

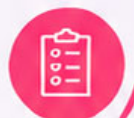
با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضیات گسسته دوازدهم

فصل اول

عنوان فصل: آشنایی با نظریه اعداد

از صفحه ۱ تا صفحه ۳۰ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل آشنایی با نظریه اعداد آمده است. مباحث فصل: درس ۱: استدلال ریاضی، درس ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح، درس ۳: هم‌نهمی در اعداد صحیح و کاربردها

تهیه شده در ایران توشه، توشه‌ای برای موفقیت

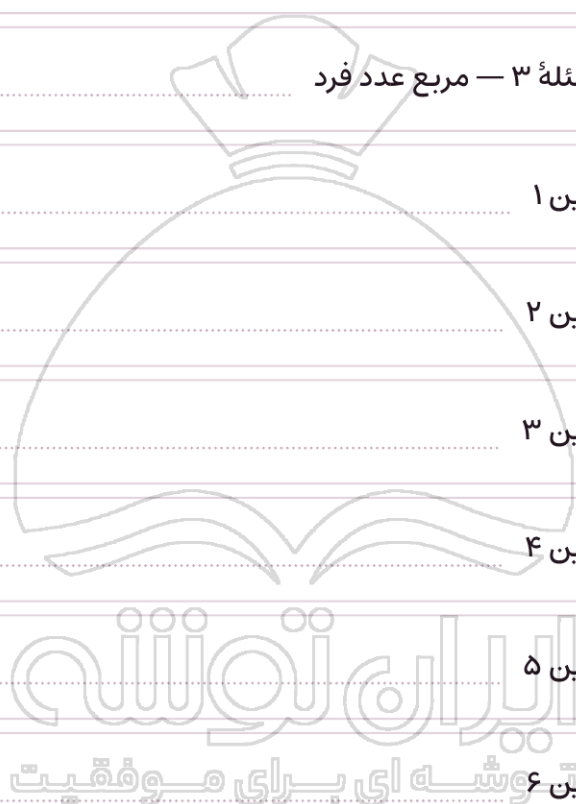
irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۰۲ پرسش — کافی بودن مثال برای اثبات	۹
۲	صفحه ۰۳ کار در کلاس — اثبات یا رد با مثال نقض	۹
۳	صفحه ۰۴ چرا؟ — اثبات $a \cdot b = 0$	۱۰
۴	صفحه ۰۵ کار در کلاس — اثبات مستقیم و بررسی حالت‌ها	۱۰
۵	صفحه ۰۶ چرا؟ — عامل‌های فرد	۱۱
۶	صفحه ۰۶ کار در کلاس — اثبات به روش برهان خلف	۱۱
۷	صفحه ۰۶ چرا؟ — هم‌ارزی $a = b$ و $a^2 = b^2$	۱۱
۸	صفحه ۰۷ کار در کلاس — هم‌ارزی و نابرابری	۱۲
۹	صفحه ۰۷ پرسش — هم‌ارزی دو شرط (مثال $a + 1/a \geq 2$)	۱۲
۱۰	صفحه ۰۸ کار در کلاس — هم‌ارزی زوج بودن n و n^2	۱۲
۱۱	صفحه ۰۸ تمرین — تمرین ۱ — اثبات به روش بازگشتی	۱۳
۱۲	صفحه ۰۸ تمرین — تمرین ۲	۱۳
۱۳	صفحه ۰۸ تمرین — تمرین ۳	۱۳
۱۴	صفحه ۰۸ تمرین — تمرین ۴	۱۴

۱۴		صفحه ۸۰ تمرین — تمرین ۵	۱۵
۱۴		صفحه ۸۰ تمرین — تمرین ۶	۱۶
۱۴		صفحه ۱۰۰ کار در کلاس — تکمیل رابطه عادی کردن	۱۷
۱۵		صفحه ۱۰۰ کار در کلاس — رابطه عادی کردن و توان	۱۸
۱۵		صفحه ۱۰۰ سؤال — $a \mid bc$ و عادی کردن یکی از عوامل	۱۹
۱۶		صفحه ۱۰۰ سؤال — $a \mid b$ و $ka \mid kb$	۲۰
۱۶		صفحه ۱۱۰ تکمیل اثبات — ویژگی ۲ (تعدی)	۲۱
۱۶		صفحه ۱۱۰ سؤال — $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$	۲۲
۱۷		صفحه ۱۱۰ تکمیل اثبات — ویژگی ۳ (مجموع و تفاضل)	۲۳
۱۷		صفحه ۱۱۰ سؤال — $a \mid b + c$	۲۴
۱۷		صفحه ۱۱۰ تکمیل اثبات — ویژگی ۴ و نتیجه آن	۲۵
۱۷		صفحه ۱۱۰ کار در کلاس — کار در کلاس ۱ — $a \mid 7m+6$ و $a \mid 6m+5$	۲۶
۱۸		صفحه ۱۰۲ کار در کلاس — کار در کلاس ۲ تا ۴	۲۷
۱۸		صفحه ۱۰۲ تکمیل مثال — $a \mid 9k+7$ و $a \mid 7k+6$	۲۸
۱۸		صفحه ۱۰۲ چرا؟ — عادی کردن n ! توسط اعداد ۱ تا n	۲۹
۱۹		صفحه ۱۰۳ پرسش — توضیح شرطهای $b \mid m$ و $k \mid m$	۳۰

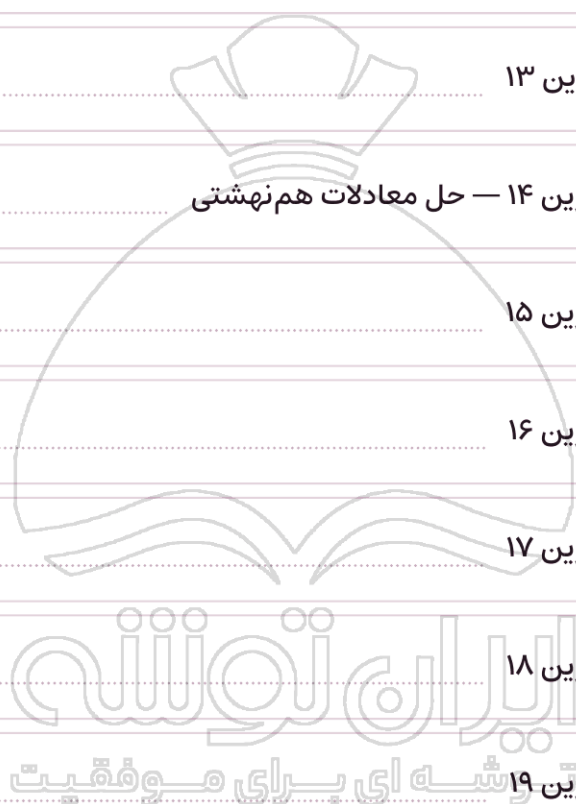
۳۱	صفحه ۱۳۰ کار در کلاس — ب م م و ک م م وقتی $a b$	۱۹
۳۲	صفحه ۱۴۰ کار در کلاس — $l = (p, a)$	۱۹
۳۳	صفحه ۱۴۰ تکمیل مثال — باقیمانده $5n - 2m$ بر ۱۷	۲۰
۳۴	صفحه ۱۵۰ مسئله — مسئله ۱ — زوج یا فرد بودن m	۲۰
۳۵	صفحه ۱۵۰ مسئله — مسئله ۲ — اعداد اول بزرگتر از ۳	۲۰
۳۶	صفحه ۱۵۰ مسئله — مسئله ۳ — مربع عدد فرد	۲۱
۳۷	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۱	۲۱
۳۸	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۲	۲۱
۳۹	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۳	۲۲
۴۰	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۴	۲۲
۴۱	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۵	۲۲
۴۲	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۶	۲۲
۴۳	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۷	۲۳
۴۴	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۸	۲۳
۴۵	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۹	۲۳
۴۶	صفحه ۱۶۰ تمرین — تمرین ۱۰	۲۳



۴۷	صفحه ۱۶ تمرین — تمرین ۱۱	۲۴
۴۸	صفحه ۱۷ تمرین — تمرین ۱۲	۲۴
۴۹	صفحه ۱۷ تمرین — تمرین ۱۳	۲۴
۵۰	صفحه ۱۷ تمرین — تمرین ۱۴	۲۴
۵۱	صفحه ۱۷ تمرین — تمرین ۱۵	۲۵
۵۲	صفحه ۱۷ تمرین — تمرین ۱۶ — ب م و ک م م	۲۵
۵۳	صفحه ۱۸ فعالیت — فعالیت ۱ تا ۴ — دسته اعداد با باقی مانده یکسان	۲۵
۵۴	صفحه ۱۹ تکمیل اثبات — ویژگی ۱ هم نهشتی	۲۶
۵۵	صفحه ۱۹ تکمیل اثبات — ویژگی ۲ هم نهشتی	۲۶
۵۶	صفحه ۲۰ تکمیل اثبات — ویژگی ۳ هم نهشتی	۲۷
۵۷	صفحه ۲۰ تکمیل اثبات — ویژگی ۴ هم نهشتی	۲۷
۵۸	صفحه ۲۱ تکمیل مثال — باقیمانده ۲۹۶ بر ۱۱ برای موفقیت	۲۷
۵۹	صفحه ۲۲ فعالیت — فعالیت — بسط در مبنای ده و باقی مانده تقسیم بر ۹	۲۸
۶۰	صفحه ۲۳ فعالیت — فعالیت (ادامه) — قاعده باقی مانده بر ۹	۲۸
۶۱	صفحه ۲۳ کار در کلاس — کار در کلاس ۱ — پیمانه ۳	۲۹
۶۲	صفحه ۲۳ کار در کلاس — کار در کلاس ۲ — پیمانه ۱۱	۲۹

