

با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



کنکور

آزمون های آزمایشی

گام به گام

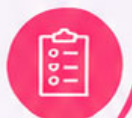
جزوه و نمونه سوال



ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضی ۲ پایه یازدهم تجربی

پاسخ فعالیت‌ها و پرسش‌های کتاب

پایه یازدهم · دوره دوم متوسطه · علوم تجربی

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های کتاب

تهیه شده در ایران توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۱	فصل اول — هندسه تحلیلی و جبر	۴
۲	فصل دوم — هندسه	۳۶
۳	فصل سوم — تابع	۶۸
۴	فصل چهارم — مثلثات	۱۱۹
۵	فصل پنجم — توابع نمایی و لگاریتمی	۱۷۶
۶	فصل ششم — حد و پیوستگی	۲۱۰
۷	فصل هفتم — آمار و احتمال	۲۴۶



ریاضی ۲ یازدهم - فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر

فهرست

۱	صفحه ۲۰۲ کار در کلاس — یادآوری و تکمیل معادله خط ... ۶
۲	صفحه ۲۰۲ کار در کلاس — شیب و معادله خطوط نمودار ... ۷
۳	صفحه ۲۰۳ کار در کلاس — عرض از مبدأ و معادله خط ... ۸
۴	صفحه ۲۰۳ فعالیت — شیب خطوط عمود بر هم ... ۹
۵	صفحه ۲۰۴ کار در کلاس — وضعیت دو خط نسبت به هم ... ۱۰
۶	صفحه ۲۰۴ کار در کلاس — مربع در ناحیه اول صفحه مختصات ... ۱۱
۷	صفحه ۲۰۴ فعالیت — فاصله دو نقطه روی خط افقی یا عمودی ... ۱۲
۸	صفحه ۲۰۶ کار در کلاس — فاصله دو نقطه (مثلث و جاده امداد) ... ۱۳
۹	صفحه ۲۰۶ فعالیت — مختصات نقطه وسط پاره خط ... ۱۴
۱۰	صفحه ۲۰۷ کار در کلاس — نقطه وسط پاره خط و میانه ... ۱۵
۱۱	صفحه ۲۰۸ کار در کلاس — رشد سودآوری کارگاه (نقطه وسط) ... ۱۶
۱۲	صفحه ۲۰۹ کار در کلاس — فاصله نقطه از خط و مماس بودن ... ۱۶
۱۳	صفحه ۲۰۹ تمرین — تمرین‌های درس اول ... ۱۷
۱۴	صفحه ۲۱۰ پرسش — طول و عرض جغرافیایی و دستگاه مختصات ... ۱۹
۱۵	صفحه ۲۱۱ کار در کلاس — حل معادله به روش تغییر متغیر ... ۱۹
۱۶	صفحه ۲۱۲ فعالیت — مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲ ... ۲۰
۱۷	صفحه ۲۱۳ کار در کلاس — مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها بدون حل معادله ... ۲۱
۱۸	صفحه ۲۱۵ کار در کلاس — ماکزیمم و مینیمم سهمی ... ۲۲
۱۹	صفحه ۲۱۵ پرسش — مسیر حرکت توپ (صفرهای تابع درجه ۲) ... ۲۳
۲۰	صفحه ۲۱۶ کار در کلاس — تعداد صفرهای تابع درجه ۲ و علامت Δ ... ۲۴
۲۱	صفحه ۲۱۷ کار در کلاس — تعیین علامت ضرایب از روی نمودار ... ۲۵
۲۲	صفحه ۲۱۸ تمرین — تمرین‌های درس دوم ... ۲۶
۲۳	صفحه ۲۱۹ پژوهش — عدد طلایی در طبیعت و هنر ... ۲۸
۲۴	صفحه ۲۲۰ فعالیت — حل معادله گویا و مسئله مترو ... ۲۹
۲۵	صفحه ۲۲۰ فعالیت — مسئله مترو (زمان رفت و برگشت) ... ۳۰
۲۶	صفحه ۲۲۱ کار در کلاس — معادلات گویا ... ۳۱
۲۷	صفحه ۲۲۳ کار در کلاس — معادلات رادیکالی ... ۳۳
۲۸	صفحه ۲۲۳ تمرین — تمرین‌های درس سوم ... ۳۴

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۱) می‌دانیم از هر دو نقطه متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین: الف) با داشتن مختصات نقطه از یک خط باید بتوان معادله آن را به دست آورد. ب) با داشتن معادله یک خط می‌توان با مشخص کردن نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

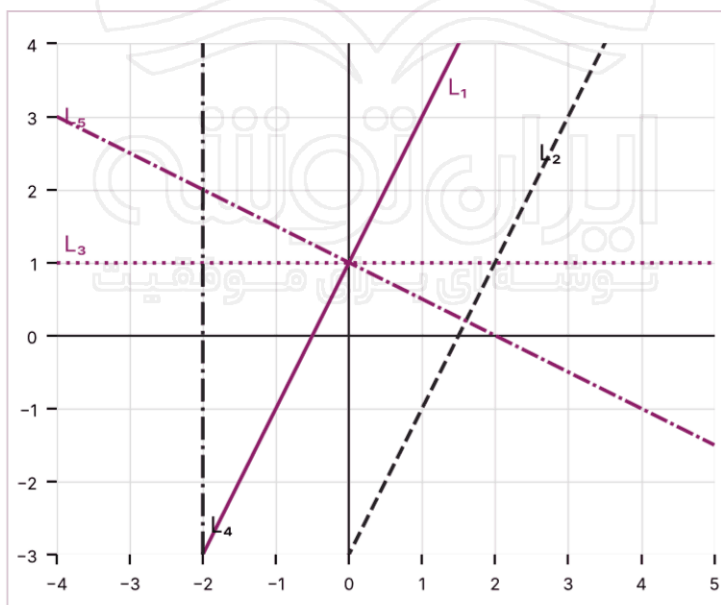
۲) نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات مشخص شده، رسم کنید: الف) $L_1: y = 2x + 1$ ب)

$L_2: y = 2x - 3$ پ) $L_3: y = 1$ ت) $L_4: x = -2$ ث) $L_5: x + 2y = 2$

۱) الف) با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط می‌توان معادله آن را به دست آورد. ب) با مشخص کردن دو نقطه از خط (مثلاً با یافتن نقطه برخورد با محورها یا جدول مقدار) می‌توان نمودار آن را رسم کرد.

۲) برای هر خط دو نقطه از آن به دست می‌آوریم و آنها را به هم وصل می‌کنیم:

خط	دو نقطه نمونه	توضیح
$L_1: y = 2x + 1$	$(0, 1)$ و $(-1, -1)$	شیب ۲
$L_2: y = 2x - 3$	$(0, -3)$ و $(1, -1)$	موازی L_1
$L_3: y = 1$	$(0, 1)$ و $(3, 1)$	افقی (موازی محور xها)
$L_4: x = -2$	$(-2, 0)$ و $(-2, 3)$	عمودی (موازی محور yها)
$L_5: x + 2y = 2$	$(0, 1)$ و $(2, 0)$	شیب $-1/2$



۳) معادلهٔ هریک از خطوط نمایش داده شده روی شکل را بنویسید. (چهار خط سبز، صورتی، آبی و نارنجی)
 ۴) الف) توجه داریم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ غیرهم‌طول A و B برابر است با $(x_B - x_A) / (.....)$ (ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای برابر باشند.

۳) خط سبز از مبدأ می‌گذرد و شیب آن ۱ است: $y = x$. خط صورتی از مبدأ می‌گذرد و شیب آن -۱ است: $y = -x$. خط آبی افقی و از نقطهٔ $(0, -2)$ می‌گذرد: $y = -2$. خط نارنجی عمودی و از نقطهٔ $(4, 0)$ می‌گذرد: $x = 4$.
 ۴) الف) شیب برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی؛ پس $m_{AB} = (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$ (ب) دو خط (غیرعمودی) موازی‌اند اگر و فقط اگر شیب‌های آنها برابر باشد.



۵) الف) از پایه نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور y ها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آن‌گاه h ، خط L نامیده می‌شود. ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هریک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی‌اند؟

۶) الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله‌ای با صورت $y = \dots\dots\dots$ دارد. ب) می‌خواهیم معادله خط L ، گذرا از دو نقطه $A(0, 7)$ و $B(3, 1)$ را بنویسیم. (حل شده در کتاب) پ) معادله خط گذرنده از نقطه $P(2, -1)$ را بنویسید؛ به طوری که با خط $y = 3x - 4$ موازی باشد.

۵) الف) h را عرض از مبدأ خط L می‌نامند.

ب) شیب و عرض از مبدأ خطوط سؤال ۲

خط	شیب m	h عرض از مبدأ
$L_1: y = 2x + 1$	2	1
$L_2: y = 2x - 3$	2	-3
$L_3: y = 1$	0	1
$L_4: x = -2$	تعریف نشده (خط عمودی)	ندارد (محور y ها را قطع نمی‌کند)
$L_5: x + 2y = 2 \Rightarrow y = -x/2 + 1$	-1/2	1

خطوط L_1 و L_2 هر دو شیب 2 دارند و عرض از مبدأهایشان متفاوت است؛ پس L_1 و L_2 با هم موازی‌اند.

۶) الف) $y = mx + h$

پ) خط موازی با $y = 3x - 4$ با شیب 3 دارد، پس $y = 3x + h$. نقطه $P(2, -1)$ روی خط است: $-1 = 3(2) + h \Rightarrow h = -7$.

$$y = 3x - 7$$

۱) دو خط L و Δ را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. به شیب‌های این دو خط توجه می‌کنیم: شیب خط L گذرا از نقاط $A(0, 4)$ و $P(2, 3)$: $m = (y_P - y_A)/(x_P - x_A) = (3 - 4)/(2 - 0) = -1/2$ شیب خط Δ گذرا از نقاط $P(2, 3)$ و $B(1, 1)$: $m' = \dots\dots\dots$

۲) حاصل ضرب شیب‌های دو خط را به دست می‌آوریم: $mm' = (-1/2)(\dots\dots) = \dots\dots$ می‌بینیم که شیب‌ها، قرینهٔ معکوس یکدیگرند.

۳) اگر خط دلخواه دیگری مثل T عمود بر L را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط Δ است؛ پس شیب خط T برابر عدد خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خط عمود بر L برابر قرینهٔ شیب خط L خواهد بود.

$$m' = (y_P - y_B)/(x_P - x_B) = (3 - 1)/(2 - 1) = 2 \quad (۱)$$

$$mm' = (-1/2)(2) = -1 \quad (۲)$$

۳) هر دو خط T و Δ بر L عمودند، پس این خط حتماً با خط Δ موازی است؛ پس شیب خط T برابر عدد ۲ خواهد بود. بنابراین شیب هر خط عمود بر L برابر قرینهٔ معکوس شیب خط L است.



۱) در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود؟) الف) $T: y = (-1/5)x + 3$ ، $L: y = 5x - 2$ ب) $T: y = (1/2)x + 7$ ، $L: y = 3x + 1$ پ) $T: 3x + 2y = 0$ ، $L: 2x - 3y + 3 = 0$ ت) $T: y = -3$ ، $L: x = 1$ ث) $T: x = 3y - 1$ ، $L: y = 3x + 1$ ۲) خط L به معادله $2y - 3x = 1$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید. الف) m را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد. ب) به ازای چه مقداری از m ، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

(۱)

۱. $m_L = 5$ و $m_T = -1/5$ ؛ $m_L \cdot m_T = -1 \Rightarrow$ عمود

۲. $m_L = 1/2$ ؛ $T: x - 2y = 1 \Rightarrow y = x/2 - 1/2$ ؛ $m_T = 1/2$. شیب‌ها برابر و عرض از مبدأها متفاوت‌اند $\Rightarrow$ موازی

۳. $L: y = (2/3)x + 1$ پس $m_L = 2/3$ ؛ $T: y = -(3/2)x$ پس $m_T = -3/2$ ؛ حاصل ضرب $-1 \Rightarrow$ عمود

۴. $L: x = 1$ خطی عمودی (موازی محور y ها) و $T: y = -3$ خطی افقی (موازی محور x ها) است $\Rightarrow$ عمود

۵. $m_L = 3$ و $T: y = x/3 + 1/3$ پس $m_T = 1/3$ ؛ شیب‌ها نه برابرند و نه حاصل ضربشان -1 است $(3 \times 1/3 = 1) \Rightarrow$ متقاطع غیر عمود

۲) $2y - 3x = 1 \Rightarrow y = (3/2)x + 1/2$ پس $m_L = 3/2$.

الف) موازی: شیب‌ها برابر باشد؛ $m = 3/2$.

ب) عمود: $m \times 3/2 = -1 \Rightarrow m = -2/3$.

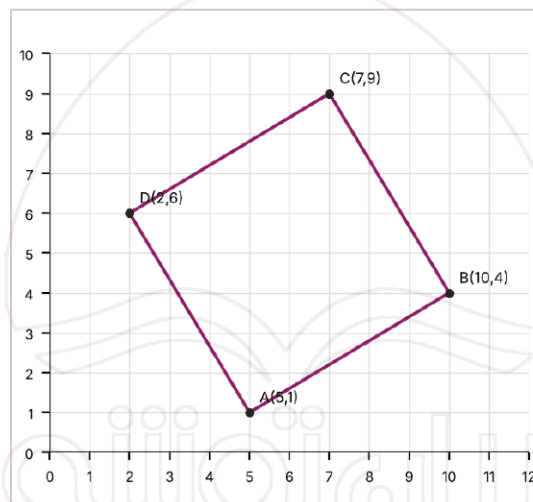
۳) مربع ABCD در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است، به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند. الف) شیب ضلع AB را بنویسید. ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید. پ) اگر بدانیم نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید. ت) مربع را به طور کامل رسم کنید.

۳ الف) $m_{AB} = (4 - 1)/(10 - 5) = 3/5$

ب) ضلع AD بر AB عمود است، پس $m_{AD} = -5/3$. معادله: $3y - 3 = -5x + 25 \Rightarrow y - 1 = -(5/3)(x - 5)$
 $5x + 3y = 28 \Rightarrow$

پ) در مربع (متوازی الاضلاع)، BC با AD برابر و موازی است؛ پس $C - B = D - A$ و $D = A + C - B = (5 + 7 - 10, 1 + 9 - 4) = (2, 6)$
 بررسی: D روی خط $5x + 3y = 28$ است $(10 + 18 = 28)$ و $AD = \sqrt{(9 + 25)} = \sqrt{34} = \sqrt{(10 + 18)}$
 AB.

ت) مربع با رأس‌های $A(5, 1)$ ، $B(10, 4)$ ، $C(7, 9)$ و $D(2, 6)$ رسم شده است:



توشه ای برای موفقیت

شکل مقابل را در نظر بگیرید. الف) فاصله دو نقطه $A(2, 0)$ و $B(7, 0)$ که برابر طول پاره خط AB است، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین این عدد با x_A و x_B وجود دارد؟ ب) فاصله دو نقطه $C(0, -6)$ و $D(0, 3)$ را برحسب عرض آنها بیان کنید. پ) در شکل مقابل، فاصله نقاط $A(x_A, 0)$ و $B(x_B, 0)$ را برحسب طول آنها و فاصله دو نقطه $C(0, y_C)$ و $D(0, y_D)$ را برحسب عرض آنها به دست آورید. $CD =$ ، $AB =$

فعالیت (صفحه ۵)

۱) در شکل مقابل فاصله دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(4, 6)$ را با خط کش به دست آورید.

۲) بدون استفاده از خط کش، طول پاره خط AB را به دست آورید. برای این کار از چه رابطه‌ای استفاده می‌کنید؟

۳) در شکل مقابل: الف) مختصات نقطه H را بنویسید. ب) طول پاره خط‌های AH و BH را مشخص کنید و روی شکل بنویسید. پ) طول AB را به کمک قضیه فیثاغورس به دست آورید.

الف) $AB = 5 = 7 - 2 = x_B - x_A$ ؛ یعنی فاصله برابر است با قدر مطلق تفاضل طول‌ها: $|x_B - x_A|$.

ب) $CD = 3 - (-6) = 9 = y_D - y_C = |y_C - y_D|$

پ) $CD = |y_C - y_D|$ ، $AB = |x_A - x_B|$

فعالیت (صفحه ۵)

۱) با خط کش (با مقیاس هر خانه برابر یک واحد) طول AB برابر ۵ واحد به دست می‌آید.

۲) از رابطه فیثاغورس (فاصله دو نقطه) استفاده می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

۳) الف) H هم عرض با A و هم طول با B است: $H(x_B, y_A)$.

ب) $AH = |x_B - x_A|$ و $BH = |y_B - y_A|$

پ) مثلث AHB در H قائمه است، پس $AB^2 = AH^2 + BH^2$ و

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

۱) نقاط $A(2, 0)$ ، $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید. الف) محیط مثلث ABC را با محاسبه طول اضلاع آن به دست آورید. $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ $BC = \dots$ ، $AC = \dots$ ، محیط: $P = \dots$ ب) ABC چه نوع مثلثی است؟ پ) به دو روش نشان دهید ABC یک مثلث قائم الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

۲) در یکی از جاده‌های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطه تصادف روی نقشه مرکز امداد به صورت $P(50, 30)$ است. پایگاه‌های امداد هوایی که به محل تصادف نزدیک‌اند، در نقاط $A(10, -20)$ و $B(80, 90)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد امداد به محل حادثه پیشنهاد می‌کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).

۳) الف) فاصله نقطه $N(-6, 8)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید. ب) فاصله نقطه $E(x_E, y_E)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

۱) الف) $BC = \sqrt{(5 + 2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ، $AC = \sqrt{(2 + 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ $P = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2} \approx 17.07$

ب) $AB = AC = 5$ ؛ پس مثلث متساوی الساقین است.

پ) روش اول (عکس قضیه فیثاغورس): $AB^2 + AC^2 = 25 + 25 = 50 = BC^2$ ؛ پس زاویه A قائمه است.

روش دوم (شیب‌ها): $m_{AB} = (4 - 0)/(5 - 2) = 4/3$ و $m_{AC} = (3 - 0)/(-2 - 2) = -3/4$ $AB \perp AC \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$

مساحت: $S = (1/2) \cdot AB \cdot AC = (1/2)(5)(5) = 12.5$

۲) فاصله محل تصادف تا هر پایگاه را حساب می‌کنیم:

$PA = \sqrt{(50 - 10)^2 + (30 + 20)^2} = \sqrt{1600 + 2500} = \sqrt{4100} \approx 64.0$ کیلومتر

$PB = \sqrt{(80 - 50)^2 + (90 - 30)^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500} \approx 67.1$ کیلومتر

پایگاه A نزدیک‌تر است؛ پس پایگاه A را پیشنهاد می‌کنیم.

۳) الف) $ON = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

ب) $OE = \sqrt{x_E^2 + y_E^2}$

این شکل را در نظر بگیرید. الف) نقطهٔ وسط پاره خط AB را M بنامید. M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید. ب) نقطهٔ وسط پاره خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

(در شکل: $A(1, 0)$, $B(9, 0)$, $C(0, -7)$, $D(0, 3)$)

پ) مطابق شکل، A و B دو نقطهٔ دلخواه روی x ها هستند. اگر M وسط AB باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید. AB وسط $M \Rightarrow AM = MB \Rightarrow x_M - x_A = \dots \Rightarrow 2x_M = \dots \Rightarrow x_M = (x_A + \dots)/\dots$

ت) در شکل مقابل، C و D دو نقطهٔ دلخواه روی y ها هستند. اگر N وسط CD باشد، عرض نقطهٔ N را بیابید. CD

وسط $N \Rightarrow \dots \Rightarrow y_N = (\dots)/2$

ث) اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات باشند و M نقطهٔ وسط AB، آنگاه با توجه به شکل مقابل

می‌توان نشان داد: $M(\dots, \dots)$

$$M = ((1 + 9)/2, 0) = (5, 0) \text{ (الف)}$$

$$N = (0, (-7 + 3)/2) = (0, -2) \text{ (ب)}$$

$$x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = (x_A + x_B)/2 \text{ (پ)}$$

$$y_N - y_C = y_D - y_N \Rightarrow 2y_N = y_C + y_D \Rightarrow y_N = (y_C + y_D)/2 \text{ (ت)}$$

ث) طول و عرض نقطهٔ وسط، میانگین طول‌ها و عرض‌های دو سر پاره خط‌اند (با تصویرکردن روی محورها):

$$M((x_A + x_B)/2, (y_A + y_B)/2)$$

۱) مثلث با رأس‌های $A(1, 9)$ ، $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$ را در نظر بگیرید و آن را در دستگاه مقابل مشخص کنید.
الف) مختصات M ، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید. ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید. پ) معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

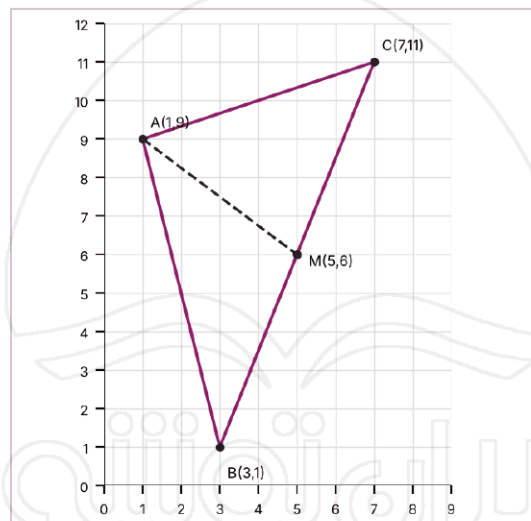
۲) الف) نقطهٔ $N(5, -4)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(7, -2)$ است. مختصات نقطهٔ A را بیابید. ب) قرینهٔ نقطهٔ $C(1, 2)$ نسبت به نقطهٔ $M(-1, 4)$ را به دست آورید. پ) قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$۱) \text{ الف) } M = ((3 + 7)/2, (1 + 11)/2) = (5, 6)$$

$$\text{ب) } AM = \sqrt{((5 - 1)^2 + (6 - 9)^2)} = \sqrt{(16 + 9)} = 5$$

$$\text{پ) } 4y - 36 = -3x + 3 \Rightarrow y - 9 = -(3/4)(x - 1) \Rightarrow m_{AM} = (6 - 9)/(5 - 1) = -3/4$$

$$3x + 4y = 39$$



۲) الف) N وسط AB است، پس $5 = (x_A + 7)/2$ و $-4 = (y_A - 2)/2$ ؛ یعنی $x_A = 3$ و $y_A = -6$:

$$A(3, -6)$$

ب) قرینهٔ C نسبت به M نقطه‌ای مانند C' است که M وسط CC' باشد: $x = -3$ ؛ $4 = (2 + y)/2 \Rightarrow y = 6$:

$$y)/2 \Rightarrow y = 6:$$

$$C'(-3, 6)$$

پ) مبدأ $O(0, 0)$ وسط PP' است: $0 = (\alpha + x)/2$ و $0 = (\beta + y)/2$ ؛ پس قرینهٔ $P'(-\alpha, -\beta)$ است.

۳) سود سالانه یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. (در سال ۱۳۸۵ برابر ۵۷ و در سال ۱۳۹۵ برابر ۱۰۳ میلیون تومان) به کمک رابطه نقطه وسط پاره خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) میانگین سود سالانه این شرکت در دهه مورد نظر چقدر بوده است؟ ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟ پ) اگر سود سالانه در طول یک دهه آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

نمودار پاره خطی است از نقطه (57, 1385) تا (103, 1395); مختصات نقطه وسط آن را حساب می‌کنیم:

$$M = ((1385 + 1395)/2, (57 + 103)/2) = (1390, 80)$$

الف) میانگین سود سالانه در این ده سال: ۸۰ میلیون تومان.

ب) سود سالانه در سال ۱۳۹۰ برابر با میانگین (۸۰ میلیون تومان) بوده است.

پ) سال ۱۳۹۵ وسط ۱۳۸۵ و ۱۴۰۵ است؛ اگر سود سال ۱۴۰۵ را y بنامیم: $(57 + y)/2 = 103 \Rightarrow y = 149$. بنابراین انتظار می‌رود سود سال ۱۴۰۵ حدود ۱۴۹ میلیون تومان باشد.

۱) فاصله نقطه $P(7, -4)$ را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر به دست آورید: الف) $L: 2x + y = 5$ ب) $T: x = 5$ پ) $\Delta: y = 0$

۲) خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید. (راهنمایی: خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است).

۱) الف) $d = |2(7) + (-4) - 5| / \sqrt{(4 + 1)} = 5/\sqrt{5} = \sqrt{5} \approx 2.24$ $2x + y - 5 = 0$:

ب) خط $x = 5$ عمودی است، پس $d = |7 - 5| = 2$.

پ) خط $y = 0$ همان محور x ها است، پس $d = |-4| = 4$.

۲) شعاع دایره برابر فاصله مرکز تا خط مماس است:

$$r = |3(2) - 4(-1)| / \sqrt{(9 + 16)} = 10/5 = 2$$

(۱) وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید: $\Delta: x + 2y = 0$ ، $T: y = 2x - 3$ ، $L: 2x - y = 1$
 (۲) دو نقطه $A(3, 14)$ و $B(-13, 10)$ را در نظر بگیرید. فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید.

(۳) نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(1, 2)$ ، $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم‌الزاویه است.
 (۴) دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ هستند. الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید. ب) آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟
 (۵) نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

(۶) یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است؛ به طوری که فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطه D را به دست آورید. (در شکل: $A(-3, -2)$ ، $B(5, 2)$ ، $C(0, 1)$ و M پای میله)
 (۷) یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

(۸) الف) نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ با یکدیگر موازی‌اند. ب) فاصله این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی: یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید).

(۱) شیب‌ها: $\Delta: y = -x/2 \Rightarrow m_{\Delta} = -1/2$; $T: y = 2x - 3 \Rightarrow m_T = 2$; $L: y = 2x - 1 \Rightarrow m_L = 2$

○ L و T : شیب‌ها برابر و عرض از مبدأها متفاوت $(-1$ و $-3) \Rightarrow$ موازی

○ L و Δ : $2 \times (-1/2) = -1 \Delta \Rightarrow$ عمود بر هم

○ T و Δ : $2 \times (-1/2) = -1 \Delta \Rightarrow$ عمود بر هم

(۲) وسط $AB: M = ((3 - 13)/2, (14 + 10)/2) = (-5, 12)$

$OM = \sqrt{(25 + 144)} = 13$

(۳) $BC = \sqrt{((4 - 2)^2 + (1 - 5)^2)} = \sqrt{20}$ ، $AC = \sqrt{((4 - 1)^2 + (1 - 2)^2)} = \sqrt{10}$ ، $AB = \sqrt{((2 - 1)^2 + (5 - 2)^2)} = \sqrt{10}$

$AB = AC \Rightarrow$ متساوی الساقین؛ و $AB^2 + AC^2 = 10 + 10 = 20 = BC^2 \Rightarrow$ قائم‌الزاویه (قائمه در A). پس مثلث متساوی الساقین قائم‌الزاویه است.

(۴) الف) مرکز، وسط قطر است: $O = ((2 + 6)/2, (-2 + 4)/2) = (4, 1)$. شعاع: $r = AB/2 = (1/2)\sqrt{(16 + 36)} = \sqrt{52}/2 = \sqrt{13}$

ب) $OC = \sqrt{((7 - 4)^2 + (3 - 1)^2)} = \sqrt{(9 + 4)} = \sqrt{13} = r$ پس فاصله C از مرکز برابر شعاع است و نقطه C روی محیط دایره قرار دارد.

(۵) AB و BC را بررسی می‌کنیم: $m_{AB} = (0 - 3)/(-1 - 2) = 1$ و $m_{BC} = (-2 - 0)/(1 + 1) = -1$ (حاصل ضرب -1 ، پس B رأس زاویه قائمه است). D رأس مقابل B است.

راه کوتاه: قطرهای AC و BD منصف یکدیگرند؛ پس وسط AC همان وسط BD است: وسط $AC = (3/2, 1/2)$
 $\Rightarrow (-1 + x)/2 = 3/2$ و $(0 + y)/2 = 1/2 \Rightarrow x = 4$ و $y = 1$.

$$D(4, 1)$$

(۶) فاصله A تا M برابر MB و فاصله C تا M برابر MD است؛ یعنی M وسط AB و وسط CD است. $M = ((-3 + 5)/2, (-2 + 2)/2) = (1, 0)$ حال M وسط CD است:

$$(0 + x_D)/2 = 1 \Rightarrow x_D = 2, (1 + y_D)/2 = 0 \Rightarrow y_D = -1 \quad D(2, -1)$$

(۷) نقطه $A(3, 0)$ روی خط L نیست $(1 - 2(3) \neq 0)$ ؛ پس ضلع مربع که از A می‌گذرد بر L عمود است و طول ضلع برابر فاصله A از L است:

$$2x - y - 1 = 0 \Rightarrow a = |2(3) - 0 - 1| / \sqrt{4 + 1} = 5/\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$مساحت: S = a^2 = 5$$

(۸) الف $5x - 12y + 8 = 0 \Rightarrow m = 5/12$ و $-10x + 24y + 10 = 0 \Rightarrow 24y = 10x - 10 \Rightarrow y = (5/12)x - 5/12$
 $\Rightarrow m' = 5/12$. شیب‌ها برابرند و عرض از مبدأها $(-5/12$ و $2/3)$ متفاوت است؛ پس دو خط موازی (و متمایز) هستند.

ب) نقطه $(0, 2/3)$ روی خط اول است $(-12 \times 2/3 + 8 = 0)$. فاصله آن از خط دوم:

$$d = |-10(0) + 24(2/3) + 10| / \sqrt{100 + 576} = |16 + 10| / 26 = 26/26 = 1$$



۹) طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجه شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجه شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به طور خلاصه، به صورت (46, 38) نشان دهیم. این اطلاعات درباره چابهار به صورت (61, 25) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبه فاصله تقریبی این دو شهر. آیا تاکنون به رابطه طول و عرض جغرافیایی با دستگاه مختصات فکر کرده‌اید؟ در دستگاه مختصات مقابل، کدام محور نظیر طول جغرافیایی است؟

۹) اختلاف عرض جغرافیایی: $13 = 38 - 25$ درجه؛ اختلاف طول جغرافیایی: $15 = 61 - 46$ درجه. با قضیه فیثاغورس:

$$d = \sqrt{(15^2 + 13^2)} \times 110 = \sqrt{394} \times 110 \approx 19.85 \times 110 \approx 2184$$

یعنی فاصله تقریبی تبریز و چابهار حدود **۲۱۸۴ کیلومتر** است.

پرسش: محور افقی (xها) نظیر طول جغرافیایی (شرقی-غربی) و محور عمودی (yها) نظیر عرض جغرافیایی (شمالی-جنوبی) است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد؛ پاسخ پرسش آخر از روی تصویر نقشه و تعریف طول و عرض جغرافیایی نوشته شده است.

معادله‌های مقابل را حل کنید. الف) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$ ب) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

الف) قرار می‌دهیم $x^2 = u$ ؛ آنگاه $2u^2 - 7u - 4 = 0$. $\Delta = 49 + 32 = 81$ و $u = (7 \pm 9)/4$ یا $u = 4$ یا $u = -1/2$.

○ $u = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

○ $u = -1/2 \Rightarrow x^2 = -1/2$ غیرممکن است (مربع هر عدد حقیقی نامنفی است).

جواب‌ها: $x = 2$ و $x = -2$

ب) قرار می‌دهیم $x^2 = u$ ؛ آنگاه $u^2 + 3u + 2 = 0 \Rightarrow (u + 1)(u + 2) = 0$ یا $u = -1$ یا $u = -2$. چون $x^2 = u$

نمی‌تواند منفی باشد، هر دو مقدار غیرقابل قبول‌اند؛ پس معادله جواب حقیقی ندارد.

می‌دانیم که معادله درجه دوم در حالت کلی به صورت مقابل است: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

(۱) می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان بدون حل این معادله درباره وجود و تعداد جواب‌های حقیقی آن

اظهار نظر کرد. الف) در این معادله اگر ضرایب a و c هم علامت نباشند، درباره علامت Δ چه می‌توان گفت؟

ب) اگر a و c هم علامت نباشند، آنگاه معادله (۱) دارای ریشه حقیقی متمایز است.

(۲) معادله مقابل را در نظر می‌گیریم: $3x^2 + 5x - 1 = 0$ الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشه

حقیقی متمایز است. ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه‌ها (S) رابطه‌ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این

سؤال، معادله را حل می‌کنیم: $\Delta = b^2 - 4ac = \dots$ ، $\alpha = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a) = \dots$ ، $\beta = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a) = \dots$ ،

$S = \alpha + \beta = \dots + \dots = \dots$. ملاحظه می‌شود که: $S = -b/a$. پ) درستی نتیجه فوق را در معادله زیر هم

بررسی می‌کنیم: $\beta = \dots$ ، $\alpha = \dots$ ، $3x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(3x - 7) = 0 \Rightarrow \alpha = \dots$ ، $S = \alpha + \beta = \dots + \dots = 7/3 = -b/a$ ،

ا ت) درستی نتیجه بالا را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. فرض کنیم برای معادله (۱)، مقدار Δ مثبت باشد. پس

معادله دو ریشه حقیقی متمایز مثل α و β دارد: $\alpha = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$ ، $\beta = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a) \Rightarrow S = \alpha + \beta = (-b + \dots + (-b - \dots) = -2b/(2a) = -b/a$

$P = \alpha \cdot \beta = ((-b + \sqrt{\Delta})/(2a)) \cdot ((-b - \sqrt{\Delta})/(2a)) = (b^2 - \Delta)/(4a^2) = (b^2 - b^2 + 4ac)/(4a^2) = 4ac/(4a^2) = c/a$

$(2a)) = \dots$

(۱) الف) اگر a و c هم علامت نباشند، $ac < 0$ و در نتیجه $-4ac > 0$ ؛ پس $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (مثبت).

ب) در این حالت $\Delta > 0$ است، پس معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

(۲) الف) ضرایب $a = 3$ و $c = -1$ هم علامت نیستند ($ac < 0$)؛ پس طبق قسمت قبل $\Delta > 0$ و معادله دو ریشه

حقیقی متمایز دارد.

ب) $\Delta = 25 + 12 = 37$

$\alpha = (-5 + \sqrt{37})/6$ ، $\beta = (-5 - \sqrt{37})/6$

$S = \alpha + \beta = (-5 + \sqrt{37})/6 + (-5 - \sqrt{37})/6 = -10/6 = -5/3$

و $-b/a = -5/3$ ؛ پس $S = -b/a$.

پ) $x(3x - 7) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ، $\beta = 7/3$

$S = 0 + 7/3 = 7/3 = -(-7)/3 = -b/a$

ت) $\beta = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$

$S = \alpha + \beta = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a) + (-b - \sqrt{\Delta})/(2a) = -2b/(2a) = -b/a$

ث) $P = \alpha \cdot \beta = ((-b + \sqrt{\Delta})/(2a)) \cdot ((-b - \sqrt{\Delta})/(2a)) = (b^2 - \Delta)/(4a^2) = (b^2 - b^2 + 4ac)/(4a^2) = 4ac/(4a^2) = c/a$

c/a

در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ ، بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.

ادامه کار در کلاس (تشکیل معادله)

۱) دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $-1/5$ (یعنی $-1/5$) و حاصل ضربشان -7 باشد.

۲) آیا مستطیلی با محیط 11 cm و مساحت 6 cm^2 وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید. حل: اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم: محیط $\alpha + \beta = 11 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 22$ ، مساحت $\alpha \cdot \beta = 6 \Rightarrow \alpha(11/2 - \alpha) = 6 \Rightarrow 2\alpha^2 - 11\alpha + 12 = 0$ (الف) معادله بالا را ساده کنید و از حل آن α و β را به دست آورید. ب) با استفاده از S و P و تشکیل یک معادله درجه ۲، این مسئله را حل کنید. ۳) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $(3 - \sqrt{5})/2$ و $(3 + \sqrt{5})/2$ باشند.

$a = -2$ ، $b = 1$ ، $c = 5$. چون $ac < 0$ است، $\Delta > 0$ و معادله دو ریشه دارد. (یا $\Delta = 1 + 40 = 41 > 0$)

$$S = -b/a = -1/(-2) = 1/2, \quad P = c/a = 5/(-2) = -5/2$$

ادامه کار در کلاس (تشکیل معادله)

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + (3/2)x - 7 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 14 = 0 \text{ معادله: } P = -7 \text{ و } S = -3/2 \text{ (۱)}$$

$$\Delta = 9 + 112 = 121 \quad x = (-3 \pm 11)/4 \quad x = 2 \text{ or } x = -7/2$$

بررسی: $2 + (-7/2) = -3/2$ و $2 \times (-7/2) = -7$

$$\alpha(11/2 - \alpha) = 6 \Rightarrow 11\alpha/2 - \alpha^2 = 6 \Rightarrow 2\alpha^2 - 11\alpha + 12 = 0 \text{ (الف) (۲)}$$

$$\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = (11 \pm 5)/4 \Rightarrow \Delta = 121 - 96 = 25 \text{ یا } \beta = 11/2 - \alpha = 3/2 \text{ یا } 4.$$

پس چنین مستطیلی وجود دارد و ابعاد آن **۴ سانتی متر و ۱/۵ سانتی متر** است.

ب) $\alpha + \beta = S = 11/2$ و $\alpha \cdot \beta = P = 6$ ؛ ریشه‌های $x^2 - Sx + P = 0$ یعنی

$$x^2 - (11/2)x + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 12 = 0 \text{ هستند که همان معادله قسمت الف است؛ پس ابعاد } 4 \text{ و } 3/2$$

سانتی متر است.

$$P = ((3 - \sqrt{5})/2)((3 + \sqrt{5})/2) = (9 - 5)/4 = 1, \quad S = (3 - \sqrt{5})/2 + (3 + \sqrt{5})/2 = 3 \text{ (۳)}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

۱) تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید. الف) $g(x) = -(x+1)^2 + 3$ ب) $h(x) = x^2 - 4x + 9$

۲) قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده در اختیار باشد، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

۱) الف) $a = -1 < 0$: دهانه سهمی رو به پایین است و تابع **ماکزیمم** دارد. رأس: $x = -1$ و مقدار ماکزیمم $g(-1) = 3$.

ب) $a = 1 > 0$: دهانه رو به بالا است و تابع **مینیمم** دارد. $x = -b/(2a) = 4/2 = 2$ و مقدار مینیمم $h(2) = 4 - 8 + 9 = 5$.

۲) دو ضلع عمود بر رودخانه را x و ضلع موازی با رودخانه را y می‌نامیم. طول نرده: $2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$.

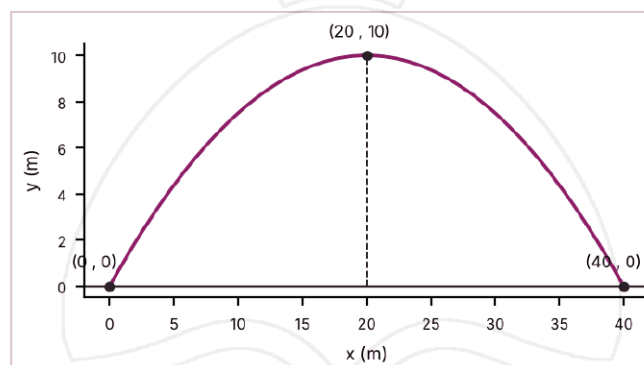
مساحت: $S = xy = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$ چون $a = -2 < 0$ است، ماکزیمم در $x = -b/(2a) = -100/(-4) = 25$ رخ می‌دهد.

$$x = 25 \text{ m}, y = 100 - 50 = 50 \text{ m}, S_{\text{max}} = 25 \times 50 = 1250 \text{ m}^2$$

یعنی دو ضلع کناری ۲۵ متر و ضلع موازی با رودخانه ۵۰ متر باشد.

فرض کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویه 45° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه 20 m/s شوت کند. معادله مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطه $y = (-1/40)x^2 + x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است. الف) حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید. ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟ برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور x ها را به دست آوریم، باید $y = 0$ قرار دهیم: $y = 0 \Rightarrow x(-x/40 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 40$. این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می دهند؟

الف) $a < 0$ است؛ بیشترین ارتفاع در رأس رخ می دهد: $x = -b/(2a) = -1/(-1/20) = 20$ و $y = -400/40 + 20 = 10$. یعنی حداکثر ارتفاع توپ **۱۰ متر** است (در فاصله افقی ۲۰ متر).
ب) توپ در $x = 40$ دوباره به زمین می رسد؛ پس حداکثر مسافت افقی **۴۰ متر** است.



معنای فیزیکی: $x = 0$ محل شوت شدن توپ (نقطه شروع روی زمین) و $x = 40$ محل فرود توپ روی زمین است؛ در هر دو نقطه ارتفاع توپ صفر است.

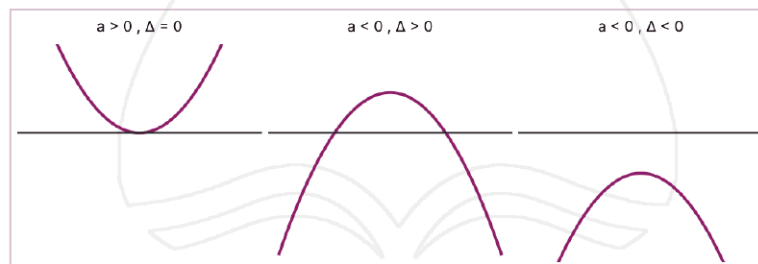
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱) همچنان که از سال قبل می‌دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پایین بودن دهانه سهمی از روی علامت a مشخص می‌شود. جدول زیر را کامل کنید. (در جدول، سه خانه خالی است)

۲) دربارهٔ تابع درجه دوم f ، برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی معادلهٔ $f(x) = 0$ می‌توانیم از علامت S و P کمک بگیریم. در هر یک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید. الف) $y = x^2 + 6x + 5$ (حل شده در کتاب)
ب) $y = x^2 + 4x - 5$ پ) $y = 3x^2 - 7x + 1$ ت) $y = -x^2 + 2x - 1$

(۱)

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	
بدون صفر (نمودار بالای محور x ها)	یک صفر: رو به بالا و مماس بر محور x ها	دو صفر (نمودار رو به بالا و محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند)	$a > 0$
بدون صفر: رو به پایین و پایین محور x ها	یک صفر (نمودار رو به پایین و مماس بر محور x ها)	دو صفر: رو به پایین و محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند	$a < 0$



۲) ب) $\Delta = 16 + 20 = 36 > 0 \Rightarrow$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز. $P = c/a = -5 < 0 \Rightarrow$ ریشه‌ها مختلف‌العلامت‌اند. $S = -b/a = -4 < 0 \Rightarrow$ ریشهٔ منفی قدر مطلق بزرگ‌تری دارد (ریشه‌ها ۱ و -۵).

پ) $\Delta = 49 - 12 = 37 > 0 \Rightarrow$ دو ریشهٔ متمایز. $P = 1/3 > 0 \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند. $S = 7/3 > 0 \Rightarrow$ هر دو ریشه مثبت‌اند.

ت) $\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow$ یک ریشهٔ مضاعف (فقط یک صفر). $P = (-1)/(-1) = 1 > 0$ و $S = 2 > 0 \Rightarrow$ این ریشه مثبت است ($x = 1$).

۳) هرگاه نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن علامت ضرایب a ، b و c را مشخص کنیم. به عنوان مثال نمودار تابع f از مجموعه توابع داده شده زیر را در نظر می‌گیریم: دهانه سهمی رو به بالاست؛ پس a مثبت است. نمودار تابع f محور y ها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده است؛ پس c منفی است. رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که باتوجه به نمودار، مجموع دو ریشه عددی مثبت است (چرا؟) و از این مطلب هم می‌توان منفی بودن علامت b را نتیجه گرفت. خلاصه این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.

چرا؟ رأس سهمی وسط دو ریشه است و طول رأس مثبت است ($-b/(2a) > 0$)؛ پس میانگین دو ریشه مثبت است، یعنی $S = \alpha + \beta > 0$. چون $S = -b/a$ و $a > 0$ ، نتیجه می‌شود $b < 0$.

جدول کامل شده ویژگی توابع

تابع	a علامت	b علامت	c علامت	تعداد ریشه‌ها	علامت ریشه‌ها (در صورت وجود)
f	+	-	-	دو	یکی منفی، یکی مثبت
g	-	+	-	دو	هر دو مثبت
h	-	+	-	فاقد ریشه	ریشه ندارد
i	+	-	+	فاقد ریشه	ریشه ندارد
j	+	+	+	دو	هر دو منفی
k	+	+	+	یک (مضاعف)	منفی
l	+	+	+	فاقد ریشه	ریشه ندارد
m	+	+	۰	دو	یکی منفی، یکی صفر
n	-	۰	+	دو	یکی منفی، یکی مثبت
p	-	-	-	یک (مضاعف)	منفی
q	-	-	-	فاقد ریشه	ریشه ندارد
r	-	۰	۰	یک (مضاعف)	صفر

این جواب ممکن است دقیق نباشد؛ ردیف‌های توابع g تا r از روی تصویر نمودارها (موقعیت رأس و نقاط برخورد) تعیین شده‌اند.

(۱) معادله‌های زیر را حل کنید. الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

(۲) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sqrt{2} - 1$ و $\sqrt{2} + 1$ باشد.

(۳) مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه‌های زیر را به دست آورید. الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

(۴) راکتی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله آن به صورت $h(t) = 100t - 5t^2$ ($t \geq 0$) است. الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟ ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید. پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟
(۵) استادیوم به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که: الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد. ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

(۶) معادله سهمی‌های زیر را بنویسید. (شش نمودار الف تا ج در کتاب)

(۱) الف) $x^2 = u \Rightarrow u^2 - 8u + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 32 = 32 \Rightarrow u = (8 \pm 4\sqrt{2})/2 = 4 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow$ (هر دو مثبت).

پس

$$x = \pm\sqrt{(4 - 2\sqrt{2})} \approx \pm 1.08 \text{ و } x = \pm\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})} \approx \pm 2.61 \text{ (چهار جواب)}$$

ب) $x^3 = u \Rightarrow (4u - 1)(u - 1) = 0 \Rightarrow 4u^2 - 5u + 1 = 0 \Rightarrow u = 1/4$ یا $u = 1$. پس

$$x = 1 \text{ and } x = \sqrt[3]{(1/4)} = \sqrt[3]{2}/2 \approx 0.63$$

$$(۲) P = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1, S = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

(۳) الف) $a = -2 < 0$ پس ماکزیمم دارد؛ $x = -8/(-4) = 2$ و $f(2) = -8 + 16 - 5 = 3$ مقدار ماکزیمم $= 3$.

ب) $a = 3 > 0$ پس مینیمم دارد؛ $x = -6/6 = -1$ و $g(-1) = 3 - 6 + 5 = 2$ مقدار مینیمم $= 2$.

(۴) الف) $a = -5 < 0$ ؛ بیشترین ارتفاع در: $t = -b/(2a) = -100/(-10) = 10$ ؛ **۱۰ ثانیه**.

ب) $h(10) = 1000 - 500 = 500$ ؛ ارتفاع نقطه اوج **۵۰۰ متر** است.

پ) $t = 0, t = 20$ ؛ $h = 0 \Rightarrow 5t(20 - t) = 0 \Rightarrow$ راکت **۲۰ ثانیه** پس از پرتاب به زمین بازمی‌گردد.

(۵) طول اضلاع مستقیم مستطیل را x و شعاع هر نیم‌دایره را r می‌گیریم؛ پس عرض مستطیل $2r$ است. دو

$$\text{نیم‌دایره روی هم یک دایره‌اند و محیط: } 2x + 2\pi r = 1500 \Rightarrow x = 750 - \pi r$$

الف) مساحت مستطیل: $A = x \cdot 2r = 2r(750 - \pi r) = -2\pi r^2 + 1500r$ ماکزیمم در

$$r = 1500/(4\pi) = 375/\pi \approx 119.4 \text{ پس ابعاد: } x = 750 - 375 = 375 \text{ m و } 2r = 750/\pi \approx 238.7 \text{ m}$$

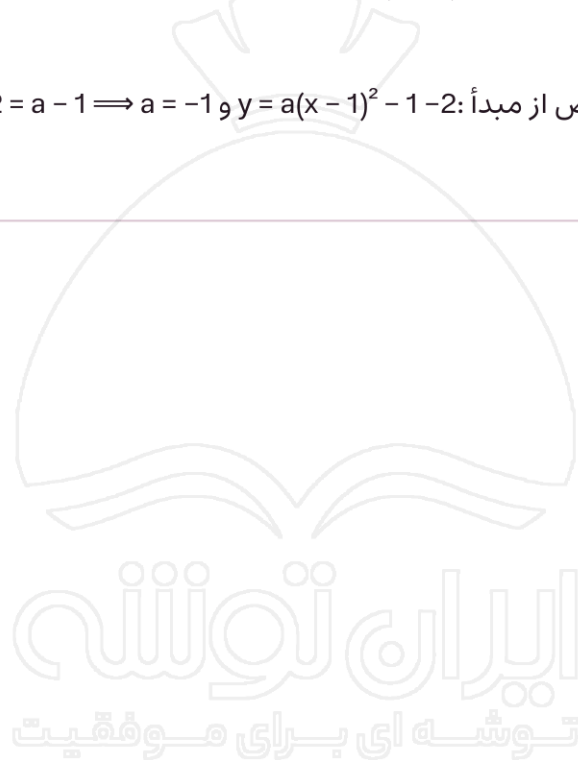
ب) مساحت استادیوم: $S = 2rx + \pi r^2 = 2r(750 - \pi r) + \pi r^2 = -\pi r^2 + 1500r$ رأس در $r = 750/\pi \approx 238.7$

قرار دارد که به‌ازای آن $x = 750 - 750 = 0$ می‌شود. یعنی مساحت حداکثر وقتی است که طول قسمت

مستقیم صفر باشد و استادیوم یک دایره به شعاع $\approx 238.7 \text{ m}$ شود ($S_{\max} = 750^2/\pi \approx 179049 \text{ m}^2$)؛ در این حالت مستطیل وجود ندارد.

۶) با استفاده از ریشه‌ها و رأس نمودارها:

۱. الف) ریشه‌ها 0 و 2، مینیمم -4 در $x=1$ و $y = ax(x-2)$ و $-4 = a(1)(-1) \Rightarrow a = 4$ و $y = 4x^2 - 8x$
۲. ب) محور تقارن $x=3$ ، یک ریشه 2 (پس ریشه دیگر 4)، عرض از مبدأ 4: $y = a(x-2)(x-4)$ و $4 = a(8)$
 $y = (1/2)x^2 - 3x + 4 \Rightarrow a = 1/2$
۳. پ) مماس بر محور x ها در $x=2$ و عرض از مبدأ 4: $y = a(x-2)^2$ و $4 = 4a \Rightarrow a = 1$ و $y = x^2 - 4x + 4$
۴. ت) رأس $(0, 3)$ و ریشه -1 : $y = ax^2 + 3x - 1$ و $0 = a + 3 \Rightarrow a = -3$ و $y = -3x^2 + 3x - 1$
۵. ث) رأس $S(2, 1)$ و ریشه -1 : $y = a(x-2)^2 + 1$ و $0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$ و $y = -(x-2)^2 + 1 = -x^2 + 4x - 3$
۶. ج) رأس $(-1, 1)$ و عرض از مبدأ -2 : $y = a(x-1)^2 - 1$ و $-2 = a - 1 \Rightarrow a = -1$ و $y = -(x-1)^2 - 1 = -x^2 + 2x - 2$



در برخی از اجزای بدن انسان، در بعضی گیاهان و همچنین در بناها و آثار هنری رد پای عدد طلایی مشاهده می‌شود. تحقیقی در این زمینه انجام دهید و گزارش آن را در کلاس ارائه کنید.

عدد طلایی برابر $1.618 \approx \phi = (1 + \sqrt{5})/2$ است و نسبتی است که در آن «مجموع دو پاره‌خط به پاره‌خط بزرگ‌تر» برابر «پاره‌خط بزرگ‌تر به پاره‌خط کوچک‌تر» است.

- **گیاهان:** در بسیاری از گیاهان (مانند گل آفتابگردان، مخروط کاج و کاهو) دانه‌ها یا برگ‌ها در مارپیچ‌هایی قرار می‌گیرند که تعداد آنها معمولاً دو عدد متوالی از دنباله فیبوناچی (۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ...) است؛ و نسبت دو جمله متوالی این دنباله به عدد طلایی نزدیک می‌شود.
- **بدن انسان:** گفته می‌شود نسبت برخی اندازه‌ها (مثلاً طول کل دست به طول ساعد تا مچ، یا نسبت طول و عرض صورت) تقریباً نزدیک $1/6$ است؛ این نسبت‌ها تقریبی و در افراد مختلف متفاوت‌اند.
- **معماری و هنر:** در طراحی بعضی بناها و آثار هنری (مانند پارتنون در یونان و برخی نقاشی‌های دوره رنسانس) از نسبت‌های نزدیک به نسبت طلایی بهره برده‌اند؛ درباره آگاهانه بودن این استفاده در بناهای باستانی میان پژوهشگران اختلاف نظر وجود دارد. در معماری ایرانی نیز مستطیل‌هایی با نسبت نزدیک به طلایی در نمای برخی بناها دیده می‌شود.
- **مارپیچ طلایی:** رشد صدف حلزونی نوتیلوس شبیه یک مارپیچ لگاریتمی است که اغلب آن را با مارپیچ طلایی مقایسه می‌کنند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد؛ پژوهش آزاد است و نمونه‌ای از یک گزارش کوتاه ارائه شده است.

ایران توئین
توشه‌ای برای موفقیت

۱) معادلهٔ مقابل را حل کنید. $2x/(x^2 - 1) + 2/(x + 1) = (2 - x)/(x^2 - x)$ (الف) ابتدا در صورت امکان مخرج کسرها را به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم: $2x/((x - 1)(x + 1)) + 2/(x + 1) = (2 - x)/.....$ (۲) در مخرج‌ها سه نوع عامل اول متمایز وجود دارد x ، $(x + 1)$ و $(.....)$ که بزرگ‌ترین توان هر کدام از آنها برابر است؛ پس کم‌مخرج‌ها عبارت است از (پ) طرفین معادلهٔ (۲) را در $x(x - 1)(x + 1)$ ضرب می‌کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود. (ت) پس از ساده کردن، معادلهٔ $5x^2 - 3x - 2 = 0$ حاصل می‌شود. (ث) برای معادلهٔ درجهٔ دوم اخیر، مقدار Δ را به دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به دست آمده مورد قبول‌اند؟ چرا؟

۱) الف) $x^2 - x = x(x - 1)$ ، پس معادله (۲) به صورت $2x/((x - 1)(x + 1)) + 2/(x + 1) = (2 - x)/(x(x - 1))$ است.
 ب) عامل سوم $(x - 1)$ است و بزرگ‌ترین توان هر کدام برابر ۱ است؛ پس کم‌مخرج‌ها $x(x - 1)(x + 1)$ است.
 پ) $2x^2 + 2x(x - 1) = (x + 1)(2 - x)$
 ت) $\checkmark \quad 2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x - x^2 + 2 - x \Rightarrow 4x^2 - 2x = -x^2 + x + 2 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0$
 ث) $x = -2/5$ یا $x = 1 \Rightarrow x = (3 \pm 7)/10 \Rightarrow \Delta = 9 + 40 = 49$
 $x = 1$ مخرج‌های $x - 1$ و $x^2 - 1$ را صفر می‌کند؛ پس قابل قبول نیست. $x = -2/5$ هیچ مخرجی را صفر نمی‌کند و در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند (با جای‌گذاری، هر دو طرف $4.286 \approx$ می‌شود). پس فقط $x = -2/5$ جواب است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲) خط یک مترو تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار 10 km/h کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبه طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار. الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطه $60/v$ به دست می‌آید؟ ب) عبارتی بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد. پ) توضیح دهید که چرا معادله $60/v + 1/2 = 60/(v - 10)$ برقرار است. ت) طرفین این معادله را در کم مخرج‌ها ضرب کنید تا به یک معادله درجه دوم تبدیل شود. ث) از حل معادله حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و زمان برگشت قطار را به دست آورید.

۲) الف) زمان = مسافت ÷ سرعت؛ مسافت 60 km و سرعت v است، پس زمان رفت $60/v$ ساعت است.

ب) سرعت برگشت $v - 10$ است، پس زمان برگشت $60/(v - 10)$ ساعت است.

پ) زمان برگشت نیم ساعت ($1/2$ ساعت) بیشتر از زمان رفت است: $60/(v - 10) = 60/v + 1/2$.

ت) ضرب در $2v(v - 10)$: $120v = 120(v - 10) + v(v - 10)$ $\Rightarrow 120v = 120v - 1200 + v^2 - 10v \Rightarrow v^2 - 10v - 1200 = 0$

ث) $\Delta = 100 + 4800 = 4900 \Rightarrow v = (10 \pm 70)/2 \Rightarrow v = 40$ یا $v = -30$ (غیرقابل قبول). پس سرعت در رفت 40 km/h است. زمان رفت: $60/40 = 1.5$ ساعت (یک ساعت و ۳۰ دقیقه) و زمان برگشت: $60/30 = 2$ ساعت.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱) معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول هستند؟ الف) $3/x^2 - 12 = 0$ ب) $2/k$
 $3/x - 2/(x - 3) = 12/(9 - x^2)$ (پ) $3k/(k + 2) = k/(k^2 + 2k)$

۲) دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفته اول به‌صورت زیر بود: $36/5 = 7.2$. او از هفته ششم به بعد، در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به‌طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می‌خواهیم بدانیم از هفته ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره ۹ گرفته است. برای حل مسئله می‌توان به روش زیر عمل کرد: الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفته ششم به بعد برابر n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $9n$ خواهد شد. عبارتی کسری برحسب n بنویسید که نشان‌دهنده میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آرمان باشد. $(9n + \dots)/(5 + \dots)$ ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به‌دست آمده را امتحان کنید.

مثال (صفحه ۲۱): تکمیل جدول

اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟ (جدول زیر را کامل کنید.) ماشین A: زمان انجام کل کار t ، مقدار کار در ۱ ساعت $1/t$. ماشین B: زمان انجام کل کار $2t$ ، مقدار کار در ۱ ساعت A و B با هم: زمان انجام کل کار، مقدار کار در ۱ ساعت $1/4$.

۱) الف) $x \neq 0$. ضرب در: $x^2 = 1/4 \Rightarrow x = \pm 1/2$ $3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1/4$. هر دو جواب با شرط $x \neq 0$ سازگارند و در معادله صدق می‌کنند $(3/(1/4) - 12 = 0)$ ؛ هر دو قابل قبول‌اند.

ب) $k^2 + 2k = k(k + 2)$ و شرط: $k \neq 0$ ، $k \neq -2$. ضرب در: $k(k + 2)$
 $3k^2 - k - 4 = 0 \Rightarrow 2(k + 2) - 3k^2 = k \Rightarrow \Delta = 1 + 48 = 49 \Rightarrow k = (1 \pm 7)/6 \Rightarrow k = 4/3$ یا $k = -1$. هر دو جواب با شرط‌ها سازگارند و در معادله اولیه صدق می‌کنند؛ هر دو قابل قبول‌اند. (مثلاً برای $k = -1$: طرف چپ $1 = -2 + 3$ و طرف راست $1 = (-1)/(1 - 2)$.)

پ) $9 - x^2 = -(x - 3)(x + 3)$ و شرط: $x \neq 0$ ، $x \neq \pm 3$. کم‌مخرج‌ها $x(x - 3)(x + 3)$ است. ضرب طرفین در آن:
 $3(x - 3)(x + 3) - 2x(x + 3) = -12x \Rightarrow 3x^2 - 27 - 2x^2 - 6x + 12x = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$

$\Delta = 36 + 108 = 144 \Rightarrow x = (-6 \pm 12)/2 \Rightarrow x = 3$ یا $x = -9$. $x = 3$ مخرج را صفر می‌کند و غیرقابل قبول است؛ $x = -9$ قابل قبول است $(-1/3 + 1/6 = -1/6)$ و $(3/(-9) - 2/(-12) = -1/6)$.

۲) الف) مجموع امتیازات: $36 + 9n$ و تعداد آزمون‌ها: $5 + n$ ؛ پس میانگین:
 $(9n + 36)/(5 + n)$

ب) $(9n + 36)/(n + 5) = 8 \Rightarrow 9n + 36 = 8n + 40 \Rightarrow n = 4$

امتحان: $(9 \times 4 + 36)/(5 + 4) = 72/9 = 8$ ✓. پس آرمان در ۴ آزمون متوالی نمره ۹ گرفته است.

مثال (صفحه ۲۱): تکمیل جدول

ماشین	زمان انجام کل کار (ساعت)	مقدار کار در ۱ ساعت
A	t	$1/t$
B	2t	$1/(2t)$
A و B با هم	4	$1/4$

با کمک جدول: $t = 6 \Rightarrow 3/(2t) = 1/4 \Rightarrow 1/t + 1/(2t) = 1/4$ پس ماشین A به تنهایی ۶ ساعت و ماشین B ۱۲ ساعت لازم دارد.



