4k + 3$.

$$\text{○ اگر } a = 4k + 1: a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8k' + 1$$

$$\text{○ اگر } a = 4k + 3: a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8t + 1$$

پس در هر دو حالت مربع عدد فرد به شکل $8t + 1$ است.

۱- فرض می‌کنیم $ab = cd$ و a, b, c, d اعداد صحیح و ناصفرند در این صورت پنج رابطه‌ی عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

چون $ab = cd$ و a, b, c, d ناصفرند، با توجه به تعریف عاد کردن (نمایش به صورت حاصل ضرب):

1. $ab = cd \Rightarrow a \mid cd$ ☐

2. $b \mid cd$ ☐

3. $c \mid ab$ ☐

4. $d \mid ab$ ☐

5. $ab \mid cd$ و $cd \mid ab$ ☐

(برای مثال از $ab = cd = 1 \times (ab)$ نیز رابطه‌هایی مانند $a \mid ab$ ، $c \mid cd$ به دست می‌آید.)

۲- ثابت کنید: اگر $a \mid b$ آنگاه $a \mid -b$ و $a \mid b$ و $-a \mid b$ و $-a \mid -b$.

$a \mid b \Rightarrow b = aq$

$-b = a(-q) \Rightarrow a \mid -b$ ☐

$b = (-a)(-q) \Rightarrow -a \mid b$ ☐

$-b = (-a)q \Rightarrow -a \mid -b$ ☐

زیرا $q, -q \in \mathbb{Z}$.

۳- اگر $a > 1$ و $a \mid 9k + 4$ و $a \mid 5k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

با تفريق: $a \mid 9k + 4 \Rightarrow a \mid 5(9k + 4) = 45k + 20$ و $a \mid 5k + 3 \Rightarrow a \mid 9(5k + 3) = 45k + 27$

$a \mid (45k + 27) - (45k + 20) = 7$

چون $a > 1$ و $a \mid 7$ ، $a = 7$ که عددی اول است.

۴- اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $۵ \mid ۴k+۱$ ، ثابت کنید: $۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$

فرض: $۴k+۱ = ۵t$ با $t \in \mathbb{Z}$ با مربع کردن: $۱۶k^۲ + ۸k + ۱ = ۲۵t^۲$

$$۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶ = (۱۶k^۲ + ۸k + ۱) + (۲۰k + ۵) = ۲۵t^۲ + ۵(۴k + ۱) = ۲۵t^۲ + ۲۵t = ۲۵(t^۲ + t)$$

که مضرب ۲۵ است؛ پس $۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$

۵- آیا از اینکه $a \mid b$ و $c \mid d$ ، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c \mid b+d$ ؟

خیر. مثال نقض: $a=۱, b=۲, c=۳, d=۳$ ؛ $a \mid b$ و $c \mid d$ ولی $a+c=۴ \nmid b+d=۵$

۶- ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولاند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولاند.

(راهنمایی: فرض کنید $d = (m, m+۱)$ و ثابت کنید $d \mid ۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$.)

الف) فرض کنیم $d = (m, m+۱)$. آنگاه $d \mid m$ و $d \mid m+۱$ ، پس $d \mid (m+۱) - m = ۱$ و چون d مثبت است $d=۱$.

ب) دو عدد فرد متوالی m و $m+۲$ را در نظر می‌گیریم و $d = (m, m+۲)$. آنگاه $d \mid (m+۲) - m = ۲$ ، پس $d=۱$ یا $d=۲$. چون m فرد است و $d \mid m$ ، d نمی‌تواند ۲ باشد؛ پس $d=۱$.

توشه‌ای برای موفقیت

۷- اگر p و q هر دو عدد اول باشند و $p \neq q$ ثابت کنید $(p, q) = ۱$.

فرض کنیم $d = (p, q)$. چون $d \mid p$ و p اول است، $d=۱$ یا $d=p$. اگر $d=p$ باشد، از $d \mid q$ نتیجه می‌شود $p \mid q$ و چون q اول است $p=۱$ یا $p=q$ که هر دو غیرممکن‌اند (p اول است پس $p \neq ۱$ و طبق فرض $p \neq q$). پس $d=۱$.

۸- اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^n$

$$a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n = a^m \cdot a^{n-m} q^n$$

چون $m \leq n$ ، عدد $a^{n-m} q^n$ صحیح است؛ پس $a^m \mid b^n$.

۹- اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۵۶ بیابید.

$$a = 8q_1 + 7 \Rightarrow 7a = 56q_1 + 49 \text{ و } a = 7q_2 + 5 \Rightarrow 8a = 56q_2 + 40$$

$$\text{با تفریق: } a = 8a - 7a = 56(q_2 - q_1) - 9 = 56(q_2 - q_1 - 1) + 47$$

چون $0 \leq 47 < 56$ ، باقی‌مانده تقسیم a بر ۵۶ برابر ۴۷ است. (بررسی: $47 = 7 \times 6 + 5 = 8 \times 5 + 7$)

۱۰- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $a+2 \mid b$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 3)$ بر ۸ را بیابید.

a فرد است پس $a+2$ فرد است و مقسوم‌علیه آن یعنی b نیز فرد است. مربع هر عدد فرد به شکل $8t+1$ است (مسئله ۳)؛ پس $a^2 = 8t_1 + 1$ و $b^2 = 8t_2 + 1$.

$$3 + b^2 + a^2 = 8(t_1 + t_2) + 5$$

بنابراین باقی‌مانده برابر ۵ است.

۱۱- اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3 \mid n^3 - n$.

(راهنمایی: برای n سه حالت $n = 3k$ و $n = 3k+1$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3 \mid n^3 - n$).

حالت‌های n را بر ۳ بررسی می‌کنیم. توجه کنید $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$.

○ اگر $n = 3k$: عامل n مضرب ۳ است، پس $3 \mid n^3 - n$.

○ اگر $n = 3k+1$: عامل $n-1 = 3k$ مضرب ۳ است.

- اگر $n = 3k + 2$: عامل $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ مضرب ۳ است.
در هر سه حالت، $3 \mid n^3 - n$.

تمرین

صفحه ۱۷

۴۸

۱۲- اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

فرض کنیم مقسوم a ، مقسوم علیه b ، خارج قسمت q و باقی مانده r باشد: $a = bq + r$. چون $n \mid a$ و $n \mid b$ ، طبق ویژگی ها $n \mid bq$ و $n \mid a - bq = r$ ؛ پس باقی مانده بر n بخش پذیر است.

تمرین

صفحه ۱۷

۴۹

۱۳- اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش پذیر است.

a را بر ۳ تقسیم می کنیم: $a = 3k$ یا $a = 3k + 1$ یا $a = 3k + 2$.

○ اگر $a = 3k$: خود a بر ۳ بخش پذیر است.

○ اگر $a = 3k + 1$: $a + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ بر ۳ بخش پذیر است.

○ اگر $a = 3k + 2$: $a + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2)$ بر ۳ بخش پذیر است.

تمرین

صفحه ۱۷

۵۰

۱۴- ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

دو عدد متوالی n و $n + 1$: $(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n + 1) + 1$

حاصل ضرب دو عدد متوالی $n(n + 1)$ زوج است؛ پس $3n(n + 1) + 1$ زوج و $3n(n + 1) + 1$ فرد است.

تمرین

صفحه ۱۷

۵۱

۱۵- ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۳! بخش پذیر است.

حاصل ضرب را $P = n(n + 1)(n + 2)$ می گیریم و $3! = 6$. از سه عدد متوالی دست کم یکی زوج و دقیقاً یکی مضرب ۳ است؛ پس $3 \mid P$ و $2 \mid P$.

اکنون $P = 2k$ و $3 \mid P$ چون $(2, 3) = 1$ ، 3 باید k را عاد کند ($k = 3l$) و $P = 6l$ ؛ پس $6 \mid P$.

تمرین

صفحه ۱۷

۵۲

۱۶- حاصل هر یک را به دست آورید: ($m \in \mathbb{Z}$)

(الف) $([m^2, m], m^5)$

(ب) $(2m, 6m^3)$

(پ) $(3m+1, 3m+2)$

(ت) $[m^4, (m^2, m^3)]$

(ث) $[(72, 48), 120]$

۱. $\circ$ چون $m \mid m^2$ ، $[m^2, m] = m^2$ ؛ سپس $m^2 \mid m^5$ و در نتیجه $(m^2, m^5) = m^2$ (به شرط $m \neq 0$).
۲. $\circ$ چون $2m \mid 6m^3 = 2m \cdot 3m^2$ ، طبق کار در کلاس ۱ $(|a|b \Rightarrow (a, b) = |a|)$ حاصل $|2m| = 2|m|$ است.
۳. $\circ$ فرض کنیم $d = (3m+1, 3m+2)$. آنگاه $d \mid (3m+2) - (3m+1) = 1$ و حاصل ۱ است.
۴. $\circ$ ابتدا $(m^2, m^3) = m^2$ (چون $m^2 \mid m^3$)؛ سپس $[m^4, m^2] = |m^4| = |m|^4$ (چون $m^2 \mid m^4$).
۵. $\circ$ $(72, 48) = 24$ و $[24, 120] = 120$ (چون $24 \mid 120$)؛ پاسخ ۱۲۰.

فعالیت

صفحه ۱۸

۵۳

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نماینده یک مجموعه از اعداد در نظر بگیریم که باقی‌مانده تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم:

۱- دو عضو دلخواه از مجموعه A_0 را در نظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟

۲- از مجموعه A_1 دو عضو دلخواه را در نظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟

۳- نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلی برای هر دو عضو دلخواه از A_1 اثبات کنید.

۴- آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعه A_2 همگی در تقسیم بر عدد ۴، باقی‌مانده یکسان دارند؟ در مورد مجموعه A_3 چه می‌توان گفت؟

(۱) بله. مثلاً دو عضو ۸ و ۲۰ از A_0 : $20 - 8 = 12 = 4 \times 3$ مضرب ۴ است. (در واقع $4(k_1 - k_2) = 4k_1 - 4k_2$).

(۲) بله. مثلاً ۵ و ۱۳ از A_1 : $13 - 5 = 8 = 4 \times 2$ و ۱ و ۲۱: $21 - 1 = 20 = 4 \times 5$.

(۳) فرض کنیم $a, b \in A_1$ ؛ آنگاه $a = 4k_1 + 1$ و $b = 4k_2 + 1$ و

$$a - b = (4k_1 + 1) - (4k_2 + 1) = 4(k_1 - k_2) = 4k_3 \Rightarrow 4 \mid a - b$$

(۴) بله؛ هر عضو A_2 به صورت $4k + 2$ است و باقی‌مانده تقسیم آن بر ۴ برابر ۲ است. تفاضل هر دو عضو آن $(4k_1 + 2) - (4k_2 + 2) = 4(k_1 - k_2)$ مضرب ۴ است. همین استدلال برای A_3 هم برقرار است: همه اعضای A_3 باقی‌مانده ۳ دارند و تفاضل هر دو عضو آن بر ۴ بخش‌پذیر است.

تکمیل اثبات

صفحه ۱۹

۵۴

ویژگی ۱: به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد. اثبات:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid a + c - b - c \Rightarrow m \mid (a + c) - (b + c) \Rightarrow (a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$$

(جاهای خالی را پر کنید.)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid a + c - b - c$$

$$\Rightarrow m \mid (a + c) - (b + c) \Rightarrow (a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$$

برای تفاضل نیز به همین ترتیب: $(a - c) - (b - c) = a - b$ مضرب m است؛ پس $a - c \equiv b - c$.

تکمیل اثبات

صفحه ۱۹

۵۵

ویژگی ۲: دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد. اثبات:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid \dots \times (a - b) \Rightarrow m \mid ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

(جاهای خالی را پر کنید.)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid c(a - b) \Rightarrow m \mid ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

(در این اثبات از ویژگی ۱ عادی استفاده شده است: $m \mid a - b \Rightarrow m \mid c(a - b)$)

تکمیل اثبات

صفحه ۲۰

۵۶

ویژگی ۳: دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. ($n \in \mathbb{N}$) اثبات: (از اتحاد

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$a \equiv b \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid (a - b)(\dots) \Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow \dots \equiv \dots$$

تذکر: می‌دانیم $3^2 \equiv 5^2 \pmod{4}$ ولی $3 \equiv 5 \pmod{4}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که ...

$$a \equiv b \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad (\text{زیرا عامل دوم یک عدد صحیح است}).$$

نتیجه تذکر: عکس ویژگی ۳ برقرار نیست؛ یعنی از $a^n \equiv b^n$ نمی‌توان نتیجه گرفت $a \equiv b$. (در اینجا

$$\pmod{4} \quad 9 \equiv 25 \pmod{4} \quad \text{ولی} \quad 3 \not\equiv 5 \pmod{4}.)$$

ویژگی ۴: دو طرف دو رابطه هم‌نهشتی را که پیمانه یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا

در هم ضرب کرد. اثبات (۱): $a \equiv b \Rightarrow m \mid \dots \xrightarrow{\times c} m \mid ac - bc$ ، $c \equiv d \Rightarrow m \mid \dots \xrightarrow{\times b} m \mid bc - bd$ ، $\Rightarrow c \equiv d \Rightarrow m \mid \dots \Rightarrow m \mid (ac - bc) + (bc - bd) \Rightarrow m \mid ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd$ اثبات (۲) به عهده شما.

اثبات (۱): $a \equiv b \Rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{\times c} m \mid ac - bc$ و $c \equiv d \Rightarrow m \mid c - d \xrightarrow{\times b} m \mid bc - bd$

$$\Rightarrow m \mid (ac - bc) + (bc - bd) \Rightarrow m \mid ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

اثبات (۲): $m \mid a - b$ و $m \mid c - d$ ؛ طبق ویژگی ۳ عاد کردن $m \mid (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ و در نتیجه

$$a + c \equiv b + d \pmod{m} \text{ . همچنین } m \mid (a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d) \text{ و } a - c \equiv b - d \pmod{m} .$$

نتیجه ۱: هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به دست آوریم.

مثال: $296 \equiv ? \pmod{11}$

$$296 = 11 \times 26 + 10$$

پس $296 \equiv 10 \pmod{11}$ و کوچک‌ترین عدد نامنفی هم‌نهشت با ۲۹۶ به پیمانه ۱۱ عدد ۱۰ است. (می‌توان گفت $296 \equiv -1 \pmod{11}$ نیز درست است.)

همان‌طور که در دوره ابتدایی آموختید عددنویسی در مبنای ۱۰ انجام می‌شود ... به عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را

$$1397 = 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 9 \times 10 + 7 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10 + 7$$

۱- هریک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط دهید:

$$1388109 = 1 \times 10^6 + \dots$$

$$13571122 = \dots$$

۲- باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1358112$ را بر عدد ۹ بیابید. می‌دانیم $10 \equiv 1 \pmod{9}$ و بنابر ویژگی‌های رابطه

هم‌نهشتی $10^n \equiv 1 \pmod{9}$ و داریم: $A = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + \dots + 1 \times 10 + 2$... با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم:

$$A \equiv 1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2$$

(۱)

$$1388109 = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10 + 9$$

$$13571122 = 1 \times 10^7 + 3 \times 10^6 + 5 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 2$$

(۲) چون $10 \equiv 1 \pmod{9}$ ، پس برای هر n داریم $10^n \equiv 1 \pmod{9}$ و با ضرب در ارقام:

$$A = 1 \times 10^7 + 3 \times 10^6 + 5 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 2 \equiv 1 + 3 + 5 + 7 + 1 + 1 + 2 = 21 \pmod{9}$$

یعنی $A \equiv 21 \pmod{9}$ و چون $21 = 2 \times 9 + 3$ ، باقی‌مانده تقسیم A بر ۹ برابر ۳ است. (بررسی:

$$13571122 = 9 \times 1509013 + 3$$

فعالیت

صفحه ۲۳

۶۰

اگر دقت کنید سمت راست هم‌نهمشتی اخیر مجموع ارقام A است. بنابراین می‌توان گفت «باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹». عدد n رقمی

$$A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\dots a_2a_1a_0}$$

سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلی بررسی کنید.

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 \Rightarrow A \equiv \dots$$

$$A = 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$$

چون $10^k \equiv 1 \pmod{9}$ برای هر k ، با ضرب در ارقام و جمع کردن:

$$A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 = a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9}$$

یعنی A با مجموع ارقام خود به پیمانه ۹ هم‌نهمشت است؛ پس باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹ همان باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقامش بر ۹ است و یک عدد بر ۹ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموع ارقامش بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

کار در کلاس

صفحه ۲۳

۶۱

۱- با توجه به اینکه $10^3 \equiv 1$ ، نتیجه می‌گیریم $10^k \equiv 1, \forall k \in \mathbb{N}$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌مانده تقسیم

عدد $A = 598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

$$A = 5 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 8 \equiv 5 + 9 + 8 + 3 + 4 + 8 = 37 \pmod{3}$$

چون $37 = 3 \times 12 + 1$ ، باقی‌مانده تقسیم A بر ۳ برابر ۱ است.

قاعده کلی: باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۳ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن بر ۳؛ بنابراین عددی بر ۳ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۲- می‌دانیم $10 \equiv -1$ ؛ بنابراین برای هر n زوج $10^n \equiv 1$ و برای هر n فرد $10^n \equiv -1$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانه ۱۱ و در بسط عدد $A = 4985327$ به جای توان‌های زوج عدد ۱۰، عدد یک و به جای توان‌های فرد عدد ۱۰، عدد (-۱) قرار دهیم باقی‌مانده تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A = 4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + \dots + 2 \times 10 + 7 \Rightarrow A \equiv 4 \times \dots + \dots \times (-1) + \dots \Rightarrow A \equiv 7 - 2 + 3 - 5 + 8 - 9 + 4 = 6 \Rightarrow r = \dots$$

$$A = 4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 7$$

$$A \equiv 4 \times 1 + 9 \times (-1) + 8 \times 1 + 5 \times (-1) + 3 \times 1 + 2 \times (-1) + 7 \pmod{11}$$

$$= 4 - 9 + 8 - 5 + 3 - 2 + 7 = 6$$

چون $0 \leq 6 < 11$ ، باقی‌مانده تقسیم A بر ۱۱ برابر ۶ است. (قاعده: از رقم یکان شروع می‌کنیم و ارقام را یکی در میان با علامت + و - جمع می‌کنیم.)

۳- می‌دانیم $10 \equiv 0$ و $10^5 \equiv 0$ و $10^2 \equiv 0$ در این صورت: $10^k \equiv \dots$ و $10^k \equiv \dots$ و $\forall k \in \mathbb{N}; 10^k \equiv \dots$ و $10^k \equiv \dots$ ؛ بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}$ به جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانه ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت: $\dots \equiv A^2$ و $\dots \equiv A^5$ و $A \equiv a_0$. نتیجه حاصل را برای یافتن باقی‌مانده تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

چون $10 \equiv 0$ در هر یک از این پیمانه‌ها (۱۰ بر ۲، ۵ و ۱۰ بخش‌پذیر است)، برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $10^k \equiv 0^k = 0$. پس

$$A = 10^{n-1}a_{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0 \equiv 0 \times a_{n-1} + \dots + 0 \times a_1 + a_0 = a_0.$$

یعنی (۲) $A \equiv a_0$ و (۵) $A \equiv a_0$ و (۱۰) $A \equiv a_0$.

- باقی‌مانده تقسیم عدد بر ۲ و ۵ و ۱۰ برابر باقی‌مانده تقسیم رقم یکان آن بر همان عدد است.
- بر ۲ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر رقم یکان آن زوج باشد (۰، ۲، ۴، ۶، ۸).
- بر ۵ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد.
- بر ۱۰ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر رقم یکان آن ۰ باشد.

۱- اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۲۹ روز در مهر و ۳۰ روز در آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصله ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $d = ۱۲ + ۳ \times ۳۰ + ۲۹ = ۱۳۱$ از طرفی $۱۳۱ \equiv \dots \pmod{۷}$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ... پنجشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن: $d = ۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۱۲ = ۱۳۱$ روز (باقی مانده مهر ۲۹ روز، آبان و آذر و دی هر کدام ۳۰ روز و ۱۲ روز از بهمن).
چون $۱۳۱ = ۷ \times ۱۸ + ۵$ یعنی $۱۳۱ \equiv ۵ \pmod{۷}$ ، با توجه به جدول (شنبه ۰، یکشنبه ۱، دوشنبه ۲، سه‌شنبه ۳، چهارشنبه ۴، پنجشنبه ۵، جمعه ۶) روز متناظر با عدد ۵ پنجشنبه است؛ پس ۱۲ بهمن آن سال پنجشنبه است.

فعالیت

صفحه ۲۴

۶۵

۲- از روی تقویم سال جاری روز جاری هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

پاسخ به تقویم همان سالی بستگی دارد که در آن کار می‌کنید؛ روش کار را برای سال ۱۴۰۵ نشان می‌دهیم. در این سال ۷ تیر یکشنبه است.

فاصله ۷ تیر تا ۲۲ بهمن را با شمارش روز سال به دست می‌آوریم: ۷ تیر روز $۱۰۰ = ۷ + ۳ \times ۳۱$ ام سال است و ۲۲ بهمن روز $۳۲۸ = ۲۲ + ۴ \times ۳۰ + ۶ \times ۳۱$ ام (شش ماه ۳۱ روزه، سپس مهر، آبان، آذر و دی ۳۰ روزه و ۲۲ روز از بهمن). پس $d = ۳۲۸ - ۱۰۰ = ۲۲۸$.

چون $۲۲۸ = ۷ \times ۳۲ + ۴$ یعنی $۲۲۸ \equiv ۴ \pmod{۷}$ ، چهار روز بعد از یکشنبه، یعنی پنجشنبه است. (با تقویم هم خوان است: ۲۲ بهمن ۱۴۰۵ برابر ۱۱ فوریه ۲۰۲۷ و پنجشنبه است.)

توشه ای برای موفقیت

چرا؟

صفحه ۲۵

۶۶

مثال: معادله $۶x \equiv ۱۱ \pmod{۹}$ دارای جواب نیست زیرا $۳ = (۶, ۹)$ و $۱۱ \nmid ۳$ و معادله $۴x \equiv ۱۸ \pmod{۶}$ دارای جواب است. چرا؟ این معادله را حل کنید:

$$۴x \equiv ۱۸ \pmod{۶} \Rightarrow ۲ \times ۲x \equiv ۲ \times ۹ \pmod{۶}, (۲, ۶) = ۲ \stackrel{\text{ی‌گزی}}{\Rightarrow} ۲x \equiv ۹ \pmod{۳} \Rightarrow ۲x \equiv ۹ + ۳ = ۱۲ \pmod{۳} \Rightarrow x = ۳k + ۶$$

طبق قضیه، معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ جواب دارد اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$. در معادله $(۶, ۴) = ۲$ داریم $۴x \equiv ۱۸ \pmod{۶}$ و $۱۸ \nmid ۲$ ؛ پس جواب دارد. (در معادله نخست $۱۱ \nmid ۳$ بود.)

