با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضیات گسسته دوازدهم
فصل دوم

عنوان فصل: گراف و مدل‌سازی

از صفحه‌ی ۳۱ تا صفحه‌ی ۵۴ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل گراف و مدل‌سازی آمده است.

مباحث فصل: درس ۱: معرفی گراف، درس ۲: مدل‌سازی با گراف

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۳۲ · پرسش — مسئلهٔ پل‌های کونیگسبرگ ۷

۲ صفحه ۳۳ · مثال — گراف نتایج بازی‌های فوتبال ۷

۳ صفحه ۳۴ · مسئله — طرح سؤال دیگر از نمودار مثال قبل ۷

۴ صفحه ۳۴ · کار در کلاس — رسم گراف از روی مجموعهٔ رئوس و یال‌ها ۷

۵ صفحه ۳۵ · توجه — نوشتن V(G) و E(G) برای دو شکل ۸

۶ صفحه ۳۶ · کار در کلاس — درجهٔ رأس‌های شکل ۸ ..... ۸

۷ صفحه ۳۸ · مسئله — درجهٔ رأس در G و مکمل آن ۹

۸ صفحه ۳۸ · مسئله — گراف کامل ۹

۹ صفحه ۳۸ · مسئله — دور به طول ۵ در شکل ۱۷ ..... ۱۰

۱۰ صفحه ۳۹ · فعالیت — رسم سه گراف و رابطهٔ مجموع درجات با تعداد یال‌ها ۱۰

۱۱ صفحه ۳۹ · فعالیت — اثبات رابطهٔ مجموع درجات رئوس ۱۱

۱۲ صفحه ۴۰ · اثبات — چرایِ اثبات نتیجه: تعداد رأس‌های فرد زوج است ۱۲

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۴۰ · فعالیت — دوستی در یک جمع ۷ نفره ۱۲
۱۴ صفحه ۴۰ · فعالیت — وجود مسیری به طول حداقل ۴ ۱۳
۱۵ صفحه ۴۰ · کار در کلاس — تعداد یال‌های گراف k-منتظم و گراف کامل ۱۳
۱۶ صفحه ۴۱ · تمرین — تمرین ۱: گراف با V(G) و E(G) مفروض ۱۴
۱۷ صفحه ۴۱ · تمرین — تمرین ۲: شکل ۲۱ ۱۴
۱۸ صفحه ۴۱ · تمرین — تمرین ۳: گراف با NG(v۱) پنج‌عضوی ۱۵
۱۹ صفحه ۴۱ · تمرین — تمرین ۴: رسم گراف از مجموعه‌های همسایگی ۱۵
۲۰ صفحه ۴۱ · تمرین — تمرین ۵: مکمل گراف شکل ۲۲ ۱۶
۲۱ صفحه ۴۲ · تمرین — تمرین ۶: Δ و δ گراف K_p با ۳۶ یال ۱۶
۲۲ صفحه ۴۲ · تمرین — تمرین ۷: رسم گراف‌های کامل مرتبهٔ ۱ تا ۵ ۱۶
۲۳ صفحه ۴۲ · تمرین — تمرین ۸: گراف r-منتظم از مرتبهٔ n ۱۶
۲۴ صفحه ۴۲ · تمرین — تمرین ۹: گراف ۵ رأسی با رأس‌های تنها ۱۸
۲۵ صفحه ۴۲ · تمرین — تمرین ۱۰: هفت نفر و دست‌دادن ۱۸
۲۶ صفحه ۴۲ · تمرین — تمرین ۱۱: دوست‌ها در شبکهٔ اجتماعی ۱۹

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۷ صفحه ۴۲ · تمرین — تمرین ۱۲: گراف ۹ رأسی با دورهای مشخص ۱۹
۲۸ صفحه ۴۲ · تمرین — تمرین ۱۳: مسیر در گراف با $\delta(G) \geq K$ ۲۰
۲۹ صفحه ۴۲ · تمرین — تمرین ۱۴: گراف ۴ رأسی K-منتظم ۲۰
۳۰ صفحه ۴۲ · تمرین — تمرین ۱۵: گراف ۵ رأسی K-منتظم ۲۱
۳۱ صفحه ۴۴ · پرسش — مدل‌سازی تقاطع‌ها و دستگاه‌های خودپرداز با گراف ۲۱
۳۲ صفحه ۴۵ · پرسش — چرایِ مدل‌سازی ایستگاه‌های رادیویی ۲۲
۳۳ صفحه ۴۶ · کار در کلاس — مجموعه‌های احاطه‌گر در گراف شکل ۵ ۲۲
۳۴ صفحه ۴۷ · کار در کلاس — تبدیل مجموعهٔ احاطه‌گر به مینیمال ۲۴
۳۵ صفحه ۴۷ · کار در کلاس — مجموعه‌های احاطه‌گر در شکل ۷ ۲۴
۳۶ صفحه ۴۷ · فعالیت — سقف و کف (نماد جزء صحیح) و تاکسی کارمندان ۲۵
۳۷ صفحه ۴۸ · فعالیت — حداقل رأس لازم برای احاطهٔ شکل ۸ (گراف ۱۰ رأسی) ۲۵
۳۸ صفحه ۴۹ · کار در کلاس — مجموعهٔ احاطه‌گر در شبکهٔ ۱۶ رایانه‌ای (شکل ۹) ۲۶
۳۹ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — همهٔ ۷-مجموعه‌های مثال قبل و عدد احاطه‌گری شکل ۱۱ ۲۸
۴۰ صفحه ۵۱ · فعالیت — محاسبهٔ ۷ برای شکل ۱۳ (پاسخ چراها) ۲۹

irantooshe.ir

۴۱ صفحه ۵۲ · تمرین — تمرین ۱: ایستگاه‌های رادیویی ۲۹
۴۲ صفحه ۵۲ · تمرین — تمرین ۲: بیمارستان‌های بین روستاها ۳۰
۴۳ صفحه ۵۲ · تمرین — تمرین ۳: عدد احاطه‌گری پنج گراف ۳۰
۴۴ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۴: ۱ = γ(G) ۳۱
۴۵ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۵: γ(Cn) و γ(Pn) ۳۲
۴۶ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۶: کران پایین برای گراف k-منتظم ۳۲
۴۷ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۷: گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی با کمترین γ ۳۲
۴۸ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۸: گراف ۶ رأسی با γ مشخص و روش رسم گراف n رأسی با γ = k ۳۲
۴۹ صفحه ۵۳ · تمرین — تمرین ۹: γ-مجموعهٔ یکتا و غیریکتا ۳۳
۵۰ صفحه ۵۴ · تمرین — تمرین ۱۰: حالت کلی γ-مجموعهٔ یکتا و غیریکتا (n ≥ ۴) ۳۴
۵۱ صفحه ۵۴ · تمرین — تمرین ۱۱: گراف P۱۲ ۳۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۳۲ پرسش

آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها، به نقطهٔ شروع حرکت بازگشت؟

خیر. اویلر این مسئله را با گراف مدل کرد: هر ناحیهٔ خشکی یک رأس و هر پل یک یال است. درجهٔ رأس‌های w, x, y, z به ترتیب ۵، ۳، ۳ و ۳ است؛ یعنی هر چهار رأس درجهٔ فرد دارند.

اگر مسیری بسته وجود داشته باشد که از هر یال دقیقاً یک بار بگذرد، هر بار که از یک رأس وارد می‌شویم باید از آن خارج شویم؛ پس درجهٔ هر رأس باید زوج باشد. چون رأس‌های این گراف فرد هستند، چنین حرکتی امکان‌پذیر نیست.

۲ صفحه ۳۳ مثال

مشخص کنید تیم a با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد، در بازی‌هایی که تا اینجا انجام شده است کدام تیم‌ها بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند؟

از اطلاعات مسئله: a از b و e برده و به c باخته است؛ یعنی تیم a با سه تیم b، c و e بازی کرده است. پس **تیم a با تیم d بازی نکرده است** (در نمودار، بین a و d یالی وجود ندارد).

برد هر تیم برابر تعداد یال‌هایی است که از آن تیم خارج شده‌اند: a (برد از b و ۲ :(e برد = ۶ امتیاز؛ b برد از ۱ :(d برد = ۳ امتیاز؛ c برد از a و ۲ :(e برد = ۶ امتیاز؛ d :۰ امتیاز؛ e برد از ۳ :(d امتیاز.

بنابراین **تیم‌های a و c** هر کدام با ۶ امتیاز بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند.

۳ صفحه ۳۴ مسئله

سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گرافِ مثال قبل بتوان به آن جواب داد.