۶۳	صفحه ۰۲۳ کار در کلاس — کار در کلاس ۳ — پیمانه‌های ۲، ۵ و ۱۰	۲۹
۶۴	صفحه ۰۲۴ فعالیت — فعالیت ۱ — روز هفته ۱۲ بهمن	۳۰
۶۵	صفحه ۰۲۴ فعالیت — فعالیت ۲ — ۲۲ بهمن	۳۰
۶۶	صفحه ۰۲۵ چرا؟ — معادله $6x \equiv 11 \pmod{9}$	۳۱
۶۷	صفحه ۰۲۶ فعالیت — فعالیت ۱ — وزن کردن کیسه ۱۹ کیلویی	۳۱
۶۸	صفحه ۰۲۷ کار در کلاس — کار در کلاس ۱ — حل معادله $4x + 5y = 9$	۳۱
۶۹	صفحه ۰۲۷ کار در کلاس — کار در کلاس ۲ — تعداد روش‌های وزن کردن ۱۹ کیلو	۳۲
۷۰	صفحه ۰۲۸ مثال — تکمیل راه‌حل: تبدیل ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی	۳۲
۷۱	صفحه ۰۲۸ مثال — تکمیل راه‌حل: سفارش غذای ۵ نفر در رستوران	۳۳
۷۲	صفحه ۰۲۹ تمرین — تمرین ۱	۳۳
۷۳	صفحه ۰۲۹ تمرین — تمرین ۲	۳۳
۷۴	صفحه ۰۲۹ تمرین — تمرین ۳	۳۴
۷۵	صفحه ۰۲۹ تمرین — تمرین ۴	۳۴
۷۶	صفحه ۰۲۹ تمرین — تمرین ۵	۳۴
۷۷	صفحه ۰۲۹ تمرین — تمرین ۶	۳۴
۷۸	صفحه ۰۲۹ تمرین — تمرین ۷	۳۴

۳۵		صفحه ۲۹ - تمرین ۸	۷۹
۳۵		صفحه ۲۹ - تمرین ۹	۸۰
۳۵		صفحه ۲۹ - تمرین ۱۰	۸۱
۳۶		صفحه ۲۹ - تمرین ۱۱	۸۲
۳۶		صفحه ۲۹ - تمرین ۱۲	۸۳
۳۶		صفحه ۲۹ - تمرین ۱۳	۸۴
۳۶		صفحه ۳۰ - تمرین ۱۴ - حل معادلات هم‌نهشتی	۸۵
۳۷		صفحه ۳۰ - تمرین ۱۵	۸۶
۳۷		صفحه ۳۰ - تمرین ۱۶	۸۷
۳۷		صفحه ۳۰ - تمرین ۱۷	۸۸
۳۸		صفحه ۳۰ - تمرین ۱۸	۸۹
۳۸		صفحه ۳۰ - تمرین ۱۹	۹۰
۳۸		صفحه ۳۰ - تمرین ۲۰	۹۱



آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

خیر. مثال‌ها فقط درستی گزاره را در چند حالت خاص نشان می‌دهند و هرگز نمی‌توانند درستی گزاره را برای همه حالت‌ها ثابت کنند؛ حتی با افزودن مثال‌های بیشتر هم نمی‌توان از درستی در چند مورد، درستی در همه موارد را نتیجه گرفت.

برای نمونه، گزاره ب برای $n = 1, 2, 3, 4$ درست است ($5, 17, 257$ و 65537 اول‌اند) ولی برای $n = 5$ داریم $417 \times 6700417 = 2814749767191 = 2^{25} + 1$ که اول نیست. پس یک مثال نقض برای رد گزاره کافی است، اما برای اثبات یک گزاره کلی باید استدلالی بنویسیم که همه حالت‌ها را پوشش دهد.

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ث) اگر برای سه مجموعه A, B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$.

ج) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

۱. درست است. دو عدد فرد را $2a+1$ و $2b+1$ می‌گیریم ($a, b \in \mathbb{Z}$). آنگاه $(2a+1) + (2b+1) = 2(a+b+1)$ که مضرب ۲ و در نتیجه زوج است.
۲. نادرست است. مثال نقض: $x=y=1$; آنگاه $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1/41$ ولی $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$.
۳. نادرست است. مثال نقض: $n=4$; عدد $2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5$ اول نیست.
۴. درست است. دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ (با $b, d \neq 0$ و صحیح بودن a, b, c, d) را در نظر می‌گیریم: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. صورت و مخرج کسر حاصل صحیح‌اند و $bd \neq 0$ ، پس حاصل گویاست.
۵. نادرست است. مثال نقض: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$; در این صورت $A \cup B = \{1, 2\} = A \cup C$ ولی $B \neq C$.
۶. درست است. فرض کنیم دو عدد طبیعی متوالی n و $n+1$ باشند، یعنی $k = n(n+1)$. آنگاه $4k+1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$ که مربع کامل است.

(مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$) الف) اگر $a = 0$ ، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟)

حکمی که باید ثابت شود به صورت « $a = 0$ یا $b = 0$ » است. وقتی $a = 0$ باشد، جمله نخست این «یا» درست است و گزاره ترکیبی « p یا q » هرگاه یکی از اجزایش درست باشد، درست است؛ بنابراین بدون هیچ محاسبه دیگری حکم برقرار می ماند.

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.
ب) $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ است و $n \in S$ ، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

الف) اگر a زوج بود، ab هم زوج می شد؛ پس چون ab فرد است، هم a و هم b فرد هستند:
 $a = 2k + 1$ ، $b = 2l + 1$

$$a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 2(2k^2 + 2k + 2l^2 + 2l + 1)$$

که عددی زوج است.

ب) همه حالت های n در S را بررسی می کنیم:

$n \in A?$	زوج یا فرد	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	n
—	فرد	۱	۱
—	فرد	۹	۲
بله	زوج	۳۶	۳
بله	زوج	۱۰۰	۴
—	فرد	۲۲۵	۵
—	فرد	۴۴۱	۶

تنها به ازای $n = 3$ و $n = 4$ حاصل عبارت زوج می شود و این دو عدد در A قرار دارند؛ پس هرگاه حاصل زوج باشد، $n \in A$.

(مثال: a_1, a_2, a_3 اعداد صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.) ... پس هر سه عامل $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3$ هم باید عددی فرد باشند (چرا؟) و در نتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد.

حاصل ضرب چند عدد صحیح فقط وقتی فرد است که همه عامل‌ها فرد باشند؛ زیرا اگر دست‌کم یکی از عامل‌ها زوج باشد (مضرب ۲)، کل حاصل ضرب مضرب ۲ و زوج می‌شود. پس فرض فرد بودن حاصل ضرب، فرد بودن هر سه عامل را نتیجه می‌دهد.

مجموع سه عدد فرد نیز فرد است (فرد + فرد = زوج و زوج + فرد = فرد). ولی چون b_i ها همان a_i ها با ترتیب دیگرند، مجموع $(a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$ زوج است. این تناقض نشان می‌دهد فرض (فرد بودن حاصل ضرب) نادرست است.

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

(الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

(ب) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

(الف) فرض خلف: $\frac{1}{x}$ گویا باشد، یعنی $\frac{1}{x} = \frac{p}{q}$ با $p, q \in \mathbb{Z}$. چون $\frac{1}{x} \neq 0$ پس $p \neq 0$ و $x = \frac{q}{p}$ که نسبت دو عدد صحیح است و x را گویا می‌کند. این با گنگ بودن x در تناقض است. پس $\frac{1}{x}$ گنگ است.

(ب) فرض خلف: $f + g$ در $x = a$ پیوسته باشد. چون f هم در $x = a$ پیوسته است و تفاضل دو تابع پیوسته در یک نقطه، پیوسته است، تابع $g = (f + g) - f$ در $x = a$ پیوسته می‌شود. این با ناپیوسته بودن g در $x = a$ تناقض دارد. پس $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

توشه ای برای موفقیت

(مثال: ترکیب دو شرطی $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ درست نیست (چرا؟))

یک شرطی $a = b \Rightarrow a^3 = b^3$ و برعکس آن $a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$ هر دو درست‌اند، زیرا $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ و عامل دوم جز برای $a = b = 0$ مثبت است.

اما در $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ جهت $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ نادرست است: برای $a = 2$ و $b = -2$ داریم $a^2 = b^2 = 4$ ولی $a \neq b$ (در واقع $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$). پس این ترکیب دو شرطی درست نیست.

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

(الف) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (ب) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

(الف) نادرست است. برای $a = -3$ و $b = 2$ داریم $a < b$ ولی $a^2 = 9 > 4 = b^2$. همچنین جهت عکس هم برقرار نیست: برای $a = 2$ و $b = -3$ داریم $a^2 = 4 < 9 = b^2$ ولی $a > b$.

(ب) درست است. چون $b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$ و $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$ برای $a \neq b$ همواره مثبت است، علامت $b^3 - a^3$ همان علامت $b - a$ است. پس $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$.

(مثال: اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$). ... این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم‌ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم‌ارز هستند؟ اثبات کدام یک ساده‌تر است؟

چون $a > 0$ است، ضرب دو طرف نابرابری $a + \frac{1}{a} \geq 2$ در عدد مثبت a جهت نابرابری را تغییر نمی‌دهد و نابرابری $a^2 + 1 \geq 2a$ به دست می‌آید؛ و برعکس، تقسیم بر $a > 0$ هم جهت را حفظ می‌کند. پس هر دو گزاره هم‌زمان درست یا هم‌زمان نادرست‌اند و هم‌ارزند. اثبات گزاره دوم، یعنی $a^2 + 1 \geq 2a$ ساده‌تر است، زیرا کسر ندارد و با انتقال همه جمله‌ها به یک طرف به $(a - 1)^2 \geq 0$ می‌رسد که همواره درست است.

(الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟

(ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

(۱) نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.

(۲) فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

(الف) بله. اگر n زوج باشد، $n = 2k$ و $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ زوج است. برعکس اگر n زوج نباشد، $n = 2k + 1$ و $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ فرد است؛ یعنی (با عکس نقیض) اگر n^2 زوج باشد، n زوج است. پس دو گزاره هم‌ارزند.