حل: دو طرف و پیمانه را بر م م $۲ = (۴, ۶)$ تقسیم می‌کنیم (ویژگی ۷): $۲x \equiv ۹ \pmod{۳}$. چون $۹ \equiv ۰ \pmod{۳}$ ،
 $۲x \equiv ۰ \pmod{۳}$ و چون $(۲, ۳) = ۱$ حذف ۲ مجاز است: $x \equiv ۰ \pmod{۳}$
 جواب عمومی: $x = ۳k$ ، $k \in \mathbb{Z}$ (که همان $x = ۳k' + ۶$ است).

فعالیت

صفحه ۲۶

۶۷

۱- آیا می‌توانید یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)

یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنه ۴ کیلویی و یک وزنه ۳ کیلویی است. $۴ \times \dots + ۱ \times ۳ = \dots$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟ $۱۹ = ۱ \times \dots + \dots \times ۵$ (در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادله $۴x + ۳y = ۱۹$ هستید. x تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به کار رفته است)

۲- اگر بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟ باید جواب‌هایی چون $x, y \in W$ بیابیم که $\dots \times x + \dots \times y = \dots$ چون مجموع دو عدد زوج همواره ... است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

(۱) بله. جواب اول: $۴ \times ۴ + ۱ \times ۳ = ۱۹$.

جواب دیگر: $۱ \times ۴ + ۵ \times ۳ = ۱۹$ (یک وزنه ۴ کیلویی و پنج وزنه ۳ کیلویی).

(۲) باید $۲x + ۴y = ۱۹$ ($x, y \in W = \{۰, ۱, ۲, \dots\}$) داشته باشیم. سمت چپ $۲x + ۴y = ۲(x + ۲y)$ مجموع دو عدد زوج و همواره زوج است، ولی ۱۹ فرد است؛ پس چنین x و y ای در W وجود ندارد و توزین با وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی ممکن نیست.

کار در کلاس

صفحه ۲۷

۶۸

۱- با تبدیل معادله سیاله $۴x + ۵y = ۹$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله سیاله را بیابید.

$$\begin{aligned} 4x + 5y = 9 &\Rightarrow 4x \equiv \dots \Rightarrow 4x \equiv 9 - \dots \Rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv \dots \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + \dots \\ &\Rightarrow 4(5k + 1) + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 5y = 5 \Rightarrow 4k + y = 1 \Rightarrow y = \dots k + 1 \end{aligned}$$

$$4x + 5y = 9 \Rightarrow 4x \equiv 9 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 9 - 5 = 4 \pmod{5}$$

چون $(4, 5) = 1$ ، حذف ۴ مجاز است: $x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 1$

$$4(5k + 1) + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 5y = 5 \Rightarrow 4k + y = 1 \Rightarrow y = -4k + 1$$

جواب عمومی: $x = 5k + 1, y = -4k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

(بررسی: $4(5k+1) + 5(-4k+1) = 20k+4 - 20k+5 = 9$)

کار در کلاس

صفحه ۲۷

۶۹

۲- در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد. کافی است جواب‌های عمومی معادله $4x + 3y = 19$ را (برحسب k) بیابیم و به‌ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت‌ها را بشماریم:

$$4x + 3y = 19 \Rightarrow 4x \equiv 19 \pmod{3} \Rightarrow 4x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k + 1 \Rightarrow 4(3k + 1) + 3y = 19 \Rightarrow \dots \Rightarrow y = -4k + 5$$

$$4x + 3y = 19 \Rightarrow 4x \equiv 19 \pmod{3} \Rightarrow 4x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k + 1$$

$$4(3k + 1) + 3y = 19 \Rightarrow 12k + 4 + 3y = 19 \Rightarrow 12k + 3y = 15 \Rightarrow 4k + y = 5 \Rightarrow y = -4k + 5$$

شرط $x \geq 0$ یعنی $k \geq 0$ (برای k صحیح) و شرط $y \geq 0$ یعنی $k \leq 1$. پس $k \in \{0, 1\}$:

$$k = 1 \Rightarrow (x, y) = (4, 1); k = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, 5)$$

بنابراین کیسه را به دو طریق می‌توان وزن کرد (یک وزنه ۴ کیلویی و پنج وزنه ۳ کیلویی، یا چهار وزنه ۴ کیلویی و یک وزنه ۳ کیلویی).

مثال

صفحه ۲۸

۷۰

(ادامه مثال صفحه قبل) به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

جاهای خالی راه‌حل را پر کنید: $x \equiv \dots \pmod{5}$, $18 \equiv \dots \pmod{5}$ و $2x \equiv 18 \pmod{5}$, $2x + 5y = 18000 \Rightarrow 2x + 5y = \dots$

ابتدا طرفین را بر ۱۰۰۰ تقسیم می‌کنیم: $2x + 5y = 18$

در پیمانه ۵: $2x \equiv 18 \equiv 3 \pmod{5}$ و چون $3 \equiv 8 = 2 \times 4 \pmod{5}$, پس $2x \equiv 2 \times 4 \pmod{5}$ و با ساده کردن ۲ (که با ۵ نسبت به هم اول است): $x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 4$

$$2(5k + 4) + 5y = 18 \Rightarrow 10k + 8 + 5y = 18 \Rightarrow 10k + 5y = 10 \Rightarrow y = -2k + 2$$

برای نامنفی بودن x و y فقط $(x=4, y=2)$ و $(x=9, y=0)$ قابل قبول است. پس به دو طریق: ۴ اسکناس ۲۰۰۰ تومانی و ۲ اسکناس ۵۰۰۰ تومانی، یا ۹ اسکناس ۲۰۰۰ تومانی.

مثال

صفحه ۲۸

۷۱

در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

جاهای خالی راه حل را پر کنید: اگر تعداد چلو خورش قورمه سبزی و چلو خورش قیمه سفارش داده شده را به ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت:

$$x + y = 5 \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{1} \Rightarrow x = k + \dots \Rightarrow k + \dots + y = \dots \Rightarrow y = \dots$$

معادله $x + y = 5$ را حل می‌کنیم. در پیمانه ۱ هر دو عدد هم‌نهشت‌اند، پس $x \equiv 5 \pmod{1} \Rightarrow x = k + 5$

$$k + 5 + y = 5 \Rightarrow y = -k$$

چون x و y اعدادی نامنفی هستند پس باید $k \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.

تمرین

صفحه ۲۹

۷۲

۱- عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

مجموع ارقام: $1 + 3 + 9 + 8 = 21$ و $21 = 2 \times 9 + 3$ پس $1398 \equiv 3 \pmod{9}$ و عدد ۱۳۹۸ به دسته $[3]_9$ تعلق دارد. (بررسی: $1398 = 9 \times 155 + 3$)

تمرین

صفحه ۲۹

۷۳

۲- اگر $k \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است $k \equiv 0$ یا $k \equiv 1$ یا $k \equiv 2$ (به عبارت دیگر، $k \in [0]_3$ یا $k \in [1]_3$ یا $k \in [2]_3$).

طبق قضیه تقسیم، k را بر ۳ تقسیم می‌کنیم: $k = 3q + r$ ، $0 \leq r < 3$ و باقی‌مانده r یکتاست. چون $k \equiv r \pmod{3}$ ، پس k با r هم‌نهشت است و r فقط یکی از ۰، ۱ یا ۲ است. اگر دو حالت همزمان رخ دهد، مثلاً $k \equiv r_1$ و $k \equiv r_2$ با $r_1 \neq r_2$ ، آنگاه $3 \mid r_1 - r_2$ ولی $0 < |r_1 - r_2| < 3$ که ممکن نیست. پس تنها یکی از سه حالت برقرار است (کلاس‌های $[0]_3$ ، $[1]_3$ ، $[2]_3$ ناسازگار و افراز $\mathbb{Z}$ هستند).

تمرین

صفحه ۲۹

۷۴

۳- اگر $a \equiv b$ و $n \mid m$ ثابت کنید $a \equiv b \pmod{m}$.

$a \equiv b \pmod{n}$ یعنی $n \mid a - b$ ؛ طبق خاصیت تعدی $n \mid m$ و $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b$

۴- فرض کنیم $a \equiv b \pmod{m}$ و $b \equiv c \pmod{n}$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \equiv c \pmod{d}$.

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b$ و چون $d \mid m$ ، $d \mid a - b$. همچنین $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow n \mid b - c$ و $d \mid n$ ، پس $d \mid b - c$.

با جمع: $d \mid (a - b) + (b - c) = a - c$ ، یعنی $a \equiv c \pmod{d}$.

۵- ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \equiv b \pmod{m}$.

فرض کنیم $a = mq_1 + r$ و $b = mq_2 + r$ (باقی‌مانده‌ها برابرند). آن‌گاه $a - b = m(q_1 - q_2)$ و در نتیجه $m \mid a - b$ ، یعنی $a \equiv b \pmod{m}$.

۶- عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

عکس: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آن‌گاه باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر m مساوی‌اند.

اثبات: فرض کنیم $a = mq_1 + r_1$ و $b = mq_2 + r_2$ با $0 \leq r_1, r_2 < m$. آن‌گاه $a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$ و چون $m \mid a - b$ ، $m \mid r_1 - r_2$. از طرفی $|r_1 - r_2| < m$ ؛ تنها مضرب m با قدر مطلق کمتر از m عدد صفر است، پس $r_1 = r_2$.

۷- با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام یعنی،

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$.

از بسط دو جمله‌ای:

$$(a + b)^n - a^n - b^n = \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1}$$

هر جمله سمت راست دارای عامل a و عامل b است (توان هر دو دست‌کم ۱ است) و ضریب دو جمله‌ای عددی صحیح است؛ پس هر جمله مضرب ab است و در نتیجه $ab \mid (a + b)^n - (a^n + b^n)$ ، یعنی

$$(a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}.$$

۸- با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.

در تمرین ۷ قرار می دهیم $a = ۱۲, b = ۱۱, n = ۵۱$ ؛ آنگاه $ab = ۱۳۲$ و $a + b = ۲۳$ ، پس $(۱۳۲ \mid ۲۳^{۵۱} + ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱})$ ، یعنی عدد $۲۳^{۵۱} - ۱۲^{۵۱} - ۱۱^{۵۱}$ بر ۱۳۲ بخش پذیر است. (عدد داده شده در کتاب قرینه همین عدد است و بخش پذیری بر ۱۳۲ با تغییر علامت حفظ می شود.)

۹- باقی مانده تقسیم عدد $A = (۲^{۱۱} + ۷) \times ۹$ را بر ۲۳ بیابید.

$$۲^{۱۱} = ۲۰۴۸ = ۲۳ \times ۸۹ + ۱ \Rightarrow ۲^{۱۱} \equiv ۱ \pmod{۲۳}$$

$$۲^{۱۱} + ۷ \equiv ۸ \pmod{۲۳} \Rightarrow A \equiv ۸ \times ۹ = ۷۲ = ۳ \times ۲۳ + ۳ \pmod{۲۳}$$

باقی مانده تقسیم A بر ۲۳ برابر ۳ است.

۱۰- اگر دو عدد $(۵ - ۳a)$ و $(۷ - ۴a)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(۶ + ۹a)$ را به دست آورید.

رقم یکان برابر یعنی $(۱۰ \mid ۷ - ۴a \equiv ۵ - ۳a)$ ، پس $a \equiv ۲ \pmod{۱۰}$.

در نتیجه $(۱۰ \mid ۶ + ۹a \equiv ۶ + ۱۸ = ۲۴ \equiv ۴)$ و رقم یکان $۶ + ۹a$ برابر ۴ است.

(بررسی: $-۱ = ۵ - ۶ = -۱$ و $a = ۲ \Rightarrow ۱ - ۷ = -۶$ هم رقم یکان اند و $۶ + ۱۸ = ۲۴$.)

توشه ای برای موفقیت

۱۱- باقی مانده تقسیم عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \dots + ۵۰۰!$ را بر ۱۰ به دست آورید (رقم یکان A را بیابید).

برای $n \geq ۵$ عدد $n!$ شامل عامل های ۲ و ۵ است و بر ۱۰ بخش پذیر است: $n! \equiv ۰ \pmod{۱۰}$. پس فقط چهار جمله اول مؤثرند:

$$A \equiv ۱! + ۲! + ۳! + ۴! = ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ = ۳۳ \equiv ۳ \pmod{۱۰}$$

باقی مانده (و رقم یکان A) برابر ۳ است.

۱۲- جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $7x + 5y = 11$ را بدست آورید.

$$7x + 5y = 11 \Rightarrow 7x \equiv 11 \pmod{5} \Rightarrow 2x \equiv 1 \pmod{5}$$

دو طرف را در ۳ ضرب می‌کنیم ($2 \times 3 = 6 \equiv 1$): $x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3$

$$7(5k + 3) + 5y = 11 \Rightarrow 35k + 21 + 5y = 11 \Rightarrow 5y = -35k - 10 \Rightarrow y = -7k - 2$$

جواب عمومی: $(k \in \mathbb{Z})$ ، $x = 5k + 3$ ، $y = -7k - 2$. (بررسی: $(7 \times 3 + 5 \times (-2)) = 21 - 10 = 11$)

۱۳- به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

x تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی و y تعداد ۵۰۰۰ تومانی است: $2x + 5y = 29 \Rightarrow 2x + 5y = 29$ با $x, y \geq 0$

$$2x \equiv 29 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 2$$

$$2(5k + 2) + 5y = 29 \Rightarrow 10k + 5y = 25 \Rightarrow y = -2k + 5$$

شرط $x \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$ و شرط $y \geq 0 \Rightarrow k \leq 2$ پس $k = 0, 1, 2$ و جواب‌ها $(x, y) = (2, 5)$ ، $(7, 3)$ و $(12, 1)$ هستند. به ۳ طریق می‌توان این کار را انجام داد.

۱۴- معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را بدست آورید.

(الف) $423x \equiv 79 \pmod{11}$

(ب) $8x \equiv 20 \pmod{12}$

(ج) $51x \equiv 11 \pmod{6}$

(الف) $423x \equiv 79 \pmod{11}$ و $79 = 11 \times 7 + 2$ ؛ پس $5x \equiv 2 \pmod{11}$. چون $5 \times 9 = 45 \equiv 1 \pmod{11}$ ، دو طرف را در ۹ ضرب می‌کنیم: $(11) \Rightarrow x \equiv 18 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 7 \pmod{11}$ ؛ جواب عمومی $x = 11k + 7$. (بررسی: $423 \times 7 = 2961 = 11 \times 269 + 2$)

(ب) $(8, 12) = 4$ و $20 \mid 4$ پس جواب دارد. تقسیم بر ۴: $(3) \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 2x \equiv 5 \pmod{3}$ ؛ جواب عمومی $x = 3k + 1$

(ج) $(51, 6) = 3$ و $11 \not\equiv 3 \pmod{3}$ ؛ معادلهٔ $3x \equiv 5 \pmod{6}$. چون $(3, 6) = 3$ و $3 \nmid 11$ یا $(51, 6) = 3$ معادله جواب ندارد.

۱۵- اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

فاصله ۱ مهر تا ۷ اسفند: ماه‌های مهر، آبان، آذر، دی و بهمن هر کدام ۳۰ روز و ۶ روز از اسفند:
 $d = 5 \times 30 + 6 = 156$

$$156 = 7 \times 22 + 2 \Rightarrow 156 \equiv 2 \pmod{7}$$

دو روز بعد از یکشنبه، یعنی سه‌شنبه؛ ۷ اسفند در آن سال سه‌شنبه است.

۱۶- اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

از ۳۱ مرداد تا ۱۲ بهمن: شهریور ۳۱ روز، مهر ۳۰، آبان ۳۰، آذر ۳۰، دی ۳۰ و ۱۲ روز بهمن:
 $d = 31 + 4 \times 30 + 12 = 163$

$$163 = 7 \times 23 + 2 \Rightarrow 163 \equiv 2 \pmod{7}$$

یعنی ۱۲ بهمن دو روز بعد از ۳۱ مرداد است؛ پس ۳۱ مرداد دو روز قبل از جمعه، یعنی چهارشنبه است.

۱۷- همه اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

$$(11) \quad 5a + 9 \equiv -9 \pmod{11}$$

ضرب در ۹ ($5 \times 9 \equiv 1$): $(11) \quad a \equiv 18 \pmod{11}$ ؛ پس $a = 11k + 7$ ، $k \in \mathbb{Z}$. (بررسی: $5 \times 7 + 9 = 44 = 11 \times 4$)

۱۸- به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$$3x + 5y = 23 \quad \text{با } x, y \geq 0: x = 5k + 1; x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 3x \equiv 23 \pmod{5}$$

$$3(5k + 1) + 5y = 23 \Rightarrow 15k + 5y = 20 \Rightarrow y = -3k + 4$$

شرط‌ها: $k \geq 0$ و $k \leq 1$ ؛ جواب‌ها $(x, y) = (1, 4)$ و $(6, 1)$ ؛ یعنی ۲ طریق.

۱۹- به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

اگر x و y تعداد شاخه‌های دو نوع گل باشند: $x + y = 9$ با $x, y \geq 0$ ؛ $x = k$ ، $y = 9 - k$ ؛ $k = 0, 1, \dots, 9$.
بنابراین به ۱۰ طریق می‌توان دسته گل را انتخاب کرد. (اگر دسته گل باید از هر دو نوع گل داشته باشد، ۸ طریق خواهد بود.)

۲۰- شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

x تعداد سؤالات ۷ امتیازی و y تعداد سؤالات ۹ امتیازی پاسخ داده شده: $7x + 9y = 73$ با $x, y \geq 0$.

$$7x \equiv 73 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{9} \Rightarrow x = 9k + 4$$

$$7(9k + 4) + 9y = 73 \Rightarrow 63k + 28 + 9y = 73 \Rightarrow y = -7k + 5$$
 شرط $x \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$ و شرط $y \geq 0 \Rightarrow k \leq 0$ ؛ پس تنها $k = 0$ ؛ $x = 4$ و $y = 5$.
 فقط یک حالت وجود دارد: ۴ سؤال ۷ امتیازی و ۵ سؤال ۹ امتیازی. ($4 \times 7 + 5 \times 9 = 28 + 45 = 73$).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضیات گسسته دوازدهم - فصل دوم

گراف و مدل سازی

فهرست

۹۲	صفحه ۳۲۰ پرسش — مسئله پل های کونیگسبرگ	۴۵
۹۳	صفحه ۳۳۰ مثال — گراف نتایج بازی های فوتبال	۴۵
۹۴	صفحه ۳۴۰ مسئله — طرح سؤال دیگر از نمودار مثال قبل	۴۵
۹۵	صفحه ۳۴۰ کار در کلاس — رسم گراف از روی مجموعه رؤوس و یال ها	۴۵
۹۶	صفحه ۳۵۰ توجه — نوشتن $V(G)$ و $E(G)$ برای دو شکل	۴۶
۹۷	صفحه ۳۶۰ کار در کلاس — درجه رأس های شکل ۸	۴۶
۹۸	صفحه ۳۸۰ مسئله — درجه رأس در G و مکمل آن	۴۷
۹۹	صفحه ۳۸۰ مسئله — گراف کامل	۴۷
۱۰۰	صفحه ۳۸۰ مسئله — دور به طول ۵ در شکل ۱۷	۴۸
۱۰۱	صفحه ۳۹۰ فعالیت — رسم سه گراف و رابطه مجموع درجات با تعداد یال ها	۴۸
۱۰۲	صفحه ۳۹۰ فعالیت — اثبات رابطه مجموع درجات رؤوس	۴۹
۱۰۳	صفحه ۴۰۰ اثبات — چرای اثبات نتیجه: تعداد رأس های فرد زوج است	۵۰

۱۰۴	صفحه ۴۰. فعالیت — دوستی در یک جمع ۷ نفره	۵۰
۱۰۵	صفحه ۴۰. فعالیت — وجود مسیری به طول حداقل ۴	۵۱
۱۰۶	صفحه ۴۰. کار در کلاس — تعداد یال‌های گراف k -منتظم و گراف کامل	۵۱
۱۰۷	صفحه ۴۱. تمرین — تمرین ۱: گراف با $V(G)$ و $E(G)$ مفروض	۵۲
۱۰۸	صفحه ۴۱. تمرین — تمرین ۲: شکل ۲۱	۵۲
۱۰۹	صفحه ۴۱. تمرین — تمرین ۳: گراف با $NG(v_1)$ پنج‌عضوی	۵۳
۱۱۰	صفحه ۴۱. تمرین — تمرین ۴: رسم گراف از مجموعه‌های همسایگی	۵۳
۱۱۱	صفحه ۴۱. تمرین — تمرین ۵: مکمل گراف شکل ۲۲	۵۴
۱۱۲	صفحه ۴۲. تمرین — تمرین ۶: Δ و δ گراف K_p با ۳۶ یال	۵۴
۱۱۳	صفحه ۴۲. تمرین — تمرین ۷: رسم گراف‌های کامل مرتبه ۱ تا ۵	۵۴
۱۱۴	صفحه ۴۲. تمرین — تمرین ۸: گراف r -منتظم از مرتبه n	۵۴
۱۱۵	صفحه ۴۲. تمرین — تمرین ۹: گراف ۵ رأسی با رأس‌های تنها	۵۶
۱۱۶	صفحه ۴۲. تمرین — تمرین ۱۰: هفت نفر و دست‌دادن	۵۷
۱۱۷	صفحه ۴۲. تمرین — تمرین ۱۱: دوست‌ها در شبکه اجتماعی	۵۷
۱۱۸	صفحه ۴۲. تمرین — تمرین ۱۲: گراف ۹ رأسی با دورهای مشخص	۵۷
۱۱۹	صفحه ۴۲. تمرین — تمرین ۱۳: مسیر در گراف با $\delta(G) \geq K$	۵۸

۱۲۰	صفحه ۰۴۲ تمرین — تمرین ۱۴: گراف ۴ رأسی K-منتظم	۵۹
۱۲۱	صفحه ۰۴۲ تمرین — تمرین ۱۵: گراف ۵ رأسی K-منتظم	۵۹
۱۲۲	صفحه ۰۴۴ پرسش — مدل سازی تقاطع ها و دستگاه های خودپرداز با گراف	۶۰
۱۲۳	صفحه ۰۴۵ پرسش — چرای مدل سازی ایستگاه های رادیویی	۶۰
۱۲۴	صفحه ۰۴۶ کار در کلاس — مجموعه های احاطه گر در گراف شکل ۵	۶۰
۱۲۵	صفحه ۰۴۷ کار در کلاس — تبدیل مجموعه های احاطه گر به مینیمال	۶۲
۱۲۶	صفحه ۰۴۷ کار در کلاس — مجموعه های احاطه گر در شکل ۷	۶۲
۱۲۷	صفحه ۰۴۷ فعالیت — سقف و کف (نماد جزء صحیح) و تاکسی کارمندان	۶۳
۱۲۸	صفحه ۰۴۸ فعالیت — حداقل رأس لازم برای احاطه شکل ۸ (گراف ۱۰ رأسی)	۶۴
۱۲۹	صفحه ۰۴۹ کار در کلاس — مجموعه های احاطه گر در شبکه ۱۶ رایانه ای (شکل ۹)	۶۵
۱۳۰	صفحه ۰۵۰ کار در کلاس — همه ۷-مجموعه های مثال قبل و عدد احاطه گری شکل ۱۱	۶۷
۱۳۱	صفحه ۰۵۱ فعالیت — محاسبه ۷ برای شکل ۱۳ (پاسخ چراها)	۶۷
۱۳۲	صفحه ۰۵۲ تمرین — تمرین ۱: ایستگاه های رادیویی	۶۸
۱۳۳	صفحه ۰۵۲ تمرین — تمرین ۲: بیمارستان های بین روستاها	۶۸
۱۳۴	صفحه ۰۵۲ تمرین — تمرین ۳: عدد احاطه گری پنج گراف	۶۹
۱۳۵	صفحه ۰۵۳ تمرین — تمرین ۴: $\gamma(G) = 1$	۷۰

۱۳۶ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۵: $\gamma(C_n)$ و $\gamma(P_n)$ ۷۰

۱۳۷ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۶: کران پایین برای گراف k -منتظم ۷۰

۱۳۸ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۷: گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی با کمترین γ ۷۰

۱۳۹ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۸: گراف ۶ رأسی با γ مشخص و روش رسم گراف n رأسی با $\gamma = k$ ۷۱

۱۴۰ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۹: γ -مجموعه یکتا و غیریکتا ۷۱

۱۴۱ صفحه ۵۴ · تمرین — تمرین ۱۰: حالت کلی γ -مجموعه یکتا و غیریکتا ($n \geq 4$) ۷۲

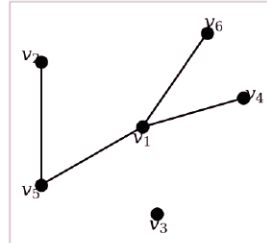
۱۴۲ صفحه ۵۴ · تمرین — تمرین ۱۱: گراف P_{12} ۷۲



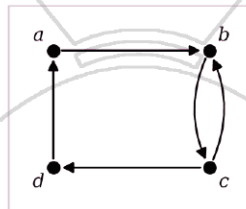
الف) $E(G) = \{v_1v_4, v_2v_5, v_6v_1, v_5v_1\}$ ، $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$

ب) $E(G) = \{(a,b), (b,c), (c,b), (c,d), (d,a)\}$ ، $V(G) = \{a, b, c, d\}$

الف) گراف ساده با ۶ رأس و ۴ یال (رأس v_3 تنها است):



ب) این گراف جهت‌دار است؛ هر یال یک زوج مرتب است و جهت آن از رأس اول به رأس دوم می‌باشد. بین b و c دو یال با جهت‌های مخالف وجود دارد:



توجه

صفحه ۳۵

۹۶

به‌طور مثال با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.