نمونه سؤال: «کدام تیم‌ها فقط یک بازی را برده‌اند و کدام تیم هیچ بازی را نبرده است؟»

پاسخ: از رأس‌های b و e فقط یک یال خارج می‌شود، پس این دو تیم هر کدام یک برد دارند؛ از رأس d هیچ یالی خارج نشده است، پس تیم d هیچ بازی را نبرده است. (سؤال‌های دیگر: کدام تیم‌ها دو بازی انجام داده‌اند؟ تیم c از چه تیم‌هایی برده است؟)

۴ صفحه ۳۴ کار در کلاس

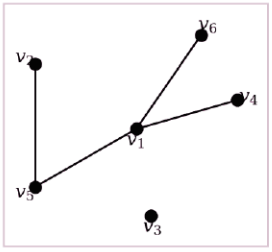
دو مجموعهٔ V(G) و E(G) به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

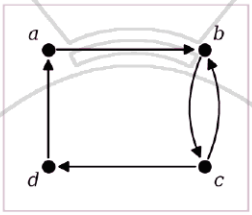
الف) $V(G) = \{v1, v2, ..., v6\}$ ، $E(G) = \{v1v4, v2v5, v6v1, v5v1\}$

ب) $V(G) = \{a, b, c, d\}$ ، $E(G) = \{(a,b), (b,c), (c,b), (c,d), (d,a)\}$

الف) گراف ساده با ۶ رأس و ۴ یال (رأس v3 تنها است):



ب) این گراف جهت‌دار است؛ هر یال یک زوج مرتب است و جهت آن از رأس اول به رأس دوم می‌باشد. بین b و c دو یال با جهت‌های مخالف وجود دارد:



۵ صفحه ۳۵ توجه

به‌طور مثال با نوشتن مجموعه‌های V(G) و E(G) برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.

$V(G1) = \{ ... \}$ ، $E(G1) = \{ ... \}$ ، $V(G2) = \{ ... \}$ ، $E(G2) = \{ ... \}$

در هر دو شکل ۵ رأس و ۶ یال وجود دارد:

$V(G1) = V(G2) = \{v1, v2, v3, v4, v5\}$

$E(G1) = E(G2) = \{v1v2, v1v3, v1v4, v2v4, v3v4, v4v5\}$

چون مجموعهٔ رئوس و مجموعهٔ یال‌های دو شکل یکسان است، هر دو شکل یک گراف را نمایش می‌دهند (فقط روش رسم آنها فرق می‌کند).

۶ صفحه ۳۶ کار در کلاس

درجهٔ سایر رئوس گرافِ شکل ۸ را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج‌اند.

$deg(v1) = 3$, $deg(v2) = 2$, $deg(v3) = 3$, $deg(v4) = 2$, $deg(v5) = 4$, $deg(v6) = 1$, $deg(v7) = 1$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

رأس‌های فرد: **v1, v3, v6, v7** ؛ رأس‌های زوج: **v2, v4, v5**.

۷ صفحه ۳۸ مسئله

مسئله ۱: اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأس آن باشد و dG(v) و dḠ(v) به ترتیب درجهٔ رأس v در گراف‌های G و Ḡ باشند، مقدار dG(v) + dḠ(v) را به‌دست آورید.

مسئله ۲: یک گراف n رأسی حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

مسئله ۳: اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار q(G) + q(Ḡ) را به‌دست آورید.

مسئله ۱

رأس v می‌تواند با هر یک از n−۱ رأس دیگر مجاور باشد. هر یال vu یا در G است یا در Ḡ و در هر دو نیست). پس $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - ۱$.

مسئله ۲

حداکثر یال وقتی است که هر دو رأس مجاور باشند؛ یعنی گراف کامل. در این حالت هر رأس درجهٔ n−۱ دارد، مجموع درجات $n(n - ۱)$ و تعداد یال‌ها $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است.

مسئله ۳

هر زوج رأس دقیقاً در یکی از G یا Ḡ یال دارد؛ پس $q(G) + q(\bar{G}) = \frac{n(n-۱)}{۲}$.

۸ صفحه ۳۸ مسئله

مسئله ۱: یک گراف کامل p رأسی چند یال دارد؟

مسئله ۲: اگر G یک گراف p رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌های گراف‌های G ، Ḡ و Kp وجود دارد؟

مسئله ۳: مکمل گراف کامل چه نوع گرافی است؟

مسئله ۱

در گراف کامل هر رأس با p−۱ رأس دیگر مجاور است؛ مجموع درجات $p(p - ۱)$ و تعداد یال‌ها $\frac{p(p-۱)}{۲}$ است.

مسئله ۲

$q(G) + q(\bar{G}) = q(K_p) = \frac{p(p-۱)}{۲}$ ؛ یعنی مجموع یال‌های G و مکمل آن برابر تعداد یال‌های K_p است.

مسئله ۳

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

در K_p هر دو رأس مجاورند، پس در مکمل آن هیچ دو رأسی مجاور نیست؛ مکمل گراف کامل، **گراف تهی** (p رأس تنها و بدون یال) است.

۹ صفحه ۳۸ **مسئله**

در گراف شکل ۱۷، دوری به طول ۵ بیابید.

یالهای گراف: $uv, uz, uw, vz, vw, zw, zy, yw, yx, wx$. یک دور به طول ۵:

$u\ z\ y\ w\ v\ u$ ← یال‌های uv, vw, wy, yz, zu همگی در گراف هستند و رأس‌ها دو به دو متمایزند.

۱۰ صفحه ۳۹ **فعالیت**

۱) سه گراف دلخواه رسم کنید.

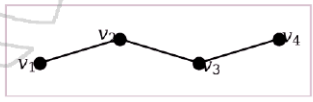
۲) مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی را که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.

۳) تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.

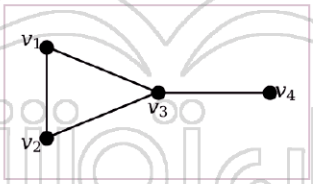
۴) حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.

۵) پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده و در این باره بحث کنید.

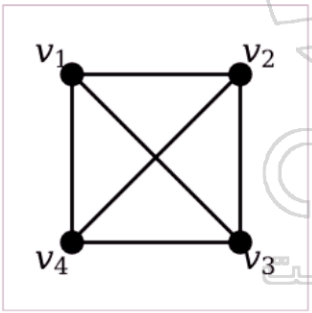
۱) سه گراف نمونه:



G۱



G۲



G۳

۲ و ۳) مجموع درجات و تعداد یال‌ها:

گراف	درجات رئوس	مجموع درجات	تعداد یال‌ها
G1	۱, ۲, ۲, ۱	۶	۳
G2	۱, ۳, ۲, ۲	۸	۴
G3	۳, ۳, ۳, ۳	۱۲	۶

۴ و ۵) حدس

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

در هر سه گراف مجموع درجات دو برابر تعداد یال‌هاست؛ حدس می‌زنیم برای هر گراف $\sum deg(v) = 2q$ که در آن q تعداد یال‌هاست. دلیل: هر یال دقیقاً به دو رأس وصل است و در درجهٔ هر یک از آن دو رأس یک بار شمرده می‌شود.

۱۱ صفحه ۳۹ **فعالیت**

۱) یک گراف دلخواه مانند G با n رأس v1, v2, ..., vn و m یال e1, e2, ..., em در نظر بگیرید.

۲) تمام یال‌های گراف G را حذف کنید.

۳) مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ تعداد یال‌های گراف حاصل چند است و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟

۴) یال e1 را در جای خود (بین همان دو رأسی که e1 قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سه سؤال ۳ جواب دهید.

۵) تمام یال‌های e2, ..., em را یکی‌یکی در جای خود قرار دهید تا به گراف اولیهٔ G برسید و پس از اضافه کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید.

۶) آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟

۷) برای تساوی $\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = deg(v_1) + \cdots + deg(v_n) = 2m$ استدلال خود را بیان نمایید.

1. پس از حذف تمام یال‌ها گرافی با n رأس تنها به‌دست می‌آید.
2. گراف حاصل، گراف تهی است.
3. مجموع درجات برابر ۰ و تعداد یال‌ها نیز ۰ است؛ مجموع درجات دو برابر تعداد یال‌هاست (۰ = ۲ × ۰).
4. با افزودن e1 درجهٔ هر یک از دو سر آن یک واحد زیاد می‌شود؛ مجموع درجات برابر ۲ و تعداد یال‌ها ۱ است؛ باز هم مجموع درجات = ۲ × (تعداد یال‌ها).
5. با افزودن هر یال، مجموع درجات دو واحد (یک واحد برای هر سر یال) و تعداد یال‌ها یک واحد زیاد می‌شود؛ پس همواره مجموع درجات دو برابر تعداد یال‌هاست. در پایان (پس از افزودن m یال) مجموع درجات برابر 2m است.
6. خیر؛ مجموع درجات برابر 2m است که عددی زوج است.
7. هر یال به دقیقاً دو رأس وصل است؛ پس در جمع درجات رئوس، هر یال دقیقاً دو بار شمرده می‌شود (یک بار برای هر سر آن). بنابراین مجموع درجات برابر 2m است.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱۲ صفحه ۴۰ اثبات

(اثبات نتیجه) ... مجموع deg(v) برای v در B زوج‌اند. (چرا؟) بنابراین مجموع deg(v) برای v در A نیز عددی زوج است و این نتیجه می‌دهد که n(A) عددی زوج است. (چرا؟)

مجموع درجات رئوس زوج: هر جمله زوج است و مجموع اعداد زوج، زوج است. (چرا اول)

مجموع درجات رئوس فرد: مجموع کل درجات برابر ۲) qزوج) و مجموع درجات رئوس زوج نیز زوج است؛ پس تفاضل آنها یعنی مجموع درجات رئوس) Aرئوس فرد) زوج است.