(ب) بله. طبق قضیه عمود منصف، هر نقطه روی عمود منصف پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است ($1 \Rightarrow 2$) و برعکس، نقطه‌ای که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن قرار دارد ($2 \Rightarrow 1$). چون هر دو جهت درست است، گزاره‌ها هم‌ارزند.

۱- گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید :

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت باشند داریم : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x, y, z داریم : $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم : $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

الف) چون x و y هم‌علامت‌اند، $xy > 0$ و ضرب دو طرف در xy جهت نابرابری را حفظ می‌کند:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

آخرین گزاره همواره درست است؛ پس حکم ثابت شد.

$$\text{ب) } x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$$

که همواره درست است.

$$\text{پ) } x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$$

که همواره درست است.

۲- عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$.

(همچنین $x = -1$: $x^3 = -1 < 1 = x^2$). در واقع هر $x < 1$ با $x \neq 0$ جواب است.

۳- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

فرض کنیم $\alpha + \beta = s$ با s گویا.

گنگ بودن $\alpha - \beta$: فرض خلف : $\alpha - \beta = r$ گویا باشد. با جمع کردن دو رابطه $2\alpha = r + s$ و در نتیجه $\alpha = \frac{r+s}{2}$ گویا می‌شود که با گنگ بودن α تناقض دارد.

گنگ بودن $\alpha + 2\beta$: فرض خلف : $\alpha + 2\beta = t$ گویا باشد. آنگاه $\beta = (\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = t - s$ گویا می‌شود که با گنگ بودن β تناقض دارد.

۴- آیا اعداد صحیحی مانند x و y وجود دارند که $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ ؟

بله. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow xy = 0$. یعنی هر زوج (x, y) که دست کم یکی از آنها صفر باشد، مثلاً $x = 0$ و $y = 5$: $0 + 25 = (0 + 5)^2$.

۵- آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($a + b \neq 0$)

فرض کنیم چنین a و b وجود داشته باشند. با ضرب دو طرف در $ab(a + b) \neq 0$:

$$ab = (a + b)^2 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \Rightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = 0$$

مجموع دو عبارت نامنفی فقط وقتی صفر است که هر دو صفر باشند، پس $b = 0$ و سپس $a = 0$ که با ناصفر بودن a و b تناقض دارد. بنابراین چنین مقادیری وجود ندارد.

۶- گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

(الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

(ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

(الف) درست است. فرض کنیم $n = 2k + 1$. آنگاه $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ و $n^3 = n^2 \cdot n$ حاصل ضرب دو عدد فرد است و فرد است (یا مستقیماً $n^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$).

(ب) درست است. پنج عدد متوالی را $n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$ می‌گیریم. مجموع آنها $5n$ است و میانگین $\frac{5n}{5} = n$ که همان عدد وسطی است.

۱- با توجه به تعریف رابطه عادی کردن جاهای خالی را پر کنید.

(الف) $7 \mid 63 \Leftrightarrow 63 = \dots \times \dots$

(ب) $\dots \mid 91 \Leftrightarrow 91 = 7 \times \dots$

(پ) $-6 \mid 54 \Leftrightarrow \dots = \dots \times (-6)$

(ت) $5 \mid -35 \Leftrightarrow \dots = 5 \times \dots$

ث) $18 \mid 18 \Leftrightarrow 0 = 18 \times \dots$

ج) $a = \dots$ یا $a \mid 1 \Rightarrow a = \dots$

چ) $\dots \mid 26$ و $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 \mid \dots$

1. $7 \mid 63 \Leftrightarrow 63 = 7 \times 9$ ☐

2. $7 \mid 91 \Leftrightarrow 91 = 7 \times 13$ ☐

3. $-6 \mid 54 \Leftrightarrow 54 = (-9) \times (-6)$ ☐

4. $5 \mid -35 \Leftrightarrow -35 = 5 \times (-7)$ ☐

5. ☐ هر عدد (مثلاً ۱۸) : $18 \mid 18 \Leftrightarrow 0 = 18 \times 0$ ؛ در واقع $0 \mid a$ برای هر عدد صحیح ناصفر a درست است ($q = 0$).

6. $a = -1$ یا $a \mid 1 \Rightarrow a = 1$ ☐

7. $13 \mid 26$ و $26 = 2 \times 13 \Rightarrow 2 \mid 26$ ☐

کار در کلاس

صفحه ۱۰

۱۸

۲- با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان دار با پایه های برابر، ابتدا نشان دهید که

$3^5 \mid 3^9$ و سپس ثابت کنید :

$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m \mid a^n$

(راهنمایی: $3^4 = 3^5 \times 3^9$ و $3^4 = q$)

الف) $3^4 = 3^5 \times 3^9$ ؛ اگر $3^4 = q$ قرار دهیم، $3^9 = 3^5 \cdot q$ با $q \in \mathbb{Z}$ ؛ پس طبق تعریف $3^5 \mid 3^9$.

حالت کلی: فرض کنیم $m \leq n$. آنگاه $a^n = a^m \cdot a^{n-m}$ و چون $n - m \geq 0$ عدد $q = a^{n-m}$ صحیح است. پس طبق تعریف عاد کردن $a^m \mid a^n$.

توشه ای برای موفقیت

سؤال

صفحه ۱۰

۱۹

سؤال: آیا از اینکه $a \mid bc$ می توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می کند؟ به گزاره های زیر

دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید :

الف) $3 \mid 6 \times 9$ و $3 \mid 6$ و $3 \mid 9$

ب) $3 \mid 6 \times 5$ و $3 \mid 6$ و $3 \nmid 5$

خیر؛ نمی‌توان نتیجه گرفت. در موارد (الف) و (ب) a یکی از دو عدد (یا هر دو) را عاد می‌کند، ولی در مورد (ج) داریم $۱۲ = ۳ \times ۴ \nmid ۶$ در حالی که ۶ نه ۳ را عاد می‌کند و نه ۴ را. پس این مثال نقض نشان می‌دهد حکم در حالت کلی برقرار نیست. (اگر a عددی اول باشد این نتیجه درست است.)

سؤال

صفحه ۱۰

۲۰

سؤال: آیا از اینکه $a \mid b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka \mid kb$ ؟ آیا از $ka \mid kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a \mid b$ ؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$a \mid b \Rightarrow b = \dots \xRightarrow{\text{برض رد } k} kb = \dots \Rightarrow \dots$$

$$ka \mid kb \Rightarrow kb = \dots \xRightarrow{\text{مقسوت رب } k} b = \dots \Rightarrow \dots$$

جهت اول: $a \mid b \Rightarrow b = aq \xRightarrow{*k} kb = (ka)q \Rightarrow ka \mid kb$. این جهت برای هر عدد صحیح k برقرار است.

جهت دوم: $ka \mid kb \Rightarrow kb = (ka)q \xRightarrow{+k} b = aq \Rightarrow a \mid b$. تقسیم بر k فقط برای $k \neq 0$ مجاز است؛ پس اگر $k \neq 0$ باشد از $ka \mid kb$ نتیجه می‌شود $a \mid b$.

تکمیل اثبات

صفحه ۱۱

۲۱

ویژگی ۲: $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$ ؛ **اثبات:** (۱) $a \mid b \Rightarrow b = aq_1$ و $b \mid c \Rightarrow c = bq_2$ ؛

$$c = bq_2 \xRightarrow{(۱)} c = aq_1q_2 \Rightarrow c = a \dots \Rightarrow a \mid c \quad (q_1q_2 = q)$$

$$c = bq_2 \xRightarrow{(۱)} c = (aq_1)q_2 = a(q_1q_2) \xRightarrow{q_1q_2 = q} c = aq$$

چون حاصل ضرب دو عدد صحیح، صحیح است، $q \in \mathbb{Z}$ و بنابراین $a \mid c$.

توشه‌ای برای موفقیت

سؤال

صفحه ۱۱

۲۲

سؤال: با استفاده از خاصیت تعدی برای رابطه عاد کردن، نشان دهید که $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$ ؛ **اثبات:** طبق فرض

$a \mid b$ و می‌دانیم $b \mid b^n$ ، پس (تعدی) $\dots \mid \dots \mid \dots$

طبق فرض $a \mid b$. از طرفی $b^n = b \cdot b^{n-1}$ و در نتیجه $b \mid b^n$. حال طبق خاصیت تعدی:

$$a \mid b \wedge b \mid b^n \xRightarrow{\text{تعدی}} a \mid b^n$$

ویژگی ۳: $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$ ؛ اثبات: $a \mid b \Rightarrow b = \dots \times q_1$ ، $a \mid c \Rightarrow \dots = aq_2$ ، $b \pm c = \dots(q_1 \pm q_2) \Rightarrow a \mid \dots$ (جاهای خالی را پر کنید).

$$a \mid b \Rightarrow b = a \times q_1, \quad a \mid c \Rightarrow c = aq_2$$

$$\Rightarrow b \pm c = aq_1 \pm aq_2 = a(q_1 \pm q_2) = aq \Rightarrow a \mid b \pm c \quad (\text{چون } q = q_1 \pm q_2 \text{ صحیح است}).$$

سؤال: آیا از اینکه $a \mid b + c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a \mid b$ یا $a \mid c$ ؟

خیر. مثال نقض: $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$ ؛ در اینجا $5 \mid 2 + 3 = 5$ ولی $5 \nmid 2$ و $5 \nmid 3$. (اگر علاوه بر آن a یکی از دو عدد را عاد کند، آن‌گاه عدد دیگر هم بر a بخش پذیر است).

ویژگی ۴: اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ آنگاه $|a| \leq |b|$. اثبات: چون $a \mid b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq 0$ پس $q \neq 0$ و چون

$$q \in \mathbb{Z} \text{ لذا } |q| \geq 1 \quad \dots \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |a||q| \Rightarrow |a| \times 1 \leq |a||q| \Rightarrow |a| \leq |aq|$$

نتیجه: اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ آنگاه $a = \pm b$. اثبات: $a \mid b \Rightarrow \dots \leq |a|$ ، $b \mid a \Rightarrow \dots \leq |b|$ (۴) $\Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

ویژگی ۴: $|a| \leq |aq| = |b|$ ؛ یعنی $|a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |a||q| \Rightarrow |a| \times 1 \leq |a||q| \Rightarrow |a| \leq |aq|$ (زیرا $b = aq$).