$E(G_2) = \{ \dots \}$ ، $V(G_2) = \{ \dots \}$ ، $E(G_1) = \{ \dots \}$ ، $V(G_1) = \{ \dots \}$

در هر دو شکل ۵ رأس و ۶ یال وجود دارد:

$V(G_1) = V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G_1) = E(G_2) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$

چون مجموعه رأس و مجموعه یال‌های دو شکل یکسان است، هر دو شکل یک گراف را نمایش می‌دهند (فقط روش رسم آنها فرق می‌کند).

کار در کلاس

صفحه ۳۶

۹۷

درجه سایر رأس‌های گراف شکل ۸ را بنویسید و مشخص کنید کدام رأس فرد و کدام رأس زوج‌اند.

$\deg(v_1) = 3$ ، $\deg(v_2) = 2$ ، $\deg(v_3) = 3$ ، $\deg(v_4) = 2$ ، $\deg(v_5) = 4$ ، $\deg(v_6) = 1$ ، $\deg(v_7) = 1$

مسئله ۱: اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأس آن باشد و $d_G(v)$ و $d_{\bar{G}}(v)$ به ترتیب درجه رأس v در گراف های G و $\bar{G}$ باشند، مقدار $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v)$ را به دست آورید.

مسئله ۲: یک گراف n رأسی حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

مسئله ۳: اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ را به دست آورید.

مسئله ۱

رأس v می تواند با هر یک از $n-1$ رأس دیگر مجاور باشد. هر یال vu یا در G است یا در $\bar{G}$ و در هر دو نیست). پس $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1$.

مسئله ۲

حداکثر یال وقتی است که هر دو رأس مجاور باشند؛ یعنی گراف کامل. در این حالت هر رأس درجه $n-1$ دارد، مجموع درجات $n(n-1)$ و تعداد یال ها $\frac{n(n-1)}{2}$ است.

مسئله ۳

هر زوج رأس دقیقاً در یکی از G یا $\bar{G}$ یال دارد؛ پس $q(G) + q(\bar{G}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

مسئله ۱: یک گراف کامل p رأسی چند یال دارد؟

مسئله ۲: اگر G یک گراف p رأسی باشد، چه رابطه ای بین تعداد یال های گراف های G ، $\bar{G}$ و K_p وجود دارد؟

مسئله ۳: مکمل گراف کامل چه نوع گرافی است؟

مسئله ۱

در گراف کامل هر رأس با $p-1$ رأس دیگر مجاور است؛ مجموع درجات $p(p-1)$ و تعداد یال ها $\frac{p(p-1)}{2}$ است.

مسئله ۲

یعنی مجموع یال های G و مکمل آن برابر تعداد یال های K_p است. $q(G) + q(\bar{G}) = q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$

مسئله ۳

در K_p هر دو رأس مجاورند، پس در مکمل آن هیچ دو رأسی مجاور نیست؛ مکمل گراف کامل، گراف تهی p رأس تنها و بدون یال است.

مسئله

صفحه ۳۸

۱۰۰

در گراف شکل ۱۷، دوری به طول ۵ بیابید.

یالهای گراف: $uv, uz, uw, vz, vw, zw, zy, yw, yx, wx$. یک دور به طول ۵:
 $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow u$ یالهای uv, vw, wy, yz, zu همگی در گراف هستند و رأس‌ها دو به دو متمایزند.

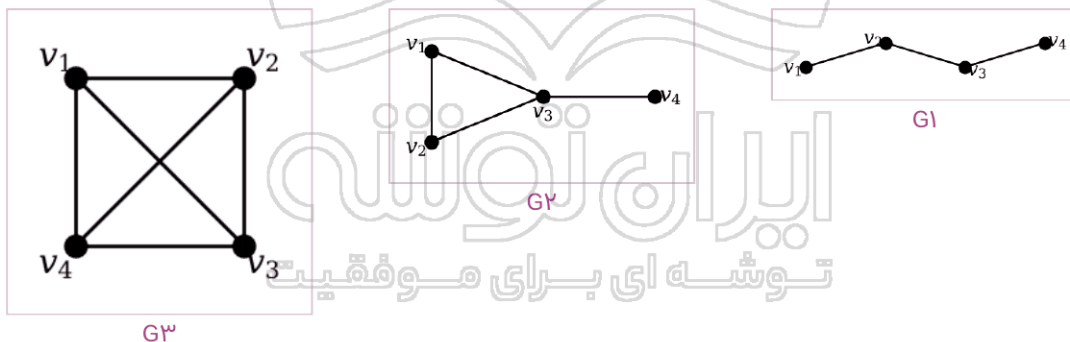
فعالیت

صفحه ۳۹

۱۰۱

- ۱) سه گراف دلخواه رسم کنید.
- ۲) مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی را که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.
- ۳) تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.
- ۴) حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.
- ۵) پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده و در این باره بحث کنید.

۱) سه گراف نمونه:



۲ و ۳) مجموع درجات و تعداد یال‌ها:

گراف	درجات رئوس	مجموع درجات	تعداد یال‌ها
G1	۱, ۲, ۲, ۱	۶	۳
G2	۱, ۳, ۲, ۲	۸	۴
G3	۳, ۳, ۳, ۳	۱۲	۶

۴ و ۵) حدس

در هر سه گراف مجموع درجات دو برابر تعداد یال‌هاست؛ حدس می‌زنیم برای هر گراف $\sum \deg(v) = 2q$ که در آن q تعداد یال‌هاست. دلیل: هر یال دقیقاً به دو رأس وصل است و در درجه هر یک از آن دو رأس یک بار شمرده می‌شود.

فعالیت

صفحه ۳۹

۱۰۲

۱) یک گراف دلخواه مانند G با n رأس $v_1, v_2, \dots, v_n$ و m یال $e_1, e_2, \dots, e_m$ در نظر بگیرید.

۲) تمام یال‌های گراف G را حذف کنید.

۳) مجموع درجات تمام رؤوس گراف حاصل چند است؟ تعداد یال‌های گراف حاصل چند است و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟

۴) یال e_1 را در جای خود (بین همان دو رأسی که e_1 قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سه سؤال ۳ جواب دهید.

۵) تمام یال‌های $e_2, \dots, e_m$ را یکی‌یکی در جای خود قرار دهید تا به گراف اولیه G برسید و پس از اضافه کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید.

۶) آیا مجموع درجات رؤوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟

۷) برای تساوی $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \deg(v_1) + \dots + \deg(v_n) = 2m$ استدلال خود را بیان نمایید.

۱. ☐ پس از حذف تمام یال‌ها گرافی با n رأس تنها به دست می‌آید.
۲. ☐ گراف حاصل، گراف تهی است.
۳. ☐ مجموع درجات برابر ۰ و تعداد یال‌ها نیز ۰ است؛ مجموع درجات دو برابر تعداد یال‌هاست ($0 \times 2 = 0$).
۴. ☐ با افزودن e_1 درجه هر یک از دو سر آن یک واحد زیاد می‌شود؛ مجموع درجات برابر ۲ و تعداد یال‌ها ۱ است؛ باز هم مجموع درجات $= 2 \times (\text{تعداد یال‌ها})$.
۵. ☐ با افزودن هر یال، مجموع درجات دو واحد (یک واحد برای هر سر یال) و تعداد یال‌ها یک واحد زیاد می‌شود؛ پس همواره مجموع درجات دو برابر تعداد یال‌هاست. در پایان (پس از افزودن m یال) مجموع درجات برابر $2m$ است.
۶. ☐ خیر؛ مجموع درجات برابر $2m$ است که عددی زوج است.
۷. ☐ هر یال به دقیقاً دو رأس وصل است؛ پس در جمع درجات رؤوس، هر یال دقیقاً دو بار شمرده می‌شود (یک بار برای هر سر آن). بنابراین مجموع درجات برابر $2m$ است.

اثبات نتیجه) ... مجموع $\deg(v)$ برای v در B زوج‌اند. (چرا؟) بنابراین مجموع $\deg(v)$ برای v در A نیز عددی زوج است و این نتیجه می‌دهد که $n(A)$ عددی زوج است. (چرا؟)

مجموع درجات رؤوس زوج: هر جمله زوج است و مجموع اعداد زوج، زوج است. (چرا اول)
مجموع درجات رؤوس فرد: مجموع کل درجات برابر $2q$ زوج) و مجموع درجات رؤوس زوج نیز زوج است؛ پس تفاضل آنها یعنی مجموع درجات رؤوس A (رؤوس فرد) زوج است.
چرا $n(A)$ زوج است: مجموع تعدادی عدد فرد فقط وقتی زوج است که تعداد آنها زوج باشد (مجموع تعداد فردی عدد فرد، فرد می‌شود). پس تعداد رأس‌های فرد زوج است.

یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه رابطه دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند و یا با هم دوست نیستند و هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اکنون:

الف) گراف G رأسی ۷ را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموز متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.
ب) با استفاده از قضیه قبل نشان دهید که امکان ندارد درجه تمام رؤوس گراف حاصل برابر ۳ باشد.
پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید که اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

الف)

گراف G دارای ۷ رأس است؛ هر دانش‌آموز یک رأس و هر دوستی بین دو نفر یک یال بین دو رأس متناظر. درجه هر رأس برابر تعداد دوستان آن دانش‌آموز در جمع است.

ب)

اگر درجه هر ۷ رأس برابر ۳ باشد، مجموع درجات $7 \times 3 = 21$ می‌شود که عددی فرد است؛ اما مجموع درجات رؤوس هر گراف برابر $2q$ و زوج است. تناقض؛ پس چنین گرافی وجود ندارد.

پ)

فرض کنیم تعداد افراد جمع n عددی فرد باشد و همه آنها تعداد فردی دوست داشته باشند. آنگاه گراف متناظر n رأس دارد و همه رأس‌هایش فرد است؛ طبق نتیجه، تعداد رأس‌های فرد هر گراف زوج است، ولی n فرد است. تناقض؛ پس چنین چیزی ممکن نیست.

فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \geq 4$. می‌خواهیم نشان دهیم که G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

(۱) رأس دلخواه v_1 را در G در نظر می‌گیریم. حتماً v_1 به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس v_2 باشد.

(۲) حتماً v_2 به رأسی به جز رأس v_1 متصل است. (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_3 باشد.

(۳) حتماً v_3 به رأسی از مجموعه $V(G) - \{v_1, v_2\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_4 باشد.

(۴) حتماً v_4 به رأسی از مجموعه $V(G) - \{v_1, v_2, v_3\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم که آن رأس v_5 باشد.

(۵) مسیر $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.

۱. چون درجه هر رأس دست‌کم ۴ است ($\delta(G) \leq 4$)، v_1 دست‌کم ۴ همسایه دارد؛ پس به رأس دیگری متصل است.
۲. درجه v_2 دست‌کم ۴ است ولی فقط یکی از همسایه‌هایش (v_1) می‌تواند نام برده شده باشد؛ پس حداقل ۳ همسایه دیگر دارد.
۳. v_3 دست‌کم ۴ همسایه دارد و از میان $\{v_1, v_2\}$ حداکثر ۲ تا همسایه آن‌اند (خودش همسایه خودش نیست)؛ پس رأسی خارج از این مجموعه همسایه آن است.
۴. v_4 دست‌کم ۴ همسایه دارد و حداکثر ۳ تا از آنها در $\{v_1, v_2, v_3\}$ قرار دارند؛ پس همسایه‌ای خارج از آن مجموعه دارد و آن را v_5 می‌نامیم.
۵. رأس‌های $v_1, \dots, v_5$ دو به دو متمایز و هر دو رأس متوالی مجاورند؛ پس این یک مسیر با ۴ یال، یعنی به طول ۴ است.



در هر یک از حالت‌های زیر تعداد یال‌های گراف G را به دست آورید.

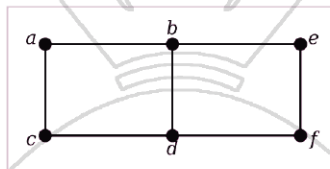
(الف) G یک گراف n رأسی k - منتظم است.

(ب) G یک گراف n رأسی کامل است. ($G = K_n$)

(الف) مجموع درجات nk است و برابر q_2 ؛ پس $q = \frac{nk}{p}$.

(ب) گراف کامل n رأسی $(n-1)$ - منتظم است؛ با $k = n-1$ در قسمت الف: $q = \frac{n(n-1)}{p}$.

- ۱) گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.
- الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.
- ب) درجه رأس‌های G را مشخص نمایید.
- پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟
- ت) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟
- ث) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه یال‌های $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (پ) در مورد گراف H پاسخ دهید.



- الف) مرتبه $p = 6$ و اندازه $q = 7$.
- ب) $\deg a = 2$ ، $\deg b = 3$ ، $\deg c = 3$ ، $\deg d = 2$ ، $\deg e = 2$ ، $\deg f = 2$.
- پ) $2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2 = 14 = 7 \times 2$ (برابر دو برابر تعداد یال‌ها).
- ت) رأس‌های c و e (یال‌های cf و ef).

ث) گراف H

- الف) مرتبه ۴ و اندازه ۶ (۶ یال داریم). ب) هر رأس با سه رأس دیگر مجاور است (هر ۶ زوج ممکن یال هستند)، پس $\deg$ همه رأس‌ها ۳ است و H گراف کامل K_4 است. پ) مجموع درجات $3 \times 4 = 12 = 6 \times 2$.

توشه‌ای برای موفقیت

- ۲) گراف G (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.
- الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.
- ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.
- پ) مجموعه همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.
- ت) اگر $NG(x) = \{a, c\}$ ، آنگاه x کدام رأس است؟

- الف) $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ؛ $E(G) = \{ab, bc, af, ae, ce, cd, de\}$

ب) درجه‌ها: $a:3, b:2, c:3, d:2, e:3, f:1, g:0$ ؛ پس $\Delta(G) = 3$ و $\delta(G) = 0$.

پ) $N(e) = \{a, c, d\}$ ؛ $N(g) = \emptyset$ ؛ $N(f) = \{a\}$.

ت) رأسی که همسایه‌هایش دقیقاً a و c باشند، رأس b است؛ $x = b$.

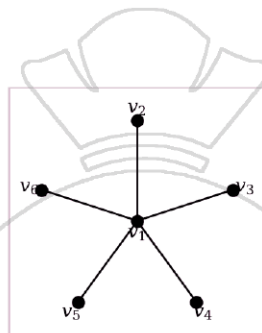
تمرین

صفحه ۴۱

۱۰۹

۳) گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $NG(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های $NG(v_i)$ برای $2 \leq i \leq 6$ تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

v_1 با هر ۵ رأس دیگر مجاور است. هر یک از $v_2, \dots, v_6$ تنها یک همسایه دارد که باید v_1 باشد. پس گراف ستاره‌ای با مرکز v_1 است:



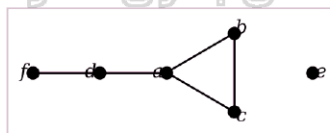
تمرین

صفحه ۴۱

۱۱۰

۴) در گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:
 $NG(f) = \{d\}$ ، $NG(e) = \{\}$ ، $NG(d) = \{a, f\}$ ، $NG(c) = \{a, b\}$ ، $NG(b) = \{a, c\}$ ، $NG(a) = \{b, c, d\}$
 گراف G را رسم و اندازه آن را مشخص کنید.

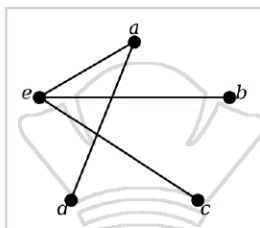
پال‌ها: (ab, ac, ad, bc, df) با تقارن همسایگی‌ها کنترل می‌شود. e رأس تنها است.



اندازه گراف: $q = 5$ (مجموع درجات $10 = 3 + 2 + 2 + 2 + 0 + 1$).

(۵) گراف (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجات رأس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رأس a و c در گراف $\bar{G}$ را تعیین نمایید.

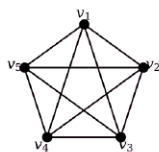
G دارای ۵ رأس و ۶ یال (ab, ac, bc, bd, cd, de) است؛ پس $\bar{G}$ دارای $4 = 6 - \frac{5 \times 4}{2}$ یال است و مجموع درجات رأس‌های $\bar{G}$ برابر $4 \times 2 = 8$ است.
 درجه a در G برابر ۲ و درجه c برابر ۳ است؛ در $\bar{G}$ طبق مسئله ۱: $(d_G + d_{\bar{G}} = n - 1 = 4)$: $\deg a = 4 - 2 = 2$ و $\deg c = 4 - 3 = 1$.



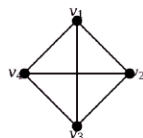
(۶) گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

گراف K_9 است و هر رأس درجه ۸ دارد؛ پس $\Delta(G) = \delta(G) = 8$ ؛ $\frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p(p-1) = 72 \Rightarrow p = 9$.

(۷) گراف‌های کامل از مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید.



K۵



K۴



K۳



K۲



K۱

(۸) در هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف r - منتظم از مرتبه n رسم کنید.

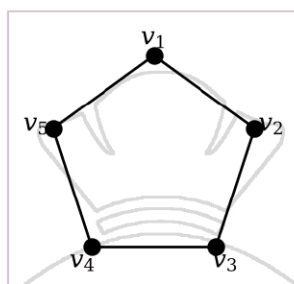
الف) $n=4, r=1$ (ب) $n=5, r=2$ (پ) $n=4, r=2$ (ت) $n=5, r=3$ (ث) $n=6, r=4$ (ج) $n=7, r=3$

شرط لازم: مجموع درجات nr باید زوج باشد.

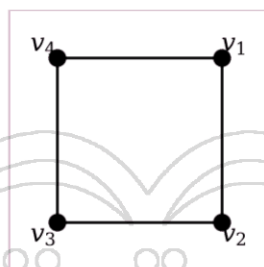
الف) $n=4, r=1$: دو یال جدا از هم



ب) $n=5, r=2$: دور C5

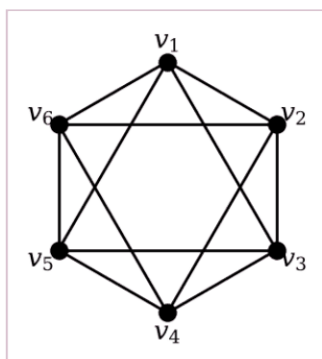


پ) $n=4, r=2$: دور C4



ت) $n=5, r=3$: امکان ندارد، زیرا $5 \times 3 = 15$ فرد است.

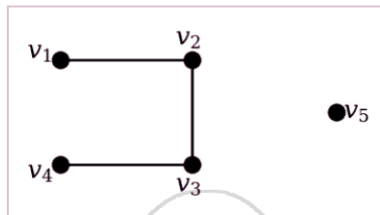
ث) $n=6, r=4$: مکمل سه یال جدا از هم (هر رأس به همه رأس‌ها جز «مقابل» خود وصل است)



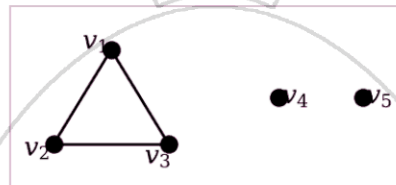
ج) $n=7, r=3$: امکان ندارد، زیرا $7 \times 3 = 21$ فرد است.

۹) برای هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که:
 الف) یک رأس تنها داشته باشد. ب) دو رأس تنها داشته باشد. پ) سه رأس تنها داشته باشد. ت) چهار رأس تنها داشته باشد. ث) پنج رأس تنها داشته باشد.