۱) معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، قابل قبول‌اند؟ الف) $2\sqrt{2t-1} - t = 1$ (ب) $2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$ (ث) $1/\sqrt{u-3} - 2/\sqrt{u} = 0$ (ت) $\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$ (پ) $2x = 1 - \sqrt{2-x}$

۲) بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی‌اند؟ الف) $\sqrt{t} + 2 = 0$ (ب) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$ (پ) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$

۱) الف) $t = 5$ یا $t = 1 \Rightarrow 2\sqrt{2t-1} = t+1 \Rightarrow 4(2t-1) = (t+1)^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-5) = 0$ بررسی: $2\sqrt{1-1} = 1$ و $2\sqrt{9-5} = 1$. هر دو قابل قبول‌اند.

ب) $x = 1 \Rightarrow x = (3 \pm 5)/8 \Rightarrow \Delta = 25 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 1 - 2x \Rightarrow 2 - x = 1 + 4x^2 - 4x \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$ یا $x = -1/4$. بررسی: $x = 1: 2 = 1 - 1 = 0$ (غیرقابل قبول)؛ $x = -1/4: -1/2 = 1 - \sqrt{9/4} = -1/2$ فقط $x = -1/4$ قابل قبول است.

پ) دامنه: $x \geq 0$. دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم: $x + 7 = x + 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow 6 = 2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$ بررسی: $\sqrt{16} = 4 = 3 + 1$. جواب $x = 9$ قابل قبول است.

ت) دامنه: $u > 3$. $1/\sqrt{u-3} = 2/\sqrt{u} \Rightarrow \sqrt{u} = 2\sqrt{u-3} \Rightarrow u = 4(u-3) \Rightarrow 3u = 12 \Rightarrow u = 4$. بررسی: $1/\sqrt{1-2} = 1 - 1 = 0$. جواب $u = 4$ قابل قبول است.

ث) $2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$ (باید $x \geq 2$ باشد) $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2$ یا $x = 2 \Rightarrow +1 = 0$ بررسی: $x = -1: 2 + \sqrt{9} = 5 \neq -1$ فقط $x = 2$ قابل قبول است.

۲) الف) $\sqrt{t} + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{t} = -2$ ولی جذر هر عدد نامنفی، نامنفی است؛ پس جواب ندارد.

ب) هر دو عبارت $\sqrt{2x+3}$ و $\sqrt{x-2}$ نامنفی‌اند؛ پس طرف چپ ≥ 1 است و هرگز صفر نمی‌شود.

پ) دو رادیکال نامنفی‌اند و مجموعشان صفر است، پس هر دو باید صفر باشند: $x = 2$ و $x = 1$ هم‌زمان؛ که ناممکن است. (دامنه: $x \leq 1$ و $x \geq 2$ هیچ عددی را شامل نمی‌شود.)

۱) هر یک از معادلات زیر را حل کنید. الف) $5 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$ ب) $5 = \frac{20}{3r} - \frac{15}{2} = \frac{10}{r}$ پ) $\frac{2x}{x-3} - \frac{x-1}{x-3} = -\frac{x+1}{x+4} \Rightarrow \frac{x+1}{x-3} = -\frac{x+1}{x+4}$ (پ) $x \neq 3, -4$
 ج) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = -1$ د) $\sqrt{t+4} = 3$ ه) $k = \sqrt{6k-8}$ ز) $x + \sqrt{x} = 6$ ح) $\sqrt{m+1} + \sqrt{m} = 2$

۲) علی همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

ادامه تمرین‌ها (صفحه ۲۴)

۳) اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین خواهد داشت؛ به طوری که $t = \sqrt{10 - h/5}$. این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

۴) الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟ ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذر آن از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۵) معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

۱) الف) $x \neq 0, 2$ ، ضرب در: $x(x-2): 5x^2 - 12x + 2 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 12x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{26}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{26}}{5} \Rightarrow x = \frac{12 \pm 2\sqrt{26}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{26}}{5}$ (هر دو قابل قبول؛ تقریباً ۲.۲۲ و ۰.۱۸).

ب) $r \neq 0$ ، ضرب در: $6r: 20 = 15r \Rightarrow r = \frac{4}{3}$ بررسی: $60 - 45r = 40 - 30r \Rightarrow 20 = 15r \Rightarrow r = \frac{4}{3}$ و $\frac{10}{4/3} - \frac{15}{2} = 0$ ✓ $\frac{20}{4} - 5 = 0$ ✓

پ) $x \neq 3, -4$ ، ضرب در: $(x-3)(x+4): \frac{x+1}{x-3} = -\frac{x+1}{x+4} \Rightarrow (x+1)[\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+4}] = 0 \Rightarrow (x+1) + (x-3) = 0 \Rightarrow x = -1/2$ یا $x = -1$ هر دو قابل قبول اند.
 ت) $t+4=9 \Rightarrow t=5$ ✓ $(\sqrt{9}=3)$ ✓

ث) $k^2 = 6k - 8 \Rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0 \Rightarrow k = 2$ یا $k = 4$ هر دو هستند: $\sqrt{4} = 2$ ✓ و $\sqrt{16} = 4$ ✓.

ج) $u = \sqrt{x}$ ، $u^2 + u - 6 = 0 \Rightarrow (u+3)(u-2) = 0 \Rightarrow u = 2$ (چون $u \geq 0$) $x = 4$ بررسی: $4 + 2 = 6$ ✓.

چ) $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{2x-5} \Rightarrow x+1 = 1 + 2\sqrt{2x-5} + 2x-5 \Rightarrow 25 - 10x + x^2 \Rightarrow 5 - x = 2\sqrt{2x-5} \Rightarrow x+1 = 1 + 2\sqrt{2x-5} + 2x-5 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{2x-5}$

$\sqrt{16} - \sqrt{25} = -1$ $x = 15$: بررسی: $\sqrt{4} - \sqrt{1} = 1$ $x = 3$: $x = 15$ یا $x = 3 \Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow x = 15$ یا $x = 3$ ✓ $\sqrt{4} - \sqrt{1} = 1$ $x = 3$: $x = 15$ یا $x = 3 \Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow x = 15$ یا $x = 3$ ✓
 جواب: $x = 3$ ✓ $x \neq 1$

ح) $u = \sqrt{m} > 0$ ، $u^2 - 2u + 1 = 0 \Rightarrow u = 1$ $m = 1$ بررسی: $1 + 1 = 2$ ✓.

(۲) اگر رضا به تنهایی در t ساعت ویرایش را تمام کند، سهم کار در یک ساعت $1/t$ است. علی در $1/2$ ساعت کار و با هم در یک ساعت $3/4 = 1/(4/3)$ کار انجام می‌دهند (۱ ساعت و ۲۰ دقیقه $4/3 =$ ساعت):

$$1/2 + 1/t = 3/4 \Rightarrow 1/t = 1/4 \Rightarrow t = 4$$

رضا به تنهایی به **۴ ساعت** وقت نیاز دارد.

ادامه تمرین‌ها (صفحه ۲۴)

(۳) $t = 2$ را جای‌گذاری می‌کنیم: $2 = \sqrt{10 - h/5} \Rightarrow 4 = 10 - h/5 \Rightarrow h/5 = 6 \Rightarrow h = 30$. بنابراین جسم دو ثانیه پس از سقوط در ارتفاع **۳۰ متری** قرار دارد. (بررسی: $h = 50 - 5t^2 = 50 - 20 = 30$)

(۴) الف) عدد $n \geq 0$ است و «تفاضل n از جذرش» یعنی $\sqrt{n} - n$

$$n = 4/9 \text{ یا } n = 0 \Rightarrow \sqrt{n} - n = n/2 \Rightarrow \sqrt{n} = 3n/2 \Rightarrow n = 9n^2/4 \Rightarrow n(9n - 4) = 0$$

فقط $n = 0$ صحیح است؛ پس مسئله در اعداد صحیح **یک جواب** دارد.

ب) «تفاضل جذر از آن عدد» یعنی $n - \sqrt{n}$

$$n = 4 \text{ یا } n = 0 \Rightarrow n - \sqrt{n} = n/2 \Rightarrow n/2 = \sqrt{n} \Rightarrow n = 2\sqrt{n} \Rightarrow n^2 = 4n \Rightarrow n(n - 4) = 0$$

بررسی: $4 - 2 = 2 = 4/2$. مسئله **دو جواب** (۰ و ۴) دارد.

(۵) برای نمونه: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$. بررسی ریشه ۱: $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$. (پاسخ‌های دیگری مانند $\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = 4$ + ۳ هم ممکن است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد؛ پرسش ۴ برحسب تفسیر عبارت «تفاضل آن از جذرش» پاسخ داده شد و پرسش ۵ پاسخ نمونه دارد.



ریاضی ۲ یازدهم - فصل دوم

هندسه

فهرست

۴۴	صفحه ۲۹ - فعالیت - نقطه هم‌فاصله از دو ضلع زاویه روی نیمساز است	۳۸	صفحه ۲۶ - پرسش - تقسیم زمین مثلثی به دو قسمت هم‌مساحت
۴۵	صفحه ۲۹ - فعالیت - رسم نیمساز یک زاویه	۳۸	صفحه ۲۶ - فعالیت ۱ - مجموعه نقاط هم‌فاصله از یک نقطه
۴۵	صفحه ۲۹ - تمرین ۱ - نقطه هم‌فاصله از چهار رأس	۳۸	صفحه ۲۶ - فعالیت ۲ - دایره و فاصله نقاط آن تا مرکز
۴۶	صفحه ۲۹ - تمرین ۲ - عمودمنصف‌های دو ضلع مثلث	۳۹	صفحه ۲۶ - فعالیت ۳ - نقاط درون و بیرون دایره
۴۸	صفحه ۳۰ - تمرین ۳ - نیمسازهای دو زاویه مثلث	۳۹	صفحه ۲۶ - فعالیت ۴ - نقاط هم‌فاصله از یک خط
۴۹	صفحه ۳۰ - تمرین ۴ - رسم مثلث‌های متساوی‌الساقین	۳۹	صفحه ۲۶ - فعالیت ۵ - نقاط هم‌فاصله از یک نقطه روی یک خط
۴۸	صفحه ۳۱ - کار در کلاس ۱ - اثبات خواص تناسب	۴۰	صفحه ۲۶ - فعالیت ۶ - رسم مثلث با سه ضلع معلوم
۴۹	صفحه ۳۲ - کار در کلاس ۲ - تکمیل تناسب‌ها	۴۰	صفحه ۲۷ - فعالیت (عمودمنصف ۱) - نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره خط هم‌فاصله است
۵۲	صفحه ۳۳ - فعالیت (استدلال استقرایی) - نسبت‌های پاره‌خط‌ها در مثلث	۴۱	صفحه ۲۷ - فعالیت (عمودمنصف ۲) - نقطه هم‌فاصله از دو سر پاره خط روی عمودمنصف است
۵۳	صفحه ۳۳ - فعالیت - حدس قضیه تالس	۴۱	صفحه ۲۷ - فعالیت - خط‌های گذرنده از یک یا دو نقطه
۵۴	صفحه ۳۴ - فعالیت - اثبات قضیه تالس	۴۲	صفحه ۲۷ - فعالیت - رسم عمودمنصف یک پاره خط
۵۵	صفحه ۳۴ - کار در کلاس ۱ - کاربرد قضیه تالس (محاسبه AC و HC)	۴۲	صفحه ۲۸ - فعالیت - رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن
۵۶	صفحه ۳۵ - کار در کلاس ۲ - تشکیل معادله با قضیه تالس	۴۳	صفحه ۲۸ - فعالیت - رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن
۵۷	صفحه ۳۵ - فعالیت ۱ - تعمیم قضیه تالس (صورت‌های دیگر)	۴۳	صفحه ۲۸ - فعالیت - رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن
۵۸	صفحه ۳۵ - فعالیت ۲ - نتیجه‌گیری تناسب‌های دیگر از قضیه تالس	۴۴	صفحه ۲۸ - فعالیت - نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه هم‌فاصله است
۵۹	صفحه ۳۵ - فعالیت ۳ - اثبات تعمیم قضیه تالس		

۷۳ صفحه ۴۳۰ کار در کلاس ۱ — تشابه و محاسبه CA و DE ... ۶۰

۷۴ صفحه ۴۳۰ کار در کلاس ۲ — تشابه مثلث‌های ABC و MNP ... ۶۱

۷۵ صفحه ۴۴۰ کار در کلاس ۳ — ترایابی تشابه ... ۶۱

۷۶ صفحه ۴۴۰ فعالیت — روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ... ۶۲

۷۷ صفحه ۴۵۰ کار در کلاس — روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ... ۶۳

۷۸ صفحه ۴۵۰ تمرین ۱ — اثبات تشابه و یافتن x و y ... ۶۴

۷۹ صفحه ۴۵۰ تمرین ۲ — طول‌ها در مثلث قائم‌الزاویه (AH ارتفاع وارد بر وتر) ... ۶۵

۸۰ صفحه ۴۵۰ تمرین ۳ — مستطیل و عمود بر قطر ... ۶۶

۸۱ صفحه ۴۶۰ تمرین ۴ — فاصله تا پای نورافکن ... ۶۶

۸۲ صفحه ۴۶۰ تمرین ۵ — نسبت محیط و مساحت دو مثلث متشابه ... ۶۷

۸۳ صفحه ۴۶۰ تمرین ۶ — ارتفاع‌ها و مساحت در دو مثلث متشابه ... ۶۷

۶۰ صفحه ۳۶۰ کار در کلاس — درستی یا نادرستی تناسب‌ها ... ۵۴

۶۱ صفحه ۳۷۰ پرسش — فرض و حکم عکس قضیه تالس ... ۵۵

۶۲ صفحه ۳۹۰ کار در کلاس — عکس قضیه فیثاغورس ... ۵۵

۶۳ صفحه ۴۰۰ تمرین ۱ — مساحت مثلث قائم‌الزاویه به دو روش ... ۵۶

۶۴ صفحه ۴۱۰ تمرین ۲ — یافتن نسبت a/b ... ۵۶

۶۵ صفحه ۴۱۰ تمرین ۳ — قضیه پاره‌خط واصل وسط‌های دو ضلع ... ۵۶

۶۶ صفحه ۴۱۰ تمرین ۴ — محاسبه PQ و AP ... ۵۷

۶۷ صفحه ۴۱۰ تمرین ۵ — یافتن x و y ... ۵۷

۶۸ صفحه ۴۱۰ تمرین ۶ — قضیه در دوزنقه ... ۵۸

۶۹ صفحه ۴۱۰ تمرین ۷ — عکس قضیه‌ها ... ۵۸

۷۰ صفحه ۴۱۰ تمرین ۸ — برهان خلف: دو عمود از یک نقطه ... ۵۹

۷۱ صفحه ۴۱۰ تمرین ۹ — رد حکم‌های کلی با مثال نقض ... ۵۹

۷۲ صفحه ۴۲۰ اثبات (تکمیلی) — اثبات قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها ... ۶۰

فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم مساحت تقسیم نماییم. چگونه می توان این کار را انجام داد؟

از یک رأس مثلث به وسط ضلع مقابل، پاره خطی (میان) رسم می کنیم؛ یعنی دیوار را روی میانه مثلث می سازیم.

دلیل: دو مثلثی که پدید می آیند قاعده های برابر دارند (چون نقطه، وسط ضلع است) و ارتفاع هر دو از رأس مشترک بر ضلع مقابل یکی است؛ پس مساحت هایشان برابر است: $S = \frac{1}{2} \times (BC/2) \times h$.

یک نقطه ثابت در صفحه، مانند O را در نظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصله ثابت ۲ سانتی متر از آن هستند در نظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می دهند؟

این نقاط یک دایره به مرکز O و شعاع ۲ سانتی متر تشکیل می دهند.

یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی آن در نظر بگیرید. فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

نتیجه: دایره C (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع r) را در نظر بگیرید. هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد دایره قرار دارد و هر نقطه که دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله r است.

فاصله هر نقطه دایره تا مرکز برابر شعاع، یعنی ۲ سانتی متر است.

نتیجه: هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد، روی دایره قرار دارد و هر نقطه که روی دایره قرار دارد، از نقطه O به فاصله r است.

مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک‌بار برای نقاط داخل دایره و یک‌بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به دست آورید.

- هر نقطه که داخل دایره قرار دارد، فاصله‌اش تا مرکز **کمتر** از شعاع (r) است و هر نقطه که فاصله‌اش تا مرکز از r کمتر باشد، داخل دایره قرار دارد.
- هر نقطه که بیرون دایره قرار دارد، فاصله‌اش تا مرکز **بیشتر** از شعاع (r) است و هر نقطه که فاصله‌اش تا مرکز از r بیشتر باشد، بیرون دایره قرار دارد.

خطی مانند d در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی‌متر از خط d هستند مشخص کنید. این نقاط چه شکل یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟

نقاطی که از خط d به فاصله ۲ سانتی‌متر هستند در دو طرف خط قرار می‌گیرند. این نقاط **دو خط موازی با d** تشکیل می‌دهند که یکی در یک سوی d و دیگری در سوی دیگر آن و هر کدام به فاصله ۲ سانتی‌متر از d است.

نقطه P به فاصله ۱ سانتی‌متر از خط d_1 قرار دارد.

الف) تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

الف) این نقاط روی دایره‌ای به مرکز P و شعاع ۲ سانتی‌متر قرار دارند.

ب) محل برخورد این دایره با خط d_1 نقاط خواسته شده است. چون فاصله P تا d_1 برابر ۱ و کمتر از شعاع (۲) است، دایره خط را در **دو نقطه** قطع می‌کند. اگر H پای عمود از P بر d_1 باشد، این دو نقطه در دو طرف H و به فاصله $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \approx 1.73$ سانتی‌متر از آن قرار دارند.

نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

الف) اندازه اضلاع مثلث های AXB و AYB را مشخص کنید.

ب) توضیح دهید که چگونه می توانید مثلثی به طول ضلع های داده شده ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

الف) $AX = AY = 4$ ، $BX = BY = 3$ و $AB = 5$. هر دو مثلث اضلاعی به طول ۳ و ۴ و ۵ دارند و چون $3^2 + 4^2 = 5^2$ ، هر دو مثلث قائم الزاویه اند (زاویه قائمه در X و Y) و با هم هم نهشت اند.

ب) ابتدا پاره خطی به طول ۷ سانتی متر (مثلاً AB) می کشیم. به مرکز A و شعاع ۴ و به مرکز B و شعاع ۵ دو کمان می زنیم تا یکدیگر را در نقطه C قطع کنند (چون $4 + 5 > 7$ کمان ها یکدیگر را قطع می کنند). مثلث ABC با اضلاع ۴ و ۵ و ۷ مثلث خواسته شده است.

در شکل مقابل پاره خط AB و عمود منصف آن مشخص شده اند. نقطه ای دلخواه مانند W روی عمود منصف AB در نظر بگیرید و نشان دهید W از دوسر AB به یک فاصله است.
نتیجه ۱: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط

فرض کنیم M وسط AB باشد؛ پس $WM \perp AB$ و $AM = MB$. دو مثلث WMA و WMB را در نظر می گیریم:

○ $AM = MB$ (وسط پاره خط)

○ $WM = WM$ (ضلع مشترک)

○ $\angle WMA = \angle WMB = 90^\circ$

طبق حالت (ض ز ض) دو مثلث هم نهشت اند؛ پس $WA = WB$.

نتیجه ۱: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

پاره خط AB و نقطه W مانند شکل مقابل به گونه ای قرار دارند که W از دوسر AB به یک فاصله است ($AW = BW$). نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد. (راهنمایی: از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم نهشتی مثلث ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد).
 نتیجه ۲: هر نقطه که از دوسر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد
 از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد از و هر نقطه که از روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

فرض کنیم M وسط AB باشد و W را به A، B و M وصل می کنیم. در مثلث های WAM و WBM:

$WA = WB$ (فرض) ☐

$AM = BM$ (وسط پاره خط) ☐

$WM = WM$ (ضلع مشترک) ☐

طبق حالت (ض ض ض) دو مثلث هم نهشت اند؛ پس $\angle WMA = \angle WMB$. این دو زاویه مجاورند و مجموعشان 180° است؛ بنابراین هر کدام 90° است. یعنی WM بر AB عمود است و از وسط آن می گذرد، پس W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

نتیجه ۲: هر نقطه که از دوسر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

جمع بندی: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

(۱) نقطه P در صفحه مشخص شده است. چند خط می توانید رسم کنید که از نقطه P عبور نمایند؟
 (۲) دو نقطه A و B در صفحه مشخص شده اند. چند خط متمایز می توانید رسم کنید که از هر دو نقطه A و B عبور نمایند؟

(۳) به نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟

۱. ☐ از یک نقطه بی شمار خط می گذرد.
۲. ☐ تنها یک خط از دو نقطه متمایز می گذرد.
۳. ☐ حداقل دو نقطه متمایز از خط باید معلوم باشد.

رسم عمودمنصف یک پاره خط داده شده: می خواهیم عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنیم.

- ۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطه A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.
- ۲- آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟
- ۳- آیا با داشتن نقاط P و Q می توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟
- ۴- حال عمودمنصف AB را رسم کنید.

۱. ☐ کمان ها را مطابق دستور می زنیم؛ دو نقطه برخورد P و Q در دو سوی AB پدید می آیند.
۲. ☐ بله. چون هر دو کمان شعاع یکسان دارند، $PA = PB$ و $QA = QB$. هر نقطه که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن است (نتیجه ۲)، پس P و Q روی عمودمنصف AB هستند.
۳. ☐ بله. P و Q دو نقطه متمایزند و از دو نقطه متمایز فقط یک خط می گذرد؛ پس خط PQ همان عمودمنصف AB است.
۴. ☐ با خط کش خط PQ را رسم می کنیم؛ این خط عمودمنصف AB است.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای روی آن: خط d و نقطه M روی آن مانند شکل مشخص شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

- ۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d بیابید که $AM = MB$ باشد.
- ۲- عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید.
- ۳- عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d و از نقطه می گذرد.

۱. ☐ با نوک پرگار روی M و باز کردن دلخواه آن، خط d را در دو طرف M قطع می کنیم؛ دو نقطه A و B به دست می آیند و $AM = MB$.
۲. ☐ عمودمنصف AB را با روش رسم عمودمنصف می کشیم.
۳. ☐ عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود است و از نقطه M (وسط AB) می گذرد. پس این خط همان خط عمود خواسته شده است.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن: خط d و نقطه P مانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه P به یک فاصله باشند.

۲- عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳- آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطه P می‌گذرد؟ چرا؟

عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d و از نقطه P

۱. ☐ نوک پرگار را روی P می‌گذاریم و با شعاعی بزرگ‌تر از فاصله P تا d کمانی می‌زنیم تا d را در A و B قطع کند؛ پس $PA = PB$.
 ۲. ☐ عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم.
 ۳. ☐ بله؛ چون $PA = PB$ ، نقطه P از دو سر AB به یک فاصله است و بنابر نتیجه ۲ روی عمودمنصف AB قرار دارد.
- عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d عمود است و از نقطه P می‌گذرد؛ پس خط عمود خواسته شده است.

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن: خط d و نقطه P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲- خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب در نظر بگیرید)

۱. ☐ با روش «عمود از نقطه غیر واقع بر خط» از P بر d عمود می‌کنیم؛ این خط d_1 است.
۲. ☐ با روش «عمود از نقطه‌ای روی خط» در نقطه P بر d_1 عمود می‌کنیم؛ این خط d_2 است.
۳. ☐ d_2 با d موازی است. چون d_1 مورب دو خط d و d_2 است و هر دو زاویه متناظر برابر 90° هستند (هر دو خط بر d_1 عمودند)، پس $d_2 \parallel d$.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن: ۱- در شکل مقابل نیم خط Ow نیمساز زاویه $\angle vOu$ است. فرض کنید P یک نقطه دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه $\angle vOu$ یکسان است. (یعنی اگر از نقطه P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است).
نتیجه ۱: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه

از P عمودهای PH_1 بر Ov و PH_2 بر Ou را رسم می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویه OPH_1 و OPH_2 :

$\angle POH_1 = \angle POH_2$ (چون Ow نیمساز است) ☐

$\angle OH_1P = \angle OH_2P = 90^\circ$ ☐

$OP = OP$ (ضلع مشترک) ☐

طبق حالت (ز ز ص) دو مثلث هم‌نهشت‌اند؛ پس $PH_1 = PH_2$.

نتیجه ۱: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

۲- در شکل مقابل فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه $\angle vOu$ یکسان است. نشان دهید که نقطه P روی نیمساز زاویه $\angle vOu$ قرار دارد. (راهنمایی: پاره خط OP را و دو عمود از نقطه P بر Ov و Ou رسم کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویه $\angle vOu$ است).
نتیجه ۲: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی قرار دارد.
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی یک زاویه قرار داشته باشد، از و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی آن زاویه قرار دارد.

عمودهای $PH_1 \perp Ov$ و $PH_2 \perp Ou$ را رسم می‌کنیم؛ طبق فرض $PH_1 = PH_2$. در دو مثلث قائم‌الزاویه OPH_1 و OPH_2 :

$PH_1 = PH_2$ (فرض) ☐

$OP = OP$ (وتر مشترک) ☐

هر دو قائم‌الزاویه‌اند ☐

طبق حالت (وتر و یک ضلع) دو مثلث هم‌نهشت‌اند؛ پس $\angle POH_1 = \angle POH_2$ و OP نیمساز زاویه $\angle vOu$ است.

نتیجه ۲: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

جمع‌بندی: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

۳- رسم نیمساز یک زاویه

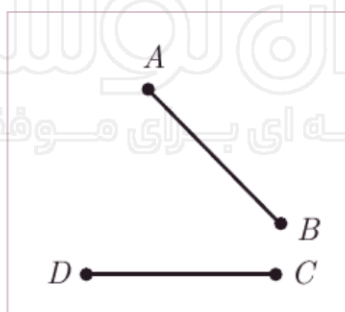
الف) زاویه $\angle uOv$ را در نظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم خط‌های Ov و Ov را در نقاطی مانند P و Q قطع کند. طول پاره خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟
 ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟
 پ) پاره خط‌های WO ، WP و WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ - اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ - پاره خط OW زاویهٔ $\angle uOv$ است.

الف) $OP = OQ$ ، چون هر دو شعاع یک کمان‌اند.

ب) $PW = QW$ ، چون دو کمان شعاع یکسان دارند.

پ) دو مثلث OPW و OQW هم‌نهشت‌اند، زیرا $OP = OQ$ ، $PW = QW$ و OW ضلع مشترک است (ض ض ض). در نتیجه زاویه‌های متناظر برابرند: $\angle POW = \angle QOW$. پس پاره خط OW نیمساز زاویهٔ $\angle uOv$ است.

الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد.
 ب) نقطهٔ مورد نظر در قسمت الف) را O می‌نامیم. اگر نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



الف) نقطه‌ای که از A و B به یک فاصله است روی عمودمنصف AB قرار دارد و نقطه‌ای که از C و D به یک فاصله است روی عمودمنصف CD است. پس عمودمنصف‌های AB و CD را رسم می‌کنیم؛ محل برخورد آنها نقطهٔ O است.

ب) $OA = OB$ (چون O روی عمودمنصف AB است)، $OB = OC$ (چون O روی عمودمنصف BC است) و $OC = OD$ (چون O روی عمودمنصف CD است). پس $OA = OB = OC = OD$. یعنی هر چهار رأس A ، B ، C و D از مرکز دایرهٔ G به فاصلهٔ شعاع‌اند و هر چهار رأس روی دایرهٔ G قرار دارند.

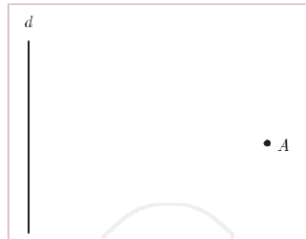
مثلی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

فرض کنیم O محل برخورد عمودمنصف‌های AB و AC باشد. O روی عمودمنصف AB است، پس $OA = OB$ ؛ و روی عمودمنصف AC است، پس $OA = OC$. بنابراین $OA = OB = OC$. یعنی B و C هم از مرکز O به فاصله شعاع OA هستند و **روی دایره قرار دارند**. (دایره از سه رأس مثلث می‌گذرد.)

مثلی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟
(در متن کتاب: «به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید.»)

فرض کنیم O محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و B باشد. چون O روی نیمساز زاویه A است، از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است و چون روی نیمساز زاویه B است، از AB و BC به یک فاصله است. پس فاصله O از هر سه ضلع یکسان و برابر OH است.
دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH از پای هر سه عمود می‌گذرد و هر ضلع در پای عمود بر شعاع عمود است؛ پس **هر سه ضلع مثلث بر دایره مماس‌اند** (دایره در مثلث محاط است).

فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.
 الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.
 ب) مثلثی که شرایط الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.
 پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت الف) را داشته باشد و مساحت آن 8 cm^2 باشد.



الف) از A بر d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم ($AH = 4$). به مرکز H و شعاع دلخواه، d را در دو نقطه B و C قطع می‌کنیم ($HB = HC$). AH عمود منصف BC است، پس $AB = AC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

ب) به مرکز A و شعاع ۶ سانتی متر کمانی می‌زنیم تا d را در B و C قطع کند (چون $۴ < ۶$ قطع می‌کند). آنگاه $AB = AC = 6$ و A روی عمود منصف BC است. اندازه قاعده: $HB = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ پس $BC = 4\sqrt{5} \approx 8.94 \text{ cm}$.

پ) مساحت: $\frac{1}{2} \times BC \times 4 = 8$ پس $BC = 4 \text{ cm}$. روی d از H به هر طرف ۲ سانتی متر جدا می‌کنیم تا B و C به دست آیند ($HB = HC = 2$). مثلث ABC متساوی‌الساقین با مساحت 8 cm^2 است ($AB = AC = \sqrt{20} \approx 4.47$ cm).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

(الف) $a/b = c/d \Rightarrow ad = bc$ (طرفین وسطین)

(ب) $ad = bc \Rightarrow a/b = c/d$ (تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

(پ) $a/b = c/d \Rightarrow b/a = d/c$ (معکوس کردن تناسب)

(ت) $a/b = c/d \Rightarrow c/a = d/b$ و $a/c = b/d$ (تعویض جای طرفین با وسطین)

(ث) $a/b = c/d \Rightarrow (a+b)/b = (c+d)/d$ و $a/(a+b) = c/(c+d)$ (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)

(ج) $a/b = c/d \Rightarrow (a-b)/b = (c-d)/d$ و $a/(b-a) = c/(d-c)$ (تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی (ث): برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا

کسرها را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید. راهنمایی (ج): در قسمت (ج) برای اثبات

اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده،

سپس از دو طرف عدد ۱ را کم کنید.

(الف) دو طرف $a/b = c/d$ را در bd ضرب می‌کنیم (مجاز است چون b و d مخالف صفرند): $a/b \cdot bd = c/d \cdot bd$ پس $ad = bc$.

(ب) دو طرف $ad = bc$ را بر bd (مخالف صفر) تقسیم می‌کنیم: $ad/(bd) = bc/(bd)$ پس $a/b = c/d$.

(پ) دو عدد مساوی و مخالف صفر، معکوس‌هایشان هم مساوی است. چون $a/b = c/d$ و مخرج‌ها و صورت‌ها مخالف صفرند، معکوس دو طرف را می‌گیریم: $b/a = d/c$.

(ت) از (الف) $ad = bc$. دو طرف را بر ab تقسیم می‌کنیم: $d/b = c/a$ یعنی $c/a = d/b$. دو طرف را بر cd تقسیم می‌کنیم: $a/c = b/d$.

(ث) به دو طرف $a/b = c/d$ عدد ۱ را اضافه می‌کنیم: $a/b + 1 = c/d + 1$ پس $(a+b)/b = (c+d)/d$. برای تناسب دوم، از $a/b = c/d$ نتیجه (پ) را می‌گیریم: $b/a = d/c$. به دو طرف ۱ اضافه می‌کنیم: $(b+a)/a = (d+c)/c$ و دوباره معکوس می‌گیریم: $a/(a+b) = c/(c+d)$.

(ج) از دو طرف $a/b = c/d$ عدد ۱ را کم می‌کنیم: $a/b - 1 = c/d - 1$ پس $(a-b)/b = (c-d)/d$. برای تناسب دوم: $b/a = d/c$ ؛ ۱ را کم می‌کنیم: $(b-a)/a = (d-c)/c$ و معکوس می‌گیریم: $a/(b-a) = c/(d-c)$.

با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

الف) $5/14 = 15/42 \Rightarrow 5 \times ___ = 15 \times ___$

ب) $3 \times 40 = 12 \times 10 \Rightarrow 3/___ = 12/___$

پ) $7/10 = 21/30 \Rightarrow 10/7 = ___$

ت) $6/11 = 18/33 \Rightarrow 6/18 = ___$ ، $33/11 = ___$

ث) $4/14 = 10/35 \Rightarrow 18/14 = ___$ ، $4/18 = ___$

ج) $5/12 = 10/24 \Rightarrow -7/12 = ___$ ، $5/-7 = ___$

- الف) $5 \times 42 = 15 \times 14$ (طرفین وسطین؛ هر دو طرف ۲۱۰ می شود)
- ب) $3/10 = 12/40$ (از $ad = bc$ تناسب $a/b = c/d$ به دست می آید)
- پ) $10/7 = 30/21$ (معکوس کردن تناسب)
- ت) $6/18 = 11/33$ و $33/11 = 18/6$ (تعویض جای طرفین با وسطین)
- ث) $4/18 = 10/45$ و $18/14 = 45/35$ (ترکیب نسبت در صورت و در مخرج)
- ج) $-7/12 = -14/24$ و $5/-7 = 10/-14$ (تفضیل نسبت؛ $5/(-7) = 10/(-14)$ هم ارز $5/7 = 10/14$ با تغییر علامت هر دو مخرج است)

در شکل مقابل داریم: $BC \parallel D_1E_1$ و $BC \parallel D_2E_2$ و $BC \parallel D_3E_3$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد:

$$BC \parallel D_iE_i \text{ برای } 1 \leq i \leq 3.$$

اندازه پاره‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرهای جایگزین کنید و نسبت‌های برابر را در ستون‌های متمایز مشخص نمایید.

$$AD_1/D_1B, AD_2/D_2B, AD_3/D_3B \text{ و } AE_1/E_1C, AE_2/E_2C, AE_3/E_3C$$

اندازه‌ها با خط‌کش (به سانتی‌متر، تقریبی)

نسبت	ستون دوم	ستون اول
حدود ۰/۷	$AE_1/E_1C = 1.0/1.4$	$AD_1/D_1B = 1.7/2.4$
حدود ۱/۶ تا ۱/۷	$AE_2/E_2C = 1.5/0.9$	$AD_2/D_2B = 2.5/1.6$
حدود ۴/۷ تا ۵	$AE_3/E_3C = 2.1/0.4$	$AD_3/D_3B = 3.3/0.7$

نسبت‌های هر ردیف با تقریب خوبی برابرند: $AD_i/D_iB = AE_i/E_iC$. (مثلاً AD_3/D_3B با AE_3/E_3C برابر است؛ همان‌طور که پیکان کتاب نشان می‌دهد. اختلاف‌های کوچک به خاطر خطای اندازه‌گیری است.)

اندازه‌ها از روی شکل تخمین زده شده‌اند و این جواب ممکن است دقیق نباشد؛ نکته اصلی برابری نسبت‌های هر ردیف است.

اگر پاره خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌ها با هم برابر باشند؟ $\text{---} = \text{---}$

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

حدس می‌زنیم: $AD/DB = AE/EC$.

این حدس تنها بر پایه مشاهده چند حالت است (استدلال استقرایی) و با چند مورد نمی‌توان به درستی آن برای همه حالات مطمئن شد. برای اطمینان باید آن را با استدلال استنتاجی ثابت کنیم؛ این کار در فعالیت بعد (قضیه تالس) انجام می‌شود.

فرض کنید مانند شکل مقابل پاره خط DE موازی ضلع BC باشد. می‌خواهیم نشان دهیم: $AD/DB = AE/EC$.

۱- از نقطه D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟

۲- از نقطه E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را H_1 بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را H_2 بنامید.

$$S_{ADE} / S_{DEB} = (\frac{1}{2} EH_1 \times AD) / (\frac{1}{2} EH_1 \times DB) = AD/DB \quad ۳$$

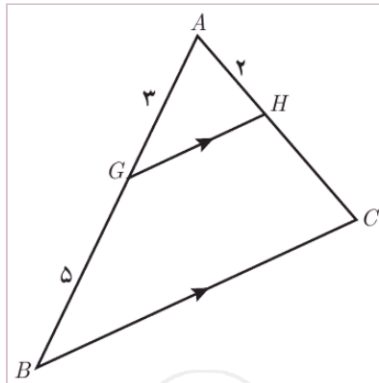
$$S_{ADE} / S_{DEC} = (\frac{1}{2} DH_2 \times AE) / (\frac{1}{2} DH_2 \times EC) = AE/EC \quad ۴$$

۵- از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $AD/DB = AE/EC$. چرا؟

۱. دو مثلث DEC و DEB قاعده مشترک DE دارند و چون $DE \parallel BC$ ، فاصله رؤس C و B از خط DE (ارتفاع‌های دو مثلث) برابر است. پس $S_{DEB} = S_{DEC}$.
۲. عمودها را رسم می‌کنیم.
۳. دو مثلث ADE و DEB ارتفاع مشترک EH_1 دارند (قاعده‌هایشان AD و DB روی یک خط‌اند)؛ پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها، یعنی AD/DB است.
۴. به همین ترتیب دو مثلث ADE و DEC ارتفاع مشترک DH_2 دارند و نسبت مساحت‌ها برابر AE/EC است.
۵. طبق (۱) $S_{DEB} = S_{DEC}$ ؛ پس سمت چپ دو تساوی (۳) و (۴) برابر است $S_{ADE}/S_{DEB} = S_{ADE}/S_{DEC}$ و در نتیجه سمت راست آنها نیز برابر است: $AD/DB = AE/EC$. (این همان قضیه تالس است).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازه پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.

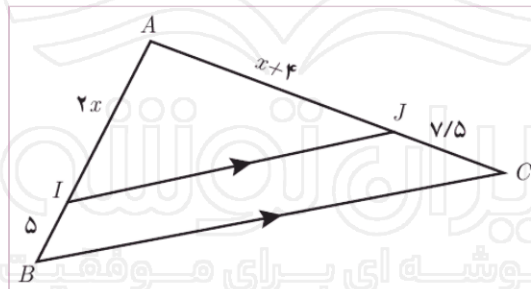


طبق قضیه تالس در مثلث ABC با $GH \parallel BC$:

$$AG/GB = AH/HC \Rightarrow 3/5 = 2/HC \Rightarrow HC = 10/3 \approx 3.33$$

$$AC = AH + HC = 2 + 10/3 = 16/3 \approx 5.33$$

با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازه پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.



چون $IJ \parallel BC$ ، طبق قضیه تالس: $AI/IB = AJ/JC$:

$$2x/5 = (x+4)/7.5 \Rightarrow 15x = 5(x+4) \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2$$

$$(4/5 = 6/7.5 = 0.8 \text{ بررسی}). AJ = x + 4 = 6 \text{ و } AI = 2x = 4$$

در شکل مقابل $BC \parallel DE$.

الف) تناسب قضیه تالس را بنویسید.

ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $AD/DB = AE/EC$ را $AD/AB = AE/AC$ نتیجه بگیرید.
پ) به کمک تفصیل نسبت در صورت از تناسب به دست آمده در (ب) تناسب $DB/AB = EC/AC$ را نتیجه بگیرید.

توجه کنید که تناسب‌های به دست آمده در (ب) و (پ) صورت‌های دیگر قضیه تالس اند.

الف) $AD/DB = AE/EC$

ب) طبق ترکیب نسبت در مخرج $(a/b = c/d \Rightarrow a/(a+b) = c/(c+d))$: $AD/(AD+DB) = AE/(AE+EC)$ و چون $AD + DB = AB$ و $AE + EC = AC$ داریم $AD/AB = AE/AC$.

پ) از $AD/AB = AE/AC$ با تفصیل نسبت در صورت $(a/b = c/d \Rightarrow (a-b)/b = (c-d)/d)$: $(AD-AB)/AB = (AE-AC)/AC$ چون $AD - AB = -DB$ و $AE - AC = -EC$ پس $-DB/AB = -EC/AC$ یعنی $DB/AB = EC/AC$.

در مثلث ABC پاره خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسب قضیه تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیه تالس نتیجه بگیرید.
 $AD/DB = \dots \Rightarrow \{ DB/DA = \dots, BD/BA = \dots, AB/BD = \dots; AD/AB = \dots, AB/AD = \dots \}$

قضیه تالس: $AD/DB = AE/EC$. با خواص تناسب (معکوس کردن، ترکیب و تفصیل نسبت):

- $DB/DA = EC/EA$ (معکوس کردن)
- $BD/BA = EC/CA$ (تفصیل نسبت در صورت و مخرج، نتیجه فعالیت ۱ (پ))
- $AB/BD = AC/CE$ (معکوس تناسب قبل)
- $AD/AB = AE/AC$ (ترکیب نسبت در مخرج)
- $AB/AD = AC/AE$ (معکوس تناسب قبل)

الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیه تالس داریم: $AD/AB = \dots$

ب) پاره خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم: $BF/BC = \dots$

پ) با توجه به قسمت‌های الف) و ب) داریم: $AD/AB = \dots/AC = \dots/BC$

ت) چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ پاره خط BF با کدام پاره خط برابر است؟ $BF = \dots$

ث) با توجه به قسمت‌های پ) و ت) داریم: $AD/AB = \dots/AC = \dots/BC$. این رابطه تعمیم قضیه تالس است.

الف) $AD/AB = AE/AC$ (صورت دیگر قضیه تالس)

ب) در مثلث ABC، خط $EF \parallel AB$ است؛ طبق قضیه تالس $CE/CA = CF/CB$. با تفصیل نسبت:
یعنی $(CA-CE)/CA = (CB-CF)/CB$ پس $AE/AC = BF/BC$.

پ) $AD/AB = AE/AC = BF/BC$

ت) در چهارضلعی DEFB داریم $DE \parallel BF$ (فرض) و $EF \parallel DB$ (ساخت)؛ پس متوازی‌الاضلاع است و اضلاع روبه‌روی آن برابرند: $BF = DE$.

ث) $AD/AB = AE/AC = DE/BC$. این رابطه تعمیم قضیه تالس است.

در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $AP/AB = AQ/AC = PQ/BC$ (ب) $AP/PB = AQ/QC = PQ/BC$

پ) $PB/AB = QC/AC = PQ/BC$ (ت) $PB/AP = QC/AC$

ث) $PB/AB = QC/AC$ (ج) $AB/AP = AC/AQ = BC/PQ$

الف) نادرست. $AP/PB = AQ/QC$ درست است، اما PQ/BC برابر AP/AB است نه AP/PB .

ب) درست. (تعمیم قضیه تالس)

پ) نادرست. صورت درست $PB/AP = QC/AQ$ است (مخرج دوم باید AQ باشد نه AC).

ت) نادرست. $PB/AB = QC/AC$ درست است، اما $PQ/BC = AP/AB$ و در حالت کلی با PB/AB برابر نیست.

ث) درست. (صورت دیگر قضیه تالس)

ج) درست. (معکوس تناسب قسمت ب)

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیه تالس را بنویسید.

فرض: حکم:

به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟

قضیه تالس: فرض $DE \parallel BC$ ، حکم $AD/DB = AE/EC$. در عکس، جای فرض و حکم عوض می شود:

فرض: در مثلث ABC نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC قرار دارند و $AD/DB = AE/EC$.

حکم: $DE \parallel BC$.

عکس قضیه تالس درست است؛ درستی آن با برهان خلف در صفحه بعد اثبات می شود.

با توجه به قضیه فیثاغورس اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱- فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه اضلاع آن برقرار است.

۲- پاره‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ است.

۳- با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

۴- توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید.

الف) اگر در مثلثی مانند ABC رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار باشد، آنگاه زاویه A قائمه است.

ب) (۳) در مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C'$: $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 = c^2 + b^2$. طبق فرض $b^2 + c^2 = a^2$ ؛ پس $B'C'^2 = a^2$ و $B'C' = a = BC$.

(۴) دو مثلث ABC و $A'B'C'$ سه ضلع نظیر برابر دارند ($BC = B'C'$ ، $AC = A'C'$ ، $AB = A'B'$)؛ طبق حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند. پس زاویه‌های متناظر برابرند: $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$.

ج) در مثلث ABC زاویه A قائمه است اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$ (یعنی $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$).

در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به دست آورید.

در مثلث ABC زاویه A قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است.

روش اول (قاعده AB و ارتفاع AC): $S = \frac{1}{2} \times AB \times AC$

روش دوم (قاعده BC و ارتفاع AH): $S = \frac{1}{2} \times BC \times AH$

از تساوی: $AB \times AC = BC \times AH$ و از آن تناسب $AB/BC = AH/AC$ (یا $AB/AH = BC/AC$) به دست می‌آید.

در هر مورد، مقدار عددی نسبت a/b را به دست آورید.

الف) $a/(10+a) = b/(8+b)$ ب) $(3a+10)/(10+2a) = (3b+7)/(7+2b)$

الف) طرفین وسطین: $a(8+b) = b(10+a)$ پس $8a + ab = 10b + ab$ و $8a = 10b$

$$a/b = 10/8 = 5/4$$

ب) $(3a+10)(7+2b) = (3b+7)(10+2a)$ پس $21a + 6ab + 70 + 20b = 30b + 6ab + 70 + 14a$ و $7a = 10b$

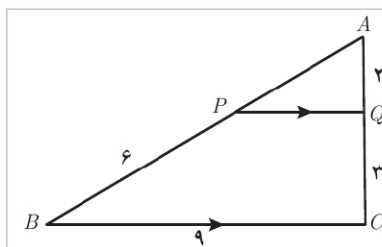
$$a/b = 10/7$$

ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

در مثلث ABC ، M وسط AB و N وسط AC است. پس $AM/MB = 1$ و $AN/NC = 1$ ، یعنی $AM/MB = AN/NC$.

طبق عکس قضیه تالس $MN \parallel BC$. همچنین طبق تعمیم قضیه تالس $MN/BC = AM/AB = 1/2$ پس $MN = \frac{1}{2} BC$.

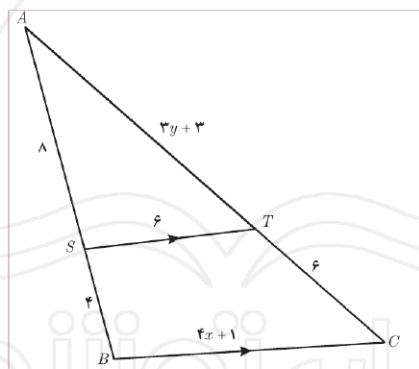
در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است. طول پاره‌های AP و PQ را به دست آورید.



طبق قضیه تالس: $AP/PB = AQ/QC$ $\Rightarrow AP/6 = 2/3 \Rightarrow AP = 4$

$2/5 = PQ/9 \Rightarrow PQ = 18/5 = 3.6$ $AQ/AC = PQ/BC$:

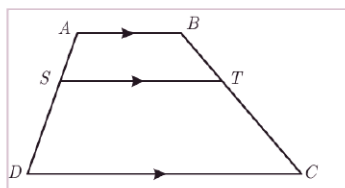
در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را به دست آورید.



$8/4 = (3y+3)/6 \Rightarrow 3y + 3 = 12 \Rightarrow y = 3$ $AS/SB = AT/TC$:

$8/12 = 6/(4x+1) \Rightarrow 4x + 1 = 9 \Rightarrow x = 2$ $AB = 8 + 4 = 12$: و $AS/AB = ST/BC$

در دوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $AS/SD = BT/TC$. (راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



قطر AC را رسم می‌کنیم تا ST را در K قطع کند.

در مثلث ADC داریم $SK \parallel DC$ ؛ پس $AS/SD = AK/KC$.

در مثلث CAB داریم $KT \parallel AB$ ؛ پس $CK/KA = CT/TB$ یعنی $AK/KC = BT/TC$.

از دو تساوی: $AS/SD = AK/KC = BT/TC$.

در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

(الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

(ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

(پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

(ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر». (راهنمایی: شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید.)

- (الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.
- (ب) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل با هم برابر باشند، در این صورت اضلاع روبه‌رو موازی‌اند.
- (پ) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل مکمل باشند، آنگاه رأس‌های آن روی یک دایره قرار دارند.
- (ت) اصل: در مثلث ABC اگر $h_a > h_b$ (دو ارتفاع نابرابر)، آنگاه $a < b$. عکس: در مثلث ABC اگر ضلع a از ضلع b کوچک‌تر باشد ($a < b$)، آنگاه ارتفاع وارد بر ضلع کوچک‌تر بزرگ‌تر است ($h_a > h_b$).

با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض خلف: از نقطهٔ P خارج خط d دو عمود متمایز PA و PB بر d رسم شده باشد (A و B پای عمودها و $A \neq B$ ، زیرا دو خط متمایز گذرنده از P خط d را در یک نقطه قطع نمی‌کنند).
در مثلث PAB دو زاویهٔ A و B هر دو 90° هستند و مجموع آنها 180° است؛ در نتیجه مجموع زاویه‌های مثلث از 180° بیشتر می‌شود که با قضیهٔ «مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است» تناقض دارد.
پس فرض خلف نادرست است و از یک نقطهٔ غیرواقع بر خط فقط یک عمود می‌توان رسم کرد.

هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

(الف) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

(ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

(پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

(ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

- (الف) عدد ۱۳۱ اول است و از ۱۲۷ بزرگ‌تر (بر هیچ عددی غیر از ۱ و خودش بخش‌پذیر نیست). پس حکم نادرست است.
- (ب) مثلث متساوی‌الاضلاعی با ضلع ۱ سانتی‌متر مساحتی برابر $\sqrt{3}/4 \approx 0.43$ دارد، ولی مربعی به ضلع ۱ سانتی‌متر مساحت ۱ دارد؛ $0.43 < 1$.
- (پ) مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ را در نظر می‌گیریم. ارتفاع وارد بر ضلع ۳ برابر ضلع ۴ است؛ یعنی ضلع ۳ از ارتفاع ۴ کوچک‌تر است.
- (ت) مثلث: $A(0,0)$ ، $B(4,0)$ ، $C(1,3)$ عمود منصف AB خط $x = 2$ است ولی میانهٔ وارد بر AB خطی است از $C(1,3)$ به $(2,0)$ که قائم نیست؛ پس برهم منطبق نیستند. (این دو فقط در مثلث متساوی‌الساقین نسبت به قاعده منطبق‌اند).

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است. اثبات:

۱- داریم $\hat{E} = \hat{C}$ و $\hat{D} = \hat{B}$ (چرا؟) بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

۲- با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $AD/\dots = \dots/AC = DE/\dots$

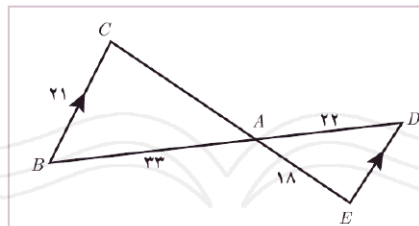
۳- با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

۱- $DE \parallel BC$ و AB مورب است؛ پس $\hat{D} = \hat{B}$ (زاویه‌های متناظر). به همین ترتیب با مورب AC ، $\hat{E} = \hat{C}$. زاویهٔ $\hat{A}$ هم مشترک است.

۲- $AD/AB = AE/AC = DE/BC$ (تعمیم قضیهٔ تالس).

۳- زاویه‌های نظیر دو مثلث برابر و نسبت اضلاع نظیر یکسان است؛ پس طبق تعریف $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

در شکل مقابل $DE \parallel BC$. اندازهٔ پاره‌خط‌های DE و CA را به دست آورید.



زاویه‌های B و D برابرند (متبادل داخلی) و زاویه‌های رأس A هم برابرند (متقابل به رأس)؛ پس $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (ز ز) و:

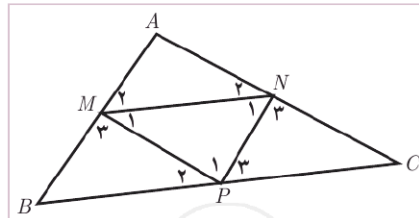
$$AB/AD = AC/AE = BC/DE \implies 33/22 = AC/18 = 21/DE$$

$$33/22 = 3/2 \text{ پس } AC = 18 \times 3/2 = 27 \text{ و } DE = 21 \times 2/3 = 14$$

اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.

حل: الف) $MN \parallel BC$ و $MP \parallel AC$ و $NP \parallel AB$ چرا؟

ب) بنابراین $\hat{B} = \hat{P}_3 = \hat{N}_1$ و $\hat{C} = \hat{P}_2 = \hat{M}_1$ (چرا؟) از (ب) درباره مثلث‌های موردنظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟



الف) پاره خط واصل وسط‌های دو ضلع مثلث با ضلع سوم موازی است (تمرین ۳ صفحه ۴۱).

ب) $MN \parallel BC$ و $NP \parallel AB$ مورب است؛ پس $\hat{N}_1 = \hat{P}_3$ (متبادل داخلی). $NP \parallel AB$ و BC مورب است؛ پس $\hat{P}_3 = \hat{B}$ (متناظر). بنابراین $\hat{N}_1 = \hat{P}_3 = \hat{B}$. به همین ترتیب $MN \parallel BC$ با مورب MP : $\hat{M}_1 = \hat{P}_2$ و $MP \parallel AC$ با مورب BC : $\hat{P}_2 = \hat{C}$ ؛ پس $\hat{M}_1 = \hat{P}_2 = \hat{C}$.

نتیجه: در مثلث‌های ABC و PNM دو زاویه از یکی با دو زاویه دیگری برابر است ($\hat{C} = \hat{M}_1$ و $\hat{B} = \hat{N}_1$) و زاویه سوم نیز برابر است ($\hat{A} = \hat{P}_1$)؛ پس طبق قضیه ۱ تشابه، $\triangle ABC \sim \triangle PNM$ (متشابه با نسبت تشابه ۲). (نسبت تشابه: $MN = \frac{1}{2}BC$, $NP = \frac{1}{2}AB$, $MP = \frac{1}{2}AC$).

اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ و $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ ، درباره دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

دو مثلث ABC و $A''B''C''$ متشابه‌اند.

دلیل: زاویه‌ها: $\hat{A} = \hat{A}' = \hat{A}''$, $\hat{B} = \hat{B}' = \hat{B}''$ و $\hat{C} = \hat{C}' = \hat{C}''$. اضلاع: اگر $AB/A'B' = AC/A'C' = BC/B'C' = k_1$ و $A'B'/A''B'' = A'C'/A''C'' = B'C'/B''C'' = k_2$ پس $AB/A''B'' = AC/A''C'' = BC/B''C'' = k_1k_2$. زاویه‌ها برابر و اضلاع متناسب‌اند.

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.

۱- نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید: $\triangle ABC \sim \triangle AHC$

۲- نشان دهید دو زاویه از مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید: $\triangle ABC \sim \triangle AHB$

۳- از (۱) و (۲) دربارهٔ مثلث‌های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه: در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

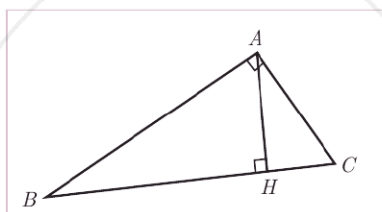
$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \Rightarrow AH/\dots = AC/\dots = HC/\dots \Rightarrow AC^2 = \dots \times \dots \quad ۴$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow AH/\dots = AB/\dots = HB/\dots \Rightarrow AB^2 = \dots \times \dots \quad ۵$$

$$\triangle AHB \sim \triangle AHC \Rightarrow AH/\dots = AC/\dots = HC/\dots \Rightarrow AH^2 = \dots \times \dots \quad ۶$$

۷- با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطه فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید. $BC^2 = \dots + \dots$

۸- مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید. $AB \times \dots = AH \times \dots$



۱. در مثلث‌های ABC و AHC زاویه C مشترک است و $\angle BAC = \angle AHC = 90^\circ$. پس دو زاویه برابرند و طبق قضیه ۱ دو مثلث متشابه‌اند (رأس‌های متناظر: $C \leftrightarrow C, A \leftrightarrow H, B \leftrightarrow A$).

۲. در مثلث‌های ABC و AHB زاویه B مشترک است و $\angle BAC = \angle AHB = 90^\circ$. پس متشابه‌اند (رأس‌های متناظر: $B \leftrightarrow B, A \leftrightarrow H, C \leftrightarrow A$).

۳. هر دو مثلث AHC و AHB با ABC متشابه‌اند؛ پس با هم نیز متشابه‌اند (تراپایی تشابه).

$$AH/AB = AC/BC = HC/AC \Rightarrow AC^2 = BC \times HC \quad (۴)$$

$$AH/AC = AB/BC = HB/AB \Rightarrow AB^2 = BC \times HB \quad (۵)$$

$$AH/BH = AC/AB = HC/AH \Rightarrow AH^2 = BH \times HC \quad (۶)$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ پس } AC^2 + AB^2 = BC \times HC + BC \times HB = BC (HC + HB) = BC \times BC \quad (۷)$$

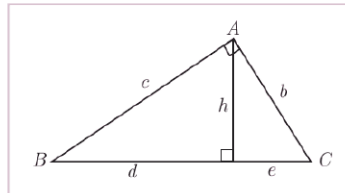
$$AB \times AC = AH \times BC \text{ پس } S = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} BC \times AH \quad (۸)$$

در مثلث قائم‌الزاویه مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

۱) $h = 5, d = 7, e = ?$

۲) $d = 5, e = 3, b = ?, c = ?$

۳) $c = 8, b = 6, h = ?$



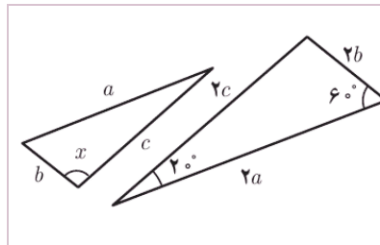
۱) $h^2 = d \times e \Rightarrow 25 = 7e \Rightarrow e = 25/7 \approx 3.57$

۲) $b^2 = e \times BC = 3 \times 8 = 24 \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$ و $c^2 = d \times BC = 5 \times 8 = 40 \Rightarrow c = 2\sqrt{10} \approx 6.32$. $BC = d + e = 8$
 ≈ 4.90

۳) $BC = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10$ و از برابری مساحت‌ها: $h \times BC = b \times c = 48$ $\Rightarrow h = 48 / 10 = 4.8$

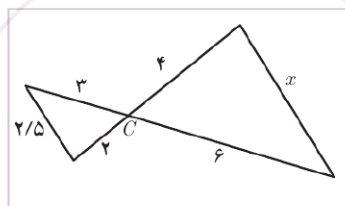
در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید. (الف، ب، پ مطابق شکل‌ها)

(الف)



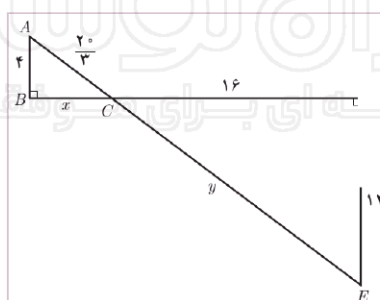
اضلاع مثلث بزرگ $2a, 2b, 2c$ و اضلاع مثلث کوچک a, b, c است؛ نسبت اضلاع نظیر ۲ است و طبق قضیه ۳ تشابه دو مثلث متشابه‌اند. زاویه‌های مثلث بزرگ: 20° و 60° و $180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ$. زاویه x بین b و c است و نظیر زاویه بین $2b$ و $2c$ (یعنی 100°) است؛ پس $x = 100^\circ$.

(ب)



دو مثلث در رأس C زاویه‌های متقابل به رأس برابر دارند و $3/6 = 2/4 = 1/2$. پس طبق قضیه ۲ تشابه دو مثلث متشابه‌اند با نسبت $1/2$ ؛ لذا $2.5/x = 1/2 \Rightarrow x = 5$.

(پ)



دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و EDC : $\angle B = \angle D = 90^\circ$ و زاویه‌های رأس C متقابل به رأس‌اند؛ پس متشابه‌اند (قضیه ۱) و $AB/ED = 4/12 = 1/3$ ؛

$$BC/DC = 1/3 \Rightarrow x/16 = 1/3 \Rightarrow x = 16/3 \approx 5.33 \text{ and } AC/EC = 1/3 \Rightarrow (20/3)/y = 1/3 \Rightarrow y = 20$$

$$(بررسی: CE = \sqrt{(16^2 + 12^2)} = 20)$$

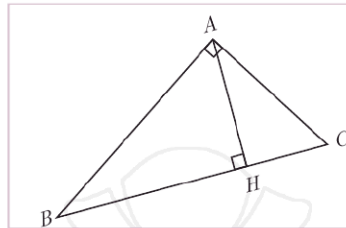
در مثلث قائم الزاویه روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به دست آورید.