چرا n(A) زوج است: مجموع تعدادی عدد فرد فقط وقتی زوج است که تعداد آنها زوج باشد (مجموع تعداد فردی عدد فرد، فرد می‌شود). پس تعداد رأس‌های فرد زوج است.

۱۳ صفحه ۴۰ فعالیت

یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه رابطهٔ دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند و یا با هم دوست نیستند و هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اکنون:

الف) گرافِ G رأسی ۷ را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموز متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.

ب) با استفاده از قضیهٔ قبل نشان دهید که امکان ندارد درجهٔ تمام رئوس گرافِ حاصل برابر با ۳ باشد.

پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید که اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

الف)

گراف G دارای ۷ رأس است؛ هر دانش‌آموز یک رأس و هر دوستی بین دو نفر یک یال بین دو رأس متناظر. درجهٔ هر رأس برابر تعداد دوستان آن دانش‌آموز در جمع است.

ب)

اگر درجهٔ هر ۷ رأس برابر ۳ باشد، مجموع درجات ۲۱ = ۳ × ۷ می‌شود که عددی فرد است؛ اما مجموع درجات رئوس هر گراف برابر q۲ و زوج است. تناقض؛ پس چنین گرافی وجود ندارد.

پ)

فرض کنیم تعداد افراد جمع n عددی فرد باشد و همهٔ آنها تعداد فردی دوست داشته باشند. آنگاه گراف متناظر n رأس دارد و همهٔ رأس‌هایش فرد است؛ طبق نتیجه، تعداد رأس‌های فرد هر گراف زوج است، ولی n فرد است. تناقض؛ پس چنین چیزی ممکن نیست.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۴ صفحه ۴۰ **فعالیت**

فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \geq 4$. می‌خواهیم نشان دهیم که G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

۱) رأس دلخواه v1 را در G در نظر می‌گیریم. حتماً v1 به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس v2 باشد.

۲) حتماً v2 به رأسی به جز رأس v1 متصل است. (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v3 باشد.

۳) حتماً v3 به رأسی از مجموعهٔ $V(G) - \{v1, v2\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v4 باشد.

۴) حتماً v4 به رأسی از مجموعهٔ $V(G) - \{v1, v2, v3\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم که آن رأس v5 باشد.

۵) مسیر v5 v4 v3 v2 v1 یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.

1. چون درجهٔ هر رأس دست‌کم ۴ است ($\delta(G) \leq 4$)، v1 دست‌کم ۴ همسایه دارد؛ پس به رأس دیگری متصل است.
2. درجهٔ v2 دست‌کم ۴ است ولی فقط یکی از همسایه‌هایش (v1) می‌تواند نام برده‌شده باشد؛ پس حداقل ۳ همسایهٔ دیگر دارد.
3. v3 دست‌کم ۴ همسایه دارد و از میان {v1, v2} حداکثر ۲ تا همسایهٔ آن‌اند (خودش همسایهٔ خودش نیست)؛ پس رأسی خارج از این مجموعه همسایهٔ آن است.
4. v4 دست‌کم ۴ همسایه دارد و حداکثر ۳ تا از آنها در {v1, v2, v3} قرار دارند؛ پس همسایه‌ای خارج از آن مجموعه دارد و آن را v5 می‌نامیم.
5. رأس‌های v1, ..., v5 دو به دو متمایز و هر دو رأس متوالی مجاورند؛ پس این یک مسیر با ۴ یال، یعنی به طول ۴ است.

۱۵ صفحه ۴۰ **کار در کلاس**

در هر یک از حالت‌های زیر تعداد یال‌های گراف G را به‌دست آورید.

الف) G یک گراف n رأسی k – منتظم است.

ب) G یک گراف n رأسی کامل است. ($G = K_n$)

الف) مجموع درجات nk است و برابر $2q$؛ پس $q = \frac{nk}{2}$.

ب) گراف کامل n رأسی $(n-1)$–منتظم است؛ با $k = n-1$ در قسمت الف: $q = \frac{n(n-1)}{2}$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۶ صفحه ۴۱ تمرین

۱) گراف G با مجموعهٔ رأس‌های V(G) = {a,b,c,d,e,f} و مجموعهٔ یال‌های E(G) = {ab,ac,cd,ef,db,cf,be} مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.

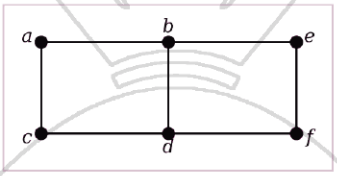
الف) مرتبه و اندازهٔ گراف G را بنویسید.

ب) درجهٔ رأس‌های G را مشخص نمایید.

پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

ت) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟

ث) گراف H با مجموعهٔ رأس‌های V(H) = {v1, v2, v3, v4} و مجموعهٔ یال‌های E(H) = {v1v2, v1v3, v2v3, v2v4, v3v4, v4v1} مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (پ) در مورد گراف H پاسخ دهید.



الف) مرتبه p = ۶ و اندازه q = ۷.

ب) deg a = ۲ ، deg b = ۳ ، deg c = ۳ ، deg d = ۲ ، deg e = ۲ ، deg f = ۲.

پ) ۲ + ۳ + ۳ + ۲ + ۲ + ۲ = ۱۴ = ۲ × ۷ (برابر دو برابر تعداد یال‌ها).

ت) رأس‌های c و) یال‌های cf و ef).

ث) گراف H

الف) مرتبه ۴ و اندازه ۶ (۶ یال داریم). ب) هر رأس با سه رأس دیگر مجاور است (هر ۶ زوج ممکن یال هستند)، پس deg همهٔ رأس‌ها ۳ است و H گراف کامل K4 است. پ) مجموع درجات ۴ × ۳ = ۱۲ = ۲ × ۶.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷ صفحه ۴۱ تمرین

۲) گراف G) شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌های V(G) و E(G) را بنویسید.

ب) Δ(G) و δ(G) را مشخص نمایید.

پ) مجموعهٔ همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

ت) اگر NG(x) = {a, c} ، آنگاه x کدام رأس است؟

الف) V(G) = {a, b, c, d, e, f, g} ؛ E(G) = {ab, bc, af, ae, ce, cd, de}.

ب) درجه‌ها: a:۳ ، b:۲ ، c:۳ ، d:۲ ، e:۳ ، f:۱ ، g:۰ ؛ پس Δ(G) = ۳ و δ(G) = ۰.

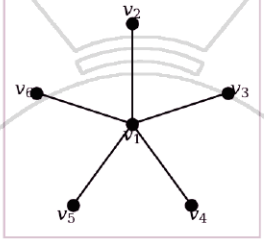
پ) N(f) = {a} ؛ N(g) = ∅ ؛ N(e) = {a, c, d}.

ت) رأسی که همسایه‌هایش دقیقاً a و c باشند، رأس b است؛ x = b.

۱۸ صفحه ۴۱ تمرین

۳) گراف G با مجموعهٔ رأس‌های V(G) = {v1, v2, v3, v4, v5, v6} مفروض است. اگر NG(v1) دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های NG(vi) برای ۶ ≤ i ≥ 2 تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

v1 با هر ۵ رأس دیگر مجاور است. هر یک از v2, ..., v6 تنها یک همسایه دارد که باید v1 باشد. پس G گراف ستاره‌ای با مرکز v1 است:



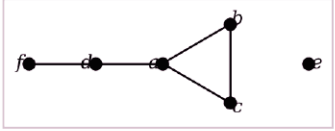
۱۹ صفحه ۴۱ تمرین

۴) در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های V(G) = {a, b, c, d, e, f} داریم:

NG(a) = {b, c, d} ، NG(b) = {a, c} ، NG(c) = {a, b} ، NG(d) = {a, f} ، NG(e) = { } ، NG(f) = {d}

گراف G را رسم و اندازهٔ آن را مشخص کنید.

یال‌ها: (ab, ac, ad, bc, df با تقارن همسایگی‌ها کنترل می‌شود). e رأس تنها است.



اندازهٔ گراف: (۵ = qمجموع درجات ۱۰ = ۱ + ۰ + ۲ + ۲ + ۲ + ۳).

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

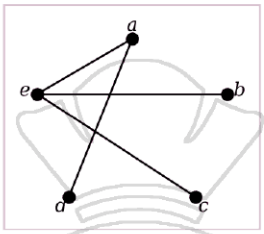
irantooshe.ir

۲۰ صفحه ۴۱ تمرین

۵) گراف G شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجات رأس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\bar{G}$ را تعیین نمایید.

G دارای ۵ رأس و ۶ یال (ab, ac, bc, bd, cd, de) است؛ پس $\bar{G}$ دارای $\frac{۵ \times ۴}{۲} - ۶ = ۴$ یال است و مجموع درجات رأس‌های $\bar{G}$ برابر $۲ \times ۴ = ۸$ است.