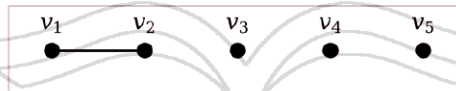
الف) مسیر P_4 و یک رأس تنها (v_5)



ب) مثلث و دو رأس تنها (v_5 و v_4)



پ) یک یال و سه رأس تنها



ت) امکان ندارد: اگر ۴ رأس تنها باشند، رأس پنجم هیچ همسایه‌ای ندارد (همه رأس‌های دیگر تنها هستند)، پس آن هم تنها می‌شود.

ث) گراف تهی با ۵ رأس: هیچ یالی رسم نمی‌کنیم و ۵ نقطه را می‌گذاریم.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۱۰) هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۱ نفر دست داده باشد.

گرافی را در نظر می‌گیریم که رأس‌هایش افراد و یال‌هایش دست‌دادن‌ها هستند. مجموع درجات $d = 12 + d = 6 \times 2$ که d درجهٔ نفر هفتم است. این مجموع باید زوج باشد ($q2$)، پس d زوج است. بنابراین $d = 1$ ممکن نیست.

۱۱) علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

الف) برای هر نفر ۴ نفر دیگر هست و هر کدام می‌تواند در فهرست باشد یا نباشد. تعداد زوج‌های مرتب (۵) $\times$ (۲۰ = ۴) و برای هر زوج ۲ حالت: $2^{20} = 1048576$ حالت.

ب) اکنون رابطه دوطرفه است؛ برای هر زوج نامرتب از ۵ نفر دو حالت (دوست یا نه) داریم. تعداد زوج‌ها $10 = \frac{5 \times 4}{2}$ و در نتیجه $2^{10} = 1024$ حالت.

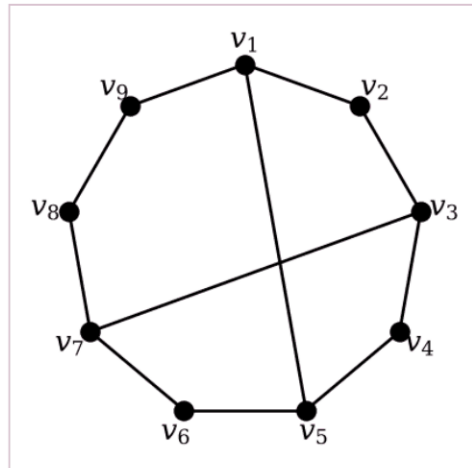
۱۲) یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که:

الف) دوره‌هایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

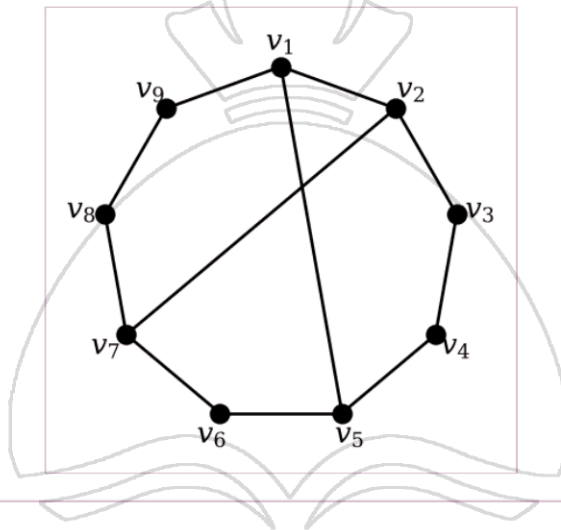
ب) دوره‌هایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

یک دور ۹ رأسی $v_1 \dots v_9$ می‌گیریم و دو وتر به آن اضافه می‌کنیم (با بررسی همهٔ دورها با رایانه):

الف) وترهای v_1v5 و $v3v7$ ← طول دورها فقط ۵ و ۶ و ۷ و ۹



(ب) وترهای v_1v_5 و v_2v_7 ← طول دورها فقط ۵ و ۶ و ۸ و ۹



تمرین

صفحه ۴۲

۱۱۹

(۱۳) فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq K$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K + 1$ است.

الف) **درست است.** بلندترین مسیر در G را $v_0 v_1 \dots v_m$ بگیرید. همه همسایه‌های v_0 روی این مسیر هستند (وگرنه می‌شد مسیر را بلندتر کرد). چون $\deg(v_0) \geq K$ ، دست‌کم K همسایه از میان $v_1, \dots, v_m$ دارد؛ پس $m \geq K$ و مسیر دست‌کم K یال دارد.

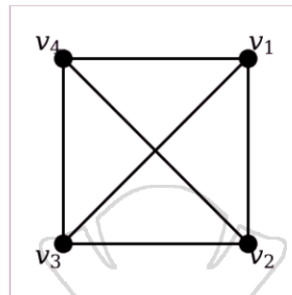
ب) **نادرست است.** مثال نقض: گراف کامل $K(K+1)$ دارای $K+1$ رأس است و $\delta = K$ ؛ بلندترین مسیر آن K یال دارد و مسیری به طول $K+1$ ندارد. (مثلاً مثلث: $\delta = 2$ ولی مسیری به طول ۳ ندارد).

۱۴) یک گراف ۴ رأسی غیرتهی K - منتظم بکشید که:

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

الف) هر رأس حداکثر با ۳ رأس دیگر مجاور است؛ پس $K \leq 3$ و بیشترین مقدار $K = 3$ با گراف K_4 :



ب) غیرتهی یعنی $K \geq 1$ ؛ $K = 1$ با دو یال جدا از هم ممکن است:

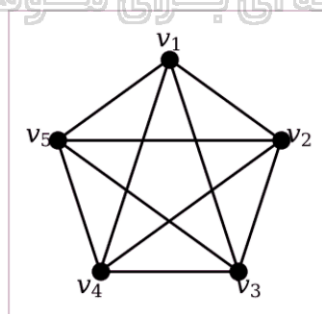


۱۵) یک گراف ۵ رأسی غیرتهی K - منتظم بکشید که:

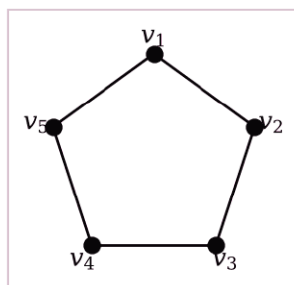
الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

الف) $K \leq 4$ و با K_5 - منتظم) ممکن است؛ بیشترین مقدار $K = 4$.



ب) $K = 1$ ممکن نیست (5×1 فرد است). $K = 2$ با دور C_5 ممکن است؛ کمترین مقدار $K = 2$.



پرسش

صفحه ۴۴

۱۲۲

الف) (در این مدل سازی) تقاطع ها و خیابان ها بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده اند؟
 ب) رأس هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه ای از رئوس را یک مجموعه احاطه گر برای گراف می نامیم. آیا می توانید یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی مثال بزنید؟

الف) هر تقاطع با یک رأس و هر خیابان بین دو تقاطع با یک یال نمایش داده شده است.

ب) شرط ۱ می گوید هر تقاطع یا دستگاه دارد یا مجاور تقاطعی است که دستگاه دارد. مثلاً مجموعه $\{a, c, e, h\}$ چنین است: a با b و d ، c با b و g ، e با b و d ، h با f و g مجاور است؛ پس همه رأس ها یا در مجموعه اند یا همسایه یکی از آنها؛ یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی. (مجموعه دو عضوی $\{b, f\}$ هم احاطه گر است.)

پرسش

صفحه ۴۵

۱۲۳

در این صورت مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می کند. (چرا؟)

هر شهر که ایستگاهی در آن نیست باید دست کم به یک شهر با ایستگاه مستقیماً (کمتر از ۵۰ کیلومتر) متصل باشد تا تحت پوشش قرار گیرد. این دقیقاً شرط احاطه گر بودن مجموعه شهرهای دارای ایستگاه است. چون می خواهیم کمترین تعداد ایستگاه ساخته شود، باید مجموعه احاطه گر با کمترین تعداد رأس، یعنی احاطه گر مینیمم، را بیابیم.

کار در کلاس

صفحه ۴۶

۱۲۴

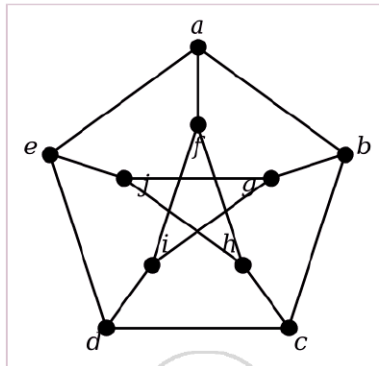
۱) مشخص کنید کدام یک از مجموعه های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه گر هست و کدام نیست؟

الف) $A = \{a, b, c, d, e\}$ ب) $B = \{f, g, h, i, j\}$ پ) $C = \{a, b, j, h, g\}$ ت) $D = \{a, i, h\}$ ث) $E = \{f, g, h, e, d\}$ ج) $F = \{f, g, h, e\}$ چ) $H = \{g, h, e\}$

۲) از مجموعه های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس هایی وجود دارد که با حذف آنها مجموعه باقی مانده هنوز احاطه گر باشد؟

۳) مجموعه‌ای احاطه‌گر با کمترین تعداد رأس که می‌توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۴) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



(۱)

رأس‌های مجاور هر رأس: $a: b, e, f$; $b: a, c, g$; $c: b, d, h$; $d: c, e, i$; $e: a, d, j$; $f: a, h, i$; $g: b, i, j$; $h: c, f, j$; $i: d, f, g$; $j: e, g, h$.

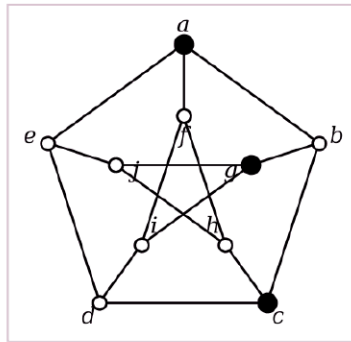
- A احاطه‌گر است (همه‌ی رأس‌های بیرونی در A هستند و هر رأس درونی همسایه‌ی یک رأس بیرونی است).
- B احاطه‌گر است (به همین دلیل با جابه‌جایی نقش درون و بیرون).
- C احاطه‌گر نیست: رأس d نه در C است و نه با رأسی از C مجاور است.
- D احاطه‌گر است (a, b, e, f ; d, f, g ; $i: d, f, g$; $h: c, f, j$; مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$).
- E احاطه‌گر است.
- F احاطه‌گر است.
- H احاطه‌گر است ($e: a, d, j$; $h: c, f, j$; $g: b, i, j$).

(۲)

در $E = \{f, g, h, e, d\}$ با حذف هر یک از رأس‌های f, h, e یا d مجموعه همپنان احاطه‌گر می‌ماند (مثلاً $\{g, h, e, d\}$); در $F = \{f, g, h, e\}$ با حذف f مجموعه $\{g, h, e\}$ احاطه‌گر می‌ماند. در بقیه (A, B, D, H) هیچ رأسی را نمی‌توان حذف کرد.

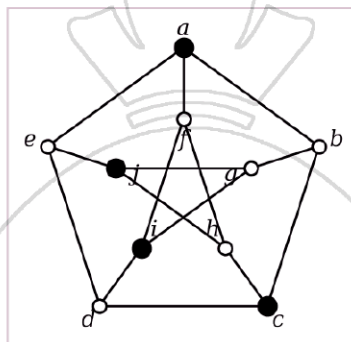
(۳)

مجموعه‌ی سه‌عضوی $\{a, c, g\}$ احاطه‌گر است (گراف ۱۰ رأس و $\Delta = ۳$ دارد، پس با کمتر از $\lceil ۱۰/۴ \rceil = ۳$ رأس ممکن نیست).



(۴)

مجموعه $\{a, c, i, j\}$ چهار عضوی احاطه‌گر است و با حذف هر رأس دیگر احاطه‌گر نمی‌ماند (مینیمال)، ولی چون مجموعه‌های ۳ عضوی احاطه‌گر وجود دارند، مینیمم نیست.



کار در کلاس

صفحه ۴۷

۱۲۵

(۵) آیا می‌توان هر مجموعه احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟ (استدلال کنید)

بله. اگر مجموعه احاطه‌گر D مینیمال نباشد، رأسی در آن هست که با حذفش مجموعه باز هم احاطه‌گر می‌ماند؛ آن را حذف می‌کنیم. این کار را تا جایی که رأسی قابل حذف وجود دارد تکرار می‌کنیم. چون D متناهی است، این فرایند پس از تعداد متناهی گام متوقف می‌شود و مجموعه باقی‌مانده احاطه‌گر است و هیچ رأسی از آن قابل حذف نیست؛ یعنی احاطه‌گر مینیمال است.

کار در کلاس

صفحه ۴۷

۱۲۶

در گراف شکل ۷:

- (۱) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر باشند.
- (۲) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر مینیمال باشند.
- (۳) یک مجموعه احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص نمایید.

- (۴) آیا رئسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس b, e و g را احاطه کند؟
- (۵) حداقل تعداد رئس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چندتا است؟ ($\gamma(G)$ چند است؟)

یال‌های گراف: $ac, bc, cd, cf, df, ef, fh, fi, hi, gh$.

(۱) مثلاً همه رئس‌ها یک مجموعه احاطه‌گر است؛ مجموعه کوچک‌تر $\{c, f, h\}$ هم احاطه‌گر است $c: a, b, d$ ؛ $f: h$ ؛ $h: g, i$ ؛ d, e, i .

(۲) $\{c, f, h\}$ مینیمال است: با حذف c رئس‌های a و b ، با حذف f رئس e ، و با حذف h رئس g احاطه نمی‌شوند.

(۳) $\{c, f, h\}$.

(۴) خیر. b, e و g رئس‌های آویزان هستند و همسایه‌هایشان به ترتیب c, f و h است. رئسی که b را احاطه کند باید b یا c باشد؛ برای e باید e یا f و برای g باید g یا h باشد. این سه مجموعه $\{b, c\}$ ، $\{e, f\}$ و $\{g, h\}$ دو به دو جدا هستند، پس هیچ رئسی دو تا از آنها را احاطه نمی‌کند.

(۵) از بند ۴: برای احاطه b, e و g دست‌کم ۳ رأس لازم است و $\{c, f, h\}$ سه‌عضوی و احاطه‌گر است؛ پس $\gamma(G) = ۳$.

فعالیت

صفحه ۴۷

۱۲۷

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به دست می‌آید؟ اگر حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟

سؤال: برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟

الف) $۱۲ \div ۴ = ۳$ ؛ ۳ تاکسی.

ب) $۱۴ \div ۴ = ۳,۵$ ؛ ۳ تاکسی ظرفیت ۱۲ نفر دارد، پس ۴ تاکسی لازم است.

پ) $۱۶ \div ۴ = ۴$ ؛ ۴ تاکسی.

ت) اگر n بر ۴ بخش‌پذیر باشد، تعداد تاکسی‌ها همان $\frac{n}{۴}$ است؛ در غیر این صورت باید عدد صحیح بعدی را در نظر گرفت (سقف): تعداد تاکسی‌ها برابر $\lceil \frac{n}{۴} \rceil$ است.

سؤال: کف و سقف یک عدد وقتی برابرند که آن عدد، عددی صحیح باشد ($x \in \mathbb{Z}$)؛ برای اعداد غیر صحیح سقف یک واحد از کف بیشتر است.

می‌دانیم در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.

(۱) در گراف مقابل Δ چند است؟

(۲) هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟

(۳) آیا ۲ رأس می‌توانند همه رئوس گراف G را احاطه کنند؟

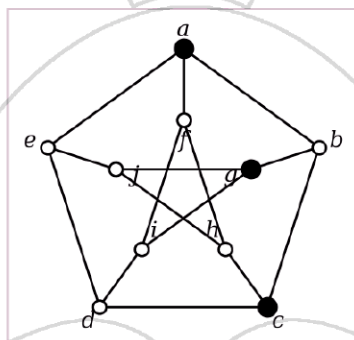
(۴) حداقل $\lceil 10/4 \rceil$ رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. چرا؟

(۵) $\gamma(G)$ چند است؟

(۶) در یک گراف دلخواه با ماکزیمم درجه Δ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟

(۷) تعداد کمتر از $\lceil n/(\Delta+1) \rceil$ رأس نمی‌توانند تمام n رأس یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

گراف شکل ۸ دارای ۱۰ رأس است و هر رأس آن درجه ۳ دارد (۳-منتظم؛ همان گراف پترسن). در شکل زیر یک مجموعه احاطه گر سه عضوی نشان داده شده است.



۱. $\Delta = 3$ ○

۲. هر رأس خودش و حداکثر Δ همسایه‌اش را احاطه می‌کند؛ پس حداکثر $\Delta + 1 = 4$ رأس. (تعداد رأس‌های احاطه شده حداکثر $\Delta + 1$ است.) ○

۳. خیر؛ ۲ رأس حداکثر $2 \times 4 = 8$ رأس را احاطه می‌کنند و $10 > 8$. ○

۴. هر رأس حداکثر ۴ رأس را احاطه می‌کند. با ۲ رأس حداکثر ۸ رأس و با ۳ رأس حداکثر ۱۲ رأس احاطه می‌شود؛ پس برای ۱۰ رأس دست کم $\lceil 10/4 \rceil = 3$ رأس لازم است. ○

۵. $\gamma(G) \geq 3$ و مجموعه سه عضوی $\{a, c, g\}$ در شکل بالا احاطه گر است؛ پس $\gamma(G) = 3$. ○

۶. حداکثر $\Delta + 1$ رأس. ○

۷. اگر k رأس همه n رأس را احاطه کنند، چون هر رأس حداکثر $\Delta + 1$ رأس را احاطه می‌کند، $k(\Delta + 1) \geq n$ ؛ یعنی $k \geq n/(\Delta + 1)$ و چون k صحیح است $k \geq \lceil n/(\Delta + 1) \rceil$. پس تعداد کمتر از این مقدار کافی نیست. ○

(۱) یک شبکه رایانه‌ای متشکل از ۱۶ رایانه را در نظر بگیرید که در آن هر رایانه، مطابق شکل ۹ به چند رایانه دیگر متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل‌سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک رایانه است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که رایانه‌های نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از رایانه‌ها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به‌طوری که توسط این مجموعه از رایانه‌ها به تمام رایانه‌های این شبکه وصل باشیم. مجموعه انتخاب شده از رؤس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟

(۲) با توجه به رابطه $\gamma(G) \leq \lceil n/(\Delta+1) \rceil$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رؤس این گراف لازم است؟ آیا می‌توانید مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟

(۳) گراف‌های P_9 ، P_{10} ، C_9 و C_{10} را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید.

(۴) گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گری برابر $\lceil n/(\Delta+1) \rceil$ باشد.

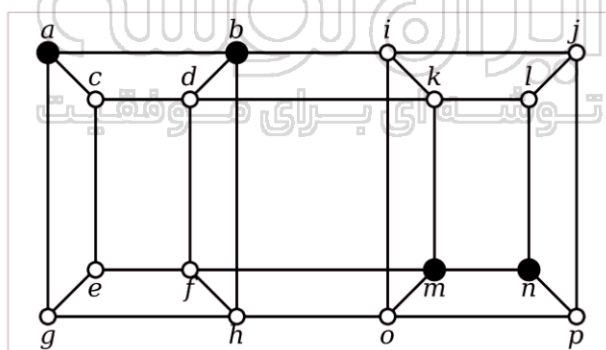
(۵) گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گری برابر $\lceil n/(\Delta+1) \rceil$ نباشد.

(۱)

مجموعه انتخاب‌شده یک **مجموعه احاطه‌گر** برای گراف است و چون کمترین تعداد رایانه را می‌خواهیم، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم (γ -مجموعه) است.

(۲)

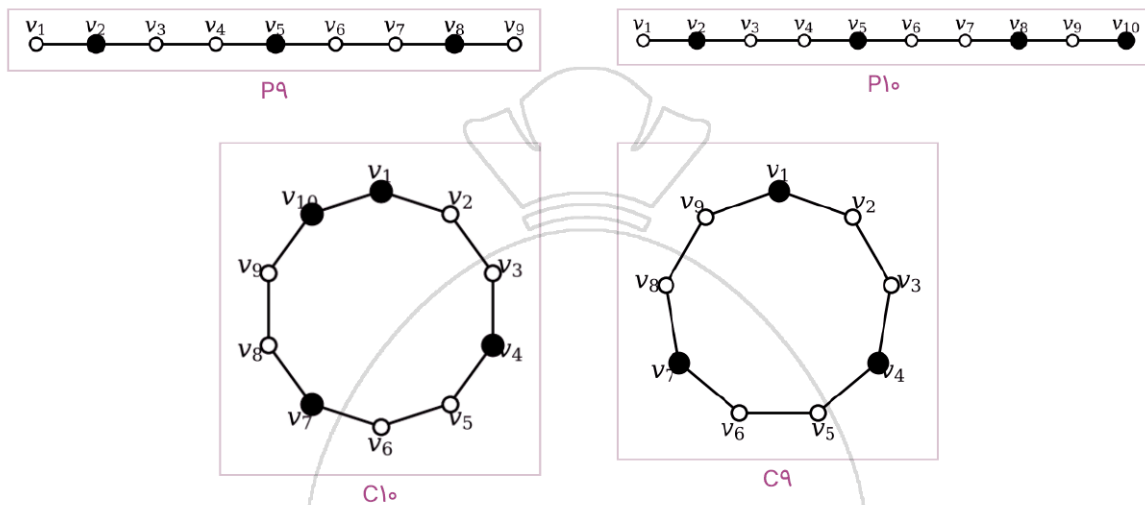
گراف ۱۶ رأس دارد و هر رأس درجه ۴ دارد ($\Delta = 4$ ؛ هر رأس با ۴ رایانه ارتباط دارد). پس $\lceil \frac{16}{5} \rceil = 4$. $\gamma(G) \geq 4$ ؛ مثلاً مجموعه $\{a, b, m, n\}$ احاطه‌گر چهارعضوی است: $a \in \{b, g, c, i\}$ ؛ $b \in \{a, h, d, j\}$ ؛ $m \in \{k, n, o, e\}$ ؛ $n \in \{l, m, p, f\}$. این چهار رأس و همسایه‌هایشان هر ۱۶ رأس را می‌پوشانند؛ پس $\gamma(G) = 4$.