الف) $BC = 10$ و $BH = 9$ و $AH = ?$ و $AB = ?$ و $AC = ?$

ب) $AC = 5$ و $CH = 2$ و $BC = ?$ و $AH = ?$ و $AB = ?$

پ) $AB = 8$ و $AC = 6$ و $BC = ?$ و $AH = ?$

ت) $AB = 12$ و $AH = 6$ و $BH = ?$ و $BC = ?$ و $AC = ?$



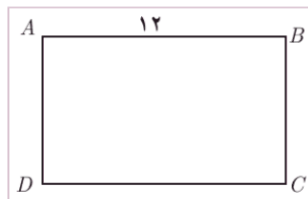
الف) $AC^2 = AB^2 = BH \times BC = 90 \Rightarrow AB = 3\sqrt{10} \approx 9.49$; $AH^2 = BH \times HC = 9 \Rightarrow AH = 3$; $HC = 10 - 9 = 1$
 $HC \times BC = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10} \approx 3.16$

ب) $AH^2 = BH \times CH = 21 \Rightarrow AH = \sqrt{21} \approx 4.58$; $BH = 12.5 - 2 = 10.5$; $AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 25 = 2 \times BC \Rightarrow BC = 12.5$
 $AB^2 = BH \times BC = 131.25 \Rightarrow AB = 5\sqrt{21/2} \approx 11.46$

پ) $AH = AB \times AC / BC = 48/10 = 4.8$; $BC = \sqrt{(8^2 + 6^2)} = 10$

ت) در مثلث قائم الزاویه ABH: $AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 144 = 6\sqrt{3} \times BH \Rightarrow BH = \sqrt{(12^2 - 6^2)} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \approx 10.39$
 $AB \times AC = (بررسی): AC^2 = BC^2 - AB^2 = 192 - 144 = 48 \Rightarrow AC = 4\sqrt{3} \approx 6.93$; $BC = 8\sqrt{3} \approx 13.86$
 $(12 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \times 6 = 48\sqrt{3} \Rightarrow BC \times AH)$

شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازه عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازه عرض مستطیل را محاسبه کنید.



در مثلث ABD زاویه A قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر BD است.

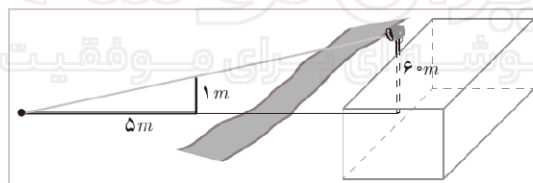
$$\text{عمود: } AH^2 = AB^2 - BH^2 = 144 - 121 = 23 \Rightarrow AH = \sqrt{23} \approx 4.80$$

$$\text{قطر: } AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 144 = 11 \times BD \Rightarrow BD = 144/11 \approx 13.09$$

$$\text{عرض: } AD^2 = BD^2 - AB^2 = (144/11)^2 - 144 = 144 \times 23/121 \Rightarrow AD = 12\sqrt{23}/11 \approx 5.23$$

(BD × AH)

بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار یک چوب به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟

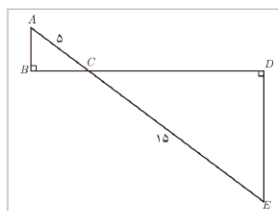


دو مثلث قائم‌الزاویه (چوب و سایه‌اش، نورافکن و فاصله مرد تا پای آن) زاویه حاد مشترک دارند؛ پس متشابه‌اند:

$$1/5 = 60/d \Rightarrow d = 300$$

فاصله مرد تا پای نورافکن ۳۰۰ متر است.

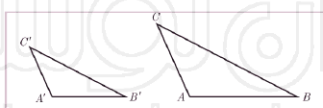
در شکل مقابل دو مثلث قائم الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به دست آورید.



مثلث‌های ABC و EDC متشابه‌اند ($\angle B = \angle D = 90^\circ$ و زاویه‌های رأس C متقابل به رأس‌اند). نسبت تشابه: $AC/EC = 5/15 = 1/3$

نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه است: $1/3$ ؛ نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است: $(1/3)^2 = 1/9$.

دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که $AB/A'B' = AC/A'C' = BC/B'C' = K$. حال ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.
الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.
ب) نسبت $AH/A'H'$ را به دست آورید.
پ) نسبت مساحت‌های $S_{ABC} / S_{A'B'C'}$ را محاسبه کنید.
ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به دست آورید.



الف) از تشابه ABC و $A'B'C'$ داریم $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\angle AHB = \angle A'H'B' = 90^\circ$ ؛ پس دو زاویه برابرند و $\triangle AHB \sim \triangle A'H'B'$.

ب) از تشابه الف): $AH/A'H' = AB/A'B' = K$.

پ) $S_{ABC} / S_{A'B'C'} = (\frac{1}{2} BC \times AH) / (\frac{1}{2} B'C' \times A'H') = (BC/B'C') \times (AH/A'H') = K \times K = K^2$

ت) $(AB+AC+BC)/(A'B'+A'C'+B'C') = K$ پس $BC = K \cdot B'C'$ ، $AC = K \cdot A'C'$ ، $AB = K \cdot A'B'$

ریاضی ۲ یازدهم - فصل سوم

تابع

فهرست

۸۳	صفحه ۵۵ · فعالیت — جزء صحیح و انتقال عدد صحیح ...	۸۴	صفحه ۴۸ · فعالیت — سهم مشارکت داوطلبان ...
۸۴	صفحه ۵۶ · تمرین — نمودار تابع گویا با دامنه محدود ...	۸۵	صفحه ۴۹ · فعالیت — نمودار سهم مشارکت ...
۸۴	صفحه ۵۶ · تمرین — دامنه تابع گویا ...	۸۶	صفحه ۴۹ · فعالیت — دامنه نمودار تابع گویا ...
۸۴	صفحه ۵۶ · تمرین — برابری دو تابع ...	۸۷	صفحه ۴۹ · خواندنی — هزینه پاک‌سازی رودخانه ...
۸۵	صفحه ۵۶ · تمرین — ساخت تابع گویا با دامنه داده شده ...	۸۸	صفحه ۵۰ · کار در کلاس — عملکرد پرتاب‌های آزاد ...
۸۵	صفحه ۵۶ · تمرین — رسم نمودار تابع رادیکالی منتقل شده ...	۸۹	صفحه ۵۰ · کار در کلاس — دامنه توابع گویا ...
۸۵	صفحه ۵۶ · تمرین — جزء صحیح اعداد بزرگ ...	۹۰	صفحه ۵۱ · کار در کلاس — برابری دو تابع ...
۸۶	صفحه ۵۶ · تمرین — رسم تابع پله‌ای ...	۹۱	صفحه ۵۱ · کار در کلاس — تشخیص ضابطه از روی نمودار ...
۸۷	صفحه ۵۶ · تمرین — رسم تابع جزء صحیح با انتقال ...	۹۲	صفحه ۵۲ · کار در کلاس — تابع سونامی ...
۸۷	صفحه ۵۶ · خواندنی — قد متوسط کودکان ...	۹۳	صفحه ۵۲ · خواندنی — آیا سونامی سیراف را ویران کرد؟ ...
۸۸	صفحه ۵۷ · کار در کلاس — مایل و کیلومتر ...	۹۴	صفحه ۵۳ · فعالیت — انتقال نمودار تابع رادیکالی ...
۸۸	صفحه ۵۷ · کار در کلاس — وارون مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب ...	۹۵	صفحه ۵۳ · فعالیت — رسم نمودار با سه مرحله انتقال ...
۸۹	صفحه ۵۸ · فعالیت — وارون و نمودار قرینه ...	۹۶	صفحه ۵۳ · فعالیت — رسم نمودار تابع رادیکالی منتقل شده ...
۹۰	صفحه ۵۸ · فعالیت — تابع بودن و وارون ...	۹۷	صفحه ۵۴ · فعالیت — هزینه پارکینگ خودرو ...
۹۲	صفحه ۵۸ · فعالیت — وارون یک پاره خط ...	۹۸	صفحه ۵۵ · کار در کلاس — جزء صحیح اعداد ...
۹۳	صفحه ۵۹ · فعالیت — وارون و تابع یک‌به‌یک ...	۹۹	صفحه ۵۵ · کار در کلاس — حاصل جزء صحیح کسرها ...
۹۴	صفحه ۵۹ · فعالیت — اثر انگشت و گروه خونی ...	۱۰۰	صفحه ۵۵ · فعالیت — معادله و نمودار جزء صحیح ...
۹۵	صفحه ۶۰ · فعالیت — رسم تابع و یک‌به‌یکی ...	۱۰۱	صفحه ۵۵ · فعالیت — رسم نمودار تابع جزء صحیح ...

۱۳۳ صفحه ۶۷۰ کار در کلاس — عمل‌های جبری روی دو تابع ... ۱۰۶	۱۲۰ صفحه ۶۰۰ فعالیت — کدام نمودارها یک‌به‌یک‌اند؟ ۹۶
۱۳۴ صفحه ۶۷۰ کار در کلاس — عمل‌های جبری روی توابع رادیکالی ... ۱۰۷	۱۲۱ صفحه ۶۱۰ فعالیت — وارون تابع خطی ۹۷
۱۳۵ صفحه ۶۷۰ فعالیت — جمع و تفریق توابع خطی ۱۰۸	۱۲۲ صفحه ۶۲۰ کار در کلاس — وارون توابع خطی ۹۸
۱۳۶ صفحه ۶۸۰ فعالیت — ضرب تابع در عدد ۱۱۰	۱۲۳ صفحه ۶۳۰ کار در کلاس — یک‌به‌یک نبودن و حذف نقطه ... ۹۹
۱۳۷ صفحه ۶۸۰ کار در کلاس — قرینه نمودار نسبت به محور x ... ۱۱۱	۱۲۴ صفحه ۶۳۰ کار در کلاس — محدود کردن دامنه سهمی ... ۱۰۰
۱۳۸ صفحه ۶۹۰ کار در کلاس — رسم نمودار قرینه و انبساط ... ۱۱۲	۱۲۵ صفحه ۶۳۰ تمرین — وارون مجموعه زوج‌های مرتب ۱۰۰
۱۳۹ صفحه ۶۹۰ تمرین — رسم توابع قدر مطلقى ۱۱۲	۱۲۶ صفحه ۶۳۰ تمرین — وارون یک نمودار ۱۰۱
۱۴۰ صفحه ۶۹۰ تمرین — جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع ... ۱۱۴	۱۲۷ صفحه ۶۴۰ تمرین — ضابطه وارون توابع خطی ۱۰۲
۱۴۱ صفحه ۶۹۰ تمرین — رسم توابع رادیکالی ۱۱۵	۱۲۸ صفحه ۶۴۰ تمرین — حداکثر نقاط یک‌به‌یک ۱۰۲
۱۴۲ صفحه ۶۹۰ تمرین — جمع دو تابع از روی نمودار ۱۱۶	۱۲۹ صفحه ۶۴۰ تمرین — نمودار تابع با دامنه و برد مشخص ... ۱۰۳
۱۴۳ صفحه ۷۰۰ تمرین — کدام تابع مجموع دو تابع دیگر است؟ ... ۱۱۷	۱۳۰ صفحه ۶۴۰ تمرین — یک‌به‌یک کردن نیم‌دایره ۱۰۴
۱۴۴ صفحه ۷۰۰ خواندنی — دمای اجاق با دو منبع گرمایی ۱۱۸	۱۳۱ صفحه ۶۵۰ فعالیت — جمع، تفریق، ضرب و تقسیم توابع ... ۱۰۵
	۱۳۲ صفحه ۶۶۰ خواندنی — هزینه خرید هنرمند ۱۰۶

۱ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می بایست $1/1$ از ده میلیون تومان را می پرداخت، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می شد، هر کدام باید $1/2$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

ب) اگر تعداد داوطلبانی که می خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟

پ) رابطه بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطه این تابع چیست؟

الف) اگر n نفر داوطلب باشند، هزینه بین آنها مساوی تقسیم می شود و سهم هر نفر $1/n$ است:

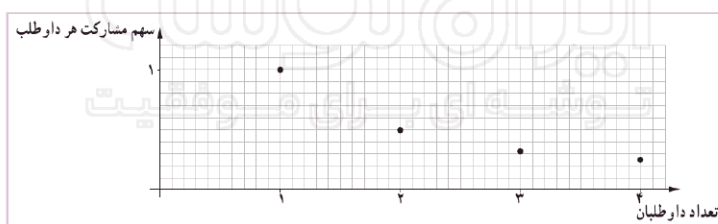
تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$1/1$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$	$1/7$	$1/8$	$1/9$	$1/10$

ب) سهم هر نفر برابر است با $1/n$ از ده میلیون تومان.

پ) اگر تعداد داوطلبان را x بگیریم، سهم مشارکت هر نفر $f(x) = 1/x$ است؛ یعنی ضابطه این تابع همان $f(x) = 1/x$ است.

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینه مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می دهد؟

«با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب ☐ کاهش ☐ افزایش می یابد.»

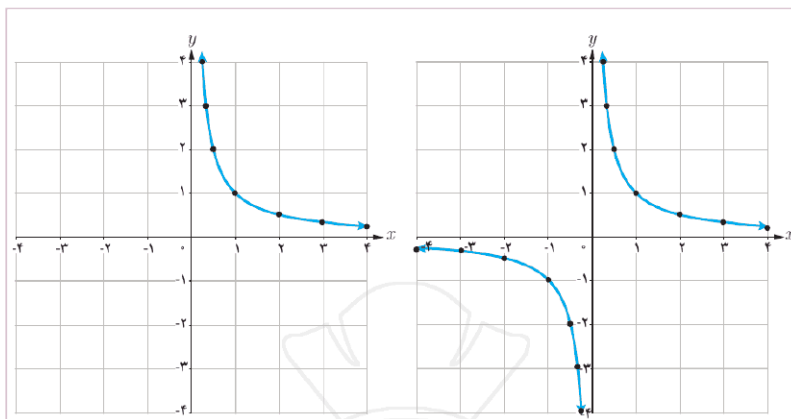


نقطه ها از چپ به راست پایین می آیند: به ازای $x = 1, 2, 3, 4$ مقدار تابع برابر $1, 1/2, 1/3, 1/4$ است و کاهش می یابد.

پاسخ: «با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش می یابد.»

در نمودارهای زیر تابع با ضابطه $f(x) = 1/x$ با دو دامنه متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف) $D_f = (0, +\infty)$ ب) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$



- نمودار سمت چپ فقط شاخه ناحیه اول (به ازای $x > 0$) را دارد، پس مربوط به **الف**) $D_f = (0, +\infty)$ است.
- نمودار سمت راست هر دو شاخه (به ازای $x > 0$ و $x < 0$) را دارد، پس مربوط به **ب**) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ است.

هزینهٔ پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطهٔ $p(x) = 255x / (100 - x)$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $p(x)$ هزینهٔ پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی خواهد شد؟
پ) چرا هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

الف) مقدار $p(x)$ را در هر ستون حساب می‌کنیم؛ مثلاً: $p(10) = 255 \times 10 / 90 \approx 28.33$

۹۰	۷۰	۵۰	۳۰	۱۰	x
2295	595	255	≈ 109.29	≈ 28.33	$p(x)$

ب) یک میلیارد تومان برابر ۱۰۰۰ میلیون تومان است، پس: $p(x) = 1000$

$$255x = 1000(100 - x) \Rightarrow 1255x = 100000 \Rightarrow x \approx 79.7$$

یعنی با یک میلیارد تومان حدود 79.7% درصد از آلودگی‌ها پاک‌سازی می‌شود.

پ) برای پاک‌سازی ۱۰۰ درصد باید $x = 100$ باشد، اما به‌ازای $x = 100$ مخرج کسر صفر می‌شود و تابع تعریف‌شده نیست ($100 \notin D_p$). همچنین هرچه x به ۱۰۰ نزدیک‌تر شود، مخرج به صفر نزدیک و هزینه بسیار بزرگ می‌شود؛ پس هزینهٔ پاک‌سازی کامل بی‌نهایت است و هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد آلودگی‌ها پاک نمی‌شود.

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» است. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همه پرتاب‌های آزاد او حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن خوب است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همه پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطه تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x) = (7 + x) / (10 + x) \quad f(x) = x / (0.7 + x) \quad f(x) = x + 0.7$$

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپی دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟ $f(x) = 80/100 \rightarrow \dots$

الف) اگر x پرتاب موفق پیاپی دیگر داشته باشد، تعداد پرتاب‌های موفق $7 + x$ و تعداد کل پرتاب‌ها $10 + x$ می‌شود. پس ضابطه برابر است با گزینه سوم:

$$f(x) = (7 + x) / (10 + x)$$

ب) بله؛ چون صورت و مخرج هر دو چندجمله‌ای هستند و مخرج $10 + x$ چندجمله‌ای ناصفر است (به‌ازای $x \geq 0$ صفر نمی‌شود)، این تابع گویاست.

پ) باید $f(x) = 80/100$ شود:

$$(7 + x) / (10 + x) = 80/100 \Rightarrow 100(7 + x) = 80(10 + x) \Rightarrow 700 + 100x = 800 + 80x \Rightarrow 20x = 100 \Rightarrow x = 5$$

یعنی پس از ۵ پرتاب آزاد موفق پیاپی دیگر، درصد موفقیت وحیده ۸۰ درصد می‌شود (۱۲ پرتاب موفق از ۱۵ پرتاب).

دامنه هر یک از توابع گویای داده‌شده را به دست آورید.

$$D_g = \mathbb{R} - \{4\}, g(x) = 3 / (x - 4) \dots D_f = \mathbb{R} - \{-5\}, f(x) = x / (x + 5) \dots$$

دامنه تابع گویا همه اعداد حقیقی است، به‌جز اعدادی که مخرج را صفر می‌کنند.

$$D_f = \mathbb{R} - \{-5\} \quad x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \quad \bigcirc$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{4\} \quad x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \quad \bigcirc$$

۱) آیا دو تابع با ضابطه $f(x) = x^2/x$ و $g(x) = x$ با هم برابرند؟ چرا؟

خیر. ضابطه دو تابع پس از ساده کردن یکی می شود، اما دامنه ها متفاوت است:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

برای برابری دو تابع باید دامنه ها نیز برابر باشند؛ چون $D_f \neq D_g$ ، دو تابع برابر نیستند (نمودار f در نقطه $x = 0$ «حفره» دارد ولی نمودار g ندارد).

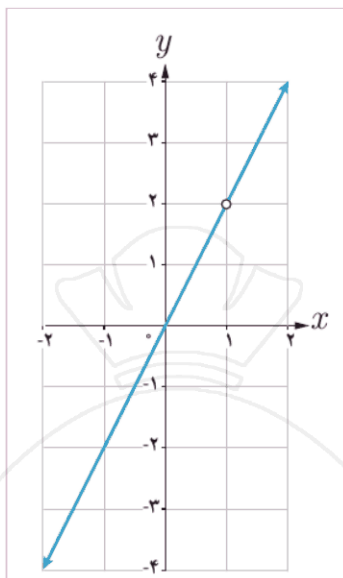


۲) نمودار مقابل مربوط به کدام یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟

الف) $D_g = \mathbb{R}$ ، $g(x) = 2x$ ب) $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ ، $g(x) = 2x$

پ) $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ ، $g(x) = 2x$ ت) $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ ، $g(x) = (2x^2 - 2x)/(x - 1)$

ث) $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ ، $g(x) = (2x^2 - 4x)/(x - 2)$



نمودار، خط $y = 2x$ است که در نقطه $(1, 2)$ «حفره» دارد؛ یعنی $x = 1$ در دامنه نیست.

○ الف) دامنه $\mathbb{R}$ است و حفره ندارد؛ نادرست.

○ ب) حفره در $x = 2$ (نقطه $(2, 4)$) است؛ نادرست.

○ پ) $y = 2x$ با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ ؛ درست.

○ ت) $(2x^2 - 2x)/(x - 1) = 2x(x - 1)/(x - 1) = 2x$ با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ ؛ درست.

○ ث) حفره در $x = 2$ (نقطه $(2, 4)$) است؛ نادرست.

پاسخ: گزینه‌های پ و ت. مسئله دو جواب دارد، ولی این دو گزینه یک تابع را نشان می‌دهند (ضابطه و دامنه هر دو یکی است).

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطه $S = 356\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است. $(1/4) \approx \sqrt{3} = 1/7, \sqrt{2}$

الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) عبارت زیر را کامل کنید. چون هر عدد، تنها ریشه دوم مثبت دارد، پس رابطه سونامی یک تابع
پ) کدام یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنه تابع سونامی است؟

الف) $S = 356\sqrt{d}$:

d	۱	۲	۳	۴
$S = 356\sqrt{d}$	356	498.4	$356 \times 1.7 = 605.2$	$356 \times 2 = 712$

ب) چون هر عدد نامنفی، تنها یک ریشه دوم مثبت دارد، پس رابطه سونامی یک تابع است.

پ) d عمق دریاست و نمی‌تواند منفی باشد؛ همچنین $\sqrt{d}$ فقط برای $d \geq 0$ تعریف می‌شود. پس عدد ۵ عضو دامنه است و عدد ۵- عضو دامنه نیست.

در کتاب‌های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین‌لرزه‌ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق این سؤال را که «آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» باید با کمک پژوهش‌های باستان‌شناسی و زمین‌شناسی یافت. با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس حدود ۵۰ متر است، نظر شما چیست؟

میانگین عمق خلیج فارس ۵۰ متر، یعنی $d = 0.05$ کیلومتر است. تندی سونامی در این عمق تقریباً

$$S = 356\sqrt{0.05} \approx 356 \times 0.22 \approx 80 \text{ km/h}$$

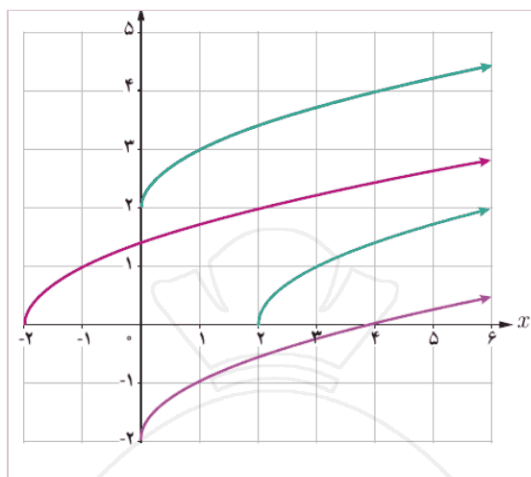
است؛ یعنی بسیار کمتر از تندی سونامی در اقیانوس‌های عمیق (که به بیش از ۸۰۰ کیلومتر بر ساعت می‌رسد). در دریای کم‌عمقی مثل خلیج فارس، سونامی بزرگ و پرانرژی شکل نمی‌گیرد؛ به‌علاوه سونامی آب را موقتاً به ساحل می‌آورد و پس می‌کشد و باعث فرورفتن دائمی بخش بزرگی از شهر زیر آب نمی‌شود. بنابراین ویرانی سیراف را بیشتر باید به زمین‌لرزه شدید سده چهارم هجری قمری نسبت داد، نه به غرق‌شدن در اثر سونامی.

این جواب ممکن است دقیق نباشد (پرسشی پژوهشی و نظری است؛ نظر نمونه ارائه شده است).

۱) در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنه آنها را تعیین کنید.

الف) $g(x) = \sqrt{x-2}$ ، $D_g = \dots\dots$ ب) $h(x) = \sqrt{x+2}$ ، $D_h = \dots\dots$

پ) $k(x) = \sqrt{x+2}$ ، $D_k = \dots\dots$ ت) $l(x) = \sqrt{x-2}$ ، $D_l = \dots\dots$



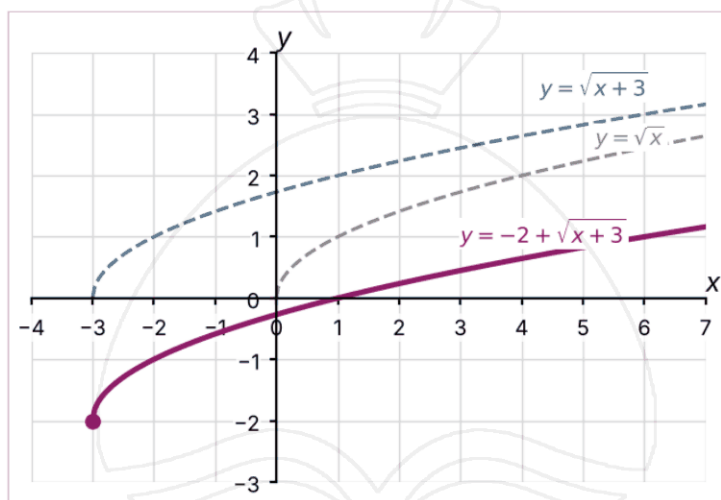
نقطه شروع هر نمودار، نقطه شروع $(0, 0)$ نمودار $\sqrt{x}$ است که منتقل شده:

- الف) $g(x) = \sqrt{x-2}$ دو واحد به راست؛ شروع از $(2, 0)$ — نمودار آبی؛ $D_g = [2, +\infty)$
- ب) $h(x) = \sqrt{x+2}$ دو واحد به بالا؛ شروع از $(0, 2)$ — نمودار سبز؛ $D_h = [0, +\infty)$
- پ) $k(x) = \sqrt{x+2}$ دو واحد به چپ؛ شروع از $(-2, 0)$ — نمودار صورتی؛ $D_k = [-2, +\infty)$
- ت) $l(x) = \sqrt{x-2}$ دو واحد به پایین؛ شروع از $(0, -2)$ — نمودار بنفش؛ $D_l = [0, +\infty)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- ۲) می‌خواهیم نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنیم.
- الف) (مرحله اول) نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x}$ در صفحه قبل را در نظر بگیرید.
- ب) (مرحله دوم) حال، نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.
- پ) (مرحله سوم) در پایان، نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.

۱. نمودار $y = \sqrt{x}$ از $(0, 0)$ شروع می‌شود و از نقاط $(1, 1)$ ، $(4, 2)$ و $(9, 3)$ می‌گذرد.
۲. برای $y = \sqrt{x+3}$ نمودار مرحله اول را ۳ واحد به چپ منتقل می‌کنیم؛ شروع از $(-3, 0)$.
۳. برای $y = -2 + \sqrt{x+3}$ نمودار مرحله دوم را ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم؛ شروع از $(-3, -2)$ و عبور از $(-2, -1)$ و $(1, 0)$.

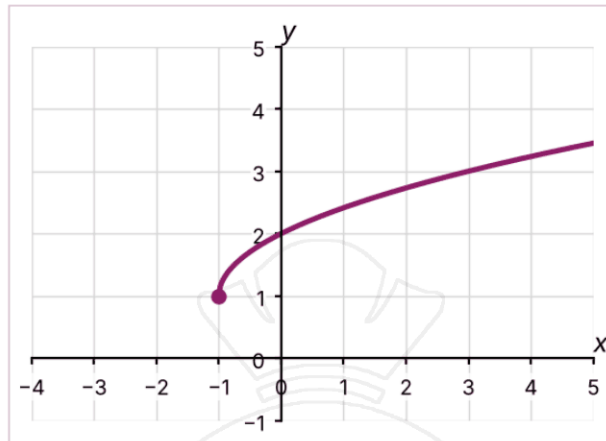


دامنه این تابع $[-3, +\infty)$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ را رسم کنید؛ سپس دامنه آن را بیابید.

نمودار $\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم؛ شروع از $(-1, 1)$ و عبور از $(0, 2)$ ، $(3, 3)$ و $(8, 4)$.



دامنه: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ پس $D_f = [-1, +\infty)$.

در یک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود: از هنگام ورود تا کمتر از ۲ ساعت: ۳ هزار تومان؛ از ۲ ساعت تا ۲/۵ ساعت: ۴ هزار تومان؛ از بیشتر از ۲/۵ ساعت تا کمتر از ۳ ساعت: ۵ هزار تومان؛ از ۳ ساعت تا ۵ ساعت: ۶ هزار تومان.

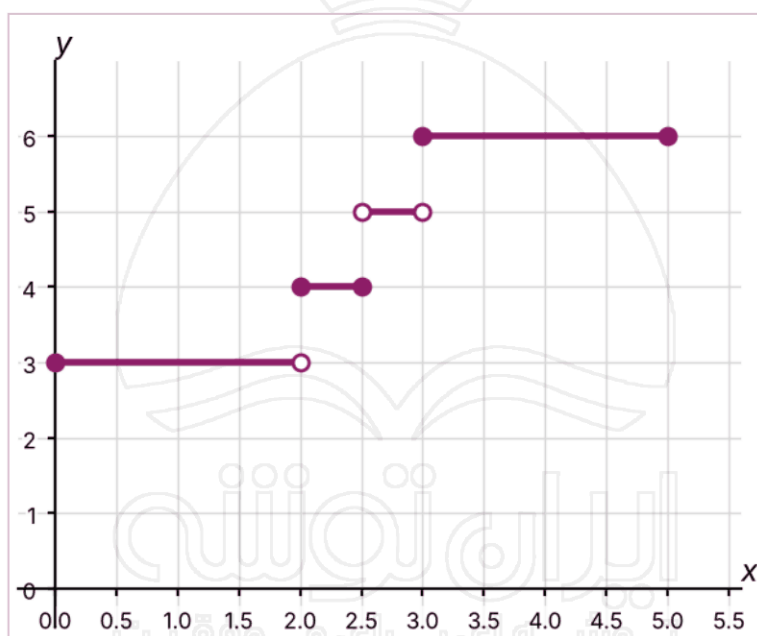
الف) ضابطهٔ هزینهٔ پارکینگ خودرو چیست؟

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.

الف) اگر x مدت توقف (ساعت) و $f(x)$ هزینه (هزار تومان) باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 2.5 \\ 5 & 2.5 < x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

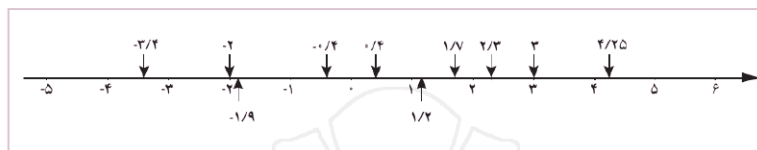
ب) نمودار، تابع پله‌ای است (دایرهٔ توپر: نقطه شامل می‌شود؛ دایرهٔ توخالی: شامل نمی‌شود):



۱) با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به دست آورید.
 $[-3.4]$ ، $[-2]$ ، $[-1.9]$ ، $[0.4]$ ، $[-0.4]$ ، $[4.25]$ ، $[3]$ ، $[2.3]$ ، $[1.7]$ ، $[1.2]$

جزء صحیح هر عدد، اولین عدد صحیح سمت چپ آن (یا خود آن، اگر صحیح باشد) روی محور است:

عبارت	$[-3.4]$	$[-2]$	$[-1.9]$	$[0.4]$	$[-0.4]$	$[4.25]$	$[3]$	$[2.3]$	$[1.7]$	$[1.2]$
مقدار	-4	-2	-2	0	-1	4	3	2	1	1



۲) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.
 $[-13/51] = \dots\dots$ ، $[41/37] = \dots\dots$

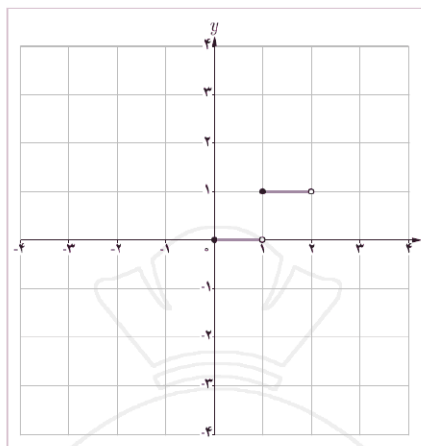
- $41/37 \approx 1.108$ و عدد صحیح سمت چپ آن ۱ است؛ پس $[41/37] = 1$.
- $-13/51 \approx -0.255$ و عدد صحیح سمت چپ آن -1 است؛ پس $[-13/51] = -1$.

۱) اگر $x = -2$ ، آنگاه x برابر چه اعدادی می‌تواند باشد؟ مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

$x = -2$ یعنی x از -2 کمتر نیست و به -1 نرسیده است:

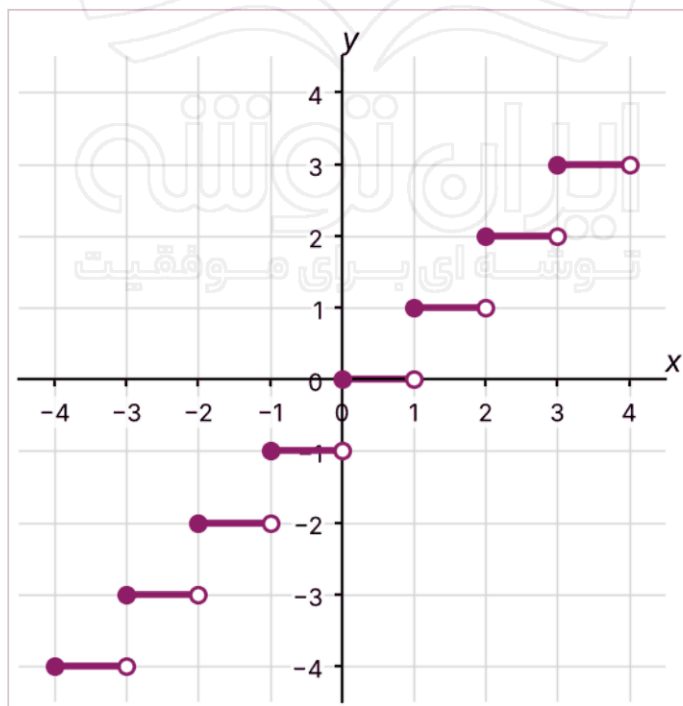
پس $-2 \leq x < -1$ و مجموعه جواب برابر است با بازه $[-2, -1)$.

۲) برای رسم نمودار یک تابع پله‌ای باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر $0 \leq x < 1$ ، آنگاه $[x] = 0$ ؛ پس مقدار تابع $f(x) = [x]$ برای همه اعداد عضو بازه $[0, 1)$ برابر صفر می‌شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ رسم شده است. نمودار این تابع را در بازه $[-4, 4]$ تکمیل کنید.



در هر بازه $[k, k+1)$ مقدار تابع برابر k است:

بازه	$[-4, -3)$	$[-3, -2)$	$[-2, -1)$	$[-1, 0)$	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$
$[x]$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3



۳ الف) نقطه‌ای مانند a را به دلخواه روی محور اعداد داده‌شده مشخص کنید.

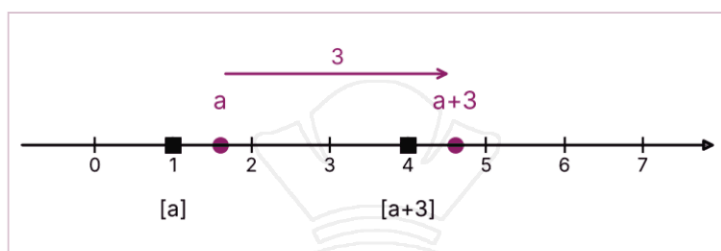
ب) نقطه $a + 3$ را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط $[a]$ و $[a + 3]$ را روی محور مشخص کنید.

ت) چه رابطه‌ای بین $[a]$ و $[a + 3]$ برقرار است؟ $[a + 3] = [a] + \dots$

ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ «اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a + n] = [a] + \dots$ »

برای نمونه $a = 1.6$ را انتخاب می‌کنیم. $a + 3 = 4.6$ است (۳ واحد به راست)، و $[a] = 1$ و $[a + 3] = 4$:

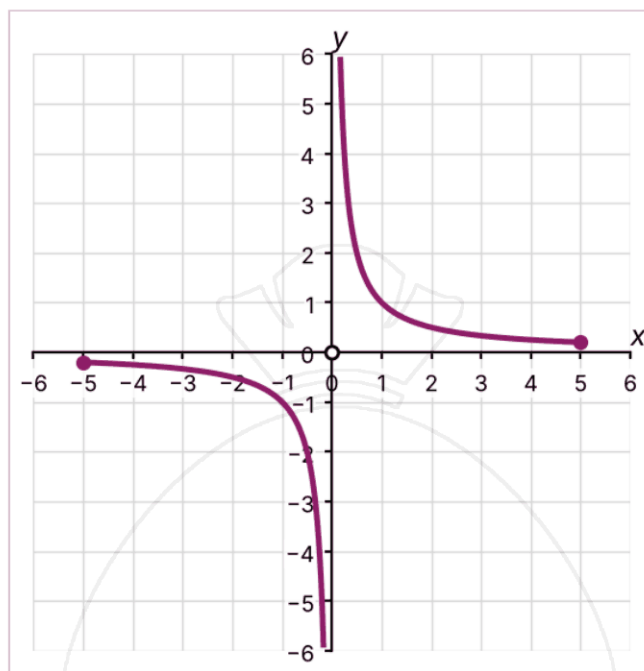


ت) $[a + 3] = [a] + 3$ (در مثال: $4 = 1 + 3$).

ث) «اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a + n] = [a] + n$ » (افزودن عدد صحیح به a جزء صحیح را به همان اندازه جابه‌جا می‌کند).

۱) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1/x$ و با دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ را رسم کنید.

جدول نقاط: $(1, 1)$ ، $(2, 1/2)$ ، $(5, 1/5)$ ، $(-1, -1)$ ، $(-2, -1/2)$ ، $(-5, -1/5)$. نمودار دو شاخه دارد و در $x = 0$ تعریف نشده است.



۲) دامنه تابع گویای با ضابطه $f(x) = (x+3)/(x-3)$ را به دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\} \quad \text{پس } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

۳) در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $(x > 0)$ ؛ $f(x) = -1$ ، $g(x) = |x|/x$ ب) $f(x) = x - 2$ ، $g(x) = (x^2 - 4)/(x + 2)$

الف) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$. برای $x > 0$: $g(x) = x/x = 1$ و برای $x < 0$: $g(x) = -x/x = -1$. پس دامنه‌ها برابر و ضابطه‌ها در هر نقطه یکسان است؛ دو تابع برابرند.

ب) $g(x) = (x-2)(x+2)/(x+2) = x - 2$ ولی $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ در حالی که $D_f = \mathbb{R}$. دامنه‌ها برابر نیستند؛ دو تابع برابر نیستند.

۴) تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش برابر $\mathbb{R} - \{-1\}$ شود. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

مخرج باید فقط در $x = -1$ صفر شود، مثلاً مخرج: $x + 1$

☐ $f(x) = 1/(x + 1)$

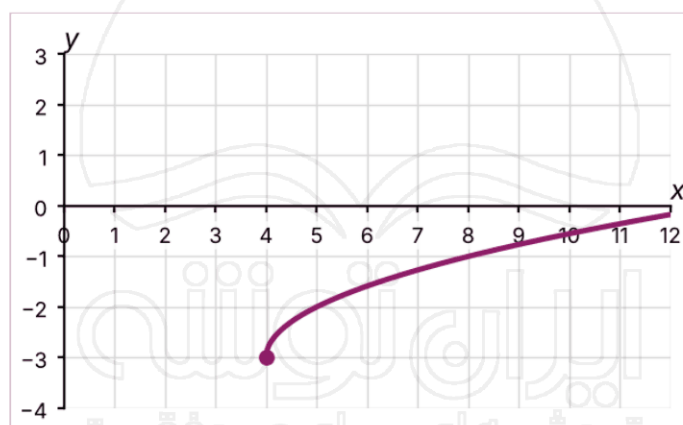
☐ $f(x) = (x - 3)/(x + 1)$

☐ $f(x) = 2x/(x + 1)$

در هر کدام $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ است (پاسخ‌های دیگری نیز ممکن است).

۵) نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x - 4}$ را رسم کنید.

نمودار $\sqrt{x}$ را ۴ واحد به راست و ۳ واحد به پایین منتقل می‌کنیم؛ شروع از $(4, -3)$ و عبور از $(5, -2)$ ، $(8, -1)$ و $(13, 0)$ ؛ دامنه $[4, +\infty)$.



۶) حاصل عبارت‌های مقابل را حساب کنید.

$[300.4002]$ $[-103.003]$ $[-2309.54]$

☐ $[300.4002] = 300$

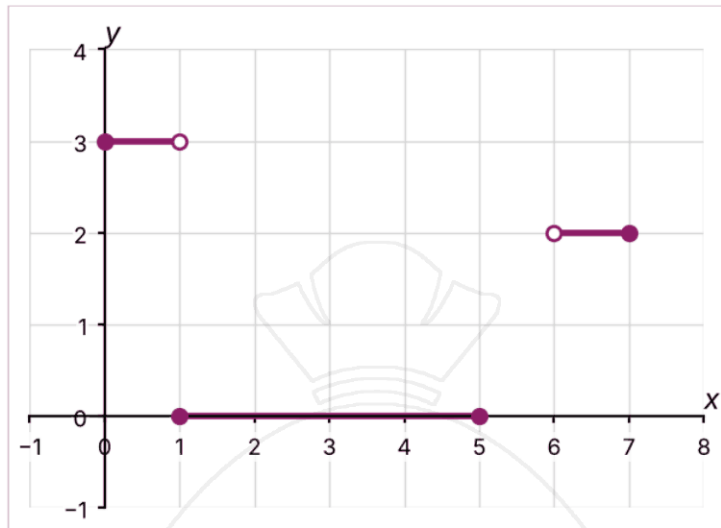
☐ $[-103.003] = -104$ (چون $-104 \leq -103.003 < -103$)

☐ $[-2309.54] = -2310$ (چون $-2310 \leq -2309.54 < -2309$)

۷) تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

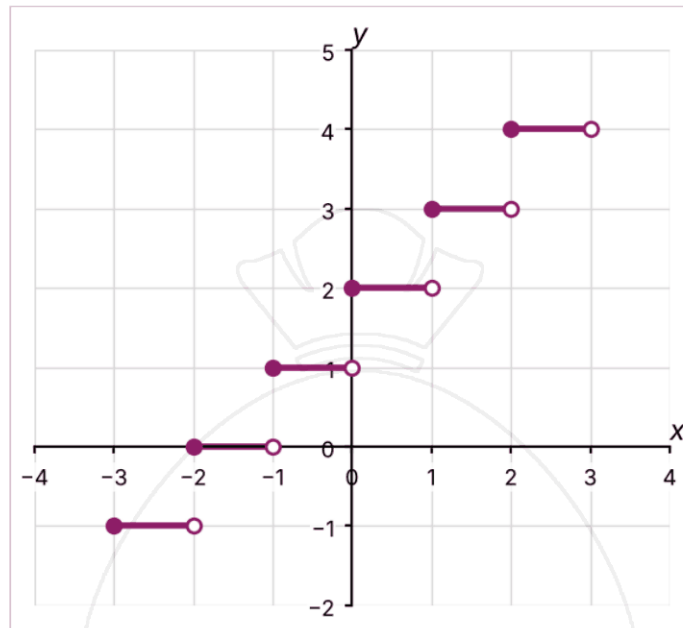
$$f(x) = \begin{cases} 3 & (x \in [0, 1)) \\ 0 & (x \in [1, 5]) \\ 2 & (x \in (6, 7]) \end{cases}$$

سه پاره افقی: ارتفاع ۳ روی بازه $[0, 1)$ ، ارتفاع ۰ روی $[1, 5]$ و ارتفاع ۲ روی $(6, 7]$



۸) تابع با ضابطه $f(x) = [x] + 2$ و دامنه $D_f = [-3, 3)$ را رسم کنید.

$[2,3)$	$[1,2)$	$[0,1)$	$[-1,0)$	$[-2,-1)$	$[-3,-2)$	x
4	3	2	1	0	-1	$f(x) = [x] + 2$



تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ به طور تقریبی قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد. در این تابع x نشان دهنده ماه های پس از تولد است.
قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً چقدر است؟
در چه سنی قد متوسط یک کودک تقریباً یک متر می شود؟

۹ ماهگی: $f(9) = 7\sqrt{9} + 50 = 7 \times 3 + 50 = 71$ سانتی متر.

یک متر (۱۰۰ سانتی متر): $7\sqrt{x} + 50 = 100 \Rightarrow \sqrt{x} = 50/7 \approx 7.14 \Rightarrow x \approx 51$

یعنی در حدود ۵۱ ماهگی (تقریباً ۴ سال و ۳ ماهگی) قد متوسط کودک به یک متر می رسد.

الف) هر مایل تقریباً $\frac{1}{6}$ کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام یک از رابطه‌های سمت چپ است.

$f(x) = (8/5)x$ — این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است.

$g(x) = (5/8)x$ — این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است.

ب) تندی 30 مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟

الف) $1.6 = 8/5$ ، پس برای تبدیل مایل به کیلومتر باید در $8/5$ ضرب کنیم؛ این کار را f انجام می‌دهد. برعکس، برای تبدیل کیلومتر به مایل در $5/8$ ضرب می‌کنیم که همان g است. پس هر جمله مربوط به رابطه هم‌ردیف خودش است: f : مایل به کیلومتر؛ g : کیلومتر به مایل. (این دو رابطه، وارون یکدیگرند.)

ب) $f(30) = (8/5) \times 30 = 48$ ؛ یعنی 30 مایل بر ساعت تقریباً 48 کیلومتر بر ساعت است.

وارون تابع‌های داده‌شده را حساب کنید.

$$s^{-1} = \dots, s = \{(4,1), (1,4), (3,3), (2,5)\}$$

$$t^{-1} = \dots, t = \{(5,1), (1,4), (4,3), (2,3)\}$$

$$u^{-1} = \dots, u = \{(2,3), (5,2), (4,1), (3,4)\}$$

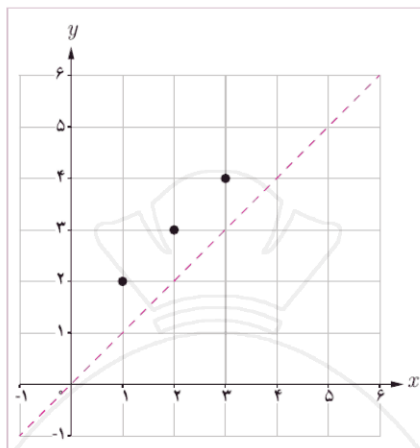
برای وارون، مؤلفه‌های هر زوج مرتب را جابه‌جا می‌کنیم:

$$s^{-1} = \{(1,4), (4,1), (3,3), (5,2)\} \quad \circ$$

$$t^{-1} = \{(1,5), (4,1), (3,4), (3,2)\} \quad \circ \quad \text{(تابع نیست، زیرا ۳ دو بار به عنوان مؤلفه اول آمده است)}$$

$$u^{-1} = \{(3,2), (2,5), (1,4), (4,3)\} \quad \circ$$

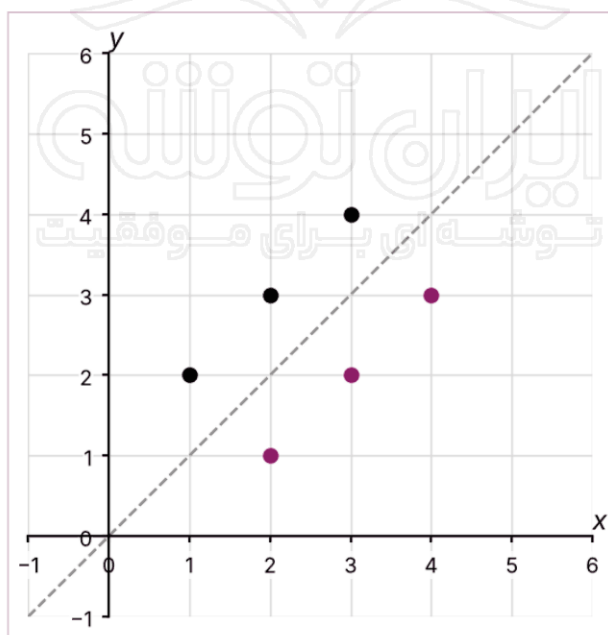
- ۱) در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.
 الف) تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.
 ب) تابع f^{-1} را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.
 پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار f^{-1} را رسم کنید.
 ت) نمودار f و f^{-1} چه ارتباطی با هم دارند؟ «نمودار f و f^{-1} نسبت به قرینه یکدیگرند.»



الف) $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

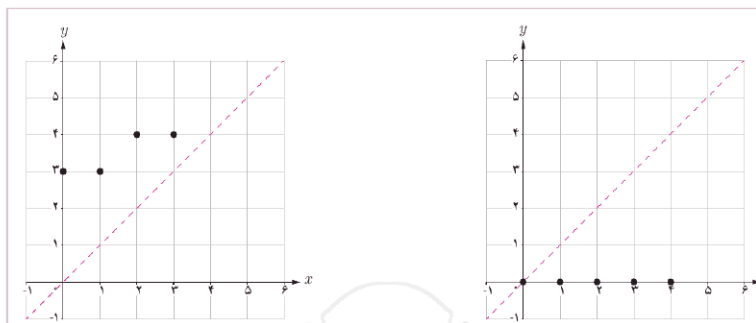
ب) $f^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$

پ) نقاط $(2,1)$ ، $(3,2)$ و $(4,3)$ را (به رنگ تیره‌تر) رسم می‌کنیم:



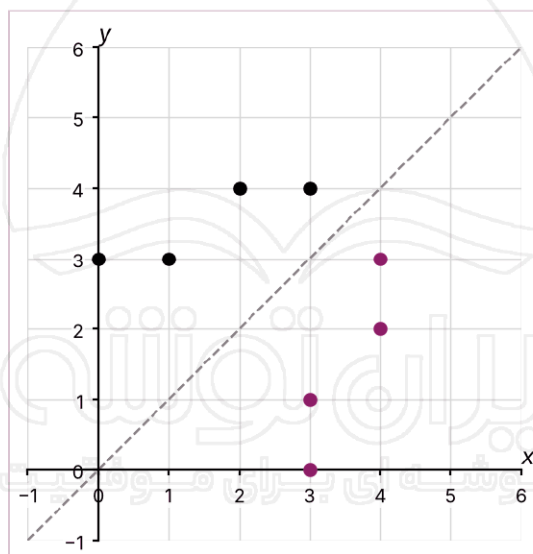
ت) «نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) قرینه یکدیگرند.»

۲) الف) در مورد بیان کنید چرا نمودار داده‌شده معرفی یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید.
 ب) عبارت زیر را کامل کنید. «برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به رسم کنیم.»

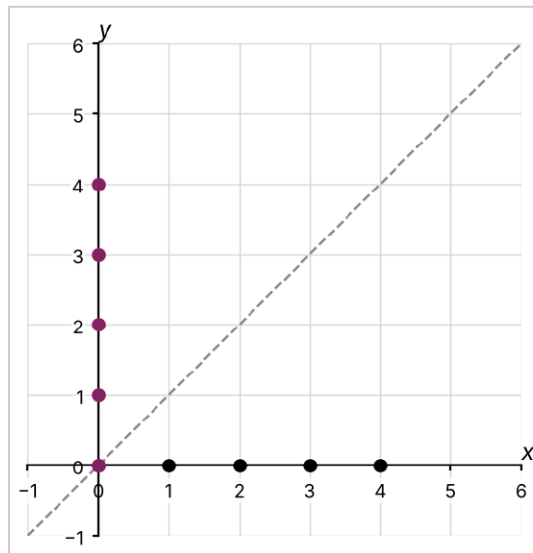


الف) در هر دو نمودار به ازای هر x دقیقاً یک y وجود دارد (هیچ خط عمودی نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند)؛ پس هر دو تابع‌اند. وارون‌ها را با جابه‌جایی مؤلفه‌ها (نقاط بنفش) رسم می‌کنیم:

نمودار سمت چپ: $\{(0,3), (1,3), (2,4), (3,4)\} \leftarrow$ وارون: $\{(3,0), (3,1), (4,2), (4,3)\}$

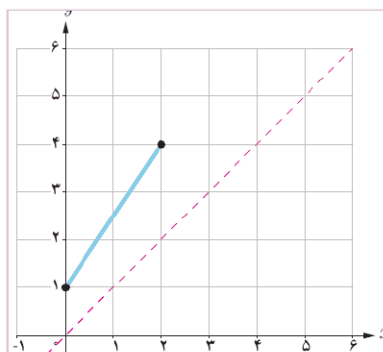


نمودار سمت راست: $\{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\} \leftarrow$ وارون: $\{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4)\}$

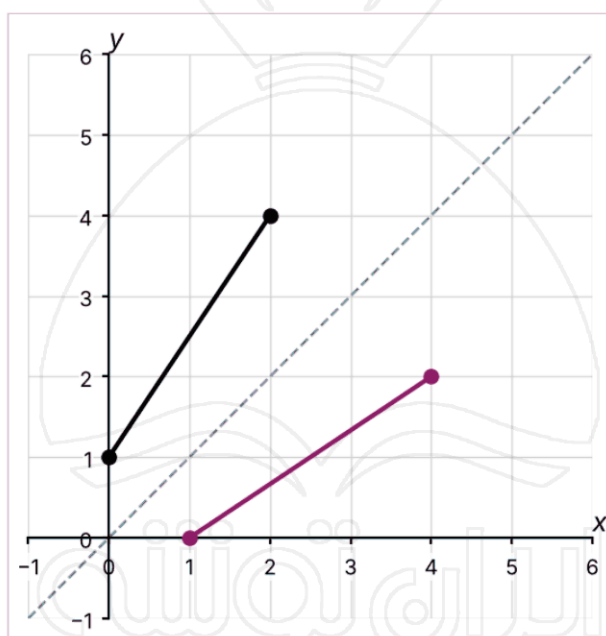


(در هر دو مورد وارون تابع نیست، چون نقاط با مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم متفاوت دارد.)
ب) «برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم.»

۳) نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

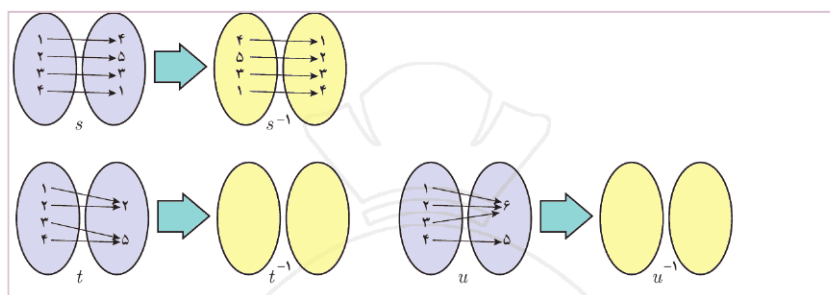


تابع، پاره خطی از (0, 1) تا (2, 4) است. قرینه آن نسبت به $y = x$ ، پاره خطی از (1, 0) تا (4, 2) است:



توشه ای برای موفقیت

- الف) به نمونه داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به دست آورید.
- ب) در جدول مقابل گزینه های درست را انتخاب کنید. s^{-1} یک تابع است: ☐ بله ☐ خیر؛ t^{-1} یک تابع است: ☐ بله ☐ خیر؛ u^{-1} یک تابع است: ☐ بله ☐ خیر
- پ) عبارت زیر را کامل کنید. وارون تابع f ، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه های تکراری وجود نداشته باشد.
- ت) تابع $f = \{(1,2), (-2,4), (2,-1), (-1,2)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبه f^{-1} ، تعیین کنید که این تابع یک به یک است یا خیر؟



الف) در نمودار پیکانی جهت پیکان ها را برعکس می کنیم:

- $t^{-1} = \{(2,1), (2,2), (5,3), (5,4)\} \leftarrow t = \{(1,2), (2,2), (3,5), (4,5)\}$ (از ۲ دو پیکان به ۱ و ۲ و از ۵ دو پیکان به ۳ و ۴ می رود)
- $u^{-1} = \{(6,1), (6,2), (6,3), (5,4)\} \leftarrow u = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,5)\}$ (از ۶ سه پیکان خارج می شود)

خیر	بله	
	✓	s^{-1} یک تابع است.
✓		t^{-1} یک تابع است.
✓		u^{-1} یک تابع است.

ب) s^{-1} تابع است (از هر عضو فقط یک پیکان خارج می شود)، ولی t^{-1} و u^{-1} تابع نیستند.

پ) «وارون تابع f ، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه های دوم تکراری وجود نداشته باشد.»

ت) مؤلفه های دوم ۲، ۴، -۱، ۲ هستند و عدد ۲ دو بار تکرار شده است ($f(1) = f(-1) = 2$)؛ پس f یک به یک نیست و وارونش تابع نیست.

۲) نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.
الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

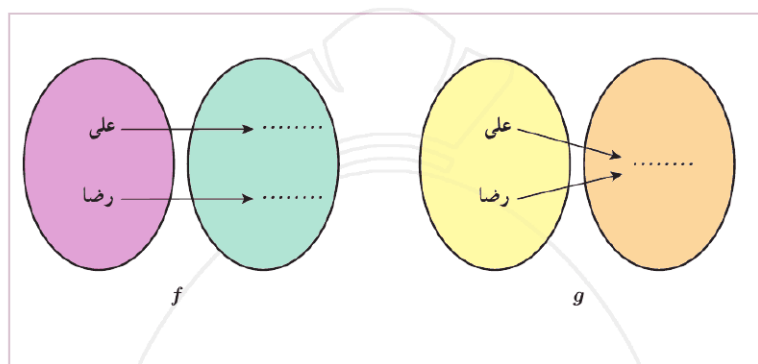
ب) آیا f و g هر دو تابع اند؟

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟

ت) کدام یک از دو تابع f و g یک به یک هستند؟

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید. با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او و به طور یکتا تعیین با

دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین



الف) در f علی و رضا به دو عنصر متفاوت می‌روند؛ این نمودار «اثر انگشت» است (اثر انگشت هیچ دو نفری یکسان نیست): علی $\leftarrow$ اثر انگشت علی، رضا $\leftarrow$ اثر انگشت رضا. در g هر دو به یک عنصر می‌روند؛ این نمودار «گروه خونی» است (علی و رضا می‌توانند گروه خونی یکسان داشته باشند).

ب) بله؛ هر انسان فقط یک اثر انگشت و یک گروه خونی دارد.

پ) f^{-1} تابع است (هر اثر انگشت فقط به یک نفر برمی‌گردد)؛ ولی g^{-1} تابع نیست (یک گروه خونی به چند نفر برمی‌گردد).

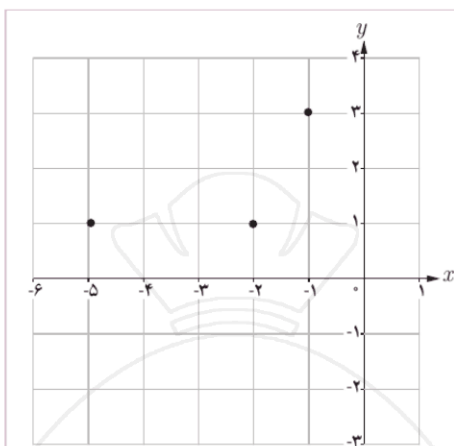
ت) تابع f (اثر انگشت) یک به یک است؛ g یک به یک نیست.

ث) با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین نمی‌شود. با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین می‌شود.

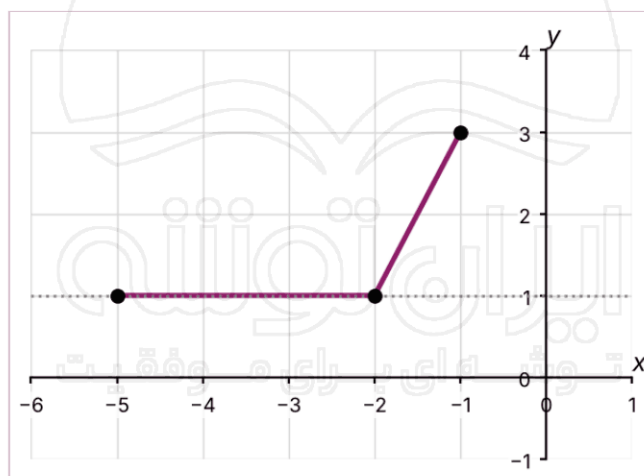
۱) در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نمودار تابعی رسم کنید که تابع باشد.

الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک به یک است؟

ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟ «اگر هر خط موازی محور نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع یک به یک است.»



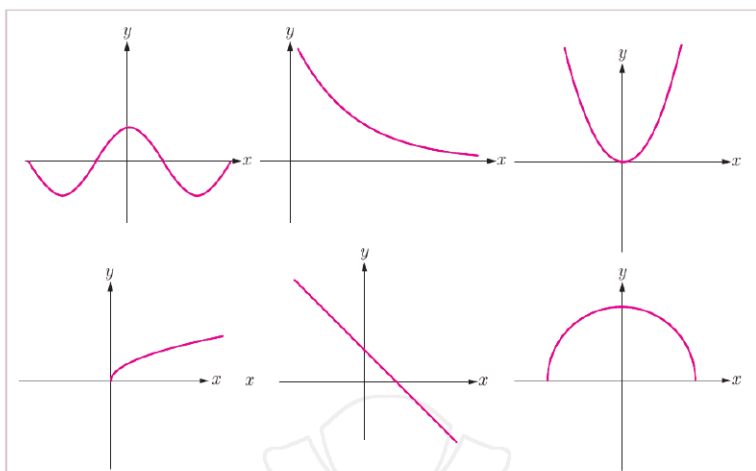
نقاط $(-5, 1)$ ، $(-2, 1)$ و $(-1, 3)$ را با پاره خط به هم وصل می‌کنیم (هر x فقط یک y دارد، پس تابع است):



الف) خیر؛ دو نقطه $(-5, 1)$ و $(-2, 1)$ مؤلفه دوم یکسان دارند، پس خط $y = 1$ نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. (هر تابعی که از این نقاط بگذرد یک به یک نیست.)

