

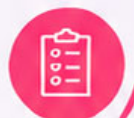
با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضیات گسسته دوازدهم

فصل سوم

عنوان فصل: ترکیبیات (شمارش)

از صفحه ۵۵ تا صفحه ۸۴ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل ترکیبیات (شمارش) آمده است.
مباحث فصل: درس ۱: مباحثی در ترکیبیات، درس ۲: روش‌هایی برای شمارش

تهیه شده در ایران توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۵۷. مثال — توضیح راه حل مثال دانش آموزان پایه دوازدهم و یازدهم	۹
۲	صفحه ۵۸. کار در کلاس — رمزهای چهاررقمی با ارقام ۱، ۱، ۱، ۲	۹
۳	صفحه ۵۹. فعالیت — جدول انتخاب سه شاخه گل از سه نوع گل	۱۰
۴	صفحه ۶۰. فعالیت — جابه جایی ستاره‌ها و خطوط عمودی	۱۰
۵	صفحه ۶۰. فعالیت — تعداد جایگشت‌های ۳ ستاره و ۲ خط عمودی	۱۱
۶	صفحه ۶۰. فعالیت — حالت کلی انتخاب n شاخه گل از k نوع گل	۱۱
۷	صفحه ۶۰. فعالیت — تعداد انتخاب‌های ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل	۱۱
۸	صفحه ۶۱. کار در کلاس — معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ با جواب مثبت	۱۲
۹	صفحه ۶۱. کار در کلاس — تعداد جواب‌های صحیح و مثبت $x_1 + \dots + x_k = n$	۱۲
۱۰	صفحه ۶۱. کار در کلاس — معادله $x_1 + \dots + x_5 = 14$ با شرط $[x_1 > 1]$ و $[x_3 > 3]$	۱۳
۱۱	صفحه ۶۱. کار در کلاس — معادله $x_1 + \dots + x_5 = 11$ با جواب مثبت	۱۳
۱۲	صفحه ۶۱. کار در کلاس — معادله $x_1 + \dots + x_6 = 12$ با $x_2 = 4$ و $[x_5 > 2]$	۱۳
۱۳	صفحه ۶۲. مثال — جدول تدریس سه مدرس در سه کلاس و سه جلسه	۱۳

- ۱۴ صفحه ۰۶۲ فعالیت — تبدیل جدول مدرس ها به جدول 3×3 از اعداد ۱۴
- ۱۵ صفحه ۰۶۲ فعالیت — وصل کردن موارد معادل ۱۴
- ۱۶ صفحه ۰۶۳ کار در کلاس — دو مربع لاتین 5×5 ۱۵
- ۱۷ صفحه ۰۶۳ کار در کلاس — تعویض جای دو سطر (ستون) در مربع لاتین ۱۵
- ۱۸ صفحه ۰۶۳ کار در کلاس — مربع لاتین چرخشی ۱۵
- ۱۹ صفحه ۰۶۴ کار در کلاس — اعمال جایگشت روی مربع های لاتین ۱۶
- ۲۰ صفحه ۰۶۶ کار در کلاس — تعداد مربع های لاتین 1×1 ۱۷
- ۲۱ صفحه ۰۶۶ کار در کلاس — مربع های لاتین 2×2 متعامد ۱۷
- ۲۲ صفحه ۰۶۶ کار در کلاس — بررسی تعامد دو مربع لاتین 3×3 ۱۷
- ۲۳ صفحه ۰۶۷ کار در کلاس — تعامد دو مربع لاتین 4×4 ۱۷
- ۲۴ صفحه ۰۶۷ کار در کلاس — ساختن 'B' از B با یک جایگشت ۱۸
- ۲۵ صفحه ۰۶۹ کار در کلاس — یک بار کار کردن هر کارگر با هر دستگاه (مثال برنامه ریزی کارگران) ۱۸
- ۲۶ صفحه ۰۶۹ کار در کلاس — یک بار کار کردن هر کارگر با هر الیاف ۱۹
- ۲۷ صفحه ۰۶۹ کار در کلاس — یک بار به کار رفتن هر الیاف در هر ماشین ۱۹
- ۲۸ صفحه ۰۶۹ کار در کلاس — لباس های سه برادر ۱۹

۲۹	صفحه ۷۰ فعالیت — ساختن دو مربع لاتین متعامد 5×5 — مرحله ۱ و ۲ (چینش اعداد و انتقال)	۲۰
۳۰	صفحه ۷۰ فعالیت — ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n فرد	۲۱
۳۱	صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۱: نشانیدن ۸ نفر دوبره دو برادر روبه روی هم	۲۱
۳۲	صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۲: کدهای ۵ رقمی با دو رقم از A و سه رقم از B	۲۱
۳۳	صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۳: چیدن ۴ کتاب فیزیک و ۵ کتاب ریاضی	۲۲
۳۴	صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۴: طرح مسئله با پاسخ $17 \times 4!$	۲۲
۳۵	صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۵: کدهای ۶ رقمی با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷	۲۲
۳۶	صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۶: کدگذاری جعبه ها با حروف a, a, b, a, c, d, d, d	۲۳
۳۷	صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۷: ۷ نفر در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره	۲۳
۳۸	صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۸: انتخاب ۱۱ شاخه گل از ۵ نوع با شرطهای مختلف	۲۳
۳۹	صفحه ۷۱ تمرین — تمرین ۹: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلات با شرط	۲۴
۴۰	صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۰: توزیع ۵ توپ یکسان بین ۳ نفر	۲۴
۴۱	صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۱: توزیع ۸ توپ یکسان بین ۴ نفر با حداقل یک توپ	۲۴
۴۲	صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۲: جایگشت روی اعضای مربع لاتین و تعامد با مربع اولیه	۲۵
۴۳	صفحه ۷۲ تمرین — تمرین ۱۳: جابه جایی سطرهای مربع لاتین 3×3	۲۵

۴۴	صفحه ۷۲ - تمرین - تمرین ۱۴: برنامه ریزی تدریس شش مدرس در شش کلاس	۲۶
۴۵	صفحه ۷۲ - تمرین - تمرین ۱۵: دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و ۷	۲۶
۴۶	صفحه ۷۲ - تمرین - تمرین ۱۶: مسابقه اتومبیل رانی با ۷ راننده، ۷ ماشین و ۷ مسیر	۲۷
۴۷	صفحه ۷۳ - مثال - کلاس ۲۵ نفری فوتبال و والیبال	۲۸
۴۸	صفحه ۷۴ - توضیح - اصل شمول برای سه مجموعه	۲۸
۴۹	صفحه ۷۴ - فعالیت - اعداد ۱ تا ۴۰۰ بدون بخش پذیری بر ۳، ۴ و ۵ - پرسش ۱ و ۲	۲۸
۵۰	صفحه ۷۴ - فعالیت - اعداد ۱ تا ۴۰۰ بدون بخش پذیری بر ۳، ۴ و ۵ - پرسش ۳ و ۴	۲۹
۵۱	صفحه ۷۴ - فعالیت - اعداد ۱ تا ۴۰۰ بدون بخش پذیری بر ۳، ۴ و ۵ - پرسش ۵ (محاسبه)	۲۹
۵۲	صفحه ۷۵ - کار در کلاس - اعداد ۱ تا ۳۵۰ بدون بخش پذیری بر ۴، ۵ و ۶	۳۰
۵۳	صفحه ۷۵ - مثال - قفل رمزدار چهار رقمی	۳۰
۵۴	صفحه ۷۶ - کار در کلاس - طراحی جاده بین سه روستا - پرسش ۱	۳۰
۵۵	صفحه ۷۶ - کار در کلاس - طراحی جاده بین سه روستا - پرسش ۲	۳۱
۵۶	صفحه ۷۶ - کار در کلاس - طراحی جاده بین سه روستا - پرسش ۳	۳۱
۵۷	صفحه ۷۶ - کار در کلاس - طراحی جاده بین سه روستا - پرسش ۴	۳۲
۵۸	صفحه ۷۷ - فعالیت - تعداد توابع پوشا از مجموعه ۵ عضوی به ۳ عضوی - پرسش ۱	۳۳

- ۵۹ صفحه ۰۷۷ فعالیت — تعداد توابع پوشا از مجموعه ۵ عضوی به ۳ عضوی — پرسش ۲ ۳۳
- ۶۰ صفحه ۰۷۸ فعالیت — تعداد توابع یک به یک از مجموعه ۴ عضوی به ۶ عضوی — پرسش ۱ ۳۴
- ۶۱ صفحه ۰۷۸ فعالیت — تعداد توابع یک به یک از مجموعه ۴ عضوی به ۶ عضوی — پرسش ۲ ۳۴
- ۶۲ صفحه ۰۷۸ فعالیت — تعداد توابع یک به یک از مجموعه ۴ عضوی به ۶ عضوی — پرسش ۳ ۳۴
- ۶۳ صفحه ۰۷۸ مثال — توزیع ۴ خودکار متفاوت بین ۸ نفر (حداکثر یک خودکار برای هر نفر) ۳۴
- ۶۴ صفحه ۰۷۹ پرسش — حداقل تعداد دانش آموزان برای هم روز تولد بودن دو نفر ۳۵
- ۶۵ صفحه ۰۸۰ تمرین — تمرین حالت کلی: $(n+1)$ عدد طبیعی و تفاضل بخش پذیر بر n ۳۵
- ۶۶ صفحه ۰۸۰ کار در کلاس — ۱۰ نقطه در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۳ ۳۵
- ۶۷ صفحه ۰۸۰ کار در کلاس — طرح مسئله از شکل مربع به ضلع ۲ ۳۶
- ۶۸ صفحه ۰۸۰ کار در کلاس — اعضای خانواده و فصل تولد ۳۶
- ۶۹ صفحه ۰۸۰ کار در کلاس — گراف ساده از مرتبه $n \geq 2$ و دو رأس هم درجه ۳۶
- ۷۰ صفحه ۰۸۱ فعالیت — تعمیم اصل لانه کبوتری (جدول) ۳۷
- ۷۱ صفحه ۰۸۲ کار در کلاس — دبیرستان: ۱۰ نفر با ماه و روز هفته تولد یکسان ۳۷
- ۷۲ صفحه ۰۸۲ کار در کلاس — ۵۴ شاخه گل و گلدان ها ۳۸
- ۷۳ صفحه ۰۸۲ کار در کلاس — همایش: ۳ نفر با دو حرف اول فامیلی یکسان ۳۸