(۳)

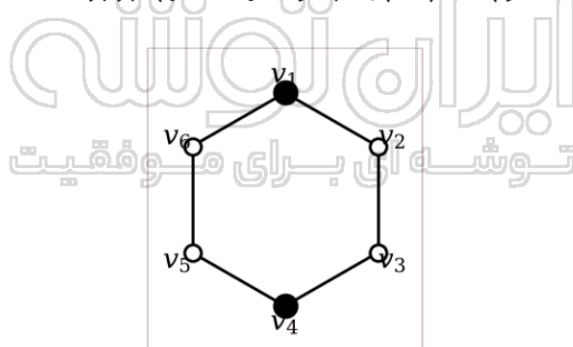
گراف	عدد احاطه‌گری	مجموعه- γ یک
P10	۴	$\{v_2, v_5, v_8, v_{10}\}$
P9	۳	$\{v_2, v_5, v_8\}$
C9	۳	$\{v_1, v_4, v_7\}$
C10	۴	$\{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}$

قاعده: $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$ هر رأس در این گراف‌ها ۳ رأس را می‌پوشاند. در شکل‌ها رأس‌های مجموعه احاطه‌گر توپر هستند.



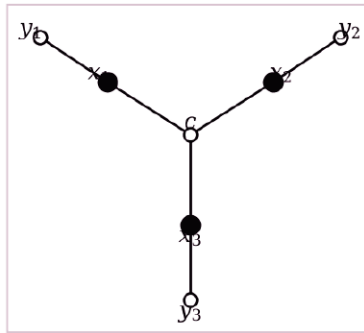
(۴)

دور $n=6$ ، C_6 ، $\Delta=2$ ، و $\gamma(C_6)=2$ (و $2 = \lceil 6/3 \rceil$)؛ برابر است.



(۵)

گراف γ رأسی شکل زیر (مرکز c و سه مسیر به طول ۲): $n=7$ ، $\Delta=3$ و $2 = \lceil 7/4 \rceil$ ، ولی $\gamma=3$ ؛ چون رأس‌های آویزان y_1, y_2, y_3 هر کدام برای احاطه شدن به یک رأس از مجموعه‌های جدای $\{y_1, x_1\}$ ، $\{y_2, x_2\}$ ، $\{y_3, x_3\}$ نیاز دارند. پس $\gamma \neq \lceil n/(\Delta+1) \rceil$.



کار در کلاس

صفحه ۵۰

۱۳۰

۱) تمام γ -مجموعه‌های (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.

۲) عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر (شکل ۱۱) مشخص کنید.

۱) گراف شکل ۱۰ دارای ۵ رأس و یال‌های ab, ae, ed, bd, bc, cd است و $\gamma(G) = 2$. مجموعه‌های دو عضوی احاطه‌گر:

$\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{c,e\}, \{d,e\}$

یعنی ۷ تا γ -مجموعه (هیچ رأس تنها نمی‌تواند همه رأس‌ها را احاطه کند چون $3 < \Delta = 4$).

۲) گراف (الف) G ۱۰ رأس دارد و 3 -منتظم است ($\Delta = 3$)؛ پس $\gamma(G) \geq \lceil 10/4 \rceil = 3$. مجموعه $\{a, c, h\}$ احاطه‌گر است ($\gamma(G) = 3$)؛ بنابراین $(h: b, f, z; c: b, d, i; a: b, e, g)$.

گراف (ب) H یک دور هشت‌رأسی است $(a-f-c-h-e-b-g-d-a)$ ؛ $\gamma(C_8) = \lceil 8/3 \rceil = 3$. پس $\gamma(H) = 3$.

فعالیت

صفحه ۵۱

۱۳۱

می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.

الف) ابتدا کران پایین $\lceil n/(\Delta+1) \rceil$ را بررسی می‌کنیم که عدد $\lceil 14/6 \rceil = 3$ را می‌دهد. پس $\gamma(G) \geq 3$.

ب) اما حداقل یکی از رؤس a, b, c و d باید انتخاب شود. چرا؟

پ) حداقل یکی از رؤس f و g باید انتخاب شود. چرا؟

ت) حداقل یکی از رؤس i و h باید انتخاب شود. چرا؟

ث) حداقل یکی از رؤس m و n باید انتخاب شود. چرا؟

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعه احاطه‌گر باید باشد. لذا $\gamma(G) \geq 4$ و با توجه به اینکه $\{c, f, h, m\}$ یک

مجموعه احاطه‌گر است $\gamma(G) \leq 4$ ، بنابراین $\gamma(G) = 4$.

ب) رأس a فقط با رأس‌های b, c و d مجاور است؛ برای احاطه شدن a باید خود a یا یکی از b, c و d در مجموعه باشد.

پ) رأس g تنها به f وصل است؛ برای احاطه شدن g باید f یا f در مجموعه باشد.

ت) رأس i تنها به h وصل است؛ برای احاطه شدن i باید h یا h در مجموعه باشد.

ث) رأس n تنها به m وصل است؛ برای احاطه شدن n باید m یا m در مجموعه باشد.

ج) چهار مجموعه $\{a,b,c,d\}$ ، $\{f,g\}$ ، $\{h,i\}$ ، $\{m,n\}$ دو به دو جدا هستند و از هر کدام دست کم یک رأس لازم است؛ پس $\gamma(G) \geq 4$. مجموعه $\{c, f, h, m\}$ همه رأس ها را احاطه می کند $m: a, b, d, e; f: e, g; h: e, i, j, k, l$ ؛ پس $\gamma(G) = 4$.

تمرین

صفحه ۵۲

۱۳۲

۱) در مثال ایستگاه های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه ها را مشخص نمایید.

ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟

یال های گراف (فاصله ≥ ۵۰ کیلومتر): $ab, ad, ag, ai, ak, bd, cd, cf, cg, de, dg, dh, ef, eg, eh, fg, fh, gh, ij, ik, jk$.

الف) هیچ مجموعه ۲ عضوی همه ۱۱ شهر را احاطه نمی کند (بررسی همه حالت ها)؛ و یک مجموعه ۳ عضوی وجود دارد. پس حداقل ۳ ایستگاه لازم است، مثلاً در شهرهای a, f, i $a: b, d, g, i, k; f: c, e, g, h; i: a, j, k$ که همه ۱۱ شهر را پوشش می دهند. (مثلاً $\{d, e, z\}$ یا $\{b, g, i\}$ هم جواب است).

ب) اگر یک ایستگاه در b باشد $b: a, d$ را می پوشاند، حداقل ۲ ایستگاه دیگر لازم است: یکی از f یا g و یکی از i, j یا k ؛ مثلاً $\{b, f, i\}$ یا $\{b, g, k\}$.

ایران توئین
پوشه ای برای موفقیت

تمرین

صفحه ۵۲

۱۳۳

۲) نقشه مقابل نقشه یک منطقه شامل چند روستا و جاده های بین آن روستاهاست و مسافت جاده های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان در برخی روستاها احداث کنیم به گونه ای که فاصله هر روستا تا نزدیک ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه فوق، مسئله مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان ها را مشخص کنید.

مدل سازی: برای هر روستا یک رأس می گیریم و دو روستا را وقتی به هم وصل می کنیم که کوتاه ترین مسیر جاده ای بین آن ها حداکثر ۱۰ کیلومتر باشد. روستاهایی که بیمارستان دارند باید یک مجموعه احاطه گر این گراف باشند و چون کمترین تعداد را می خواهیم، باید یک مجموعه احاطه گر مینیمم بیابیم.

فاصله‌ها از ۴: c, b؛ ۵: d, e؛ ۷: h, f؛ ۸: a, z؛ ۹: i؛ فاصله‌ها از ۵: n, h؛ ۷: i, g؛ ۳: o, m؛ ۶: l؛ ۱۰: k. هیچ روستایی به تنهایی همه روستاها را پوشش نمی‌دهد (کمترین «دورترین فاصله» برابر ۱۶ کیلومتر است). با دو بیمارستان در روستاهای c و n هر ۱۵ روستا حداکثر ۱۰ کیلومتر از نزدیک‌ترین بیمارستان فاصله دارد؛ پس حداقل ۲ بیمارستان لازم و کافی است. (انتخاب‌های دیگر: {c, l} یا {c, m}).

تمرین

صفحه ۵۲

۱۳۴

۳) عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های (الف) تا (ث) مشخص نمایید.

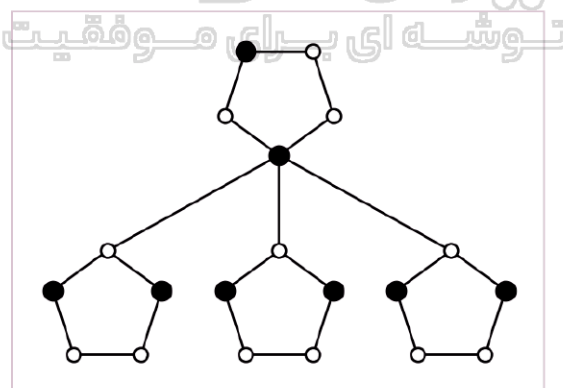
الف) گراف مکعب (۸ رأس، ۳-منتظم): $\gamma \geq \lceil 8/4 \rceil = 2$ و {a, g} احاطه‌گر است؛ پس $\gamma = 2$.

ب) رأس‌های آویزان a و g ما را مجبور به انتخاب e می‌کنند (یا a و g هر دو). با $h, b, a, g, e: \{z, j\} \leftarrow c, d, z$ ؛ همه ۱۰ رأس احاطه می‌شوند. چون $\Delta = 4$ و تنها ۵ رأس را یک رأس می‌پوشاند، با یک رأس ممکن نیست؛ پس $\gamma = 2$.

پ) مجموعه‌های {a, b, e, f}, {c, d, g, h} و {i, j, k, l} بخش‌های همسایگی رأس‌های (e یا b, a), (h یا c, d) و (j یا k, l) هستند. این سه مجموعه از هم جدا هستند و از هر کدام یک رأس لازم است؛ پس $\gamma \geq 3$. مجموعه {f, g, i} احاطه‌گر است؛ پس $\gamma = 3$.

ت) رأس‌های a, b, c, d, e (بالای هر مثلث) فقط با دو رأس همان مثلث مجاورند؛ پنج مجموعه {a, f, g}, {b, h, i}, {c, j, k}, {d, l, m}, {e, n, o} جدا هستند و از هر کدام یک رأس لازم است؛ $\gamma \geq 5$. مجموعه {g, h, j, l, n} احاطه‌گر است (n ← e, o, s؛ l ← d, m, q, r, s؛ j ← c, k, r؛ h ← b, i, p؛ g ← a, f, q). پس $\gamma = 5$.

ث) در پنج ضلعی بالایی، چهار رأس غیر از رأس پایینی به رأس‌های بیرونی راه ندارند و برای احاطه آنها دو رأس لازم است؛ در هر یک از سه پنج ضلعی پایینی هم چهار رأس غیر از رأس بالایی دو رأس لازم دارند. پس $\gamma \geq 2 + 2 = 4$. مجموعه ۸ عضوی توپیر شکل زیر احاطه‌گر است؛ پس $\gamma = 8$.



۴) اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟
($\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.)

$\gamma(G) = 1$ یعنی رأسی مانند v وجود دارد که همه رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند، یعنی به همه رأس‌های دیگر وصل است: $\deg v = n - 1$. پس $\Delta(G) = n - 1$ (بزرگ‌ترین مقدار ممکن).
حداقل تعداد یال‌ها: $(n - 1)$ گراف ستاره). حداکثر تعداد یال‌ها: $\frac{n(n-1)}{2}$ (گراف کامل).

۵) $\gamma(C_n)$ و $\gamma(P_n)$ را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ مشخص کنید.

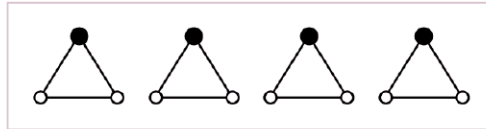
در C_n و P_n هر رأس حداکثر ۳ رأس را (خودش و حداکثر ۲ همسایه) می‌پوشاند؛ پس $\gamma \geq \lceil n/3 \rceil$. با انتخاب رأس‌های $(v_2, v_5, v_8, \dots)$ در صورت لزوم یک رأس آخر، همه رأس‌ها پوشش داده می‌شوند و تعداد رأس‌های انتخابی $\lceil n/3 \rceil$ است. بنابراین:
 $\gamma(C_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ ؛ مثلاً $\gamma(P_{10}) = 4$ و $\gamma(C_9) = 3$.

۶) اگر G یک گراف k - منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\lceil n/(k+1) \rceil \leq \gamma(G)$.

در گراف k - منتظم درجه همه رأس‌ها k است؛ پس $\Delta(G) = k$. از رابطه کلی $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil \leq \gamma(G)$ نتیجه می‌شود $\lceil \frac{n}{k+1} \rceil \leq \gamma(G)$. (دلیل: هر رأس خودش و k همسایه‌اش، یعنی حداکثر $k+1$ رأس را احاطه می‌کند.)

۷) یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

برای گراف ۲-منتظم $\Delta = 2$ و $\lceil \frac{12}{3} \rceil = 4$ و $\gamma \geq 4$ (چهار مثلث جدا از هم (هر کدام K_3) این کران را می‌رسانند: یک رأس از هر مثلث همه آن مثلث را احاطه می‌کند؛ پس $\gamma = 4$ دور C_{12} هم $\gamma = 4$ دارد). کمترین مقدار ممکن ۴ است.



تمرین

صفحه ۵۳

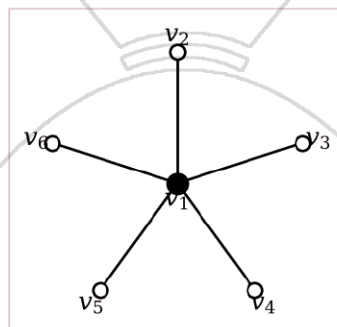
۱۳۹

۸ الف) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

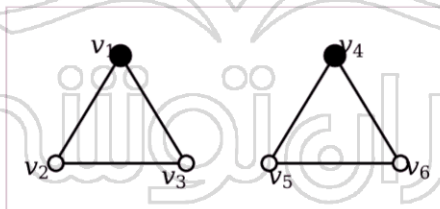
ب) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq n/2$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

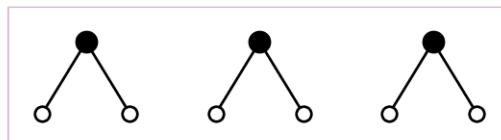
الف) گراف ستاره $K(1,5)$ با مرکز v_1 ؛ γ - مجموعه $\{v_1\}$ است.



ب) دو مثلث جدا؛ $\gamma = 2$ و برای نمونه $\{v_1, v_4\}$ یک γ - مجموعه است.



پ) چون $k \leq n/2$ ، می‌توان n رأس را به k گروه با دست‌کم ۲ رأس تقسیم کرد. هر گروه را به یک ستاره (یک رأس مرکزی وصل به بقیه گروه) تبدیل می‌کنیم و گروه‌ها را از هم جدا نگه می‌داریم. در هر ستاره دست‌کم یک رأس باید انتخاب شود و مرکز همه آن ستاره را می‌پوشاند؛ پس $\gamma = k$. شکل: $n = 9$ و $k = 3$.



تمرین

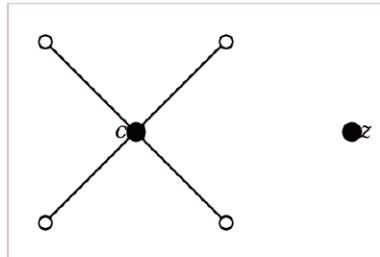
صفحه ۵۳

۱۴۰

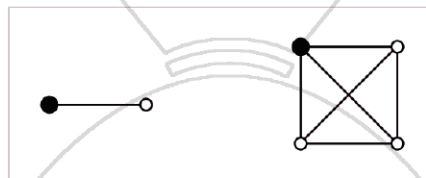
۹ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

الف) یک رأس تنها z و یک ستاره با مرکز c و ۴ برگ: z باید در هر مجموعه احاطه‌گر باشد و ستاره را فقط c به تنهایی می‌پوشاند؛ $\gamma = 2$ و تنها مجموعه احاطه‌گر دوعضوی $\{z, c\}$ است.



ب) یک یال ab و گراف کامل K_4 (جدا از آن): از هر بخش یک رأس کافی است؛ $\gamma = 2$ و $\delta = 4 \times 2 = 8$ مجموعه احاطه‌گر دوعضوی داریم.



تمرین

صفحه ۵۴

۱۴۱

۱۰) برای هر $n \in \mathbb{N} (n \geq 4)$ دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

الف) یک رأس تنها z و جدا از آن یک ستاره با مرکز c و $n-2$ برگ ($n-2 \geq 2$) رسم می‌کنیم. z باید در مجموعه باشد؛ ستاره را فقط c به تنهایی می‌پوشاند (چون دست کم دو برگ دارد، هیچ برگی همه ستاره را نمی‌پوشاند). پس $\gamma = 2$ و $\{z, c\}$ تنها γ -مجموعه است.

ب) یک یال ab و جدا از آن گراف کامل $K(n-2)$ ($n-2 \geq 2$). از هر بخش یک رأس کافی است؛ $\gamma = 2$ و $\delta = (n-2)^2$ مجموعه احاطه‌گر دوعضوی داریم.

تمرین

صفحه ۵۴

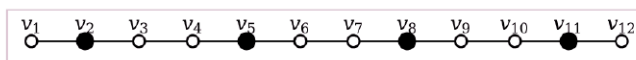
۱۴۲

۱۱) گراف P_{12} را رسم کنید.

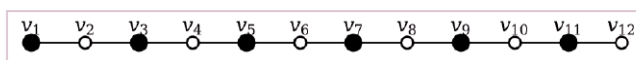
الف) یک γ - مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

الف) $\gamma(P_{12}) = \lceil 12/3 \rceil = 4$ و $\{v_2, v_5, v_8, v_{11}\}$ یک ۷-مجموعه است (رأس‌های توپر):



ب) مجموعهٔ $\{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, v_{11}\}$ احاطه‌گر است و مینیمال است: با حذف هر رأس، همان رأس یا یکی از همسایه‌هایش دیگر احاطه نمی‌شود (مثلاً با حذف v_1 ، رأس v_1 نه در مجموعه است و نه همسایه‌اش v_2). چون $4 < 6$ ، مینیمم نیست.



گام به گام ریاضیات گسسته دوازدهم - فصل سوم

ترکیبیات (شمارش)

فهرست

۱۴۳	صفحه ۵۷ مثال — توضیح راه حل مثال دانش آموزان پایه دوازدهم و یازدهم	۸۰
۱۴۴	صفحه ۵۸ کار در کلاس — رمزهای چهاررقمی با ارقام ۱، ۱، ۱، ۲	۸۰
۱۴۵	صفحه ۵۹ فعالیت — جدول انتخاب سه شاخه گل از سه نوع گل	۸۰
۱۴۶	صفحه ۶۰ فعالیت — جابه جایی ستاره ها و خطوط عمودی	۸۱
۱۴۷	صفحه ۶۰ فعالیت — تعداد جایگشت های ۳ ستاره و ۲ خط عمودی	۸۱
۱۴۸	صفحه ۶۰ فعالیت — حالت کلی انتخاب n شاخه گل از k نوع گل	۸۲
۱۴۹	صفحه ۶۰ فعالیت — تعداد انتخاب های ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل	۸۲
۱۵۰	صفحه ۶۱ کار در کلاس — معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ با جواب مثبت	۸۳
۱۵۱	صفحه ۶۱ کار در کلاس — تعداد جواب های صحیح و مثبت $x_1 + \dots + x_k = n$	۸۳
۱۵۲	صفحه ۶۱ کار در کلاس — معادله $x_1 + \dots + x_5 = 14$ با شرط $[x_1 > 1]$ و $[x_3 > 3]$	۸۴
۱۵۳	صفحه ۶۱ کار در کلاس — معادله $x_1 + \dots + x_5 = 11$ با جواب مثبت	۸۴
۱۵۴	صفحه ۶۱ کار در کلاس — معادله $x_1 + \dots + x_6 = 12$ با $x_2 = 4$ و $[x_5 > 2]$	۸۴

- ۱۵۵ صفحه ۰۶۲ مثال — جدول تدریس سه مدرس در سه کلاس و سه جلسه ۸۴
- ۱۵۶ صفحه ۰۶۲ فعالیت — تبدیل جدول مدرس ها به جدول 3×3 از اعداد ۸۵
- ۱۵۷ صفحه ۰۶۲ فعالیت — وصل کردن موارد معادل ۸۵
- ۱۵۸ صفحه ۰۶۳ کار در کلاس — دو مربع لاتین 5×5 ۸۶
- ۱۵۹ صفحه ۰۶۳ کار در کلاس — تعویض جای دو سطر (ستون) در مربع لاتین ۸۶
- ۱۶۰ صفحه ۰۶۳ کار در کلاس — مربع لاتین چرخشی ۸۶
- ۱۶۱ صفحه ۰۶۴ کار در کلاس — اعمال جایگشت روی مربع های لاتین ۸۷
- ۱۶۲ صفحه ۰۶۶ کار در کلاس — تعداد مربع های لاتین 1×1 ۸۸
- ۱۶۳ صفحه ۰۶۶ کار در کلاس — مربع های لاتین 2×2 متعامد ۸۸
- ۱۶۴ صفحه ۰۶۶ کار در کلاس — بررسی تعامد دو مربع لاتین 3×3 ۸۸
- ۱۶۵ صفحه ۰۶۷ کار در کلاس — تعامد دو مربع لاتین 4×4 ۸۸
- ۱۶۶ صفحه ۰۶۷ کار در کلاس — ساختن B از B با یک جایگشت ۸۹
- ۱۶۷ صفحه ۰۶۹ کار در کلاس — یک بار کار کردن هر کارگر با هر دستگاه (مثال برنامه ریزی کارگران) ۸۹
- ۱۶۸ صفحه ۰۶۹ کار در کلاس — یک بار کار کردن هر کارگر با هر ایاف ۹۰
- ۱۶۹ صفحه ۰۶۹ کار در کلاس — یک بار به کار رفتن هر ایاف در هر ماشین ۹۰
- ۱۷۰ صفحه ۰۶۹ کار در کلاس — لباس های سه برادر ۹۰

- ۱۷۱ صفحه ۷۰ فعالیت — ساختن دو مربع لاتین متعامد 5×5 — مرحله ۱ و ۲ (چینش اعداد و انتقال) ۹۱
- ۱۷۲ صفحه ۷۰ فعالیت — ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n فرد ۹۲
- ۱۷۳ صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۱: نشانیدن ۸ نفر دوبره دو برادر روبه روی هم ۹۲
- ۱۷۴ صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۲: کدهای ۵ رقمی با دو رقم از A و سه رقم از B ۹۲
- ۱۷۵ صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۳: چیدن ۴ کتاب فیزیک و ۵ کتاب ریاضی ۹۳
- ۱۷۶ صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۴: طرح مسئله با پاسخ $17 \times 14!$ ۹۳
- ۱۷۷ صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۵: کدهای ۶ رقمی با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ ۹۳
- ۱۷۸ صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۶: کدگذاری جعبه ها با حروف $a, a, b, a, c, c, d, d, d$ ۹۴
- ۱۷۹ صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۷: ۷ نفر در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره ۹۴
- ۱۸۰ صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۸: انتخاب ۱۱ شاخه گل از ۵ نوع با شرطهای مختلف ۹۴
- ۱۸۱ صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۹: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلات با شرط ۹۵
- ۱۸۲ صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۰: توزیع ۵ توپ یکسان بین ۳ نفر ۹۵
- ۱۸۳ صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۱: توزیع ۸ توپ یکسان بین ۴ نفر با حداقل یک توپ ۹۵
- ۱۸۴ صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۲: جایگشت روی اعضای مربع لاتین و تعامد با مربع اولیه ۹۶
- ۱۸۵ صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۳: جابه جایی سطرهای مربع لاتین 3×3 ۹۶
- ۱۸۶ صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۴: برنامه ریزی تدریس شش مدرس در شش کلاس ۹۷