ب) «اگر هر خط موازی محور x ها (خط افقی) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع یک به یک است.»

۲) کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟



با آزمون خط افقی: تابعی یک به یک است که هر خط افقی آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

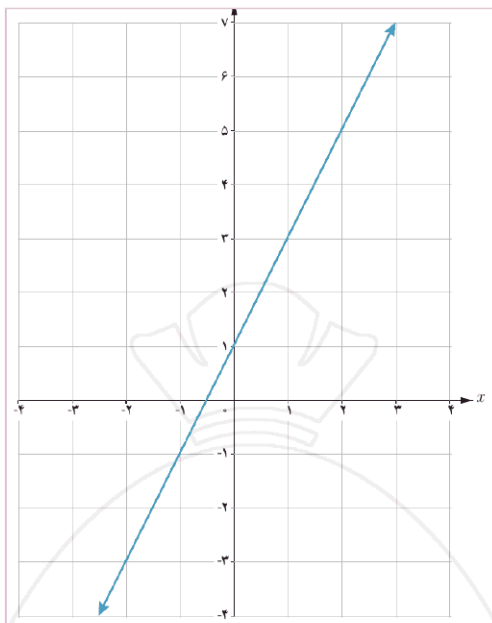
- ردیف بالا، نمودار اول (موج دار): یک به یک نیست (خطهای افقی آن را چند بار قطع می کنند).
 - ردیف بالا، نمودار دوم (منحنی نزولی): **یک به یک است.**
 - ردیف بالا، نمودار سوم (سه می): یک به یک نیست (قرینه نسبت به محور y).
 - ردیف پایین، نمودار اول (منحنی رادیکالی صعودی): **یک به یک است.**
 - ردیف پایین، نمودار دوم (خط نزولی): **یک به یک است.**
 - ردیف پایین، نمودار سوم (نیم دایره): یک به یک نیست.
- (ردیف ها از سمت چپ شمرده شده اند، مطابق شکل.)

ایران توئشه
توشه ای برای موفقیت

تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم.

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک‌به‌یک است.

ب) نمودار زیر را توضیح دهید: $f^{-1}(7) = 3$ و $f(3) = 7$ ؛ به عبارت دیگر $(3, 7) \in f$ و $(7, 3) \in f^{-1}$.



الف) نمودار f یک خط با شیب ۲ است. هر خط افقی (موازی محور x ها) آن را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس f یک‌به‌یک است.

ب) $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$ ، پس زوج $(3, 7)$ عضو f است. وارون با جابه‌جایی مؤلفه‌هاست؛ پس $(7, 3) \in f^{-1}$ یعنی $f^{-1}(7) = 3$. در شکل، f عدد ۳ را با «ضرب در ۲ و جمع با ۱» به ۷ می‌برد و f^{-1} با «کم کردن ۱ و تقسیم بر ۲» $(7 - 1) / 2 = 3$ را به ۳ برمی‌گرداند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱) هر تابع خطی غیرثابت یک به یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = x + 5$ ب) $g(x) = 4x$ پ) $u(x) = 2x + 3$ ت) $v(x) = (2/3)x - 4$

چرا؟ نمودار تابع خطی غیرثابت خطی با شیب ناصفر است و هر خط افقی آن را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس یک به یک است.

الف) $f^{-1}(x) = x - 5$ پس $y = x + 5 \Rightarrow x = y - 5$

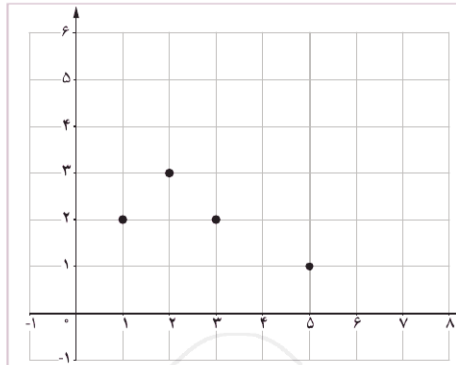
ب) $g^{-1}(x) = x/4$ پس $y = 4x \Rightarrow x = y/4$

پ) $u^{-1}(x) = (x - 3)/2$ پس $y = 2x + 3 \Rightarrow x = (y - 3)/2$

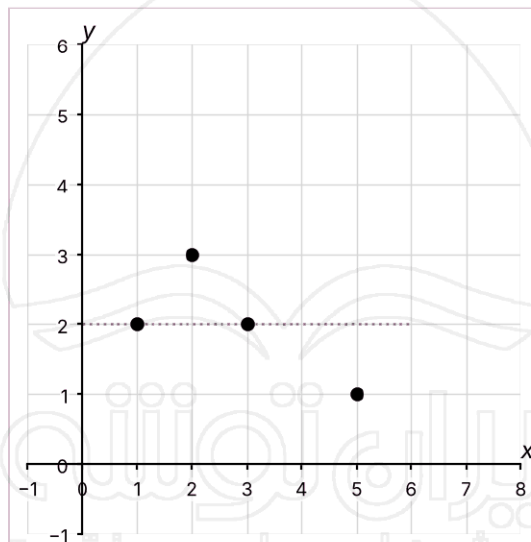
ت) $v^{-1}(x) = 3(x + 4)/2 = (3x + 12)/2$ پس $y = (2/3)x - 4 \Rightarrow (2/3)x = y + 4 \Rightarrow x = 3(y + 4)/2$



۲) الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک به یک نیست؟
 ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید. مسئله چند جواب دارد؟

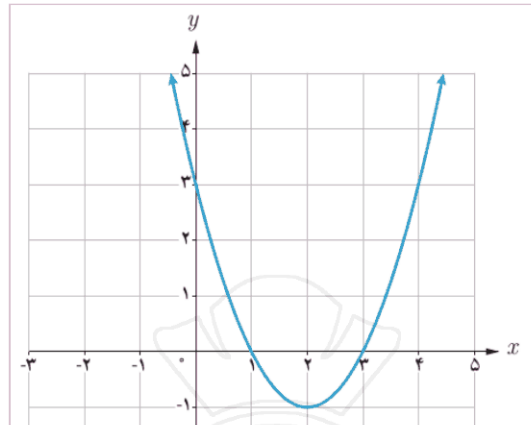


الف) نقاط نمودار: $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(5,1)$. دو نقطه $(1,2)$ و $(3,2)$ مؤلفه دوم یکسان دارند؛ یعنی خط افقی $y = 2$ نمودار را در دو نقطه قطع می کند.



ب) باید یکی از این دو نقطه را حذف کنیم: یا $(1,2)$ یا $(3,2)$. مسئله ۲ جواب دارد.

الف) به نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 4x + 3$ در شکل مقابل دقت کنید. با محدود کردن دامنه این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟ $[1, 4] \square [0, 2]$
 ب) آیا هر تابع درجه ۲، تابعی یک‌به‌یک است؟ چرا؟



الف) رأس سهمی $x = 2$ است و نمودار روی $(-\infty, 2]$ نزولی و روی $[2, +\infty)$ صعودی است.

○ بازه $[1, 4]$ رأس را در بر دارد و مثلاً $f(1) = f(3) = 0$ ؛ یک‌به‌یک نیست.

○ بازه $[0, 2]$ کاملاً در قسمت نزولی است؛ یک‌به‌یک است.

پس فقط بازه $[0, 2]$ درست است.

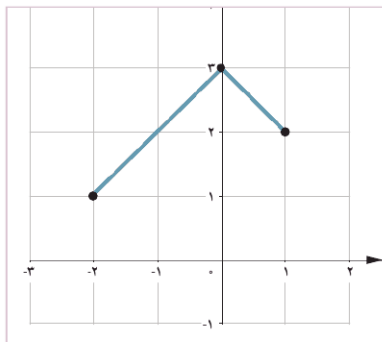
ب) خیر. نمودار هر تابع درجه ۲ (سهمی) نسبت به خط گذرا از رأس قرینه است و خط‌های افقی بالای (یا پایین) رأس آن را در دو نقطه قطع می‌کنند؛ مثلاً $f(1) = f(3)$ با $1 \neq 3$.

۱) وارون تابع $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\}$ را به دست آورید.

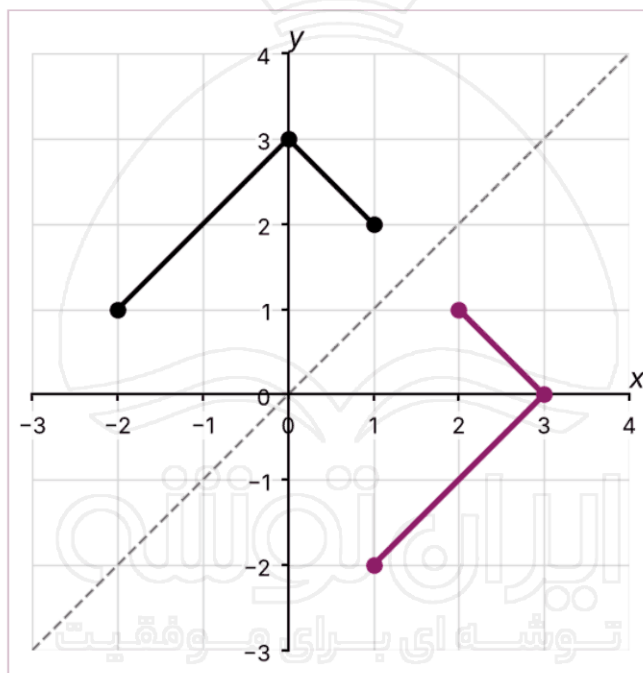
مؤلفه‌های هر زوج را جابه‌جا می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1)\}$$

۲) نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.



نقاط شکستگی $(-2, 1)$ ، $(0, 3)$ و $(1, 2)$ هستند. قرینه آنها نسبت به $y = x$: $(1, -2)$ ، $(3, 0)$ و $(2, 1)$. این نقاط را با پاره خط به هم وصل می کنیم (نمودار بنفش):



توجه: چون تابع اصلی یک به یک نیست (مثلاً مقدار $2/5$ دو بار گرفته می شود)، وارون رسم شده تابع نیست.

۳) ضابطه وارون هر یک از توابع زیر را بیابید.

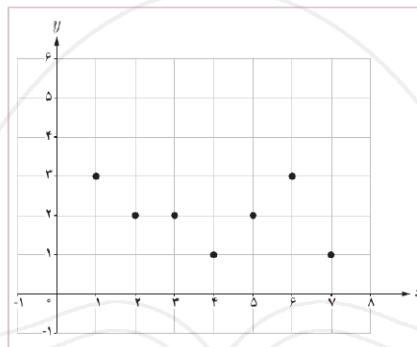
الف) $f(x) = 5x - 2$ ب) $f(x) = (3/5)x + 4$ پ) $f(x) = (-7x + 3)/5$

الف) $f^{-1}(x) = (x + 2)/5$ پس $y = 5x - 2 \Rightarrow x = (y + 2)/5$

ب) $f^{-1}(x) = (5/3)x - 20/3 = (5x - 20)/3$ پس $y = (3/5)x + 4 \Rightarrow x = (5/3)(y - 4)$

پ) $f^{-1}(x) = (3 - 5x)/7$ پس $5y = -7x + 3 \Rightarrow x = (3 - 5y)/7$

۴) می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه باقی می‌تواند بماند؟



نقاط: $(1,3), (2,2), (3,2), (4,1), (5,2), (6,3), (7,1)$. مؤلفه‌های دوم: ۳ (دو بار)، ۲ (سه بار)، ۱ (دو بار).

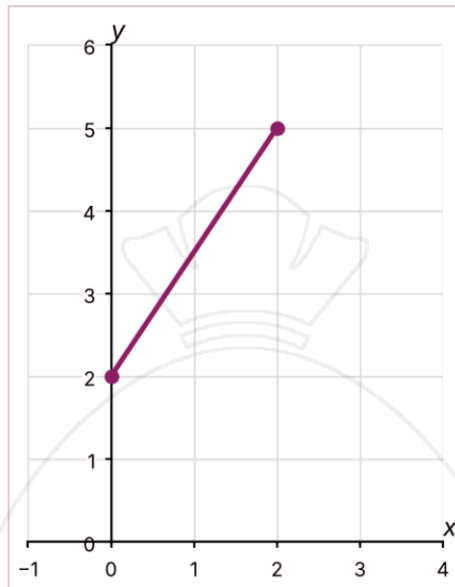
در تابع یک‌به‌یک هر مقدار y فقط یک بار می‌آید؛ پس از هر مقدار یک نقطه می‌ماند. چون سه مقدار متفاوت $(1, 2, 3)$ داریم، حداکثر ۳ نقطه باقی می‌ماند (مثلاً $(1,3), (2,2), (4,1)$).

۵) نمودار تابعی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ را رسم کنید:

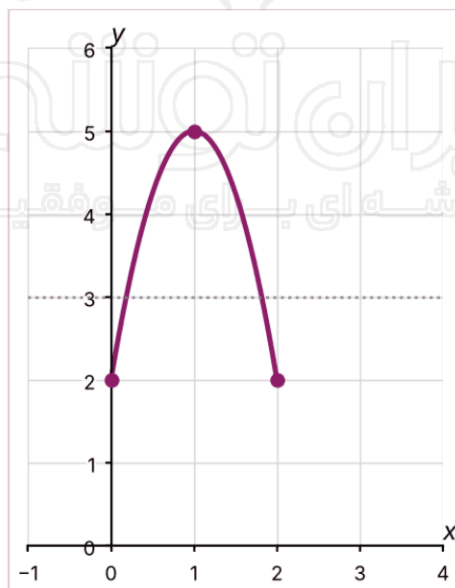
الف) به شرطی که این تابع یک به یک باشد.

ب) به شرطی که این تابع یک به یک نباشد.

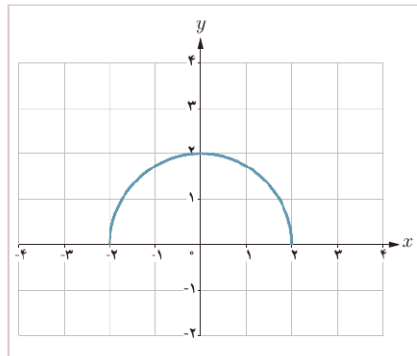
الف) پاره خط از $(0, 2)$ تا $(2, 5)$ (مثلاً $f(x) = 1.5x + 2$) یک به یک است و دامنه و برد خواسته شده را دارد:



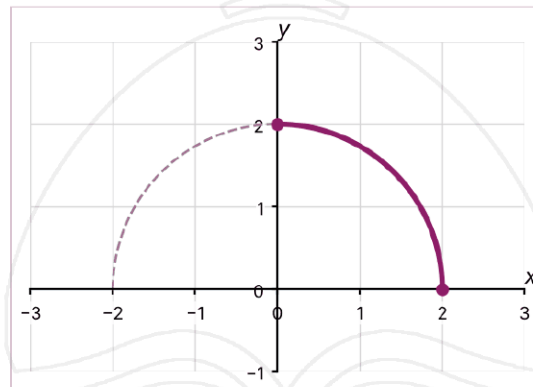
ب) نمودار سهمی $f(x) = 5 - 3(x - 1)^2$ روی $[0, 2]$ برد آن $[2, 5]$ است ولی $f(0) = f(2) = 2$ پس یک به یک نیست (پاسخ‌های دیگری نیز ممکن است):



۶) با حذف بخشی از نمودار نیم‌دایره داده‌شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص کنید.



نیم‌دایره (شعاع ۲) نسبت به محور y متقارن است و خط‌های افقی آن را در دو نقطه قطع می‌کنند. اگر نیمه سمت چپ ($x < 0$) را حذف کنیم، ربع‌دایره باقی‌مانده از $(0, 2)$ تا $(2, 0)$ نزولی و یک‌به‌یک است:



(حذف نیمه راست و نگه داشتن ربع‌دایره سمت چپ نیز پاسخ درست است.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x - 2$ ، آنگاه مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها (f/g) را به دست آورید و دامنه هر یک را مشخص کنید.

حل: $(f - g)(x) = \dots\dots (f/g)(x) = f(x)/g(x) = \dots\dots$

$$(f + g)(x) = (2x - 1) + (x - 2) = 3x - 3$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 1) - (x - 2) = 2x - 1 - x + 2 = x + 1: \text{تفاضل}$$

$$(f \cdot g)(x) = (2x - 1)(x - 2) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$D_{\{f+g\}} = D_{\{f-g\}} = D_{\{f \cdot g\}} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = (2x - 1)/(x - 2): \text{تقسیم}$$

$$D_{\{f/g\}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x \mid x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$



نمودار تابع f نشان می‌دهد که در هر ماه سال گذشته، چند هزار تومان جرم خریداری شده است؛ برای مثال $300 = f(\text{تیر})$. نمودار تابع g نشان می‌دهد این هنرمند در هر ماه سال گذشته چند هزار تومان ابزار و براق خریده است. نمودار تابع هزینه خرید علی در سال گذشته رسم شده است. این تابع را با c نشان می‌دهیم. (الف) بر روی شکل، درستی مقادیر تابع c را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید. (ب) آیا برای هر x در دامنه تابع c ، $c(x) = f(x) + g(x)$ درست است؟

مقادیر خوانده شده از نمودارها (هزار تومان):

ماه	دی	بهمن	اسفند
f (جرم)	450	450	0
g (ابزار و براق)	150	150	100
c (هزینه کل)	600	600	100
$f + g$	600	600	100

(الف) فصل زمستان دی، بهمن و اسفند است. در هر سه ماه $c = f + g$ برقرار است: $450 + 150 = 600$ ، $450 + 0 = 450$ ، $150 + 100 = 250$.

(ب) بله؛ هزینه کل هر ماه برابر مجموع هزینه جرم و هزینه ابزار و براق همان ماه است (درستی آن برای همه ۱۲ ماه سال با نمودارها بررسی می‌شود؛ مثلاً در تیر $300 + 300 = 600$). پس برای هر x در دامنه: $c(x) = f(x) + g(x)$.

۱) برای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 3x + 1$ و $g(x) = x - 3$ جدول داده شده را کامل کنید. (ستون‌ها: تابع، ضابطه، دامنه برای $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ ، f/g)

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$(f+g)(x) = x^2 + 4x - 2$	$\mathbb{R}$
$f - g$	$(f-g)(x) = x^2 + 2x + 4$	$\mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = (x^2 + 3x + 1)(x - 3) = x^3 - 8x - 3$	$\mathbb{R}$
f / g	$(f/g)(x) = (x^2 + 3x + 1)/(x - 3)$	$\mathbb{R} - \{3\}$

۲) برای دو تابع با ضابطه‌های $u(x) = \sqrt{x} + 1$ و $v(x) = x - 1$ جدول داده‌شده را کامل کنید. (ستون‌ها: تابع، ضابطه، دامنه برای $u/v, u \cdot v, u - v, u + v$)

$D_u = [0, +\infty)$ و $D_v = \mathbb{R}$ ؛ پس $D_u \cap D_v = [0, +\infty)$.

تابع	ضابطه	دامنه
$u + v$	$(u+v)(x) = \sqrt{x} + 1 + x - 1 = \sqrt{x} + x$	$[0, +\infty)$
$u - v$	$(u-v)(x) = (\sqrt{x} + 1) - (x - 1) = \sqrt{x} - x + 2$	$[0, +\infty)$
$u \cdot v$	$(u \cdot v)(x) = (\sqrt{x} + 1)(x - 1) = x\sqrt{x} - \sqrt{x} + x - 1$	$[0, +\infty)$
u / v	$(u/v)(x) = (\sqrt{x} + 1)/(x - 1)$	$[0, +\infty) - \{1\}$



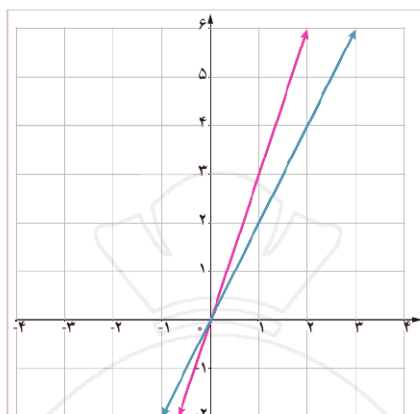
مطابق شکل، دو تابع f و g به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند.

الف) ضابطه دو تابع f و g را به دست آورید.

ب) ضابطه دو تابع $f + g$ و $f - g$ را به دست آورید.

پ) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع $f + g$ و $f - g$ را با رنگ‌های مختلف رسم کنید.

ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟



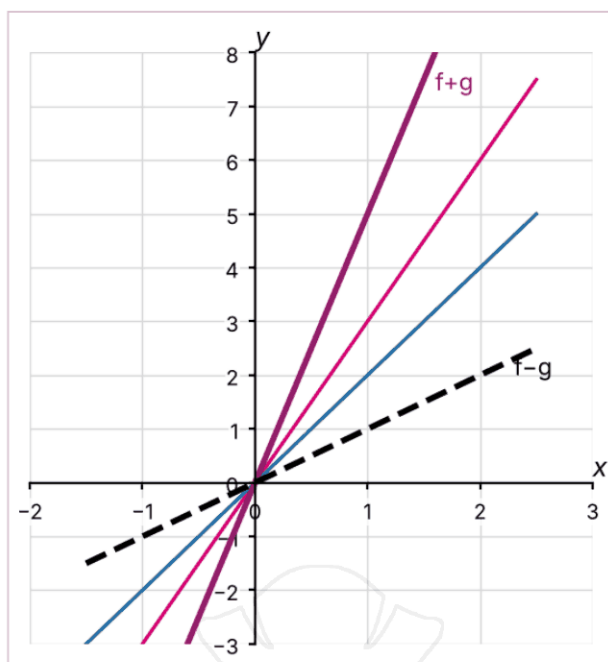
الف) هر دو خط از مبدأ می‌گذرند. خط قرمز از $(1, 3)$ و خط آبی از $(1, 2)$ می‌گذرد؛ پس

$$f(x) = 3x, \quad g(x) = 2x$$

ب) $(f - g)(x) = 3x - 2x = x$ ، $(f + g)(x) = 3x + 2x = 5x$

پ)

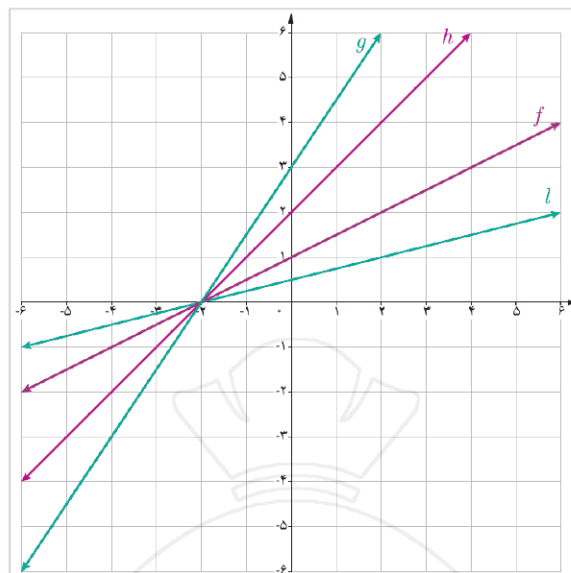
۱	۰	x
3	0	$f(x)$
2	0	$g(x)$
5	0	$(f + g)(x)$
1	0	$(f - g)(x)$



ت) بله؛ اگر $f(x) = ax + b$ و $g(x) = cx + d$ باشند، $(f + g)(x) = (a + c)x + (b + d)$ نیز تابعی خطی است. تفریق هم همین طور است: $(f - g)(x) = (a - c)x + (b - d)$ یک تابع خطی است. (ممکن است ضریب x صفر شود و تابع ثابت شود، مثلاً $x + (-x) = 0$.)

با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x) = (1/2)f(x)$. جاهای خالی را پر کنید.

$$f(x) \dots\dots h(x) = f(x) \dots\dots g(x) =$$



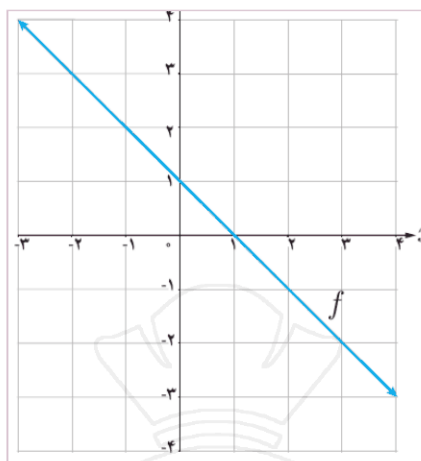
نمودارها همه از نقطه $(-2, 0)$ می‌گذرند. f از $(0, 1)$ می‌گذرد: $f(x) = (x + 2)/2$. عرض نقطه برخورد با محور y : برابر ۱، h برابر ۲ و g برابر ۳ است؛ پس عرض هر نقطه از f در ۲ (برای h) و در ۳ (برای g) ضرب شده است:

$$g(x) = 3 f(x) , h(x) = 2 f(x)$$

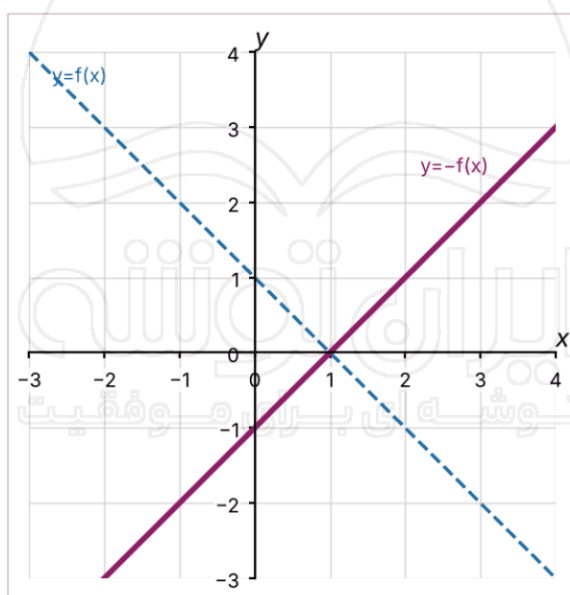
(بررسی: $g(x) = 3(x+2)/2$ در $x = 0$ برابر ۳ و $h(x) = x + 2$ در $x = 0$ برابر ۲ است.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- ۱) با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ را رسم کنید.
- ۲) عبارت زیر را کامل کنید. «برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ کافی است قرینه نمودار ضابطه $y = f(x)$ را نسبت به محور رسم کنیم.»

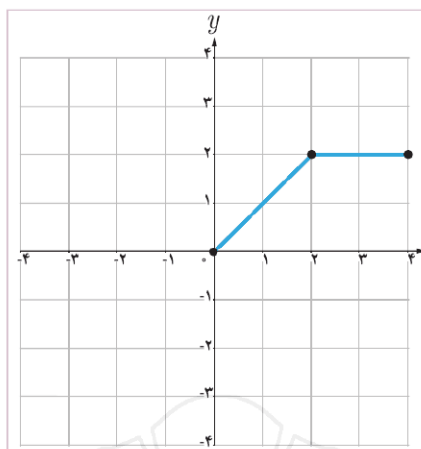


- ۱) نمودار f خطی است که از $(0, 1)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد ($f(x) = 1 - x$). عرض هر نقطه را قرینه می‌کنیم: $-f(x) = x - 1$ از $(1, 0)$ و $(0, -1)$ می‌گذرد.

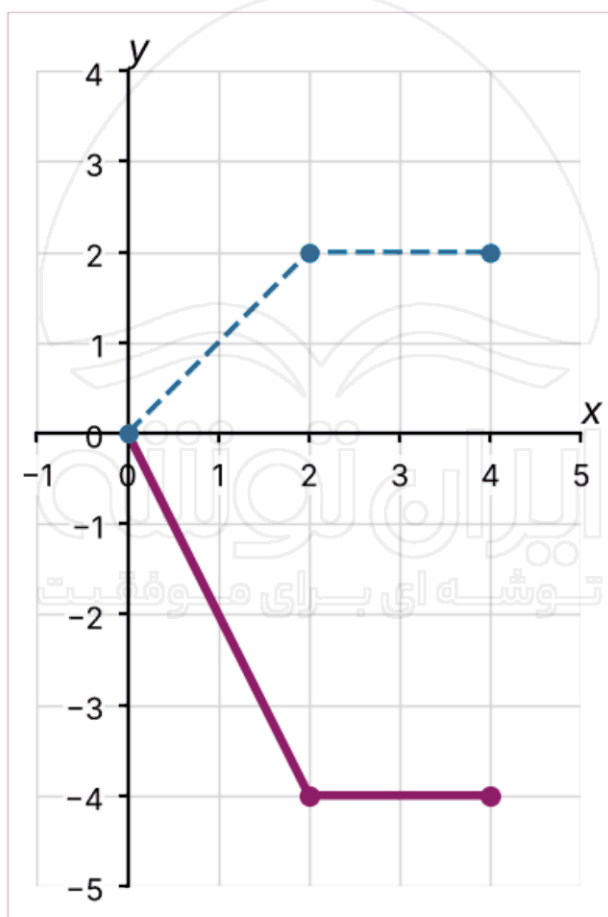


- ۲) «... قرینه نمودار ضابطه $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.»

۳) در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطه $y = -2f(x)$ را رسم کنید.



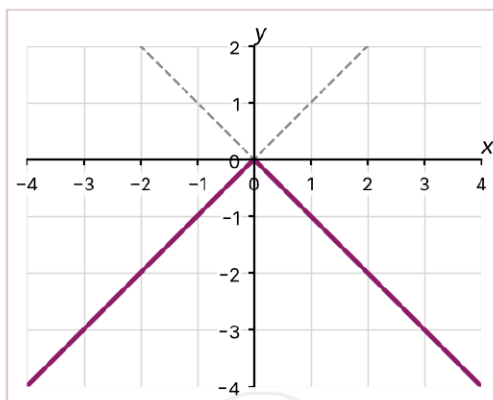
عرض هر نقطه را در -2 ضرب می‌کنیم: $(0,0) \rightarrow (0,0)$ ، $(2,2) \rightarrow (2,-4)$ و $(4,2) \rightarrow (4,-4)$



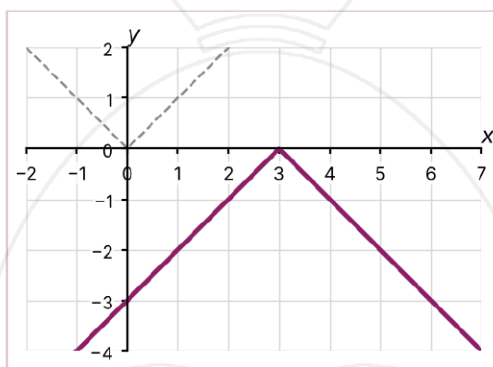
۱) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$ ب) $h(x) = -|x - 3|$ پ) $l(x) = 2|x - 2|$

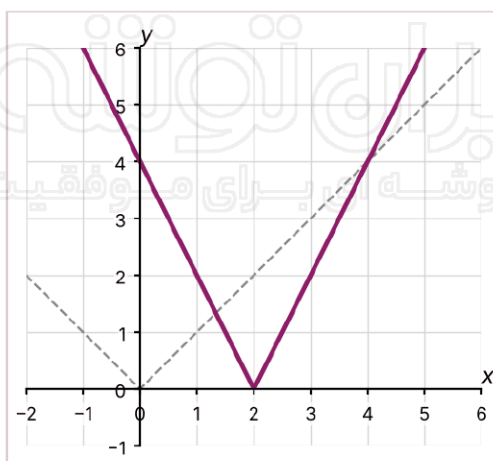
الف) قرینه $|x|$ نسبت به محور x ها (رأس در مبدأ، رو به پایین):



ب) $|x|$ را ۳ واحد به راست منتقل و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم (رأس $(3, 0)$):



پ) $|x|$ را ۲ واحد به راست منتقل و عرض‌ها را ۲ برابر می‌کنیم (رأس $(2, 0)$ ، رو به بالا و تندتر؛ $l(0) = 4$):



(خط چین، نمودار $|x|$ است.)

۲) در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $g(x) = x + 2$ ، $f(x) = x^2 - 4$ ب) $g(x) = 1/x$ ، $f(x) = |x|$

پ) $g(x) = x^2 + 3x - 10$ ، $f(x) = (x - 2)/(x + 5)$ ت) $g(x) = -\sqrt{x}$ ، $f(x) = \sqrt{x}$

ث) $g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\}$ ، $f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\}$

الف) $D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ ؛ $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ ، $D_f = \mathbb{R}$ (الف)

$(f/g)(x) = |x|/(1/x) = x|x|$ ، $(f \cdot g)(x) = |x|/x$ ، $(f-g)(x) = |x| - 1/x$ ، $(f+g)(x) = |x| + 1/x$ ○

دامنه هر چهار تابع: $\mathbb{R} - \{0\}$ ○

ب) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

○ $(f \cdot g)(x) = (x^2 - 4)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ، $(f-g)(x) = x^2 - x - 6$ ، $(f+g)(x) = x^2 + x - 2$ (دامنه $\mathbb{R}$)

○ $(f/g)(x) = (x^2 - 4)/(x + 2)$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-2\}$ (ساده شده: $x - 2$ ، ولی دامنه همان $\mathbb{R} - \{-2\}$ می ماند)

پ) $D_f = D_g = [0, +\infty)$

○ $(f \cdot g)(x) = -x$ ، $(f-g)(x) = 2\sqrt{x}$ ، $(f+g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ (دامنه $[0, +\infty)$)

○ $(f/g)(x) = \sqrt{x}/(-\sqrt{x}) = -1$ با دامنه $[0, +\infty) - \{0\} = (0, +\infty)$ (چون $g(0) = 0$)

ت) $D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$ ، $D_g = \mathbb{R}$ ، $D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$ ؛ $g(x) = (x+5)(x-2)$

○ $(f+g)(x) = (x-2)/(x+5) + x^2 + 3x - 10 = (x^3 + 8x^2 + 6x - 52)/(x+5)$

○ $(f-g)(x) = (x-2)/(x+5) - (x^2 + 3x - 10) = (-x^3 - 8x^2 - 4x + 48)/(x+5)$

○ $(f \cdot g)(x) = (x-2)/(x+5) \cdot (x+5)(x-2) = (x-2)^2$ ؛ دامنه این سه تابع: $\mathbb{R} - \{-5\}$

○ $(f/g)(x) = (x-2)/(x+5) \div (x^2 + 3x - 10) = 1/(x+5)^2$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$ (زیرا $g(x) = 0$ برای $x = -5$ و $x = 2$)

ث) $D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$ ؛ $D_g = \{-1, 0, 2, 3\}$ ، $D_f = \{0, 2, 3\}$

○ $f + g = \{(0, 1), (2, 9), (3, 4)\}$ (مثلاً $-2 + 3 = 1$)

○ $f - g = \{(0, -5), (2, 1), (3, 4)\}$

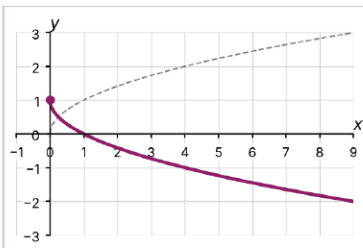
○ $f \cdot g = \{(0, -6), (2, 20), (3, 0)\}$

○ $f / g = \{(0, -2/3), (2, 5/4)\}$ (دامنه $\{0, 2\}$ است، چون $g(3) = 0$)

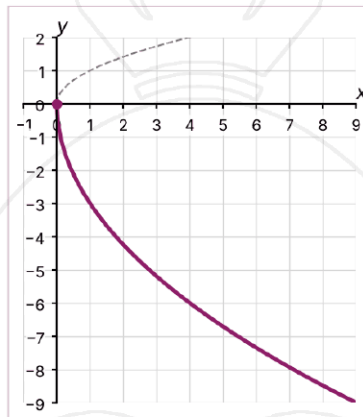
۳) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$ ب) $s(x) = -\sqrt{x-2}$ پ) $t(x) = -3\sqrt{x}$ ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$ ث) $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$

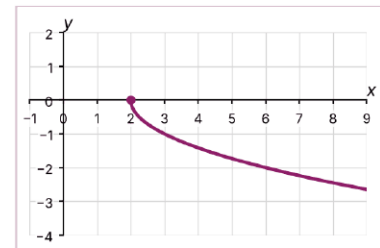
- الف) عرض هر نقطه $\sqrt{x}$ دو برابر می‌شود؛ از $(0,0)$ ، $(1,2)$ ، $(4,4)$.
- ب) $\sqrt{x}$ را ۲ واحد به راست می‌بریم و نسبت به محور x قرینه می‌کنیم؛ شروع از $(2,0)$ ، عبور از $(3,-1)$ و $(6,-2)$.
- پ) عرض‌ها را در -3 ضرب می‌کنیم؛ از $(0,0)$ ، $(1,-3)$ ، $(4,-6)$.
- ت) $-\sqrt{x}$ را یک واحد بالا می‌بریم؛ شروع از $(0,1)$ ، عبور از $(1,0)$ و $(4,-1)$.
- ث) $-\sqrt{x-3}$ را یک واحد بالا می‌بریم؛ شروع از $(3,1)$ ، عبور از $(4,0)$ و $(7,-1)$.



ت) u



پ) t

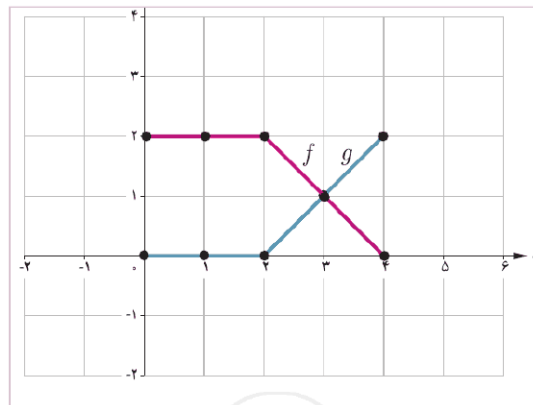


ب) s

(خط‌چین‌ها نمودار $\sqrt{x}$ هستند.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

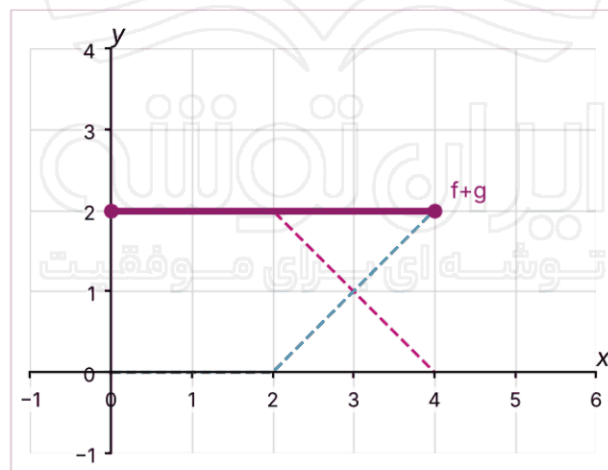
۴) در شکل مقابل، نمودار تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.



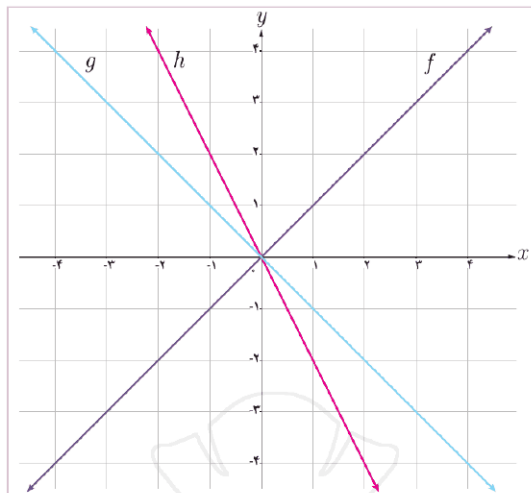
f : $(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$ و g : $(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 1), (4, 2)$. مقدار مجموع در هر نقطه:

۴	۳	۲	۱	۰	x
0	1	2	2	2	$f(x)$
2	1	0	0	0	$g(x)$
2	2	2	2	2	$(f + g)(x)$

نمودار $f + g$ پاره خطی افقی در ارتفاع ۲ از $x = 0$ تا $x = 4$ است $(f + g = 2)$:



۵) با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟

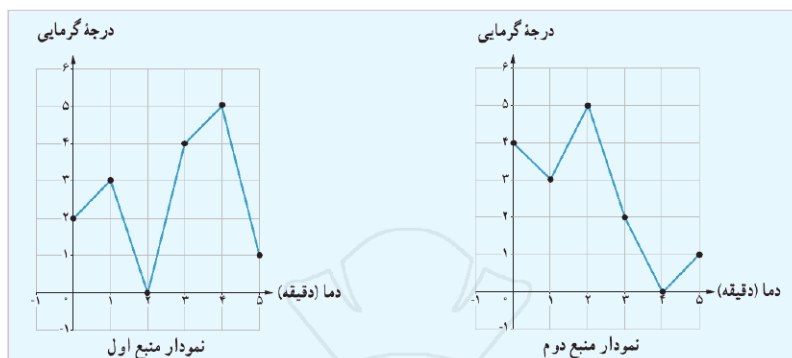


از نمودارها: $f(x) = x$ (خط صعودی)، $g(x) = -x$ ، $h(x) = -2x$ از $(1, -2)$ می‌گذرد.

$$f(x) + h(x) = x + (-2x) = -x = g(x)$$

پس تابع g برابر مجموع f و h است ($g = f + h$). (دو حالت دیگر برقرار نیستند: $f + g = 0$ و $g + h = -3x$).

یک اجاق دارای دو منبع گرمایی قابل تنظیم است که می‌توانند هم‌زمان، به‌طور مستقل و جدا از هم گرما تولید کنند. نمودار دمایی که این دو منبع گرمایی تولید می‌کنند، به‌صورت زیر است. این نمودارها نشان می‌دهد که در عرض ۵ دقیقه، چگونه مقدار دما افزایش یا کاهش می‌یابد. با توجه به نمودارهای زیر بیشترین و کمترین دمایی که در این اجاق تولید می‌شود چه مقدار است؟



دمای کل در هر لحظه، مجموع دمای دو منبع است:

۵	۴	۳	۲	۱	۰	زمان (دقیقه)
1	5	4	0	3	2	منبع اول
1	0	2	5	3	4	منبع دوم
2	5	6	5	6	6	مجموع

هر نمودار پاره‌خطی است و مجموع دو نمودار نیز بین نقاط گره‌ای خطی است، پس بیشترین و کمترین مقدار در همین نقاط رخ می‌دهد: بیشترین دما ۶ (در دقیقه‌های ۰، ۱ و ۳) و کمترین دما ۰ (در دقیقه ۵) است.

ریاضی ۲ یازدهم - فصل چهارم

مثلثات

فهرست

۱۴۵	صفحه ۷۲ · یادآوری — دایره مثلثاتی با ۲۴ قسمت	۱۲۱
۱۴۶	صفحه ۷۲ · فعالیت — رابطه زاویه و کمان (محیط دایره)	۱۲۲
۱۴۷	صفحه ۷۲ · فعالیت — کمانی به طول شعاع	۱۲۲
۱۴۸	صفحه ۷۳ · فعالیت — چند رادیان در دایره جا می‌گیرد؟	۱۲۳
۱۴۹	صفحه ۷۳ · فعالیت — اندازه یک رادیان در دایره‌های مختلف	۱۲۳
۱۵۰	صفحه ۷۳ · فعالیت — جدول طول کمان و زاویه	۱۲۴
۱۵۱	صفحه ۷۴ · کار در کلاس — رابطه زاویه، طول کمان و شعاع	۱۲۵
۱۵۲	صفحه ۷۴ · یادآوری — تبدیل رادیان به درجه (π و 180°)	۱۲۶
۱۵۳	صفحه ۷۵ · تکمیل — π رادیان و کسرهای آن	۱۲۷
۱۵۴	صفحه ۷۵ · کار در کلاس — تبدیل درجه به رادیان	۱۲۷
۱۵۵	صفحه ۷۵ · کار در کلاس — تبدیل درجه و رادیان با نسبت	۱۲۸
۱۵۶	صفحه ۷۵ · کار در کلاس — دایره مثلثاتی بر حسب رادیان	۱۲۹
۱۵۷	صفحه ۷۶ · خواندن — تبدیل رادیان به درجه با ماشین حساب	۱۳۰
۱۵۸	صفحه ۷۶ · فعالیت — ایستگاه فضایی بین‌المللی	۱۳۱
۱۵۹	صفحه ۷۶ · تمرین — تبدیل درجه به رادیان و نمایش روی دایره	۱۳۲
۱۶۰	صفحه ۷۶ · تمرین — تبدیل رادیان به درجه و نمایش روی دایره	۱۳۳
۱۶۱	صفحه ۷۶ · تمرین — زاویه $\pi/2$ رادیان	۱۳۳
۱۶۲	صفحه ۷۶ · تمرین — زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر	۱۳۴
۱۶۳	صفحه ۷۶ · تمرین — درستی یا نادرستی جمله‌ها	۱۳۴
۱۶۴	صفحه ۷۷ · فعالیت — علامت نسبت‌ها در ربع‌ها (جدول اول)	۱۳۵
۱۶۵	صفحه ۷۷ · فعالیت — علامت نسبت‌ها در ربع‌ها (جدول دوم)	۱۳۶
۱۶۶	صفحه ۷۸ · فعالیت — یافتن نسبت‌ها با داشتن سینوس	۱۳۷
۱۶۷	صفحه ۷۸ · فعالیت — یافتن نسبت‌ها با داشتن کتانژانت	۱۳۸
۱۶۸	صفحه ۷۸ · کار در کلاس — نسبت‌ها با داشتن کسینوس	۱۳۸
۱۶۹	صفحه ۷۸ · کار در کلاس — جدول نسبت‌های زاویه‌های خاص	۱۳۹
۱۷۰	صفحه ۷۹ · کار در کلاس — محاسبه عبارت‌های مثلثاتی (۱)	۱۴۰
۱۷۱	صفحه ۷۹ · فعالیت — نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه	۱۴۰
۱۷۲	صفحه ۷۹ · کار در کلاس — نسبت‌های مثلثاتی زاویه منفی $\pi/4$	۱۴۱
۱۷۳	صفحه ۸۰ · کار در کلاس — حاصل عبارت‌ها با زاویه‌های قرینه	۱۴۱
۱۷۴	صفحه ۸۰ · فعالیت — نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل	۱۴۲
۱۷۵	صفحه ۸۰ · کار در کلاس — مکمل زاویه‌ها	۱۴۲
۱۷۶	صفحه ۸۱ · کار در کلاس — نسبت‌های مثلثاتی زاویه $5\pi/6$	۱۴۳

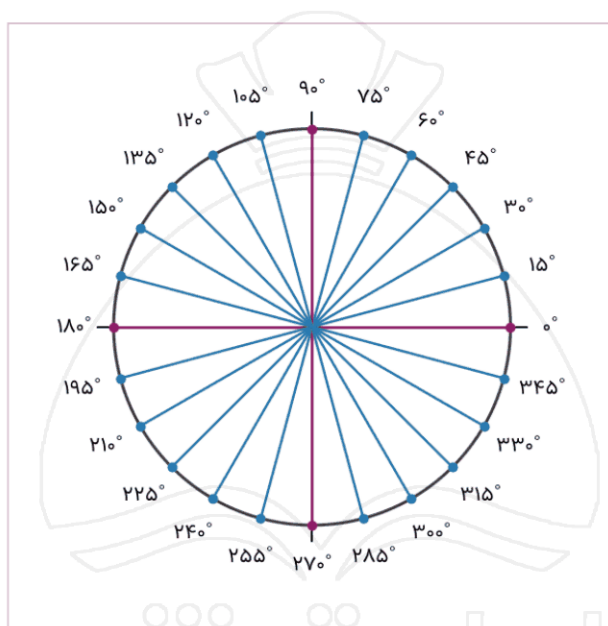
۱۵۹ ... ۱۹۸	صفحه ۸۹ · فعالیت — رسم تابع سینوس — وصل کردن نقطه‌ها
۱۶۰ ... ۱۹۹	صفحه ۸۹ · فعالیت — رسم تابع سینوس در نیمهٔ دوم دوره
۱۶۱ ۲۰۰	صفحه ۸۹ · فعالیت — رفتار تابع سینوس در یک دوره
۱۶۲ ... ۲۰۱	صفحه ۸۹ · فعالیت — تناوب تابع سینوس و تکرار نمودار
۱۶۳ ۲۰۲	صفحه ۹۰ · فعالیت — ویژگی‌های تابع سینوس
۱۶۳ ... ۲۰۳	صفحه ۹۰ · کار در کلاس — تطبیق ضابطه با نمودار (سینوس)
۱۶۴ ... ۲۰۴	صفحه ۹۱ · فعالیت — رسم تابع کسینوس — جدول و زوج‌های مرتب
۱۶۵ ... ۲۰۵	صفحه ۹۱ · فعالیت — رسم تابع کسینوس — مشخص کردن نقطه‌ها
۱۶۵ ... ۲۰۶	صفحه ۹۱ · فعالیت — رسم تابع کسینوس — نقطه‌های بیشتر
۱۶۶ ... ۲۰۷	صفحه ۹۲ · فعالیت — رسم تابع کسینوس — وصل کردن نقطه‌ها
۱۶۶ ... ۲۰۸	صفحه ۹۲ · فعالیت — رسم تابع کسینوس در نیمهٔ دوم دوره
۱۶۷ ۲۰۹	صفحه ۹۲ · فعالیت — رفتار تابع کسینوس در یک دوره
۱۶۷ ... ۲۱۰	صفحه ۹۲ · فعالیت — تناوب تابع کسینوس و تکرار نمودار
۱۶۸ ۲۱۱	صفحه ۹۳ · فعالیت — ویژگی‌های تابع کسینوس
۱۶۸ ... ۲۱۲	صفحه ۹۳ · کار در کلاس — رسم تابع‌ها با استفاده از نمودار کسینوس
۱۷۰ ۲۱۳	صفحه ۹۳ · تمرین — انطباق نمودار توابع
۱۷۰ ... ۲۱۴	صفحه ۹۳ · تمرین — رسم نمودار توابع در بازه‌های داده‌شده
۱۷۲ ۲۱۵	صفحه ۹۴ · تمرین — تشخیص ضابطهٔ نمودار
۱۷۳ ... ۲۱۶	صفحه ۹۴ · تمرین — درستی یا نادرستی گزاره‌ها دربارهٔ نمودارها
۱۷۴ ... ۲۱۷	صفحه ۹۴ · خواندنی — طول روز در ایران با تابع مثلثاتی
۱۴۳ ... ۱۷۷	صفحه ۸۱ · فعالیت — حاصل نسبت‌ها به کمک زاویهٔ مکمل
۱۴۴ ... ۱۷۸	صفحه ۸۱ · فعالیت — نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۱۰° درجه
۱۴۴ ... ۱۷۹	صفحه ۸۲ · کار در کلاس — نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $۷\pi/۶$
۱۴۵ ... ۱۸۰	صفحه ۸۲ · فعالیت — حاصل نسبت‌ها به کمک اختلاف π
۱۴۶ ۱۸۱	صفحه ۸۳ · فعالیت — زاویه‌های متمم
۱۴۷ ... ۱۸۲	صفحه ۸۳ · فعالیت — نسبت‌های زاویهٔ $۲\pi/۳$ به دو روش
۱۴۸ ... ۱۸۳	صفحه ۸۴ · کار در کلاس — نسبت‌های زاویهٔ ۱۳۵° درجه به دو روش
۱۴۹ ۱۸۴	صفحه ۸۵ · کار در کلاس — پرسش‌هایی با نقاله
۱۵۰ ... ۱۸۵	صفحه ۸۵ · فعالیت — زاویه‌های هم‌انته‌ها (۴۰۵° و ۴۵° درجه)
۱۵۱ ۱۸۶	صفحه ۸۶ · فعالیت — زاویهٔ $۵\pi/۳$ رادیان
۱۵۲ ۱۸۷	صفحه ۸۶ · کار در کلاس — زاویه‌های بزرگ‌تر از یک دور
۱۵۲ ۱۸۸	صفحه ۸۷ · خواندنی — کار با ماشین حساب (۱)
۱۵۳ ۱۸۹	صفحه ۸۷ · خواندنی — کار با ماشین حساب (۲)
۱۵۳ ۱۹۰	صفحه ۸۷ · تمرین — محاسبهٔ عبارت‌های مثلثاتی (۲)
۱۵۴ ... ۱۹۱	صفحه ۸۷ · تمرین — محاسبهٔ عبارت‌های مثلثاتی (۲)، ادامه
۱۵۵ ... ۱۹۲	صفحه ۸۷ · تمرین — جدول نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مختلف
۱۵۵ ۱۹۳	صفحه ۸۷ · تمرین — بررسی درستی تساوی‌ها
۱۵۶ ۱۹۴	صفحه ۸۷ · تمرین — یافتن زاویهٔ مناسب در تساوی‌ها
۱۵۷ ... ۱۹۵	صفحه ۸۸ · فعالیت — رسم تابع سینوس — جدول و زوج‌های مرتب
۱۵۸ ... ۱۹۶	صفحه ۸۸ · فعالیت — رسم تابع سینوس — مشخص کردن نقطه‌ها
۱۵۸ ... ۱۹۷	صفحه ۸۸ · فعالیت — رسم تابع سینوس — نقطه‌های بیشتر

شکل مقابل یک دایرهٔ مثلثاتی را نمایش می‌دهد که به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی زاویهٔ مناسب را روی شکل مشخص کنید.

محیط دایره ۳۶۰ درجه است و به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است؛ پس اندازهٔ هر قسمت برابر است با

$$360^\circ \div 24 = 15^\circ$$

زاویه‌ها از محور افقی (0°) و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، هر بار 15° بیشتر می‌شوند: 0° ، 15° ، 30° ، 45° ، 60° ، 75° ، 90° ، 105° ، 120° ، 135° ، 150° ، 165° ، 180° ، 195° ، 210° ، 225° ، 240° ، 255° ، 270° ، 285° ، 300° ، 315° و 330° ، 345° .



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱) یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخ را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط‌کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به دست آورید.

طول نخ، محیط دایره را مشخص می‌کند.

چون محیط دایره $C = 2\pi r$ است، شعاع از رابطه $r = C / (2\pi)$ به دست می‌آید.

نمونه: اگر نخ که دور در یک شیشه پیچیده شده 31.4 سانتی‌متر باشد، با فرض $\pi \approx 3.14$ خواهیم داشت:

$$r = 31.4 / (2 \times 3.14) = 5 \text{ cm}$$

این جواب ممکن است دقیق نباشد؛ عدهای نمونه به شیئی که انتخاب می‌کنید بستگی دارد.

۲) قطعه نخ را به اندازه شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطه A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطه B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\hat{AOB}$ را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه است؟

کمان AB هم‌طول شعاع است. اندازه‌گیری با نقاله نشان می‌دهد که زاویه مرکزی $\hat{AOB}$ تقریباً 57° درجه است (مقدار دقیق‌تر: 57.3°). این مقدار به اندازه شعاع دایره بستگی ندارد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳) دوباره این قطعه نخ را از نقطه B روی محیط دایره قرار دهید تا نقطه C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D، E، F و G روی محیط دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{B\hat{O}C}$ و $\widehat{C\hat{O}D}$ ، $\widehat{D\hat{O}E}$ ، $\widehat{E\hat{O}F}$ ، $\widehat{F\hat{O}G}$ با زاویه برابر و هر یک تقریباً درجه است. آیا دو نقطه G و A برهم منطبق می‌شوند؟ به این ترتیب ۶ زاویه مرکزی حاصل می‌شود که طول کمان روبه‌روی هر یک از آنها با دایره برابر است. به هر یک از این زاویه‌ها یک رادیان می‌گوییم.

هر یک از زاویه‌های $\widehat{B\hat{O}C}$ ، $\widehat{C\hat{O}D}$ ، $\widehat{D\hat{O}E}$ ، $\widehat{E\hat{O}F}$ و $\widehat{F\hat{O}G}$ با زاویه $\widehat{A\hat{O}B}$ برابر است (چون کمان روبه‌روی همه آنها به اندازه شعاع است) و هر یک تقریباً 57° درجه است.

آیا G و A برهم منطبق می‌شوند؟ خیر. شش کمان هم‌طول شعاع، روی هم $6r$ از محیط را می‌پوشانند، ولی محیط دایره $2\pi r \approx 6.28r$ است؛ بنابراین حدود $0.28r$ (یعنی حدود ۱۶ درجه) باقی می‌ماند و نقطه G کمی قبل از A قرار می‌گیرد.

طول کمان روبه‌روی هر یک از این زاویه‌ها با شعاع دایره برابر است.

در تمام دایره‌های زیر زاویه مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازه زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.

با اندازه‌گیری در هر سه دایره، زاویه ۱ رادیان تقریباً 57° درجه (دقیق‌تر $57,3^\circ$) به دست می‌آید. یعنی اندازه یک رادیان به شعاع دایره بستگی ندارد؛ زیرا در هر دایره طول کمان روبه‌روی زاویه با شعاع آن برابر است ($OA'' = A''B''$ ، $OA' = A'B'$ ، $OA = AB$) و شکل‌ها متشابه‌اند.

توشه ای برای موفقیت

(۴) جدول زیر را کامل کنید.

شکل	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
طول کمان AB_i ، $1 \leq i \leq 7$	r	$(3/2)r$	$2r$		$4r$		$6r$
اندازه زاویه $\angle AOB_i$	۱ رادیان	$3/2$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان		۵ رادیان	

زاویه مرکزی بر حسب رادیان برابر است با طول کمان تقسیم بر شعاع؛ پس $r \times \text{طول کمان} = \text{زاویه (رادیان)}$.
جدول کامل شده (خانه‌های پررنگ پاسخ‌اند):

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
طول کمان AB_i ، $1 \leq i \leq 7$	r	$(3/2)r$	$2r$	$3r$	$4r$	$5r$	$6r$
اندازه زاویه $\angle AOB_i$	۱ رادیان	$3/2$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۴ رادیان	۵ رادیان	۶ رادیان

با استفاده از رابطه بالا ($\alpha = l / r$) جدول زیر را کامل کنید:

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
.....	۵۰۰ سانتی متر		۲۰۰ سانتی متر	۹۰ سانتی متر	۵۰ متر	۱۰ متر		۱
۵ سانتی متر	۵ متر	۰/۵ متر	۱ متر		۱۰ متر		۲۰ سانتی متر	r
۱ رادیان		۱/۵ رادیان		۳ رادیان		۱۰ رادیان	۲۰ رادیان	α

طبق رابطه $\alpha = l / r$ (که در آن l و r هم واحدند) داریم $l = \alpha \cdot r$ و $r = l / \alpha$. هر ستون را جداگانه حل می‌کنیم (خانه‌های پررنگ پاسخ‌اند):

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
۵ سانتی متر	۵۰۰ سانتی متر	۰/۷۵ متر	۲۰۰ سانتی متر	۹۰ سانتی متر	۵۰ متر	۱۰ متر	۴۰۰ سانتی متر	۱
۵ سانتی متر	۵ متر	۰/۵ متر	۱ متر	۳۰ سانتی متر	۱۰ متر	متر ۱	۲۰ سانتی متر	r
۱ رادیان	رادیان ۱	۱/۵ رادیان	رادیان ۲	۳ رادیان	۵ رادیان	۱۰ رادیان	۲۰ رادیان	α

برای نمونه: ستون ۱: $l = 20 \times 20 = 400 \text{ cm}$ ؛ ستون ۳: $\alpha = 50 / 10 = 5$ ؛ ستون ۵: $\alpha = 200 \text{ cm} / 100 \text{ cm} = 2$ ؛ ستون ۶: $l = 1.5 \times 0.5 = 0.75 \text{ m}$.

می‌دانیم نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد $3/14$ است. حال جدول زیر را کامل کنید:

بنابراین، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نیم‌دایره برابر است با درجه یا رادیان. به عبارت دیگر اندازه زاویه نیم‌صفحه برابر است با رادیان. در نتیجه: $\pi/180^\circ$ رادیان = یک درجه

زاویه بر حسب رادیان	π	$3/14$	۳	۲	۱	۰/۵
زاویه بر حسب درجه	دقیقاً 180°	تقریباً	تقریباً	تقریباً	تقریباً 57°	تقریباً

چون ۱ رادیان تقریباً $57.3^\circ \approx 180^\circ/\pi$ است، هر زاویه بر حسب رادیان را در این عدد ضرب می‌کنیم:

زاویه بر حسب رادیان	π	$3/14$	۳	۲	۱	۰/۵
زاویه بر حسب درجه	دقیقاً 180°	تقریباً 179.9°	تقریباً 171.9°	تقریباً 114.6°	تقریباً 57°	تقریباً 28.6°

طول کمان نیم‌دایره πr و شعاع r است، پس زاویه مرکزی روبه‌رو به آن $\pi r / r = \pi$ رادیان است. بنابراین:

اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نیم‌دایره برابر است با **۱۸۰ درجه** یا **π رادیان**. به عبارت دیگر اندازه زاویه نیم‌صفحه برابر است با **π رادیان**.