- ۷۴ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۱: اعداد ۱ تا ۹۰ بخش پذیر بر ۲ یا ۳ ۳۸
- ۷۵ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۲: اعداد ۱ تا ۲۰۰ بخش پذیر بر ۴ ولی نه بر ۷ ۳۹
- ۷۶ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۳: کلاس ۳۴ نفری و سه رشته ورزشی ۳۹
- ۷۷ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۴: قفل با رمز ۵ رقمی بدون صفر و ارقام ۷، ۲، ۳ ۳۹
- ۷۸ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۵: توابع از مجموعه ۵ عضوی به ۴ عضوی ۴۰
- ۷۹ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۶: توزیع ۵ کتاب متفاوت بین ۸ نفر ۴۰
- ۸۰ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۷: تقسیم ۶ فیلم بین سه داور ۴۰
- ۸۱ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۸: ۳۶۸ نفر و روز تولد ۴۰
- ۸۲ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۹: ۵۰۵ دانش آموز و ماه و روز هفته تولد ۴۱
- ۸۳ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۱۰: تماشاگران مسابقه کشتی و روز تولد ۴۱
- ۸۴ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۱۱: مجموع زوج در بین سه عدد طبیعی ۴۱
- ۸۵ صفحه ۸۳ تمرین — تمرین ۱۲: زیرمجموعه ۴۳ عضوی از $\{1, \dots, 84\}$ و مجموع ۸۵ ۴۱
- ۸۶ صفحه ۸۴ تمرین — تمرین ۱۳: ۱۳ عضو از $\{1, 5, 9, \dots, 85\}$ و مجموع ۹۰ ۴۲
- ۸۷ صفحه ۸۴ تمرین — تمرین ۱۴: ۱۳ نقطه درون مستطیل 8×6 ۴۲
- ۸۸ صفحه ۸۴ تمرین — تمرین ۱۵: ۵ نقطه با مختصات صحیح و نقطه وسط ۴۲

۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم:

(الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

(ب) به صورت یک‌درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند).

(پ) اگر دانش‌آموزان پایه یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به صورت یک‌درمیان قرار داد؟
(کتاب راه‌حل را بدون توضیح نوشته است؛ خودتان راه‌حل را توضیح دهید.)

(الف) هر پایه را یک «دسته» در نظر می‌گیریم. دو دسته به ۲! طریق جابه‌جا می‌شوند، دانش‌آموزان پایه دوازدهم درون دسته‌شان به ۵! و دانش‌آموزان پایه یازدهم به ۴! طریق جابه‌جا می‌شوند. طبق اصل ضرب:

$$2! \times 4! \times 5! = 2 \times 24 \times 120 = 5760$$

(ب) از ۹ جایگاه، یک‌درمیان بودن یعنی ۵ نفر پایه دوازدهم باید در جایگاه‌های ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۴ نفر پایه یازدهم در جایگاه‌های ۲، ۴، ۶، ۸ بنشینند. برای جایگاه اول ۵ انتخاب، برای جایگاه سوم ۴ انتخاب و ... داریم و برای جایگاه‌های زوج به‌طور مشابه ۴، ۳، ۲، ۱ انتخاب. پس: $5! \times 4! = 120 \times 24 = 2880$

(پ) اکنون هر دو پایه ۵ نفرند و یک‌درمیان نشستن به دو صورت ممکن است (ردیف با دانش‌آموز پایه دوازدهم شروع شود یا با پایه یازدهم). در هر حالت $5! \times 5!$ طریق داریم؛ پس:

$$2 \times (5! \times 5!) = 2 \times 14400 = 28800$$

محاسبه کنید با ارقام ۱، ۱، ۱، ۲ چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟

اگر ۴ رقم متمایز بودند جواب ۴! بود؛ ولی چون سه رقم ۱ یکسان‌اند و جابه‌جایی آنها با هم حالت جدیدی نمی‌سازد (۳! حالت برای یک‌ها شمرده شده)، کل حالت‌ها را بر ۳! تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

این رمزها عبارت‌اند از: ۱۱۱۲، ۱۱۲۱، ۱۲۱۱ و ۲۱۱۱.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



شخصی وارد یک گل فروشی می شود و می خواهد دسته گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است).
۱ هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می دهد، شما این جدول را کامل کنید.

دسته گل انتخابی	مریم	رُز	میخک
۱ یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک	*	*	*
۲ دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم	*	-	**
۳ سه شاخه گل رُز	-	***	-
۴ یک شاخه گل میخک و دو شاخه گل رُز	-	**	*
۵ سه شاخه گل مریم	***	-	-
۶ دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل میخک	**	-	*
۷ دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز	**	*	-
۸ سه شاخه گل میخک	-	-	***
۹ دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز	-	*	**
۱۰ یک شاخه گل مریم و دو شاخه گل رُز	*	**	-

این ۱۰ حالت همه انتخاب های ممکن اند؛ سطر ۱۰ هر حالت دیگری که تکراری نباشد، یعنی «یک مریم و دو رُز»، است.

۲ آیا در هر یک از حالت های ۱ تا ۱۰ جابه جایی ستاره ها با هم دسته گل جدیدی تولید می کند؟ جابه جایی دو خط عمودی با هم چطور؟

خیر. ستاره ها همه یکسان اند (هر ستاره یک شاخه گل از همان نوع است)، پس جابه جایی دو ستاره دسته گل جدیدی نمی سازد. دو خط عمودی نیز کاملاً مثل هم اند و جابه جایی آنها هم چیدمان را عوض نمی کند؛ نوع گل هر بخش فقط با جایگاه آن (قبل از خط اول، بین دو خط، بعد از خط دوم) مشخص می شود.

۳ با توجه به قضیه جایگشت با تکرار تعداد کل جایگشت‌های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به دست آورید.

تعداد کل جایگشت‌ها $= \frac{5!}{3! \times 2!} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2} = 10$ که با ۱۰ حالت جدول فعالیت قبل هم خوانی دارد.

۴ این مسئله را در حالت کلی و برای انتخاب دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل بررسی کنید.

تعداد ستاره‌ها = تعداد شاخه گل‌های انتخابی $= n$

تعداد خطوط عمودی برای جدا کردن k نوع گل $= \dots$

تعداد کل اشیا (شامل ستاره‌ها و خطوط عمودی) $= \dots$

تعداد کل جایگشت‌ها $= \frac{[n + (k-1)]!}{n! \times \dots} = \binom{n + (k-1)}{k-1} = \dots$

برای جدا کردن k نوع گل به $k-1$ خط عمودی نیاز داریم. پس تعداد کل اشیا برابر $n + (k-1)$ است.

جابه‌جایی ستاره‌ها با هم و جابه‌جایی خطوط عمودی با هم، دسته‌گل جدیدی نمی‌سازد؛ پس باید بر $n!$ و $(k-1)!$ تقسیم کنیم:

$$\frac{[n + (k-1)]!}{n! \times (k-1)!} = \binom{n + (k-1)}{k-1}$$

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

توشه ای برای موفقیت

irantooshe.ir



می‌خواهیم تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم. اگر فرض کنیم x_1 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول و x_2 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم و x_3 تعداد ... باشد، در این صورت می‌بایست جمع انتخاب‌ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی $\dots = x_1 + x_2 + \dots$ با توجه به اینکه هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نشان‌دهنده یک انتخاب هفت‌تایی از سه نوع گل بوده و برعکس هر انتخاب

هفت‌تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح و نامنفی برای این معادله است، جدول صفحه بعد را کامل کرده و سپس تعداد جواب‌های معادله را به‌دست آورید.

x^3 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم است و معادله مورد نظر $x^1+x^2+x^3=7$ است. جدول کامل شده (چند نمونه از جواب‌ها):

(نوع اول) x^1	(نوع دوم) x^2	(نوع سوم) x^3	$x^1+x^2+x^3=7$
۱	۰	۶	$7=1+0+6$
۱	۱	۵	$7=1+1+5$
۴	۲	۱	$7=4+2+1$
۰	۷	۰	$7=0+7+0$
۱	۴	۲	$7=1+4+2$
۲	۳	۲	$7=2+3+2$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی = تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از ۳ نوع گل =

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

کار در کلاس

صفحه ۶۱

۸

۱ معادله $x^1+x^2+x^3=7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟
 (راهنمایی: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

ابتدا از هر نوع گل یک شاخه برمی‌داریم (۳ شاخه)، ۴ شاخه باقی‌مانده را دلخواه از ۳ نوع انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

کار در کلاس

صفحه ۶۱

۹

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x^1+x^2+\dots+x^k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.
 (راهنمایی: ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و...)