نتیجه: $|a| \leq |b| \Rightarrow a \mid b$ و $b \mid a \Rightarrow |b| \leq |a|$ ؛ پس $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$ (۴).

نوشته‌ای برای موفقیت

۱- اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

$$a \mid 7m+6 \Rightarrow a \mid 42m+36, \quad a \mid 6m+5 \Rightarrow a \mid 42m+35 \Rightarrow a \mid (42m+36) - (42m+35) = 1 \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

(چرا؟)

$$a \mid 7m+6 \xrightarrow{\times 6} a \mid 42m+36, \quad a \mid 6m+5 \xrightarrow{\times 7} a \mid 42m+35$$

$$\Rightarrow a \mid (42m+36) - (42m+35) = 1 \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

(چرا؟) تنها عددهای صحیحی که ۱ را عاد می‌کنند ۱ و -۱ هستند؛ زیرا طبق ویژگی ۴ باید $|a| \leq 1$ و $a \neq 0$ باشد.

۲- اگر $a \mid b$ نشان دهید که $a^n \mid b^n$.

۳- اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ نشان دهید که $ac \mid bd$.

۴- اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ نشان دهید که $a \mid mb \pm nc$. (از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

(۲) $a^n \mid b^n$ پس $q^n \in \mathbb{Z}$ و چون $a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n$

(۳) $a \mid b \Rightarrow b = aq_1$ و $c \mid d \Rightarrow d = cq_2$ ؛ ضرب دو رابطه: $bd = (ac)(q_1q_2)$ و چون q_1q_2 صحیح است، $ac \mid bd$.

(۴) طبق ویژگی ۱: $a \mid b \Rightarrow a \mid mb$ و $a \mid c \Rightarrow a \mid nc$. سپس طبق ویژگی ۳ (مجموع و تفاضل): $a \mid mb \pm nc$.

مثال: اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=1$ یا $a=5$.

$$\Rightarrow a \mid 7k+6 \Rightarrow a \mid 9 \times (7k+6) \Rightarrow a \mid \dots + 54, \quad a \mid 9k+7 \Rightarrow a \mid 7 \times (9k+7) \Rightarrow a \mid 63k + \dots$$

$$a \mid \dots \Rightarrow a \mid (63k + \dots) - (9 \times (7k+6)) \Rightarrow a \mid 5 \Rightarrow a = \dots$$

$$a \mid 7(9k+7) \Rightarrow a \mid 63k + 49, \quad a \mid 9(7k+6) \Rightarrow a \mid 63k + 54$$

$$\Rightarrow a \mid (63k + 54) - (63k + 49) \Rightarrow a \mid 5 \Rightarrow a = 1 \quad (a \in \mathbb{N} \text{ چون } a=5 \text{ یا } a=1)$$

(خواندنی: می دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک تر یا مساوی 10^n را عاد می کند (چرا؟) و به طور کلی

می توان نوشت: $\forall k \leq n, k \mid n!$

چون $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ حاصل ضرب همه اعداد طبیعی از ۱ تا n است، هر عدد $k \leq n$ یکی از عامل های این

حاصل ضرب است: $n! = k \times (1 \times 2 \times \dots \times (k-1) \times (k+1) \times \dots \times n)$ و عامل دوم عددی صحیح است؛ پس $k \mid n!$.

برای $n=10$ نیز هر عدد ۱ تا 10^n را عاد می کند.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



(تعریف ب م و ک م) توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

در ب م م (تعریف $(a, b) = d$): شرط (الف) $d | a, d | b$ تضمین می‌کند که d یک مقسوم‌علیه مشترک a و b است؛ و شرط (ب) $\forall m > 0: m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$ نشان می‌دهد d از هر مقسوم‌علیه مشترک مثبت دیگر بزرگ‌تر یا مساوی است، یعنی «بزرگ‌ترین» است.

در ک م م (تعریف $[a, b] = c$): شرط (الف) $a | c, b | c$ تضمین می‌کند c یک مضرب مشترک a و b است؛ و شرط (ب) $\forall m > 0: a | m, b | m \Rightarrow c \leq m$ نشان می‌دهد c از هر مضرب مشترک مثبت دیگر کوچک‌تر یا مساوی است، یعنی «کوچک‌ترین» است.

۱- با توجه به تعریف ب م و ک م ثابت کنید:

$$a | b \Rightarrow (a, b) = |a| \quad \text{(الف)}$$

$$a | b \Rightarrow [a, b] = |b| \quad \text{(ب)}$$

راهنمایی: برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که $a | |a|$ و $|a| | b$ و نیز برای هر $m > 0$ که $m | a$ و $m | b$ نشان دهیم $m \leq |a|$ و همین‌طور برای اثبات (ب).

(الف) (شرط الف) $|a| | a$ (چون $a = (\pm 1)|a|$) و چون $a | b$ طبق تعدی $|a| | b$. (شرط ب) اگر $m | a$ ، $m > 0$ و $m | b$ ، آنگاه $m | a$ و طبق ویژگی ۴ $m \leq |a|$. پس $(a, b) = |a|$.

(ب) (شرط الف) $a | |b|$ (چون $a | b$ و $|b| = \pm b$) و $|b| | b$. (شرط ب) اگر $m | a$ و $m | b$ ، آنگاه $m | b$ و ویژگی ۴ نتیجه می‌شود $|b| \leq m$. پس $[a, b] = |b|$.

توشه‌ای برای موفقیت

۲- اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، ثابت کنید $(p, a) = 1$.

فرض کنید $(p, a) = d \leftarrow p \overset{p \nmid a}{\nmid} a \Rightarrow d | p$ یا $d | a$ ؛ اگر $d | a$ ؛ اگر $d = p \overset{(1)}{\Rightarrow} p \mid a$ تناقض دارد (و این با فرض $p \nmid a$)؛

پس فقط $d = \dots$ یا $(p, a) = \dots$

فرض کنیم $(p, a) = d$. آنگاه $d | p$ و $d | a$. چون p اول است، تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت آن 1 و p هستند؛ پس $d = 1$ یا $d = p$.

اگر $d = p$ باشد، از (۱) نتیجه می‌شود $p | a$ که با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد. پس فقط $d = 1$ ، یعنی $(p, a) = 1$.

تذکر: برای اعداد غیراول این حکم برقرار نیست؛ مثلاً $2 \neq 1 \pmod{4,6}$ ولی $4 \nmid 6$.

تکمیل مثال

صفحه ۱۴

۳۳

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را به دست آورید. — جاهای خالی راه حل کتاب را کامل کنید.

طبق فرض $m = 17q_1 + 5$ و $n = 17q_2 + 3$ ؛ پس $2m - 5n = 17(2q_1 - 5q_2) + 10 - 15 = 17(2q_1 - 5q_2) - 5$
 $= 17(2q_1 - 5q_2) - 17 + 17 - 5 = 17(2q_1 - 5q_2 - 1) + 12$
چون $0 \leq 12 < 17$ ، طبق قضیه تقسیم باقی‌مانده $r = 12$ است.

مسئله

صفحه ۱۵

۳۴

مسئله ۱: اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k+1$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.
حل: کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیه تقسیم: $m = 2k + r$ ، $0 \leq r < 2 \Rightarrow m = \dots$
 $m = \dots$

طبق قضیه تقسیم، اعداد صحیح یکتای k و r وجود دارند که $m = 2k + r$ و $0 \leq r < 2$. پس $r = 0$ یا $r = 1$ و در نتیجه $m = 2k$ (زوج) یا $m = 2k + 1$ (فرد).

مسئله

صفحه ۱۵

۳۵

مسئله ۲: ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود.

حل: کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت: $p = 6k + (1)$ ،
 $p = 6k + 2$ ، $p = 6k + 3$ ، $p = 6k + 4$ ، $p = 6k + 5$ ، $p = 6k + 6$.

بررسی شش حالت:

- حالت‌های (۱)، (۳) و (۵): $p = 6k$ ، $6k + 2$ ، $6k + 4$ همگی زوج‌اند؛ چون $p > 3$ است، p زوج بزرگ‌تر از ۲ می‌شود و اول نیست (تناقض).
 - حالت (۴): $p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ ؛ پس $3 \mid p$ و چون $p > 3$ ، p اول نیست (تناقض).
- تنها حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌مانند، یعنی $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$. (عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست؛ مثلاً $25 = 6 \times 4 + 1$ اول نیست.)

مسئله ۳: ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(4t+1)$ نوشته می‌شود (باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است).

اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم، یکی از چهار حالت $a = 4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ ، $4k+3$ رخ می‌دهد. حالت‌های $4k$ و $4k+2 = 2(2k+1)$ زوج‌اند؛ پس عدد فرد a یا $4k+1$ است یا $4k+3$.

○ اگر $a = 4k+1$: $a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8k' + 1$

○ اگر $a = 4k+3$: $a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8t + 1$

پس در هر دو حالت مربع عدد فرد به شکل $8t+1$ است.

۱- فرض می‌کنیم $ab = cd$ و a, b, c, d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطه عادی از این تساوی نتیجه بگیرید.

چون $ab = cd$ و a, b, c, d ناصفرند، با توجه به تعریف عادی کردن (نمایش به صورت حاصل ضرب):

۱. $ab = cd \Rightarrow a \mid cd$ ○

۲. $b \mid cd$ ○

۳. $c \mid ab$ ○

۴. $d \mid ab$ ○

۵. $ab \mid cd$ (و $cd \mid ab$) ○

(برای مثال از $ab = cd = 1 \times (ab)$ نیز رابطه‌هایی مانند $a \mid ab$ ، $c \mid cd$ به دست می‌آید.)

۲- ثابت کنید: اگر $a \mid b$ آنگاه $a \mid -b$ و $a \mid b$ و $-a \mid -b$ و $-a \mid -a$.