درجهٔ a در G برابر ۲ و درجهٔ c برابر ۳ است؛ در $\bar{G}$ طبق مسئلهٔ ۱: $d_G + d_{\bar{G}} = n - ۱ = ۴$): $\deg a = ۴ - ۲ = ۲$ و $\deg c = ۴ - ۳ = ۱$.



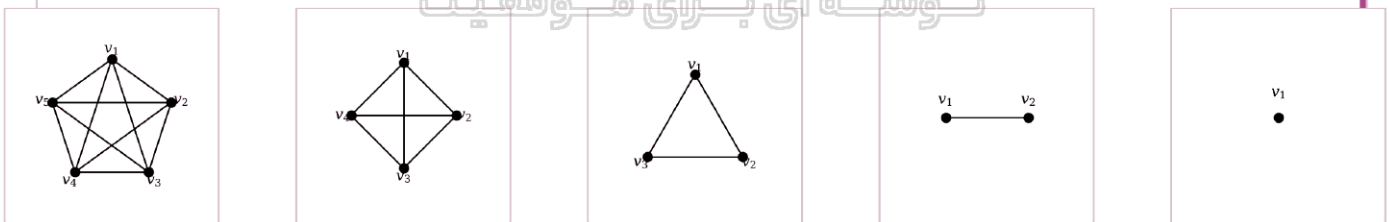
۲۱ صفحه ۴۲ تمرین

۶) گراف کامل Kp دارای ۳۶ یال است. در این گراف Δ(G) و δ(G) را مشخص کنید.

$\frac{p(p-۱)}{۲} = ۳۶ \Rightarrow p(p-۱) = ۷۲ \Rightarrow p = ۹$ ؛ گراف K9 است و هر رأس درجهٔ ۸ دارد؛ پس $\Delta(G) = \delta(G) = ۸$.

۲۲ صفحه ۴۲ تمرین

۷) گراف‌های کامل از مرتبهٔ ۱ تا ۵ را رسم کنید.



K۱ K۲ K۳ K۴ K۵

۲۳ صفحه ۴۲ تمرین

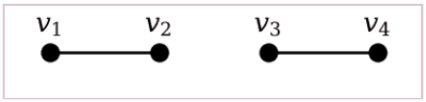
۸) در هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف r – منتظم از مرتبهٔ n رسم کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

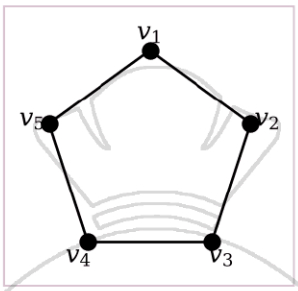
الف) $n=4, r=1$؛ ب) $n=5, r=2$؛ پ) $n=4, r=2$؛ ت) $n=5, r=3$؛ ث) $n=6, r=4$؛ ج) $n=7, r=3$

شرط لازم: مجموع درجات nr باید زوج باشد.

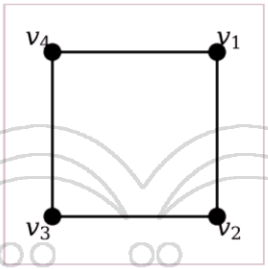
الف) n=۴ ، r=۱: دو یال جدا از هم



ب) n=۵ ، r=۲: دور C5

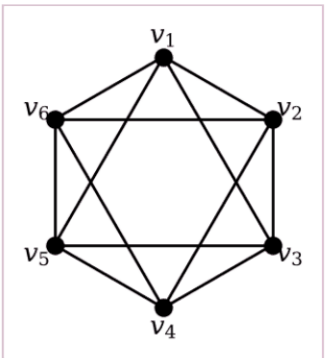


پ) n=۴ ، r=۲: دور C4



ت) n=۵ ، r=۳: امکان ندارد، زیرا ۵ × ۳ = ۱۵ فرد است.

ث) n=۶ ، r=۴: مکمل سه یال جدا از هم (هر رأس به همهٔ رأس‌ها جز «مقابل» خود وصل است)



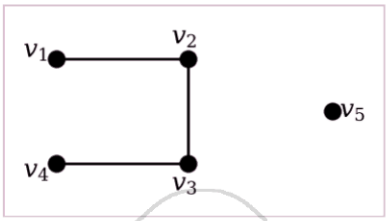
ج) n=۷ ، r=۳: امکان ندارد، زیرا ۷ × ۳ = ۲۱ فرد است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

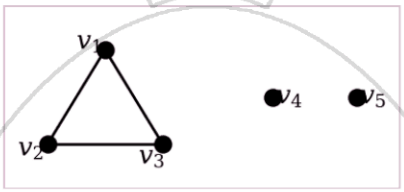
۲۴ صفحه ۴۲ تمرین

۹) برای هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به‌طوری که:
الف) یک رأس تنها داشته باشد. ب) دو رأس تنها داشته باشد. پ) سه رأس تنها داشته باشد. ت) چهار رأس تنها داشته باشد. ث) پنج رأس تنها داشته باشد.

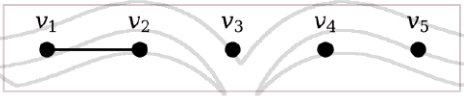
الف) مسیر P4 و یک رأس تنها (v5)



ب) مثلث و دو رأس تنها (v4 و v5)



پ) یک یال و سه رأس تنها



ت) امکان ندارد: اگر ۴ رأس تنها باشند، رأس پنجم هیچ همسایه‌ای ندارد (همهٔ رأس‌های دیگر تنها هستند)، پس آن هم تنها می‌شود.

ث) گراف تهی با ۵ رأس: هیچ یالی رسم نمی‌کنیم و ۵ نقطه را می‌گذاریم.

۲۵ صفحه ۴۲ تمرین

۱۰) هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۱ نفر دست داده باشد.

گرافی را در نظر می‌گیریم که رأس‌هایش افراد و یال‌هایش دست‌دادن‌ها هستند. مجموع درجات $۶ \times ۲ + d = ۱۲ + d$ که d درجهٔ نفر هفتم است. این مجموع باید زوج باشد (q۲)، پس d زوج است. بنابراین $d = ۱$ ممکن نیست.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۴۲ تمرین

۱۱) علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

الف) برای هر نفر ۴ نفر دیگر هست و هر کدام می‌تواند در فهرست باشد یا نباشد. تعداد زوج‌های مرتب (۵ × ۴ = ۲۰) و برای هر زوج ۲ حالت: $۲^{۲۰} = ۱۰۴۸۵۷۶$ حالت.

ب) اکنون رابطه دوطرفه است؛ برای هر زوج نامرتب از ۵ نفر دو حالت (دوست یا نه) داریم. تعداد زوج‌ها $\frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$ و در نتیجه $۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$ حالت.

۲۷ صفحه ۴۲ تمرین

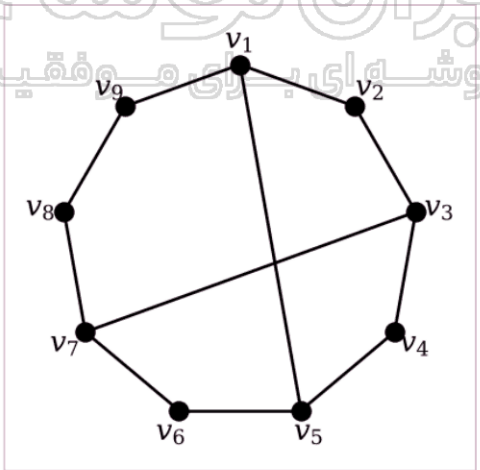
۱۲) یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به‌طوری که:

الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

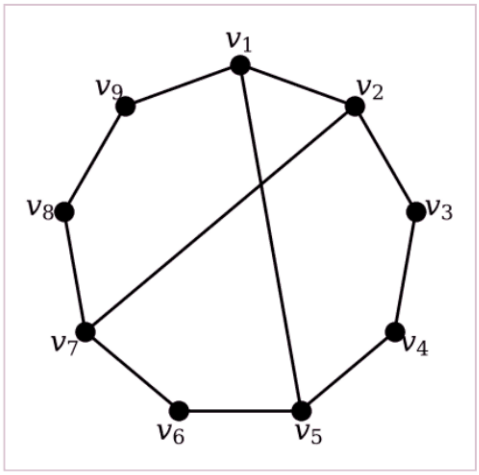
یک دور ۹ رأسی v1...v9 می‌گیریم و دو وتر به آن اضافه می‌کنیم (با بررسی همهٔ دورها با رایانه):

الف) وترهای v1v5 و v3v7 ← طول دورها فقط ۵ و ۶ و ۷ و ۹



ب) وترهای v1v5 و v2v7 ← طول دورها فقط ۵ و ۶ و ۸ و ۹

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



۲۸ صفحه ۴۲ تمرین

۱۳) فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq K$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K + 1 است.