و از $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ نتیجه می‌شود $1^\circ = \pi/180 \text{ rad}$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

به این ترتیب: $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ (با تقسیم بر ۲، ۳، ۴ و ۶ جاهای خالی را پر کنید)

$$\div 2 \rightarrow \dots \text{ rad} = 90^\circ$$

$$\div 3 \rightarrow \pi/3 = \dots^\circ$$

$$\div 4 \rightarrow \dots \text{ rad} = \dots^\circ$$

$$\div 6 \rightarrow \dots \text{ rad} = 30^\circ$$

$$\pi/2 \text{ rad} = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$$

$$\pi/3 \text{ rad} = 180^\circ \div 3 = 60^\circ$$

$$\pi/4 \text{ rad} = 180^\circ \div 4 = 45^\circ$$

$$\pi/6 \text{ rad} = 180^\circ \div 6 = 30^\circ$$

(۱) مطابق نمونه هریک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید.

نمونه: $30^\circ \rightarrow (\pi/180) \times 30 = \pi/6 \text{ rad}$

90°	45°	180°	6°	36°
.....				

برای تبدیل درجه به رادیان، عدد را در $\pi/180$ ضرب می‌کنیم:

درجه	عمل	رادیان
45°	$45 \times \pi/180$	$\pi/4$
90°	$90 \times \pi/180$	$\pi/2$
36°	$36 \times \pi/180$	$\pi/5$
6°	$60 \times \pi/180$	$\pi/3$
180°	$180 \times \pi/180$	π

(۲) حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید.

اگر D اندازه زاویه α بر حسب درجه و R اندازه زاویه α بر حسب رادیان باشد، آنگاه:

$$D / 180^\circ = R / \pi$$

۶	۵	۴	۳	۲	۱	
5°		24°		120°		D (درجه)
$\pi/36$	$\pi/7$		$2\pi/5$		$5\pi/4$	R (رادیان)

از رابطه $R = (\pi/180) \cdot D$ و $D = (180/\pi) \cdot R$ استفاده می‌کنیم (خانه‌های پررنگ پاسخ‌اند):

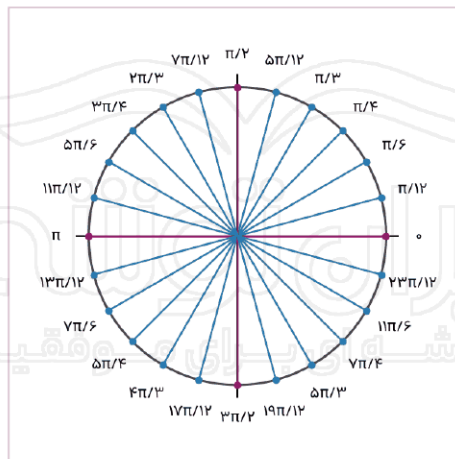
۶	۵	۴	۳	۲	۱	
5°	$180/7 \approx 25.7^\circ$	24°	72°	120°	225°	D (درجه)
$\pi/36$	$\pi/7$	$2\pi/15$	$2\pi/5$	$2\pi/3$	$5\pi/4$	R (رادیان)

برای نمونه $R = \pi \times 24/180 = 2\pi/15$ ، $D = 180 \times 2/5 = 72$ ، $R = \pi \times 120/180 = 2\pi/3$ ، $D = 180 \times 5/4 = 225$ و $D = 180/7$.

۳) در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویه مناسب را بر حسب رادیان مشخص کنید.

دایره به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده و هر قسمت $15^\circ = \pi/12 \text{ rad}$ است. پس زاویه‌ها از محور افقی و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، مضرب‌های $\pi/12$ هستند و پس از ساده‌کردن کسرها به صورت زیر درمی‌آیند:

درجه	رادیان	درجه	رادیان	درجه	رادیان
0°	0	120°	$2\pi/3$	240°	$4\pi/3$
15°	$\pi/12$	135°	$3\pi/4$	255°	$17\pi/12$
30°	$\pi/6$	150°	$5\pi/6$	270°	$3\pi/2$
45°	$\pi/4$	165°	$11\pi/12$	285°	$19\pi/12$
60°	$\pi/3$	180°	π	300°	$5\pi/3$
75°	$5\pi/12$	195°	$13\pi/12$	315°	$7\pi/4$
90°	$\pi/2$	210°	$7\pi/6$	330°	$11\pi/6$
105°	$7\pi/12$	225°	$5\pi/4$	345°	$23\pi/12$



حال مقدار تقریبی زاویه‌های زیر را مشابه نمونه با ماشین حساب به دست آورید.

نمونه: برای محاسبهٔ ۱ رادیان کافی است حاصل $1 \times (180/\pi)$ را به دست آوریم که تقریباً برابر با 57.3° است.

زاویه	مقدار تقریبی بر حسب درجه
۰/۵ رادیان	
۴/۵ رادیان	
۲ رادیان	
۳ رادیان	
۳/۱۴ رادیان	
$\pi/3$ رادیان	
$\pi/4$ رادیان	
π رادیان	

هر مقدار را در $180/\pi \approx 57.2958$ ضرب می‌کنیم:

زاویه (رادیان)	0.5	4/5 = 0.8	2	3	3.14	$\pi/3$	$\pi/4$	π
زاویه (درجه)	$\approx 28.6^\circ$	$\approx 45.8^\circ$	$\approx 114.6^\circ$	$\approx 171.9^\circ$	$\approx 179.9^\circ$	$= 60^\circ$	$= 45^\circ$	$= 180^\circ$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه A تا نقطه B که با مرکز زمین زاویه 45° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A به B پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

(۱) ابتدا زاویه مرکزی 45° را به رادیان تبدیل کنید.

(۲) شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با

(۳) طول کمان روبه‌روی $A'OB'$ با فرض $\pi = 3.14$ و با استفاده از رابطه $\alpha = l/r$ به طور تقریبی برابر است با:

$$\alpha = \angle AOB = 45^\circ \times \dots = \pi/4 \text{ rad}$$

$$l = \pi/4 \times \dots \approx 5338 \text{ km}$$

(۱) اندازه زاویه مرکزی AOB بر حسب رادیان:

$$\alpha = 45^\circ \times \pi/180 = \pi/4 \text{ rad}$$

(۲) شعاع مدار برابر است با شعاع زمین به علاوه ارتفاع ایستگاه از سطح زمین:

$$r = 6400 + 400 = 6800 \text{ km}$$

(۳) زاویه مرکزی $A'OB'$ همان $AOB = \pi/4$ است. از رابطه $\alpha = l/r$ داریم:

$$l = \alpha \cdot r = (\pi/4) \times 6800 \approx (3.14/4) \times 6800 = 5338 \text{ km}$$

پس ایستگاه فضایی در این مدت تقریباً **۵۳۳۸ کیلومتر** از مدار خود را می‌پیماید.

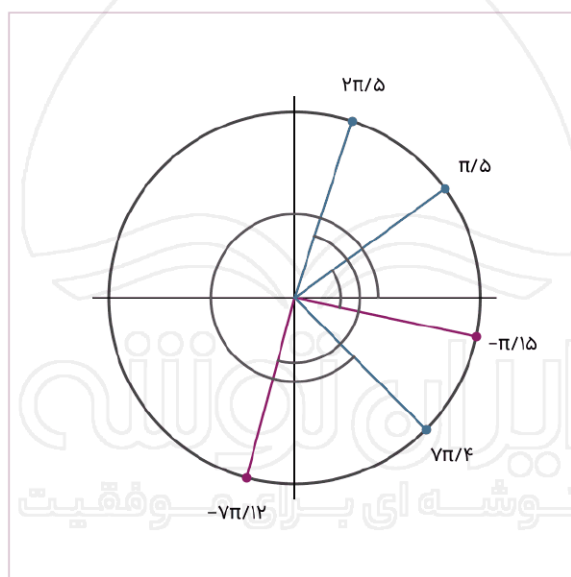


۱) هریک از زاویه‌های -12° ، 36° ، 72° ، -105° و 315° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

با ضرب هر زاویه در $\pi/180$

درجه	محاسبه	رادیان	ربع انتهایی کمان
-12°	$-12\pi/180$	$-\pi/15$	چهارم (جهت منفی)
36°	$36\pi/180$	$\pi/5$	اول
72°	$72\pi/180$	$2\pi/5$	اول
-105°	$-105\pi/180$	$-7\pi/12$	سوم (جهت منفی)
315°	$315\pi/180$	$7\pi/4$	چهارم

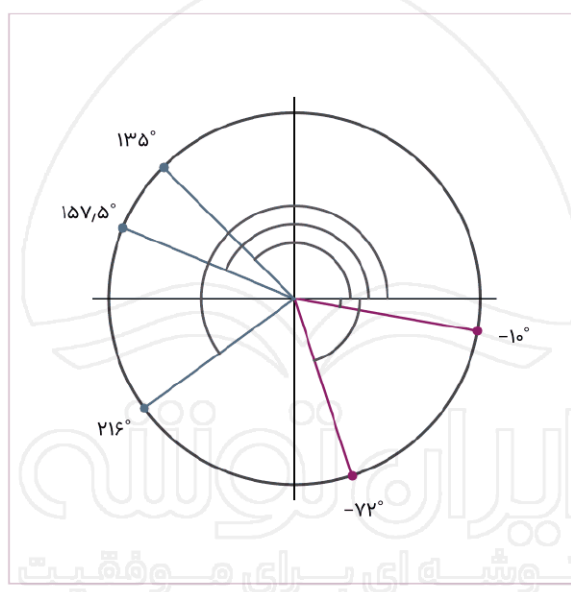
زاویه‌های مثبت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت و زاویه‌های منفی در جهت عقربه‌های ساعت از محور افقی رسم می‌شوند:



۲) هریک از زاویه‌های $-\pi/18$ رادیان، $-2\pi/5$ رادیان، $3\pi/4$ رادیان، $7\pi/8$ رادیان، $6\pi/5$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به طور تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

با ضرب هر زاویه در $180^\circ/\pi$

رادیان	محاسبه	درجه	ربع انتهایی کمان
$-\pi/18$	$-180/18$	-10°	چهارم (جهت منفی)
$-2\pi/5$	$-2 \times 180/5$	-72°	چهارم (جهت منفی)
$3\pi/4$	$3 \times 180/4$	135°	دوم
$7\pi/8$	$7 \times 180/8$	157.5°	دوم
$6\pi/5$	$6 \times 180/5$	216°	سوم



۳) زاویه D بر حسب درجه برابر با $\pi/20$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

$$D = (\pi/20) \times (180/\pi) = 180/20 = 9^\circ$$

پس این زاویه ۹ درجه است.

۴) دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

$$\alpha = l / r = 8 / 10 = 0.8 \text{ rad}$$

پس اندازه زاویه ۰٫۸ رادیان است (حدود ۴۵٫۸ درجه).

۵) درستی یا نادرستی هریک از جمله‌های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.
 الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک‌تر از اندازه هر یک از ساق‌های آن است.
 ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با $3/14$ سانتی‌متر است.
 پ) انتهای کمان زاویه $6\pi/5$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد.
 ت) زاویه‌های $2\pi/3$ رادیان، $\pi/9$ رادیان، $7\pi/36$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

الف) درست. یک رادیان تقریباً $57,3^\circ$ و کمتر از 60° است. زاویه بین دو ساق (زاویه رأس) $57,3^\circ$ است و زاویه‌های قاعده هر کدام $61,3^\circ \approx (180^\circ - 57,3^\circ)/2$ می‌شوند. در مثلث، ضلع روبه‌روی زاویه کوچک‌تر، کوچک‌تر است؛ پس قاعده (روبه‌روی $57,3^\circ$) از ساق‌ها (روبه‌روی $61,3^\circ$) کوچک‌تر است.

ب) درست. $l = \alpha \cdot r = \pi \times 1 = \pi \approx 3.14 \text{ cm}$.

پ) نادرست. $6\pi/5 = 216^\circ$ و چون $180^\circ < 216^\circ < 270^\circ$ (یعنی $3\pi/2 < 6\pi/5 < \pi$)، انتهای کمان در ربع سوم است.

ت) نادرست. مجموع زاویه‌های هر مثلث π رادیان است، ولی

$$2\pi/3 + \pi/9 + 7\pi/36 = (24\pi + 4\pi + 7\pi)/36 = 35\pi/36 \neq \pi$$

پس این سه زاویه، زاویه‌های یک مثلث نیستند.

(۱) جدول‌های زیر را مطابق نمونه کامل کنید. (جدول اول)

علامت نسبت مثلثاتی	α انتهای کمان روبه‌روی	α زاویه
$\tan \alpha > 0$	ربع اول	۷۵°
$\sin \alpha > 0$		۱۵°
$\cos \alpha < 0$		۲۱۰°
$\cot \alpha > 0$		۲۴۰°
$\tan \alpha < 0$		۲۸۵°

ابتدا ربع را از روی اندازه زاویه تعیین می‌کنیم (0° – 90° ربع اول، 90° – 180° ربع دوم، 180° – 270° ربع سوم، 270° – 360° ربع چهارم) و سپس علامت را از جدول صفحه ۷۷ می‌خوانیم:

علامت نسبت مثلثاتی	α انتهای کمان روبه‌روی	α زاویه
$\tan \alpha > 0$	ربع اول	۷۵°
$\sin \alpha > 0$	ربع دوم	۱۵°
$\cos \alpha < 0$	ربع سوم	۲۱۰°
$\cot \alpha > 0$	ربع سوم	۲۴۰°
$\tan \alpha < 0$	ربع چهارم	۲۸۵°

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱) (ادامه) جدول دوم را مطابق نمونه کامل کنید.

علامت نسبت مثلثاتی	α انتهای کمان روبه‌روی	α زاویه
$\cos \alpha < 0$	ربع دوم	$3\pi/4$ رادیان
$\sin \alpha > 0$		$4\pi/5$ رادیان
$\tan \alpha < 0$		$5\pi/3$ رادیان
$\cos \alpha > 0$		$5\pi/12$ رادیان
$\cot \alpha > 0$		$5\pi/4$ رادیان

با تبدیل به درجه یا مقایسه با: $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$

علامت نسبت مثلثاتی	α انتهای کمان روبه‌روی	α زاویه
$\cos \alpha < 0$	ربع دوم	$3\pi/4$ رادیان (135°)
$\sin \alpha > 0$	ربع دوم	$4\pi/5$ رادیان (144°)
$\tan \alpha < 0$	ربع چهارم	$5\pi/3$ رادیان (300°)
$\cos \alpha > 0$	ربع اول	$5\pi/12$ رادیان (75°)
$\cot \alpha > 0$	ربع سوم	$5\pi/4$ رادیان (225°)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲) اگر $\sin \alpha = -1/3$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \dots \rightarrow (\cos \alpha < 0) \rightarrow \cos \alpha = - \dots / \dots$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = \dots \rightarrow \tan \alpha = \dots$$

$$\cot \alpha = 1 / \tan \alpha = \dots \rightarrow \cot \alpha = 2\sqrt{2}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 1/9 = 8/9$$

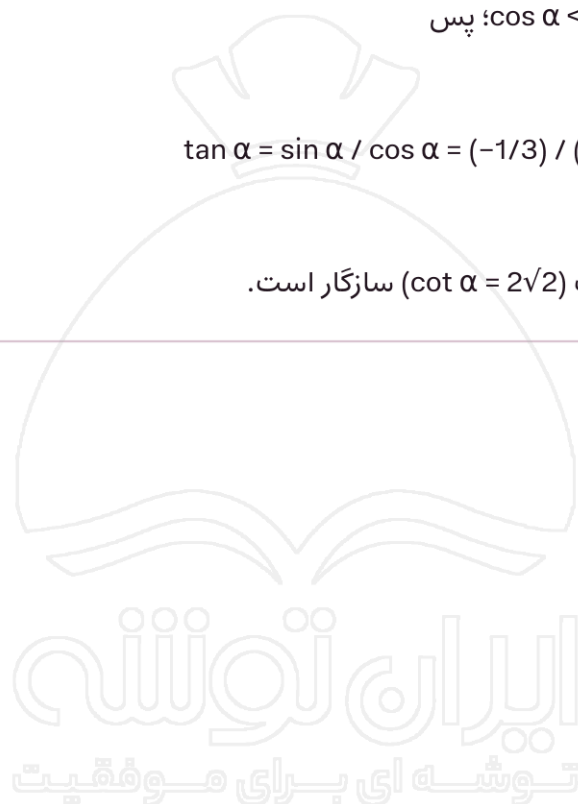
چون α در ربع سوم است، $\cos \alpha < 0$ ؛ پس

$$\cos \alpha = -\sqrt{(8/9)} = -2\sqrt{2}/3$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = (-1/3) / (-2\sqrt{2}/3) = 1/(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}/4$$

$$\cot \alpha = 1 / \tan \alpha = 2\sqrt{2}$$

که با مقدار داده‌شده در کتاب ($\cot \alpha = 2\sqrt{2}$) سازگار است.



۳) اگر $\cot \alpha = -2$ و $\cos \alpha > 0$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.
 حل: چون $\cos \alpha > 0$ و $\cot \alpha < 0$ لذا انتهای کمان α در ربع واقع است. بنابراین:

$$1/\sin^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha = \dots \rightarrow \sin^2 \alpha = \dots \rightarrow \sin \alpha = -1/\sqrt{5}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \dots \rightarrow \cos \alpha = \dots$$

$$\tan \alpha = 1/\cot \alpha \rightarrow \tan \alpha = \dots$$

چون $\cos \alpha > 0$ و $\cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha < 0$ ، پس $\sin \alpha < 0$ ؛ یعنی انتهای کمان α در ربع **چهارم** واقع است.
 بنابراین:

$$1/\sin^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + 4 = 5$$

$$\sin^2 \alpha = 1/5 \Rightarrow \sin \alpha = -1/\sqrt{5} = -\sqrt{5}/5$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 1/5 = 4/5$$

$$\cos \alpha = 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5 \quad (\cos \alpha > 0)$$

$$\tan \alpha = 1/\cot \alpha = -1/2$$

راستی‌آزمایی: $\cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha = (2/\sqrt{5})/(-1/\sqrt{5}) = -2$ که همان $\cot \alpha$ است.

۱) اگر $\cos x = -4/5$ و $\sin x > 0$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویه x را بیابید.

چون $\cos x < 0$ و $\sin x > 0$ ، زاویه x در ربع دوم است.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - 16/25 = 9/25 \Rightarrow \sin x = 3/5 \quad (\sin x > 0)$$

$$\tan x = \sin x / \cos x = (3/5) / (-4/5) = -3/4$$

$$\cot x = 1 / \tan x = -4/3$$

(۲) جدول زیر را کامل کنید.

2π (360°)	$3\pi/2$ (270°)	π (180°)	$\pi/2$ (90°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/6$ (30°)	$^\circ$ ($^\circ$)	α
0	-1			$\sqrt{3}/2$		1/2		$\sin \alpha$
.....		-1			$\sqrt{2}/2$		1	$\cos \alpha$
.....	تعریف نشده		تعریف نشده					$\tan \alpha$
.....				$\sqrt{3}/3$	1			$\cot \alpha$

مقدارهای زاویه‌های 30° ، 45° و 60° را از مثلث‌های قائم‌الزاویه و مقدارهای زاویه‌های محورها (نقطه‌های $(1,0)$ ، $(0,1)$ ، $(-1,0)$ ، $(0,-1)$ روی دایره مثلثاتی) را از تعریف $\sin \alpha = y$ و $\cos \alpha = x$ به دست می‌آوریم. «تعریف نشده» یعنی مخرج صفر است.

2π (360°)	$3\pi/2$ (270°)	π (180°)	$\pi/2$ (90°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/6$ (30°)	$^\circ$ ($^\circ$)	α
0	-1	0	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$\sin \alpha$
1	0	-1	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\cos \alpha$
0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$\tan \alpha$
تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	$\cot \alpha$

۳) حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\cot \pi/6 - \tan \pi/3 \times \sin \pi/4 = (\text{الف})$$

$$(\tan^2(\pi/6) + \sin^2(\pi/4)) / (\cot^2(\pi/4) - \cos^2(\pi/3)) + \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ = (\text{ب})$$

$$\sin \pi/4 = \sqrt{2}/2; \tan \pi/3 = \sqrt{3}, \cot \pi/6 = \sqrt{3} \quad (\text{الف})$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{2}/2 = \sqrt{3} - \sqrt{6}/2 = (2\sqrt{3} - \sqrt{6})/2$$

$$\cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ = 1; \cos^2(\pi/3) = 1/4, \cot^2(\pi/4) = 1, \sin^2(\pi/4) = 1/2, \tan^2(\pi/6) = 1/3 \quad (\text{ب})$$

$$(1/3 + 1/2) / (1 - 1/4) + 1 = (5/6) / (3/4) + 1 = 10/9 + 1 = 19/9$$

دو زاویه α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha = 30^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه -30° در مثلث $OP'H$ عبارت‌اند از:

$$\sin(-30^\circ) = -y/r = -\sin 30^\circ = -1/2$$

$$\cos(-30^\circ) = \dots\dots = \dots\dots = \sqrt{3}/2$$

$$\tan(-30^\circ) = -y/x = \dots\dots = \dots\dots$$

$$\cot(-30^\circ) = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$$

نقطه $P'(x, -y)$ قرینه $P(x, y)$ نسبت به محور افقی است و: $r = 1$

$$\cos(-30^\circ) = x/r = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\tan(-30^\circ) = -y/x = -\tan 30^\circ = -\sqrt{3}/3$$

$$\cot(-30^\circ) = x/(-y) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

در حالت کلی: $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

(۱) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\pi/4$ - رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

نمونه:

$$\sin(-\pi/4) = -\sin \pi/4$$

$$\sin(-\pi/4) = -\sin \pi/4 = -\sqrt{2}/2$$

$$\cos(-\pi/4) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$$

$$\tan(-\pi/4) = -\tan \pi/4 = -1$$

$$\cot(-\pi/4) = -\cot \pi/4 = -1$$

(۲) حاصل هریک از عبارتهای زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\text{الف) } (\cos(-90^\circ) + \sin(-270^\circ)) / (\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)) =$$

$$\text{ب) } \cot(-\pi/6) + \tan(-\pi/3) =$$

$$\text{پ) } \cos(-45^\circ) \times \cos(-60^\circ) + \sin(-45^\circ) \times \sin(-60^\circ) =$$

نمونه:

$$\cot(-\pi/3) \times \cos(-\pi/6) + \tan(-\pi/4) = -\cot \pi/3 \times \cos \pi/6 - \tan \pi/4 = -(\sqrt{3}/3) \times (\sqrt{3}/2) - 1 = -3/2$$

الف) با استفاده از $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ و $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$:

$$\cos(-90^\circ) = \cos 90^\circ = 0, \quad \sin(-270^\circ) = -\sin 270^\circ = -(-1) = 1$$

$$\sin(-180^\circ) = -\sin 180^\circ = 0, \quad \cos(-360^\circ) = \cos 360^\circ = 1$$

$$(0 + 1) / (0 - 1) = -1$$

ب)

$$\cot(-\pi/6) + \tan(-\pi/3) = -\cot \pi/6 - \tan \pi/3 = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

پ)

$$\cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ = (\sqrt{2}/2)(1/2) + (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) = \sqrt{2}/4 + \sqrt{6}/4 = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$$

دو زاویه α و β را مکمل گوئیم؛ هرگاه مجموع آنها 180° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویه 30° و 150° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویه $\pi/3$ رادیان و $2\pi/3$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایره مثلثاتی زیر اگر $\alpha = 30^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'' و انتهای کمان زاویه 150° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 150° عبارت‌اند از:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = y = \sin 30^\circ = 1/2$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -x = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan 150^\circ = \dots = \dots$$

$$\cot 150^\circ = \dots = \dots$$

چرا $\pi/3$ و $2\pi/3$ مکمل‌اند؟ زیرا $\pi/3 + 2\pi/3 = \pi$ است.

نقطه $P''(-x, y)$ قرینه $P(x, y)$ نسبت به محور عمودی است، پس:

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\sqrt{3}/3$$

$$\cot 150^\circ = \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

در حالت کلی: $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ ، $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ ، $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ ، $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$.

توشه ای برای موفقیت

۱) مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید: الف) 75° ب) -25° پ) $\pi/12$ رادیان ت) $-\pi/4$ رادیان

مکمل زاویه α برابر $180^\circ - \alpha$ (یا $\pi - \alpha$) است:

$$180^\circ - 75^\circ = 105^\circ \text{ (الف)}$$

$$180^\circ - (-25^\circ) = 205^\circ \text{ (ب)}$$

$$\pi - \pi/12 = 11\pi/12 \text{ (پ)}$$

$$\pi - (-\pi/4) = 5\pi/4 \text{ (ت)}$$

۲) نسبت‌های مثلثاتی زاویه $5\pi/6$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\sin 5\pi/6 = \sin(\pi - \pi/6) = \sin \pi/6 = 1/2$$

$$\cos 5\pi/6 = \dots\dots$$

$$\tan 5\pi/6 = \dots\dots$$

$$\cot 5\pi/6 = \dots\dots$$

$$\cos 5\pi/6 = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos \pi/6 = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan 5\pi/6 = \tan(\pi - \pi/6) = -\tan \pi/6 = -\sqrt{3}/3$$

$$\cot 5\pi/6 = \cot(\pi - \pi/6) = -\cot \pi/6 = -\sqrt{3}$$

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan 2\pi/3 = \tan(\pi - \pi/3) = -\tan \pi/3 = -\sqrt{3}$$

$$\cos 3\pi/4 = \cos(\dots\dots) = \dots\dots$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - \dots\dots) = \dots\dots = \dots\dots$$

$$\cot(-120^\circ) = -\cot(\dots\dots) = -\cot(180^\circ - \dots\dots) = \dots\dots$$

$$\cos(135^\circ) = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$$

$$\cos 3\pi/4 = \cos(\pi - \pi/4) = -\cos \pi/4 = -\sqrt{2}/2$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\cot(-120^\circ) = -\cot 120^\circ = -\cot(180^\circ - 60^\circ) = -(-\cot 60^\circ) = \cot 60^\circ = \sqrt{3}/3$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 210° را به دست آورید. انتهای کمان زاویه 210° در ربع سوم واقع است. در ضمن 30° $210^\circ = 180^\circ +$ ، یعنی اختلاف دو زاویه 210° و 30° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha = 30^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P''' ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 210° عبارت‌اند از:

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -y = -\sin 30^\circ = -1/2$$

$$\cos 210^\circ = \dots = -x = \dots$$

$$\tan 210^\circ = \sin 210^\circ / \cos 210^\circ = \dots$$

$$\cot 210^\circ = \dots = \dots$$

نقطه $P'''(-x, -y)$ قرینه $P(x, y)$ نسبت به مبدأ مختصات است:

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -x = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan 210^\circ = \sin 210^\circ / \cos 210^\circ = (-1/2) / (-\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$$

$$\cot 210^\circ = 1 / \tan 210^\circ = \sqrt{3}$$

در حالت کلی: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ ، $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ ، $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ ، $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$.

سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $7\pi/6$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.

$$\sin 7\pi/6 = \sin(\pi + \pi/6) = -\sin \pi/6 = -1/2$$

$$\cos 7\pi/6 = \cos(\pi + \pi/6) = -\cos \pi/6 = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan 7\pi/6 = \tan(\pi + \pi/6) = \tan \pi/6 = \sqrt{3}/3$$

$$\cot 7\pi/6 = \cot(\pi + \pi/6) = \cot \pi/6 = \sqrt{3}$$

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

$$\tan 225^\circ = \dots\dots$$

$$\cos(-4\pi/3) = \cos \dots\dots = \cos(\pi + \dots\dots) = \dots\dots = \dots\dots$$

$$\sin(-7\pi/6) = \dots\dots$$

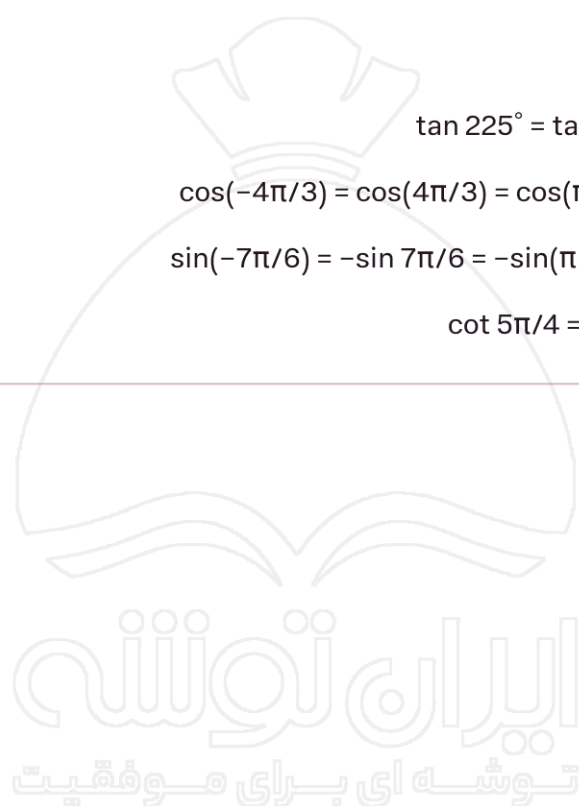
$$\cot(5\pi/4) = \dots\dots$$

$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cos(-4\pi/3) = \cos(4\pi/3) = \cos(\pi + \pi/3) = -\cos \pi/3 = -1/2$$

$$\sin(-7\pi/6) = -\sin 7\pi/6 = -\sin(\pi + \pi/6) = -(-\sin \pi/6) = 1/2$$

$$\cot 5\pi/4 = \cot(\pi + \pi/4) = \cot \pi/4 = 1$$



زاویه‌ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد. برای چنین زاویه‌ای داریم:
همچنین زاویه و $\pi/2$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین:

$$\sin \dots = \cos \dots = \dots$$

$$\tan \dots = \cot \dots = \dots$$

$$\sin \pi/2 = \cos \dots = \dots$$

$$\tan \pi/2 = \cot \dots = \dots$$

اگر زاویه‌ای با متمم خودش برابر باشد، $\alpha = 90^\circ - \alpha$ و در نتیجه $\alpha = 45^\circ = \pi/4$ است:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

زاویه ۰ (صفر) نیز با $\pi/2$ رادیان متمم است ($0 + \pi/2 = \pi/2$). بنابراین:

$$\sin \pi/2 = \cos 0 = 1$$

$\tan \pi/2$ و $\cot 0$ هر دو تعریف نشده‌اند (مخرج صفر).

در حالت کلی: $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$ ، $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$ ، $\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha$ ، $\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan \alpha$.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $2\pi/3$ رادیان را به دست آورید. چون انتهای کمان زاویه $2\pi/3$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

روش اول - زاویه $2\pi/3$ رادیان و $\pi/3$ رادیان مکمل یکدیگرند؛ یعنی $2\pi/3 = \pi - \pi/3$. بنابراین (جاهای خالی را کامل کنید).

روش دوم - اختلاف دو زاویه $2\pi/3$ رادیان و $\pi/6$ رادیان برابر با $\pi/2$ رادیان است؛ یعنی $2\pi/3 = \pi/2 + \pi/6$. بنابراین با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم (جاهای خالی را کامل کنید).

روش اول (مکمل: $2\pi/3 = \pi - \pi/3$):

$$\sin 2\pi/3 = \sin(\pi - \pi/3) = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 2\pi/3 = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos \pi/3 = -1/2$$

$$\tan 2\pi/3 = \tan(\pi - \pi/3) = -\tan \pi/3 = -\sqrt{3}$$

$$\cot 2\pi/3 = \cot(\pi - \pi/3) = -\cot \pi/3 = -\sqrt{3}/3$$

روش دوم ($2\pi/3 = \pi/2 + \pi/6$):

$$\sin 2\pi/3 = \sin(\pi/2 + \pi/6) = \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 2\pi/3 = \cos(\pi/2 + \pi/6) = -\sin \pi/6 = -1/2$$

$$\tan 2\pi/3 = \tan(\pi/2 + \pi/6) = -\cot \pi/6 = -\sqrt{3}$$

$$\cot 2\pi/3 = \cot(\pi/2 + \pi/6) = -\tan \pi/6 = -\sqrt{3}/3$$

هر دو روش یک نتیجه می‌دهند. در حالت کلی: $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha$ ، $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin \alpha$ ، $\tan(\pi/2 + \alpha) = -\cot \alpha$ ، $\cot(\pi/2 + \alpha) = -\tan \alpha$.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 135° را به دو روش به دست آورید.

روش اول (مکمل، $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$):

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2, \quad \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

$$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1, \quad \cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1$$

روش دوم ($135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$):

$$\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

$$\tan 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1, \quad \cot 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$



به کمک نقاله سؤال‌های زیر را پاسخ دهید:

- (۱) سینوس کدام دو زاویه برابر است؟ (مثلاً $\sin 10^\circ = \sin 170^\circ$)
- (۲) اختلاف کدام دو زاویه $\pi/2$ رادیان $= 90^\circ$ می‌شود؟ نسبت‌های مثلثاتی یک نمونه را به دست آورید.
- (۳) آیا دو زاویه می‌توان یافت که دارای کسینوس یکسان باشند؟ چرا؟
- (۴) نسبت‌های مثلثاتی زاویه 180° را از روی مکمل آن بیابید.
- (۵) نسبت‌های مثلثاتی زاویه 135° را از روی مکمل آن بیابید.

(۱) سینوس دو زاویه مکمل با هم برابر است $(\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha)$ ؛ مثلاً $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$ ، $\sin 45^\circ = \sin 135^\circ$ ، $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$ ، $\sin 80^\circ = \sin 100^\circ$.

(۲) دو زاویه‌ای که اختلافشان 90° است؛ مثلاً 30° و 120° . با $120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$:

$$\sin 120^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2, \quad \cos 120^\circ = -\sin 30^\circ = -1/2$$

$$\tan 120^\circ = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}, \quad \cot 120^\circ = -\tan 30^\circ = -\sqrt{3}/3$$

(۳) بله. دو زاویه قرینه (α و $-\alpha$) کسینوس برابر دارند، زیرا نقطه‌های انتهای کمانشان نسبت به محور افقی قرینه‌اند و طول (x) یکسان دارند؛ مثلاً $\cos 60^\circ = \cos(-60^\circ) = \cos 300^\circ = 1/2$. همچنین $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

(۴) مکمل 180° برابر 0° است:

$$\sin 180^\circ = \sin 0^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -\cos 0^\circ = -1$$

$$\tan 180^\circ = -\tan 0^\circ = 0$$

و $\cot 180^\circ$ تعریف نشده است (چون $\cot 0^\circ$ تعریف نشده است).

(۵) مکمل 135° برابر 45° است:

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2, \quad \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

$$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1, \quad \cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1$$

برای رسم چنین زاویه‌ای (مانند 405°) ابتدا در جهت مثلثاتی یک دور کامل را طی می‌کنیم؛ سپس ادامهٔ زاویه را که به اندازهٔ 45° است رسم می‌کنیم. در این حالت دو زاویهٔ 405° و 45° را هم‌انتهای می‌نامیم. دو زاویهٔ α و β را هم‌انتهای گوئیم؛ هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود. اگر دو زاویه هم‌انتهای باشند، اختلاف آنها مضرب زوجی از π رادیان یا 180° است. مثلاً زاویه‌های 405° و 45° هم‌انتهای هستند؛ زیرا $405^\circ - 45^\circ = 360^\circ$. در این حالت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 405° و 45° یکسان‌اند. چون انتهای کمان زاویهٔ 45° در ربع اول است، بنابراین:

$$\sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \dots$$

$$\cos 405^\circ = \dots = \dots = \dots$$

$$\tan 405^\circ = \dots = \dots = \dots$$

$$\cot 405^\circ = \dots = \dots = \dots$$

$$\sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\tan 405^\circ = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

حال همین بررسی را روی زاویه $5\pi/3$ رادیان انجام دهید؛ چون $5\pi/3 = 2\pi - \pi/3$ بنابراین دو زاویه و $5\pi/3$ رادیان هم‌انتهای هستند (شکل سمت راست). چون انتهای کمان زاویه $5\pi/3$ رادیان در ربع چهارم است؛ بنابراین نسبت‌های مثلثاتی آن را بیابید.

$$\sin 5\pi/3 = \sin(2\pi - \pi/3) = \sin(-\pi/3) = \dots$$

$$\cos 5\pi/3 = \dots$$

$$\tan 5\pi/3 = \dots$$

$$\cot 5\pi/3 = \dots$$

$5\pi/3 = 2\pi - \pi/3 = 2\pi + (-\pi/3)$ ؛ پس دو زاویه $5\pi/3$ و $-\pi/3$ رادیان هم‌انتهای هستند (اختلافشان 2π است).

$$\sin 5\pi/3 = \sin(2\pi - \pi/3) = \sin(-\pi/3) = -\sin \pi/3 = -\sqrt{3}/2$$

$$\cos 5\pi/3 = \cos(-\pi/3) = \cos \pi/3 = 1/2$$

$$\tan 5\pi/3 = \tan(-\pi/3) = -\tan \pi/3 = -\sqrt{3}$$

$$\cot 5\pi/3 = \cot(-\pi/3) = -\cot \pi/3 = -\sqrt{3}/3$$

در حالت کلی برای هر عدد صحیح k : $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$, $\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$, $\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$ و $\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$, $\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$, $\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مطابق نمونه هریک از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر را مشخص کنید. (شکل سمت راست)

$$\cos(-7\pi/4) \quad (۶) \quad \sin 11\pi/4 \quad (۵) \quad \cot(-330^\circ) \quad (۴) \quad \tan(-225^\circ) \quad (۳) \quad \sin 420^\circ \quad (۲) \quad \cos 300^\circ \quad (۱)$$

نمونه:

$$\sin 750^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2$$

$$\tan(-315^\circ) = -\tan(315^\circ) = -\tan(360^\circ - 45^\circ) = -(-\tan 45^\circ) = \dots = -1$$

$$\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2 \quad (۱)$$

$$\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 \quad (۲)$$

$$\tan(-225^\circ) = -\tan 225^\circ = -\tan(180^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1 \quad (۳)$$

$$\cot(-330^\circ) = -\cot 330^\circ = -\cot(360^\circ - 30^\circ) = -(-\cot 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3} \quad (۴)$$

$$\sin 11\pi/4 = \sin(2\pi + 3\pi/4) = \sin 3\pi/4 = \sin(\pi - \pi/4) = \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2 \quad (۵)$$

$$\cos(-7\pi/4) = \cos 7\pi/4 = \cos(2\pi - \pi/4) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2 \quad (۶)$$

با استفاده از ماشین حساب مطابق نمونه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\pi/8$ رادیان و $3\pi/8$ رادیان را به طور

تقریبی بیابید. (ماشین حساب باید در حالت رادیان باشد). نمونه: $\sin 3\pi/8 = \cos \pi/8 \approx 0.9239$

چون $\pi/8 + 3\pi/8 = \pi/2$ ، این دو زاویه متمم‌اند. با ماشین حساب (در حالت رادیان):

زاویه	sin	cos	tan	cot
$\pi/8$ رادیان ($22,5^\circ$)	≈ 0.3827	≈ 0.9239	≈ 0.4142	≈ 2.4142
$3\pi/8$ رادیان ($67,5^\circ$)	≈ 0.9239	≈ 0.3827	≈ 2.4142	≈ 0.4142

حاصل هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را با ماشین حساب به طور تقریبی به دست آورید. $\tan$ و $\cos 105^\circ$ و $\tan 170^\circ$ و $\tan 3\pi/4$ و $\cos 5\pi/9$ و $\sin \pi/15$ و 20°

نسبت	مقدار تقریبی
$(12^\circ) \sin \pi/15$	≈ 0.2079
$\cos 105^\circ$	≈ -0.2588
$\tan 20^\circ$	≈ 0.3640
$(100^\circ) \cos 5\pi/9$	≈ -0.1736
$(135^\circ) \tan 3\pi/4$	$= -1$
$\tan 170^\circ$	≈ -0.1763

(برای نسبت‌های با زاویه درجه، ماشین حساب را در حالت درجه و برای نسبت‌های با زاویه رادیان، در حالت رادیان قرار دهید.)

۱) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sin 630^\circ + \tan(-540^\circ) = (\text{پ}) \quad \cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ) = (\text{ب}) \quad \tan 135^\circ + \cot 120^\circ = (\text{الف})$$

(الف)

$$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1, \quad \cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\sqrt{3}/3$$

$$\tan 135^\circ + \cot 120^\circ = -1 - \sqrt{3}/3 = -(3 + \sqrt{3})/3$$

(ب)

$$\cos(-210^\circ) = \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2, \quad \cot 240^\circ = \cot(180^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \sqrt{3}/3$$

$$-\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/3 = (-3\sqrt{3} + 2\sqrt{3})/6 = -\sqrt{3}/6$$

(پ)

$$\sin 630^\circ = \sin(360^\circ + 270^\circ) = \sin 270^\circ = -1, \quad \tan(-540^\circ) = -\tan 540^\circ = -\tan(3 \times 180^\circ) = 0$$

$$\sin 630^\circ + \tan(-540^\circ) = -1 + 0 = -1$$

(۱) (ادامه)

$$\cos(-720^\circ) + \cot(-600^\circ) + \tan 720^\circ - \tan(-600^\circ) = \text{ت)}$$

$$\sin(25\pi/3) - \cos(23\pi/4) = \text{ث)}$$

$$(\sin 3\pi/4 - \cos 5\pi/6) / (\sin(-3\pi/4) + \tan(-4\pi/3)) = \text{ج)}$$

(ت)

$$\cos(-720^\circ) = \cos 720^\circ = 1$$

$$\cot(-600^\circ) = -\cot 600^\circ = -\cot(3 \times 180^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\sqrt{3}/3$$

$$\tan 720^\circ = 0, \tan(-600^\circ) = -\tan 600^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$1 - \sqrt{3}/3 + 0 - (-\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3}/3 + \sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3}/3 = (3 + 2\sqrt{3})/3$$

(ث)

$$25\pi/3 = 8\pi + \pi/3 \Rightarrow \sin 25\pi/3 = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$$

$$23\pi/4 = 6\pi - \pi/4 \Rightarrow \cos 23\pi/4 = \cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$$

$$\sqrt{3}/2 - \sqrt{2}/2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/2$$

(ج) صورت کسر:

$$\sin 3\pi/4 - \cos 5\pi/6 = \sqrt{2}/2 - (-\sqrt{3}/2) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})/2$$

مخرج کسر:

$$\sin(-3\pi/4) + \tan(-4\pi/3) = -\sqrt{2}/2 - \tan(\pi + \pi/3) = -\sqrt{2}/2 - \sqrt{3} = -(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})/2$$

حاصل:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) / (-(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})) = -(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) / ((2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2) = -(4 + \sqrt{6})/10 \approx -0.645$$

(۲) جدول زیر را کامل کنید.

زاویه x	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$								
$\cos x$								
$\tan x$								
$\cot x$								

با کمک زاویه مکمل $(180^\circ - \alpha)$ ، زاویه اختلاف $\pi (180^\circ + \alpha)$ و زاویه هم‌انتهای یا قرینه $(360^\circ - \alpha)$:

x	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$\cos x$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
$\cot x$	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$

(۳) بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 840^\circ = \sin 60^\circ$ (ب) $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$ (پ) $\tan(-1000^\circ) = \tan 80^\circ$ (ت) $\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$

الف) درست.

$$\sin 840^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$$

ب) درست.

$$\cos(-324^\circ) = \cos 324^\circ = \cos(360^\circ - 36^\circ) = \cos(-36^\circ) = \cos 36^\circ$$

پ) درست.

$$\tan(-1000^\circ) = -\tan 1000^\circ = -\tan(5 \times 180^\circ + 100^\circ) = -\tan 100^\circ = -\tan(180^\circ - 80^\circ) = \tan 80^\circ$$

ت) درست.

$$\sin 875^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 155^\circ) = \sin 155^\circ$$

۴) در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید:

الف) $\sin x = \cos(20^\circ + x)$ ب) $\tan(x + \pi/18) = \cot(2\pi/9 + x)$

آیا برای زاویه x تنها یک مقدار می‌توان یافت؟ جواب خود را با جواب‌های دوستان خود مقایسه کنید.

الف) چون $\sin x = \cos(90^\circ - x)$ ، کافی است دو زاویه x و $20^\circ + x$ متکم باشند:

$$x + (20^\circ + x) = 90^\circ \implies 2x = 70^\circ \implies x = 35^\circ$$

بررسی: $\sin 35^\circ = \cos 55^\circ$ درست است.

ب) چون $\tan \theta = \cot(\pi/2 - \theta)$ ، باید دو زاویه متکم باشند:

$$(x + \pi/18) + (2\pi/9 + x) = \pi/2 \implies 2x = \pi/2 - 5\pi/18 = 2\pi/9 \implies x = \pi/9$$

بررسی: $\tan(\pi/9 + \pi/18) = \tan \pi/6$ و $\cot(2\pi/9 + \pi/9) = \cot \pi/3$ و $\tan \pi/6 = \cot \pi/3 = \sqrt{3}/3$.

آیا فقط یک مقدار وجود دارد؟ خیر؛ جواب یکتا نیست. به دلیل تناوب این توابع، با افزودن مضرب‌های مناسب

نیز تساوی برقرار می‌ماند؛ مثلاً در بخش الف) $x = 35^\circ + k \cdot 180^\circ$ (مانند 215° یا -145°) و در بخش ب) $x = \pi/9$

$k \in \mathbb{Z}$ ، $9 + k\pi/2$ جواب‌اند. هر دانش‌آموز ممکن است یکی از این مقادیر را بنویسد و همه درست باشند.



۱) جدول روبه‌رو را کامل کنید. مجموعه زوج‌های مرتب حاصل در جدول مقابل یک تابع را به صورت زیر مشخص می‌کند.

مختصات نقطه	$y = \sin x$	x
$(0, 0)$	0	0
...	...	$\pi/6$
...	...	$\pi/2$
...	...	$5\pi/6$
...	...	π

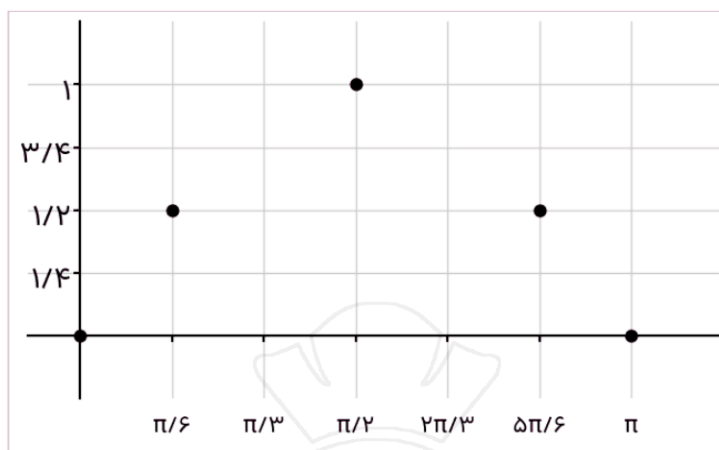
$$f = \{(0, 0), (\pi/6, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots)\}$$

مختصات نقطه	$y = \sin x$	x
$(0, 0)$	0	0
$(\pi/6, 1/2)$	1/2	$\pi/6$
$(\pi/2, 1)$	1	$\pi/2$
$(5\pi/6, 1/2)$	1/2	$5\pi/6$
$(\pi, 0)$	0	π

$$f = \{(0, 0), (\pi/6, 1/2), (\pi/2, 1), (5\pi/6, 1/2), (\pi, 0)\}$$

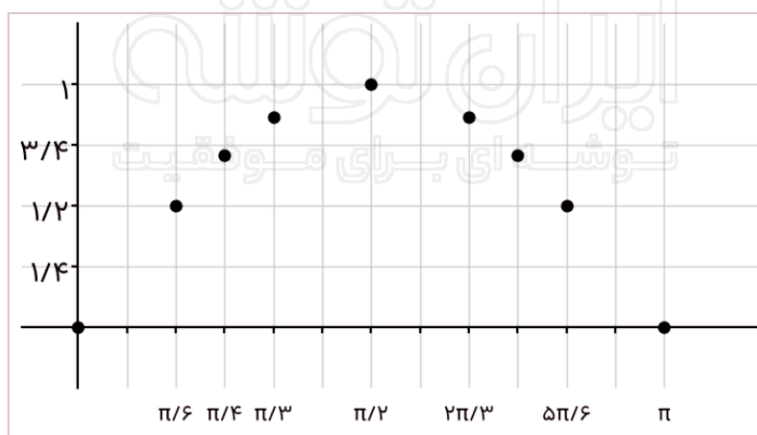
۲) نقاط حاصل در جدول را در شکل زیر مشخص کنید.

پنج نقطه جدول را روی صفحه مختصات (با محور افقی بر حسب π) مشخص می‌کنیم:



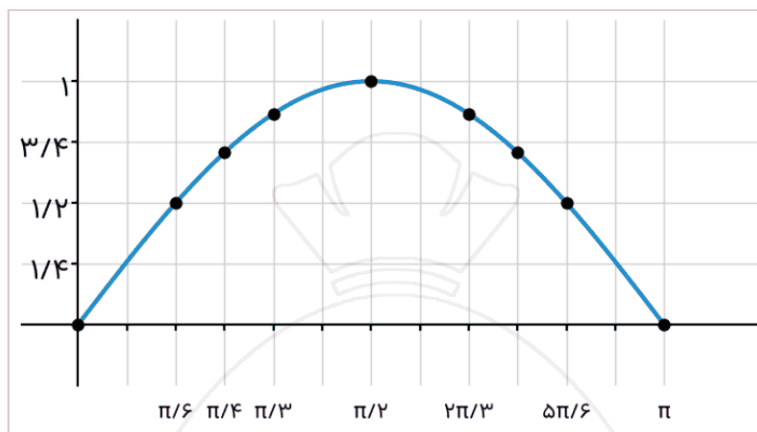
۳) با افزودن نقاط $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$ ، $(\pi/3, \dots)$ ، $(2\pi/3, \sqrt{3}/2)$ و $(3\pi/4, \dots)$ به جدول بالا، شکل زیر به دست می‌آید. (با فرض $\sqrt{2} \approx 1/4$ و $\sqrt{3} \approx 1/7$)

$\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$ و $\sin 3\pi/4 = \sin(\pi - \pi/4) = \sqrt{2}/2 \approx 0.7$ پس نقطه‌های خالی $(\pi/3, \sqrt{3}/2)$ و $(3\pi/4, \dots)$ (با تقریب‌های داده شده: $\sqrt{3}/2 \approx 0.85$ و $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$) هستند.



۴) نقاط حاصل در شکل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به دست آید. با افزودن تعداد نقاط جدول فوق در بازه $[0, \pi]$ این شکل به طور دقیق‌تری به دست می‌آید. شکل حاصل نمودار تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ را در این بازه مشخص می‌کند.

نقطه‌ها را با یک منحنی هموار از ۰ تا π به هم وصل می‌کنیم؛ منحنی از $(0,0)$ بالا می‌رود، در $x = \pi/2$ به بیشترین مقدار ۱ می‌رسد و دوباره در $(\pi, 0)$ به محور x برمی‌گردد:

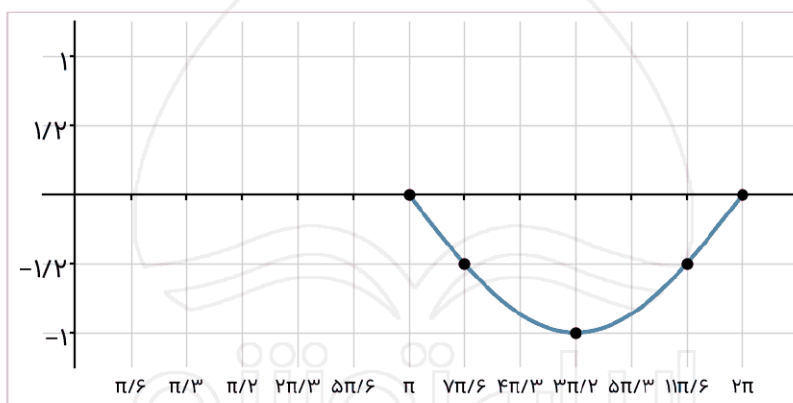


ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵) مراحل صفحه قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ انجام دهید. برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس نقاط به دست آمده در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل زیر مشخص و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

مختصات نقطه	$y = \sin x$	x
$(\pi, 0)$	0	π
$(7\pi/6, -1/2)$	$-1/2$	$7\pi/6$
$(3\pi/2, -1)$	-1	$3\pi/2$
$(11\pi/6, -1/2)$	$-1/2$	$11\pi/6$
$(2\pi, 0)$	0	2π

برای نمونه $\sin 7\pi/6 = -\sin \pi/6 = -1/2$ و $\sin 3\pi/2 = -1$. نمودار در این بازه زیر محور x قرار می‌گیرد:



توشه ای برای موفقیت

۶) با توجه به شکل‌های فوق، نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. حال با توجه به این شکل جدول زیر را درباره مقدار این تابع در هر بازه تکمیل کنید.

بازه	$[0, \pi/2]$	$[\pi/2, \pi]$	$[\pi, 3\pi/2]$	$[3\pi/2, 2\pi]$
تغییر مقدار	مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.			
علامت	مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.			

بازه	$[0, \pi/2]$	$[\pi/2, \pi]$	$[\pi, 3\pi/2]$	$[3\pi/2, 2\pi]$
تغییر مقدار	از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.	از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	از ۰ به -۱ کاهش می‌یابد.	از -۱ به ۰ افزایش می‌یابد.
علامت	در ربع اول مثبت است.	در ربع دوم مثبت است.	در ربع سوم منفی است.	در ربع چهارم منفی است.