هر جواب صحیح و مثبت یعنی انتخاب n شاخه گل از k نوع به‌طوری که از هر نوع حداقل یک شاخه باشد. ابتدا از هر نوع یک شاخه برمی‌داریم (k شاخه). باقی‌مانده $n-k$ شاخه را به دلخواه از k نوع انتخاب می‌کنیم که طبق نتیجه فعالیت قبل به

$\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ طریق ممکن است.

کار در کلاس

صفحه ۶۱

۱۰

۳ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرطی آنکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ باشد؟

$x_1 > 1$ یعنی $x_1 \geq 2$ و $x_3 > 3$ یعنی $x_3 \geq 4$. ابتدا ۲ شاخه از نوع اول و ۴ شاخه از نوع سوم برمی داریم (در کل ۶ شاخه)؛ ۸ شاخه باقی مانده را به دلخواه از ۵ نوع انتخاب می کنیم:

$$\binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4} = 495$$

کار در کلاس

صفحه ۶۱

۱۱

۴ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$)

از هر یک از ۵ نوع یک شاخه برمی داریم؛ ۶ شاخه باقی مانده را دلخواه انتخاب می کنیم:

$$\binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210 \quad (\text{یا مستقیم } \binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210)$$

کار در کلاس

صفحه ۶۱

۱۲

۵ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرطی آنکه $x_2 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

$x_2 = 4$ ثابت است؛ پس $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$. چون جواب ها مثبت اند، $x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 1$ و $x_5 > 2$ یعنی $x_5 \geq 3$. به ترتیب $1+1+1+1+3=7$ واحد را از قبل برمی داریم؛ ۱ واحد باقی می ماند که باید بین ۵ متغیر پخش شود:

$$\binom{1+5-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5$$

مثال

صفحه ۶۲

۱۳

سه مدرس به نام های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۸-۱۰، ۱۰-۱۲ و ۲-۴ در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هریک از کلاس ها

دقیقاً یک بار باید تدریس کند. نام مدرس ها را در جدول مقابل به گونه ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

کلاس ها / جلسات	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۲-۴
A	احمدی	کریمی	عباسی
B	کریمی	عباسی	احمدی
C	عباسی	احمدی	کریمی

در هر سطر هر مدرس دقیقاً یک بار آمده (هر مدرس در هر کلاس یک بار) و در هر ستون نیز هر مدرس یک بار آمده (هیچ مدرسی در یک جلسه دو کلاس ندارد). جواب های دیگر هم ممکن است.

فعالیت

صفحه ۶۲

۱۴

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول 3×3 از اعداد به دست آورید.

احمدی = ۱، کریمی = ۲، عباسی = ۳:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

فعالیت

صفحه ۶۲

۱۵

۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.

ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.

پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.

ت) هر یک از اعداد در تمام ستون ها آمده است.

ا) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.

ب) هر یک از مدرسین در تمام کلاس ها تدریس داشته است.

ج) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.

(d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه‌ها تدریس داشته است.

سطرها نماینده کلاس‌ها و ستون‌ها نماینده جلسات اند:

- الف $\leftrightarrow$ c : عدد تکراری در یک سطر یعنی مدرسی دو بار در یک کلاس تدریس کرده است؛ چنین چیزی نداریم.
- ب $\leftrightarrow$ a : عدد تکراری در یک ستون یعنی مدرسی در یک جلسه در دو کلاس باشد؛ چنین چیزی نداریم.
- پ $\leftrightarrow$ b : هر عدد در همه سطرها آمده یعنی هر مدرس در همه کلاس‌ها تدریس کرده است.
- ت $\leftrightarrow$ d : هر عدد در همه ستون‌ها آمده یعنی هر مدرس در همه جلسه‌ها تدریس کرده است.

کار در کلاس

صفحه ۶۳

۱۶

۱ دو مربع لاتین 5×5 بنویسید.

دو نمونه از مربع‌های لاتین مرتبه ۵ (در هر سطر و هر ستون هر یک از اعداد ۱ تا ۵ دقیقاً یک بار آمده است):

۱	۲	۳	۴	۵
۳	۴	۵	۱	۲
۵	۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۵	۱
۴	۵	۱	۲	۳

مربع دوم

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

مربع اول

کار در کلاس

صفحه ۶۳

۱۷

۲ با استدلال کلامی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟

با تعویض جای دو سطر، هر سطر همان سطر قبلی است و فقط ترتیب سطرها عوض شده؛ پس همچنان در هر سطر عدد تکراری نداریم. در هر ستون نیز همان اعداد قبلی (فقط با ترتیب متفاوت) آمده‌اند؛ پس باز هم در هیچ ستونی عدد تکراری وجود ندارد. بنابراین شکل حاصل یک مربع لاتین است. استدلال برای تعویض جای دو ستون مشابه است.

کار در کلاس

صفحه ۶۳

۱۸

۳ شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن «مربع لاتین چرخشی» می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟

(سطر اول: ۱، ۲، ۳، ...، $n-1$ ، n ؛ سطر دوم: ۱، ۲، ۳، ...، $n-2$ ، $n-1$ ؛ سطر سوم: ۱، ۲، ۳، ...، $n-3$ ، ...؛ سطر آخر: ۱، ۲، ۳، ...، n)

هر سطر از سطر قبلی با یک چرخش یک خانه‌ای به راست به دست آمده است. پس هر سطر شامل همه اعداد ۱ تا n است و در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.

در هر ستون هم چون هر بار عددی که در انتهای سطر بود به ابتدای سطر بعد می‌آید، با پایین رفتن در یک ستون اعداد به ترتیب (۱، ...، $n-1$ ، n به صورت چرخشی) ظاهر می‌شوند؛ یعنی در ستون نیز همه اعداد ۱ تا n دقیقاً یک بار آمده‌اند. بنابراین مربع لاتین است.

کار در کلاس

صفحه ۶۴

۱۹

برای هر یک از مربع‌های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت‌ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به دست آورید.

(سه مربع: مربع 3×3 با سطرهای ۱۲۳، ۲۳۱، ۳۱۲؛ مربع 4×4 با سطرهای ۱۲۴۳، ۴۳۲۱، ۳۴۱۲، ۲۳۳۴؛ مربع 5×5 با سطرهای ۱۳۵۴۲، ۵۴۲۱۳، ۲۱۳۵۴، ۳۵۴۲۱، ۴۲۱۳۵)

مربع 3×3 با جایگشت $1 \leftarrow 3, 3 \leftarrow 2, 2 \leftarrow 1$ (هر عدد را با عدد متناظرش جایگزین می‌کنیم):

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

مربع جدید

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

مربع داده شده

مربع 4×4 با جایگشت $1 \leftarrow 4, 4 \leftarrow 3, 3 \leftarrow 2, 2 \leftarrow 1$:

۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲

مربع جدید

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

مربع داده شده

مربع 5×5 با جایگشت $1 \leftarrow 5, 5 \leftarrow 4, 4 \leftarrow 3, 3 \leftarrow 2, 2 \leftarrow 1$:

۵	۳	۱	۲	۴
۱	۲	۴	۵	۳
۴	۵	۳	۱	۲
۳	۱	۲	۴	۵
۲	۴	۵	۳	۱

مربع جدید

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

مربع داده شده

هر سه مربع جدید لاتین اند (در هر سطر و هر ستون همه اعداد دقیقاً یک بار آمده‌اند). جایگشت‌های دیگر هم می‌تواند انتخاب شود.

کار در کلاس

صفحه ۶۶

۲۰

۱ چند مربع لاتین 1×1 وجود دارد؟

فقط یک مربع لاتین 1×1 وجود دارد: [۱].

کار در کلاس

صفحه ۶۶

۲۱

۲ آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟

خیر. تنها دو مربع لاتین 2×2 وجود دارد: سطرهای $(21, 12)$ و $(12, 21)$. اگر هر مربع را بر خودش یا بر دیگری منطبق کنیم، درایه‌های دورقمی تکراری می‌شوند: مثلاً $(21, 12)$ با $(12, 21)$ درایه‌های $12, 21, 21, 12$ را می‌دهد و $(21, 12)$ با خودش $11, 22, 22, 11$ را می‌دهد. پس دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود ندارد.

کار در کلاس

صفحه ۶۶

۲۲

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین 3×3 روبه‌رو متعامدند؟
(مربع‌ها: سطرهای $123, 312, 231$ و سطرهای $123, 231, 312$)

درایه‌های نظیر را کنار هم می‌گذاریم:

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

هر ۹ عدد دورقمی $(11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33)$ متفاوت‌اند و تکراری ندارند؛ پس دو مربع متعامدند.

کار در کلاس

صفحه ۶۷

۲۳

۴ آیا دو مربع لاتین 4×4 زیر متعامدند؟

(A: سطرهای $1234, 4321, 1234, 2143$ — B: سطرهای $1234, 3412, 2143, 4321$)

درایه‌های نظیر را کنار هم می‌گذاریم:

۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

هر ۱۶ عدد دورقمی متمایزند (هیچ کدام تکرار نشده)؛ پس A و B متعامدند.