- ۱۸۷ صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۵: دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و ۷ ۹۷
- ۱۸۸ صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۶: مسابقه اتومبیل رانی با ۷ راننده، ۷ ماشین و ۷ مسیر ۹۸
- ۱۸۹ صفحه ۷۳ مثال — کلاس ۲۵ نفری فوتبال و والیبال ۹۹
- ۱۹۰ صفحه ۷۴ توضیح — اصل شمول برای سه مجموعه ۹۹
- ۱۹۱ صفحه ۷۴ فعالیت — اعداد ۱ تا ۴۰۰ بدون بخش پذیری بر ۳، ۴ و ۵ — پرسش ۱ و ۲ ۹۹
- ۱۹۲ صفحه ۷۴ فعالیت — اعداد ۱ تا ۴۰۰ بدون بخش پذیری بر ۳، ۴ و ۵ — پرسش ۳ و ۴ ۱۰۰
- ۱۹۳ صفحه ۷۴ فعالیت — اعداد ۱ تا ۴۰۰ بدون بخش پذیری بر ۳، ۴ و ۵ — پرسش ۵ (محاسبه) ۱۰۰
- ۱۹۴ صفحه ۷۵ کار در کلاس — اعداد ۱ تا ۳۵۰ بدون بخش پذیری بر ۴، ۵ و ۶ ۱۰۱
- ۱۹۵ صفحه ۷۵ مثال — قفل رمزدار چهار رقمی ۱۰۱
- ۱۹۶ صفحه ۷۶ کار در کلاس — طراحی جاده بین سه روستا — پرسش ۱ ۱۰۱
- ۱۹۷ صفحه ۷۶ کار در کلاس — طراحی جاده بین سه روستا — پرسش ۲ ۱۰۲
- ۱۹۸ صفحه ۷۶ کار در کلاس — طراحی جاده بین سه روستا — پرسش ۳ ۱۰۲
- ۱۹۹ صفحه ۷۶ کار در کلاس — طراحی جاده بین سه روستا — پرسش ۴ ۱۰۳
- ۲۰۰ صفحه ۷۷ فعالیت — تعداد توابع پوشا از مجموعه ۵ عضوی به ۳ عضوی — پرسش ۱ ۱۰۴
- ۲۰۱ صفحه ۷۷ فعالیت — تعداد توابع پوشا از مجموعه ۵ عضوی به ۳ عضوی — پرسش ۲ ۱۰۴
- ۲۰۲ صفحه ۷۸ فعالیت — تعداد توابع یک به یک از مجموعه ۴ عضوی به ۶ عضوی — پرسش ۱ ۱۰۵

- ۲۰۳ صفحه ۷۸ فعالیت — تعداد توابع یک به یک از مجموعهٔ ۴ عضوی به ۶ عضوی — پرسش ۲ ۱۰۵
- ۲۰۴ صفحه ۷۸ فعالیت — تعداد توابع یک به یک از مجموعهٔ ۴ عضوی به ۶ عضوی — پرسش ۳ ۱۰۵
- ۲۰۵ صفحه ۷۸ مثال — توزیع ۴ خودکار متفاوت بین ۸ نفر (حداکثر یک خودکار برای هر نفر) ۱۰۵
- ۲۰۶ صفحه ۷۹ پرسش — حداقل تعداد دانش‌آموزان برای هم‌روز تولد بودن دو نفر ۱۰۶
- ۲۰۷ صفحه ۸۰ تمرین — تمرین حالت کلی: $(n+1)$ عدد طبیعی و تفاضل بخش‌پذیر بر n ۱۰۶
- ۲۰۸ صفحه ۸۰ کار در کلاس — ۱۰ نقطه در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ ۱۰۶
- ۲۰۹ صفحه ۸۰ کار در کلاس — طرح مسئله از شکل مربع به ضلع ۲ ۱۰۷
- ۲۱۰ صفحه ۸۰ کار در کلاس — اعضای خانواده و فصل تولد ۱۰۷
- ۲۱۱ صفحه ۸۰ کار در کلاس — گراف ساده از مرتبهٔ $n \geq 2$ و دو رأس هم‌درجه ۱۰۷
- ۲۱۲ صفحه ۸۱ فعالیت — تعمیم اصل لانهٔ کبوتری (جدول) ۱۰۸
- ۲۱۳ صفحه ۸۲ کار در کلاس — دبیرستان: ۱۰ نفر با ماه و روز هفتهٔ تولد یکسان ۱۰۸
- ۲۱۴ صفحه ۸۲ کار در کلاس — ۵۴ شاخه گل و گلدان‌ها ۱۰۹
- ۲۱۵ صفحه ۸۲ کار در کلاس — همایش: ۳ نفر با دو حرف اول فامیلی یکسان ۱۰۹
- ۲۱۶ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۱: اعداد ۱ تا ۹۰ بخش‌پذیر بر ۲ یا ۳ ۱۰۹
- ۲۱۷ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۲: اعداد ۱ تا ۲۰۰ بخش‌پذیر بر ۴ ولی نه بر ۷ ۱۱۰
- ۲۱۸ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۳: کلاس ۳۴ نفری و سه رشتهٔ ورزشی ۱۱۰

- ۲۱۹ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۴: قفل با رمز ۵ رقمی بدون صفر و ارقام ۷، ۲، ۳ ۱۱۰
- ۲۲۰ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۵: توابع از مجموعه ۵ عضوی به ۴ عضوی ۱۱۱
- ۲۲۱ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۶: توزیع ۵ کتاب متفاوت بین ۸ نفر ۱۱۱
- ۲۲۲ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۷: تقسیم ۶ فیلم بین سه داور ۱۱۱
- ۲۲۳ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۸: ۳۶۸ نفر و روز تولد ۱۱۱
- ۲۲۴ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۹: ۵۰۵ دانش آموز و ماه و روز هفته تولد ۱۱۲
- ۲۲۵ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۱۰: تماشاگران مسابقه کشتی و روز تولد ۱۱۲
- ۲۲۶ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۱۱: مجموع زوج در بین سه عدد طبیعی ۱۱۲
- ۲۲۷ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۱۲: زیرمجموعه ۴۳ عضوی از $\{1, \dots, 84\}$ و مجموع ۸۵ ۱۱۲
- ۲۲۸ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۱۳: ۱۳ عضو از $\{1, 5, 9, \dots, 85\}$ و مجموع ۹۰ ۱۱۳
- ۲۲۹ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۱۴: ۱۳ نقطه درون مستطیل 6×8 ۱۱۳
- ۲۳۰ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۱۵: ۵ نقطه با مختصات صحیح و نقطه وسط ۱۱۳

۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم:

(الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

(ب) به صورت یک‌درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند).

(پ) اگر دانش‌آموزان پایه یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به صورت یک‌درمیان قرار داد؟ (کتاب راه‌حل را بدون توضیح نوشته است؛ خودتان راه‌حل را توضیح دهید.)

(الف) هر پایه را یک «دسته» در نظر می‌گیریم. دو دسته به ۲! طریق جابه‌جا می‌شوند، دانش‌آموزان پایه دوازدهم درون دسته‌شان به ۵! و دانش‌آموزان پایه یازدهم به ۴! طریق جابه‌جا می‌شوند. طبق اصل ضرب:

$$2! \times 4! \times 5! = 2 \times 24 \times 120 = 5760$$

(ب) از ۹ جایگاه، یک‌درمیان بودن یعنی ۵ نفر پایه دوازدهم باید در جایگاه‌های ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۴ نفر پایه یازدهم در جایگاه‌های ۲، ۴، ۶، ۸ بنشینند. برای جایگاه اول ۵ انتخاب، برای جایگاه سوم ۴ انتخاب و ... داریم و برای جایگاه‌های زوج به‌طور مشابه ۴، ۳، ۲، ۱ انتخاب. پس: $5! \times 4! = 120 \times 24 = 2880$

(پ) اکنون هر دو پایه ۵ نفرند و یک‌درمیان نشستن به دو صورت ممکن است (ردیف با دانش‌آموز پایه دوازدهم شروع شود یا با پایه یازدهم). در هر حالت $5! \times 5!$ طریق داریم؛ پس:

$$2 \times (5! \times 5!) = 2 \times 14400 = 28800$$

محاسبه کنید با ارقام ۱، ۱، ۱، ۲ چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟

اگر ۴ رقم متمایز بودند جواب ۴! بود؛ ولی چون سه رقم ۱ یکسان‌اند و جابه‌جایی آنها با هم حالت جدیدی نمی‌سازد (۳! حالت برای یک‌ها شمرده شده)، کل حالت‌ها را بر ۳! تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

این رمزها عبارت‌اند از: ۱۱۱۲، ۱۱۲۱، ۱۲۱۱ و ۲۱۱۱.

شخصی وارد یک گل‌فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است.)

۱ هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.

میخک	رُز	مریم	دسته گل انتخابی	
*	*	*	یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک	۱
**	-	*	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم	۲
-	***	-	سه شاخه گل رُز	۳
*	**	-	یک شاخه گل میخک و دو شاخه گل رُز	۴
-	-	***	سه شاخه گل مریم	۵
*	-	**	دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل میخک	۶
-	*	**	دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز	۷
***	-	-	سه شاخه گل میخک	۸
**	*	-	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز	۹
-	**	*	یک شاخه گل مریم و دو شاخه گل رُز	۱۰

این ۱۰ حالت همه انتخاب‌های ممکن‌اند؛ سطر ۱۰ هر حالت دیگری که تکراری نباشد، یعنی «یک مریم و دو رُز»، است.

فعالیت

صفحه ۶۰

۱۴۶

۲ آیا در هر یک از حالت‌های ۱ تا ۱۰ جابه‌جایی ستاره‌ها با هم دسته گل جدیدی تولید می‌کند؟ جابه‌جایی دو خط عمودی با هم چطور؟

خیر. ستاره‌ها همه یکسان‌اند (هر ستاره یک شاخه گل از همان نوع است)، پس جابه‌جایی دو ستاره دسته گل جدیدی نمی‌سازد. دو خط عمودی نیز کاملاً مثل هم‌اند و جابه‌جایی آنها هم چیدمان را عوض نمی‌کند؛ نوع گل هر بخش فقط با جایگاه آن (قبل از خط اول، بین دو خط، بعد از خط دوم) مشخص می‌شود.

فعالیت

صفحه ۶۰

۱۴۷

۳ با توجه به قضیه جایگشت با تکرار تعداد کل جایگشت‌های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به دست آورید.

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2} = 10 = \text{تعداد کل جایگشت‌ها}$$

۴ این مسئله را در حالت کلی و برای انتخاب دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل بررسی کنید.

تعداد ستاره‌ها = تعداد شاخه گل‌های انتخابی n

تعداد خطوط عمودی برای جدا کردن k نوع گل =

تعداد کل اشیا (شامل ستاره‌ها و خطوط عمودی) =

تعداد کل جایگشت‌ها = ... $= \binom{n+(k-1)}{k-1} = \frac{[n+(k-1)]!}{n! \times \dots}$

برای جدا کردن k نوع گل به $k-1$ خط عمودی نیاز داریم. پس تعداد کل اشیا برابر $n+(k-1)$ است.

جابه‌جایی ستاره‌ها با هم و جابه‌جایی خطوط عمودی با هم، دسته‌گل جدیدی نمی‌سازد؛ پس باید بر $n!$ و $(k-1)!$ تقسیم کنیم:

$$\frac{[n+(k-1)]!}{n! \times (k-1)!} = \binom{n+(k-1)}{k-1}$$

می‌خواهیم تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم. اگر فرض کنیم x_1

تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول و x_2 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم و x_3 تعداد ... باشد، در این صورت

می‌بایست جمع انتخاب‌ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی $\dots = x_1 + x_2 + x_3$ ؛ با توجه به اینکه هر جواب

صحیح و نامنفی این معادله نشان‌دهنده یک انتخاب هفت‌تایی از سه نوع گل بوده و برعکس هر انتخاب

هفت‌تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح و نامنفی برای این معادله است، جدول صفحه بعد را کامل

کرده و سپس تعداد جواب‌های معادله را به دست آورید.

نوشته‌ای برای مؤسسه فعالیت

x_3 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم است و معادله مورد نظر $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ است. جدول کامل‌شده (چند

نمونه از جواب‌ها):

x_1 (نوع اول)	x_2 (نوع دوم)	x_3 (نوع سوم)	$x_1+x_2+x_3=7$
۱	۰	۶	$7=1+0+6$
۱	۱	۵	$7=1+1+5$
۴	۲	۱	$7=4+2+1$
۰	۷	۰	$7=0+7+0$
۱	۴	۲	$7=1+4+2$
۲	۳	۲	$7=2+3+2$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی = تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از ۳ نوع گل =

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

کار در کلاس

صفحه ۶۱

۱۵۰

۱ معادله $x_1+x_2+x_3=7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟
 (راهنمایی: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

ابتدا از هر نوع گل یک شاخه برمی‌داریم (۳ شاخه)، ۴ شاخه باقی‌مانده را دلخواه از ۳ نوع انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

کار در کلاس

صفحه ۶۱

۱۵۱

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.
 (راهنمایی: ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و...)

هر جواب صحیح و مثبت یعنی انتخاب n شاخه گل از k نوع به طوری که از هر نوع حداقل یک شاخه باشد.
 ابتدا از هر نوع یک شاخه برمی‌داریم (k شاخه). باقی‌مانده $n-k$ شاخه را به دلخواه از k نوع انتخاب می‌کنیم که طبق نتیجه فعالیت قبل به

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} \text{ طریق ممکن است.}$$

۳ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرطی آنکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ باشد؟

$x_1 > 1$ یعنی $x_1 \geq 2$ و $x_3 > 3$ یعنی $x_3 \geq 4$. ابتدا ۲ شاخه از نوع اول و ۴ شاخه از نوع سوم برمی داریم (در کل ۶ شاخه)؛ ۸ شاخه باقی مانده را به دلخواه از ۵ نوع انتخاب می کنیم:

$$\binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4} = 495$$

۴ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$)

از هر یک از ۵ نوع یک شاخه برمی داریم؛ ۶ شاخه باقی مانده را دلخواه انتخاب می کنیم:

$$\binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210 \quad (\text{یا مستقیم } \binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210)$$

۵ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرطی آنکه $x_2 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

$x_2 = 4$ ثابت است؛ پس $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$. چون جواب ها مثبت اند، $x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 1$ و $x_5 > 2$ یعنی $x_5 \geq 3$. به ترتیب $1+1+1+1+1=5$ واحد را از قبل برمی داریم؛ ۱ واحد باقی می ماند که باید بین ۵ متغیر پخش شود:

$$\binom{1+5-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5$$

سه مدرس به نام های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۸-۱۰، ۱۰-۱۲ و ۲-۴ در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هریک از کلاس ها

دقیقاً یک بار باید تدریس کند. نام مدرس‌ها را در جدول مقابل به گونه‌ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

کلاس‌ها / جلسات	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۲-۴
A	احمدی	کریمی	عباسی
B	کریمی	عباسی	احمدی
C	عباسی	احمدی	کریمی

در هر سطر هر مدرس دقیقاً یک بار آمده (هر مدرس در هر کلاس یک بار) و در هر ستون نیز هر مدرس یک بار آمده (هیچ مدرسی در یک جلسه دو کلاس ندارد). جواب‌های دیگر هم ممکن است.

فعالیت

صفحه ۶۲

۱۵۶

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول 3×3 از اعداد به دست آورید.

احمدی = ۱، کریمی = ۲، عباسی = ۳:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

فعالیت

صفحه ۶۲

۱۵۷

۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.

ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.

پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.

ت) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها آمده است.

ا) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.

ب) هر یک از مدرسین در تمام کلاس‌ها تدریس داشته است.

ج) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.

د) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه‌ها تدریس داشته است.

سطرها نماینده کلاس‌ها و ستون‌ها نماینده جلسات اند:

- الف $\leftrightarrow$ c : عدد تکراری در یک سطر یعنی مدرسی دو بار در یک کلاس تدریس کرده است؛ چنین چیزی نداریم.
- ب $\leftrightarrow$ a : عدد تکراری در یک ستون یعنی مدرسی در یک جلسه در دو کلاس باشد؛ چنین چیزی نداریم.
- پ $\leftrightarrow$ b : هر عدد در همه سطرها آمده یعنی هر مدرس در همه کلاس‌ها تدریس کرده است.
- ت $\leftrightarrow$ d : هر عدد در همه ستون‌ها آمده یعنی هر مدرس در همه جلسه‌ها تدریس کرده است.

کار در کلاس

صفحه ۶۳

۱۵۸

۱ دو مربع لاتین 5×5 بنویسید.

دو نمونه از مربع‌های لاتین مرتبه ۵ (در هر سطر و هر ستون هر یک از اعداد ۱ تا ۵ دقیقاً یک بار آمده است):

۱	۲	۳	۴	۵
۳	۴	۵	۱	۲
۵	۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۵	۱
۴	۵	۱	۲	۳

مربع دوم

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

مربع اول

کار در کلاس

صفحه ۶۳

۱۵۹

۲ با استدلال کلامی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟
توشه ای برای موفقیت

با تعویض جای دو سطر، هر سطر همان سطر قبلی است و فقط ترتیب سطرها عوض شده؛ پس همچنان در هر سطر عدد تکراری نداریم. در هر ستون نیز همان اعداد قبلی (فقط با ترتیب متفاوت) آمده‌اند؛ پس باز هم در هیچ ستونی عدد تکراری وجود ندارد. بنابراین شکل حاصل یک مربع لاتین است. استدلال برای تعویض جای دو ستون مشابه است.

کار در کلاس

صفحه ۶۳

۱۶۰

۳ شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن «مربع لاتین چرخشی» می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟

(سطر اول: ۱، ۲، ۳، ...، $n-1$ ، n ؛ سطر دوم: ۱، ۲، ۳، ...، $n-2$ ، $n-1$ ؛ سطر سوم: ۱، ۲، ۳، ...، $n-3$ ، ...؛ سطر آخر: ۱، ۲، ۳، ...، n)

هر سطر از سطر قبلی با یک چرخش یک خانه‌ای به راست به دست آمده است. پس هر سطر شامل همه اعداد ۱ تا n است و در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.

در هر ستون هم چون هر بار عددی که در انتهای سطر بود به ابتدای سطر بعد می‌آید، با پایین رفتن در یک ستون اعداد به ترتیب (۱، ...، $n-1$ ، n به صورت چرخشی) ظاهر می‌شوند؛ یعنی در ستون نیز همه اعداد ۱ تا n دقیقاً یک بار آمده‌اند. بنابراین مربع لاتین است.

کار در کلاس

صفحه ۶۴

۱۶۱

برای هر یک از مربع‌های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت‌ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به دست آورید.

(سه مربع: مربع 3×3 با سطرهای ۱۲۳، ۲۳۱، ۳۱۲؛ مربع 4×4 با سطرهای ۱۲۴۳، ۴۳۲۱، ۳۴۱۲، ۲۳۳۴؛ مربع 5×5 با سطرهای ۱۳۵۴۲، ۵۴۲۱۳، ۲۱۳۵۴، ۳۵۴۲۱، ۴۲۱۳۵)

مربع 3×3 با جایگشت $1 \leftarrow 3, 3 \leftarrow 2, 2 \leftarrow 1$ (هر عدد را با عدد متناظرش جایگزین می‌کنیم):

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

مربع جدید

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

مربع داده شده

مربع 4×4 با جایگشت $1 \leftarrow 3, 3 \leftarrow 2, 2 \leftarrow 4, 4 \leftarrow 1$:

۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲

مربع جدید

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

مربع داده شده

مربع 5×5 با جایگشت $1 \leftarrow 5, 5 \leftarrow 4, 4 \leftarrow 2, 2 \leftarrow 3, 3 \leftarrow 1$:

۵	۳	۱	۲	۴
۱	۲	۴	۵	۳
۴	۵	۳	۱	۲
۳	۱	۲	۴	۵
۲	۴	۵	۳	۱

مربع جدید

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

مربع داده شده

هر سه مربع جدید لاتین‌اند (در هر سطر و هر ستون همه اعداد دقیقاً یک بار آمده‌اند). جایگشت‌های دیگر هم می‌تواند انتخاب شود.

کار در کلاس

صفحه ۶۶

۱۶۲

۱ چند مربع لاتین 1×1 وجود دارد؟

فقط یک مربع لاتین 1×1 وجود دارد: [۱].

کار در کلاس

صفحه ۶۶

۱۶۳

۲ آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟

خیر. تنها دو مربع لاتین 2×2 وجود دارد: سطرهای $(21, 12)$ و $(12, 21)$. اگر هر مربع را بر خودش یا بر دیگری منطبق کنیم، درایه‌های دورقمی تکراری می‌شوند: مثلاً $(21, 12)$ با $(12, 21)$ درایه‌های $12, 21, 21, 12$ را می‌دهد و $(21, 12)$ با خودش $11, 22, 22, 11$ را می‌دهد. پس دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود ندارد.

کار در کلاس

صفحه ۶۶

۱۶۴

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین 3×3 روبه‌رو متعامدند؟
(مربع‌ها: سطرهای $123, 312, 231$ و سطرهای $123, 231, 312$)

درایه‌های نظیر را کنار هم می‌گذاریم:

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

هر ۹ عدد دورقمی $(11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33)$ متفاوت‌اند و تکراری ندارند؛ پس دو مربع متعامدند.

کار در کلاس

صفحه ۶۷

۱۶۵

۴ آیا دو مربع لاتین 4×4 زیر متعامدند؟

(A: سطرهای $1234, 4321, 1234, 2143$ — B: سطرهای $1234, 3412, 2143, 4321$)

درایه‌های نظیر را کنار هم می‌گذاریم:

۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

هر ۱۶ عدد دورقمی متمایزند (هیچ کدام تکرار نشده)؛ پس A و B متعامدند.