(۷) با توجه به رابطه $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، که در درس قبل آشنا شدید می‌توان گفت: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن 2π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند. بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$ یکسان است. همچنین داریم: $\sin(x - 2\pi) = \sin x$ یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن 2π رادیان از کمان آن تغییر نمی‌کند. در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[0, 2\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ یکسان است. در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند، نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[2k\pi, (2k+2)\pi]$ و $[0, 2\pi]$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در بازه $[0, 2\pi]$ رسم شده در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ ، $[-4\pi, -2\pi]$ ، $[-6\pi, -4\pi]$ ، $[4\pi, 6\pi]$ ، $[6\pi, 8\pi]$ ، $[8\pi, 10\pi]$ ، $[10\pi, 12\pi]$ ، $[12\pi, 14\pi]$ ، $[14\pi, 16\pi]$ ، $[16\pi, 18\pi]$ ، $[18\pi, 20\pi]$ ، $[20\pi, 22\pi]$ ، $[22\pi, 24\pi]$ ، $[24\pi, 26\pi]$ ، $[26\pi, 28\pi]$ ، $[28\pi, 30\pi]$ ، $[30\pi, 32\pi]$ ، $[32\pi, 34\pi]$ ، $[34\pi, 36\pi]$ ، $[36\pi, 38\pi]$ ، $[38\pi, 40\pi]$ ، $[40\pi, 42\pi]$ ، $[42\pi, 44\pi]$ ، $[44\pi, 46\pi]$ ، $[46\pi, 48\pi]$ ، $[48\pi, 50\pi]$ ، $[50\pi, 52\pi]$ ، $[52\pi, 54\pi]$ ، $[54\pi, 56\pi]$ ، $[56\pi, 58\pi]$ ، $[58\pi, 60\pi]$ ، $[60\pi, 62\pi]$ ، $[62\pi, 64\pi]$ ، $[64\pi, 66\pi]$ ، $[66\pi, 68\pi]$ ، $[68\pi, 70\pi]$ ، $[70\pi, 72\pi]$ ، $[72\pi, 74\pi]$ ، $[74\pi, 76\pi]$ ، $[76\pi, 78\pi]$ ، $[78\pi, 80\pi]$ ، $[80\pi, 82\pi]$ ، $[82\pi, 84\pi]$ ، $[84\pi, 86\pi]$ ، $[86\pi, 88\pi]$ ، $[88\pi, 90\pi]$ ، $[90\pi, 92\pi]$ ، $[92\pi, 94\pi]$ ، $[94\pi, 96\pi]$ ، $[96\pi, 98\pi]$ ، $[98\pi, 100\pi]$ ، $[100\pi, 102\pi]$ ، $[102\pi, 104\pi]$ ، $[104\pi, 106\pi]$ ، $[106\pi, 108\pi]$ ، $[108\pi, 110\pi]$ ، $[110\pi, 112\pi]$ ، $[112\pi, 114\pi]$ ، $[114\pi, 116\pi]$ ، $[116\pi, 118\pi]$ ، $[118\pi, 120\pi]$ ، $[120\pi, 122\pi]$ ، $[122\pi, 124\pi]$ ، $[124\pi, 126\pi]$ ، $[126\pi, 128\pi]$ ، $[128\pi, 130\pi]$ ، $[130\pi, 132\pi]$ ، $[132\pi, 134\pi]$ ، $[134\pi, 136\pi]$ ، $[136\pi, 138\pi]$ ، $[138\pi, 140\pi]$ ، $[140\pi, 142\pi]$ ، $[142\pi, 144\pi]$ ، $[144\pi, 146\pi]$ ، $[146\pi, 148\pi]$ ، $[148\pi, 150\pi]$ ، $[150\pi, 152\pi]$ ، $[152\pi, 154\pi]$ ، $[154\pi, 156\pi]$ ، $[156\pi, 158\pi]$ ، $[158\pi, 160\pi]$ ، $[160\pi, 162\pi]$ ، $[162\pi, 164\pi]$ ، $[164\pi, 166\pi]$ ، $[166\pi, 168\pi]$ ، $[168\pi, 170\pi]$ ، $[170\pi, 172\pi]$ ، $[172\pi, 174\pi]$ ، $[174\pi, 176\pi]$ ، $[176\pi, 178\pi]$ ، $[178\pi, 180\pi]$ ، $[180\pi, 182\pi]$ ، $[182\pi, 184\pi]$ ، $[184\pi, 186\pi]$ ، $[186\pi, 188\pi]$ ، $[188\pi, 190\pi]$ ، $[190\pi, 192\pi]$ ، $[192\pi, 194\pi]$ ، $[194\pi, 196\pi]$ ، $[196\pi, 198\pi]$ ، $[198\pi, 200\pi]$ ، $[200\pi, 202\pi]$ ، $[202\pi, 204\pi]$ ، $[204\pi, 206\pi]$ ، $[206\pi, 208\pi]$ ، $[208\pi, 210\pi]$ ، $[210\pi, 212\pi]$ ، $[212\pi, 214\pi]$ ، $[214\pi, 216\pi]$ ، $[216\pi, 218\pi]$ ، $[218\pi, 220\pi]$ ، $[220\pi, 222\pi]$ ، $[222\pi, 224\pi]$ ، $[224\pi, 226\pi]$ ، $[226\pi, 228\pi]$ ، $[228\pi, 230\pi]$ ، $[230\pi, 232\pi]$ ، $[232\pi, 234\pi]$ ، $[234\pi, 236\pi]$ ، $[236\pi, 238\pi]$ ، $[238\pi, 240\pi]$ ، $[240\pi, 242\pi]$ ، $[242\pi, 244\pi]$ ، $[244\pi, 246\pi]$ ، $[246\pi, 248\pi]$ ، $[248\pi, 250\pi]$ ، $[250\pi, 252\pi]$ ، $[252\pi, 254\pi]$ ، $[254\pi, 256\pi]$ ، $[256\pi, 258\pi]$ ، $[258\pi, 260\pi]$ ، $[260\pi, 262\pi]$ ، $[262\pi, 264\pi]$ ، $[264\pi, 266\pi]$ ، $[266\pi, 268\pi]$ ، $[268\pi, 270\pi]$ ، $[270\pi, 272\pi]$ ، $[272\pi, 274\pi]$ ، $[274\pi, 276\pi]$ ، $[276\pi, 278\pi]$ ، $[278\pi, 280\pi]$ ، $[280\pi, 282\pi]$ ، $[282\pi, 284\pi]$ ، $[284\pi, 286\pi]$ ، $[286\pi, 288\pi]$ ، $[288\pi, 290\pi]$ ، $[290\pi, 292\pi]$ ، $[292\pi, 294\pi]$ ، $[294\pi, 296\pi]$ ، $[296\pi, 298\pi]$ ، $[298\pi, 300\pi]$ ، $[300\pi, 302\pi]$ ، $[302\pi, 304\pi]$ ، $[304\pi, 306\pi]$ ، $[306\pi, 308\pi]$ ، $[308\pi, 310\pi]$ ، $[310\pi, 312\pi]$ ، $[312\pi, 314\pi]$ ، $[314\pi, 316\pi]$ ، $[316\pi, 318\pi]$ ، $[318\pi, 320\pi]$ ، $[320\pi, 322\pi]$ ، $[322\pi, 324\pi]$ ، $[324\pi, 326\pi]$ ، $[326\pi, 328\pi]$ ، $[328\pi, 330\pi]$ ، $[330\pi, 332\pi]$ ، $[332\pi, 334\pi]$ ، $[334\pi, 336\pi]$ ، $[336\pi, 338\pi]$ ، $[338\pi, 340\pi]$ ، $[340\pi, 342\pi]$ ، $[342\pi, 344\pi]$ ، $[344\pi, 346\pi]$ ، $[346\pi, 348\pi]$ ، $[348\pi, 350\pi]$ ، $[350\pi, 352\pi]$ ، $[352\pi, 354\pi]$ ، $[354\pi, 356\pi]$ ، $[356\pi, 358\pi]$ ، $[358\pi, 360\pi]$ ، $[360\pi, 362\pi]$ ، $[362\pi, 364\pi]$ ، $[364\pi, 366\pi]$ ، $[366\pi, 368\pi]$ ، $[368\pi, 370\pi]$ ، $[370\pi, 372\pi]$ ، $[372\pi, 374\pi]$ ، $[374\pi, 376\pi]$ ، $[376\pi, 378\pi]$ ، $[378\pi, 380\pi]$ ، $[380\pi, 382\pi]$ ، $[382\pi, 384\pi]$ ، $[384\pi, 386\pi]$ ، $[386\pi, 388\pi]$ ، $[388\pi, 390\pi]$ ، $[390\pi, 392\pi]$ ، $[392\pi, 394\pi]$ ، $[394\pi, 396\pi]$ ، $[396\pi, 398\pi]$ ، $[398\pi, 400\pi]$ ، $[400\pi, 402\pi]$ ، $[402\pi, 404\pi]$ ، $[404\pi, 406\pi]$ ، $[406\pi, 408\pi]$ ، $[408\pi, 410\pi]$ ، $[410\pi, 412\pi]$ ، $[412\pi, 414\pi]$ ، $[414\pi, 416\pi]$ ، $[416\pi, 418\pi]$ ، $[418\pi, 420\pi]$ ، $[420\pi, 422\pi]$ ، $[422\pi, 424\pi]$ ، $[424\pi, 426\pi]$ ، $[426\pi, 428\pi]$ ، $[428\pi, 430\pi]$ ، $[430\pi, 432\pi]$ ، $[432\pi, 434\pi]$ ، $[434\pi, 436\pi]$ ، $[436\pi, 438\pi]$ ، $[438\pi, 440\pi]$ ، $[440\pi, 442\pi]$ ، $[442\pi, 444\pi]$ ، $[444\pi, 446\pi]$ ، $[446\pi, 448\pi]$ ، $[448\pi, 450\pi]$ ، $[450\pi, 452\pi]$ ، $[452\pi, 454\pi]$ ، $[454\pi, 456\pi]$ ، $[456\pi, 458\pi]$ ، $[458\pi, 460\pi]$ ، $[460\pi, 462\pi]$ ، $[462\pi, 464\pi]$ ، $[464\pi, 466\pi]$ ، $[466\pi, 468\pi]$ ، $[468\pi, 470\pi]$ ، $[470\pi, 472\pi]$ ، $[472\pi, 474\pi]$ ، $[474\pi, 476\pi]$ ، $[476\pi, 478\pi]$ ، $[478\pi, 480\pi]$ ، $[480\pi, 482\pi]$ ، $[482\pi, 484\pi]$ ، $[484\pi, 486\pi]$ ، $[486\pi, 488\pi]$ ، $[488\pi, 490\pi]$ ، $[490\pi, 492\pi]$ ، $[492\pi, 494\pi]$ ، $[494\pi, 496\pi]$ ، $[496\pi, 498\pi]$ ، $[498\pi, 500\pi]$ ، $[500\pi, 502\pi]$ ، $[502\pi, 504\pi]$ ، $[504\pi, 506\pi]$ ، $[506\pi, 508\pi]$ ، $[508\pi, 510\pi]$ ، $[510\pi, 512\pi]$ ، $[512\pi, 514\pi]$ ، $[514\pi, 516\pi]$ ، $[516\pi, 518\pi]$ ، $[518\pi, 520\pi]$ ، $[520\pi, 522\pi]$ ، $[522\pi, 524\pi]$ ، $[524\pi, 526\pi]$ ، $[526\pi, 528\pi]$ ، $[528\pi, 530\pi]$ ، $[530\pi, 532\pi]$ ، $[532\pi, 534\pi]$ ، $[534\pi, 536\pi]$ ، $[536\pi, 538\pi]$ ، $[538\pi, 540\pi]$ ، $[540\pi, 542\pi]$ ، $[542\pi, 544\pi]$ ، $[544\pi, 546\pi]$ ، $[546\pi, 548\pi]$ ، $[548\pi, 550\pi]$ ، $[550\pi, 552\pi]$ ، $[552\pi, 554\pi]$ ، $[554\pi, 556\pi]$ ، $[556\pi, 558\pi]$ ، $[558\pi, 560\pi]$ ، $[560\pi, 562\pi]$ ، $[562\pi, 564\pi]$ ، $[564\pi, 566\pi]$ ، $[566\pi, 568\pi]$ ، $[568\pi, 570\pi]$ ، $[570\pi, 572\pi]$ ، $[572\pi, 574\pi]$ ، $[574\pi, 576\pi]$ ، $[576\pi, 578\pi]$ ، $[578\pi, 580\pi]$ ، $[580\pi, 582\pi]$ ، $[582\pi, 584\pi]$ ، $[584\pi, 586\pi]$ ، $[586\pi, 588\pi]$ ، $[588\pi, 590\pi]$ ، $[590\pi, 592\pi]$ ، $[592\pi, 594\pi]$ ، $[594\pi, 596\pi]$ ، $[596\pi, 598\pi]$ ، $[598\pi, 600\pi]$ ، $[600\pi, 602\pi]$ ، $[602\pi, 604\pi]$ ، $[604\pi, 606\pi]$ ، $[606\pi, 608\pi]$ ، $[608\pi, 610\pi]$ ، $[610\pi, 612\pi]$ ، $[612\pi, 614\pi]$ ، $[614\pi, 616\pi]$ ، $[616\pi, 618\pi]$ ، $[618\pi, 620\pi]$ ، $[620\pi, 622\pi]$ ، $[622\pi, 624\pi]$ ، $[624\pi, 626\pi]$ ، $[626\pi, 628\pi]$ ، $[628\pi, 630\pi]$ ، $[630\pi, 632\pi]$ ، $[632\pi, 634\pi]$ ، $[634\pi, 636\pi]$ ، $[636\pi, 638\pi]$ ، $[638\pi, 640\pi]$ ، $[640\pi, 642\pi]$ ، $[642\pi, 644\pi]$ ، $[644\pi, 646\pi]$ ، $[646\pi, 648\pi]$ ، $[648\pi, 650\pi]$ ، $[650\pi, 652\pi]$ ، $[652\pi, 654\pi]$ ، $[654\pi, 656\pi]$ ، $[656\pi, 658\pi]$ ، $[658\pi, 660\pi]$ ، $[660\pi, 662\pi]$ ، $[662\pi, 664\pi]$ ، $[664\pi, 666\pi]$ ، $[666\pi, 668\pi]$ ، $[668\pi, 670\pi]$ ، $[670\pi, 672\pi]$ ، $[672\pi, 674\pi]$ ، $[674\pi, 676\pi]$ ، $[676\pi, 678\pi]$ ، $[678\pi, 680\pi]$ ، $[680\pi, 682\pi]$ ، $[682\pi, 684\pi]$ ، $[684\pi, 686\pi]$ ، $[686\pi, 688\pi]$ ، $[688\pi, 690\pi]$ ، $[690\pi, 692\pi]$ ، $[692\pi, 694\pi]$ ، $[694\pi, 696\pi]$ ، $[696\pi, 698\pi]$ ، $[698\pi, 700\pi]$ ، $[700\pi, 702\pi]$ ، $[702\pi, 704\pi]$ ، $[704\pi, 706\pi]$ ، $[706\pi, 708\pi]$ ، $[708\pi, 710\pi]$ ، $[710\pi, 712\pi]$ ، $[712\pi, 714\pi]$ ، $[714\pi, 716\pi]$ ، $[716\pi, 718\pi]$ ، $[718\pi, 720\pi]$ ، $[720\pi, 722\pi]$ ، $[722\pi, 724\pi]$ ، $[724\pi, 726\pi]$ ، $[726\pi, 728\pi]$ ، $[728\pi, 730\pi]$ ، $[730\pi, 732\pi]$ ، $[732\pi, 734\pi]$ ، $[734\pi, 736\pi]$ ، $[736\pi, 738\pi]$ ، $[738\pi, 740\pi]$ ، $[740\pi, 742\pi]$ ، $[742\pi, 744\pi]$ ، $[744\pi, 746\pi]$ ، $[746\pi, 748\pi]$ ، $[748\pi, 750\pi]$ ، $[750\pi, 752\pi]$ ، $[752\pi, 754\pi]$ ، $[754\pi, 756\pi]$ ، $[756\pi, 758\pi]$ ، $[758\pi, 760\pi]$ ، $[760\pi, 762\pi]$ ، $[762\pi, 764\pi]$ ، $[764\pi, 766\pi]$ ، $[766\pi, 768\pi]$ ، $[768\pi, 770\pi]$ ، $[770\pi, 772\pi]$ ، $[772\pi, 774\pi]$ ، $[774\pi, 776\pi]$ ، $[776\pi, 778\pi]$ ، $[778\pi, 780\pi]$ ، $[780\pi, 782\pi]$ ، $[782\pi, 784\pi]$ ، $[784\pi, 786\pi]$ ، $[786\pi, 788\pi]$ ، $[788\pi, 790\pi]$ ، $[790\pi, 792\pi]$ ، $[792\pi, 794\pi]$ ، $[794\pi, 796\pi]$ ، $[796\pi, 798\pi]$ ، $[798\pi, 800\pi]$ ، $[800\pi, 802\pi]$ ، $[802\pi, 804\pi]$ ، $[804\pi, 806\pi]$ ، $[806\pi, 808\pi]$ ، $[808\pi, 810\pi]$ ، $[810\pi, 812\pi]$ ، $[812\pi, 814\pi]$ ، $[814\pi, 816\pi]$ ، $[816\pi, 818\pi]$ ، $[818\pi, 820\pi]$ ، $[820\pi, 822\pi]$ ، $[822\pi, 824\pi]$ ، $[824\pi, 826\pi]$ ، $[826\pi, 828\pi]$ ، $[828\pi, 830\pi]$ ، $[830\pi, 832\pi]$ ، $[832\pi, 834\pi]$ ، $[834\pi, 836\pi]$ ، $[836\pi, 838\pi]$ ، $[838\pi, 840\pi]$ ، $[840\pi, 842\pi]$ ، $[842\pi, 844\pi]$ ، $[844\pi, 846\pi]$ ، $[846\pi, 848\pi]$ ، $[848\pi, 850\pi]$ ، $[850\pi, 852\pi]$ ، $[852\pi, 854\pi]$ ، $[854\pi, 856\pi]$ ، $[856\pi, 858\pi]$ ، $[858\pi, 860\pi]$ ، $[860\pi, 862\pi]$ ، $[862\pi, 864\pi]$ ، $[864\pi, 866\pi]$ ، $[866\pi, 868\pi]$ ، $[868\pi, 870\pi]$ ، $[870\pi, 872\pi]$ ، $[872\pi, 874\pi]$ ، $[874\pi, 876\pi]$ ، $[876\pi, 878\pi]$ ، $[878\pi, 880\pi]$ ، $[880\pi, 882\pi]$ ، $[882\pi, 884\pi]$ ، $[884\pi, 886\pi]$ ، $[886\pi, 888\pi]$ ، $[888\pi, 890\pi]$ ، $[890\pi, 892\pi]$ ، $[892\pi, 894\pi]$ ، $[894\pi, 896\pi]$ ، $[896\pi, 898\pi]$ ، $[898\pi, 900\pi]$ ، $[900\pi, 902\pi]$ ، $[902\pi, 904\pi]$ ، $[904\pi, 906\pi]$ ، $[906\pi, 908\pi]$ ، $[908\pi, 910\pi]$ ، $[910\pi, 912\pi]$ ، $[912\pi, 914\pi]$ ، $[914\pi, 916\pi]$ ، $[916\pi, 918\pi]$ ، $[918\pi, 920\pi]$ ، $[920\pi, 922\pi]$ ، $[922\pi, 924\pi]$ ، $[924\pi, 926\pi]$ ، $[926\pi, 928\pi]$ ، $[928\pi, 930\pi]$ ، $[930\pi, 932\pi]$ ، $[932\pi, 934\pi]$ ، $[934\pi, 936\pi]$ ، $[936\pi, 938\pi]$ ، $[938\pi, 940\pi]$ ، $[940\pi, 942\pi]$ ، $[942\pi, 944\pi]$ ، $[944\pi, 946\pi]$ ، $[946\pi, 948\pi]$ ، $[948\pi, 950\pi]$ ، $[950\pi, 952\pi]$ ، $[952\pi, 954\pi]$ ، $[954\pi, 956\pi]$ ، $[956\pi, 958\pi]$ ، $[958\pi, 960\pi]$ ، $[960\pi, 962\pi]$ ، $[962\pi, 964\pi]$ ، $[964\pi, 966\pi]$ ، $[966\pi, 968\pi]$ ، $[968\pi, 970\pi]$ ، $[970\pi, 972\pi]$ ، $[972\pi, 974\pi]$ ، $[974\pi, 976\pi]$ ، $[976\pi, 978\pi]$ ، $[978\pi, 980\pi]$ ، $[980\pi, 982\pi]$ ، $[982\pi, 984\pi]$ ، $[984\pi, 986\pi]$ ، $[986\pi, 988\pi]$ ، $[988\pi, 990\pi]$ ، $[990\pi, 992\pi]$ ، $[992\pi, 994\pi]$ ، $[994\pi, 996\pi]$ ، $[996\pi, 998\pi]$ ، $[998\pi, 1000\pi]$ ، $[1000\pi, 1002\pi]$ ، $[1002\pi, 1004\pi]$ ، $[1004\pi, 1006\pi]$ ، $[1006\pi, 1008\pi]$ ، $[1008\pi, 1010\pi]$ ، $[1010\pi, 1012\pi]$ ، $[1012\pi, 1014\pi]$ ، $[1014\pi, 1016\pi]$ ، $[1016\pi, 1018\pi]$ ، $[1018\pi, 1020\pi]$ ، $[1020\pi, 1022\pi]$ ، $[1022\pi, 1024\pi]$ ، $[1024\pi, 1026\pi]$ ، $[1026\pi, 1028\pi]$ ، $[1028\pi, 1030\pi]$ ، $[1030\pi, 1032\pi]$ ، $[1032\pi, 1034\pi]$ ، $[1034\pi, 1036\pi]$ ، $[1036\pi, 1038\pi]$ ، $[1038\pi, 1040\pi]$ ، $[1040\pi, 1042\pi]$ ، $[1042\pi, 1044\pi]$ ، $[1044\pi, 1046\pi]$ ، $[1046\pi, 1048\pi]$ ، $[1048\pi, 1050\pi]$ ، $[1050\pi, 1052\pi]$ ، $[1052\pi, 1054\pi]$ ، $[1054\pi, 1056\pi]$ ، $[1056\pi, 1058\pi]$ ، $[1058\pi, 1060\pi]$ ، $[1060\pi, 1062\pi]$ ، $[1062\pi, 1064\pi]$ ، $[1064\pi, 1066\pi]$ ، $[1066\pi, 1068\pi]$ ، $[1068\pi, 1070\pi]$ ، $[1070\pi, 1072\pi]$ ، $[1072\pi, 1074\pi]$ ، $[1074\pi, 1076\pi]$ ، $[1076\pi, 1078\pi]$ ، $[1078\pi, 1080\pi]$ ، $[1080\pi, 1082\pi]$ ، $[1082\pi, 1084\pi]$ ، $[1084\pi, 1086\pi]$ ، $[1086\pi, 1088\pi]$ ، $[1088\pi, 1090\pi]$ ، $[1090\pi, 1092\pi]$ ، $[1092\pi, 1094\pi]$ ، $[1094\pi, 1096\pi]$ ، $[1096\pi, 1098\pi]$ ، $[1098\pi, 1100\pi]$ ، $[1100\pi, 1102\pi]$ ، $[1102\pi, 1104\pi]$ ، $[1104\pi, 1106\pi]$ ، $[1106\pi, 1108\pi]$ ، $[1108\pi, 1110\pi]$ ، $[1110\pi, 1112\pi]$ ، $[1112\pi, 1114\pi]$ ، $[1114\pi, 1116\pi]$ ، $[1116\pi, 1118\pi]$ ، $[1118\pi, 1120\pi]$ ، $[1120\pi, 1122\pi]$ ، $[1122\pi, 1124\pi]$ ، $[1124\pi, 1126\pi]$ ، $[1126\pi, 1128\pi]$ ، $[1128\pi, 1130\pi]$ ، $[1130\pi, 1132\pi]$ ، $[1132\pi, 1134\pi]$ ، $[1134\pi, 1136\pi]$ ، $[1136\pi, 1138\pi]$ ، $[1138\pi, 1140\pi]$ ، $[1140\pi, 1142\pi]$ ، $[1142\pi, 1144\pi]$ ، $[1144\pi, 1146\pi]$ ، $[1146\pi, 1148\pi]$ ، $[1148\pi, 1150\pi]$ ، $[1150\pi, 1152\pi]$ ، $[1152\pi, 1154\pi]$ ، $[1154\pi, 1156\pi]$ ، $[1156\pi, 1158\pi]$ ، $[1158\pi, 1160\pi]$ ، $[1160\pi, 1162\pi]$ ، $[1162\pi, 1164\pi]$ ، $[1164\pi, 1166\pi]$ ، $[1166\pi, 1168\pi]$ ، $[1168\pi, 1170\pi]$ ، $[1170\pi, 1172\pi]$ ، $[1172\pi, 1174\pi]$ ، $[1174\pi, 1176\pi]$ ، $[1176\pi, 1178\pi]$ ، $[1178\pi, 1180\pi]$ ، $[1180\pi, 1182\pi]$ ، $[1182\pi, 1184\pi]$ ، $[1184\pi, 1186\pi]$ ، $[1186\pi, 1188\pi]$ ، $[1188\pi, 1190\pi]$ ، $[1190\pi, 1192\pi]$ ، $[1192\pi, 1194\pi]$ ، $[1194\pi, 1196\pi]$ ، $[1196\pi, 1198\pi]$ ، $[1198\pi, 1200\pi]$ ، $[1200\pi, 1202\pi]$ ، $[1202\pi, 1204\pi]$ ، $[1204\pi, 1206\pi]$ ، $[1206\pi, 1208\pi]$ ، $[1208\pi, 1210\pi]$ ، $[1210\pi, 1212\pi]$ ، $[1212\pi, 1214\pi]$ ، $[1214\pi, 1216\pi]$ ، $[1216\pi, 1218\pi]$ ، $[1218\pi, 1220\pi]$ ، $[1220\pi, 1222\pi]$ ، $[1222\pi, 1224\pi]$ ، $[1224\pi, 1226\pi]$ ، $[1226\pi, 1228\pi]$ ، $[1228\pi, 1230\pi]$ ، $[1230\pi, 1232\pi]$ ، $[1232\pi, 1234\pi]$ ، $[12$

۸) با توجه به شکل بالا جاهای خالی را درباره ویژگی‌های تابع با ضابطه $y = \sin x$ کامل کنید.

الف) دامنه تابع سینوس و برد آن است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، برابر با است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با است که در نقاطی به طول‌های $x = \pi/2$ ، $x = \dots$ ، $x = \dots$ ، $x = \dots$ و

در حالت کلی $x = \pi/2 + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با است که در نقاطی به طول‌های $x = 3\pi/2$ ، $x = \dots$ ، $x = \dots$ ، $x = \dots$ و

در حالت کلی $x = 3\pi/2 + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

الف) دامنه تابع سینوس مجموعه همه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و برد آن بازه بسته $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x = k\pi$ برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ۱ است که در نقاطی به طول‌های $x = \pi/2$ ، $x = 5\pi/2$ ، $x = -3\pi/2$ ، $x = \dots$ و

در حالت کلی $x = \pi/2 + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با -۱ است که در نقاطی به طول‌های $x = 3\pi/2$ ، $x = 7\pi/2$ ، $x = -\pi/2$ ، $x = \dots$ و

در حالت کلی $x = 3\pi/2 + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

هریک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱) $y = 2 \sin x$ (۲) $y = \sin(x - \pi/2)$ (۳) $y = \sin x + 1$ (۴) $y = -\sin x + 1$

۱) نمودار (الف): دامنه نوسان از -۲ تا ۲ است و نمودار از مبدأ مختصات می‌گذرد و ابتدا صعودی است.

۲) نمودار (پ): $\sin(x - \pi/2) = -\cos x$ ؛ در $x = 0$ مقدار -۱ (کمینه) را دارد و بین -۱ و ۱ نوسان می‌کند.

۳) نمودار (ب): نمودار $\sin x$ یک واحد بالا رفته است؛ بین ۰ و ۲ نوسان می‌کند و در $x = 0$ مقدار ۱ را دارد و صعودی است.

۴) نمودار (ت): نمودار $-\sin x$ یک واحد بالا رفته است؛ بین ۰ و ۲ نوسان می‌کند و در $x = 0$ مقدار ۱ را دارد و نزولی است.

۱) جدول زیر را کامل کنید.

به این ترتیب مجموعه زوج‌های مرتب زیر به دست می‌آید. $f = \{(0, 1), (\dots, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots)\}$
 آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

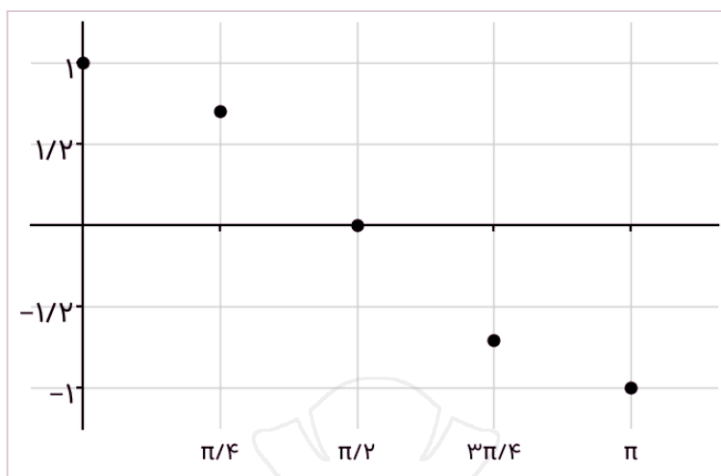
مختصات نقطه	$y = \cos x$	x
$(0, 1)$	1	0
$(\pi/4, 0.7)$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.7$	$\pi/4$
.....		$\pi/2$
.....		$3\pi/4$
.....		π

مختصات نقطه	$y = \cos x$	x
$(0, 1)$	1	0
$(\pi/4, 0.7)$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.7$	$\pi/4$
$(\pi/2, 0)$	0	$\pi/2$
$(3\pi/4, -0.7)$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0.7$	$3\pi/4$
$(\pi, -1)$	-1	π

$$f = \{(0, 1), (\pi/4, 0.7), (\pi/2, 0), (3\pi/4, -0.7), (\pi, -1)\}$$

آیا تابع است؟ بله؛ زیرا هیچ دو زوج مرتبی در این مجموعه مؤلفه اول یکسان ندارند (به هر x دقیقاً یک y نسبت داده شده است).

۲) نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.

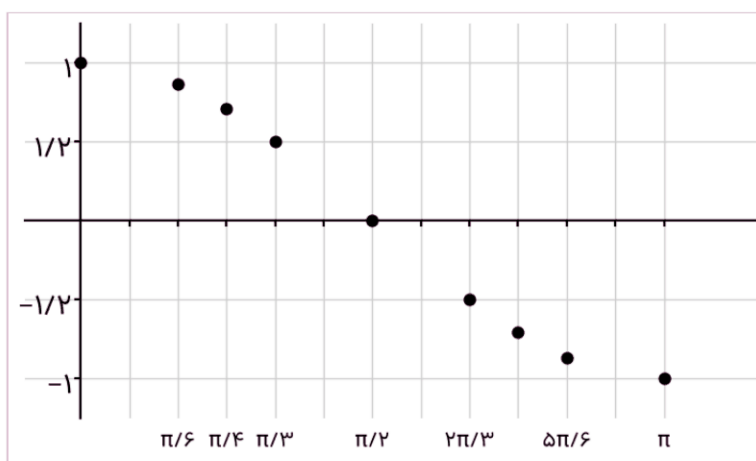


۳) نقاط به طول‌های $x = \pi/6, \pi/3, 2\pi/3, 5\pi/6$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به دست آید.
($\sqrt{3} \approx 1.7$)

$5\pi/6$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/6$	x
...	$-1/2$	...	...	$y = \cos x$

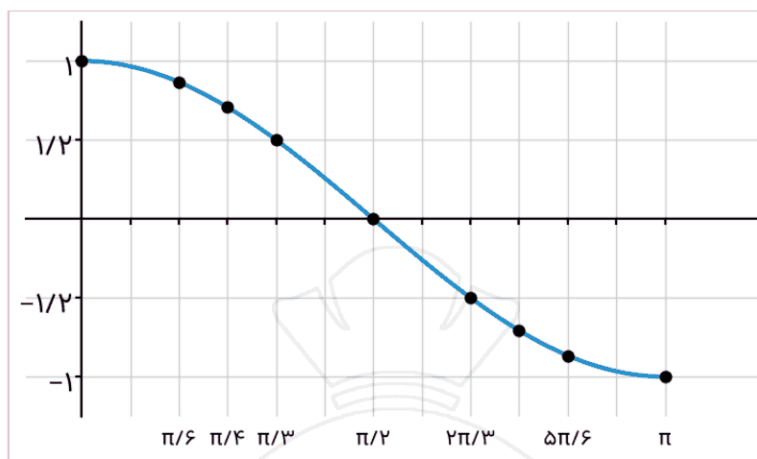
$5\pi/6$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/6$	x
$-\sqrt{3}/2 \approx -0.85$	$-1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2 \approx 0.85$	$y = \cos x$

(با تقریب $\sqrt{3} \approx 1.7$ مقدار $\sqrt{3}/2$ برابر ۰٫۸۵ می‌شود.)



۴) نقاط شکل صفحه قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به دست آید. این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ را در بازه $[0, \pi]$ مشخص می‌کند.

منحنی از $(0, 1)$ شروع می‌شود، در $x = \pi/2$ محور x را قطع می‌کند و در $(\pi, -1)$ به کمترین مقدار می‌رسد:

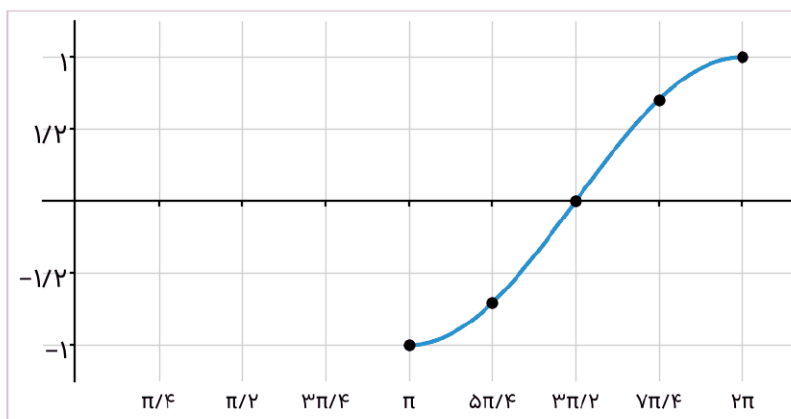


۵) جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ به صورت شکل مقابل به دست آید.

2π	$7\pi/4$	$3\pi/2$	$5\pi/4$	π	x
1	...	...	...	-1	y

2π	$7\pi/4$	$3\pi/2$	$5\pi/4$	π	x
1	$\sqrt{2}/2 \approx 0.7$	0	$-\sqrt{2}/2 \approx -0.7$	-1	y

مثلاً $\cos 7\pi/4 = \cos(2\pi - \pi/4) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$ و $\cos 5\pi/4 = \cos(\pi + \pi/4) = -\cos \pi/4 = -\sqrt{2}/2$



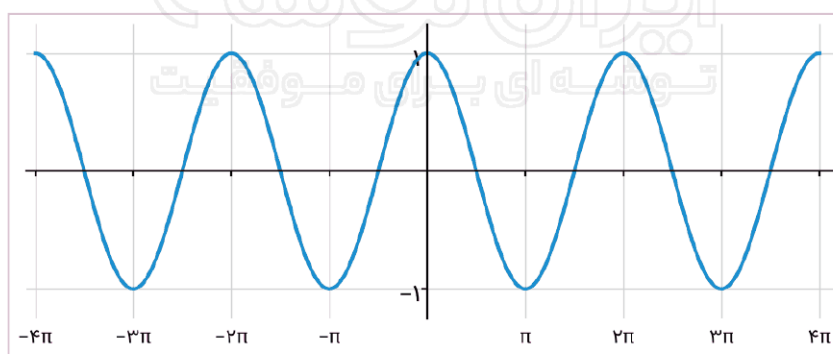
۶) با توجه به مراحل بالا نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.

بازه	$[0, \pi/2]$	$[\pi/2, \pi]$	$[\pi, 3\pi/2]$	$[3\pi/2, 2\pi]$
تغییر مقدار	مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.			
علامت	مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.			

بازه	$[0, \pi/2]$	$[\pi/2, \pi]$	$[\pi, 3\pi/2]$	$[3\pi/2, 2\pi]$
تغییر مقدار	از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	از ۰ به -۱ کاهش می‌یابد.	از -۱ به ۰ افزایش می‌یابد.	از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
علامت	در ربع اول مثبت است.	در ربع دوم منفی است.	در ربع سوم منفی است.	در ربع چهارم مثبت است.

۷) تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازه $[0, 4\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.

چون $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ ، همان نمودار بازه $[0, 2\pi]$ در بازه‌های $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ هم تکرار می‌شود. نمودار کامل شده در بازه $[-4\pi, 4\pi]$:



۸) با توجه به شکل صفحه قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطه $y = \cos x$ کامل کنید.
الف) دامنه تابع کسینوس و برد آن است.

ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس است که در طول‌های $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس است که در طول‌های به دست می‌آید.

الف) دامنه تابع کسینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (یعنی $\dots, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \dots$) برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس ۱ است که در طول‌های $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

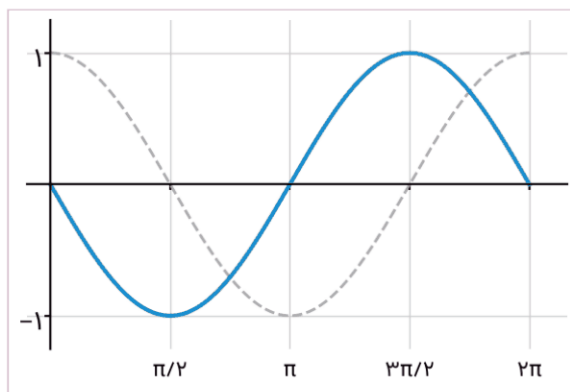
ت) حداقل مقدار تابع کسینوس -۱ است که در طول‌های $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (یعنی $\dots, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$) به دست می‌آید.

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = 3\cos x$ را نشان می‌دهد. به طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازه $[0, 2\pi]$ ، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.

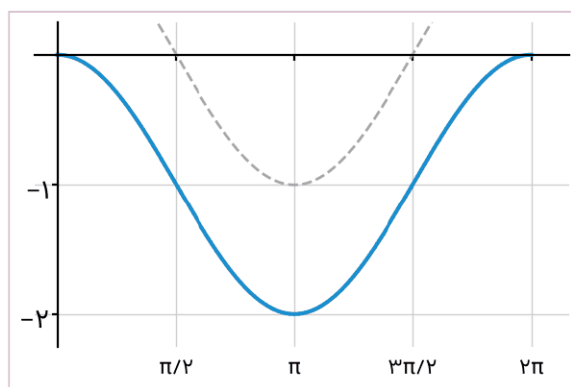
۱) $y = \cos(x + \pi/2)$ ۲) $y = \cos x - 1$ ۳) $y = 1 - (1/2)\cos x$ ۴) $y = \cos(x - \pi/2) + 1$

در هر شکل، نمودار خط‌چین نمودار $y = \cos x$ است.

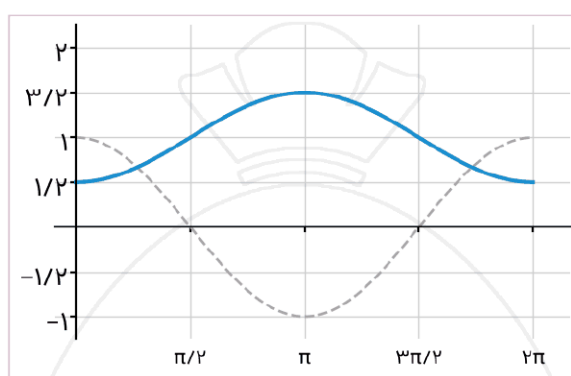
۱) $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ ؛ نمودار کسینوس به اندازه $\pi/2$ به چپ منتقل می‌شود (معادل قرینه نمودار سینوس نسبت به محور x است).



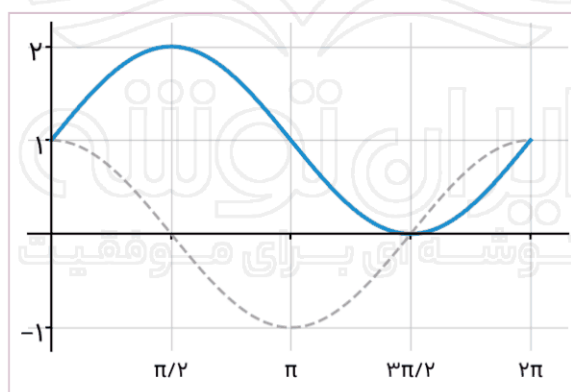
۲) نمودار کسینوس یک واحد به پایین منتقل می‌شود؛ برد $[-2, 0]$ است.



۳) نمودار کسینوس ابتدا نسبت به محور x قرینه، سپس با ضریب $1/2$ فشرده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می‌شود؛ برد $[1/2, 3/2]$ است.



۴) پس این نمودار همان $y = \sin x + 1$ است (نمودار کسینوس به اندازه $\pi/2$ به راست و یک واحد به بالا منتقل می‌شود)؛ برد $[0, 2]$ است.



۱) آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y = \cos(x - \pi/2)$ ، $y = \sin x$

۲) $y = \sin(\pi/2 + x)$ ، $y = \cos x$

۳) $y = \cos(2\pi - x)$ ، $y = \cos x$

۴) $y = \sin(5\pi - x)$ ، $y = \sin x$

۱) منطبق‌اند. زیرا $\cos(x - \pi/2) = \cos(\pi/2 - x) = \sin x$

۲) منطبق‌اند. زیرا $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$

۳) منطبق‌اند. زیرا $\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$

۴) منطبق‌اند. زیرا $\sin(5\pi - x) = \sin(\pi - x + 4\pi) = \sin(\pi - x) = \sin x$

۲) نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

۱) $[0, 2\pi]$ ، $y = (1/2) \sin x$

۲) $[-2\pi, 2\pi]$ ، $y = 2\cos x + 1$

۳) $[-2\pi, 2\pi]$ ، $y = 1 - \sin x$

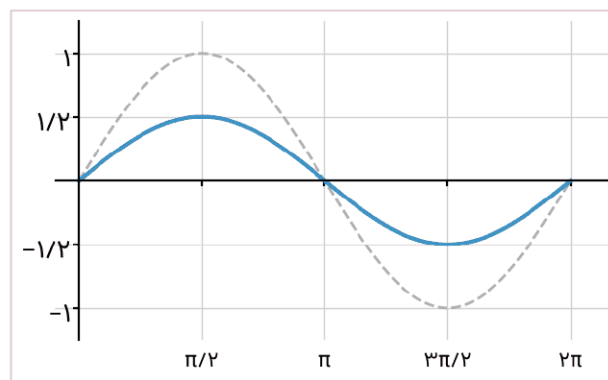
۴) $[-4\pi, 4\pi]$ ، $y = -1 + \cos x$

۵) $[0, 2\pi]$ ، $y = 1 + \sin(x + \pi/4)$

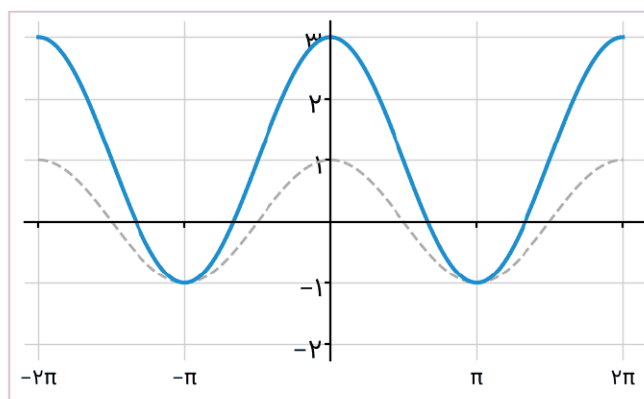
۶) $[2\pi, 4\pi]$ ، $y = \cos(x - \pi/2)$

در شکل‌ها، خط چین نمودار تابع پایه ($\sin x$ یا $\cos x$) است.

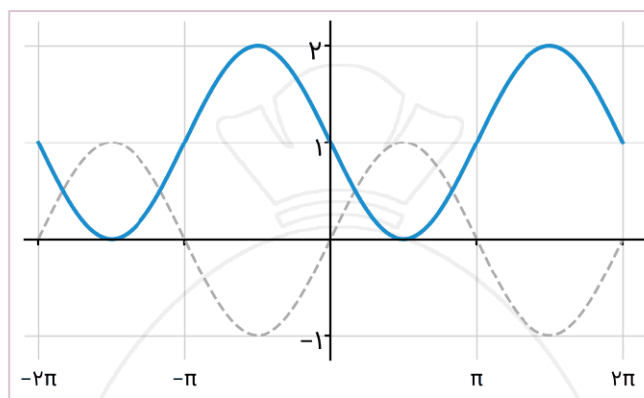
۱) $y = (1/2) \sin x$: دامنه نوسان نصف می‌شود؛ برد $[-1/2, 1/2]$.



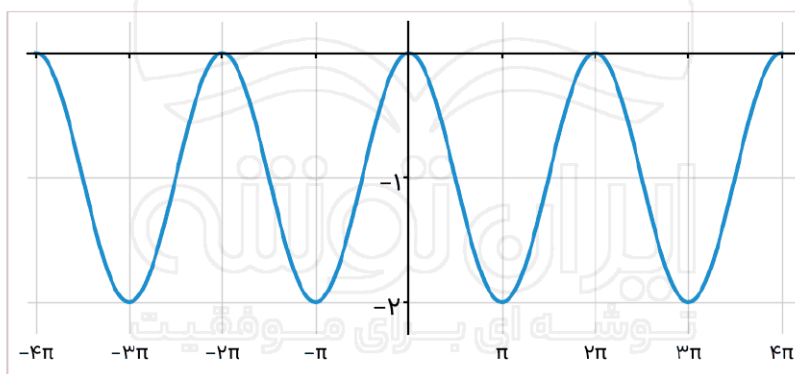
۲) $y = 2\cos x + 1$: دامنه نوسان ۲ برابر و نمودار یک واحد بالا می‌رود؛ برد $[-1, 3]$.



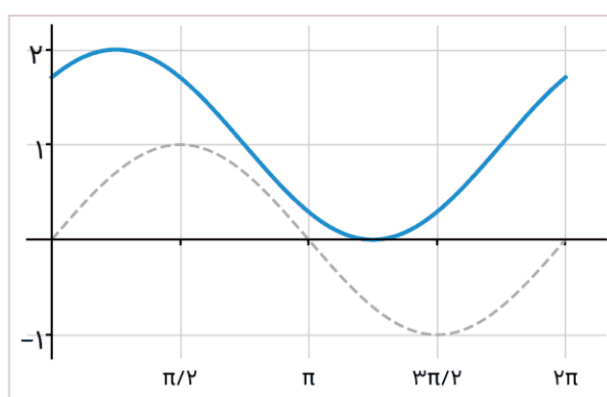
(۳) $y = 1 - \sin x$: قرینه $\sin x$ نسبت به محور x و سپس یک واحد بالا؛ برد $[0, 2]$.



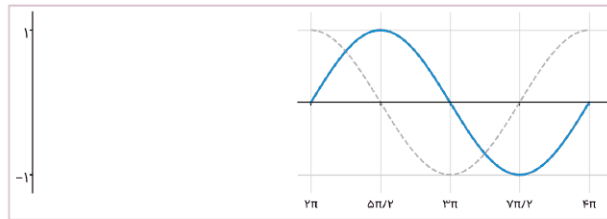
(۴) $y = -1 + \cos x$: نمودار کسینوس یک واحد پایین می‌آید؛ برد $[-2, 0]$.



(۵) $y = 1 + \sin(x + \pi/4)$: نمودار سینوس به اندازه $\pi/4$ به چپ و یک واحد به بالا منتقل می‌شود؛ برد $[0, 2]$.



۶) $y = \cos(x - \pi/2) = \sin x$: نمودار سینوس (همان یک دور تکرار شده سینوس) رسم می‌شود؛ برد $[-1, 1]$.



تمرین

صفحه ۹۴

۲۱۵

۳) با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.

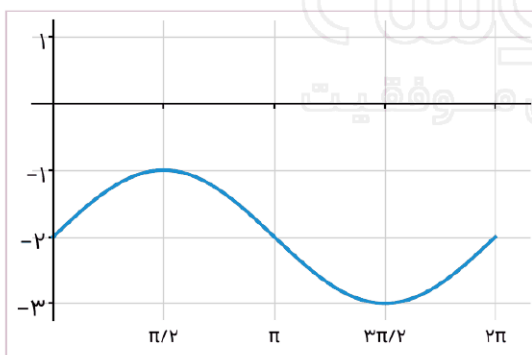
الف) $y = 2\cos x + 1$ (ب) $y = 2\sin x - 1$ (پ) $y = 2 - \cos x$ (ت) $y = \sin x - 2$

نمودار سمت چپ کتاب در $x = 0$ مقدار ۱، در $x = \pi$ مقدار ۳ و در $x = 2\pi$ دوباره مقدار ۱ دارد؛ نمودار سمت راست در $x = 0$ مقدار -۱، در $x = \pi/2$ مقدار ۱ و در $x = 3\pi/2$ مقدار -۳ دارد.

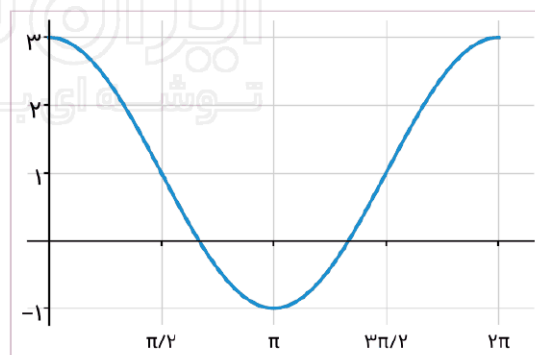
نمودار سمت چپ ← ضابطه (پ): $y = 2 - \cos x$ در $x = 0$ داریم $2 - 1 = 1$ ، در $x = \pi$ داریم $2 - (-1) = 3$ و در $x = 2\pi$ دوباره ۱ می‌شود.

نمودار سمت راست ← ضابطه (ب): $y = 2\sin x - 1$ در $x = 0$ داریم -۱، در $x = \pi/2$ داریم $2 - 1 = 1$ ، در $x = 3\pi/2$ داریم $2 - 3 = -1$.

برای ضابطه‌های دیگر، نمودار الف) $y = 2\cos x + 1$ (برد $[-1, 3]$ ، مقدار ۳ در $x = 0$) و ت) $y = \sin x - 2$ (برد $[-3, -1]$) به صورت زیر است:



ت) $y = \sin x - 2$



الف) $y = 2\cos x + 1$

۴) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟
 الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = (1/2) \sin x$ را نشان می‌دهد. (نموداری بین $-1/2$ و $1/2$ در بازه $[0, 2\pi]$ با بیشینه $1/2$ در $\pi/2$)
 ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - 1/2$ را نشان می‌دهد. (نموداری که از $1/2$ در $x = 0$ آغاز می‌شود، در $x = \pi$ به حدود $-3/2$ می‌رسد و در 2π دوباره $1/2$ است)
 پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور x ‌ها انتقال دهیم.
 ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ‌ها قرینه کنیم.

الف) درست. نمودار $y = \sin x$ با ضریب $1/2$ فشرده می‌شود: ماکزیمم $1/2$ در $x = \pi/2$ ، مینیمم $-1/2$ در $x = 3\pi/2$ و صفر در $x = 0, \pi, 2\pi$ ؛ دقیقاً مطابق شکل.
 ب) درست. $y = \cos x - 1/2$ در $x = 0$ مقدار $1/2 - 1/2 = 0$ ، در $x = \pi/2$ مقدار $-1/2$ ، در $x = \pi$ مقدار $-1 - 1/2 = -3/2$ و در $x = 2\pi$ دوباره $1/2$ است؛ این مقادارها با شکل (کمینه‌ای کمی پایین‌تر از خط -1) سازگار است.
 پ) نادرست. انتقال نمودار به اندازه یک واحد به موازات محور x ‌ها، تابع $\sin(x - 1)$ یا $\sin(x + 1)$ را می‌دهد. برای رسم $y = 1 + \sin x$ باید نمودار سینوس را یک واحد به بالا (به موازات محور y ‌ها) منتقل کنیم.
 ت) درست. چون $-\cos x$ قرینه $\cos x$ نسبت به محور x است (هر y به $-y$ تبدیل می‌شود).

طول روز به طور تقریبی در ایران در t امین روز سال بر حسب ساعت با استفاده از تابع مثلثاتی H با ضابطه زیر مدل سازی می شود: $H(t) = 12 + 2.4 \sin(2\pi/365 (t - 1))$. (مثلاً طول روز در اول مهر ماه که ۱۸۷ امین روز سال است، تقریباً برابر است با: $H(187) \approx 11.8$ ساعت.) حال شما طول روز تقریبی را در روزهای ۱۲ اردیبهشت ماه، ۱۵ مرداد ماه، ۲۲ بهمن ماه و ۳۰ آذر ماه به دست آورید.

ابتدا شماره هر روز را در سال می یابیم. شش ماه اول سال ۳۱ روزه (جمعاً ۱۸۶ روز) و ماه های مهر تا بهمن ۳۰ روزه اند:

تاریخ	(t) شماره روز	$t - 1$	بر حسب ساعت $H(t)$
۱۲ اردیبهشت	$31 + 12 = 43$	42	$12 + 2.4 \sin(2\pi \cdot 42/365) \approx 13.59$
۱۵ مرداد	$4 \times 31 + 15 = 139$	138	$12 + 2.4 \sin(2\pi \cdot 138/365) \approx 13.66$
۲۲ بهمن	$186 + 4 \times 30 + 22 = 328$	327	$12 + 2.4 \sin(2\pi \cdot 327/365) \approx 10.54$
۳۰ آذر	$186 + 3 \times 30 = 276$	275	$12 + 2.4 \sin(2\pi \cdot 275/365) \approx 9.60$

پس طول روز تقریباً $۱۳٫۶$ ساعت در ۱۲ اردیبهشت، $۱۳٫۷$ ساعت در ۱۵ مرداد، $۱۰٫۵$ ساعت در ۲۲ بهمن و $۹٫۶$ ساعت در ۳۰ آذر (کوتاه ترین روز سال) است. (ماشین حساب باید در حالت رادیان باشد.)

ریاضی ۲ یازدهم - فصل پنجم

توابع نمایی و لگاریتمی

فهرست

۲۳۵	صفحه ۱۰۶ فعالیت — وارون تابع نمایی 3^x و تابع لگاریتمی	۱۹۱	...
۲۳۶	صفحه ۱۰۷ کار در کلاس — توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگر	۱۹۲	...
۲۳۷	صفحه ۱۰۷ کار در کلاس — برآورد مقدار لگاریتم از روی نمودار	۱۹۳	...
۲۳۸	صفحه ۱۰۸ کار در کلاس — نوشتن ضابطه تابع لگاریتمی از روی نمودار	۱۹۳	...
۲۳۹	صفحه ۱۰۸ فعالیت — دامنه و برد تابع لگاریتمی	۱۹۴	...
۲۴۰	صفحه ۱۰۹ فعالیت — رابطه نمایی و لگاریتمی (مبنای ۲)	۱۹۵	...
۲۴۱	صفحه ۱۱۰ کار در کلاس — تبدیل شکل نمایی و لگاریتمی	۱۹۶	...
۲۴۲	صفحه ۱۱۱ فعالیت ۱ — ویژگی‌های لگاریتم (۱)	۱۹۶	...
۲۴۳	صفحه ۱۱۱ فعالیت ۲ — لگاریتم حاصل ضرب	۱۹۷	...
۲۴۴	صفحه ۱۱۱ فعالیت ۳ — لگاریتم توان	۱۹۷	...
۲۴۵	صفحه ۱۱۱ فعالیت ۴ — لگاریتم خارج قسمت	۱۹۸	...
۲۴۶	صفحه ۱۱۱ خواندنی — فشار هوا در قله دماوند	۱۹۸	...
۲۴۷	صفحه ۱۱۲ کار در کلاس — محاسبه تقریبی لگاریتم	۱۹۹	...
۲۴۸	صفحه ۱۱۲ فعالیت — معادلات لگاریتمی	۱۹۹	...
۲۴۹	صفحه ۱۱۳ کار در کلاس — حل معادلات لگاریتمی	۲۰۰	...
۲۵۰	صفحه ۱۱۳ تمرین ۱ — اثبات تساوی‌های لگاریتمی	۲۰۱	...
۲۵۱	صفحه ۱۱۴ تمرین ۲ — محاسبه عبارت‌های لگاریتمی	۲۰۱	...
۲۱۸	صفحه ۹۶ فعالیت — جام حذفی فوتبال و الگوی توان‌دار	۱۷۷	...
۲۱۹	صفحه ۹۷ فعالیت — جدول و نمودار تابع 2^x	۱۷۸	...
۲۲۰	صفحه ۹۸ کار در کلاس — مقایسه نمودار 2^x و x^2	۱۷۹	...
۲۲۱	صفحه ۹۹ فعالیت — نمودار تابع نمایی $y = 2^x$	۱۸۰	...
۲۲۲	صفحه ۱۰۰ کار در کلاس — نمودار تابع $y = 4^x$	۱۸۱	...
۲۲۳	صفحه ۱۰۰ خواندنی — محاسبه توان‌های حقیقی با ماشین حساب	۱۸۲	...
۲۲۴	صفحه ۱۰۱ فعالیت — نمودار تابع $y = (1/2)^x$	۱۸۳	...
۲۲۵	صفحه ۱۰۲ کار در کلاس — تقارن نمودار 2^x و $(1/2)^x$	۱۸۴	...
۲۲۶	صفحه ۱۰۲ کار در کلاس — رسم نمودار $y = (1/2)^x$	۱۸۵	...
۲۲۷	صفحه ۱۰۳ فعالیت — دامنه و برد تابع نمایی	۱۸۵	...
۲۲۸	صفحه ۱۰۴ تمرین ۱ — تشخیص تابع نمایی	۱۸۶	...
۲۲۹	صفحه ۱۰۴ تمرین ۲ — نقاط روی نمودار $y = 3^x$	۱۸۶	...
۲۳۰	صفحه ۱۰۴ تمرین ۳ — درست یا نادرست درباره توابع نمایی	۱۸۷	...
۲۳۱	صفحه ۱۰۴ تمرین ۴ — مقدار تقریبی توان‌های گنگ از روی نمودار	۱۸۸	...
۲۳۲	صفحه ۱۰۴ تمرین ۵ — محاسبه مقدار توابع نمایی	۱۸۸	...
۲۳۳	صفحه ۱۰۴ تمرین ۶ — حل معادلات نمایی	۱۸۹	...
۲۳۴	صفحه ۱۰۵ فعالیت — وارون تابع نمایی 2^x	۱۹۰	...

۲۵۵ ۲۵۸ صفحه ۱۱۶ کار در کلاس — ضابطهٔ توابع انتقال یافته	۲۵۲ ۱۱۴ تمرین ۳ — مقدار تابع لگاریتمی
۲۵۵ ۲۵۹ صفحه ۱۱۶ کار در کلاس — نظیر کردن ضابطه‌ها با نمودارها	۲۵۳ ۱۱۴ تمرین ۴ — تعیین پایهٔ تابع لگاریتمی
۲۵۶ ۲۶۰ صفحه ۱۱۷ کار در کلاس — انرژی زلزلهٔ رودبار - منجیل	۲۵۴ ۱۱۴ تمرین ۵ — رسم نمودار $y = \log_{\frac{4}{3}} x$
۲۵۶ ۲۶۱ صفحه ۱۱۸ تمرین ۱ — تعیین a و b از روی نمودار	۲۵۵ ۱۱۴ تمرین ۶ — درستی و نادرستی گزاره‌های لگاریتمی
۲۵۶ ۲۶۲ صفحه ۱۱۸ تمرین ۲ — مقدار تابع $g(x) = 4^x + 2$	۲۵۶ ۱۱۴ تمرین ۷ — حل معادلات لگاریتمی
۲۵۷ ۲۶۳ صفحه ۱۱۸ تمرین ۳ — رسم نمودار $y = 4^{-x} - 1$	۲۵۷ ۱۱۵ فعالیت — نظیر کردن ضابطه و نمودار (انتقال توابع)
۲۵۸ ۲۶۴ صفحه ۱۱۸ تمرین ۴ — رسم نمودار توابع انتقال یافته	



مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴-۹۳ با شرکت ۳۲ تیم و در پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا بازی نهایی به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می بینید، در هر مرحله تیم برنده به مرحله بعدی می رود و تیم بازنده حذف می شود؛ به همین دلیل جام حذفی نامیده می شود.

(۱) در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟

(۲) در مرحله قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟

(۳) تعداد تیم ها در هر مرحله با تعداد تیم ها در مرحله قبل از آن چه ارتباطی دارد؟

(۴) چه رابطه ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟

(۵) با توجه به الگوی ارائه شده در شکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم های اولیه چند است؟

(۶) اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم ها y باشد، چه رابطه ای بین x و y برقرار است؟

(۱) در بازی نهایی ۲ تیم حضور دارند.

(۲) در مرحله قبل از بازی نهایی (نیمه نهایی) ۴ تیم حضور دارند.

(۳) در هر مرحله نیمی از تیم ها حذف می شوند؛ پس تعداد تیم های هر مرحله دو برابر تعداد تیم های مرحله بعد از آن است.

(۴) اگر از بازی نهایی به عقب برگردیم، تعداد تیم ها در هر مرحله دو برابر می شود. با ۵ مرحله: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 = 2^5$ ؛ یعنی تعداد کل تیم ها برابر است با عدد ۲ به توان تعداد مراحل.

(۵) با ۶ مرحله: $2^6 = 64$ ؛ پس ۶۴ تیم در ابتدا شرکت داشته اند.

$$y = 2^x \quad (۶)$$

تعداد مراحل و تعداد کل تیم ها

(تعداد مراحل) x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y (تعداد تیم ها)	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴

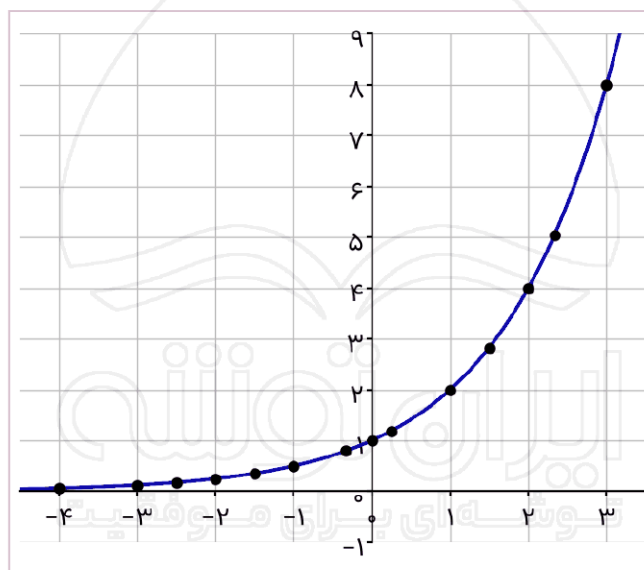
جدول زیر را کامل و نقاط به دست آمده را در نمودار مشخص کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

هر مقدار 2^x را با ماشین حساب (یا از روی خواص توان) حساب می‌کنیم؛ مثلاً $2^1 = 2$ ، $2^0 = 1$ ، $2^{-2} = 1/4 = 0.25$ ، $2^3 = 8$ و $2^2 = 4$.

x	-۴	-۳	-۵/۲	-۲	-۳/۲	-۱	-۱/۳
2^x	۰/۰۶	۰/۱۲	۰/۱۸	۰/۲۵	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۹

x	۰	۱/۴	۱	۳/۲	۲	۷/۳	۳
2^x	۱	۱/۱۹	۲	۲/۸۳	۴	۵/۰۴	۸

نقاط $(x, 2^x)$ را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم؛ مثلاً $(-4, 0.06)$ ، $(-1, 0.5)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 2)$ و $(3, 8)$. با وصل کردن این نقاط، منحنی هموار شکل زیر به دست می‌آید. هرچه x کوچک‌تر (منفی‌تر) شود، منحنی به محور x نزدیک‌تر می‌شود بی‌آنکه آن را قطع کند.



(۱) نمودار توابع با ضابطه‌های $y = x^2$ و $y = 2^x$ را با تکمیل جدول‌های زیر رسم کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

(۲) حال این دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^x و x^2 با هم مساوی‌اند؟

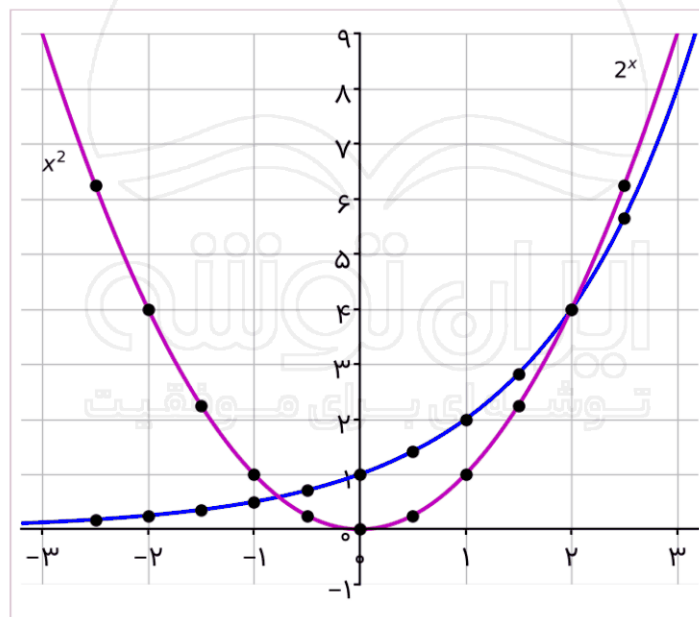
(۳) در x^2 متغیر در و عدد ثابت در است؛ ولی در 2^x ، در توان و در پایه است.

(۱) جدول‌ها را کامل می‌کنیم:

x	-۵/۲	-۲	-۳/۲	-۱	-۱/۲	۰	۱/۲	۱	۳/۲	۲	۵/۲
$y = x^2$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵

x	-۳	-۲	-۳/۲	-۱	-۱/۲	۰	۱/۲	۱	۳/۲	۲	۵/۲
$y = 2^x$	۰/۱۲	۰/۲۵	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۱	۱	۱/۴۱	۲	۲/۸۳	۴	۵/۶۶

نقاط هر جدول را در دستگاه مختصات مشخص و به هم وصل می‌کنیم (شکل زیر؛ منحنی بنفش $y = x^2$ و منحنی آبی $y = 2^x$).



(۲) دو نمودار در سه نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند: در $x = 2$ (مقدار مشترک ۴)، در $x = 4$ (مقدار مشترک ۱۶) و در نقطه‌ای در سمت چپ محور y با طول تقریبی $x \approx -0.77$ (بین -۱ و -۰.۵). پس در سه نقطه $2^x = x^2$ است.

(۳) در x^2 متغیر (x) در پایه و عدد ثابت (۲) در توان است؛ ولی در 2^x ، متغیر (x) در توان و عدد ثابت (۲) در پایه است.

در شکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطه $y = 2^x$ رسم شده است.

(۱) محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟

(۲) دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.

(۳) آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

(۴) عدد $\sqrt{2}$ را روی محور x ‌ها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $2^{(\sqrt{2})}$ را به صورت تقریبی به دست آورید.

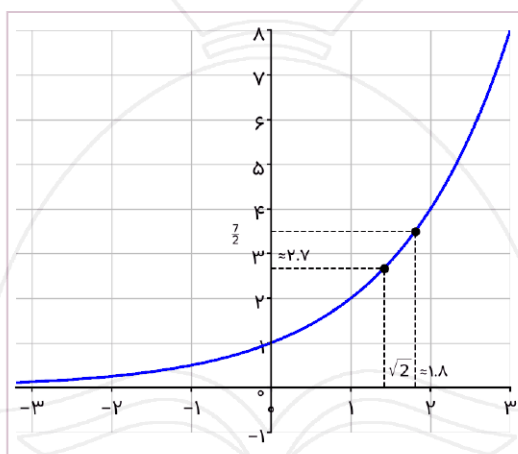
(۵) عدد $7/2$ روی محور y ‌ها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را از روی محور

طول‌ها به دست آورید؛ به طوری که $7/2 \approx 2^a$.