$a \mid b \Rightarrow b = aq$

○ $-b = a(-q) \Rightarrow a \mid -b$

○ $b = (-a)(-q) \Rightarrow -a \mid b$

○ $-b = (-a)q \Rightarrow -a \mid -b$

تمرین

صفحه ۱۶

۳۹

۳- اگر $a > 1$ و $a \mid 9k + 4$ و $a \mid 5k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

با تفريق: $a \mid 9k + 4 \Rightarrow a \mid 5(9k + 4) = 45k + 20$ و $a \mid 5k + 3 \Rightarrow a \mid 9(5k + 3) = 45k + 27$
 $a \mid (45k + 27) - (45k + 20) = 7$
 چون $a > 1$ و $a \mid 7$ ، $a = 7$ که عددی اول است.

تمرین

صفحه ۱۶

۴۰

۴- اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $5 \mid 4k + 1$ ، ثابت کنید: $25 \mid 16k^2 + 28k + 6$

فرض: $4k + 1 = 5t$ با $t \in \mathbb{Z}$. با مربع کردن: $16k^2 + 8k + 1 = 25t^2$.
 $16k^2 + 28k + 6 = (16k^2 + 8k + 1) + (20k + 5) = 25t^2 + 5(4k + 1) = 25t^2 + 25t = 25(t^2 + t)$
 که مضرب ۲۵ است؛ پس $25 \mid 16k^2 + 28k + 6$.

تمرین

صفحه ۱۶

۴۱

۵- آیا از اینکه $a \mid b$ و $c \mid d$ ، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a + c \mid b + d$ ؟

خیر. مثال نقض: $a = 1, b = 2, c = 3, d = 3$ ؛ $a \mid b$ و $c \mid d$ ولی $a + c = 4 \nmid b + d = 5$.

تمرین

صفحه ۱۶

۴۲

۶- ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولاند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولاند.

(راهنمایی: فرض کنید $d = (m, m + 1)$ و ثابت کنید $d \mid 1$ و نتیجه بگیرید $d = 1$).

الف) فرض کنیم $d = (m, m + 1)$. آنگاه $d \mid m$ و $d \mid m + 1$ ، پس $d \mid (m + 1) - m = 1$ و چون d مثبت است $d = 1$.
 ب) دو عدد فرد متوالی m و $m + 2$ را در نظر می‌گیریم و $d = (m, m + 2)$. آنگاه $d \mid (m + 2) - m = 2$ ، پس $d = 1$ یا $d = 2$. چون m فرد است و $d \mid m$ ، d نمی‌تواند ۲ باشد؛ پس $d = 1$.

۷- اگر p و q هر دو عدد اول باشند و $p \neq q$ ثابت کنید $(p, q) = 1$.

فرض کنیم $d = (p, q)$. چون $d | p$ و p اول است، $d = 1$ یا $d = p$. اگر $d = p$ باشد، از $d | q$ نتیجه می‌شود $p | q$ و چون q اول است $p = 1$ یا $p = q$ که هر دو غیرممکن‌اند (p اول است پس $p \neq 1$ و طبق فرض $p \neq q$). پس $d = 1$.

۸- اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $a | b \Rightarrow a^m | b^n$.

$a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n = a^m \cdot a^{n-m} q^n$
چون $m \leq n$ ، عدد $a^{n-m} q^n$ صحیح است؛ پس $a^m | b^n$.

۹- اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

$a = 8q_2 + 7 \Rightarrow 7a = 56q_2 + 49$ و $a = 7q_1 + 5 \Rightarrow 8a = 56q_1 + 40$
با تفریق: $a = 8a - 7a = 56(q_1 - q_2) - 9 = 56(q_1 - q_2 - 1) + 47$
چون $0 \leq 47 < 56$ ، باقی‌مانده تقسیم a بر ۵۶ برابر ۴۷ است. (بررسی: $47 = 7 \times 6 + 5 = 8 \times 5 + 7$)

توشه ای برای موفقیت

۱۰- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b | a + 2$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(3 + b^2 + a^2)$ بر ۸ را بیابید.

a فرد است پس $a + 2$ فرد است و مقسوم‌علیه آن یعنی b نیز فرد است. مربع هر عدد فرد به شکل $8t + 1$ است (مسئله ۳)؛ پس $a^2 = 8t_1 + 1$ و $b^2 = 8t_2 + 1$.

$$3 + b^2 + a^2 = 8(t_1 + t_2) + 5$$

بنابراین باقی‌مانده برابر ۵ است.

۱۱- اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $n^3 - n$ بر ۳.

(راهنمایی: برای n سه حالت $n = 3k$ و $n = 3k + 1$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $n^3 - n$ بر ۳).

حالت‌های n را بر ۳ بررسی می‌کنیم. توجه کنید $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$.

○ اگر $n = 3k$: عامل n مضرب ۳ است، پس $n^3 - n$ بر ۳.

○ اگر $n = 3k + 1$: عامل $n - 1 = 3k$ مضرب ۳ است.

○ اگر $n = 3k + 2$: عامل $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ مضرب ۳ است.

در هر سه حالت، $n^3 - n$ بر ۳.

۱۲- اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

فرض کنیم مقسوم a ، مقسوم‌علیه b ، خارج قسمت q و باقی‌مانده r باشد: $a = bq + r$. چون $n | a$ و $n | b$ ، طبق ویژگی‌ها $n | bq$ و $n | a - bq = r$ ؛ پس باقی‌مانده بر n بخش‌پذیر است.

۱۳- اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

a را بر ۳ تقسیم می‌کنیم: $a = 3k$ یا $a = 3k + 1$ یا $a = 3k + 2$. برای موفقیت

○ اگر $a = 3k$: خود a بر ۳ بخش‌پذیر است.

○ اگر $a = 3k + 1$: $a + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

○ اگر $a = 3k + 2$: $a + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2)$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴- ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

دو عدد متوالی n و $n + 1$: $(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n + 1) + 1$

حاصل ضرب دو عدد متوالی $n(n+1)$ زوج است؛ پس $3n(n+1)$ زوج و $3n(n+1)+1$ فرد است.

تمرین

صفحه ۱۷

۵۱

۱۵- ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخش پذیر است.

حاصل ضرب را $P = n(n+1)(n+2)$ می‌گیریم و $3! = 6$. از سه عدد متوالی دست کم یکی زوج و دقیقاً یکی مضرب ۳ است؛ پس $2 \mid P$ و $3 \mid P$.

اکنون $P = 2k$ و $3 \mid P$. چون $(2, 3) = 1$ ، ۳ باید k را عاد کند ($k = 3l$) و $P = 6l$ ؛ پس $6 \mid P$.

تمرین

صفحه ۱۷

۵۲

۱۶- حاصل هر یک را به دست آورید: ($m \in \mathbb{Z}$)

(الف) $([m^2, m], m^5)$

(ب) $(2m, 6m^3)$

(پ) $(3m+1, 3m+2)$

(ت) $[m^4, (m^2, m^3)]$

(ث) $[(72, 48), 120]$

۱. $\circ$ چون $m \mid m^2$ ، $[m^2, m] = m^2$ ؛ سپس $m^2 \mid m^5$ و در نتیجه $(m^2, m^5) = m^2$ (به شرط $m \neq 0$).
۲. $\circ$ چون $6m^3 = 2m \cdot 3m^2$ ، $2m \mid 6m^3$ ، طبق کار در کلاس ۱ $(|a|b \Rightarrow (a,b)=|a|)$ حاصل $|2m| = 2|m|$ است.
۳. $\circ$ فرض کنیم $d = (3m+1, 3m+2)$. آنگاه $d \mid (3m+2) - (3m+1) = 1$ و حاصل ۱ است.
۴. $\circ$ ابتدا $(m^2, m^3) = m^2$ (چون $m^2 \mid m^3$)؛ سپس $[m^4, m^2] = |m^4| = |m|^4$ (چون $m^2 \mid m^4$).
۵. $\circ$ $(72, 48) = 24$ و $[24, 120] = 120$ (چون $120 \mid 24$)؛ پاسخ ۱۲۰.

فعالیت

صفحه ۱۸

۵۳

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نماینده یک مجموعه از اعداد در نظر بگیریم که باقی‌مانده تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم:

۱- دو عضو دلخواه از مجموعه A_0 را در نظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟

۲- از مجموعه A_1 دو عضو دلخواه را در نظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟

۳- نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلی برای هر دو عضو دلخواه از A_1 اثبات کنید.

۴- آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعه A_2 همگی در تقسیم بر عدد ۴، باقی‌مانده یکسان دارند؟ در مورد مجموعه A_3 چه می‌توان گفت؟

(۱) بله. مثلاً دو عضو ۸ و ۲۰ از A_2 : $20 - 8 = 12 = 4 \times 3$ مضرب ۴ است. (در واقع $4k_1 - 4k_2 = 4(k_1 - k_2)$).

(۲) بله. مثلاً ۵ و ۱۳ از A_1 : $13 - 5 = 8 = 4 \times 2$ یا ۱ و ۲۱ و $21 - 1 = 20 = 4 \times 5$.

(۳) فرض کنیم $a, b \in A_1$ ؛ آنگاه $a = 4k_1 + 1$ و $b = 4k_2 + 1$ و

$$a - b = (4k_1 + 1) - (4k_2 + 1) = 4(k_1 - k_2) = 4k_3 \Rightarrow 4 \mid a - b$$

(۴) بله؛ هر عضو A_2 به صورت $4k + 2$ است و باقی‌مانده تقسیم آن بر ۴ برابر ۲ است. تفاضل هر دو عضو آن $(4k_1 + 2) - (4k_2 + 2) = 4(k_1 - k_2) = 4k_3$ مضرب ۴ است. همین استدلال برای A_3 هم برقرار است: همه اعضای A_3 باقی‌مانده ۳ دارند و تفاضل هر دو عضو آن بر ۴ بخش‌پذیر است.