الف) **درست است.** بلندترین مسیر در G را v0 v1 ... vm بگیرید. همهٔ همسایه‌های v0 روی این مسیر هستند (وگرنه می‌شد مسیر را بلندتر کرد). چون $\deg(v0) \geq K$ ، دست‌کم K همسایه از میان v1, ..., vm دارد؛ پس $m \geq K$ و مسیر دست‌کم K یال دارد.

ب) **نادرست است.** مثال نقض: گراف کامل K(K+1) دارای K+1 رأس است و $\delta = K$ ؛ بلندترین مسیر آن K یال دارد و مسیری به طول K+1 ندارد. (مثلاً مثلث: $\delta = ۲$ ولی مسیری به طول ۳ ندارد.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

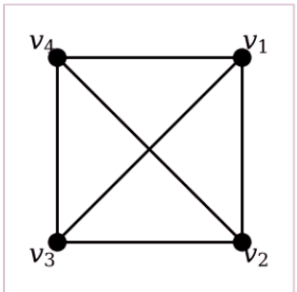
۲۹ صفحه ۴۲ تمرین

۱۴) یک گراف ۴ رأسی غیرتهی K – منتظم بکشید که:

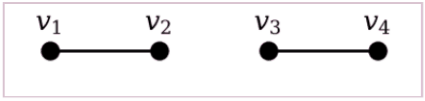
الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

الف) هر رأس حداکثر با ۳ رأس دیگر مجاور است؛ پس $K \leq ۳$ و بیشترین مقدار $K = ۳$ با گراف K4:



ب) غیرتهی یعنی $K \geq 1$ ؛ $K = 1$ با دو یال جدا از هم ممکن است:



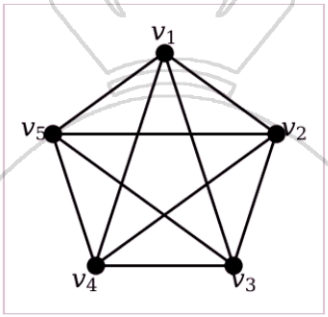
۳۰ صفحه ۴۲ تمرین

۱۵) یک گراف ۵ رأسی غیرتهی K – منتظم بکشید که:

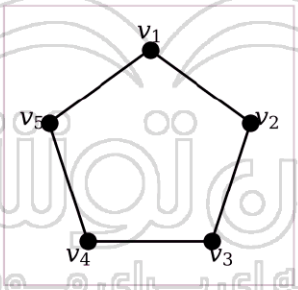
الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

الف) $K \leq 4$ و با ۴) K5–منتظم) ممکن است: بیشترین مقدار $K = 4$.



ب) $K = 1$ ممکن نیست (۵ × ۱ فرد است). $K = 2$ با دور C5 ممکن است: کمترین مقدار $K = 2$.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۱ صفحه ۴۴ پرسش

الف) (در این مدل‌سازی) تقاطع‌ها و خیابان‌ها بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟

ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف می‌نامیم. آیا می‌توانید یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟

الف) هر تقاطع با یک رأس و هر خیابان بین دو تقاطع با یک یال نمایش داده شده است.

ب) شرط ۱ می‌گوید هر تقاطع یا دستگاه دارد یا مجاور تقاطعی است که دستگاه دارد. مثلاً مجموعهٔ {a, c, e, h} چنین است: a با b و d ، c با b و g ، e با b و d ، h با f و g مجاور است؛ پس همهٔ رأس‌ها یا در مجموعه‌اند یا همسایهٔ یکی از آن‌ها؛ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی. (مجموعهٔ دو عضوی {b, f} هم احاطه‌گر است.)

۳۲ صفحه ۴۵ **پرسش**

در این صورت مجموعهٔ احاطه‌گرِ مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می‌کند. (چرا؟)

هر شهر که ایستگاهی در آن نیست باید دست‌کم به یک شهر با ایستگاه مستقیماً (کمتر از ۵۰ کیلومتر) متصل باشد تا تحت پوشش قرار گیرد. این دقیقاً شرط احاطه‌گر بودن مجموعهٔ شهرهای دارای ایستگاه است. چون می‌خواهیم کمترین تعداد ایستگاه ساخته شود، باید مجموعهٔ احاطه‌گر با کمترین تعداد رأس، یعنی احاطه‌گر مینیمم، را بیابیم.

۳۳ صفحه ۴۶ **کار در کلاس**

۱) مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه‌گر هست و کدام نیست؟

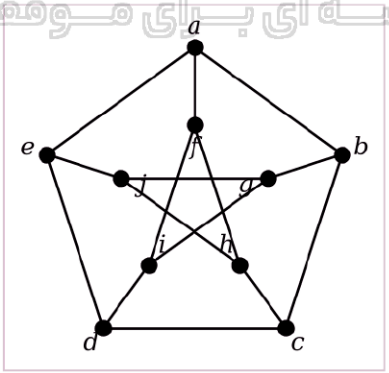
الف) A = {a,b,c,d,e} ب) B = {f,g,h,i,j} پ) C = {a,b,j,h,g} ت) D = {a,i,h} ث) E = {f,g,h,e,d} ج) F = {f,g,h,e} چ) H = {g,h,e}

۲) از مجموعه‌های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه‌گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس‌هایی وجود دارد که با حذف آنها مجموعهٔ باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد؟

۳) مجموعه‌ای احاطه‌گر با کمترین تعداد رأس که می‌توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۴) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

ایران تیزشه
توشه ای برای موفقیت



۱)

رأس‌های مجاور هر رأس: a: b,e,f ؛ b: a,c,g ؛ c: b,d,h ؛ d: c,e,i ؛ e: a,d,j ؛ f: a,h,i ؛ g: b,i,j ؛ h: c,f,j ؛ i: d,f,g ؛ j: e,g,h.

- A احاطه‌گر است (همهٔ رأس‌های بیرونی در A هستند و هر رأس درونی همسایهٔ یک رأس بیرونی است).
- B احاطه‌گر است (به همین دلیل با جابه‌جایی نقش درون و بیرون).
- C احاطه‌گر نیست: رأس d نه در C است و نه با رأسی از C مجاور است.
- D احاطه‌گر است (a: b,e,f ؛ i: d,f,g ؛ h: c,f,j ؛ مجموعاً a,b,c,d,e,f,g,h,i,j).
- E احاطه‌گر است.
- F احاطه‌گر است.
- H احاطه‌گر است (e: a,d,j ؛ h: c,f,j ؛ g: b,i,j).

---

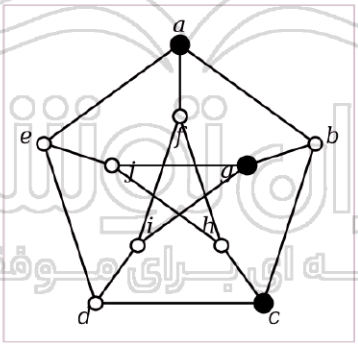
۲)

در E = {f,g,h,e,d} با حذف هر یک از رأس‌های f ، h ، e یا d مجموعه همچنان احاطه‌گر می‌ماند (مثلاً {g,h,e,d})؛ در F = {f,g,h,e} با حذف f مجموعهٔ {g,h,e} احاطه‌گر می‌ماند. در بقیه (A، B، D، H) هیچ رأسی را نمی‌توان حذف کرد.

---

۳)

مجموعهٔ سه‌عضوی {a, c, g} احاطه‌گر است (گراف ۱۰ رأس و Δ = ۳ دارد، پس با کمتر از ⌈۱۰/۴⌉ = ۳ رأس ممکن نیست).

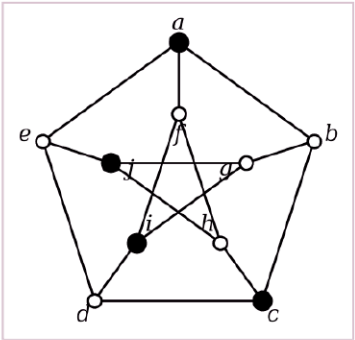


---

۴)

مجموعهٔ {a, c, i, j} چهار عضوی احاطه‌گر است و با حذف هر رأس دیگر احاطه‌گر نمی‌ماند (مینیمال)، ولی چون مجموعه‌های ۳ عضوی احاطه‌گر وجود دارند، مینیمم نیست.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



۳۴ صفحه ۴۷ کار در کلاس

۵) آیا می‌توان هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟ (استدلال کنید)

بله. اگر مجموعهٔ احاطه‌گر D مینیمال نباشد، رأسی در آن هست که با حذفش مجموعه باز هم احاطه‌گر می‌ماند؛ آن را حذف می‌کنیم. این کار را تا جایی که رأسی قابل حذف وجود دارد تکرار می‌کنیم. چون D متناهی است، این فرایند پس از تعداد متناهی گام متوقف می‌شود و مجموعهٔ باقی‌مانده احاطه‌گر است و هیچ رأسی از آن قابل حذف نیست؛ یعنی احاطه‌گر مینیمال است.

۳۵ صفحه ۴۷ کار در کلاس

در گراف شکل ۷:

۱) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر باشند.

۲) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر مینیمال باشند.