کار در کلاس

صفحه ۶۷

۲۴

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

جایگشت ۱←۲، ۲←۳، ۳←۴، ۴←۱ را روی اعضای B اعمال می‌کنیم:

۳۴	۴۳	۱۲	۲۱
۴۲	۳۱	۲۴	۱۳
۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
۲۳	۱۴	۴۱	۳۲

A و B' روی هم

۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲

B'

همه ۱۶ عدد دورقمی متمایزند؛ پس A و B' متعامدند. این نتیجه طبق مثال همین درس همیشه برقرار است: اگر A و B متعامد باشند، مربع حاصل از جایگشت روی اعضای B نیز با A متعامد است.

کار در کلاس

صفحه ۶۹

۲۵

۱ در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده است؟

توشه ای برای موفقیت

چون جدول مربوط به ماشین‌ها یک مربع لاتین ۵×۵ است. هر ستون نماینده یک کارگر است و در هر ستون (چون مربع لاتین است) هر یک از اعداد ۱ تا ۵ یعنی هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک بار آمده است. همچنین در هر سطر عدد تکراری نیست، یعنی در هر روز هیچ دو کارگری با یک ماشین کار نمی‌کنند.

۲ در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیاف‌ها دقیقاً یک‌بار کار می‌کند؟

چون جدول الیاف نیز یک مربع لاتین 5×5 است؛ در هر ستون (هر کارگر) هر یک از اعداد ۱ تا ۵ یعنی هر نوع الیاف دقیقاً یک بار آمده است.

۳ در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیاف‌ها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک‌بار به کار گرفته شده است؟

چون دو مربع A و B متعامدند؛ یعنی وقتی درایه‌های نظیر را کنار هم می‌گذاریم، هر ۲۵ عدد دورقمی (شماره ماشین، شماره الیاف) متفاوت است. چون ۲۵ حالت ممکن برای این زوج‌ها داریم و ۲۵ خانه داریم و هیچ زوجی تکرار نشده است، هر زوج (ماشین، الیاف) دقیقاً یک بار ظاهر شده است. یعنی هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته است.

۴ اگر سه برادر تقریباً هم‌سن و سال در خانه سه‌کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک‌بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک‌بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

از دو مربع لاتین متعامد 3×3 استفاده می‌کنیم. سطرها روزها (شنبه، یکشنبه، دوشنبه) و ستون‌ها سه برادر باشند. مربع اول شماره کت و مربع دوم شماره پیراهن را نشان می‌دهد:

۱۱	۲۲	۳۳
۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱

(کت، پیراهن)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

پیراهن

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

کت

مثلاً برادر اول: روز اول کت ۱ با پیراهن ۱، روز دوم کت ۲ با پیراهن ۳، روز سوم کت ۳ با پیراهن ۲. هر برادر هر کت و هر پیراهن را یک بار می‌پوشد (لاتین بودن) و چون ۹ زوج (کت، پیراهن) همه متفاوت‌اند، هر کت با هر پیراهن دقیقاً یک بار پوشیده می‌شود (تعامد). در هر روز هم هر سه کت و هر سه پیراهن استفاده می‌شوند.

۱ اعداد ۱، ۲، ... و ۵ با نظمی خاص (به نحوه چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.
 ۲ حال مربع‌های پررنگ 5×5 وسط را در نظر بگیرید و با انتقال اعداد خارج از این مربع‌ها به داخل آنها با روش زیر، مربع‌ها را پر کرده، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۵ به دست آورید.
 الف) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در سمت چپ آن واقع است را ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.
 ب) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در سمت راست آن واقع است را ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.
 پ) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در بالای مربع واقع است را ۵ خانه به پایین انتقال دهید.
 ت) در هر کدام از مربع‌ها، هر عدد که در پایین مربع واقع است را ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

در هر دو شکل اعداد ۱ تا ۵ روی یک شبکه لوزی شکل طوری چیده شده‌اند که با هر قدم مورب یک واحد زیاد می‌شوند (در شکل (الف) در جهت بالا راست و در شکل (ب) در جهت پایین راست). در مربع 5×5 وسط فقط ۱۳ خانه (خانه‌های یک‌درمیان) پر است و ۱۲ عدد بیرون از مربع داریم. این ۱۲ عدد را طبق دستورهای (الف) تا (ت) ۵ خانه به داخل می‌بریم تا ۱۲ خانه خالی هم پر شود.
 حالت اولیه مربع وسط (خانه‌های پر) برای شکل (الف) و (ب):

۱		۲		۳
	۲		۳	
۲		۳		۴
	۳		۴	
۳		۴		۵

شکل (ب) — قبل از انتقال

۳		۴		۵
	۳		۴	
۲		۳		۴
	۲		۳	
۱		۲		۳

شکل (الف) — قبل از انتقال

پس از انتقال‌ها دو مربع زیر به دست می‌آید:

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

مربع حاصل از شکل (ب)

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

مربع حاصل از شکل (الف)

هر دو مربع لاتین‌اند (در هر سطر و هر ستون هر عدد دقیقاً یک بار آمده است) و با بررسی ۲۵ زوج متناظر، هیچ زوج تکراری ندارند؛ پس متعامدند.

۳ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر n فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n به دست آورید.

n فرد را در نظر می‌گیریم و به جای ۵ از n استفاده می‌کنیم: اعداد ۱ تا n را روی شبکه لوزی شکل ($n-1$ سطر) مانند بالا می‌چینیم و سپس اعداد بیرون از مربع $n \times n$ وسط را n خانه به سمت داخل منتقل می‌کنیم. در عمل، با شماره‌گذاری سطرها و ستون‌ها از ۰ تا $n-1$ و استفاده از نمادهای ۰ تا $n-1$ ، دو مربع حاصل چنین‌اند:

$$A(i, j) \equiv i + j, \quad B(i, j) \equiv j - i \pmod{n}$$

لاتین بودن: در هر سطر (i ثابت) با تغییر j هر یک از A و B همه باقی‌مانده‌ها را دقیقاً یک بار می‌گیرند و در هر ستون (j ثابت) نیز همین‌طور. تعامد: اگر برای دو خانه (i, j) و (i', j') مقدار A یکسان و مقدار B هم یکسان باشد، آنگاه:

$$i + j \equiv i' + j', \quad j - i \equiv j' - i'$$

با جمع دو رابطه $2j \equiv 2j' \pmod{n}$ و چون n فرد است، ۲ در پیمانه n وارون‌پذیر است؛ پس $j \equiv j'$ و سپس $i \equiv i'$. یعنی هر زوج (A, B) فقط یک بار ظاهر می‌شود و دو مربع متعامدند. برای $n=5$ همین دو مربع، با تغییر نام اعداد، همان دو مربع به دست آمده در شکل بالا هستند.

۱) می‌خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

میز ۴ جایگاه روبه‌روی هم دارد. ۴ جفت برادر را به ۴! طریق در این ۴ جایگاه (زوج‌های روبه‌رو) قرار می‌دهیم و در هر جفت، دو برادر به ۲ طریق در دو طرف می‌نشینند:

$$4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$$

۲) اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

ابتدا ۲ رقم از A و ۳ رقم از B را انتخاب می‌کنیم و سپس ۵ رقم انتخابی را در ۵ جایگاه مرتب می‌کنیم:

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$$

۳ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

الف) ۹ کتاب متمایز: $9! = 362880$

ب) کتاب‌های فیزیک را یک دسته (با ۴! جایگشت درونی) می‌گیریم. با ۵ کتاب ریاضی ۶ شیء داریم:

$$6! \times 4! = 720 \times 24 = 17280$$

پ) ابتدا ۴ کتاب فیزیک را می‌چینیم (۴! طریق). بین و کنار آنها ۵ جا ایجاد می‌شود و ۵ کتاب ریاضی باید در ۵

$$\text{جای متفاوت بنشینند: } 4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$$

ت) آن ۳ کتاب را یک دسته می‌گیریم (۳! جایگشت درونی). با ۶ کتاب دیگر ۷ شیء داریم:

$$7! \times 3! = 5040 \times 6 = 30240$$

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.

مسئله: «۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم بنشینند به طوری که دانش‌آموزان پایه دوازدهم همواره کنار هم باشند؟»

حل: ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم را یک دسته می‌گیریم؛ با ۶ نفر دیگر ۷ شیء داریم که به ۷! طریق می‌چینند و

دسته نیز درون خود ۴! جایگشت دارد: $7! \times 4!$

۵) با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

رقم ۵ دو بار، رقم ۶ یک بار و رقم ۷ سه بار تکرار شده است؛ طبق قضیه جایگشت با تکرار:

$$\frac{6!}{2! \times 1! \times 3!} = \frac{720}{12} = 60$$

۶) می‌خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف $d, d, d, c, c, a, b, a, a$ ، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

تعداد کدهای ۹ حرفی ممکن (حرف a سه بار، b یک بار، c دو بار و d سه بار) برابر است با:

$$\frac{9!}{3! \times 1! \times 2! \times 3!} = \frac{362880}{72} = 5040$$

پس حداکثر ۵۰۴۰ جعبه را می‌توان مجزا کرد.