کار در کلاس

صفحه ۶۷

۱۶۶

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

جایگشت ۱←۲، ۲←۳، ۳←۴، ۴←۱ را روی اعضای B اعمال می‌کنیم:

۳۴	۴۳	۱۲	۲۱
۴۲	۳۱	۲۴	۱۳
۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
۲۳	۱۴	۴۱	۳۲

A و B' روی هم

۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲

B'

همه ۱۶ عدد دورقمی متمایزند؛ پس A و B' متعامدند. این نتیجه طبق مثال همین درس همیشه برقرار است: اگر A و B متعامد باشند، مربع حاصل از جایگشت روی اعضای B نیز با A متعامد است.

کار در کلاس

صفحه ۶۹

۱۶۷

۱ در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده است؟

توشه ای برای موفقیت

چون جدول مربوط به ماشین‌ها یک مربع لاتین 5×5 است. هر ستون نماینده یک کارگر است و در هر ستون (چون مربع لاتین است) هر یک از اعداد ۱ تا ۵ یعنی هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک بار آمده است. همچنین در هر سطر عدد تکراری نیست، یعنی در هر روز هیچ دو کارگری با یک ماشین کار نمی‌کنند.

۲ در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیاف‌ها دقیقاً یک بار کار می‌کند؟

چون جدول الیاف نیز یک مربع لاتین 5×5 است؛ در هر ستون (هر کارگر) هر یک از اعداد ۱ تا ۵ یعنی هر نوع الیاف دقیقاً یک بار آمده است.

۳ در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیاف‌ها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک بار به کار گرفته شده است؟

چون دو مربع A و B متعامدند؛ یعنی وقتی درایه‌های نظیر را کنار هم می‌گذاریم، هر ۲۵ عدد دورقمی (شماره ماشین، شماره الیاف) متفاوت است. چون ۲۵ حالت ممکن برای این زوج‌ها داریم و ۲۵ خانه داریم و هیچ زوجی تکرار نشده است، هر زوج (ماشین، الیاف) دقیقاً یک بار ظاهر شده است. یعنی هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته است.

۴ اگر سه برادر تقریباً هم‌سن و سال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

از دو مربع لاتین متعامد 3×3 استفاده می‌کنیم. سطرها روزها (شنبه، یکشنبه، دوشنبه) و ستون‌ها سه برادر باشند. مربع اول شماره کت و مربع دوم شماره پیراهن را نشان می‌دهد:

۱۱	۲۲	۳۳
۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱

(کت، پیراهن)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

پیراهن

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

کت

مثلاً برادر اول: روز اول کت ۱ با پیراهن ۱، روز دوم کت ۲ با پیراهن ۳، روز سوم کت ۳ با پیراهن ۲. هر برادر هر کت و هر پیراهن را یک بار می‌پوشد (لاتین بودن) و چون ۹ زوج (کت، پیراهن) همه متفاوت‌اند، هر کت با هر پیراهن دقیقاً یک بار پوشیده می‌شود (تعامد). در هر روز هم هر سه کت و هر سه پیراهن استفاده می‌شوند.

۱ اعداد ۱، ۲، ... و ۵ با نظمی خاص (به نحوه چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.
 ۲ حال مربع‌های پررنگ 5×5 وسط را در نظر بگیرید و با انتقال اعداد خارج از این مربع‌ها به داخل آنها با روش زیر، مربع‌ها را پر کرده، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۵ به دست آورید.
 (الف) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در سمت چپ آن واقع است را ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.
 (ب) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در سمت راست آن واقع است را ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.
 (پ) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در بالای مربع واقع است را ۵ خانه به پایین انتقال دهید.
 (ت) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در پایین مربع واقع است را ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

در هر دو شکل اعداد ۱ تا ۵ روی یک شبکه لوزی شکل طوری چیده شده‌اند که با هر قدم مورب یک واحد زیاد می‌شوند (در شکل (الف) در جهت بالا راست و در شکل (ب) در جهت پایین راست). در مربع 5×5 وسط فقط ۱۳ خانه (خانه‌های یک‌درمیان) پر است و ۱۲ عدد بیرون از مربع داریم. این ۱۲ عدد را طبق دستورهای (الف) تا (ت) ۵ خانه به داخل می‌بریم تا ۱۲ خانه خالی هم پر شود.
 حالت اولیه مربع وسط (خانه‌های پر) برای شکل (الف) و (ب):

۱		۲		۳
	۲		۳	
۲		۳		۴
	۳		۴	
۳		۴		۵

شکل (ب) — قبل از انتقال

۳		۴		۵
	۳		۴	
۲		۳		۴
	۲		۳	
۱		۲		۳

شکل (الف) — قبل از انتقال

پس از انتقال‌ها دو مربع زیر به دست می‌آید:

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

مربع حاصل از شکل (ب)

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

مربع حاصل از شکل (الف)

هر دو مربع لاتین‌اند (در هر سطر و هر ستون هر عدد دقیقاً یک بار آمده است) و با بررسی ۲۵ زوج متناظر، هیچ زوج تکراری ندارند؛ پس متعامدند.

۳ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر n فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n به دست آورید.

n فرد را در نظر می‌گیریم و به جای ۵ از n استفاده می‌کنیم: اعداد ۱ تا n را روی شبکه لوزی شکل ($n-1$ سطر) مانند بالا می‌چینیم و سپس اعداد بیرون از مربع $n \times n$ وسط را n خانه به سمت داخل منتقل می‌کنیم. در عمل، با شماره‌گذاری سطرها و ستون‌ها از ۰ تا $n-1$ و استفاده از نمادهای ۰ تا $n-1$ ، دو مربع حاصل چنین‌اند:

$$A(i, j) \equiv i + j, \quad B(i, j) \equiv j - i \pmod{n}$$

لاتین بودن: در هر سطر (i ثابت) با تغییر j هر یک از A و B همه باقی‌مانده‌ها را دقیقاً یک بار می‌گیرند و در هر ستون (j ثابت) نیز همین‌طور. تعامد: اگر برای دو خانه (i, j) و (i', j') مقدار A یکسان و مقدار B هم یکسان باشد، آنگاه:

$$i + j \equiv i' + j', \quad j - i \equiv j' - i'$$

با جمع دو رابطه $2j \equiv 2j' \pmod{n}$ و چون n فرد است، ۲ در پیمانه n وارون‌پذیر است؛ پس $j \equiv j'$ و سپس $i \equiv i'$. یعنی هر زوج (A, B) فقط یک بار ظاهر می‌شود و دو مربع متعامدند. برای $n=5$ همین دو مربع، با تغییر نام اعداد، همان دو مربع به دست آمده در شکل بالا هستند.

۱) می‌خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

میز ۴ جایگاه روبه‌روی هم دارد. ۴ جفت برادر را به ۴! طریق در این ۴ جایگاه (زوج‌های روبه‌رو) قرار می‌دهیم و در هر جفت، دو برادر به ۲ طریق در دو طرف می‌نشینند:

$$4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$$

۲) اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

ابتدا ۲ رقم از A و ۳ رقم از B را انتخاب می‌کنیم و سپس ۵ رقم انتخابی را در ۵ جایگاه مرتب می‌کنیم:

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$$

۳ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

الف) ۹ کتاب متمایز: $9! = 362880$

ب) کتاب‌های فیزیک را یک دسته (با ۴! جایگشت درونی) می‌گیریم. با ۵ کتاب ریاضی ۶ شیء داریم:

$$6! \times 4! = 720 \times 24 = 17280$$

پ) ابتدا ۴ کتاب فیزیک را می‌چینیم (۴! طریق). بین و کنار آنها ۵ جا ایجاد می‌شود و ۵ کتاب ریاضی باید در ۵

$$\text{جای متفاوت بنشینند: } 4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$$

ت) آن ۳ کتاب را یک دسته می‌گیریم (۳! جایگشت درونی). با ۶ کتاب دیگر ۷ شیء داریم:

$$7! \times 3! = 5040 \times 6 = 30240$$

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.

مسئله: «۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم بنشینند به طوری که دانش‌آموزان پایه دوازدهم همواره کنار هم باشند؟»

حل: ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم را یک دسته می‌گیریم؛ با ۶ نفر دیگر ۷ شیء داریم که به ۷! طریق می‌چینند و

دسته نیز درون خود ۴! جایگشت دارد: $7! \times 4!$

۵) با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

رقم ۵ دو بار، رقم ۶ یک بار و رقم ۷ سه بار تکرار شده است؛ طبق قضیه جایگشت با تکرار:

$$\frac{6!}{2! \times 1! \times 3!} = \frac{720}{12} = 60$$

۶) می‌خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف $d, d, d, c, c, a, b, a, a$ ، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

تعداد کدهای ۹ حرفی ممکن (حرف a سه بار، b یک بار، c دو بار و d سه بار) برابر است با:

$$\frac{9!}{3! \times 1! \times 2! \times 3!} = \frac{362880}{72} = 5040$$

پس حداکثر ۵۰۴۰ جعبه را می‌توان مجزا کرد.

۷) ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه‌نفره قرار بگیرند؟

اتاق‌ها از هم متمایزند. طبق قضیه (یا با ترکیب):

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = \binom{7}{2} \binom{5}{2} \binom{3}{3} = 21 \times 10 \times 1 = 210$$

۸) به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:
الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

الف) $\binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4} = 1365$

ب) ابتدا از هر نوع یک شاخه؛ ۶ شاخه باقی‌مانده دلخواه: $\binom{6+4}{4} = \binom{10}{4} = 210$

پ) نوع دوم حداقل ۲ و نوع پنجم حداقل ۴ شاخه (بیش از سه). $6=4+2$ شاخه برداشته می‌شود و ۵ شاخه باقی‌مانده دلخواه است: $\binom{5+4}{4} = \binom{9}{4} = 126$

ت) نوع سوم حذف می‌شود، پس ۴ نوع باقی می‌ماند. از نوع چهارم ۵ شاخه برمی‌داریم و ۶ شاخه باقی‌مانده را

از ۴ نوع دلخواه انتخاب می‌کنیم: $\binom{6+3}{3} = \binom{9}{3} = 84$

۹) مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده:

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10, x_i \geq 0, x_i \leq 2$

ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12, x_1 \geq 2, x_5 \geq 4$

پ) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11, 1 \leq x_i \leq 5$

ت) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, x_i \geq 0, 1 \leq x_i \leq 4$

ث) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3, x_i \geq 0, 1 \leq x_i \leq 4$

الف) x_2 تا x_5 باید دست‌کم ۱ باشند: ۴ واحد کم می‌کنیم و ۶ واحد بین ۵ متغیر پخش می‌شود:

$$\binom{6+4}{4} = \binom{10}{4} = 210$$

ب) $x_1 \geq 3$ و $x_5 \geq 4$: ۷ واحد کم می‌کنیم و ۵ واحد بین ۶ متغیر پخش می‌شود: $\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5} = 252$

پ) $\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$

ت) مقدار x_2 را ثابت می‌گیریم: $x_1 + x_3 + x_4 = 7 - x_2 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \binom{9}{4} = 36$ و $x_2 = 1 \Rightarrow$ مجموع ۴ و $\binom{6}{4} = 15$

جواب: $x_2 = 2 \Rightarrow$ مجموع ۱ و $\binom{3}{4} = 3$ جواب: $x_2 \geq 3$ ممکن نیست. جمع: $54 = 3 + 15 + 36$.

ث) چون $x_1 + x_3 + x_4$ عددی صحیح است، $\sqrt{x_2}$ باید عدد صحیح نامنفی مثل y باشد ($x_2 = y^2$) یکتا تعیین

می‌شود. پس باید $x_1 + y + x_3 + x_4 = 3$ را حل کنیم: $\binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$

۱۰) به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$$\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

۱۱) به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

ابتدا به هر نفر یک توپ می‌دهیم؛ ۴ توپ باقی‌مانده را دلخواه توزیع می‌کنیم: $\binom{4+3}{3} = \binom{7}{3} = 35$

۱۲) آیا مربع لاتین حاصل از اِعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

خیر (برای مرتبه $n \geq 2$). فرض کنید مربع جدید با جایگشت σ روی اعضای مربع اولیه به دست آمده باشد. در مربع اولیه هر عدد a دست‌کم دو بار ظاهر می‌شود (در هر سطر یک بار و $n \geq 2$ سطر). در دو خانه‌ای که مربع اولیه عدد a دارد، مربع جدید هر دو بار عدد $\sigma(a)$ را دارد. پس زوج $(a, \sigma(a))$ دو بار ظاهر می‌شود و مربع‌ها متعامد نیستند.

۱۳) مربع لاتین 3×3 مقابل را در نظر بگیرید. ($A =$ سطرها: $۳۱۲, ۱۲۳, ۲۳۱$)

الف) سطر دوم و سوم مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_1 بنامید. آیا A_1 و A متعامدند؟

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_2 بنامید. آیا A_2 و A متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت‌های الف) و ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

الف) A_1 با تعویض سطر دوم و سوم:

۳۳	۱۱	۲۲
۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳

A_1 و A روی هم

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

A_1

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

A

۹ زوج دورقمی متمایزند؛ پس A و A_1 متعامدند.

ب) ابتدا سطر اول و سوم عوض می‌شود، سپس در مربع حاصل سطر دوم و سوم:

۳۲	۱۳	۲۱
۱۳	۲۱	۳۲
۲۱	۳۲	۱۳

A_2 و A روی هم

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

A_2

زوج‌های ۳۲، ۱۳ و ۲۱ دوبار تکرار شده‌اند؛ پس A و A_2 متعامد نیستند.

(پ) ۱- خیر؛ مثال (ب) نشان می‌دهد با تعویض سطرها ممکن است مربع غیرمتعامد به دست آید. ۲- خیر؛ مثال (الف) نشان می‌دهد ممکن است مربع متعامد به دست آید. پس هیچ‌یک از دو حکم همواره درست نیست.

تمرین

صفحه ۷۲

۱۸۶

۱۴) قرار است شش مدرس T_1 ، T_2 و ... و T_6 در شش جلسه متوالی در شش کلاس C_1 ، C_2 و ... و C_6 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

از یک مربع لاتین چرخشی 6×6 استفاده می‌کنیم. سطرها جلسه‌ها (۱ تا ۶) و ستون‌ها کلاس‌های C_1 تا C_6 هستند و عدد هر خانه، شماره مدرسی است که در آن جلسه در آن کلاس تدریس می‌کند:

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۳	۴	۵	۶	۱
۳	۴	۵	۶	۱	۲
۴	۵	۶	۱	۲	۳
۵	۶	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴	۵

مثلاً در جلسه اول مدرس T_1 در C_1 ، T_2 در C_2 و ... تدریس می‌کنند و در جلسه دوم T_2 در C_1 و T_3 در C_2 و ... (و T_1 در C_6). چون هر سطر شامل همه شماره‌هاست، در هر جلسه هر مدرس فقط در یک کلاس است و چون هر ستون شامل همه شماره‌هاست، هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس می‌کند.

تمرین

صفحه ۷۲

۱۸۷

۱۵) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.

مرتبه ۳:

۱۱	۲۲	۳۳
۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱

روی هم

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

مربع دوم

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

مربع اول

مرتبه ۷: درایه سطر i و ستون j برای مربع اول $((i + j) \text{ به پیمانه } 7)$ و برای مربع دوم $((i + 2j) \text{ به پیمانه } 7)$ را (با نمادهای ۱ تا ۷) می‌نویسیم:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵

مربع دوم

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵
۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶

مربع اول

هر دو لاتین اند و وقتی روی هم می‌گذاریم ۴۹ زوج دورقمی متمایز می‌شوند:

۱۱	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵	۶۶	۷۷
۲۳	۳۴	۴۵	۵۶	۶۷	۷۱	۱۲
۳۵	۴۶	۵۷	۶۱	۷۲	۱۳	۲۴
۴۷	۵۱	۶۲	۷۳	۱۴	۲۵	۳۶
۵۲	۶۳	۷۴	۱۵	۲۶	۳۷	۴۱
۶۴	۷۵	۱۶	۲۷	۳۱	۴۲	۵۳
۷۶	۱۷	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۶۵

تمرین

صفحه ۷۲

۱۸۸

۱۶) در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند:

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند:

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند:

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

- برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.

برای آزمون

از دو مربع لاتین متعامد 7×7 استفاده می‌کنیم؛ سطرها روزهای هفته، ستون‌ها راننده‌ها. مربع اول (ماشین) و مربع دوم (مسیر) همان دو مربع مرتبه ۷ تمرین قبل‌اند: درایه (روز i ، راننده j): ماشین شماره i (j + و مسیر شماره $i + j$) به پیمانه ۷ (با نمادهای ۱ تا ۷).

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵

مسیر

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵
۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶

ماشین

هر ستون (راننده) در مربع ماشین همه ماشین‌ها را یک بار دارد (ب)؛ هر ستون در مربع مسیر همه مسیرها را یک بار دارد، پس هر راننده هر مسیر را فقط یک بار می‌پیماید؛ هر سطر (روز) هر ماشین و هر مسیر را فقط برای یک راننده دارد؛ و چون دو مربع متعامدند، هر زوج (ماشین، مسیر) دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود (ت).

تفسیر شرط (پ) در متن کتاب مبهم است؛ در حل بالا آن را به صورت «هر راننده هر مسیر را دقیقاً یک بار می‌پیماید» گرفته‌ایم.

مثال

صفحه ۷۳

۱۸۹

در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند. (کتاب راه‌حل را با جاهای خالی داده است؛ آنها را کامل کنید.)

مجموعه افرادی که فوتبال و والیبال بازی می‌کنند را F و V می‌نامیم. طبق اصل شمول:

$$|F \cup V| = |F| + |V| - |F \cap V| = 15 + 14 - 9 = 20$$

تعداد افرادی که نه در F و نه در V هستند: $|\overline{F \cup V}| = |S| - |F \cup V| = 25 - 20 = 5$

پس ۵ نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال.

توضیح

صفحه ۷۴

۱۹۰

(توضیح دهید چرا اشتراک‌های دوتایی کم و اشتراک سه‌تایی اضافه شده است؟)

در $|A| + |B| + |C|$ هر عضو مشترک بین دو مجموعه دو بار شمرده شده است؛ پس باید یک بار از اشتراک‌های دوتایی کم شود. اما عضوهایی که در هر سه مجموعه‌اند در $|A| + |B| + |C|$ سه بار شمرده می‌شوند و در سه اشتراک دوتایی هم سه بار کم می‌شوند ($3 - 3 = 0$)؛ یعنی ناخواسته به‌کلی حذف شده‌اند. برای آنکه این اعضا دقیقاً یک بار شمرده شوند باید اشتراک سه‌تایی یک بار اضافه شود.

فعالیت

صفحه ۷۴

۱۹۱

چند عدد طبیعی مانند n ، به‌طوری که $1 \leq n \leq 40$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، بر ۴ بخش‌پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش‌پذیر نباشند).
۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک مورد نظر می‌باشند؟

۲ آیا عدد ۶۰ جزء اعداد مورد نظر است؟

(۱) عدد ۱۲ بر ۳ و ۴، عدد ۲۵ بر ۵ و عدد ۱۰ بر ۵ بخش پذیر است؛ اما ۱۳ بر هیچ یک از ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نیست. پس فقط ۱۳ مورد نظر است.

(۲) خیر؛ ۶۰ بر ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر است.

فعالیت

صفحه ۷۴

۱۹۲

۳ اگر مجموعه اعدادی را که بر ۳ بخش پذیرند A و اعداد بخش پذیر بر ۴ را B و اعداد بخش پذیر بر ۵ را C بنامیم، $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ را تعریف کنید. آیا مجموعه $(\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{A})$ همه اعداد مورد نظر را شامل می شود؟

۴ آیا تساوی $(A \cup B \cup C)^- \cap \bar{A} = \bar{B} \cap \bar{C}$ برقرار است؟

مجموعه مرجع $S = \{1, 2, \dots, 400\}$ است. $A = \{n \in S \mid 3 \mid n\}$ ، $B = \{n \in S \mid 4 \mid n\}$ ، $C = \{n \in S \mid 5 \mid n\}$.
 متمم ها: $\bar{A}$ مجموعه اعداد S که بر ۳ بخش پذیر نیستند، $\bar{B}$ مجموعه اعداد S که بر ۴ بخش پذیر نیستند و $\bar{C}$ مجموعه اعداد S که بر ۵ بخش پذیر نیستند.
 (۳) بله؛ عدد مورد نظر باید هم بر ۳، هم بر ۴ و هم بر ۵ بخش پذیر نباشد، یعنی در هر سه مجموعه $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ باشد؛ پس اعداد مورد نظر دقیقاً اعضای $\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{A}$ هستند.
 (۴) بله؛ طبق قوانین دموگن: عضوی که در هیچ یک از A ، B و C نیست در هر سه مجموعه $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ هست و برعکس.

فعالیت

صفحه ۷۴

۱۹۳

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجه اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را محاسبه کنید. (منظور از [] جزء صحیح است).

$$A = \{1 \leq n \leq 400 \mid 3 \mid n\} \rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{400}{3} \right\rfloor = \dots$$

$$B = \{1 \leq n \leq 400 \mid \dots \mid n\} \rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{\dots}{\dots} \right\rfloor = \dots$$

$$C = \{1 \leq n \leq 400 \mid \dots \mid n\} \rightarrow |C| = \left\lfloor \frac{\dots}{\dots} \right\rfloor = \dots$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{400}{[3, 4]} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{400}{12} \right\rfloor = \dots$$

$$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{\dots} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{400}{15} \right\rfloor = \dots$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{\dots}{\dots} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\dots}{20} \right\rfloor = \dots$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{\dots} \right\rfloor = \dots \quad ([3, 4, 5] = [12, 5] = [60])$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 400 - (133 + \dots + \dots - 33 - \dots - 20 + 6) = \dots$$

$$|A| = \left\lfloor \frac{400}{3} \right\rfloor = 133, \quad |B| = \left\lfloor \frac{400}{4} \right\rfloor = 100, \quad |C| = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{400}{13} \right\rfloor = 33, \quad |A \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{15} \right\rfloor = 26, \quad |B \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{20} \right\rfloor = 20$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{60} \right\rfloor = 6$$

$$400 - (133 + 100 + 80 - 33 - 26 - 20 + 6) = 400 - 240 = 160$$

پس ۱۶۰ عدد طبیعی بین ۱ تا ۴۰۰ وجود دارد که بر هیچ یک از ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نیستند.