۳) یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص نمایید.

۴) آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس b ، e و g را احاطه کند؟

۵) حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چندتاست؟ ($\gamma(G)$ چند است؟)

یال‌های گراف: ac, bc, cd, cf, df, ef, fh, fi, hi, gh.

۱) مثلاً همهٔ رأس‌ها یک مجموعهٔ احاطه‌گر است؛ مجموعهٔ کوچک‌تر {c, f, h} هم احاطه‌گر است (c: a,b,d ؛ f: h: g,i ؛ d,e,i).

۲) {c, f, h} مینیمال است: با حذف c رأس‌های a و b ، با حذف f رأس e ، و با حذف h رأس g احاطه نمی‌شوند.

۳) {c, f, h}.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴) خیر. b ، e و g رأس‌های آویزان هستند و همسایه‌هایشان به ترتیب f ، c و h است. رأسی که b را احاطه کند باید b یا c باشد؛ برای e باید e یا f و برای g باید g یا h باشد. این سه مجموعه {b,c} ، {e,f} و {g,h} دو به دو جدا هستند، پس هیچ رأسی دو تا از آنها را احاطه نمی‌کند.

۵) از بند ۴: برای احاطهٔ b ، e و g دست‌کم ۳ رأس لازم است و {c, f, h} سه‌عضوی و احاطه‌گر است؛ پس $\gamma(G) = 3$.

۳۶ صفحه ۴۷ **فعالیت**

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به‌دست می‌آید؟ اگر حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟

سؤال: برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟

الف) ۱۲ ÷ ۴ = ۳ ؛ ۳ تاکسی.

ب) ۱۴ ÷ ۴ = ۳٫۵ ؛ ۳ تاکسی ظرفیت ۱۲ نفر دارد، پس **۴ تاکسی** لازم است.

پ) ۱۶ ÷ ۴ = ۴ ؛ ۴ تاکسی.

ت) اگر n بر ۴ بخش‌پذیر باشد، تعداد تاکسی‌ها همان $\frac{n}{4}$ است؛ در غیر این صورت باید عدد صحیح بعدی را در نظر گرفت (سقف): تعداد تاکسی‌ها برابر $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ است.

سؤال: کف و سقف یک عدد وقتی برابرند که آن عدد، عددی صحیح باشد ($x \in \mathbb{Z}$)؛ برای اعداد غیرصحیح سقف یک واحد از کف بیشتر است.

۳۷ صفحه ۴۸ **فعالیت**

می‌دانیم در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.

۱) در گراف مقابل Δ چند است؟

۲) هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟

۳) آیا ۲ رأس می‌توانند همهٔ رئوس گراف G را احاطه کنند؟

۴) حداقل $\lceil 10/4 \rceil$ رأس برای احاطهٔ همهٔ رئوس لازم است. چرا؟

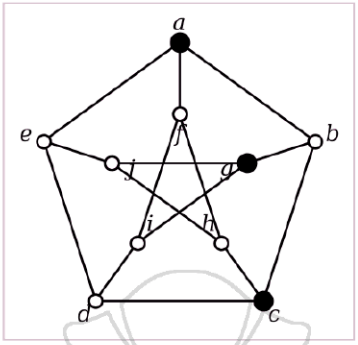
۵) $\gamma(G)$ چند است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶) در یک گراف دلخواه با ماکزیمم درجه Δ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟

۷) تعداد کمتر از $\lceil n/(\Delta+1) \rceil$ رأس نمی‌توانند تمام n رأس یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

گراف شکل ۸ دارای ۱۰ رأس است و هر رأس آن درجهٔ ۳ دارد (۳-منتظم؛ همان گراف پترسن). در شکل زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر سه‌عضوی نشان داده شده است.



۱. $\Delta = ۳$.

۲. هر رأس خودش و حداکثر Δ همسایه‌اش را احاطه می‌کند؛ پس حداکثر $\Delta + ۱ = ۴$ رأس. (تعداد رأس‌های احاطه‌شده حداکثر $\Delta + ۱$ است.)

۳. خیر؛ $۴ \times ۲ = ۸$ رأس حداکثر ۲ رأس را احاطه می‌کنند و $۸ < ۱۰$.

۴. هر رأس حداکثر ۴ رأس را احاطه می‌کند. با ۲ رأس حداکثر ۸ رأس و با ۳ رأس حداکثر ۱۲ رأس احاطه می‌شود؛ پس برای ۱۰ رأس دست‌کم $\lceil ۱۰/۴ \rceil = ۳$ رأس لازم است.

۵. $\gamma(G) \geq ۳$ و مجموعهٔ سه‌عضوی {a, c, g} در شکل بالا احاطه‌گر است؛ پس $\gamma(G) = ۳$.

۶. حداکثر $\Delta + ۱$ رأس.

۷. اگر k رأس همهٔ n رأس را احاطه کنند، چون هر رأس حداکثر $\Delta+1$ رأس را احاطه می‌کند، $k(\Delta+1) \geq n$ ؛ یعنی $k \geq n/(\Delta+1)$ و چون k صحیح است $k \geq \lceil n/(\Delta+1) \rceil$. پس تعداد کمتر از این مقدار کافی نیست.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۸ صفحه ۴۹ کار در کلاس

۱) یک شبکهٔ رایانه‌ای متشکل از ۱۶ رایانه را در نظر بگیرید که در آن هر رایانه، مطابق شکل ۹ به چند رایانهٔ دیگر متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل‌سازی از شبکهٔ مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک رایانه است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که رایانه‌های نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از رایانه‌ها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به‌طوری که توسط این مجموعه از رایانه‌ها به تمام رایانه‌های این شبکه وصل باشیم. مجموعهٔ انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟

۲) با توجه به رابطهٔ $\gamma(G) \leq \lceil n/(\Delta+1) \rceil$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ آیا می‌توانید مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟

۳) گراف‌های P10 ، P9 ، C9 و C10 را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید.

۴) گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گری برابر ⌈n/(Δ+1)⌉ باشد.

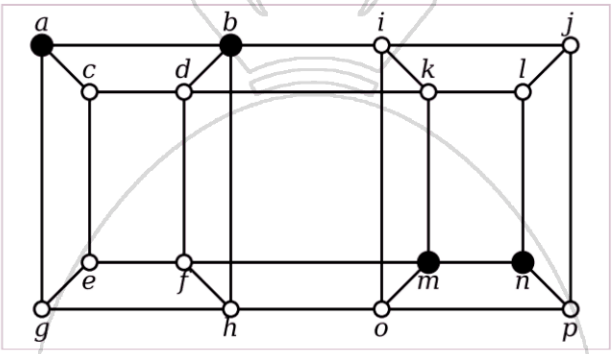
۵) گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گری برابر ⌈n/(Δ+1)⌉ نباشد.

۱)

مجموعهٔ انتخاب‌شده یک **مجموعهٔ احاطه‌گر** برای گراف است و چون کمترین تعداد رایانه را می‌خواهیم، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم (۷-مجموعه) است.

۲)

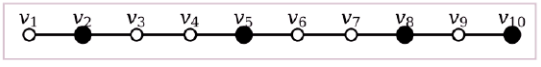
گراف ۱۶ رأس دارد و هر رأس درجهٔ ۴ دارد (Δ = ۴ ؛ هر رأس با ۴ رایانه ارتباط دارد). پس $\gamma(G) \geq \lceil \frac{۱۶}{۵} \rceil$ = ۴ . بله؛ مثلاً مجموعهٔ {a, b, m, n} احاطه‌گر چهارعضوی است: a ← b,g,c,i ؛ b ← a,h,d,j ؛ m ← k,n,o,e ؛ n ← l,m,p,f.
این چهار رأس و همسایه‌هایشان هر ۱۶ رأس را می‌پوشانند؛ پس γ(G) = ۴.



۳)

گراف	عدد احاطه‌گری	مجموعه-۷ یک
P10	۴	{v2, v5, v8, v10}
P9	۳	{v2, v5, v8}
C9	۳	{v1, v4, v7}
C10	۴	{v1, v4, v7, v10}

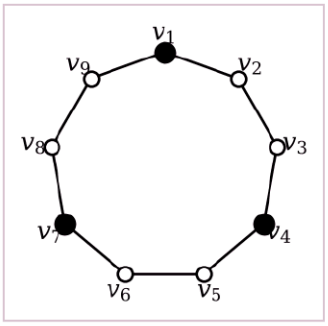
قاعده: ⌈n/3⌉ = γ(Cn) = γ(Pn)هر رأس در این گراف‌ها ۳ رأس را می‌پوشاند). در شکل‌ها رأس‌های مجموعهٔ احاطه‌گر توپر هستند.