۷) ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه‌نفره قرار بگیرند؟

اتاق‌ها از هم متمایزند. طبق قضیه (یا با ترکیب):

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = \binom{7}{2} \binom{5}{2} \binom{3}{3} = 21 \times 10 \times 1 = 210$$

۸) به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:
الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

الف) $\binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4} = 1365$

ب) ابتدا از هر نوع یک شاخه؛ ۶ شاخه باقی‌مانده دلخواه: $\binom{6+4}{4} = \binom{10}{4} = 210$

پ) نوع دوم حداقل ۲ و نوع پنجم حداقل ۴ شاخه (بیش از سه). $6=4+2$ شاخه برداشته می‌شود و ۵ شاخه باقی‌مانده دلخواه است: $\binom{5+4}{4} = \binom{9}{4} = 126$

ت) نوع سوم حذف می‌شود، پس ۴ نوع باقی می‌ماند. از نوع چهارم ۵ شاخه برمی‌داریم و ۶ شاخه باقی‌مانده را

از ۴ نوع دلخواه انتخاب می‌کنیم: $\binom{6+3}{3} = \binom{9}{3} = 84$

۹) مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده:

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10, x_i \geq 0, x_1 \leq 2, x_5 \geq 2$

ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12, x_1 > 2, x_5 \geq 4$

پ) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11, x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$

ت) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

ث) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

الف) x_2 تا x_5 باید دست‌کم ۱ باشند: ۴ واحد کم می‌کنیم و ۶ واحد بین ۵ متغیر پخش می‌شود:

$$\binom{6+4}{4} = \binom{10}{4} = 210$$

ب) $x_1 \geq 3$ و $x_5 \geq 4$: ۷ واحد کم می‌کنیم و ۵ واحد بین ۶ متغیر پخش می‌شود: $\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5} = 252$

پ) $\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$

ت) مقدار x_2 را ثابت می‌گیریم: $x_1 + x_3 + x_4 = 7 - x_2 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \binom{9}{4} = 36$ و $x_2 = 1 \Rightarrow$ مجموع ۴ و $\binom{6}{4} = 15$

جواب: $x_2 = 2 \Rightarrow$ مجموع ۱ و $\binom{3}{4} = 3$ جواب: $x_2 \geq 3$ ممکن نیست. جمع: $54 = 3 + 15 + 36$.

ث) چون $x_1 + x_3 + x_4$ عددی صحیح است، $\sqrt{x_2}$ باید عدد صحیح نامنفی مثل y باشد ($x_2 = y^2$) یکتا تعیین

می‌شود. پس باید $x_1 + y + x_3 + x_4 = 3$ را حل کنیم: $\binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$

۱۰) به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$$\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

۱۱) به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

ابتدا به هر نفر یک توپ می‌دهیم؛ ۴ توپ باقی‌مانده را دلخواه توزیع می‌کنیم: $\binom{4+3}{3} = \binom{7}{3} = 35$

۱۲) آیا مربع لاتین حاصل از اِعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

خیر (برای مرتبه $n \geq 2$). فرض کنید مربع جدید با جایگشت σ روی اعضای مربع اولیه به دست آمده باشد. در مربع اولیه هر عدد a دست‌کم دو بار ظاهر می‌شود (در هر سطر یک بار و $n \geq 2$ سطر). در دو خانه‌ای که مربع اولیه عدد a دارد، مربع جدید هر دو بار عدد $\sigma(a)$ را دارد. پس زوج $(a, \sigma(a))$ دو بار ظاهر می‌شود و مربع‌ها متعامد نیستند.

۱۳) مربع لاتین 3×3 مقابل را در نظر بگیرید. ($A =$ سطرها: $۲۳۱, ۱۲۳, ۳۱۲$)

الف) سطر دوم و سوم مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_1 بنامید. آیا A_1 و A متعامدند؟

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را A_2 بنامید. آیا A_2 و A متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت‌های الف) و ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

الف) A_1 با تعویض سطر دوم و سوم:

۳۳	۱۱	۲۲
۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳

A_1 و A روی هم

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

A_1

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

A

۹ زوج دورقمی متمایزند؛ پس A و A_1 متعامدند.

ب) ابتدا سطر اول و سوم عوض می‌شود، سپس در مربع حاصل سطر دوم و سوم:

۳۲	۱۳	۲۱
۱۳	۲۱	۳۲
۲۱	۳۲	۱۳

A_2 و A روی هم

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

A_2

زوج‌های ۳۲، ۱۳ و ۲۱ دوبار تکرار شده‌اند؛ پس A و A_2 متعامد نیستند.

(پ) ۱- خیر؛ مثال (ب) نشان می‌دهد با تعویض سطرها ممکن است مربع غیرمتعامد به دست آید. ۲- خیر؛ مثال (الف) نشان می‌دهد ممکن است مربع متعامد به دست آید. پس هیچ‌یک از دو حکم همواره درست نیست.

تمرین

صفحه ۷۲

۴۴

۱۴) قرار است شش مدرس T_1 ، T_2 و ... و T_6 در شش جلسه متوالی در شش کلاس C_1 ، C_2 و ... و C_6 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

از یک مربع لاتین چرخشی 6×6 استفاده می‌کنیم. سطرها جلسه‌ها (۱ تا ۶) و ستون‌ها کلاس‌های C_1 تا C_6 هستند و عدد هر خانه، شماره مدرسی است که در آن جلسه در آن کلاس تدریس می‌کند:

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۳	۴	۵	۶	۱
۳	۴	۵	۶	۱	۲
۴	۵	۶	۱	۲	۳
۵	۶	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴	۵

مثلاً در جلسه اول مدرس T_1 در C_1 ، T_2 در C_2 و ... تدریس می‌کنند و در جلسه دوم T_2 در C_1 و T_3 در C_2 و ... (و T_1 در C_6). چون هر سطر شامل همه شماره‌هاست، در هر جلسه هر مدرس فقط در یک کلاس است و چون هر ستون شامل همه شماره‌هاست، هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس می‌کند.

تمرین

صفحه ۷۲

۴۵

۱۵) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.

مرتبه ۳:

۱۱	۲۲	۳۳
۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱

روی هم

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

مربع دوم

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

مربع اول

مرتبه ۷: درایه سطر i و ستون j برای مربع اول $((i + j) \text{ به پیمانه } 7)$ و برای مربع دوم $((i + 2j) \text{ به پیمانه } 7)$ را (با نمادهای ۱ تا ۷) می‌نویسیم:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵

مربع دوم

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵
۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶

مربع اول

هر دو لاتین اند و وقتی روی هم می‌گذاریم ۴۹ زوج دورقمی متمایز می‌شوند:

۱۱	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵	۶۶	۷۷
۲۳	۳۴	۴۵	۵۶	۶۷	۷۱	۱۲
۳۵	۴۶	۵۷	۶۱	۷۲	۱۳	۲۴
۴۷	۵۱	۶۲	۷۳	۱۴	۲۵	۳۶
۵۲	۶۳	۷۴	۱۵	۲۶	۳۷	۴۱
۶۴	۷۵	۱۶	۲۷	۳۱	۴۲	۵۳
۷۶	۱۷	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۶۵

تمرین

صفحه ۷۲

۴۶

۱۶) در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

- برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.

پروژه اول
برای موفقیت

از دو مربع لاتین متعامد 7×7 استفاده می‌کنیم؛ سطرها روزهای هفته، ستون‌ها راننده‌ها. مربع اول (ماشین) و مربع دوم (مسیر) همان دو مربع مرتبه ۷ تمرین قبل‌اند: درایه (روز i ، راننده j): ماشین شماره i (j + و مسیر شماره $i + j$) به پیمانه ۷ (با نمادهای ۱ تا ۷).

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵

مسیر

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵
۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶

ماشین

هر ستون (راننده) در مربع ماشین همه ماشین‌ها را یک بار دارد (ب)؛ هر ستون در مربع مسیر همه مسیرها را یک بار دارد، پس هر راننده هر مسیر را فقط یک بار می‌پیماید؛ هر سطر (روز) هر ماشین و هر مسیر را فقط برای یک راننده دارد؛ و چون دو مربع متعامدند، هر زوج (ماشین، مسیر) دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود (ت).

تفسیر شرط (پ) در متن کتاب مبهم است؛ در حل بالا آن را به صورت «هر راننده هر مسیر را دقیقاً یک بار می‌پیماید» گرفته‌ایم.

مثال

صفحه ۷۳

۴۷

در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند. (کتاب راه‌حل را با جاهای خالی داده است؛ آنها را کامل کنید.)

مجموعه افرادی که فوتبال و والیبال بازی می‌کنند را F و V می‌نامیم. طبق اصل شمول:

$$|F \cup V| = |F| + |V| - |F \cap V| = 15 + 14 - 9 = 20$$

تعداد افرادی که نه در F و نه در V هستند: $|\overline{F \cup V}| = |S| - |F \cup V| = 25 - 20 = 5$

پس ۵ نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال.

توضیح

صفحه ۷۴

۴۸

(توضیح دهید چرا اشتراک‌های دوتایی کم و اشتراک سه‌تایی اضافه شده است؟)

در $|A| + |B| + |C|$ هر عضو مشترک بین دو مجموعه دو بار شمرده شده است؛ پس باید یک بار از اشتراک‌های دوتایی کم شود. اما عضوهایی که در هر سه مجموعه‌اند در $|A| + |B| + |C|$ سه بار شمرده می‌شوند و در سه اشتراک دوتایی هم سه بار کم می‌شوند ($3 - 3 = 0$)؛ یعنی ناخواسته به‌کلی حذف شده‌اند. برای آنکه این اعضا دقیقاً یک بار شمرده شوند باید اشتراک سه‌تایی یک بار اضافه شود.