(۶) اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$2^{(\sqrt{5})}, 2^{3/2}, 2^{5/2}, 2^{(0.3)}, 2^5, 2^{(-0.4)}, 2^{-1}$$

(۷) در حالت کلی اگر $x < y$ ، چه رابطه‌ای بین 2^y و 2^x برقرار است؟



(۱) نمودار محور y ‌ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کند (چون $2^0 = 1$).

(۲) دامنه: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; برد: $(0, +\infty)$ (نمودار همواره بالای محور x ‌ها است).

(۳) بله، یک‌به‌یک است؛ زیرا هر خط افقی (موازی محور x ‌ها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ یعنی دو عدد متفاوت $x_1 \neq x_2$ هرگز مقدار یکسان $2^{(x_1)} = 2^{(x_2)}$ نمی‌دهند.

(۴) $\sqrt{2} \approx 1.41$ را روی محور x ‌ها مشخص می‌کنیم و از آن خطی قائم تا نمودار و از نقطه برخورد خطی افقی تا محور y ‌ها می‌کشیم (شکل زیر): $2^{(\sqrt{2})} \approx 2.7$.

(۵) از عدد $7/2 = 3.5$ روی محور y ‌ها خطی افقی تا نمودار و از آنجا خطی قائم تا محور x ‌ها می‌کشیم؛ طول نقطه برخورد تقریباً $a \approx 1.8$ است (راستی‌آزمایی: $2^{(1.8)} \approx 3.48$).

(۶) چون تابع 2^x صعودی است، اعداد به ترتیب توان‌هایشان مرتب می‌شوند. توان‌ها: $-1 < -0.4 < 0.3 < 3/2$. پس: $2^{-1} < 2^{(-0.4)} < 2^{(0.3)} < 2^{3/2} < 2^{(\sqrt{5})} < 2^{5/2} < 2^5$.

(۷) اگر $x < y$ آنگاه $2^x < 2^y$ (تابع 2^x اکیداً صعودی است).

نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.

(۱) جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع $y = 4^x$ را رسم کنید.

(۲) دامنه و برد توابع فوق را با هم مقایسه کنید.

(۳) با استفاده از نمودار، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $4^{\sqrt{5}} \bigcirc 4^{\sqrt{7}}$ ب) $3^{7/3} \bigcirc 3^{2.5}$

۴) اگر $x < y$ ، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^x \bigcirc 3^y$ ب) $4^x \bigcirc 4^y$

جدول داده شده $y = 3^x$

x	-۲	-۳/۲	-۱	۰	۱/۲	۱
$y = 3^x$	۰/۱۱	۰/۱۹	۰/۳۳	۱	۱/۷۳	۳

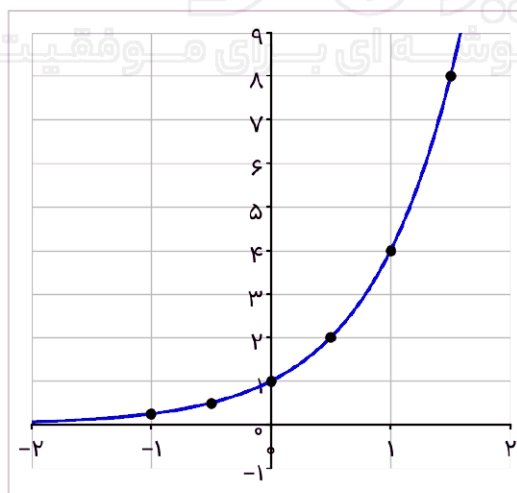
جدول تکمیل نشده $y = 4^x$

x		-۱/۲	۰	۱/۲	۳/۲
$y = 4^x$	۱/۴	۱/۲			۸

(۱) مقدار 4^x را حساب می‌کنیم: $4^{3/2} = 8$ و $4^{1/2} = 2$ ، $4^0 = 1$ ، $4^{-1/2} = 1/2$ ، $4^{-1} = 1/4$.

x	-۱	-۱/۲	۰	۱/۲	۳/۲
$y = 4^x$	۱/۴	۱/۲	۱	۲	۸

با نقاط جدول (و نقاط $(-2, 1/16)$ ، $(1, 4)$) نمودار زیر به دست می‌آید.



(۲) هر دو تابع دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0, +\infty)$ دارند. نمودار هر دو از نقطه $(0, 1)$ می‌گذرد، صعودی است و محور x ها را قطع نمی‌کند. تفاوت: برای $x > 0$ نمودار 4^x تندتر بالا می‌رود (بالتر از 3^x است) و برای $x < 0$ به محور x ها نزدیک‌تر است.

(۳) هر دو تابع صعودی‌اند، پس توان بزرگ‌تر مقدار بزرگ‌تری می‌دهد (در کتاب $2/5$ یعنی عدد اعشاری 2.5):

○ الف $2.5 > 7/3 \approx 2.33$ پس $3^{2.5} > 3^{7/3}$ (علامت $>$).

○ ب $\sqrt{7} \approx 2.65 > \sqrt{5} \approx 2.24$ پس $4^{\sqrt{7}} > 4^{\sqrt{5}}$ (علامت $>$).

(۴) الف $3^x < 3^y$ ب $4^x < 4^y$ (چون پایه‌ها بزرگ‌تر از ۱ و توابع صعودی‌اند).

خواندنی

صفحه ۱۰۰

۲۲۳

برای تمرین، مقادیر زیر را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید. (تا یک رقم اعشار)

(۱) $2^{\sqrt{2}}$ (۲) $2^{\sqrt{8}}$ (۳) $2^{0.1}$ (۴) $2^{-0.5}$ (۵) $2^{(1+\sqrt{3})}$

دکمه‌های x^y ، پرانتر $\sqrt{\quad}$ را مانند نمونه کتاب پشت سرهم می‌زنیم. نتیجه‌ها:

عبارت	۱	۲	۳	۴	۵
مقدار دقیق‌تر	۲/۶۶۵	۷/۱۰۳	۱/۰۷۲	۰/۷۰۷	۶/۶۴۴
تقریب تا یک رقم اعشار	۲/۷	۷/۱	۱/۱	۰/۷	۶/۶

(۱) $2^{\sqrt{2}} \approx 2.7$

(۲) $2^{\sqrt{8}} \approx 7.1$ (توجه: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ پس $2^{\sqrt{8}} = (2^{\sqrt{2}})^2$)

(۳) $2^{0.1} \approx 1.1$

(۴) $2^{-0.5} \approx 0.7$ (برابر $1/\sqrt{2}$)

(۵) $2^{(1+\sqrt{3})} \approx 6.6$

۱) با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = (1/2)^x$ را رسم کنید.

۲) محل تقاطع نمودار این تابع با محور y ها چه نقطه‌ای است؟

۳) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

۴) آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

۵) با استفاده از نمودار فوق، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $(1/2)^{0.5} \circ (1/2)^{1.5}$ ب) $(1/2)^{\sqrt{2}} \circ (1/2)^4$ پ) $(1/2)^4 \circ (1/2)^3$

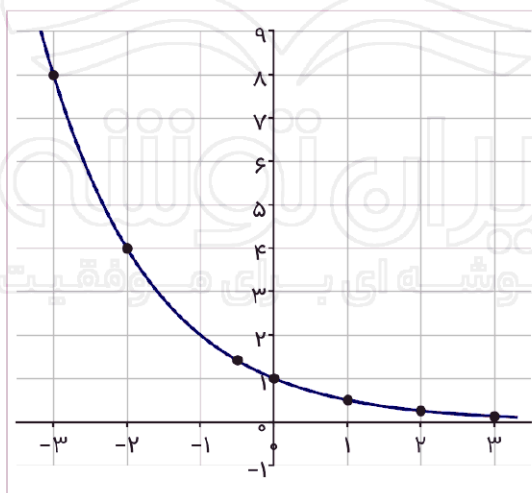
۶) با استفاده از نمودار، اگر $x < y$ ، چه رابطه‌ای بین $(1/2)^x$ و $(1/2)^y$ وجود دارد؟

جدول تکمیل نشده

x	-۳	-۲		۰	۱		۳
$y = (1/2)^x$			$\sqrt{2}$	۱		$1/4$	$1/8$

۱) جاهای خالی جدول: چون $(1/2)^{-1/2} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$ پس $x = -1/2$ ؛ و چون $(1/2)^2 = 1/4$ پس $x = 2$. بقیه مقادیرها:

x	-۳	-۲	-۱/۲	۰	۱	۲	۳
$y = (1/2)^x$	۸	۴	$\sqrt{2}$	۱	$1/2$	$1/4$	$1/8$



۱) نمودار محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کند.

۲) دامنه: $\mathbb{R}$ ؛ برد: $(0, +\infty)$.

۳) بله، یک‌به‌یک است؛ زیرا هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

(۴) الف $0.5 < 1.5$ و تابع نزولی است، پس $(1/2)^{0.5} > (1/2)^{1.5}$ (علامت >). (در کتاب ۵/۰ و ۱/۵ اعداد اعشاری‌اند.) ب $4 > 1.41 \approx \sqrt{2}$ پس $(1/2)^4 > (1/2)^{\sqrt{2}}$ (علامت >). پ $4 > 3$ پس $(1/2)^4 < (1/2)^3$ (علامت <).

(۵) اگر $x < y$ آنگاه $(1/2)^x < (1/2)^y$ (تابع $(1/2)^x$ نزولی است؛ با بزرگ‌تر شدن x ، مقدار تابع کوچک‌تر می‌شود).

کار در کلاس

صفحه ۱۰۲

۲۲۵

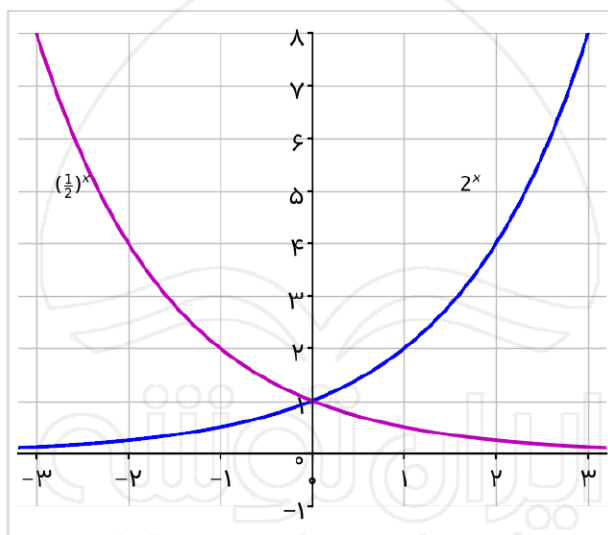
نمودار توابع $y = 2^x$ و $y = (1/2)^x$ را در نظر بگیرید.

(۱) نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟

(۲) با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطه $y = 2^x$ به تابع با ضابطه $y = \dots\dots\dots$ یا همان $y = \dots\dots\dots$ دست می‌یابیم.

(۳) دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟

(۴) دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور y ها قرینه‌اند، مثال بزنید.



(۱) نمودارها نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

(۲) $y = 2^{-x}$ یا همان $y = (1/2)^x$ (زیرا $2^{-x} = (2^{-1})^x = (1/2)^x$).

(۳) دامنه هر دو $\mathbb{R}$ و برد هر دو $(0, +\infty)$ است؛ یعنی دامنه و برد آنها یکسان است.

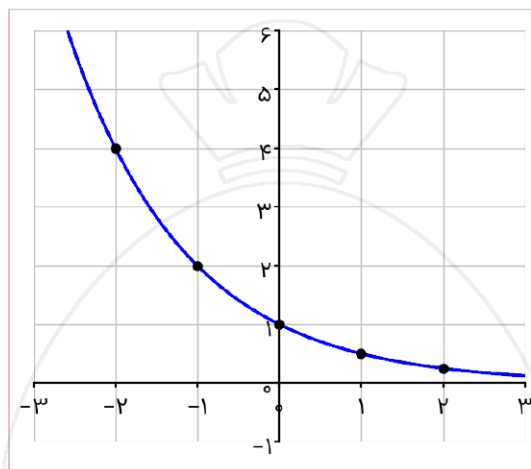
(۴) مثلاً $y = 3^x$ و $y = (1/3)^x$ ؛ یا $y = 5^x$ و $y = (1/5)^x$. در حالت کلی $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

نمودار تابع با ضابطه $y = (1/2)^x$ را رسم کنید.

چند نقطه از نمودار را به دست می آوریم:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = (1/2)^x$	۴	۲	۱	۱/۲	۱/۴

نقاط را در دستگاه مختصات مشخص و به هم وصل می کنیم. نمودار نزولی است، از نقطه $(0, 1)$ می گذرد و وقتی x بزرگ می شود به محور x ها نزدیک می شود (بدون آنکه آن را قطع کند).



با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جمله های زیر را تکمیل کنید.

(۱) دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ ($a > 1$) مجموعه اعداد حقیقی و برد آن است.

(۲) دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ ($0 < a < 1$) و برد آن بازه $(0, +\infty)$ است.

(۳) نمودار توابع فوق محور y ها را در نقطه قطع می کند و محور x ها را در هیچ نقطه ای قطع نمی کند.

(۴) این دو تابع، یک به یک زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در نقطه قطع می کند.

(۱) برد آن $(0, +\infty)$ (مجموعه اعداد حقیقی مثبت) است.

(۲) دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ است.

(۳) $(0, 1)$ (چون $a^0 = 1$).

(۴) این دو تابع یک به یک هستند، زیرا خطوط موازی محور x ها نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$ (ب) $y = x^3$ (پ) $y = (0.1)^x$

ت) $y = (3/2)^x$ (ث) $y - 3x = 2$ (ج) $y = \sqrt{x-1}$

تابع نمایی به شکل $y = a^x$ است که $a > 0$ و $a \neq 1$ و متغیر در **توان** قرار دارد.

○ الف) چندجمله‌ای درجه ۲ است؛ نمایی نیست.

○ ب) x^3 : متغیر در پایه است؛ نمایی نیست.

○ پ) $y = (0.1)^x$: پایه ۰.۱ مثبت و مخالف ۱ است؛ **نمایی** است.

○ ت) $y = (3/2)^x$: پایه ۳/۲ مثبت و مخالف ۱ است؛ **نمایی** است.

○ ث) $y = 3x + 2$ خطی است؛ نمایی نیست.

○ ج) تابع رادیکالی است؛ نمایی نیست.

پاسخ: گزینه‌های «پ» و «ت».

کدام یک از نقطه‌های زیر، روی نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1, 0)$ (ب) $(3, 1)$ (پ) $(0, 1)$ (ت) $(\sqrt{3}, 1/3)$ (ث) $(1, 3)$ (ج) $(-1, 1/3)$

نقطه (a, b) روی نمودار است اگر $3^a = b$ باشد:

○ الف) $3^1 = 3 \neq 0$

○ ب) $3^3 = 27 \neq 1$

○ پ) $3^0 = 1$ ✓

○ ت) $3^{(\sqrt{3})} \approx 6.7 \neq 1/3$

○ ث) $3^1 = 3$ ✓

○ ج) $3^{-1} = 1/3$ ✓

پاسخ: نقطه‌های «پ»، «ث» و «ج».

کدام گزاره صحیح است؟

- الف) نقطه $(1/2, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y = 5^x$ قرار دارد.
 ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 10^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 10)$ است.
 پ) دامنه توابع با ضابطه های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی اند.
 ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 6^x$ با محور x ها، نقطه $(6, 0)$ است.

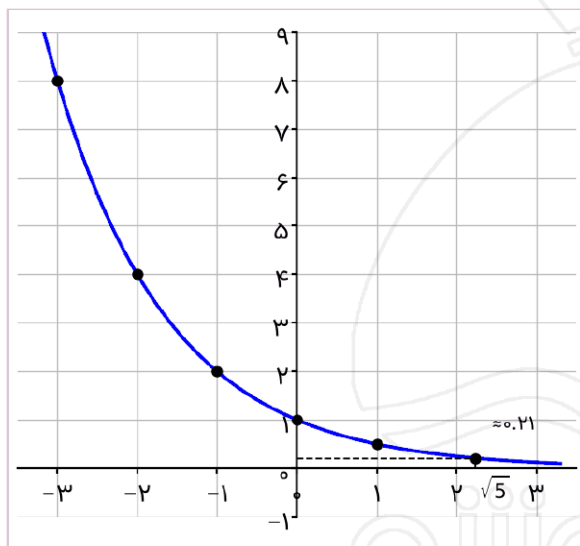
- الف) درست: $5^{1/2} = \sqrt{5}$.
 ○ ب) نادرست: $10^0 = 1$ پس نمودار محور y ها را در $(0, 1)$ قطع می کند، نه $(0, 10)$.
 ○ پ) درست: دامنه هر دو تابع $\mathbb{R}$ است.
 ○ ت) نادرست: 6^x همواره مثبت است و هرگز صفر نمی شود؛ پس نمودار محور x ها را قطع نمی کند.
 پاسخ: گزاره های «الف» و «پ» صحیح اند.



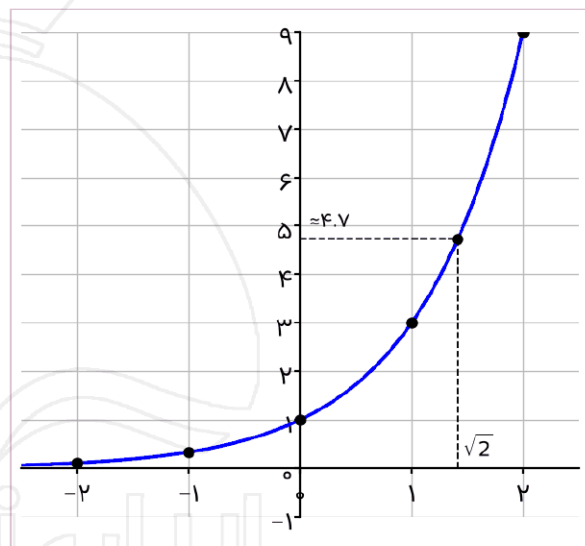
الف) نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.
 ب) نمودار تابع با ضابطه $y = (1/2)^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(1/2)^{\sqrt{5}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

الف) جدول: $3^{-2} = 1/9$, $3^{-1} = 1/3$, $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$. نقاط را به هم وصل می‌کنیم. $\sqrt{2} \approx 1.41$ را روی محور x ها مشخص و از آن خط قائم تا نمودار و سپس خط افقی تا محور y ها رسم می‌کنیم؛ مقدار تقریبی $3^{\sqrt{2}} \approx 4.7$ به دست می‌آید.

ب) جدول: $(1/2)^{-3} = 8$, $(1/2)^{-2} = 4$, $(1/2)^{-1} = 2$, $(1/2)^0 = 1$, $(1/2)^1 = 1/2$. $\sqrt{5} \approx 2.24$ را روی محور x ها مشخص می‌کنیم؛ مقدار تابع در این نقطه بین $(1/2)^3 = 0.125$ و $(1/2)^2 = 0.25$ است و از نمودار $(1/2)^{\sqrt{5}} \approx 0.21$ خوانده می‌شود.



ب



الف

توشه‌ای برای موفقیت

فرض کنیم $f(x) = 3^x$ و $g(x) = (1/16)^x$ و $h(x) = 10^x$ مقادیر زیر را به دست آورید.
 الف) $f(3)$ ب) $g(-1)$ پ) $h(-2)$

- الف) $f(3) = 3^3 = 27$
- ب) $g(-1) = (1/16)^{-1} = 16$
- پ) $h(-2) = 10^{-2} = 1/100 = 0.01$

معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{3n-2} = 1/32^2$ (ب) $9^{3y-3} = 27^{y+1}$ (پ) $4^{3x+2} = 1/64^3$

ت) $9^x = 3^{x^2-4x}$ (ث) $25/9 = (3/5)^2$

از یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم: اگر $a^x = a^y$ آنگاه $x = y$. دو طرف را با پایه یکسان می‌نویسیم.

الف) $32^2 = (2^5)^2 = 2^{10}$ پس $2^{3n-2} = 2^{-10} \Rightarrow 3n - 2 = -10 \Rightarrow n = -8/3$

ب) $9^{3y-3} = 3^{2(3y-3)} = 3^{6y-6}$ و $27^{y+1} = 3^{3y+3} \Rightarrow 6y - 6 = 3y + 3 \Rightarrow y = 3$

پ) $64^3 = (4^3)^3 = 4^9$ پس $4^{3x+2} = 4^{-9} \Rightarrow 3x + 2 = -9 \Rightarrow x = -11/3$

ت) $9^x = 3^{2x}$ پس $2x = x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = 6$

ث) $25/9 = (5/3)^2 = (3/5)^{-2}$ پس $x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3$



در درس اول با تابع نمایی $f(x) = 2^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

- ۱) دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به دست آورید.
- ۲) با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

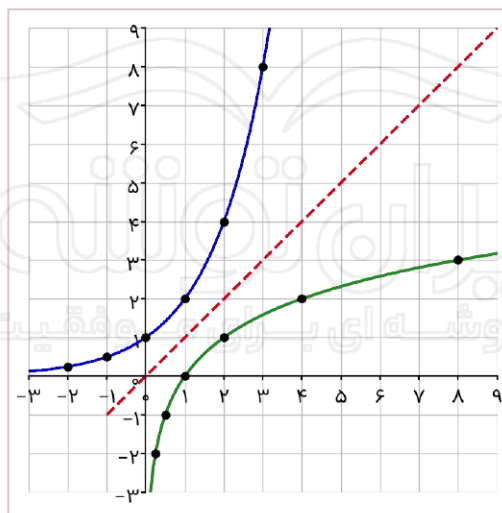
x	-۲	-۱	۰	۲
$f(x)$	$1/4$			

x	$1/4$	$1/2$	۱	۴
$f^{-1}(x)$				

نمودار f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به خط $y = x$ است؛ پس اگر (a, b) روی f باشد، (b, a) روی f^{-1} است.

- ۱) برای $f(x) = 2^x$ دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0, +\infty)$. برای f^{-1} دامنه $(0, +\infty)$ و برد $\mathbb{R}$. (دامنه و برد وارون با هم جابه جا می شوند.)

- ۲) جاهای خالی: $f^{-1}(4) = 2$, $f^{-1}(1) = 0$, $f^{-1}(1/2) = -1$, $f^{-1}(1/4) = -2$; $f(2) = 4$, $f(0) = 1$, $f(-1) = 1/2$.



نمودار تابع $f(x) = 3^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

(۱) با توجه به نقاط نمودار f ، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

(۲) با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

(۳) دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به دست آورید.

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع $f(x) = 3^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_3 x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در

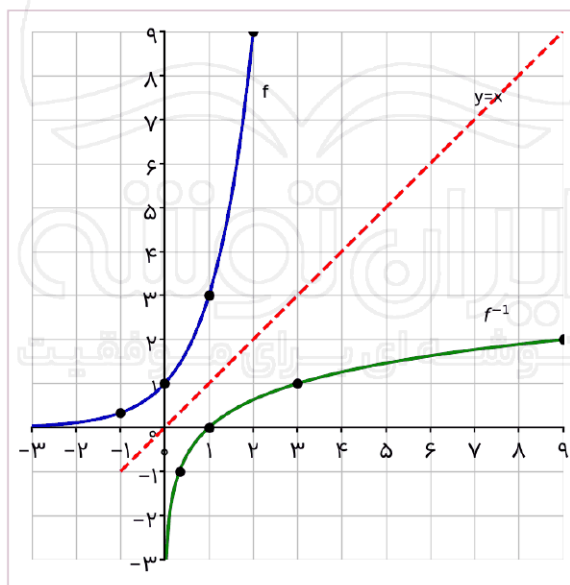
مبنای ۳ می‌نامیم. به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

(۴) با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به طور کلی بنویسید.

x	-۲	۰	۱	
$f(x)$	۱/۹			۹

x	۱/۹	۱		۹
$f^{-1}(x)$			۱	

(۱) نقطه‌های $(1, 3)$ ، $(2, 9)$ ، $(0, 1)$ و $(-1, 1/3)$ از f را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم؛ نقاط $(3, 1)$ ، $(9, 2)$ ، $(1, 0)$ و $(1/3, -1)$ روی f^{-1} به دست می‌آیند (منحنی سبز).



(۲) جدول کامل شده:

x	-۲	۰	۱	۲
$f(x) = 3^x$	۱/۹	۱	۳	۹

x	۱/۹	۱	۳	۹
-----	-----	---	---	---

$f^{-1}(x)$	-2	0	1	2
-------------	------	-----	-----	-----

(۳) f : دامنه $\mathbb{R}$ ، برد $(0, +\infty)$ ؛ f^{-1} : دامنه $(0, +\infty)$ ، برد $\mathbb{R}$.

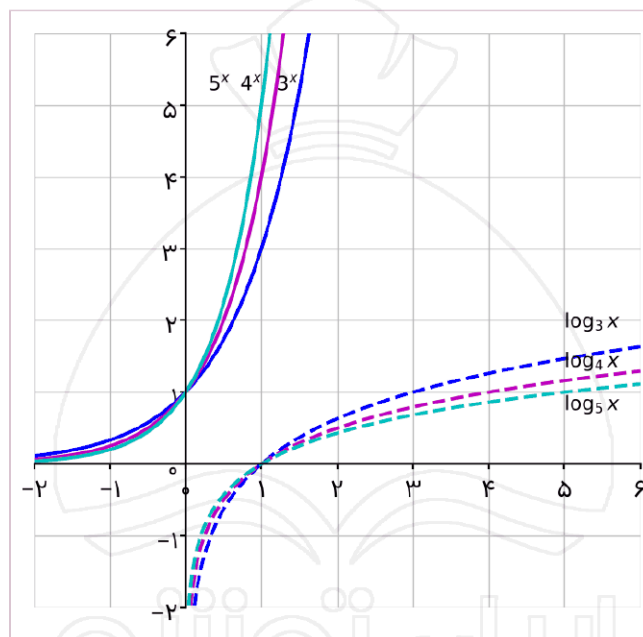
(۴) برای تابع نمایی: $f(x) = a^x$ دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0, +\infty)$. برای تابع لگاریتمی: $f(x) = \log_a x$ دامنه $(0, +\infty)$ و برد $\mathbb{R}$.

کار در کلاس

صفحه ۱۰۷

۲۳۶

در شکل مقابل، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطه آنها نوشته شده، ضابطه وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.



روی نمودار کتاب سه تابع نمایی 5^x ، 4^x ، 3^x و سه تابع لگاریتمی $\log_3 x$ ، $\log_4 x$ ، $\log_5 x$ رسم شده است. در نمودار، توابع 5^x و $\log_5 x$ نام گذاری شده‌اند؛ وارون آنها:

تابع	وارون آن	دامنه تابع	برد تابع
4^x	$\log_4 x$	$\mathbb{R}$	$(0, +\infty)$
3^x	$\log_3 x$	$\mathbb{R}$	$(0, +\infty)$
$\log_5 x$	5^x	$(0, +\infty)$	$\mathbb{R}$

سه تابع باقی‌مانده نیز وارون همین‌هاست: وارون $\log_4 x$ همان 4^x ، وارون $\log_3 x$ همان 3^x و وارون 5^x همان $\log_5 x$ است. برای هر تابع نمایی: a^x دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0, +\infty)$ ؛ برای هر تابع لگاریتمی: $\log_a x$ دامنه $(0, +\infty)$ و برد $\mathbb{R}$. نمودار هر جفت نسبت به خط $y = x$ قرینه است.

نمودار تابع $y = \log_{1/2} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) 3 $\log_{1/2}$ ب) $\log_{0.5}(1.5)$

نمودار $y = \log_{1/2} x$ از نقاط $(1/2, 1)$ ، $(1, 0)$ ، $(2, -1)$ ، $(4, -2)$ می‌گذرد و نزولی است (مقدار تابع هم‌زمان با بزرگ شدن x کم می‌شود).

○ الف) چون $2 < 3 < 4$ ، مقدار تابع بین -1 و -2 است؛ پس $-2 < \log_{1/2} 3 < -1$ (در واقع ≈ -1.58).

○ ب) چون $1 < 1.5 < 2$ ، مقدار تابع بین 0 و -1 است؛ پس $-1 < \log_{0.5}(1.5) < 0$ (در واقع ≈ -0.58).

(در کتاب «۱/۵» به شکل عدد اعشاری 1.5 نوشته شده است. اگر منظور کسر $1/5 = 0.2$ باشد، چون $1/8 < 1/5 < 1/4$ ، مقدار لگاریتم بین 2 و 3 است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطه مربوط به هر کدام را بنویسید.

هر نمودار از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد. اگر نمودار از نقطه $(a, 1)$ بگذرد، چون $\log_a a = 1$ ، پایه تابع برابر a است؛ پس پایه را از نقطه‌ای که $y = 1$ دارد می‌خوانیم و با نقطه دیگر امتحان می‌کنیم:

۱) نقاط $(1/2, 1)$ و $(2, -1)$: $y = \log_{1/2} x$ (زیرا $(1/2)^{-1} = 2$).

۲) نقاط $(2, 1)$ و $(4, 2)$: $y = \log_2 x$ (زیرا $2^2 = 4$).

۳) نقاط $(1/5, 1)$ و $(5, -1)$: $y = \log_{1/5} x$ (زیرا $(1/5)^{-1} = 5$).

۴) نقاط $(3, 1)$ و $(1/3, -1)$: $y = \log_3 x$ (زیرا $3^{-1} = 1/3$).

۵) نقاط $(1/3, 1)$ و $(3, -1)$: $y = \log_{1/3} x$ (زیرا $(1/3)^{-1} = 3$).

۶) نقاط $(5, 1)$ و $(1/5, -1)$: $y = \log_5 x$ (زیرا $5^{-1} = 1/5$).

نمودارهای (۲)، (۴) و (۶) صعودی‌اند (پایه بزرگ‌تر از ۱) و نمودارهای (۱)، (۳) و (۵) نزولی‌اند (پایه بین ۰ و ۱).

با توجه به مطالعی که تا به حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

- (۱) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ ($a > 1$)، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن است.
- (۲) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)، بازهٔ و برد آن است.
- (۳) نمودار توابع فوق، محور را در نقطهٔ قطع می‌کند و محور y ها را قطع نمی‌کند.
- (۴) این دو تابع، یک‌به‌یک زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در نقطه قطع می‌کند.
- (۵) وارون تابع نمایی، تابع است و وارون تابع لگاریتمی، تابع است.

(۱) برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ است.

(۲) دامنه: بازهٔ $(0, +\infty)$ ؛ برد: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

(۳) محور x ها را در نقطهٔ $(1, 0)$ قطع می‌کند (چون $\log_a 1 = 0$).

(۴) یک‌به‌یک هستند، زیرا خطوط موازی محور x ها نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند.

(۵) وارون تابع نمایی، تابع لگاریتمی است و وارون تابع لگاریتمی، تابع نمایی است.



نمودار تابع $f(x) = 2^x$ و $f^{-1}(x) = \log_2 x$ را در نظر بگیرید.
با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

جدول تکمیل نشده

لگاریتمی	نمایی
$\log_2(1/4) = -2$	$2^{-2} = 1/4$
$\log_2(1/2) = \dots\dots$	$2^{-1} = 1/2$
$\dots\dots$	$2^0 = 1$
$\log_2 2 = 1$	$\dots\dots$
$\dots\dots$	$2^2 = 4$
$\log_2 8 = \dots\dots$	$\dots\dots$

هر تساوی نمایی $2^y = x$ را به صورت لگاریتمی $\log_2 x = y$ می نویسیم و برعکس:

لگاریتمی	نمایی
$\log_2(1/4) = -2$	$2^{-2} = 1/4$
$\log_2(1/2) = -1$	$2^{-1} = 1/2$
$\log_2 1 = 0$	$2^0 = 1$
$\log_2 2 = 1$	$2^1 = 2$
$\log_2 4 = 2$	$2^2 = 4$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$

به طور کلی اگر $a^y = x$ آنگاه $\log_a x = y$ و به عکس $(a \neq 1, a > 0, x > 0)$.

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

نمونه‌ها: $\log_8 1 = 0 \rightarrow 8^0 = 1$ و $10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = 3$

از رابطه $b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a$ استفاده می‌کنیم. ردیف‌های سمت چپ جدول کتاب از شکل نمایی به لگاریتمی و ردیف‌های سمت راست از شکل لگاریتمی به نمایی تبدیل می‌شوند:

لگاریتمی $\leftarrow$ نمایی	نمایی $\leftarrow$ لگاریتمی
$\log_2(1/16) = -4 \rightarrow 2^{-4} = 1/16$	$9^{1/2} = 3 \rightarrow \log_9 3 = 1/2$
$\log_5 125 = 3 \rightarrow 5^3 = 125$	$4^3 = 64 \rightarrow \log_4 64 = 3$
$\log_{1/3} 27 = -3 \rightarrow (1/3)^{-3} = 27$	$2^5 = 32 \rightarrow \log_2 32 = 5$
$\log_{1/5} 125 = -3 \rightarrow (1/5)^{-3} = 125$	$2^{-3} = 1/8 \rightarrow \log_2(1/8) = -3$
$\log_{1/2} 16 = -4 \rightarrow (1/2)^{-4} = 16$	$3^{-4} = 1/81 \rightarrow \log_3(1/81) = -4$

اگر a عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، همواره داریم: $\log_a 1 = 0$ و $\log_a a = 1$ و $\log_a(1/a) = -1$

طبق تعریف لگاریتم ($\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$):

- $a^0 = 1$ پس $\log_a 1 = 0$ ؛
- $a^1 = a$ پس $\log_a a = 1$ ؛
- $a^{-1} = 1/a$ پس $\log_a(1/a) = -1$.

برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و $c \neq 1$ داریم: $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$
 اثبات: فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$ ، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$ ، از این رو $ab = c^m \cdot c^n$
 $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ و در نتیجه $\log_c ab = \dots\dots\dots$ بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم: $\log_c ab = \dots\dots\dots$

از $m = \log_c a$ طبق تعریف $a = c^m$ و از $n = \log_c b$ طبق تعریف $b = c^n$ است. پس

$$ab = c^m \cdot c^n = c^{m+n}$$

طبق تعریف لگاریتم، $\log_c ab = m + n$ و چون $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$:

$$\blacksquare \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

جاهای خالی: $a = c^m$ ، $b = c^n$ ، c^{m+n} ، $m + n$.

مثال کتاب: با $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.48$: $\log 6 = \log 3 + \log 2 \approx 0.48 + 0.3 = 0.78$

اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم: $\log_a b^n = n \log_a b$
 اثبات: $\log_a b^n = \log_a (b \cdot b \cdots b)$ (بار n) $= \log_a b + \dots + \log_a b$ (بار n) $= n \log_a b$

توان طبیعی یعنی ضرب مکرر: $b^n = b \cdot b \cdots b$ (بار n). طبق فعالیت ۲ لگاریتم حاصل ضرب برابر جمع لگاریتم‌هاست (این ویژگی برای چند عامل نیز برقرار است)، پس

$$(\text{جمله } n) \log_a b^n = \log_a (b \cdot b \cdots b) = \log_a b + \log_a b + \dots + \log_a b$$

$$\blacksquare = n \cdot \log_a b$$

جاهای خالی: در تساوی دوم $b \cdot b \cdots b$ (بار n) و در جمع، n جمله $\log_a b$ قرار می‌گیرد.

برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq 1$) داریم: $\log_c(a/b) = \log_c a - \log_c b$
 اثبات: فرض می‌کنیم $a/b = d$. بنابراین
 $a = bd \rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c d \rightarrow \log_c d = \log_c a - \dots\dots\dots$
 $\log_c(a/b) = \dots\dots\dots - \log_c \dots\dots\dots$

از $a/b = d$ نتیجه می‌شود $a = bd$. با لگاریتم گرفتن و استفاده از لگاریتم حاصل ضرب:

$$\log_c a = \log_c(bd) = \log_c b + \log_c d$$

پس $\log_c d = \log_c a - \log_c b$ و چون $d = a/b$:

$$\blacksquare \log_c(a/b) = \log_c a - \log_c b$$

جاهای خالی: $\log_c b$, $\log_c a$, $\log_c b$.

مثال کتاب: $\log 5 = \log(10/2) = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 \approx 1 - 0.3 = 0.7$.

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر (جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به صورت $a = 15500(5 - \log p)$ است، که در آن ارتفاع برحسب متر و p نیز فشار برحسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قله دماوند به ارتفاع ۵۶۱۰ متر محاسبه کنید.

$a = 5610$ را در رابطه می‌گذاریم (لگاریتم در مبنای ۱۰):

$$5610 = 15500(5 - \log p) \quad 5 - \log p = 5610/15500 \approx 0.362$$

$$\log p \approx 5 - 0.362 = 4.638 \quad p \approx 10^{(4.638)} \approx 43\,400$$

پاسخ: فشار هوا در قله دماوند تقریباً 4.3×10^4 پاسکال (حدود ۴۳ هزار پاسکال، نزدیک به نصف فشار سطح دریا $10^5 \approx$ پاسکال) است.

اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.48$ ، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به دست آورید.

$$(۱) \log 12 = \log(3 \times 4) = \log 3 + \log 2^2 = \log 3 + 2 \log 2 \approx 0.48 + 0.6 = 1.08$$

$$(۲) \log 0.75 = \log(3/4) = \log 3 - 2 \log 2 \approx 0.48 - 0.6 = -0.12$$

$$(۳) \log \sqrt{5} = (1/2) \log 5 \approx (1/2)(0.7) = 0.35$$

$$(۴) \log(25/18) = 2 \log 5 - \log 2 - 2 \log 3 \approx 1.4 - 0.3 - 0.96 = 0.14$$

$$(۵) \log \sqrt[3]{6} = (1/3) \log(2 \times 3) = (1/3)(\log 2 + \log 3) \approx (1/3)(0.78) = 0.26$$

$$(۶) \log(\sqrt{27} / \sqrt[4]{5}) = (3/2) \log 3 - (1/4) \log 5 \approx 0.72 - 0.175 = 0.545$$

$$\text{یادآوری: } \log 5 = \log(10/2) = 1 - \log 2 \approx 1 - 0.3 = 0.7$$

$$(۱) \text{ (نمونه کتاب) } \log 12 \approx 1.08$$

$$(۲) \log 0.75 = \log(3/4) = \log 3 - 2 \log 2 \approx 0.48 - 0.6 = -0.12$$

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$(۱) \log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1 \quad (۳) \log_5(x+6) = \log_5(2x-3) \quad (۲) \log_3 x = 2$$

$$(۴) \log_4(x+2) = \log_4 8 \quad (۵) \log_2 27 = -\log_2 x \quad (۶) 3 \log_2 x = \log(x+1) - \log(x-3)$$

در حل معادله لگاریتمی باید جواب‌ها را در معادله اصلی امتحان کنیم؛ زیرا عبارت داخل لگاریتم باید مثبت باشد.

$$(۱) \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2 = 9$$

$$(۲) x + 6 = 2x - 3 \Rightarrow x = 9 \text{ برای } x = 9 \text{ هر دو عبارت ۱۵ و مثبت‌اند؛ پس } x = 9 \text{ قابل قبول است.}$$

$$(۳) x = -7 \Rightarrow \log_5[(x+6)(x+2)] = 1 \Rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x+7)(x+1) = 0$$

$x = -1$ یا $x = -7$ برای $x = -7$ عبارت $x + 6 = -1$ منفی است، پس قابل قبول نیست؛ تنها جواب $x = -1$ است.

$$(۴) x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6 \text{ (قابل قبول، چون } x + 2 = 8 > 0 \text{)}$$

$$(۵) \log_2 x^3 = \log_2 27^{-1} = \log_2(1/27) \Rightarrow 3 \log_2 x = -\log_2 27 \Rightarrow \log_2 x^3 = \log_2 27^{-1} \Rightarrow x^3 = 1/27 \Rightarrow x = 1/3 \text{ (مثبت است و قابل قبول)}$$

$$(۶) \log((x+1)/(x-3)) = 3 \Rightarrow (x+1)/(x-3) = 10^3 = 1000 \Rightarrow 999x = 3001 \Rightarrow x + 1 = 1000x - 3000 \Rightarrow x = 3001/999 \approx 3.004$$

$x = 3001/999 \approx 3.004$ این مقدار از ۳ بزرگ‌تر است و هر دو عبارت $x + 1$ و $x - 3$ مثبت‌اند؛ پس قابل قبول است.

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_3 243 = 2x + 1 \quad (۴ \log_2(x + 1) + \log_2(x + 4) = 2) \quad (۳ \log_2(2x + 1) = 3) \quad (۲ \log_5 x = 3) \quad (۱)$$

$$2 \log_4(x - 1) = 3 \quad (۷ \log(2x) - \log(x - 3) = 1) \quad (۶ \log_3(x - 1) = 4) \quad (۵)$$

$$(۱) \quad x = 5^3 = 125$$

$$(۲) \quad 2x + 1 = 2^3 = 8 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = 7/2$$

$$(۳) \quad x = -5 \text{ عبارت‌های } x + 1 \text{ و } x + 4 \text{ منفی‌اند و قابل قبول نیست؛ جواب: } x = 0 \Rightarrow \log_2[(x + 1)(x + 4)] = 2 \Rightarrow (x + 1)(x + 4) = 4 \Rightarrow x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(x + 5) = 0$$

$$(۴) \quad 243 = 3^5 \text{ پس } \log_3 243 = 5 \Rightarrow 5 = 2x + 1 \Rightarrow x = 2$$

$$(۵) \quad x - 1 = 3^4 = 81 \Rightarrow x = 82$$

$$(۶) \quad \log(2x/(x - 3)) = 1 \Rightarrow 2x/(x - 3) = 10 \Rightarrow 2x = 10x - 30 \Rightarrow x = 30/8 = 15/4 \text{ (بزرگ‌تر از ۳ است و قابل قبول).}$$

$$(۷) \quad \log_4(x - 1) = 3/2 \Rightarrow x - 1 = 4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 8 \Rightarrow x = 9$$



تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

(الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ (a و b و c و d اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$)

(ب) $\log_b a = \log_c a / \log_c b$ (a و b و c اعداد حقیقی مثبت‌اند و $b \neq 1$ و $c \neq 1$)

(پ) $a^{(\log_a b)} = b$ (a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند و $a \neq 1$)

(ت) $\log_b a \times \log_a b = 1$

(الف) با دوبار استفاده از لگاریتم حاصل ضرب:

$$\blacksquare \log_c abd = \log_c(ab \cdot d) = \log_c ab + \log_c d = \log_c a + \log_c b + \log_c d$$

(ب) فرض می‌کنیم $y = \log_b a$ ؛ طبق تعریف $b^y = a$. از دو طرف لگاریتم در مبنای c می‌گیریم و از لگاریتم توان استفاده می‌کنیم:

$$\log_c b^y = \log_c a \implies y \cdot \log_c b = \log_c a \implies y = \log_c a / \log_c b$$

(چون $\log_c b \neq 0$ ، $b \neq 1$) پس $\log_b a = \log_c a / \log_c b$

(پ) فرض می‌کنیم $y = \log_a b$ ؛ طبق تعریف لگاریتم $a^y = b$. با جایگذاری:

(ت) طبق (ب) با: $\log_b a = \log_a a / \log_a b = 1 / \log_a b$ و $\log_a b = a$. بنابراین

$$\blacksquare \log_b a \times \log_a b = (1 / \log_a b) \times \log_a b = 1 \quad (\text{برای } a \neq 1 \text{ و } b \neq 1 \text{ مثبت})$$

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

(الف) $\log_7 \sqrt[5]{49}$ (ب) $\log_3 27^{1/2}$ (پ) $-\log_5 125$ (ت) $3 \log_{10} \sqrt[3]{1000}$

$$\text{(الف)} \log_7 \sqrt[5]{49} = \log_7 7^{2/5} = 2/5 \quad \text{پس } \sqrt[5]{49} = 49^{1/5} = (7^2)^{1/5} = 7^{2/5}$$

$$\text{(ب)} \log_3 27^{1/2} = (1/2) \log_3 27 = (1/2) \times 3 = 3/2$$

$$\text{(پ)} -\log_5 125 = -\log_5 5^3 = -3$$

$$\text{(ت)} 3 \log_{10} \sqrt[3]{1000} = 3 \times 3/2 = 9/2 \quad \text{پس } \sqrt[3]{1000} = 10^{3/2}$$

اگر $f(x) = 3 - 2 \log_4(x/2 - 5)$ ، مقدار $f(42)$ را به دست آورید.

$$f(42) = 3 - 2 \log_4(42/2 - 5) = 3 - 2 \log_4(21 - 5) = 3 - 2 \log_4 16$$

$$\log_4 16 = 2 \quad f(42) = 3 - 2 \times 2 = -1$$

الف) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.
 ب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(1/2, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

الف) $a = \sqrt{2} \quad a > 0$: چون $f(2) = 2 \Rightarrow \log_a 2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2$

ب) $a = \sqrt[4]{2} = 2^{1/4} \approx 1.19 \Rightarrow f(1/2) = -4 \Rightarrow \log_a(1/2) = -4 \Rightarrow a^{-4} = 1/2 \Rightarrow a^4 = 2$

(در کتاب، نقطه b به صورت « $(1/2, -4)$ » با چینش چپ به راست خوانده شد؛ چون تابع لگاریتمی برای x منفی تعریف نمی‌شود، طول نقطه باید $1/2$ و عرض آن -4 باشد.)

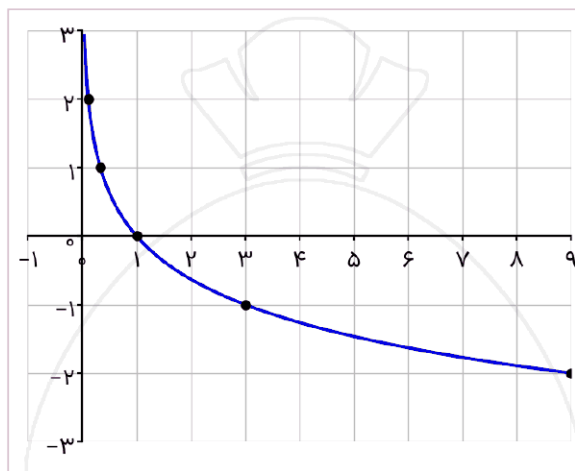
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{1/3} x$ را رسم کنید.

چند نقطه: $\log_{1/3} x = y \Leftrightarrow (1/3)^y = x$

x	۱/۹	۱/۳	۱	۳	۹
$y = \log_{1/3} x$	۲	۱	۰	-۱	-۲

پایه بین ۰ و ۱ است، پس نمودار نزولی است؛ دامنه $(0, +\infty)$ و برد $\mathbb{R}$ ؛ از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد و به محور y ها نزدیک می‌شود (بدون برخورد).



کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

(الف) اگر $y = \log_a x$ ، آنگاه $a^x = y$.

(ب) نمودار تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند.

(پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

○ (الف) نادرست: طبق تعریف $a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$ (توان y است نه x). مثلاً $y = \log_2 8 = 3$ ولی $2^8 = 256 \neq 3$.

○ (ب) درست: $\log_a 1 = 0$ برای هر پایه (از جمله $0 < a < 1$)؛ پس نقطه $(1, 0)$ روی نمودار است.

○ (پ) درست: a^y (با $a > 0$) همواره مثبت است؛ پس $x = a^y$ نمی‌تواند منفی باشد و دامنه تابع لگاریتمی فقط اعداد مثبت است.

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = 1$ (ب) $\log_2(p^2 - 2) = \log_2 p$

پ) $\log_{1/10}(x^2 - 21) = -2$ (ت) $3 \log_2 a - \log_2 5 = \log_2 25$

الف) $(p-2)(p+1) = 0 \Rightarrow p^2 - p - 2 = 0 \Rightarrow p^2 - 2 = p \Rightarrow p^2 - 2 = p \Rightarrow p^2 - p - 2 = 0 \Rightarrow (p-2)(p+1) = 0$ برای $p = -1$ یا $p = 2$. برای $p = -1$ لگاریتم p تعریف نمی‌شود؛ پس $p = 2$ (و $p^2 - 2 = 2 > 0$).

ب) $\log_5[(x+1)(x-1)] = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$ چون $x - 1 > 0$ لازم است، $x = -\sqrt{6}$ رد می‌شود؛ جواب: $x = \sqrt{6}$.

پ) $\log_2 a^3 - \log_2 5 = \log_2 25 \Rightarrow \log_2(a^3/5) = \log_2 25 \Rightarrow a^3/5 = 25 \Rightarrow a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$

ت) $x^2 - 21 = (1/10)^{-2} = 100 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = 11$ یا $x = -11$. در هر دو حالت $x^2 - 21 = 100 > 0$ است؛ پس هر دو جواب قابل قبول‌اند.

نمودار هر تابع را به ضابطه آن نظیر کنید.

الف) $h(x) = -(1/2)^x$ (ب) $k(x) = -\log_2 x$ (پ) $l(x) = 2 + \log x$

ت) $g(x) = \log(x-1)$ (ث) $z(x) = 3^{(x-1)}$ (ج) $f(x) = 2^x + 1$

هر ضابطه را با انتقال یا قرینه‌سازی تابع پایه به نمودار مناسب می‌رسانیم:

- ج) $2^x + 1$: نمودار 2^x یک واحد بالا رفته است؛ مجانب افقی $y = 1$ و عبور از $(0, 2) \leftarrow$ نمودار (۱).
- ت) $\log(x-1)$: نمودار لگاریتم یک واحد به راست رفته است؛ مجانب قائم $x = 1$ و عبور از $(2, 0) \leftarrow$ نمودار (۲).
- پ) $-(1/2)^x$: قرینه $(1/2)^x$ نسبت به محور x ها؛ زیر محور x ها و عبور از $(0, -1) \leftarrow$ نمودار (۳).
- ب) $2 + \log x$: نمودار لگاریتم دو واحد بالا رفته است؛ مجانب قائم $x = 0$ و عبور از $(1, 2) \leftarrow$ نمودار (۴).
- ث) $3^{(x-1)}$: نمودار 3^x یک واحد به راست رفته است؛ عبور از $(1, 1)$ و $(0, 1/3) \leftarrow$ نمودار (۵).
- الف) $-\log_2 x$: قرینه $\log_2 x$ نسبت به محور x ها؛ نزولی و عبور از $(1, 0) \leftarrow$ نمودار (۶).

ضابطه	الف	ب	پ	ت	ث	ج
شماره نمودار	۶	۴	۳	۲	۵	۱

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطه توابع انتقال یافته را بنویسید.

شکل سمت چپ (تابع نمایی $y = 4^x$):

- y_1 : مجانب افقی $y = 2$ و گذر از $(0, 3)$ ؛ نمودار 4^x دو واحد بالا رفته است: $y_1 = 4^x + 2$.
- y_2 : مجانب افقی $y = -2$ و گذر از $(0, -3)$ ؛ نمودار 4^x نسبت به محور x ها قرینه و سپس دو واحد پایین رفته است: $y_2 = -4^x - 2$.

شکل سمت راست (تابع لگاریتمی $y = \log_2 x$):

- y_1 : مجانب قائم همان $x = 0$ و گذر از $(1, 2)$ ، $(2, 3)$ ، $(4, 4)$ ؛ نمودار دو واحد بالا رفته است: $y_1 = \log_2 x + 2$.
- y_2 : مجانب قائم $x = 4$ و گذر از $(5, 0)$ ، $(8, 2)$ ؛ نمودار چهار واحد به راست رفته است: $y_2 = \log_2(x - 4)$.

کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

$$\begin{aligned} (۱) \quad y &= 1 - 3^x \quad (۳) \quad y = 3^x + 1 \quad (۲) \quad y = \log_3(x - 1) \\ (۴) \quad y &= 3^{(x-2)} \quad (۵) \quad y = 1 - \log_3 x \quad (۶) \quad y = \log_3 x - 1 \end{aligned}$$

نمودارها در کتاب به صورت ردیف بالا: (الف)، (ب)، (پ) و ردیف پایین: (ت)، (ث)، (ج) (از چپ به راست) نام‌گذاری شده‌اند.

- (۱) $\leftarrow$ (ت): مجانب قائم $x = 1$ و گذر از $(2, 0)$.
- (۲) $\leftarrow$ (ج): مجانب افقی $y = 1$ و گذر از $(0, 2)$.
- (۳) $\leftarrow$ (پ): نزولی، همواره کمتر از ۱ و گذر از مبدأ $(0, 0)$.
- (۴) $\leftarrow$ (الف): صعودی با مجانب قائم $x = 0$ و گذر از $(3, 0)$ (چون $\log_3 3 - 1 = 0$).
- (۵) $\leftarrow$ (ب): نزولی با مجانب قائم $x = 0$ و گذر از $(3, 0)$ و $(1, 1)$.
- (۶) $\leftarrow$ (ث): نمودار 3^x دو واحد به راست رفته است؛ گذر از $(2, 1)$ و $(3, 3)$.

زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار - منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقه بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

رابطه انرژی و بزرگی زلزله: $\log E = 11.8 + 1.5 M$. برای $M = 7.4$:

$$\log E = 11.8 + 1.5 \times 7.4 = 11.8 + 11.1 = 22.9$$

$$E = 10^{(22.9)} \approx 7.9 \times 10^{22}$$

پاسخ: انرژی آزاد شده در این زلزله حدود $10^{(22.9)} \approx 7.9 \times 10^{22}$ ارگ بوده است.

در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به دست آورید.

نمودار 2^x به اندازه b واحد افقی و a واحد قائم انتقال یافته است. در نمودار، مجانب افقی خط $y = 1$ است؛ پس $a = 1$.

نمودار از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد: $2 = 1 + 2^{(0-b)} \Rightarrow 2^{-b} = 1 \Rightarrow b = 0$.

پاسخ: $a = 1$ و $b = 0$ ؛ یعنی $y = 1 + 2^x$. (راستی‌آزمایی: $x = 1 \Rightarrow y = 3$ و $x = 2 \Rightarrow y = 5$ که با نمودار می‌خواند).

فرض می‌کنیم $g(x) = 4^x + 2$. الف) $g(-1)$ را به دست آورید. ب) اگر $g(x) = 66$ ، مقدار x چقدر است؟

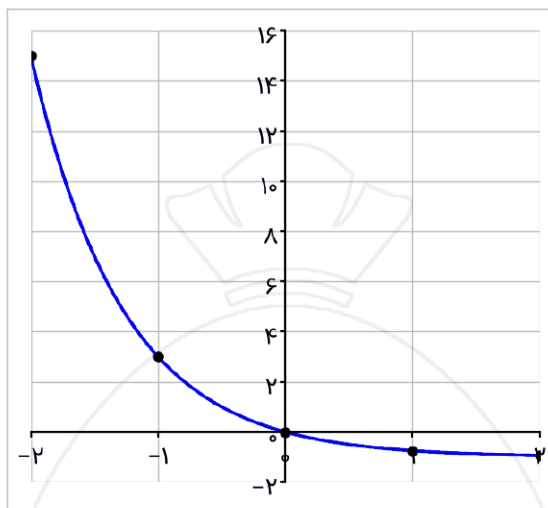
الف) $g(-1) = 4^{-1} + 2 = 1/4 + 2 = 9/4$

ب) $4^x + 2 = 66 \Rightarrow 4^x = 64 = 4^3 \Rightarrow x = 3$

نمودار تابع $y = 4^{-x} - 1$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

$y = 4^{-x} - 1 = (1/4)^x - 1$: نمودار $(1/4)^x$ است که یک واحد پایین آمده؛ نزولی با مجانب افقی $y = -1$.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = 4^{-x} - 1$	۱۵	۳	۰	-۳/۴	-۱۵/۱۶



نمودار توابع زیر را رسم کنید.

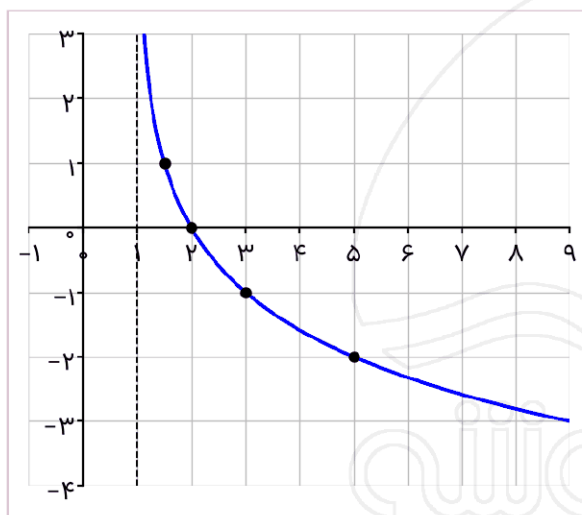
الف) $y = -2^x + 1$ ب) $y = -\log_2(x - 1)$

الف) نمودار 2^x را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم (-2^x) و یک واحد بالا می‌بریم. مجانب افقی $y = 1$ ؛ نقاط:

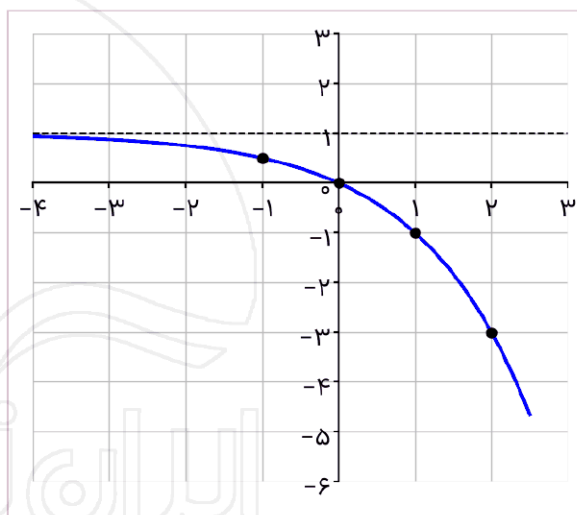
x	-۱	۰	۱	۲
$y = -2^x + 1$	$1/2$	۰	-۱	-۳

ب) نمودار $\log_2 x$ را یک واحد به راست می‌بریم ($\log_2(x - 1)$)، مجانب قائم $x = 1$ ، دامنه $(1, +\infty)$ و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نقاط:

x	$3/2$	۲	۳	۵
$y = -\log_2(x - 1)$	۱	۰	-۱	-۲



ب



الف

ریاضی ۲ یازدهم - فصل ششم

حد و پیوستگی

فهرست

۲۸۲	صفحه ۱۳۰ کار در کلاس — حد حاصل ضرب و توان	۲۶۵	صفحه ۱۲۰ فعالیت — چندضلعی‌های منتظم محاطی در دایره
۲۸۳	صفحه ۱۳۱ فعالیت — حد تابع چندجمله‌ای	۲۶۶	صفحه ۱۲۱ کار در کلاس — چندضلعی‌های منتظم محیطی
۲۸۴	صفحه ۱۳۱ فعالیت — حد تابع کسری (مخرج غیرصفر)	۲۶۷	صفحه ۱۲۱ فعالیت — مساحت مستطیل‌ها و حد از چپ و راست
۲۸۵	صفحه ۱۳۲ کار در کلاس — حد با ساده‌سازی $(x+2)/(x^2+5x+6)$	۲۶۸	صفحه ۱۲۳ مثال — حد چپ و راست تابع دو ضابطه‌ای
۲۸۶	صفحه ۱۳۳ کار در کلاس — حد با ساده‌سازی $(x-1)/(x^3-1)$	۲۶۹	صفحه ۱۲۵ فعالیت — رفتار سه تابع در نزدیکی ۴
۲۸۷	صفحه ۱۳۳ کار در کلاس — حد ریشه $((2x-6)^{1/3})$	۲۷۰	صفحه ۱۲۷ تمرین — تمرین ۱ — نمودار و حد
۲۸۸	صفحه ۱۳۴ کار در کلاس — بررسی گزاره‌های $h(x)= x /x$	۲۷۱	صفحه ۱۲۷ تمرین — تمرین ۲ — حد برابر ۱-
۲۸۹	صفحه ۱۳۴ کار در کلاس — حد جزء صحیح از روی نمودار	۲۷۲	صفحه ۱۲۷ تمرین — تمرین ۳ — تابع بدون حد با $f(3)=1$
۲۹۰	صفحه ۱۳۴ فعالیت — حدهای مثلثاتی	۲۷۳	صفحه ۱۲۷ تمرین — تمرین ۴ — حد ۴ و تعریف نشده در ۲
۲۹۱	صفحه ۱۳۵ تمرین — تمرین ۱ — حد با نمودار f و g	۲۷۴	صفحه ۱۲۷ تمرین — تمرین ۵ — حدهای $(x-2)^{1/3}$
۲۹۲	صفحه ۱۳۶ تمرین — تمرین ۱ (ادامه) — طرح پرسش مشابه	۲۷۵	صفحه ۱۲۷ تمرین — تمرین ۶ — بدون نقطه صفر
۲۹۳	صفحه ۱۳۶ تمرین — تمرین ۲ (دو تابع با حد برابر)	۲۷۶	صفحه ۱۲۷ تمرین — تمرین ۷ — سه تابع f, g, h
۲۹۴	صفحه ۱۳۶ تمرین — تمرین ۳ — محاسبه حدها	۲۷۷	صفحه ۱۲۷ تمرین — تمرین ۸ — وجود حد در $x=2$
۲۹۵	صفحه ۱۳۶ تمرین — تمرین ۴ — قوانین حد	۲۷۸	صفحه ۱۲۷ تمرین — تمرین ۹ — حد در صفر
۲۹۶	صفحه ۱۳۶ تمرین — تمرین ۵ — $ x-3 /(x-3)$ و ۱	۲۷۹	صفحه ۱۲۷ تمرین — تمرین ۱۰ — $ x /x$
۲۹۷	صفحه ۱۳۶ تمرین — تمرین ۶ — حد مجموع	۲۸۰	صفحه ۱۲۸ کار در کلاس — حد تابع ثابت و همانی
۲۹۸	صفحه ۱۳۶ تمرین — تمرین ۷ — حد جزء صحیح	۲۸۱	صفحه ۱۲۹ کار در کلاس — حد مجموع
۲۹۹	صفحه ۱۳۷ فعالیت — نمودارهای پیوسته و ناپیوسته		

۳۰۸ صفحه ۱۴۲۰ کار در کلاس — بازه بسته با پیوستگی متفاوت ... ۲۴۰

۳۰۹ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۱ — f, g, h در $x=2$... ۲۴۱

۳۱۰ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۲ — نمودار و ناپیوستگی ... ۲۴۱

۳۱۱ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۳ — $(x-3)/(x^2-9)$... ۲۴۲

۳۱۲ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۴ — پیوستگی جزء صحیح ... ۲۴۲

۳۱۳ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۵ — پیوستگی در صفر ... ۲۴۲

۳۱۴ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۶ — حد ۱- ولی ناپیوسته ... ۲۴۳

۳۱۵ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۷ — پیوستگی در $x=1$ از روی نمودار ... ۲۴۳

۳۱۶ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۸ — جرم کودک ... ۲۴۴

۳۰۰ صفحه ۱۳۸۰ فعالیت — مثال‌های دیگر از ناپیوستگی ... ۲۳۶

۳۰۱ صفحه ۱۳۹۰ کار در کلاس — ناپیوستگی در $x=1$... ۲۳۶

۳۰۲ صفحه ۱۳۹۰ فعالیت — پیوستگی راست $\sqrt{x-2}$... ۲۳۷

۳۰۳ صفحه ۱۴۰۰ کار در کلاس — پیوستگی چپ $g(x)$... ۲۳۷

۳۰۴ صفحه ۱۴۰۰ کار در کلاس — پیوستگی روی بازه‌های نیم باز ... ۲۳۸

۳۰۵ صفحه ۱۴۱۰ کار در کلاس — سه تابع روی بازه‌های مختلف ... ۲۳۸

۳۰۶ صفحه ۱۴۱۰ کار در کلاس — تابع سه ضابطه‌ای — نمودار، دامنه، پیوستگی ... ۲۳۹

۳۰۷ صفحه ۱۴۱۰ کار در کلاس — درست یا نادرست درباره پیوستگی f ... ۲۴۰



در دایره‌های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به گونه‌ای رسم شده‌اند که رأس‌های آنها روی دایره واقع‌اند. چنین چند ضلعی‌هایی را محاطی می‌نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کمتر است.