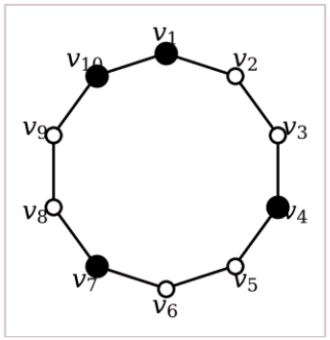
P۱۰

P۹

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



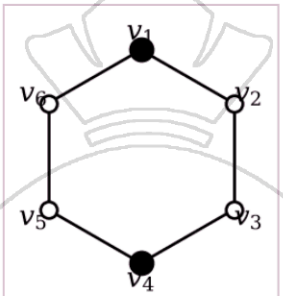
C۹



C۱۰

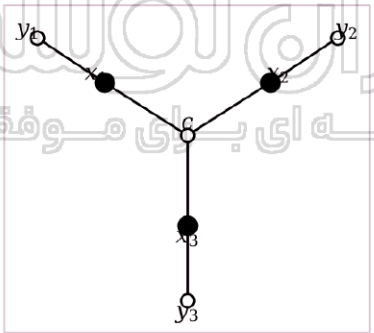
۴)

دور ۶ = C6: n ، ۲ = Δ ، ۲ = ⌈۶/۳⌉ و ۲ = γ(C6) مجموعهٔ {v1, v4}؛ برابر است.



۵)

گراف ۷ رأسی شکل زیر (مرکز c و سه مسیر به طول ۲): n = ۷ ، Δ = ۳ و ⌈۷/۴⌉ = ۲ ، ولی γ = ۳ ؛ چون رأس‌های آویزان y1, y2, y3 هر کدام برای احاطه شدن به یک رأس از مجموعه‌های جدای {y1,x1}، {y2,x2}، {y3,x3} نیاز دارند. پس ⌈n/(Δ+1)⌉ ≠ γ.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۹ صفحه ۵۰ کار در کلاس

۱) تمام ۷-مجموعه‌های (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.

۲) عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر (شکل ۱۱) مشخص کنید.

۱) گراف شکل ۱۰ دارای ۵ رأس و یال‌های ab, ae, ed, bd, bc, cd است و $\gamma(G) = ۲$. مجموعه‌های دوعضوی احاطه‌گر:

{a,b} , {a,c} , {a,d} , {b,d} , {b,e} , {c,e} , {d,e}

یعنی ۷ تا ۲-مجموعه (هیچ رأس تنها نمی‌تواند همهٔ رأس‌ها را احاطه کند چون $\Delta = ۳ < ۴$).

۲) گراف G الف) ۱۰ رأس دارد و ۳-منتظم است ($\Delta = ۳$)؛ پس $\gamma(G) \geq \lceil ۱۰/۴ \rceil = ۳$. مجموعهٔ {a, c, h} احاطه‌گر است (a: b,e,g ؛ c: b,d,i ؛ h: b,f,j)؛ بنابراین $\gamma(G) = ۳$.

گراف H ب) یک دور هشت‌رأسی است (a–f–c–h–e–b–g–d–a)؛ $\gamma(C8) = \lceil ۸/۳ \rceil = ۳$. پس $\gamma(H) = ۳$.

---

۴۰ صفحه ۵۱ **فعالیت**

می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.

الف) ابتدا کران پایین $\lceil n/(\Delta+1) \rceil$ را بررسی می‌کنیم که عدد $\lceil ۱۴/۶ \rceil = ۳$ را می‌دهد. پس $\gamma(G) \geq ۳$.

ب) اما حداقل یکی از رئوس a ، b ، c و d باید انتخاب شود. چرا؟

پ) حداقل یکی از رئوس f و g باید انتخاب شود. چرا؟

ت) حداقل یکی از رئوس i و h باید انتخاب شود. چرا؟

ث) حداقل یکی از رئوس m و n باید انتخاب شود. چرا؟

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعهٔ احاطه‌گر باید باشد. لذا $\gamma(G) \geq ۴$ و با توجه به اینکه {c,f,h,m} یک مجموعهٔ احاطه‌گر است $\gamma(G) \leq 4$ ، بنابراین $\gamma(G) = ۴$.

ب) رأس a فقط با رأس‌های b ، c و d مجاور است؛ برای احاطه شدن a باید خود a یا یکی از b ، c و d در مجموعه باشد.

پ) رأس g تنها به f وصل است؛ برای احاطه شدن g باید g یا f در مجموعه باشد.

ت) رأس i تنها به h وصل است؛ برای احاطه شدن i باید i یا h در مجموعه باشد.

ث) رأس n تنها به m وصل است؛ برای احاطه شدن n باید n یا m در مجموعه باشد.

ج) چهار مجموعهٔ {a,b,c,d}، {f,g}، {h,i}، {m,n} دو به دو جدا هستند و از هر کدام دست‌کم یک رأس لازم است؛ پس $\gamma(G) \geq ۴$. مجموعهٔ {c, f, h, m} همهٔ رأس‌ها را احاطه می‌کند (c: a,b,d,e ؛ f: e,g ؛ h: e,i,j,k,l ؛ m: l,n). پس $\gamma(G) = ۴$.

---

۴۱ صفحه ۵۲ **تمرین**

۱) در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید.

ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟

یال‌های گراف (فاصلهٔ ≥ ۵۰ کیلومتر): ab, ad, ag, ai, ak, bd, cd, cf, cg, de, dg, dh, ef, eg, eh, fg, fh, gh, ij, ik, jk.

الف) هیچ مجموعهٔ ۲ عضوی همهٔ ۱۱ شهر را احاطه نمی‌کند (بررسی همهٔ حالت‌ها)؛ و یک مجموعهٔ ۳ عضوی وجود دارد. پس حداقل **۳ ایستگاه** لازم است، مثلاً در شهرهای **a, f, i** (i: a,j,k ؛ f: c,e,g,h ؛ a: b,d,g,i,k) که همهٔ ۱۱ شهر را پوشش می‌دهند. (مثلاً {d, e, j} یا {b, g, i} هم جواب است.)

ب) اگر یک ایستگاه در b باشد (b: a, d را می‌پوشاند)، حداقل **۲ ایستگاه دیگر** لازم است: یکی از f یا g و یکی از i، j یا k؛ مثلاً {b, f, i} یا {b, g, k}.

۴۲ صفحه ۵۲ تمرین

۲) نقشهٔ مقابل نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان در برخی روستاها احداث کنیم به‌گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشهٔ فوق، مسئلهٔ مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

مدل‌سازی: برای هر روستا یک رأس می‌گیریم و دو روستا را وقتی به هم وصل می‌کنیم که کوتاه‌ترین مسیر جاده‌ای بین آن‌ها حداکثر ۱۰ کیلومتر باشد. روستاهایی که بیمارستان دارند باید یک مجموعهٔ احاطه‌گر این گراف باشند و چون کمترین تعداد را می‌خواهیم، باید یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم بیابیم.

فاصله‌ها از c: b:۴ ، d:۵ ، e:۷ ، h:۷ ، f:۸ ، a:۹ ، j:۹ ، i:۹ ؛ فاصله‌ها از n: h:۵ ، i:۷ ، g:۳ ، o:۳ ، m:۳ ، l:۶ ، k:۱۰.

هیچ روستایی به تنهایی همهٔ روستاها را پوشش نمی‌دهد (کمترین «دورترین فاصله» برابر ۱۶ کیلومتر است). با **دو بیمارستان در روستاهای c و n** هر ۱۵ روستا حداکثر ۱۰ کیلومتر از نزدیک‌ترین بیمارستان فاصله دارد؛ پس حداقل ۲ بیمارستان لازم و کافی است. (انتخاب‌های دیگر: {c, l} یا {c, m}.)

۴۳ صفحه ۵۲ تمرین

۳) عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های (الف) تا (ث) مشخص نمایید.

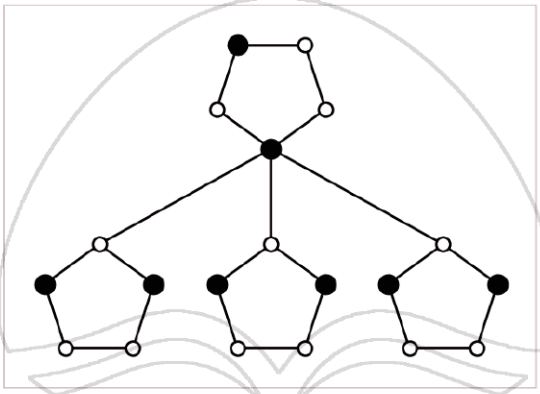
الف) گراف مکعب (۸ رأس، ۳-منتظم): ۲ = ⌈۸/۴⌉ ≤ γ و {a, g} احاطه‌گر است؛ پس **γ = ۲**.

ب) رأس‌های آویزان a و g ما را مجبور به انتخاب e می‌کنند (یا a و g هر دو). با {e, j}: e ← a, g, b, h ؛ j ← c, d, f, i ؛ همهٔ ۱۰ رأس احاطه می‌شوند. چون Δ = ۴ و تنها ۵ رأس را یک رأس می‌پوشاند، با یک رأس ممکن نیست؛ پس **γ = ۲**.