تکمیل اثبات

صفحه ۱۹

۵۴

ویژگی ۱: به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد. اثبات:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid a + c - b - c \Rightarrow m \mid (a + c) - (b + c) \Rightarrow (a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$$

(جاهای خالی را پر کنید.)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid a + c - b - c$$

$$\Rightarrow m \mid (a + c) - (b + c) \Rightarrow (a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$$

برای تفاضل نیز به همین ترتیب: $(a - c) - (b - c) = a - b$ مضرب m است؛ پس $a - c \equiv b - c \pmod{m}$.

تکمیل اثبات

صفحه ۱۹

۵۵

ویژگی ۲: دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد. اثبات:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid \dots - \dots \Rightarrow m \mid \dots \times (a - b) \Rightarrow m \mid ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

(جاهای خالی را پر کنید.)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid c(a - b) \Rightarrow m \mid ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

(در این اثبات از ویژگی ۱ عادی استفاده شده است: $m \mid a - b \Rightarrow m \mid c(a - b)$)

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



ویژگی ۳: دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. ($n \in \mathbb{N}$) اثبات: (از اتحاد

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$a \equiv b \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid (a - b)(\dots) \Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow \dots \equiv \dots$$

تذکر: می‌دانیم $3^2 \equiv 5^2 \pmod{4}$ ولی $3 \equiv 5 \pmod{4}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که ...

$$a \equiv b \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad (\text{زیرا عامل دوم یک عدد صحیح است}).$$

نتیجه تذکر: عکس ویژگی ۳ برقرار نیست؛ یعنی از $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ نمی‌توان نتیجه گرفت $a \equiv b \pmod{m}$. (در اینجا

$$9 \equiv 25 \pmod{4} \text{ ولی } 3 \not\equiv 5 \pmod{4}.)$$

ویژگی ۴: دو طرف دو رابطه هم‌نهشتی را که پیمانه یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا

$$\text{در هم ضرب کرد. اثبات (۱): } a \equiv b \Rightarrow m \mid a - b \xRightarrow{\times c} m \mid ac - bc, \quad c \equiv d \Rightarrow m \mid c - d \xRightarrow{\times b} m \mid bc - bd$$

$$\Rightarrow m \mid (ac - bc) + (bc - bd) \Rightarrow m \mid ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m} \quad (\text{اثبات (۲) به عهده شما}).$$

$$\text{اثبات (۱): } a \equiv b \Rightarrow m \mid a - b \xRightarrow{\times c} m \mid ac - bc \text{ و } c \equiv d \Rightarrow m \mid c - d \xRightarrow{\times b} m \mid bc - bd$$

$$\Rightarrow m \mid (ac - bc) + (bc - bd) \Rightarrow m \mid ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

اثبات (۲): $a \equiv b \pmod{m}$ و $c \equiv d \pmod{m}$ ؛ طبق ویژگی ۳ عا د کردن $m \mid (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ و در نتیجه

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}. \text{ همچنین } m \mid (a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d) \text{ و } a - c \equiv b - d \pmod{m}.$$

نتیجه ۱: هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم، کافی

است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به دست آوریم.

$$\text{مثال: } 296 \equiv ? \pmod{11}$$

$$296 = 11 \times 26 + 10$$

پس $296 \equiv 10 \pmod{11}$ و کوچک‌ترین عدد نامنفی هم‌نهشت با ۲۹۶ به پیمانه ۱۱ عدد ۱۰ است. (می‌توان گفت

$$296 \equiv -1 \pmod{11} \text{ نیز درست است}).$$

همان طور که در دوره ابتدایی آموختید عدد نویسی در مبنای ۱۰ انجام می شود ... به عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را

می توان به صورت زیر بسط داد : $1397 = 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 9 \times 10 + 7 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10 + 7$

۱- هریک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط دهید :

$$1388109 = 1 \times 10^6 + \dots$$

$$13571122 = \dots$$

۲- باقی مانده تقسیم عدد $A = 1358112$ را بر عدد ۹ بیابید. می دانیم $10 \equiv 1 \pmod{9}$ و بنابر ویژگی های رابطه

هم نهشتی $10^n \equiv 1 \pmod{9}$ و داریم : $A = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + \dots + 1 \times 10 + 2$... با جمع طرفین هم نهشتی ها داریم :

$$A \equiv 1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2$$

(۱)

$$1388109 = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10 + 9$$

$$13571122 = 1 \times 10^7 + 3 \times 10^6 + 5 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 2$$

۲) چون $10 \equiv 1 \pmod{9}$ ، پس برای هر n داریم $10^n \equiv 1 \pmod{9}$ و با ضرب در ارقام :

$$A = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 1 \times 10 + 2 \equiv 1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2 = 21 \pmod{9}$$

یعنی $A \equiv 21 \pmod{9}$ و چون $21 = 2 \times 9 + 3$ ، باقی مانده تقسیم A بر ۹ برابر ۳ است. (بررسی :

$$1358112 = 9 \times 150901 + 3$$

اگر دقت کنید سمت راست هم نهشتی اخیر مجموع ارقام A است. بنابراین می توان گفت «باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹». عدد n رقمی

را بسط دهید و در هم نهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار دهید،

سپس همین نتیجه گیری را در حالت کلی بررسی کنید.

$$A = 10^{n-1}a_{n-1} + \dots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 \Rightarrow A \equiv \dots$$

$$A = 10^{n-1}a_{n-1} + \dots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0$$

چون $10^k \equiv 1 \pmod{9}$ برای هر k ، با ضرب در ارقام و جمع کردن :

$$A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 = a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9}$$

یعنی A با مجموع ارقام خود به پیمانه ۹ هم نهشت است؛ پس باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۹ همان

باقی مانده تقسیم مجموع ارقامش بر ۹ است و یک عدد بر ۹ بخش پذیر است اگر و فقط اگر مجموع ارقامش

بر ۹ بخش پذیر باشد.

۱- با توجه به اینکه $10 \equiv 1 \pmod{3}$ ، نتیجه می‌گیریم $10^k \equiv 1 \pmod{3}$ ، $\forall k \in \mathbb{N}$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

$$A = 5 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 8 \equiv 5 + 9 + 8 + 3 + 4 + 8 = 37 \pmod{3}$$

چون $37 = 3 \times 12 + 1$ ، باقی‌مانده تقسیم A بر ۳ برابر ۱ است.

قاعده کلی: باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۳ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن بر ۳؛ بنابراین عددی بر ۳ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۲- می‌دانیم $10 \equiv -1 \pmod{11}$ ؛ بنابراین برای هر n زوج $10^n \equiv 1 \pmod{11}$ و برای هر n فرد $10^n \equiv -1 \pmod{11}$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانه ۱۱ و در بسط عدد $A = 4985327$ به جای توان‌های زوج عدد ۱۰، عدد یک و به جای توان‌های فرد عدد ۱۰، عدد (-۱) قرار دهیم باقی‌مانده تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A = 4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + \dots + 2 \times 10 + 7 \Rightarrow A \equiv 4 \times \dots + \dots \times (-1) + \dots \Rightarrow A \equiv 7 - 2 + 3 - 5 + 8 - 9 + 4 = 6 \Rightarrow r = \dots$$

$$A = 4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 7$$

$$A \equiv 4 \times 1 + 9 \times (-1) + 8 \times 1 + 5 \times (-1) + 3 \times 1 + 2 \times (-1) + 7 \pmod{11}$$

$$= 4 - 9 + 8 - 5 + 3 - 2 + 7 = 6$$

چون $0 \leq 6 < 11$ ، باقی‌مانده تقسیم A بر ۱۱ برابر ۶ است. (قاعده: از رقم یکان شروع می‌کنیم و ارقام را یکی در میان با علامت + و - جمع می‌کنیم.)

پیراهن توتونش
توشه ای برای موفقیت

۳- می‌دانیم $10 \equiv 0 \pmod{10}$ و $10^2 \equiv 0 \pmod{10}$ و $10^k \equiv 0 \pmod{10}$ در این صورت: $\forall k \in \mathbb{N}$ ، $10^k \equiv \dots$ و $10^k \equiv \dots$ و $10^k \equiv \dots$ بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}$ به جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانه ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت: $\dots \equiv A \pmod{2}$ و $A \equiv \dots \pmod{5}$ و $A \equiv a_0 \pmod{10}$. نتیجه حاصل را برای یافتن باقی‌مانده تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

چون $10 \equiv 0 \pmod{10}$ در هر یک از این پیمانه‌ها (۲، ۵ و ۱۰ بخش‌پذیر است)، برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $10^k \equiv 0^k = 0$. پس

$$A = 10^{n-1}a_{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0 \equiv 0 \times a_{n-1} + \dots + 0 \times a_1 + a_0 = a_0.$$

یعنی $A \equiv a. (2)$ و $A \equiv a. (5)$ و $A \equiv a. (10)$.

- باقی‌مانده تقسیم عدد بر ۲ و ۵ و ۱۰ برابر باقی‌مانده تقسیم رقم یکان آن بر همان عدد است.
- بر ۲ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر رقم یکان آن زوج باشد (۰، ۲، ۴، ۶، ۸).
- بر ۵ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد.
- بر ۱۰ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر رقم یکان آن ۰ باشد.

فعالیت

صفحه ۲۴

۶۴

۱- اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟
۲۹ روز در مهر و ۳۰ روز در آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصله ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی
 $d = 12 + 3 \times 30 + 29 = 131$ از طرفی $131 \equiv \dots \pmod{7}$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ... پنجشنبه است،
یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن: $d = 12 + 30 + 30 + 30 + 29 = 131$ روز (باقی‌مانده مهر ۲۹ روز، آبان و آذر و دی هر کدام ۳۰ روز و ۱۲ روز از بهمن).

چون $131 = 7 \times 18 + 5$ یعنی $131 \equiv 5 \pmod{7}$ ، با توجه به جدول (شنبه ۰، یکشنبه ۱، دوشنبه ۲، سه‌شنبه ۳، چهارشنبه ۴، پنجشنبه ۵، جمعه ۶) روز متناظر با عدد ۵ پنجشنبه است؛ پس ۱۲ بهمن آن سال پنجشنبه است.