فعالیت

صفحه ۷۴

۴۹

چند عدد طبیعی مانند n ، به‌طوری که $1 \leq n \leq 40$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، بر ۴ بخش‌پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش‌پذیر نباشند).
۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک مورد نظر می‌باشند؟

۲ آیا عدد ۶۰ جزء اعداد مورد نظر است؟

(۱) عدد ۱۲ بر ۳ و ۴، عدد ۲۵ بر ۵ و عدد ۱۰ بر ۵ بخش پذیر است؛ اما ۱۳ بر هیچ یک از ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نیست. پس فقط ۱۳ مورد نظر است.

(۲) خیر؛ ۶۰ بر ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر است.

۵۰

صفحه ۷۴

فعالیت

۳ اگر مجموعه اعدادی را که بر ۳ بخش پذیرند A و اعداد بخش پذیر بر ۴ را B و اعداد بخش پذیر بر ۵ را C بنامیم، $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ را تعریف کنید. آیا مجموعه $(\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{A})$ همه اعداد مورد نظر را شامل می شود؟
۴ آیا تساوی $(A \cup B \cup C)^- \cap \bar{A} = (\bar{B} \cap \bar{C})$ برقرار است؟

مجموعه مرجع $S = \{1, 2, \dots, 400\}$ است. $A = \{n \in S \mid 3 \mid n\}$ ، $B = \{n \in S \mid 4 \mid n\}$ ، $C = \{n \in S \mid 5 \mid n\}$.
متنم ها: $\bar{A}$ مجموعه اعداد S که بر ۳ بخش پذیر نیستند، $\bar{B}$ مجموعه اعداد S که بر ۴ بخش پذیر نیستند و $\bar{C}$ مجموعه اعداد S که بر ۵ بخش پذیر نیستند.
(۳) بله؛ عدد مورد نظر باید هم بر ۳، هم بر ۴ و هم بر ۵ بخش پذیر نباشد، یعنی در هر سه مجموعه $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ باشد؛ پس اعداد مورد نظر دقیقاً اعضای $\bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{A}$ هستند.
(۴) بله؛ طبق قوانین دموگان: عضوی که در هیچ یک از A ، B و C نیست در هر سه مجموعه $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ و $\bar{C}$ هست و برعکس.

۵۱

صفحه ۷۴

فعالیت

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجه اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را محاسبه کنید. (منظور از [] جزء صحیح است).

$$A = \{1 \leq n \leq 400 \mid 3 \mid n\} \rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{400}{3} \right\rfloor = \dots$$

$$B = \{1 \leq n \leq 400 \mid \dots \mid n\} \rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{400}{\dots} \right\rfloor = \dots$$

$$C = \{1 \leq n \leq 400 \mid \dots \mid n\} \rightarrow |C| = \left\lfloor \frac{400}{\dots} \right\rfloor = \dots$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{400}{\left\lfloor \frac{400}{3} \right\rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{400}{133} \right\rfloor = \dots$$

$$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{\dots} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{400}{150} \right\rfloor = \dots$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{\dots} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{400}{200} \right\rfloor = \dots$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{\dots} \right\rfloor = \dots \quad ([3, 4, 5] = [12, 5] = 60)$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 400 - (133 + \dots + \dots - 33 - \dots - 20 + 6) = \dots$$

$$|A| = \left\lfloor \frac{400}{3} \right\rfloor = 133, \quad |B| = \left\lfloor \frac{400}{4} \right\rfloor = 100, \quad |C| = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{400}{13} \right\rfloor = 33, \quad |A \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{15} \right\rfloor = 26, \quad |B \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{20} \right\rfloor = 20$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{400}{60} \right\rfloor = 6$$

$$400 - (133 + 100 + 80 - 33 - 26 - 20 + 6) = 400 - 240 = 160$$

پس ۱۶۰ عدد طبیعی بین ۱ تا ۴۰۰ وجود دارد که بر هیچ یک از ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نیستند.

کار در کلاس

صفحه ۷۵

۵۲

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 350$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟ (توجه داشته باشید که $30 = [5, 6]$ ، $12 = [4, 6]$ ، $60 = [5, 4, 6]$)

مجموعه های A, B, C را اعداد بخش پذیر بر ۴، ۵ و ۶ می گیریم:

$$|A| = \lfloor 350/4 \rfloor = 87, \quad |B| = \lfloor 350/5 \rfloor = 70, \quad |C| = \lfloor 350/6 \rfloor = 58$$

$$|A \cap B| = \lfloor 350/20 \rfloor = 17, \quad |A \cap C| = \lfloor 350/12 \rfloor = 29, \quad |B \cap C| = \lfloor 350/30 \rfloor = 11, \quad |A \cap B \cap C| = \lfloor 350/60 \rfloor = 5$$

$$350 - (87 + 70 + 58 - 17 - 29 - 11 + 5) = 350 - 163 = 187$$

مثال

صفحه ۷۵

۵۳

اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد). (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی هایی که در هریک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد). (کتاب راه حل را با جاهای خالی داده است؛ آنها را کامل کنید).

$$A: \text{رمزهایی که رقم ۷ ندارند, } B: \text{رمزهایی که رقم ۸ ندارند, } |A| = |B| = 9^4 = 6561, \quad |A \cap B| = 8^4 = 4096$$

کل رمزها $10^4 = 10000$ است. تعداد رمزهایی که هم ۷ و هم ۸ دارند:

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = 10000 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = 10000 - 9026 = 974$$

زمان لازم (حداکثر): $974 \times 5 = 4870$.

کار در کلاس

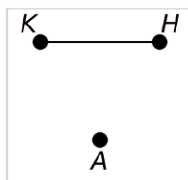
صفحه ۷۶

۵۴

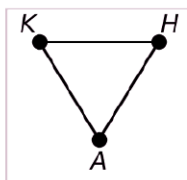
در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورهه، آبگرم و حاجی آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به طوری که پس از تکمیل راه ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می توان چنین راه هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاها را K ، A و H بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس K ، A و H می‌توان تعریف کرد به‌طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد. ۱ از چهار گراف ساده زیر کدام‌ها مورد نظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟ (الف: یال‌های KH و HA — ب: فقط یال KA و H تنها — پ: مثلث KHA — ت: فقط یال KH و A تنها)

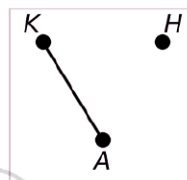
گرافی مورد نظر است که هیچ رأس ایزوله (تنها) نداشته باشد: گراف‌های «الف» و «پ» مورد نظرند. در گراف «ب» رأس H و در گراف «ت» رأس A تنها است؛ پس آنها را نباید شمرد.



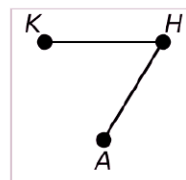
ت × (تنها A)



پ ✓



ب × (تنها H)



الف ✓

کار در کلاس

صفحه ۷۶

۵۵

۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با:

$$|S| = 2^{\binom{3}{2}} = \dots$$

(بین هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده در نظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحی ما، باشد یا نباشد).

بین سه روستا ۳ جاده ممکن وجود دارد و هر جاده یا ساخته می‌شود یا نمی‌شود:

$$|S| = 2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$$

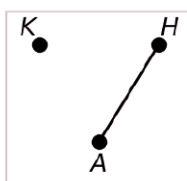
کار در کلاس

صفحه ۷۶

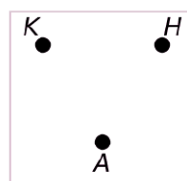
۵۶

۳ اگر A_k را مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای K تنها بماند تعریف کنیم، به همین صورت A_a و A_h را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول جواب را بیابید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

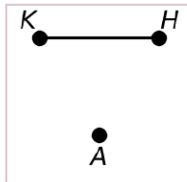
A_a و A_h مجموعه گراف‌هایی‌اند که روستای A یا H در آنها تنها است. هر کدام ۲ عضو دارند:



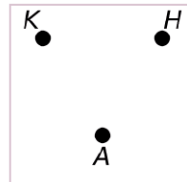
K تنها: فقط جاده AH



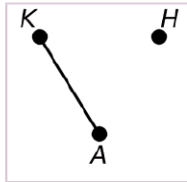
K تنها: بدون جاده



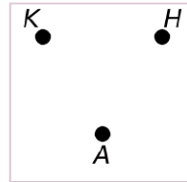
A تنها: فقط جاده KH



A تنها: بدون جاده



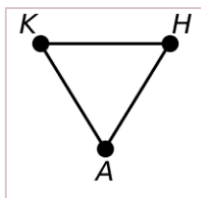
H تنها: فقط جاده KA



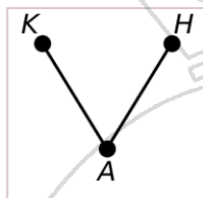
H تنها: بدون جاده

$$|A_k \cup A_a \cup A_h| = 2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1 = 4$$

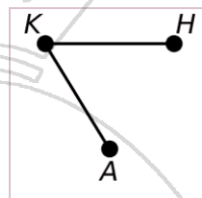
گراف‌های مورد نظر (بدون رأس تنها): $|\overline{A_k} \cap \overline{A_a} \cap \overline{A_h}| = |S| - |A_k \cup A_a \cup A_h| = 8 - 4 = 4$



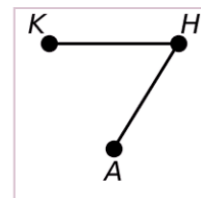
مثلث



مسیر با مرکز A



مسیر با مرکز K



مسیر با مرکز H

پس ۴ طریق وجود دارد.