پ) مجموعه‌های {a,b,e,f}، {c,d,g,h} و {i,j,k,l} بخش‌های همسایگی رأس‌های e (یا a، b)، h (یا c، d) و j (یا k، l) هستند. این سه مجموعه از هم جدا هستند و از هر کدام یک رأس لازم است؛ پس γ ≥ ۳ . مجموعهٔ {f, g, i} احاطه‌گر است؛ پس **γ = ۳**.

ت) رأس‌های a ، b ، c ، d ، e (بالای هر مثلث) فقط با دو رأس همان مثلث مجاورند؛ پنج مجموعهٔ {a,f,g}، {b,h,i}، {c,j,k}، {d,l,m}، {e,n,o} جدا هستند و از هر کدام یک رأس لازم است: γ ≥ ۵. مجموعهٔ {g, h, j, l, n} احاطه‌گر است (g ← a,f,q ؛ h ← b,i,p ؛ j ← c,k,r ؛ l ← d,m,q,r,s ؛ n ← e,o,s). پس **γ = ۵**.

ث) در پنج‌ضلعی بالایی، چهار رأس غیر از رأس پایینی به رأس‌های بیرونی راه ندارند و برای احاطهٔ آنها دو رأس لازم است؛ در هر یک از سه پنج‌ضلعی پایینی هم چهار رأس غیر از رأس بالایی دو رأس لازم دارند. پس γ ≥ ۲ + ۲ × ۳ = ۸ و مجموعهٔ ۸ عضوی توپر شکل زیر احاطه‌گر است؛ پس **γ = ۸**.



۴۴ صفحه ۵۳ **تمرین**

۴) اگر برای گراف G داشته باشیم γ(G) = ۱ ، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟ (Δ(G) و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.)

γ(G) = ۱ یعنی رأسی مانند v وجود دارد که همهٔ رأس‌های دیگر را احاطه می‌کند، یعنی به همهٔ رأس‌های دیگر وصل است: deg v = n − ۱ . پس **Δ(G) = n − ۱** (بزرگ‌ترین مقدار ممکن).

حداقل تعداد یال‌ها: n − ۱ (گراف ستاره). حداکثر تعداد یال‌ها: $\frac{n(n-1)}{2}$ (گراف کامل).

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۴۵ صفحه ۵۳ تمرین

۵) $\gamma(C_n)$ و $\gamma(P_n)$ را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ مشخص کنید.

در C_n و P_n هر رأس حداکثر ۳ رأس را (خودش و حداکثر ۲ همسایه) می‌پوشاند؛ پس $\gamma \geq \lceil n/3 \rceil$. با انتخاب رأس‌های $v_2, v_5, v_8, \ldots$ (هر سومین رأس) و در صورت لزوم یک رأس آخر، همهٔ رأس‌ها پوشش داده می‌شوند و تعداد رأس‌های انتخابی $\lceil n/3 \rceil$ است. بنابراین:

$\gamma(C_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ ؛ مثلاً $\gamma(P10) = 4$ و $\gamma(C9) = 3$.

۴۶ صفحه ۵۳ تمرین

۶) اگر G یک گراف k – منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\gamma(G) \leq \lceil n/(k+1) \rceil$.

در گراف k–منتظم درجهٔ همهٔ رأس‌ها k است؛ پس $\Delta(G) = k$. از رابطهٔ کلی $\gamma(G) \leq \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ نتیجه می‌شود $\gamma(G) \leq \lceil \frac{n}{k+1} \rceil$. (دلیل: هر رأس خودش و k همسایه‌اش، یعنی حداکثر k+۱ رأس را احاطه می‌کند.)

۴۷ صفحه ۵۳ تمرین

۷) یک گراف ۲–منتظم ۱۲ رأسی رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

برای گراف ۲–منتظم $\Delta = 2$ و $\gamma \geq \lceil 12/3 \rceil = 4$. چهار مثلث جدا از هم (هر کدام K3) این کران را می‌رسانند: یک رأس از هر مثلث همهٔ آن مثلث را احاطه می‌کند؛ پس $\gamma = 4$. (دور C12 هم $\gamma = 4$ دارد.) کمترین مقدار ممکن ۴ است.

۴۸ صفحه ۵۳ تمرین

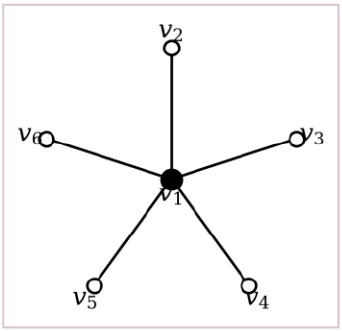
۸) الف) یک گراف ۶ رأسی که γ – مجموعهٔ آن با اندازهٔ یک باشد رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که γ – مجموعهٔ آن با اندازهٔ دو باشد رسم کنید.

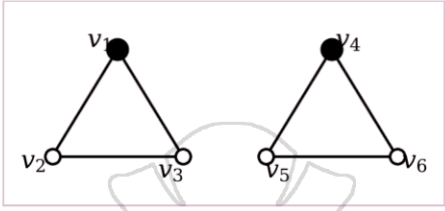
پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq n/2$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

الف) گراف ستاره $K(1,5)$ با مرکز v_1؛ γ–مجموعه $\{v_1\}$ است.

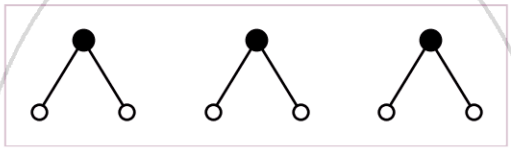
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ب) دو مثلث جدا؛ ۲ = ۷ و برای نمونه {v1, v4} یک ۷-مجموعه است.



پ) چون $k \le n/2$ ، می‌توان n رأس را به k گروه با دست‌کم ۲ رأس تقسیم کرد. هر گروه را به یک ستاره (یک رأس مرکزی وصل به بقیهٔ گروه) تبدیل می‌کنیم و گروه‌ها را از هم جدا نگه می‌داریم. در هر ستاره دست‌کم یک رأس باید انتخاب شود و مرکز همهٔ آن ستاره را می‌پوشاند؛ پس $k = ۷$. شکل: $n = ۹$ و $k = ۳$.

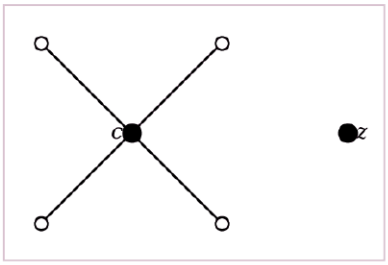


۴۹ صفحه ۵۳ تمرین

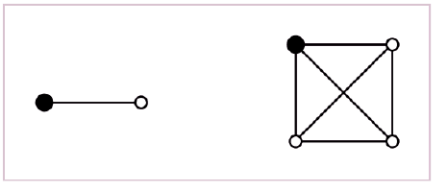
۹) الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.
ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) یک رأس تنها z و یک ستاره با مرکز c و ۴ برگ: z باید در هر مجموعهٔ احاطه‌گر باشد و ستاره را فقط c به تنهایی می‌پوشاند؛ ۲ = ۷ و تنها مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی {z, c} است.



ب) یک یال ab و گراف کامل K4) جدا از آن): از هر بخش یک رأس کافی است؛ ۲ = ۷ و ۲ × ۴ = ۸ مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی داریم.



۵۰ صفحه ۵۴ تمرین

۱۰) برای هر $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 4)$ دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

الف) یک رأس تنها z و جدا از آن یک ستاره با مرکز c و $n-2$ برگ $(n - 2 \geq 2)$ رسم می‌کنیم. z باید در مجموعه باشد؛ ستاره را فقط c به تنهایی می‌پوشاند (چون دست‌کم دو برگ دارد، هیچ برگی همهٔ ستاره را نمی‌پوشاند). پس $\gamma = 2$ و $\{z, c\}$ تنها γ-مجموعه است.

ب) یک یال ab و جدا از آن گراف کامل $K_{(n-2)}$ $(n - 2 \geq 2)$. از هر بخش یک رأس کافی است؛ $\gamma = 2$ و $(n - 2)2$ > ۱ مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی داریم.

۵۱ صفحه ۵۴ تمرین

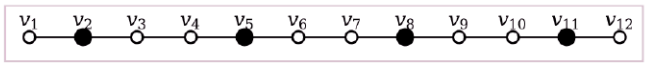
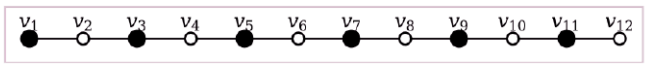
۱۱) گراف P12 را رسم کنید.

الف) یک γ - مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) $\gamma(P12) = \lceil 12/3 \rceil = 4$ و $\{v2, v5, v8, v11\}$ یک γ-مجموعه است (رأس‌های توپر):



ب) مجموعهٔ $\{v1, v3, v5, v7, v9, v11\}$ احاطه‌گر است و مینیمال است: با حذف هر رأس، همان رأس یا یکی از همسایه‌هایش دیگر احاطه نمی‌شود (مثلاً با حذف v1 ، رأس v1 نه در مجموعه است و نه همسایه‌اش v2). چون $6 > 4$ ، مینیمم نیست.