کار در کلاس

صفحه ۷۵

۱۹۴

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 350$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟ (توجه داشته باشید که $30 = [5, 6]$ ، $12 = [4, 6]$ ، $60 = [5, 4, 6]$)

مجموعه های A, B, C را اعداد بخش پذیر بر ۴، ۵ و ۶ می گیریم:

$$|A| = \lfloor 350/4 \rfloor = 87, \quad |B| = \lfloor 350/5 \rfloor = 70, \quad |C| = \lfloor 350/6 \rfloor = 58$$

$$|A \cap B| = \lfloor 350/20 \rfloor = 17, \quad |A \cap C| = \lfloor 350/12 \rfloor = 29, \quad |B \cap C| = \lfloor 350/30 \rfloor = 11, \quad |A \cap B \cap C| = \lfloor 350/60 \rfloor = 5$$

$$350 - (87 + 70 + 58 - 17 - 29 - 11 + 5) = 350 - 163 = 187$$

مثال

صفحه ۷۵

۱۹۵

اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد). (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی هایی که در هریک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد). (کتاب راه حل را با جاهای خالی داده است؛ آنها را کامل کنید).

$$A: \text{رمزهایی که رقم ۷ ندارند, } B: \text{رمزهایی که رقم ۸ ندارند, } |A| = |B| = 9^4 = 6561, \quad |A \cap B| = 8^4 = 4096$$

کل رمزها $10^4 = 10000$ است. تعداد رمزهایی که هم ۷ و هم ۸ دارند:

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = 10000 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = 10000 - 9026 = 974$$

زمان لازم (حداکثر): $974 \times 5 = 4870$.

کار در کلاس

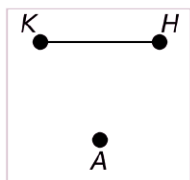
صفحه ۷۶

۱۹۶

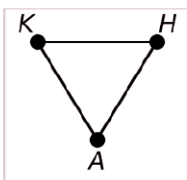
در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورمه، آبگرم و حاجی آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به طوری که پس از تکمیل راه ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می توان چنین راه هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاها را K ، A و H بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس K ، A و H می‌توان تعریف کرد به طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد. ۱ از چهار گراف ساده زیر کدام‌ها مورد نظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟ (الف: یال‌های KH و HA — ب: فقط یال KA و H تنها — پ: مثلث KHA — ت: فقط یال KH و A تنها)

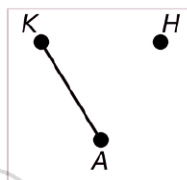
گرافی مورد نظر است که هیچ رأس ایزوله (تنها) نداشته باشد: گراف‌های «الف» و «پ» مورد نظرند. در گراف «ب» رأس H و در گراف «ت» رأس A تنها است؛ پس آنها را نباید شمرد.



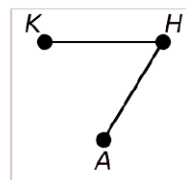
ت × (تنها A)



پ ✓



ب × (تنها H)



الف ✓

کار در کلاس

صفحه ۷۶

۱۹۷

۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با:

$$|S| = 2^{\binom{3}{2}} = \dots$$

(بین هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده در نظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحی ما، باشد یا نباشد).

بین سه روستا ۳ جاده ممکن وجود دارد و هر جاده یا ساخته می‌شود یا نمی‌شود:

$$|S| = 2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$$

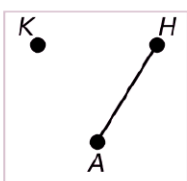
کار در کلاس

صفحه ۷۶

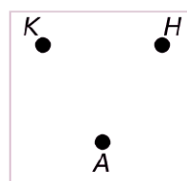
۱۹۸

۳ اگر A_k را مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای K تنها بماند تعریف کنیم، به همین صورت A_a و A_h را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول جواب را بیابید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

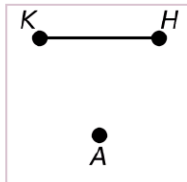
A_a و A_h مجموعه گراف‌هایی‌اند که روستای A یا H در آنها تنها است. هر کدام ۲ عضو دارند:



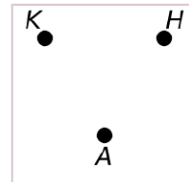
K تنها: فقط جاده AH



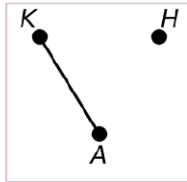
K تنها: بدون جاده



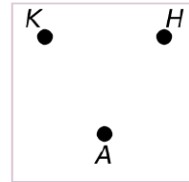
A تنها: فقط جاده KH



A تنها: بدون جاده



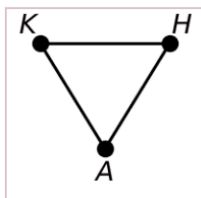
H تنها: فقط جاده KA



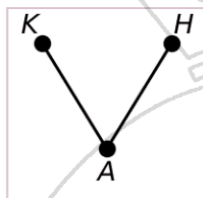
H تنها: بدون جاده

$$|A_k \cup A_a \cup A_h| = 2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1 = 4$$

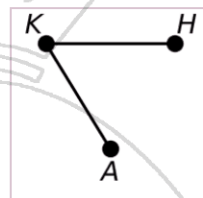
گراف‌های مورد نظر (بدون رأس تنها): $|\overline{A_k} \cap \overline{A_a} \cap \overline{A_h}| = |S| - |A_k \cup A_a \cup A_h| = 8 - 4 = 4$



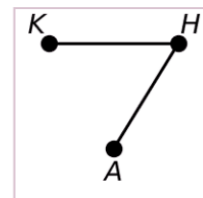
مثلث



مسیر با مرکز A



مسیر با مرکز K



مسیر با مرکز H

پس ۴ طریق وجود دارد.

کار در کلاس

صفحه ۷۶

۱۹۹

۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

(الف) $|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2$

(ب) $|A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = 1$

(پ) $|A_k \cap A_a \cap A_h| = 1$

(الف) اگر K تنها باشد، هیچ جاده‌ای از K نمی‌گذرد (KA و KH نیستند) و فقط جاده AH می‌تواند باشد یا نباشد؛ پس ۲ حالت. برای A و H نیز مشابه است.

(ب) اگر دو روستا (مثلاً K و A) تنها باشند، هر ۳ جاده ممکن حداقل یک سر در K یا A دارد؛ پس هیچ جاده‌ای نیست و فقط ۱ حالت (گراف بدون یال) داریم.

(پ) اگر هر سه روستا تنها باشند، هیچ جاده‌ای نیست؛ پس ۱ حالت.

اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و $|A| = m$ و $|B| = n$ ، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $1 \leq i \leq m$ می‌توان به n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد ($f(a_i) = b_1$ یا $f(a_i) = b_2$ یا $f(a_i) = b_n$... یا $f(a_i) = b_n$) و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با $|B|^{|A|} = n^m$. حال اگر $|A| = 5$ و $|B| = 3$ ، در این صورت می‌خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به‌طوری که $R_f = B$. (روی تمام اعضای B ، پیکانی رسم شده باشد، به چنین توابعی، تابع پوشا گفته می‌شود.)

۱ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ و تعریف کنیم،

$$A_1 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_1; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_2 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_2; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_3 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_3; 1 \leq i \leq 5\}$$

در این صورت $\overline{A_1}$ مجموعه‌ای شامل همه توابعی از A به B است که حداقل یکی از پیکان‌ها روی b_1 می‌آیند.

$$A_2 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_2; 1 \leq i \leq 5\} \quad A_3 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_3; 1 \leq i \leq 5\}$$

A_j مجموعه توابعی است که هیچ پیکانی به b_j نمی‌رسد؛ پس $\overline{A_j}$ توابعی است که حداقل یک پیکان به b_j می‌رسد.

۲ مجموعه $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

$$|S| = 3^5 = \dots, \quad |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = \dots$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = \dots, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |S| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 243 - (\dots + \dots + \dots - \dots - \dots - \dots + \dots) = \dots$$

نوشته‌ای برای موفقیت

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ مجموعه توابعی است که به هر سه عضو b_1, b_2, b_3 حداقل یک پیکان رسیده است، یعنی توابع پوشا.

$$|S| = 3^5 = 243, \quad |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = 32$$

$$|A_1 \cap A_2| = 1^5 = 1, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 243 - (32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0) = 243 - 93 = 150$$

پس ۱۵۰ تابع پوشا از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی وجود دارد.

می‌خواهیم تعداد توابع یک‌به‌یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را بشماریم.
۱ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_1)$ ،
چند راه انتخاب داریم؟

$f(a_1)$ را می‌توان به ۶ طریق تعریف کرد ($f(a_1) = b_1$ یا ... یا b_6). پس ۶ راه انتخاب داریم.

۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به‌یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_1)$ ، برای تعریف f روی
 a_2 چند راه انتخاب داریم؟

چون f یک‌به‌یک است، $f(a_2) \neq f(a_1)$ ؛ پس $f(a_2)$ را به ۵ طریق می‌توان تعریف کرد. به همین ترتیب $f(a_3)$
به ۴ طریق و $f(a_4)$ به ۳ طریق.

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r
شیء از n شیء بنویسید.

طبق اصل ضرب: $(6)_4 = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

در حالت کلی اگر $|A| = m$ و $|B| = k$ با شرط $m \leq k$ ، تعداد توابع یک‌به‌یک از A به B برابر $(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$ است.

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار
نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)
(کتاب حل را ناتمام داده است: «تعداد حالت‌های ممکن ... معادل است با پیدا کردن تعداد توابع یک‌به‌یک از
مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ... عضوی یعنی $\dots = {}_4(8) = \dots$ »)

توزیع معادل تابعی یک‌به‌یک از مجموعه ۴ خودکار به مجموعه ۸ نفر است؛ یعنی:

$$({}_4(8)) = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

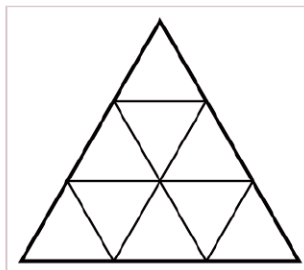
در سال حداکثر ۳۶۶ روز (سال کبیسه) وجود دارد؛ این روزها لانه‌ها و دانش‌آموزان کبوترها هستند. طبق اصل لانه کبوتری باید $366 + 1 = 367$ دانش‌آموز داشته باشیم. (با ۳۶۶ نفر ممکن است همه در روزهای مختلف متولد شده باشند).

در حالت کلی ثابت کنید در بین هر $(n+1)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانه n هم‌نهیشت‌اند).

باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر n یکی از اعداد $0, 1, \dots, n-1$ است (n لانه). $n+1$ عدد را کبوتر می‌گیریم و هر عدد را در لانه‌ای قرار می‌دهیم که برابر باقی‌مانده آن است. طبق اصل لانه کبوتری لانه‌ای وجود دارد که دست‌کم دو عدد a و b در آن قرار دارند؛ یعنی a و b باقی‌مانده یکسانی بر n دارند. پس $a-b$ بر n بخش‌پذیر است ($a \equiv b \pmod{n}$).

۱ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.

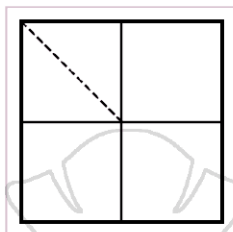
مثلث را مانند شکل با خطوط موازی اضلاع به ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ تقسیم می‌کنیم:



۱۰ نقطه کبوتر و ۹ مثلث کوچک لانه‌اند. طبق اصل لانه کبوتری یکی از مثلث‌ها حداقل دو نقطه دارد. فاصله دو نقطه درون مثلثی به ضلع ۱ از ۱ کمتر است (بزرگ‌ترین فاصله در مثلث برابر ضلع آن است و فقط بین دو رأس رخ می‌دهد). پس حداقل دو نقطه با فاصله کمتر از ۱ وجود دارد.

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.
(شکل ۱۰: مربعی به ضلع ۲ که با دو خط به ۴ مربع به ضلع ۱ تقسیم شده و یک قطر یکی از مربع‌ها رسم شده است.)

مسئله: «نشان دهید اگر ۵ نقطه دلخواه از داخل مربعی به ضلع ۲ اختیار کنیم، حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها از $\sqrt{2}$ کمتر است.»



حل: مربع را به ۴ مربع به ضلع ۱ تقسیم می‌کنیم (لانه‌ها). ۵ نقطه (کبوتر) در ۴ مربع قرار دارند؛ پس یکی از مربع‌ها دست‌کم ۲ نقطه دارد. قطر مربع واحد برابر $\sqrt{2}$ است و فاصله دو نقطه درون آن از $\sqrt{2}$ کمتر می‌باشد.

۳ نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست‌کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۴ فصل سال را لانه و ۵ نفر را کبوتر می‌گیریم. چون $5 < 4$ ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نفر در یک فصل متولد شده‌اند.

۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (راهنمایی: مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این صورت درجات رئوس از ۱ تا $n-1$ تغییر می‌کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیه رئوس از ۱ تا $n-2$ تغییر می‌کند) آیا نیازی هست حالتی را در نظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

فرض کنید گراف n رأس دارد ($n \geq 2$).

حالت (۱): هیچ رأس تنهایی نداریم. درجه هر رأس عددی از ۱ تا $n-1$ است، یعنی $n-1$ مقدار ممکن (لانه) برای n رأس (کبوتر). طبق اصل لانه کبوتری دو رأس هم‌درجه‌اند.

حالت (۲): دقیقاً یک رأس تنها داریم. این رأس به هیچ رأسی وصل نیست، پس $n-1$ رأس دیگر درجه‌هایی از ۱ تا $n-2$ دارند ($n-2$ مقدار ممکن) و آنها $n-1$ رأس‌اند؛ پس دو رأس از آنها هم‌درجه‌اند. اگر دو رأس یا بیشتر تنها باشند، همین دو رأس هر دو درجه ۰ دارند و هم‌درجه‌اند؛ پس نیازی به بررسی جداگانه آن نیست.

فعالیت

صفحه ۸۱

۲۱۲

جدول زیر را (با توجه به قرارداد n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه‌گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

(جدول سه ستون دارد: «اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر»، «تعداد کبوترها $(k+1)$ » و «تعداد لانه‌ها (n) ؛ سطرها به ترتیب برای حداقل ۲ کبوتر، حداقل ۳ کبوتر، حداقل ۴ کبوتر و ... و حداقل کبوتر است و بعضی خانه‌ها خالی است.)

تعداد لانه‌ها (n)	تعداد کبوترها $(k+1)$	کبوتر $(k+1)$ اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل
n	$n+1 \times 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر
n	$n+1 \times 2$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر
n	$n+1 \times 3$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$k \times n+1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر

نتیجه: اگر کبوترها $kn+1$ یا بیشتر باشند و در n لانه قرار بگیرند، لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k+1$ کبوتر دارد؛ این همان تعمیم اصل لانه کبوتری است (چون اگر هر لانه حداکثر k کبوتر داشت، کل کبوترها حداکثر kn می‌شد).

توشه ای برای موفقیت

کار در کلاس

صفحه ۸۲

۲۱۳

۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

ترکیب (ماه، روز هفته) $12 \times 7 = 84$ حالت دارد ($n=84$ لانه). برای ۱۰ نفر: $k+1=10$ پس $k=9$:

$$kn+1 = 9 \times 84 + 1 = 757$$

حداقل ۷۵۷ دانش‌آموز لازم است.

۵۴۲ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$k+1=\dots \Rightarrow k=\dots$$

$$kn+1=54 \Rightarrow 4n=\dots \Rightarrow n=\left[\frac{\dots}{4}\right]=\dots$$

$$k+1=5 \Rightarrow k=4$$

$$kn+1=54 \Rightarrow 4n=53 \Rightarrow n=\left[\frac{53}{4}\right]=13$$

پس حداکثر ۱۳ گلدان. (بررسی: با ۱۳ گلدان چون $54 < 13 \times 4 = 52$ گلدانی با حداقل ۵ شاخه داریم؛ با ۱۴ گلدان می‌توان ۴ شاخه در هر گلدان گذاشت و هیچ گلدانی ۵ شاخه نداشته باشد.)

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیرتکراری و مثل هم است؟
(فامیل‌هایی مثل اشتیری و اشراقی مورد نظر است.)

تعداد حالت‌های دو حرف اول و دوم غیرتکراری: الفبای فارسی ۳۲ حرف دارد، پس $31 \times 32 = 992$ حالت (لانه).
برای ۳ نفر: $k=2 \Rightarrow k+1=3$:

$$kn+1=2 \times 992+1=1985$$

پاسخ به فرض ۳۲ حرفی بودن الفبای فارسی نوشته شده است.

۱) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($90 \geq n$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

$$\left[\frac{90}{2}\right] + \left[\frac{90}{3}\right] - \left[\frac{90}{6}\right] = 45 + 30 - 15 = 60$$

۲) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

بخش پذیر بر ۴: ۵۰ عدد؛ بخش پذیر بر ۴ و ۷ (یعنی بر ۲۸): $V = \lfloor 200/28 \rfloor = 7$. پس: $50 - 7 = 43$

۳) در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند مشخص کنید:

الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟

پ) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

الف) $24 = 34 - 10$ نفر حداقل در یک رشته بازی می کنند. طبق اصل شمول (F فوتبال، V والیبال، B بسکتبال):

$$24 = 15 + 11 + 9 - 5 - 6 - 3 + |F \cap V \cap B| = 21 + |F \cap V \cap B| \Rightarrow |F \cap V \cap B| = 3$$

پس ۳ نفر هر سه رشته را بازی می کنند.

ب) فقط فوتبال: $15 - 5 - 3 + 3 = 10$

پ) والیبال ولی نه بسکتبال: $11 - 6 = 5$ (از ۱۱ والیبال، ۶ نفر بسکتبال هم بازی می کنند).

ت) فقط والیبال: $11 - 5 - 6 + 3 = 3$ ، فقط بسکتبال: $9 - 6 - 3 + 3 = 3$. پس فقط در یک رشته: $10 + 3 + 3 = 16$ نفر.

توشه ای برای موفقیت

۴) اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

A، B و C: رمزهایی که به ترتیب رقم ۷، ۲ و ۳ ندارند (ارقام ۱ تا ۹):

$$|A| = |B| = |C| = 8^5 = 32768, |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 7^5 = 16807, |A \cap B \cap C| = 6^5 = 7776$$

تعداد رمزهایی که هر سه رقم را دارند: $۳۳۹۰ = ۷۷۷۶ - ۵۰۴۲۱ + ۹۸۳۰۴ - ۵۹۰۴۹ = ۶^۵ - ۳ \cdot ۷^۵ + ۳ \cdot ۸^۵ - ۹^۵$
 زمان: $۲۰۳۴۰ = ۳۳۹۰ \times ۶$ ثانیه.

تمرین

صفحه ۸۳

۲۲۰

(۵) چه تعداد تابع چون $f: A \rightarrow B$ می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=۵$ و $|B|=۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

کل توابع: $۴^۵ = ۱۰۲۴$. توابع یک به یک: چون $|B| < |A|$ است هیچ تابع یک به یکی وجود ندارد (طبق لانه کبوتری دو عضو A به یک عضو B می‌روند): $۰ = (۴)_۵$

تمرین

صفحه ۸۳

۲۲۱

(۶) به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

معادل تعداد توابع یک به یک از ۵ کتاب به ۸ نفر: $(۸)_۵ = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۶۷۲۰$

تمرین

صفحه ۸۳

۲۲۲

(۷) به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

تعداد توابع پوشا از ۶ فیلم به ۳ داور: $۳^۶ - \binom{۳}{۱}۲^۶ + \binom{۳}{۲}۱^۶ = ۷۲۹ - ۱۹۲ + ۳ = ۵۴۰$

تمرین

صفحه ۸۳

۲۲۳

(۸) ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

سال حداکثر ۳۶۶ روز دارد (لانه‌ها) و ۳۶۸ نفر کبوتر هستند. چون $۳۶۶ < ۳۶۸$ ، طبق اصل لانه کبوتری دو نفر در یک روز متولد شده‌اند.

۹) ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لاقلاً ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

ترکیب (ماه، روز هفته): $۷ \times ۱۲ = ۸۴$ لانه. اگر در هر لانه حداکثر ۶ نفر بودند، تعداد کل حداکثر $۶ \times ۸۴ = ۵۰۴$ می‌شد. چون $۵۰۴ < ۵۰۵$ ، لانه‌ای با حداقل ۷ نفر وجود دارد.

۱۰) حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند لاقلاً ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

$kn+1=19 \times 366+1=6955 : k+1=20 \Rightarrow k=19$ و $n=366$ لانه
(اگر سال را ۳۶۵ روزه بگیریم $19 \times 365+1=6936$ می‌شود).

۱۱) ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

هر عدد یا زوج است یا فرد (۲ لانه) و ۳ عدد کبوتر داریم. پس دو عدد هم‌زوجیت‌اند. مجموع دو عدد زوج یا دو عدد فرد، زوج است.

۱۲) مجموعه اعداد $A=\{1,2,\dots,84\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

اعضای A را در ۴۲ دسته دوتایی $\{1,84\}, \{2,83\}, \dots, \{42,43\}$ (مجموع هر دسته ۸۵) افراز می‌کنیم. ۴۳ عضو انتخابی کبوتر و ۴۲ دسته لانه‌اند؛ پس دو عضو در یک دسته‌اند و مجموعشان ۸۵ است.

۱۳) مجموعه اعداد $\{۱, ۵, ۹, ۱۳, \dots, ۷۷, ۸۱, ۸۵\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

A دارای ۲۲ عضو است. دسته‌های زیر را می‌سازیم: $\{۱\}$ و $\{۴۵\}$ (تک‌عضوی؛ چون ۸۹ در A نیست و $۴۵+۴۵$ دو عضو متمایز نیست) و ۱۰ دسته دوتایی $\{۵, ۸۵\}, \{۹, ۸۱\}, \{۱۳, ۷۷\}, \dots, \{۴۱, ۴۹\}$ که مجموع هر دسته ۹۰ است. جمعاً ۱۲ دسته (لانه) و ۱۳ عدد انتخابی (کبوتر) داریم؛ پس دو عدد در یک دسته‌اند. دسته‌های تک‌عضوی فقط یک عدد دارند، پس این دو عدد در یکی از دسته‌های دوتایی‌اند و مجموعشان ۹۰ است.

۱۴) ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۶×۸ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $۸\sqrt{۲}$ باشد.

مستطیل ۶×۸ را به $۱۲ = ۴ \times ۳$ مربع ۲×۲ تقسیم می‌کنیم (۱۲ لانه). ۱۳ نقطه کبوتر است؛ پس یک مربع دو نقطه دارد. قطر مربع ۲×۲ برابر $\sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$ است و فاصله دو نقطه درون آن از $\sqrt{۸}$ کمتر است.

۱۵) ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

زوجیت مختصات (x, y) هر نقطه یکی از ۴ حالت (زوج، زوج)، (زوج، فرد)، (فرد، زوج)، (فرد، فرد) است (۴ لانه). ۵ نقطه کبوتر است؛ پس دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هم‌زوجیت‌اند. در این صورت $x_1 + x_2$ و $y_1 + y_2$ زوج‌اند و نقطه وسط $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ مختصات صحیح دارد.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