کار در کلاس

صفحه ۷۶

۵۷

۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

(الف) $|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2$

(ب) $|A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = 1$

(پ) $|A_k \cap A_a \cap A_h| = 1$

الف) اگر K تنها باشد، هیچ جاده‌ای از K نمی‌گذرد (KA و KH نیستند) و فقط جاده AH می‌تواند باشد یا نباشد؛ پس ۲ حالت. برای A و H نیز مشابه است.

ب) اگر دو روستا (مثلاً K و A) تنها باشند، هر ۳ جاده ممکن حداقل یک سر در K یا A دارد؛ پس هیچ جاده‌ای نیست و فقط ۱ حالت (گراف بدون یال) داریم.

پ) اگر هر سه روستا تنها باشند، هیچ جاده‌ای نیست؛ پس ۱ حالت.

اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و $|A| = m$ و $|B| = n$ ، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $1 \leq i \leq m$ می‌توان به n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد ($f(a_i) = b_1$ یا $f(a_i) = b_2$ یا $f(a_i) = b_n$... یا $f(a_i) = b_n$) و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با $|B|^{|A|} = n^m$. حال اگر $|A| = 5$ و $|B| = 3$ ، در این صورت می‌خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به طوری که $R_f = B$. (روی تمام اعضای B ، پیکانی رسم شده باشد، به چنین توابعی، تابع پوشا گفته می‌شود.)

۱ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ و تعریف کنیم،

$$A_1 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_1; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_2 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_2; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_3 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_3; 1 \leq i \leq 5\}$$

در این صورت $\overline{A_1}$ مجموعه‌ای شامل همه توابعی از A به B است که حداقل یکی از پیکان‌ها روی b_1 می‌آیند.

$$A_2 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_2; 1 \leq i \leq 5\} \quad A_3 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_3; 1 \leq i \leq 5\}$$

A_j مجموعه توابعی است که هیچ پیکانی به b_j نمی‌رسد؛ پس $\overline{A_j}$ توابعی است که حداقل یک پیکان به b_j می‌رسد.

۲ مجموعه $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

$$|S| = 3^5 = \dots, \quad |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = \dots$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = \dots, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 243 - (\dots + \dots + \dots - \dots - \dots - \dots + \dots) = \dots$$

توضیحی برای موفقیت

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ مجموعه توابعی است که به هر سه عضو b_1, b_2, b_3 حداقل یک پیکان رسیده است، یعنی توابع پوشا.

$$|S| = 3^5 = 243, \quad |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = 32$$

$$|A_1 \cap A_2| = 1^5 = 1, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 243 - (32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0) = 243 - 93 = 150$$

پس ۱۵۰ تابع پوشا از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی وجود دارد.

می‌خواهیم تعداد توابع یک‌به‌یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را بشماریم.
۱ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_1)$ ،
چند راه انتخاب داریم؟

$f(a_1)$ را می‌توان به ۶ طریق تعریف کرد ($f(a_1) = b_1$ یا ... یا b_6). پس ۶ راه انتخاب داریم.

۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به‌یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_1)$ ، برای تعریف f روی
 a_2 چند راه انتخاب داریم؟

چون f یک‌به‌یک است، $f(a_2) \neq f(a_1)$ ؛ پس $f(a_2)$ را به ۵ طریق می‌توان تعریف کرد. به همین ترتیب $f(a_3)$
به ۴ طریق و $f(a_4)$ به ۳ طریق.

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r
شیء از n شیء بنویسید.

طبق اصل ضرب: $(6)_4 = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

در حالت کلی اگر $|A| = m$ و $|B| = k$ با شرط $m \leq k$ ، تعداد توابع یک‌به‌یک از A به B برابر $(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$ است.

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار
نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)
(کتاب حل را ناتمام داده است: «تعداد حالت‌های ممکن ... معادل است با پیدا کردن تعداد توابع یک‌به‌یک از
مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ... عضوی یعنی $\dots = {}_4(8) = \dots$ »)

توزیع معادل تابعی یک‌به‌یک از مجموعه ۴ خودکار به مجموعه ۸ نفر است؛ یعنی:

$$({}_4(8)) = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

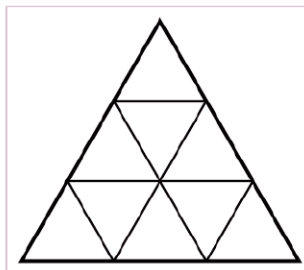
در سال حداکثر ۳۶۶ روز (سال کبیسه) وجود دارد؛ این روزها لانه‌ها و دانش‌آموزان کبوترها هستند. طبق اصل لانه کبوتری باید $366 + 1 = 367$ دانش‌آموز داشته باشیم. (با ۳۶۶ نفر ممکن است همه در روزهای مختلف متولد شده باشند).

در حالت کلی ثابت کنید در بین هر $(n+1)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانه n هم‌نهیشت‌اند).

باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر n یکی از اعداد $0, 1, \dots, n-1$ است (n لانه). $n+1$ عدد را کبوتر می‌گیریم و هر عدد را در لانه‌ای قرار می‌دهیم که برابر باقی‌مانده آن است. طبق اصل لانه کبوتری لانه‌ای وجود دارد که دست‌کم دو عدد a و b در آن قرار دارند؛ یعنی a و b باقی‌مانده یکسانی بر n دارند. پس $a-b$ بر n بخش‌پذیر است ($a \equiv b \pmod{n}$).

۱ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.

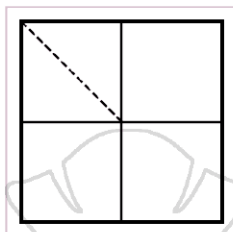
مثلث را مانند شکل با خطوط موازی اضلاع به ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ تقسیم می‌کنیم:



۱۰ نقطه کبوتر و ۹ مثلث کوچک لانه‌اند. طبق اصل لانه کبوتری یکی از مثلث‌ها حداقل دو نقطه دارد. فاصله دو نقطه درون مثلثی به ضلع ۱ از ۱ کمتر است (بزرگ‌ترین فاصله در مثلث برابر ضلع آن است و فقط بین دو رأس رخ می‌دهد). پس حداقل دو نقطه با فاصله کمتر از ۱ وجود دارد.

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.
(شکل ۱۰: مربعی به ضلع ۲ که با دو خط به ۴ مربع به ضلع ۱ تقسیم شده و یک قطر یکی از مربع‌ها رسم شده است.)

مسئله: «نشان دهید اگر ۵ نقطه دلخواه از داخل مربعی به ضلع ۲ اختیار کنیم، حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها از $\sqrt{2}$ کمتر است.»



حل: مربع را به ۴ مربع به ضلع ۱ تقسیم می‌کنیم (لانه‌ها). ۵ نقطه (کبوتر) در ۴ مربع قرار دارند؛ پس یکی از مربع‌ها دست‌کم ۲ نقطه دارد. قطر مربع واحد برابر $\sqrt{2}$ است و فاصله دو نقطه درون آن از $\sqrt{2}$ کمتر می‌باشد.

۳ نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست‌کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۴ فصل سال را لانه و ۵ نفر را کبوتر می‌گیریم. چون $4 < 5$ ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نفر در یک فصل متولد شده‌اند.

۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (راهنمایی: مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این صورت درجات رئوس از ۱ تا $n-1$ تغییر می‌کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیه رئوس از ۱ تا $n-2$ تغییر می‌کند) آیا نیازی هست حالتی را در نظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

فرض کنید گراف n رأس دارد ($n \geq 2$).

حالت (۱): هیچ رأس تنهایی نداریم. درجه هر رأس عددی از ۱ تا $n-1$ است، یعنی $n-1$ مقدار ممکن (لانه) برای n رأس (کبوتر). طبق اصل لانه کبوتری دو رأس هم‌درجه‌اند.

حالت (۲): دقیقاً یک رأس تنها داریم. این رأس به هیچ رأسی وصل نیست، پس $n-1$ رأس دیگر درجه‌هایی از ۱ تا $n-2$ دارند ($n-2$ مقدار ممکن) و آنها $n-1$ رأس‌اند؛ پس دو رأس از آنها هم‌درجه‌اند. اگر دو رأس یا بیشتر تنها باشند، همین دو رأس هر دو درجه ۰ دارند و هم‌درجه‌اند؛ پس نیازی به بررسی جداگانه آن نیست.

فعالیت

صفحه ۸۱

۷۰

جدول زیر را (با توجه به قرارداد n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه‌گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

(جدول سه ستون دارد: «اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر»، «تعداد کبوترها» $(kn+1)$ و «تعداد لانه‌ها» (n) ؛ سطرها به ترتیب برای حداقل ۲ کبوتر، حداقل ۳ کبوتر، حداقل ۴ کبوتر و ... و حداقل کبوتر است و بعضی خانه‌ها خالی است.)