فعالیت

صفحه ۲۴

۶۵

۲- از روی تقویم سال جاری روز جاری هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

پاسخ به تقویم همان سالی بستگی دارد که در آن کار می‌کنید؛ روش کار را برای سال ۱۴۰۵ نشان می‌دهیم. در این سال ۷ تیر یکشنبه است.

فاصله ۷ تیر تا ۲۲ بهمن را با شمارش روز سال به دست می‌آوریم: ۷ تیر روز $100 = 7 + 3 \times 31$ ام سال است و ۲۲ بهمن روز $328 = 22 + 4 \times 30 + 6 \times 31$ ام (شش ماه مهر، آبان، آذر و دی ۳۰ روزه و ۲۲ روز از بهمن). پس $d = 328 - 100 = 228$.

چون $228 = 7 \times 32 + 4$ یعنی $228 \equiv 4 \pmod{7}$ ، چهار روز بعد از یکشنبه، یعنی پنجشنبه است. (با تقویم هم خوان است: ۲۲ بهمن ۱۴۰۵ برابر ۱۱ فوریه ۲۰۲۷ و پنجشنبه است.)

مثال : معادله $6x \equiv 11$ دارای جواب نیست زیرا $(6, 9) = 3$ و $3 \nmid 11$ و معادله $4x \equiv 18$ دارای جواب است. چرا؟
این معادله را حل کنید :

$$4x \equiv 18 \Rightarrow 2 \times 2x \equiv 2 \times 9, (2, 6) = 2 \stackrel{\text{یگ‌زیو}}{\Rightarrow} 2x \equiv 9 \Rightarrow 2x \equiv 9 + 3 = 12 \Rightarrow x = 3k + 6$$

طبق قضیه، معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ جواب دارد اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$. در معادله $(6, 4) = 2$ داریم $(4, 6) = 2$ و $2 \mid 18$ ؛ پس جواب دارد. (در معادله نخست $3 \nmid 11$ بود.)

حل: دو طرف و پیمانه را بر $m = 6$ تقسیم می‌کنیم (ویژگی ۷): $2x \equiv 9 \pmod{6}$. چون $9 \equiv 3 \pmod{6}$ ،
 $2x \equiv 3 \pmod{6}$ و چون $(2, 6) = 2$ حذف ۲ مجاز است: $x \equiv 3 \pmod{6}$
جواب عمومی: $x = 3k$ ، $k \in \mathbb{Z}$ (که همان $x = 3k' + 6$ است).

۱- آیا می‌توانید یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)

یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنه ۴ کیلویی و یک وزنه ۳ کیلویی است. $4 \times \dots + 1 \times 3 = \dots$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟ $1 \times \dots + \dots \times 5 = 19$ (در واقع شما به دنبال جواب‌های

حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادله $4x + 3y = 19$ هستید. (x تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به کار رفته است)

۲- اگر بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟ باید

جواب‌هایی چون $x, y \in W$ بیابیم که $\dots \times x + \dots \times y = \dots$ چون مجموع دو عدد زوج همواره ... است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

تیم شش ای برای موفقیت

۱) بله. جواب اول: $4 \times 4 + 1 \times 3 = 19$.

جواب دیگر: $1 \times 4 + 5 \times 3 = 19$ (یک وزنه ۴ کیلویی و پنج وزنه ۳ کیلویی).

۲) باید $2x + 4y = 19$ ($x, y \in W = \{0, 1, 2, \dots\}$) داشته باشیم. سمت چپ $2x + 4y = 2(x + 2y)$ مجموع دو عدد

زوج و همواره زوج است، ولی ۱۹ فرد است؛ پس چنین x و y ای در W وجود ندارد و توزین با وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی ممکن نیست.

۱- با تبدیل معادله سیاله $4x + 5y = 9$ به معادله هم‌نهمستی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله سیاله را بیابید.

$$4x + 5y = 9 \Rightarrow 4x \equiv \dots \Rightarrow 4x \equiv 9 - \dots \Rightarrow 4x \equiv 4 \Rightarrow x \equiv \dots \Rightarrow x = 5k + \dots \\ \Rightarrow 4(5k + 1) + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 5y = 5 \Rightarrow 4k + y = 1 \Rightarrow y = \dots k + 1$$

$$4x + 5y = 9 \Rightarrow 4x \equiv 9 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 9 - 5 = 4 \pmod{5}$$

چون $(4, 5) = 1$ ، حذف ۴ مجاز است: $x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 1$

$$4(5k + 1) + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 5y = 5 \Rightarrow 4k + y = 1 \Rightarrow y = -4k + 1$$

جواب عمومی: $x = 5k + 1, y = -4k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$(4(5k + 1) + 5(-4k + 1) = 20k + 4 - 20k + 5 = 9 \text{ بررسی:})$$

کار در کلاس

صفحه ۲۷

۶۹

۲- در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد. کافی است جواب‌های عمومی معادله $4x + 3y = 19$ را (برحسب k) بیابیم و به‌ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت‌ها را بشماریم:

$$4x + 3y = 19 \Rightarrow 4x \equiv \dots \Rightarrow 4x \equiv 19 \pmod{3} \Rightarrow \dots \Rightarrow x = 3k + 1 \Rightarrow 4(3k + 1) + 3y = 19 \Rightarrow \dots \Rightarrow y = -4k + 5$$

$$4x + 3y = 19 \Rightarrow 4x \equiv 19 \pmod{3} \Rightarrow 4x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k + 1$$

$$4(3k + 1) + 3y = 19 \Rightarrow 12k + 4 + 3y = 19 \Rightarrow 12k + 3y = 15 \Rightarrow 4k + y = 5 \Rightarrow y = -4k + 5$$

شرط $x \geq 0$ یعنی $k \geq 0$ (برای k صحیح) و شرط $y \geq 0$ یعنی $k \leq 1$. پس $k \in \{0, 1\}$:

$$k = 1 \Rightarrow (x, y) = (4, 1); k = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, 5)$$

بنابراین کیسه را به دو طریق می‌توان وزن کرد (یک وزنه ۴ کیلویی و پنج وزنه ۳ کیلویی، یا چهار وزنه ۴ کیلویی و یک وزنه ۳ کیلویی).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

مثال

صفحه ۲۸

۷۰

(ادامه مثال صفحه قبل) به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

$$2000x + 5000y = 18000 \Rightarrow 2x + 5y = \dots, \quad 2x \equiv 18 \pmod{5} \text{ و } 18 \equiv \dots \pmod{5}, \quad x \equiv \dots$$

ابتدا طرفین را بر ۱۰۰۰ تقسیم می‌کنیم: $2x + 5y = 18$

در پیمانه ۵: $2x \equiv 18 \equiv 3 \pmod{5}$ و چون $3 \equiv 8 = 2 \times 4$ ، پس $2x \equiv 2 \times 4$ و با ساده کردن ۲ (که با ۵ نسبت

به هم اول است): $x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 4$

$$2(5k + 4) + 5y = 18 \Rightarrow 10k + 8 + 5y = 18 \Rightarrow 10k + 5y = 10 \Rightarrow y = -2k + 2$$

برای نامنفی بودن x و y فقط $(x=4, y=2)$ و $(x=9, y=0)$ قابل قبول است. پس به دو طریق: ۴ اسکناس ۲۰۰۰ تومانی و ۲ اسکناس ۵۰۰۰ تومانی، یا ۹ اسکناس ۲۰۰۰ تومانی.

مثال

صفحه ۲۸

۷۱

در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)
جاهای خالی راه حل را پر کنید: اگر تعداد چلو خورش قورمه سبزی و چلو خورش قیمه سفارش داده شده را به ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت:

$$x + y = 5 \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{1} \Rightarrow x = k + \dots \Rightarrow k + \dots + y = \dots \Rightarrow y = \dots$$

معادله $x + y = 5$ را حل می‌کنیم. در پیمانه ۱ هر دو عدد هم‌نهشت‌اند، پس $x \equiv 5 \pmod{1} \Rightarrow x = k + 5$

$$k + 5 + y = 5 \Rightarrow y = -k$$

چون x و y اعدادی نامنفی هستند پس باید $k \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.

تمرین

صفحه ۲۹

۷۲

۱- عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

مجموع ارقام: $1 + 3 + 9 + 8 = 21$ و $21 = 2 \times 9 + 3$ ؛ پس $1398 \equiv 3 \pmod{9}$ و عدد ۱۳۹۸ به دسته $[3]_9$ تعلق دارد. (بررسی: $1398 = 9 \times 155 + 3$)

تمرین

صفحه ۲۹

۷۳

۲- اگر $k \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است $k \equiv 0 \pmod{3}$ یا $k \equiv 1 \pmod{3}$ یا $k \equiv 2 \pmod{3}$ (به عبارت دیگر، $k \in [0]_3$ یا $k \in [1]_3$ یا $k \in [2]_3$).

طبق قضیه تقسیم، k را بر ۳ تقسیم می‌کنیم: $k = 3q + r$ ، $0 \leq r < 3$ و باقی‌مانده r یکتاست. چون $k \equiv r \pmod{3}$ ، پس k با r هم‌نهشت است و r فقط یکی از ۰، ۱ یا ۲ است.

اگر دو حالت همزمان رخ دهد، مثلاً $k \equiv r_1$ و $k \equiv r_2$ با $r_1 \neq r_2$ ، آنگاه $3 \mid r_1 - r_2$ ولی $0 < |r_1 - r_2| < 3$ که ممکن نیست. پس تنها یکی از سه حالت برقرار است (کلاس‌های $[0]_3, [1]_3, [2]_3$ ناسازگار و افراز $\mathbb{Z}$ هستند).

۳- اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \mid m$ ثابت کنید $a \equiv b \pmod{n}$.

$a \equiv b \pmod{n}$ یعنی $n \mid a - b$ ؛ طبق خاصیت تعدی $n \mid m$ و $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b$

۴- فرض کنیم $a \equiv b \pmod{m}$ و $b \equiv c \pmod{n}$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \equiv c \pmod{d}$.