تعداد لانه‌ها (n)	تعداد کبوترها $(kn+1)$	کبوتر $(k+1)$ اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل
n	$n+1 \times 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر
n	$n+1 \times 2$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر
n	$n+1 \times 3$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$k \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر

نتیجه: اگر کبوترها $kn+1$ یا بیشتر باشند و در n لانه قرار بگیرند، لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k+1$ کبوتر دارد؛ این همان تعمیم اصل لانه کبوتری است (چون اگر هر لانه حداکثر k کبوتر داشت، کل کبوترها حداکثر kn می‌شد).

توشه ای برای موفقیت

کار در کلاس

صفحه ۸۲

۷۱

۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

ترکیب (ماه، روز هفته) $12 \times 7 = 84$ حالت دارد ($n=84$ لانه). برای ۱۰ نفر: $k+1=10$ پس $k=9$:

$$kn+1 = 9 \times 84 + 1 = 757$$

حداقل ۷۵۷ دانش‌آموز لازم است.

۵۴۲ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$k+1=\dots \Rightarrow k=\dots$$

$$kn+1=54 \Rightarrow 4n=\dots \Rightarrow n=\left[\frac{\dots}{4}\right]=\dots$$

$$k+1=5 \Rightarrow k=4$$

$$kn+1=54 \Rightarrow 4n=53 \Rightarrow n=\left[\frac{53}{4}\right]=13$$

پس حداکثر ۱۳ گلدان. (بررسی: با ۱۳ گلدان چون $54 < 13 \times 4 = 52$ گلدانی با حداقل ۵ شاخه داریم؛ با ۱۴ گلدان می‌توان ۴ شاخه در هر گلدان گذاشت و هیچ گلدانی ۵ شاخه نداشته باشد.)

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیرتکراری و مثل هم است؟
(فامیل‌هایی مثل اشتري و اشراقی مورد نظر است.)

تعداد حالت‌های دو حرف اول و دوم غیرتکراری: الفبای فارسی ۳۲ حرف دارد، پس $31 \times 32 = 992$ حالت (لانه).
برای ۳ نفر: $k=2 \Rightarrow k+1=3$:

$$kn+1=2 \times 992+1=1985$$

پاسخ به فرض ۳۲ حرفی بودن الفبای فارسی نوشته شده است.

۱) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($90 \geq n$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

$$\left[\frac{90}{2}\right] + \left[\frac{90}{3}\right] - \left[\frac{90}{6}\right] = 45 + 30 - 15 = 60$$

۲) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

بخش پذیر بر ۴: ۵۰ عدد؛ بخش پذیر بر ۴ و ۷ (یعنی بر ۲۸): $V = \lfloor 200/28 \rfloor = 7$. پس: $50 - 7 = 43$

۳) در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند مشخص کنید:

الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟

پ) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

الف) $24 = 34 - 10$ نفر حداقل در یک رشته بازی می کنند. طبق اصل شمول (F فوتبال، V والیبال، B بسکتبال):

$$24 = 15 + 11 + 9 - 5 - 6 - 3 + |F \cap V \cap B| = 21 + |F \cap V \cap B| \Rightarrow |F \cap V \cap B| = 3$$

پس ۳ نفر هر سه رشته را بازی می کنند.

ب) فقط فوتبال: $15 - 5 - 3 + 3 = 10$

پ) والیبال ولی نه بسکتبال: $11 - 6 = 5$ (از ۱۱ والیبال، ۶ نفر بسکتبال هم بازی می کنند).

ت) فقط والیبال: $11 - 5 - 6 + 3 = 3$ ، فقط بسکتبال: $9 - 6 - 3 + 3 = 3$. پس فقط در یک رشته: $10 + 3 + 3 = 16$ نفر.

توشه ای برای موفقیت

۴) اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

A، B و C: رمزهایی که به ترتیب رقم ۷، ۲ و ۳ ندارند (ارقام ۱ تا ۹):

$$|A| = |B| = |C| = 8^5 = 32768, |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 7^5 = 16807, |A \cap B \cap C| = 6^5 = 7776$$

تعداد رمزهایی که هر سه رقم را دارند: $۳۳۹۰ = ۷۷۷۶ - ۵۰۴۲۱ + ۹۸۳۰۴ - ۵۹۰۴۹ = ۶^۵ - ۳ \cdot ۷^۵ + ۳ \cdot ۸^۵ - ۹^۵$
 زمان: $۲۰۳۴۰ = ۳۳۹۰ \times ۶$ ثانیه.

تمرین

صفحه ۸۳

۷۸

۵) چه تعداد تابع چون $f: A \rightarrow B$ می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=۵$ و $|B|=۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

کل توابع: $۴^۵ = ۱۰۲۴$. توابع یک‌به‌یک: چون $|B| < |A|$ است هیچ تابع یک‌به‌یکی وجود ندارد (طبق لانه کبوتری دو عضو A به یک عضو B می‌روند): $۰ = ۴_۵$

تمرین

صفحه ۸۳

۷۹

۶) به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

معادل تعداد توابع یک‌به‌یک از ۵ کتاب به ۸ نفر: $۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۶۷۲۰ = ۸_۵$

تمرین

صفحه ۸۳

۸۰

۷) به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

تعداد توابع پوشا از ۶ فیلم به ۳ داور: $۳^۶ - \binom{۳}{۱}۲^۶ + \binom{۳}{۲}۱^۶ = ۷۲۹ - ۱۹۲ + ۳ = ۵۴۰$

تمرین

صفحه ۸۳

۸۱

۸) ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

سال حداکثر ۳۶۶ روز دارد (لانه‌ها) و ۳۶۸ نفر کبوتر هستند. چون $۳۶۶ < ۳۶۸$ ، طبق اصل لانه کبوتری دو نفر در یک روز متولد شده‌اند.

۹) ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لاقلاً ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

ترکیب (ماه، روز هفته): $۸۴ = ۷ \times ۱۲$ لانه. اگر در هر لانه حداکثر ۶ نفر بودند، تعداد کل حداکثر $۶ \times ۸۴ = ۵۰۴$ می‌شد. چون $۵۰۴ < ۵۰۵$ ، لانه‌ای با حداقل ۷ نفر وجود دارد.

۱۰) حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند لاقلاً ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

$n=۳۶۶$ لانه و $k=۱۹ \Rightarrow k+۱=۲۰$: $kn+۱=۱۹ \times ۳۶۶+۱=۶۹۵۵$
(اگر سال را ۳۶۵ روزه بگیریم $۱۹ \times ۳۶۵+۱=۶۹۳۶$ می‌شود).

۱۱) ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

هر عدد یا زوج است یا فرد (۲ لانه) و ۳ عدد کبوتر داریم. پس دو عدد هم‌زوجیت‌اند. مجموع دو عدد زوج یا دو عدد فرد، زوج است.

۱۲) مجموعه اعداد $A=\{۱,۲,...,۸۴\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

اعضای A را در ۴۲ دسته دوتایی $\{۱,۸۴\}, \{۲,۸۳\}, \dots, \{۴۲,۴۳\}$ (مجموع هر دسته ۸۵) افراز می‌کنیم. ۴۳ عضو انتخابی کبوتر و ۴۲ دسته لانه‌اند؛ پس دو عضو در یک دسته‌اند و مجموعشان ۸۵ است.

۱۳) مجموعه اعداد $\{۱, ۵, ۹, ۱۳, \dots, ۷۷, ۸۱, ۸۵\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

A دارای ۲۲ عضو است. دسته‌های زیر را می‌سازیم: $\{۱\}$ و $\{۴۵\}$ (تک‌عضوی؛ چون ۸۹ در A نیست و $۴۵+۴۵$ دو عضو متمایز نیست) و ۱۰ دسته دوتایی $\{۵, ۸۵\}, \{۹, ۸۱\}, \{۱۳, ۷۷\}, \dots, \{۴۱, ۴۹\}$ که مجموع هر دسته ۹۰ است. جمعاً ۱۲ دسته (لانه) و ۱۳ عدد انتخابی (کبوتر) داریم؛ پس دو عدد در یک دسته‌اند. دسته‌های تک‌عضوی فقط یک عدد دارند، پس این دو عدد در یکی از دسته‌های دوتایی‌اند و مجموعشان ۹۰ است.

۱۴) ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۶×۸ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $۸\sqrt{۲}$ باشد.

مستطیل ۶×۸ را به $۱۲ = ۴ \times ۳$ مربع ۲×۲ تقسیم می‌کنیم (۱۲ لانه). ۱۳ نقطه کبوتر است؛ پس یک مربع دو نقطه دارد. قطر مربع ۲×۲ برابر $\sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$ است و فاصله دو نقطه درون آن از $\sqrt{۸}$ کمتر است.

۱۵) ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

زوجیت مختصات (x, y) هر نقطه یکی از ۴ حالت (زوج، زوج)، (زوج، فرد)، (فرد، زوج)، (فرد، فرد) است (۴ لانه). ۵ نقطه کبوتر است؛ پس دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هم‌زوجیت‌اند. در این صورت x_1+x_2 و y_1+y_2 زوج‌اند و نقطه وسط $\left(\frac{x_1+x_2}{۲}, \frac{y_1+y_2}{۲}\right)$ مختصات صحیح دارد.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