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b$ و چون $d \mid m$ ، $d \mid a - b$. همچنین $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow n \mid b - c$ و $d \mid n$ ، پس $d \mid b - c$.

با جمع: $d \mid (a - b) + (b - c) = a - c$ ، یعنی $a \equiv c \pmod{d}$.

۵- ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آنگاه $a \equiv b \pmod{m}$.

فرض کنیم $a = mq_1 + r$ و $b = mq_2 + r$ (باقی‌مانده‌ها برابرند). آنگاه $a - b = m(q_1 - q_2)$ و در نتیجه $m \mid a - b$ ، یعنی $a \equiv b \pmod{m}$.

۶- عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

عکس: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آنگاه باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر m مساوی‌اند.

اثبات: فرض کنیم $a = mq_1 + r_1$ و $b = mq_2 + r_2$ با $0 \leq r_1, r_2 < m$. آنگاه $a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$ و چون $m \mid a - b$ ، $m \mid r_1 - r_2$ ؛ از طرفی $|r_1 - r_2| < m$ ؛ تنها مضرب m با قدر مطلق کمتر از m عدد صفر است، پس $r_1 = r_2$.

۷- با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام، یعنی،

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$.

از بسط دو جمله‌ای:

$$(a+b)^n - a^n - b^n = \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1}$$

هر جمله سمت راست دارای عامل a و عامل b است (توان هر دو دست کم ۱ است) و ضریب دو جمله‌ای عددی صحیح است؛ پس هر جمله مضرب ab است و در نتیجه $ab \mid (a+b)^n - (a^n + b^n)$ ، یعنی $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$.

تمرین

صفحه ۲۹

۷۹

۸- با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.

در تمرین ۷ قرار می‌دهیم $a=12, b=11, n=51$ ؛ آنگاه $ab=132$ و $a+b=23$ ، پس $(12^{51} - 11^{51} - 23^{51}) \equiv 0 \pmod{132}$ ، یعنی عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر ۱۳۲ بخش پذیر است. (عدد داده شده در کتاب قرینه همین عدد است و بخش پذیری بر ۱۳۲ با تغییر علامت حفظ می‌شود.)

تمرین

صفحه ۲۹

۸۰

۹- باقی مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

$$2^{11} = 2048 = 23 \times 89 + 1 \Rightarrow 2^{11} \equiv 1 \pmod{23}$$

$$2^{11} + 7 \equiv 8 \pmod{23} \Rightarrow A \equiv 8 \times 9 = 72 = 3 \times 23 + 3 \pmod{23}$$

باقی مانده تقسیم A بر ۲۳ برابر ۳ است.

تمرین

صفحه ۲۹

۸۱

۱۰- اگر دو عدد $(5 - 3a)$ و $(7 - 4a)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(6 + 9a)$ را به دست آورید.

رقم یکان برابر یعنی $(10) \quad 5 - 3a \equiv 7 - 4a \pmod{10}$ ، پس $a \equiv 2 \pmod{10}$.

در نتیجه $(10) \quad 6 + 9a \equiv 6 + 18 = 24 \equiv 4 \pmod{10}$ و رقم یکان $6 + 9a$ برابر ۴ است.

(بررسی: $-1 = 5 - 6 = -1 \Rightarrow a = 2$ و $1 - 7 = -6 = -1 \Rightarrow$ هم رقم یکان اند و $6 + 18 = 24$.)

۱۱- باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ را بر ۱۰ به دست آورید (رقم یکان A را بیابید).

برای $n \geq 5$ عدد $n!$ شامل عامل‌های ۲ و ۵ است و بر ۱۰ بخش‌پذیر است: $(10) \equiv 0$. پس فقط چهار جمله اول مؤثرند:

$$A \equiv 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33 \equiv 3 \pmod{10}$$

باقی‌مانده (و رقم یکان A) برابر ۳ است.

۱۲- جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را بدست آورید.

$$7x + 5y = 11 \Rightarrow 7x \equiv 11 \pmod{5} \Rightarrow 2x \equiv 1 \pmod{5}$$

دو طرف را در ۳ ضرب می‌کنیم ($2 \times 3 = 6 \equiv 1$): $x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3$

$$7(5k + 3) + 5y = 11 \Rightarrow 35k + 21 + 5y = 11 \Rightarrow 5y = -35k - 10 \Rightarrow y = -7k - 2$$

جواب عمومی: $(k \in \mathbb{Z})$. $x = 5k + 3$, $y = -7k - 2$. (بررسی: $(7 \times 3 + 5 \times (-2)) = 21 - 10 = 11$)

۱۳- به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

x تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی و y تعداد ۵۰۰۰ تومانی است: $2x + 5y = 29 \Rightarrow 2x + 5y = 29000$ با $x, y \geq 0$

$$2x \equiv 29 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 2$$

$$2(5k + 2) + 5y = 29 \Rightarrow 10k + 5y = 25 \Rightarrow y = -2k + 5$$

شرط $x \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$ و شرط $y \geq 0 \Rightarrow k \leq 2$ ؛ پس $k = 0, 1, 2$ و جواب‌ها $(x, y) = (2, 5), (7, 3), (12, 1)$ هستند.

به ۳ طریق می‌توان این کار را انجام داد.

۱۴- معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به دست آورید.

الف) $423x \equiv 79 \pmod{11}$

ب) $8x \equiv 20 \pmod{13}$

ج) $51x \equiv 11 \pmod{6}$

الف) $5 + 11 \times 38 = 423$ و $79 = 11 \times 7 + 2$ ؛ پس $(11) \equiv 2 \pmod{5}$. چون $(11) \equiv 1 \pmod{5}$ ، دو طرف را در ۹ ضرب می‌کنیم: $(11) \equiv 7 \pmod{5}$ ؛ جواب عمومی $x = 11k + 7$. (بررسی: $423 \times 7 = 2961 = 11 \times 269 + 2$ و $79 \equiv 2 \pmod{5}$)
ب) $(8, 12) = 4$ و $20 \mid 4$ ؛ پس جواب دارد. تقسیم بر ۴: $(3) \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 2x \equiv 5 \pmod{3}$ ؛ جواب عمومی $x = 3k + 1$.

ج) $(6) \equiv 3 \pmod{51}$ و $(6) \equiv 11 \pmod{5}$ ؛ معادله $3x \equiv 5 \pmod{255}$. چون $(3, 6) = 3$ و $3 \nmid 5$ (یا $3 \nmid 11$)، معادله جواب ندارد.

تمرین

صفحه ۳۰

۸۶

۱۵- اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

فاصله ۱ مهر تا ۷ اسفند: ماه‌های مهر، آبان، آذر، دی و بهمن هر کدام ۳۰ روز و ۶ روز از اسفند: $d = 5 \times 30 + 6 = 156$.

$$156 = 7 \times 22 + 2 \Rightarrow 156 \equiv 2 \pmod{7}$$

دو روز بعد از یکشنبه، یعنی سه‌شنبه؛ ۷ اسفند در آن سال سه‌شنبه است.

تمرین

صفحه ۳۰

۸۷

۱۶- اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

از ۳۱ مرداد تا ۱۲ بهمن: شهریور ۳۱ روز، مهر ۳۰، آبان ۳۰، آذر ۳۰، دی ۳۰ و ۱۲ روز بهمن: $d = 31 + 4 \times 30 + 12 = 163$.

$$163 = 7 \times 23 + 2 \Rightarrow 163 \equiv 2 \pmod{7}$$

یعنی ۱۲ بهمن دو روز بعد از ۳۱ مرداد است؛ پس ۳۱ مرداد دو روز قبل از جمعه، یعنی چهارشنبه است.

تمرین

صفحه ۳۰

۸۸

۱۷- همه اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

$$(11) \quad 5a + 9 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 5a \equiv -9 \pmod{11}$$

ضرب در ۹ ($۵ \times ۹ \equiv ۱$): (۱۱) $a \equiv ۱۸ \equiv ۷$ ؛ پس $a = ۱۱k + ۷$ ، $k \in \mathbb{Z}$. (بررسی: $۵ \times ۷ + ۹ = ۴۴ = ۱۱ \times ۴$)

تمرین

صفحه ۳۰

۸۹

۱۸- به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$$3x + 5y = 23 \quad \text{با} \quad x, y \geq 0 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 1; \quad 3(5k + 1) + 5y = 23$$

$$\Rightarrow 15k + 5y = 20 \Rightarrow y = -3k + 4$$

شرط‌ها: $k \geq 0$ و $k \leq 1$ ؛ جواب‌ها $(x, y) = (1, 4)$ و $(6, 1)$ ؛ یعنی ۲ طریق.

تمرین

صفحه ۳۰

۹۰

۱۹- به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

اگر x و y تعداد شاخه‌های دو نوع گل باشند: $x + y = 9$ با $x = k, y = 9 - k; x, y \geq 0$. $k = 0, 1, \dots, 9$. بنابراین به ۱۰ طریق می‌توان دسته گل را انتخاب کرد. (اگر دسته گل باید از هر دو نوع گل داشته باشد، ۸ طریق خواهد بود.)

تمرین

صفحه ۳۰

۹۱

۲۰- شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

x تعداد سؤالات ۷ امتیازی و y تعداد سؤالات ۹ امتیازی پاسخ داده شده: $7x + 9y = 73$ با $x, y \geq 0$.

$$7x \equiv 73 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{9} \Rightarrow x = 9k + 4$$

$$7(9k + 4) + 9y = 73 \Rightarrow 63k + 28 + 9y = 73 \Rightarrow y = -7k + 5$$

شرط $x \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$ و شرط $y \geq 0 \Rightarrow k \leq 0$ ؛ پس تنها $k = 0$: $x = 4$ و $y = 5$.

فقط یک حالت وجود دارد: ۴ سؤال ۷ امتیازی و ۵ سؤال ۹ امتیازی ($4 \times 7 + 5 \times 9 = 28 + 45 = 73$).

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