حدس می‌زنید مساحت کدام یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های منتظم محاطی بیشتر شوند، چه اتفاقی می‌افتد؟

در جدول زیر مساحت تعدادی از n ضلعی‌های منتظم محاطی به شعاع r (با دقت یک رقم اعشار) داده شده است. برای نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی به مساحت دایره چه می‌توان کرد؟ آیا به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟

مساحت تقریبی n ضلعی منتظم محاطی در دایره‌ای به شعاع r

تعداد اضلاع	۳	۴	۵	۶	۷	...	۱۲
مساحت تقریبی	$۱.۳r^2$	$۲r^2$	$۲.۳۸r^2$	$۲.۶r^2$	$۲.۷r^2$	...	$۳r^2$

حدس: مساحت مربع به مساحت دایره نزدیک‌تر است؛ زیرا مربع بخش بیشتری از دایره را می‌پوشاند و فاصله ضلع‌هایش با دایره کمتر از مثلث است. با بیشتر شدن تعداد اضلاع، چندضلعی منتظم محاطی هرچه بیشتر شبیه دایره می‌شود و مساحتش بزرگ‌تر می‌شود و به مساحت دایره نزدیک‌تر می‌گردد.

جدول: با افزایش تعداد اضلاع، مساحت‌ها به ترتیب $1.3r^2$ ، $2r^2$ ، $2.4r^2$ ، $2.6r^2$ ، $2.7r^2$ ، ...، $3r^2$ می‌شوند و به مساحت دایره، یعنی $\pi r^2 \approx 3.14r^2$ نزدیک می‌شوند. پس جای خالی جدول «مساحت دایره» است.

پاسخ پرسش آخر: برای نزدیک‌تر شدن مساحت چندضلعی به مساحت دایره باید تعداد اضلاع را بیشتر کنیم. بله؛ به هر میزان که بخواهیم (هر چقدر هم که کوچک باشد فاصله مطلوب) می‌توانیم با انتخاب تعداد اضلاع به اندازه کافی بزرگ، مساحت چندضلعی منتظم محاطی را به مساحت دایره نزدیک کنیم.

توشه‌ای برای موفقیت

فرض کنید در فعالیت قبل برای دایره به شعاع r از چند ضلعی‌های منتظم محیطی (چند ضلعی که همه اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند) استفاده کنیم. نتیجه مشابه آنچه را در فعالیت قبل به دست آمد، درباره این چند ضلعی‌ها بیان کنید (محاسبه مساحت‌ها لازم نیست).

مساحت چند ضلعی منتظم محیطی از مساحت دایره **بیشتر** است (مثلث محیطی بزرگ‌تر از مربع محیطی است). هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی منتظم محیطی بیشتر شود، مساحت آن کمتر می‌شود و به مساحت دایره نزدیک‌تر می‌گردد.

یعنی مساحت چند ضلعی‌های منتظم محیطی را نیز می‌توانیم به هر میزان که بخواهیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم؛ با این تفاوت که این مساحت‌ها از بالا (از سمت بزرگ‌تر) به مساحت دایره نزدیک می‌شوند.



مربع ABCD به ضلع ۴ واحد را در نظر می‌گیریم. پاره خط MN وسط AB را به وسط DC وصل می‌کند. مساحت مستطیل AMND چقدر است؟ به موازات MN پاره خط‌هایی رسم می‌کنیم که مانند شکل، نقاط انتهایی آنها روی AB و CD است. مساحت مستطیل‌های جدید پدید آمده، در جدول داده شده است. جاهای خالی را پر کنید (طول مستطیل‌ها برابر ۴ واحد است).

مشابه همین کار را با شروع از پاره خط BC انجام می‌دهیم. پاره خط‌هایی که به موازات BC رسم می‌شوند، همانند شکل زیر، مستطیل‌های جدیدی را می‌سازند. جدول را کامل کنید.

خلاصه دو جدول قبل در جدول زیر ارائه شده است (جاهای خالی را پر کنید).

طول مستطیل‌ها ۴ و عرض آنها x است، پس مساحت $f(x) = 4x$ می‌شود. مساحت مستطیل AMND با عرض ۲ برابر $8 = 4 \times 2$ است.

جدول اول: عرض‌های کمتر از ۳

عرض مستطیل‌ها	۲	۲.۱	۲.۵	۲.۷	۲.۸	۲.۹	۲.۹۹
مساحت مستطیل رنگی	۸	۸.۴	۱۰	۱۰.۸	۱۱.۲	۱۱.۶	۱۱.۹۶

هرچه عرض مستطیل‌ها (با مقادیر کمتر از ۳) به ۳ نزدیک‌تر می‌شود، مساحت به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود.

جدول دوم: عرض‌های بیشتر از ۳

عرض مستطیل‌ها	۴	۳.۹	۳.۵	۳.۲	۳.۱	۳.۰۱
مساحت مستطیل رنگی	۱۶	۱۵.۶	۱۴	۱۲.۸	۱۲.۴	۱۲.۰۴

هرچه عرض مستطیل‌ها (با مقادیر بیشتر از ۳) به ۳ نزدیک‌تر می‌شود، مساحت به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود.

جدول خلاصه

x	۲	۲.۱	۲.۵	۲.۸	۲.۹	۲.۹۹	$\rightarrow 3 \leftarrow$	۳.۰۱	۳.۱	۳.۲	۳.۵	۳.۹	۴
$f(x)$	۸	۸.۴	۱۰	۱۱.۲	۱۱.۶	۱۱.۹۶	$\leftarrow 12 \rightarrow$	۱۲.۰۴	۱۲.۴	۱۲.۸	۱۴	۱۵.۶	۱۶

یعنی وقتی x از سمت چپ یا از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود، مقدار $f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود.

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x$ برای $x < 1$ و $f(x) = -x + 5$ برای $x > 1$ رسم شده است. جدول صفحه بعد را کامل کنید و با استفاده از آن و به کمک نمودار $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

جدول کامل شده (x از سمت راست و چپ به ۱ نزدیک می شود)

x	۲	۱.۸	۱.۵	۱.۲	۱.۱	۱.۰۱	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۰.۹۹	۰.۹	۰.۸	۰.۵	۰.۲	۰
f(x)	۳	۳.۲	۳.۵	۳.۸	۳.۹	۳.۹۹		۱.۹۸	۱.۸	۱.۶	۱	۰.۴	۰

برای $x > 1$ داریم $f(x) = -x + 5$ ؛ وقتی x از راست به ۱ نزدیک می شود، $f(x)$ به ۴ نزدیک می شود. برای $x < 1$ داریم $f(x) = 2x$ ؛ وقتی x از چپ به ۱ نزدیک می شود، $f(x)$ به ۲ نزدیک می شود:

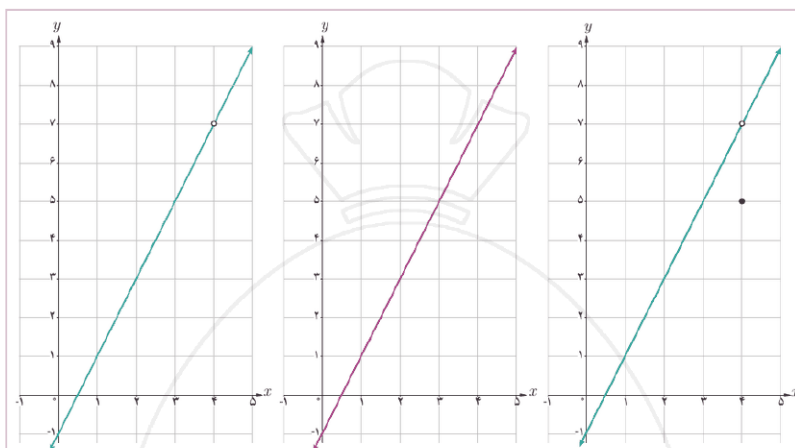
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \text{ and } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$$

حد چپ و حد راست هر دو موجود ولی نابرابرند؛ بنابراین تابع در $x = 1$ حد ندارد.



نمودار توابع زیر رسم شده‌اند: $f(x) = 2x - 1$ ، $g(x) = 2x - 1$ برای $x \neq 4$ و $g(x) = 5$ برای $x = 4$ ، $h(x) = 2x - 1$ (4) $\neq$. هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟ دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.

می‌خواهیم رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطه ۴ بررسی کنیم. ابتدا جدول را کامل کنید.
مقادیر f ، g و h را به اندازه‌ای که بخواهیم می‌توانیم به عدد ... نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ... نزدیک شود. حد هر سه تابع وقتی که $x \rightarrow 4$ (بخوانید x به سمت ۴ میل می‌کند) برابر ... است. به عبارت دیگر: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \dots$ ، $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \dots$ ، $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = \dots$



تعلق نمودارها (از چپ به راست در کتاب): نمودار اول (آبی، خط با یک دایره توخالی در نقطه $(4, 7)$) مربوط به h ؛ نمودار دوم (صورتی، خط کامل) مربوط به f ؛ نمودار سوم (سبز، خط با دایره توخالی در $(4, 7)$ و نقطه جدا در $(4, 5)$) مربوط به g است.

این سه تابع با هم برابر نیستند؛ زیرا دامنه آنها یا مقدارشان در $x = 4$ فرق دارد:

- f : دامنه $\mathbb{R}$ و برد $\mathbb{R}$
- g : دامنه $\mathbb{R} - \{7\}$ و برد $\mathbb{R} - \{7\}$ (مقدار ۷ هرگز گرفته نمی‌شود؛ مقدار $g(4) = 5$ هم برای $x = 3$ گرفته شده است)
- h : دامنه $\mathbb{R} - \{4\}$ و برد $\mathbb{R} - \{7\}$

جدول کامل شده

۵	۴.۵	۴.۲	۴.۱	۴.۰۱	$\rightarrow 4 \leftarrow$	۳.۹۹	۳.۹	۳.۸	۳.۵	۳	x
۹	۸	۷.۴	۷.۲	۷.۰۲	$\leftarrow 7 \rightarrow$	۶.۹۸	۶.۸	۶.۶	۶	۵	$f(x)$
۹	۸	۷.۴	۷.۲	۷.۰۲	$\leftarrow 7 \rightarrow$	۶.۹۸	۶.۸	۶.۶	۶	۵	$g(x)$
۹	۸	۷.۴	۷.۲	۷.۰۲	$\leftarrow 7 \rightarrow$	۶.۹۸	۶.۸	۶.۶	۶	۵	$h(x)$

مقادیر f ، g و h را به اندازه‌ای که بخواهیم می‌توانیم به عدد ۷ نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ۴ نزدیک شود. حد هر سه تابع وقتی $x \rightarrow 4$ برابر ۷ است:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7, \quad \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 7, \quad \lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 7$$

توجه: مقدار $g(4) = 5$ و $f(4) = 7$ است ولی $h(4)$ تعریف نشده است؛ با این حال حد هر سه تابع در ۴ برابر ۷ است (حد به مقدار تابع در خود نقطه بستگی ندارد).



برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

ب) $f(1) = 2$

پ) $f(2) = 1$

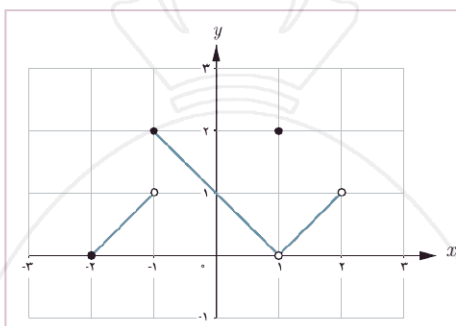
ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

چ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.

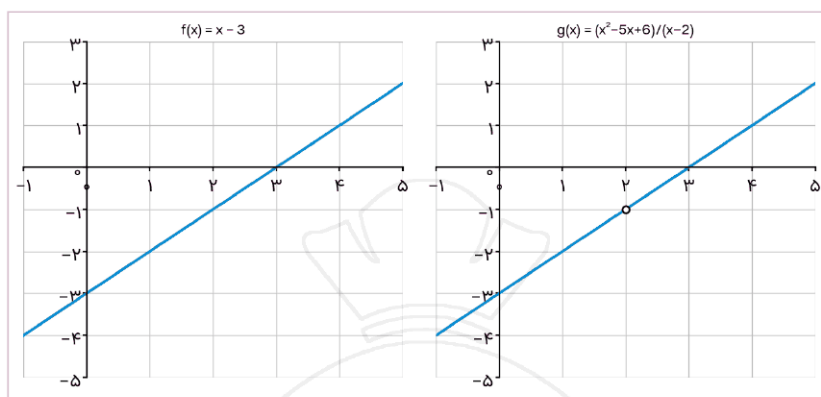


- الف) نادرست؛ وقتی x از چپ یا راست به ۱ نزدیک می‌شود، $f(x)$ به ۰ نزدیک می‌شود. پس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
- ب) درست؛ نقطهٔ توپر $(1, 2)$ روی نمودار است: $f(1) = 2$.
- پ) نادرست؛ در $x = 2$ دایرهٔ توخالی $(2, 1)$ است، یعنی $f(2)$ تعریف نشده است.
- ت) درست؛ از سمت راست -2 نمودار از نقطهٔ $(-2, 0)$ شروع می‌شود و حد راست برابر ۰ است.
- ث) نادرست؛ حد چپ در -1 برابر ۱ و حد راست برابر ۲ است؛ نابرابرند و حد وجود ندارد.
- ج) درست؛ نمودار از نقطهٔ $(0, 1)$ می‌گذرد و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- چ) درست؛ تابع فقط در سمت چپ ۲ تعریف شده است (حد چپ برابر ۱ است ولی حد راست وجود ندارد)، پس حد وجود ندارد.
- ح) درست؛ حد چپ ۱ و حد راست ۲ است، پس حد در -1 وجود ندارد.

مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه ۲ مساوی ۱- باشد.

تابع $f(x) = x - 3$ را در نظر می‌گیریم: $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1$.

تابع $g(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x - 2)$ هم مثال دیگری است؛ برای $x \neq 2$ داریم $g(x) = (x-2)(x-3)/(x-2) = x - 3$ و در $x = 2$ تعریف نشده است، ولی حد آن در ۲ برابر ۱- است.



تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه ۳ حد نداشته باشد. $f(3) = 1$.

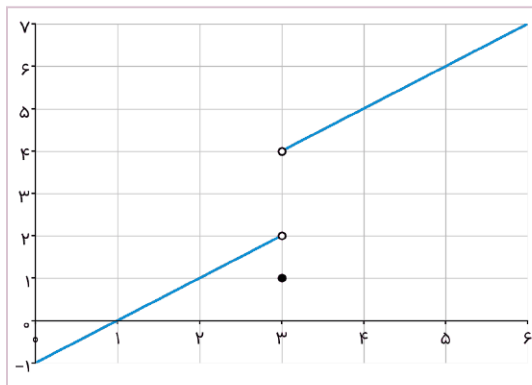
تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = x - 1 \quad \text{اگر } x < 3$$

$$f(x) = 1 \quad \text{اگر } x = 3$$

$$f(x) = x + 1 \quad \text{اگر } x > 3$$

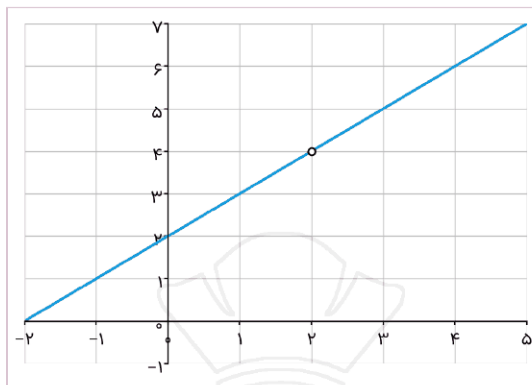
حد چپ در ۳ برابر $3 - 1 = 2$ و حد راست برابر $3 + 1 = 4$ است. چون حد چپ و راست نابرابرند، تابع در ۳ حد ندارد، و $f(3) = 1$ است.



تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه ۲ تعریف نشده باشد. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

$$f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2) \quad x = 2 \quad x \neq 2:$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \text{ پس } f(x) = (x-2)(x+2)/(x-2) = x + 2$$

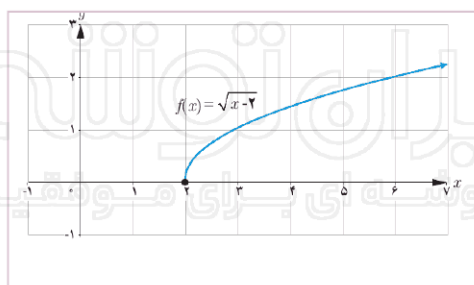


درباره تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ت) $f(2)$



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ ○

ب) تابع برای $x < 2$ تعریف نشده است، پس حد چپ وجود ندارد. ○

پ) چون حد چپ وجود ندارد، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد. ○

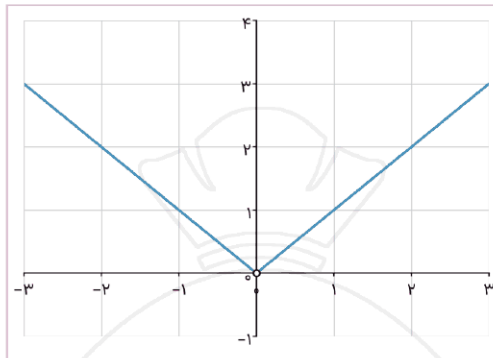
ت) $f(2) = \sqrt{0} = 0$ ○

تابع با ضابطه $f(x) = x$ برای $x > 0$ و $f(x) = -x$ برای $x < 0$ را در نظر می‌گیریم. آیا f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ آیا $f(0)$ موجود است؟

برای $x > 0$ مقدار $f(x) = x$ و برای $x < 0$ مقدار $f(x) = -x$ است.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$ ؛ حد چپ و راست برابرند، پس **حد وجود دارد** و برابر ۰ است.

اما ضابطهٔ تابع برای $x = 0$ تعریف نشده است؛ پس $f(0)$ **موجود نیست**.



توابع زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید: $f(x) = 2x + 1$ ، $g(x) = 2x + 1$ ($x \neq 2$)، $h(x) = 2x + 1$ برای $x \neq 2$ و $h(x) = 3$ برای $x = 2$.

الف) مقادیر $f(2)$ ، $h(2)$ و $g(2)$ را در صورت وجود به دست آورید.

ب) حدهای $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ را وقتی $x \rightarrow 2$ محاسبه کنید.

الف) $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$ ؛ $h(2) = 3$ ؛ $g(2)$ تعریف نشده است.

ب) در هر سه تابع برای $x \neq 2$ مقدار تابع $2x + 1$ است و وقتی $x \rightarrow 2$ به $2 \times 2 + 1 = 5$ نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 5$$

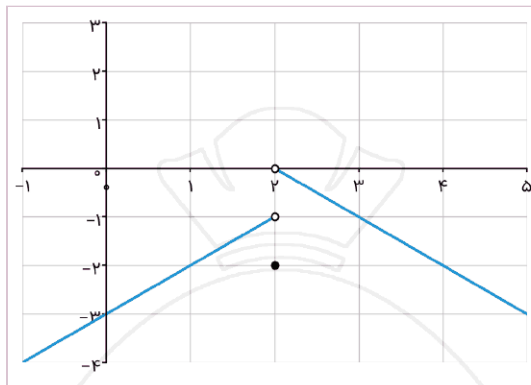
توجه: $h(2) = 3 \neq 5$ است؛ یعنی حد تابع با مقدار تابع در آن نقطه لزوماً برابر نیست.

آیا حد تابع زیر در $x = 2$ موجود است؟ $f(x) = -x + 2$ برای $x > 2$ ، $f(x) = -2$ برای $x = 2$ ، $f(x) = x - 3$ برای $x < 2$

حد چپ: $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 3) = -1$

حد راست: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (-x + 2) = 0$

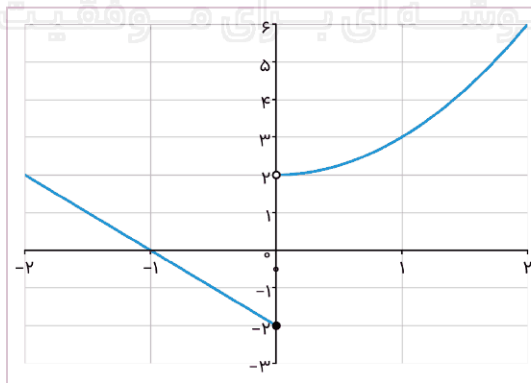
چون حد چپ و حد راست برابر نیستند، حد تابع در $x = 2$ وجود ندارد (مقدار $f(2) = -2$ در این نتیجه تأثیری ندارد).



نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 2$ برای $x > 0$ و $f(x) = -2x - 2$ برای $x \leq 0$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را — در صورت وجود — بیابید.

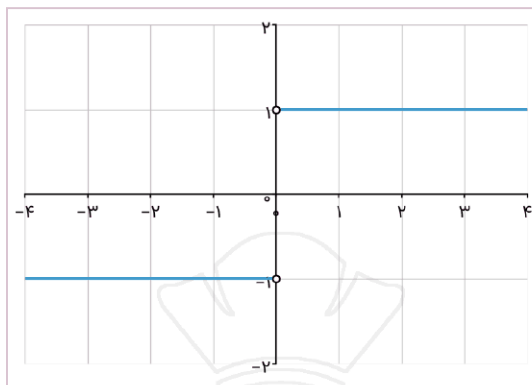
حد راست: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 2$ ؛ حد چپ: $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x - 2) = -2$

حد چپ و راست نابرابرند، پس تابع در صفر **حد ندارد** ($f(0) = -2$).



اگر $f(x) = |x|/x$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟

برای $x > 0$ داریم $f(x) = x/x = 1$ و برای $x < 0$ داریم $f(x) = -x/x = -1$ ؛ در $x = 0$ تابع تعریف نشده است.
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ؛ چون برابر نیستند، حد در صفر وجود ندارد.



حدهای زیر را حساب کنید:

- $\lim_{x \rightarrow 7} x = 7$ ☐
- $\lim_{x \rightarrow 7} 5 = 5$ ☐
- $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ☐
- $\lim_{x \rightarrow 5} 0 = 0$ ☐
- $\lim_{x \rightarrow 4} (-2) = -2$ ☐
- $\lim_{x \rightarrow -7} x = -7$ ☐

اگر $f(x) = x$ و $g(x) = 2x - 1$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$ را به کمک قانون بالا محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها قانون حد مجموع را نیز توضیح دهید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 + 3 = 5$$

توضیح با نمودار: نمودار مجموع، یعنی $(f+g)(x) = 3x - 1$ ، در $x = 2$ به ارتفاع $3 \times 2 - 1 = 5$ می‌رسد. وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، مقدار f به ۲ و مقدار g به ۳ نزدیک می‌شود؛ پس مقدار مجموع به $2 + 3 = 5$ نزدیک می‌شود.

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ، به کمک قانون حد حاصل ضرب حد هریک از حدهای زیر را بیابید: $\lim (f(x))^2 =$
 $\lim (f(x))^3 =$ ؛ $\lim (f(x) \cdot f(x)) =$
ب) برای محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow 20} ((2/5)x - 3)$ چگونه از قوانین ۲، ۴ و ۵ استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \cdot l = l^2 \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^3 = \lim_{x \rightarrow a} ((f(x))^2 \cdot f(x)) = l^2 \cdot l = l^3$$

ب) طبق قانون ۲ (حد تابع همانی) $\lim_{x \rightarrow 20} x = 20$. طبق قانون ۵ (ضریب ثابت از حد بیرون می‌آید)
 $\lim_{x \rightarrow 20} (2/5)x = (2/5) \cdot 20 = 8$. طبق قانون ۱ (حد تابع ثابت) $\lim_{x \rightarrow 20} 3 = 3$. سپس با قانون ۴ (حد تفاضل):

$$\lim_{x \rightarrow 20} ((2/5)x - 3) = 8 - 3 = 5$$

۱) برای تابع f با ضابطه $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ ،

الف) با تکمیل جاهای خالی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به دست آورید: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x - 7) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2) + \lim_{x \rightarrow 1} (2x) - \lim_{x \rightarrow 1} 7 = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \dots + \dots$

ب) $f(1)$ را محاسبه کنید و درستی تساوی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ را بررسی کنید.

پ) دربارهٔ تابع با ضابطه $g(x) = (1/8)x^4 - x^3 + 5x - 1/2$ ، درستی تساوی $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ را وقتی $x \rightarrow 2$ بررسی کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x - 7) = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 7 = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 7 = 3 + 2 - 7 = -2$ یعنی جاهای خالی ۲ و $\lim_{x \rightarrow 1} x$ و $\lim_{x \rightarrow 1} 7$ هستند.

ب) $f(1) = 3 \times 1 + 2 \times 1 - 7 = -2$ ؛ پس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -2$ و تساوی درست است.

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = (1/8) \cdot 16 - 8 + 10 - 1/2 = 2 - 8 + 10 - 0.5 = 3.5$ و $g(2) = (1/8) \cdot 2^4 - 2^3 + 5 \cdot 2 - 1/2 = 3.5$ پس $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ درست است.

۲) الف) مطلوب است: $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1)/(x^2 - 4x + 1)$. جاهای خالی را کامل کنید:

$$\dots / \dots \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)/(x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) / \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 1) =$$

ب) حدهای مقابل را حساب کنید: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + 2x^3 + 1)/(5x^2 + 2/3)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/((3/5)x^2 - 2x + 1)$ ۱)

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1)/(x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) / \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + 1) = 5 / (9 - 12 + 1) = 5/(-2) = -5/2$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + 2x^3 + 1)/(5x^2 + 2/3) = (1 + 2 + 1)/(5 + 2/3) = 4/(17/3) = 12/17$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/((3/5)x^2 - 2x + 1) = (1 - 1)/(3/5 - 2 + 1) = 0/(-2/5) = 0$

مانند مثال قبل حدها را محاسبه کنید؛ سپس به کمک نمودارها نیز محاسبه حد را توضیح دهید. الف)

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x + 6) / (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -2} (\dots) / (\dots)$$

صورت و مخرج هر دو در $x = -2$ صفرند. صورت را تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x + 6) / (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2)(x + 3) / (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 3) = 1$$

توضیح با نمودار: برای $x \neq -2$ تابع $f(x) = (x^2 + 5x + 6) / (x + 2)$ با $g(x) = x + 3$ برابر است؛ نمودار f همان خط $y = x + 3$ با یک «حفره» در نقطه $(-2, 1)$ است. وقتی x به -2 نزدیک می‌شود، ارتفاع نمودار هر دو تابع به ۱ نزدیک می‌شود؛ پس حد برابر ۱ است (هرچند $f(-2)$ تعریف نشده است).

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) / (x - 1)$ (مانند مثال قبل محاسبه کنید و با نمودار توضیح دهید).

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) / (x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)(x^2 + x + 1) / (x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

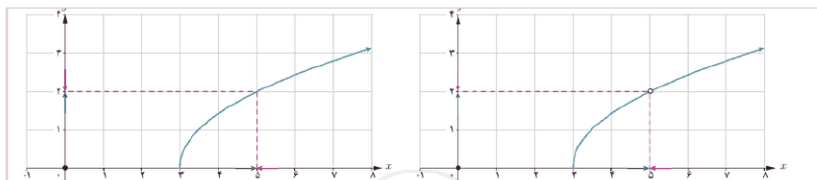
توضیح با نمودار: برای $x \neq 1$ این تابع با $g(x) = x^2 + x + 1$ برابر است؛ نمودار آن همان سهمی با یک حفره در نقطه $(1, 3)$ است و وقتی $x \rightarrow 1$ ارتفاع نمودار به ۳ نزدیک می‌شود.

۱) نمودارهای توابع با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{2x-6}$ و $g(x) = \sqrt{2x-6}$ ($x \neq 5$) رسم شده‌اند.

الف) هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟

ب) آیا $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$ موجودند؟

پ) کدام یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{2x-6}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{2x-6}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{2x-6}$



الف) نمودار سمت چپ (بدون دایرهٔ توخالی) مربوط به f و نمودار سمت راست (با دایرهٔ توخالی در $(5, 2)$) مربوط به g است.

ب) بله؛ $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = \sqrt{2 \times 5 - 6} = \sqrt{4} = 2$ چون $\lim_{x \rightarrow 5} (2x-6) = 4 > 0$.

پ) دامنه $x \geq 3$ است. حد راست: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{2x-6} = \sqrt{0} = 0$ موجود است. حد چپ $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{2x-6}$ وجود ندارد. در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{2x-6}$ نیز وجود ندارد.

۲) دربارهٔ تابع $h(x) = |x|/x$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید: الف) $h(x) = 1$

ب) $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$

ت) $h(0) = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ وجود ندارد.

الف) نادرست؛ $h(x) = 1$ فقط برای $x > 0$ است و برای $x < 0$ برابر -1 است.

ب) درست؛ تابع فقط در $x = 0$ تعریف نشده است.

پ) درست؛ برای $x > 0$ داریم $h(x) = 1$.

ت) نادرست؛ $h(0)$ تعریف نشده است.

ث) درست؛ حد چپ (-1) و حد راست (1) برابر نیستند.

۳) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = [x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید: الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$

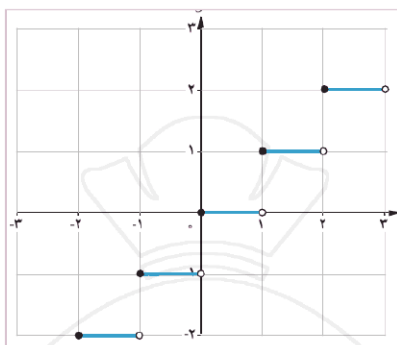
ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1.5} [x]$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} [x]$



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$ ○

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$ ○

پ) حد چپ (۱) و حد راست (۲) برابر نیستند؛ $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ وجود ندارد. ○

ت) به همین دلیل (حد چپ ۰ و حد راست ۱) $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$ وجود ندارد. ○

ث) در نزدیکی ۱٫۵ تابع ثابت و برابر ۱ است؛ $\lim_{x \rightarrow 1.5} [x] = 1$ ○

ج) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} [x] = -2$ و در نزدیکی آن $[x] = -2$ ؛ پس $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} [x] = -2$ ○

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

با استفاده از نمودار $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ حدهای زیر را بیابید: الف) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \sin x$

پ) $\lim_{x \rightarrow \pi/3^-} \sin x$

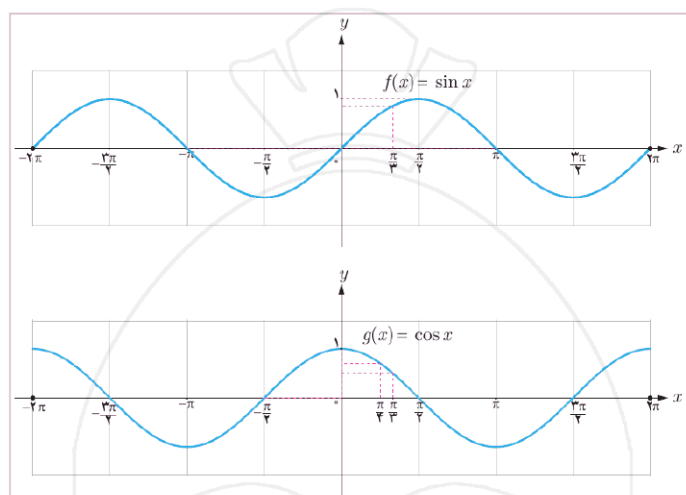
ت) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin x$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

ج) $\lim_{x \rightarrow \pi/4^-} \cos x$

چ) $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \cos x$

ح) $\lim_{x \rightarrow \pi/3^+} \cos x$



الف) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = \sin(\pi/2) = 1$ ○

ب) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \sin x = \sin(-\pi) = 0$ ○

پ) $\lim_{x \rightarrow \pi/3^-} \sin x = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ ○

ت) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin x = \sin \pi = 0$ ○

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ ○

ج) $\lim_{x \rightarrow \pi/4^-} \cos x = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ ○

چ) $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \cos x = \cos(-\pi/2) = 0$ ○

ح) $\lim_{x \rightarrow \pi/3^+} \cos x = \cos(\pi/3) = 1/2$ ○

در همه موارد حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر است؛ زیرا $\sin$ و $\cos$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

۱) با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$

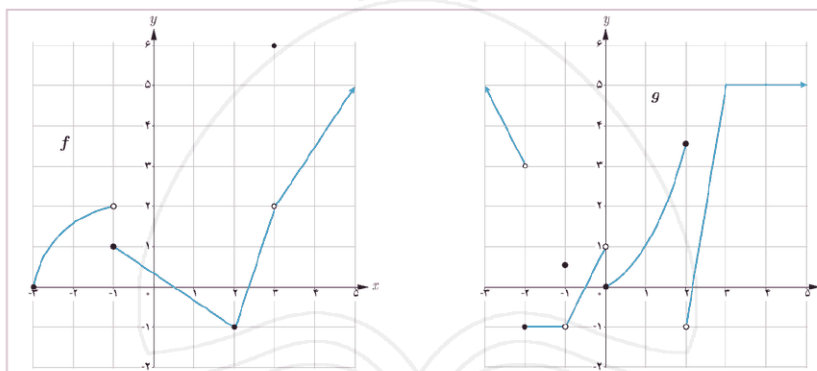
ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$

چ) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)/g(x)$

د) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x))$



از نمودارها: f در ۳ از هر دو طرف به ۲ نزدیک می‌شود ($f(3) = 6$ اثری ندارد). f در -۱ حد چپ ۲ و حد راست ۱ دارد. f در ۰ روی خط $y = 1 - (2/3)(x+1)$ است و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1/3$ در ۲ داریم $\lim f = -1$. در ۵ حد f برابر ۵ است. نمودار g در ۳ حد چپ و راست ۵ است؛ در -۱ حد چپ و راست -۱ است؛ در ۰ حد چپ ۱ و حد راست ۰ است؛ در ۲ حد چپ ۳/۵ و حد راست -۱ است؛ در ۵ حد برابر ۵ است.

○ الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

○ ب) حد چپ ۲ و حد راست ۱ است؛ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.

○ پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$

○ ت) هر دو حد موجودند: $\lim_{x \rightarrow 3} (f+g)(x) = 2 + 5 = 7$

○ ث) f در -۱ حد ندارد؛ حد چپ مجموع $1 + (-1) = 0$ و حد راست $2 + (-1) = 1$ است؛ پس حد وجود ندارد.

○ ج) g در ۲ حد ندارد (حد چپ ۳/۵ و حد راست -۱)؛ حد چپ عبارت $2(-1) + 5(3.5) = 15.5$ و حد راست

$-7 = 2(-1) + 5(-1)$ است؛ پس حد وجود ندارد.

○ چ) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4 = (1/3)^4 = 1/81$

- ج) حد چپ g برابر 1 و حد راست آن 0 است؛ حد چپ مربع 1 و حد راست 0 است؛ حد وجود ندارد.
- خ) حد چپ $-2/7 = -1/3.5$ و حد راست $1 = -1/-1$ است؛ حد وجود ندارد.
- د) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \cdot g(x) = 5 \times 5 = 25$

تمرین

صفحه ۱۳۶

۲۹۲

حداقل سه پرسش مانند موارد صفحه بعد مطرح کنید و به آنها پاسخ دهید. درباره مسائل مطرح شده در کلاس گفت‌وگو کنید.

نمونه‌ای از سه پرسش و پاسخ آنها:

۱. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x - 5)$ را بیابید. پاسخ: $-1 - 2 - 5 = -8$.
۲. $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 16)/(x - 4)$ را بیابید. پاسخ: $\lim_{x \rightarrow 4} (x+4)/(x-4) = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 8$.
۳. $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$ را بیابید. پاسخ: 1 و 2 ؛ چون برابر نیستند، $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ وجود ندارد.

تمرین

صفحه ۱۳۶

۲۹۳

دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

تابع‌های $f(x) = x + 2$ و $g(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ متفاوت‌اند (دامنه f برابر $\mathbb{R}$ و دامنه g برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است) ولی $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$.

مثال دیگر: $h(x) = x^2$ و $x \neq 2$ برای x^2 ، $x = 2$ برای $k(x) = 4$ نیز در 2 حد برابر 4 دارند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 7} (-3)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x - 7)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 4x + 5)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x) / (x^2 - 9)$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} x / (2x^2 - x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 8) / (x + 2)$

چ) $\lim_{x \rightarrow -2} [x]$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 7}$

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$

ذ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 5}$

ر) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 2}$

ز) $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) / ([x] + 1)$

ژ) $\lim_{x \rightarrow -\pi/3} \cos x$

س) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin x + \cos x)$

ش) $\lim_{x \rightarrow -2^+} x / [x]$

ص) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \sin^2 x) / (1 - \sin x)$

ض) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + [x])$

○ الف) -3

○ ب) $-2(0) - 7 = -7$

○ پ) $3(1) - 4(-1) + 5 = 3 + 4 + 5 = 12$

○ ت) $\lim x(x-3) / ((x-3)(x+3)) = \lim x / (x+3) = 3/6 = 1/2$

○ ث) $\lim x / (x(2x-1)) = \lim 1 / (2x-1) = 1/(-1) = -1$

○ ج) $\lim (x+2)(x^2-2x+4) / (x+2) = \lim (x^2-2x+4) = 4 + 4 + 4 = 12$

○ چ) برای x کمی کمتر از -2 داریم $[x] = -3$ و برای x کمی بیشتر از -2 داریم $[x] = -2$ ؛ **حد وجود ندارد.**

○ ح) 0

○ خ) $\sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$

○ د) تابع برای $x < 0$ تعریف نشده است؛ **حد وجود ندارد.**

○ ذ) $\sqrt{2+5} = \sqrt{7}$

- ر) در نزدیکی ۱ داریم $x - 2 < 0$ و تابع تعریف نشده است؛ **حد وجود ندارد.**
- ز) برای x کمی بزرگ‌تر از ۳ داریم $[x] = 3$ ؛ $(3-2)/(3+1) = 1/4$
- ژ) $\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$
- س) $\sin(\pi/4) + \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$
- ش) برای x کمی بزرگ‌تر از -2 داریم $[x] = -2$ ؛ $(-2)/(-2) = 1$
- ص) $\lim (1 - \sin x)(1 + \sin x)/(1 - \sin x) = \lim (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$
- ض) **حد چپ:** $-1 = 0 + (-1)$ ؛ **حد راست:** $0 = 0 + 0$ ؛ **نابرابرند و حد وجود ندارد.**

تمرین

صفحه ۱۳۶

۲۹۵

۴) اگر $\lim f(x) = 3$ و $\lim g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$ ، **حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.** الف) $\lim (f(x) + h(x))$

ب) $\lim (h(x))^5$

پ) $\lim f(x)/g(x)$

ت) $\lim g(x)/f(x)$

ث) $\lim 3f(x)/(g(x) - 5h(x))$

ج) $\lim 1/h(x)$

- الف) $3 + (-1) = 2$
- ب) $(-1)^5 = -1$
- پ) **مخرج به ۰ و صورت به ۳ (غیرصفر) میل می‌کند؛ قانون تقسیم کاربرد ندارد و عبارت بی‌کمران می‌شود، پس حد (به عنوان عدد حقیقی) وجود ندارد.**
- ت) $0/3 = 0$
- ث) $3 \times 3 / (0 - 5 \times (-1)) = 9/5$
- ج) $1/(-1) = -1$

۵) نمودار دو تابع $f(x) = |x - 3|$ و $g(x) = 1$ را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟)
 $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ چگونه؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

برای $x > 3$ داریم $f(x) = 1$ و برای $x < 3$ داریم $f(x) = 1 - x$ ؛ پس نمودار f دو نیم خط افقی $(x < 3)$ روی $y = -1$ و $x > 3$ روی $(y = 1)$ با دایره توخالی در $x = 3$ است؛ نمودار g خط افقی $y = 1$ است.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$ ؛ چون حد چپ و راست برابر نیستند، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ وجود ندارد. اما $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$ موجود است.

حد دو تابع در هر نقطه $a > 3$ برابر ۱ است (برای $a > 3$ داریم $f = g = 1$ نزدیک a)؛ در نقاط $a < 3$ حد f برابر -1 و حد g برابر ۱ است (برابر نیستند) و در $a = 3$ حد f وجود ندارد. پس حد دو تابع در نقاط $x > 3$ برابر است.

۶) در هر یک از حالت‌های زیر درباره حد تابع $f + g$ چه می‌توان گفت؟
 الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.
 ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

الف) نمی‌توان نتیجه‌ای قطعی گرفت؛ ممکن است $f + g$ حد داشته باشد یا نداشته باشد. مثال: $f(x) = [x]$ و $g(x) = -[x]$ در $a = 1$ حد ندارند ولی $f + g = 0$ حد دارد. اما $f(x) = [x]$ و $g(x) = [x]$ در $a = 1$ حد ندارند و $f + g = 2[x]$ هم حد ندارد.

ب) $f + g$ حد ندارد. اگر $f + g$ حد داشت، آنگاه $f = (f + g) - g$ به عنوان تفاضل دو تابع دارای حد، حد داشت که با فرض در تناقض است.

۷) اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow m^+} [x]$

ب) $\lim_{x \rightarrow m^-} [x]$

پ) $\lim_{x \rightarrow m} [x]$. به طور کلی تابع $f(x) = [x]$ در چه نقاطی حد دارد؟

○ الف) $\lim_{x \rightarrow m^+} [x] = m$

○ ب) $\lim_{x \rightarrow m^-} [x] = m - 1$

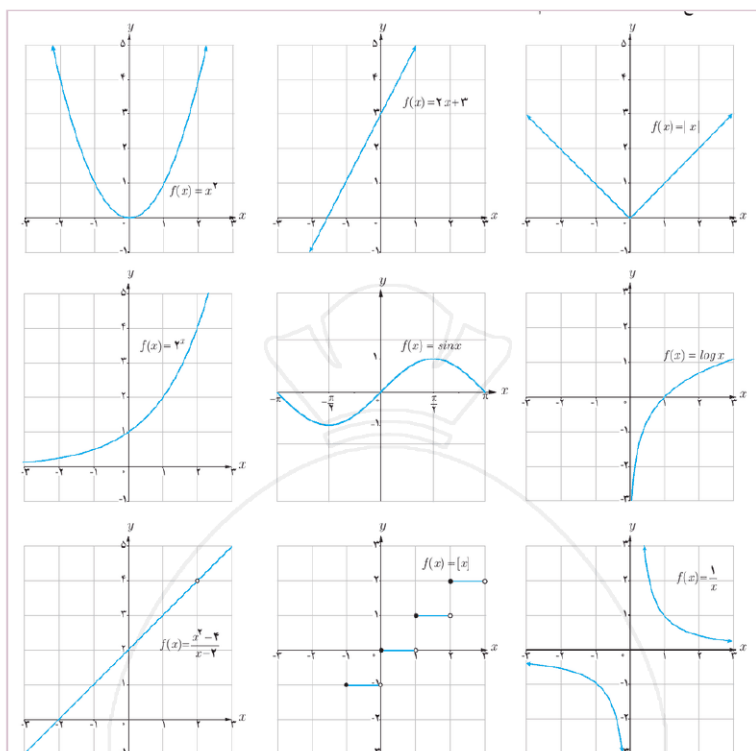
○ پ) حد چپ و راست نابرابرند؛ $\lim_{x \rightarrow m} [x]$ وجود ندارد.

به طور کلی: تابع $f(x) = [x]$ در هر عدد صحیح حد ندارد، و در هر عدد حقیقی غیر صحیح مانند a حد دارد و برابر $[a]$ است.



نمودارهای نه تابع در شکل‌های زیر رسم شده‌اند.

الف) کدام یک از نمودارهای فوق را می‌توان بدون آنکه قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم کرد؟
 ب) مثال دیگری مشابه توابع بالا ارائه کنید. ردیف‌های اول و دوم نمونه‌ای از توابع پیوسته هستند.



الف) نمودارهای ردیف اول و دوم را می‌توان بدون برداشتن قلم رسم کرد: $f(x) = |x|$ ، $2x + 3$ ، x^2 ، 2^x ، $\sin x$ و $\log x$ (روی دامنه خودش). نمودارهای ردیف سوم را نمی‌توان بدون برداشتن قلم کشید: $(x^2 - 4)/(x - 2)$ (حفره در $x = 2$)، $[x]$ (پرش در هر عدد صحیح) و $1/x$ (گسست در $x = 0$).
 ب) مثال‌های مشابه: توابع پیوسته مانند x^3 ، $\sqrt{x}$ ، $\cos x$ ، 3^x و $-2x + 1$ ؛ توابع ناپیوسته مانند $(x^2 - 9)/(x - 3)$ ، $x - [x]$ و $1/(x - 1)$.

در نمودارهای صفحه ناپیوسته بودن یک تابع در نقطه c در شرایط مختلف نمایش داده شده است. شما هم مثال‌های دیگری ارائه کنید.

نمونه‌هایی از ناپیوستگی در $x = c$

مثال	حالت
$c = 1$ در $f(x) = [x]$	حد چپ و راست موجود ولی نابرابر (پرش)
$c = 0$ در $f(x) = 1/x$	حد وجود ندارد (تابع بی‌کران می‌شود)
$c = 1$ در $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$	$f(c)$ موجود نیست ولی حد موجود است
$c = 2$ در $f(x) = x$ برای $x \neq 2$ و $f(2) = 5$	حد و $f(c)$ هر دو موجودند ولی برابر نیستند
$c = 0$ در $f(x) = x /x$	$f(c)$ موجود نیست و حد وجود ندارد

کدام یک از توابع با ضابطه‌های داده شده در $x = 1$ ناپیوسته‌اند؟ الف) $f(x) = (x-3)^2$

ب) $g(x) = |x-1|/(x-1)$

پ) $h(x) = x$ برای $x > 1$ ، $h(1) = 2$ ، $h(x) = -x + 2$ برای $x < 1$

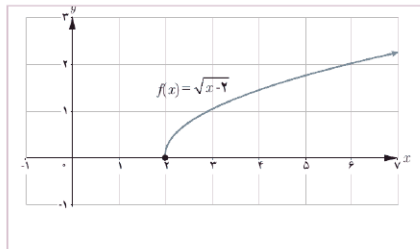
الف) f چند جمله‌ای است و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 = f(1)$ ؛ پیوسته است.

ب) $g(1)$ تعریف نشده است (و حد چپ -1 با حد راست 1 برابر نیست)؛ ناپیوسته است.

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+2) = 1$ ، پس $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$ ولی $h(1) = 2 \neq 1$ ؛ ناپیوسته است.

پس توابع g و h در $x = 1$ ناپیوسته‌اند.

تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ با نمودار زیر را در نظر بگیرید. الف) کدامیک از حدهای $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $x \rightarrow 2^+$ موجودند؟ ب) آیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود است؟ پ) آیا تابع f در $x = 2$ پیوسته است؟



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ موجود است، ولی $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ موجود نیست (تابع در سمت چپ ۲ تعریف نشده است).

ب) خیر، چون حد چپ وجود ندارد.

پ) خیر؛ f در ۲ پیوسته نیست (حد وجود ندارد). فقط پیوسته از راست است، زیرا $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 = f(2)$.

تابع با ضابطه $g(x) = 3x$ برای $x > 2$ و $g(x) = x + 1$ برای $x \leq 2$ و نمودار آن را در نظر بگیرید. الف) کدامیک از حدهای $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ و $x \rightarrow 2^+$ موجودند؟ ب) آیا $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ موجود است؟ پ) آیا تابع g در $x = 2$ پیوسته است؟

الف) هر دو موجودند: $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 2 + 1 = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 3 \times 2 = 6$.

ب) خیر؛ حد چپ و راست نابرابرند.

پ) خیر؛ چون حد در ۲ وجود ندارد، g در ۲ پیوسته نیست. g از چپ پیوسته است، زیرا $g(2) = 3 = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$.

پیوستگی روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید. تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه ... ؛ تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است هرگاه ...

تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه f روی بازه باز (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست داشته باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است هرگاه f روی بازه باز (a, b) پیوسته باشد و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

سه تابع متفاوت مثال بنزید که: الف) روی بازه $(-\infty, \infty)$ پیوسته باشد. ب) روی بازه $[-2, +\infty)$ پیوسته باشد. پ) روی بازه $(-\infty, 0]$ پیوسته باشد.

الف) هر چند جمله‌ای یا $\sin x$ و $\cos x$ ، مثلاً $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = \sin x$ ، $h(x) = 2x - 5$.

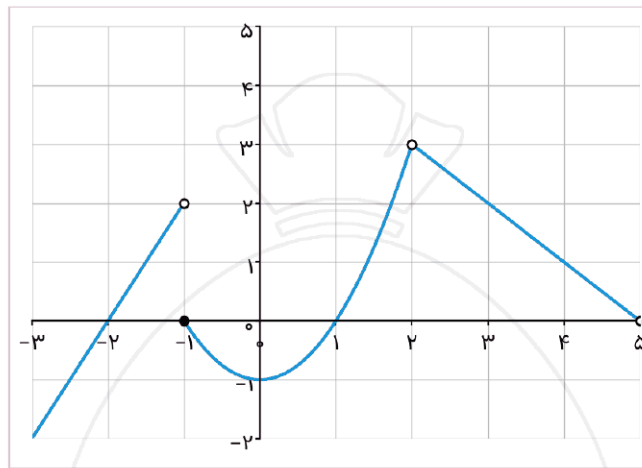
ب) توابعی مانند $f(x) = \sqrt{x+2}$ (دامنه $[-2, +\infty)$ و پیوسته روی آن)، $g(x) = \sqrt{x+2} + 3$ و $h(x) = x\sqrt{x+2}$.

پ) توابعی مانند $f(x) = \sqrt{-x}$ (دامنه $(-\infty, 0]$ و پیوسته روی آن)، $g(x) = \sqrt{-x} - 1$ و $h(x) = 2\sqrt{-x}$.

۱) تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم: $f(x) = 2x + 4$ برای $x < -1$ ، $f(x) = x^2 - 1$ برای $-1 \leq x < 2$ ، $f(x) = -x + 5$ برای $2 \leq x < 5$.

الف) نمودار f را کامل کنید. ب) دامنه و برد f را به دست آورید. پ) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-1, 1]$ و $[2, 5]$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

الف) نمودار کامل شده در شکل زیر است: خط $y = 2x + 4$ تا دایرهٔ توخالی $(-1, 2)$ ، نقطهٔ توپر $(-1, 0)$ ، سهمی $y = x^2 - 1$ از $(-1, 0)$ تا دایرهٔ توخالی $(2, 3)$ ، و پاره خط $y = -x + 5$ از دایرهٔ توخالی $(2, 3)$ تا دایرهٔ توخالی $(5, 0)$.



ب) دامنه: $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 5)$. برد: بخش اول $(-\infty, 2)$ ، بخش دوم $[-1, 3)$ و بخش سوم $(0, 3)$ است؛ پس $R_f = (-\infty, 3)$.

پ) روی $[-1, 1]$ ضابطه $x^2 - 1$ چندجمله‌ای است؛ در $x = -1$ فقط پیوستگی راست لازم است و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$ ؛ پس f روی $[-1, 1]$ پیوسته است. روی $(2, 5)$ ضابطه $-x + 5$ است و چندجمله‌ای است؛ پس f روی $(2, 5)$ پیوسته است. روی $[-2, 0]$ در $x = -1$ داریم $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2 \neq f(-1) = 0$ ؛ در $x = -1$ ناپیوسته است، پس روی $[-2, 0]$ پیوسته نیست.

توشه ای برای موفقیت

۲) درباره تابع f کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ الف) f روی بازه $(-\infty, -1]$ پیوسته است. ب) f روی بازه $(-\infty, -1)$ پیوسته است. پ) f روی بازه $[2, 5]$ پیوسته است. ت) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$. ث) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 0$. ج) f روی بازه $(-2, 0)$ پیوسته است.

- الف) نادرست؛ در $x = -1$ حد چپ ۲ است ولی $f(-1) = 0$ ؛ f در -1 پیوستگی چپ ندارد.
- ب) درست؛ روی این بازه ضابطه $2x + 4$ چندجمله‌ای است.
- پ) نادرست؛ f در ۲ و ۵ تعریف نشده است.
- ت) نادرست؛ تابع در سمت راست ۵ تعریف نشده است، پس حد دوطرفه وجود ندارد.
- ث) درست؛ $\lim_{x \rightarrow 5^-} (-x + 5) = 0$.
- ج) نادرست؛ بازه $(-2, 0)$ شامل -1 است و f در -1 ناپیوسته است.

۳) با توجه به تابع f : الف) دو بازه بسته مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد. ب) a و b ای را مثال بزنید که تابع روی (a, b) پیوسته باشد؛ اما روی $[a, b]$ پیوسته نباشد.

- الف) f روی $[-1, 1]$ پیوسته است (چون $x^2 - 1$ روی آن پیوسته است و در -1 پیوستگی راست دارد) ولی روی $[-2, 0]$ پیوسته نیست (در $x = -1$ ناپیوسته است).
- ب) مثلاً $a = -1$ و $b = 2$: f روی $(-1, 2)$ پیوسته است (ضابطه $x^2 - 1$ ولی $f(2)$ تعریف نشده است، پس روی $[-1, 2]$ پیوسته نیست. (مثال دیگر: $a = -3$ و $b = -1$ ؛ f روی $(-3, -1)$ پیوسته است ولی در $b = -1$ پیوستگی چپ ندارد).

۱) با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید: $f(x) = 2x + 1$ ($x \neq 2$)، $g(x) = 2x + 1$ ($x \neq 2$)، $h(x) = 2 + x$ برای $x \neq 2$ و $h(2) = 3$.

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید: $f(2)$ ، $g(2)$ ، $h(2)$.

ب) حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

پ) کدام تابع در $x = 2$ پیوسته است؟

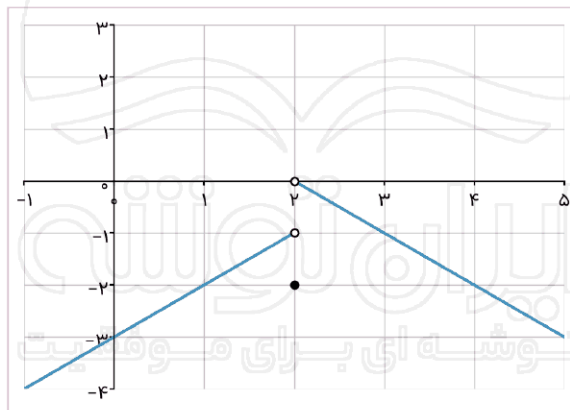
الف) $f(2) = 5$ ؛ $g(2)$ تعریف نشده است؛ $h(2) = 3$.

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 2 + 2 = 4$.

پ) تنها f پیوسته است ($\lim_{x \rightarrow 2} f = f(2) = 5$). در $x = 2$ تعریف نشده است و h ناپیوسته است زیرا $\lim_{x \rightarrow 2} h = 4 \neq h(2) = 3$.

۲) نمودار تابع $f(x) = x - 3$ برای $x < 2$ ، $f(2) = -2$ ، $f(x) = -x + 2$ برای $x > 2$ را رسم کنید. f در چه نقاطی

پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



در هر نقطه $x \neq 2$ ضابطه تابع چندجمله‌ای است و تابع پیوسته است. در $x = 2$ حد چپ -1 و حد راست 0 است؛ حد وجود ندارد، پس f در $x = 2$ ناپیوسته است.

تابع در همه نقاط $\mathbb{R} - \{2\}$ پیوسته و در $x = 2$ ناپیوسته است.

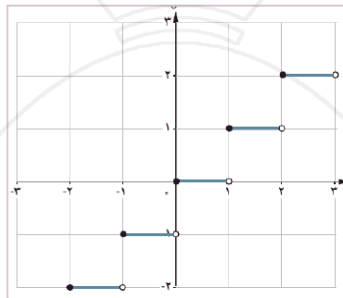
۳) توابع $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ برای $x \neq 3$ و $f(3) = 6$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این توابع را در $x = 3$ بررسی کنید.

برای $x \neq 3$: $(x^2 - 9)/(x - 3) = x + 3$ ؛ پس $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 6$.

f در $f(3) = 6 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ پیوسته است.

$g(3)$ تعریف نشده است؛ g در $x = 3$ ناپیوسته است.

۴) با توجه به نمودار تابع $f(x) = [x]$ ، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



در هر عدد صحیح مانند m حد چپ $m - 1$ و حد راست m است؛ حد وجود ندارد و تابع ناپیوسته است (پرش به اندازه ۱).

در هر عدد حقیقی غیر صحیح a تابع در همسایگی a ثابت است و $\lim_{x \rightarrow a} [x] = [a]$ ؛ تابع پیوسته است.

یعنی f روی $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ پیوسته و در نقاط $\mathbb{Z}$ ناپیوسته است (در اعداد صحیح فقط پیوستگی راست دارد).

۵) پیوستگی تابع $f(x) = -2x + 2$ برای $x \leq 0$ و $f(x) = x^2 + 2$ برای $x > 0$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

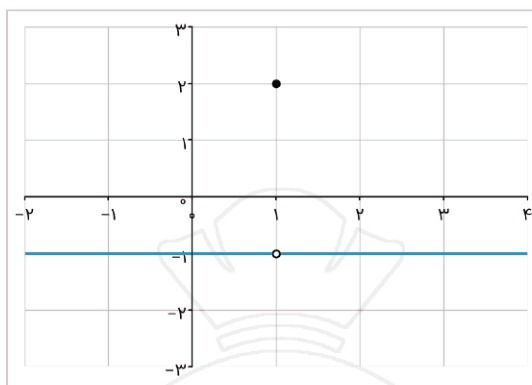
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 2; \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 2) = 2; f(0) = -2(0) + 2 = 2$$

حد چپ و راست با هم و با $f(0)$ برابرند؛ پس f در $x = 0$ پیوسته است.

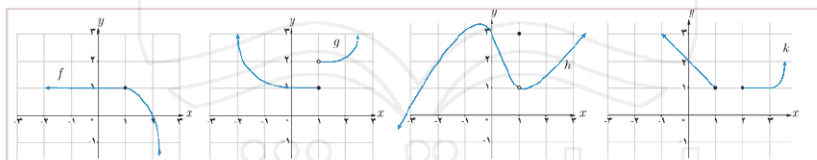
در $x < 0$ ضابطه $-2x + 2$ و در $x > 0$ ضابطه $x^2 + 2$ چند جمله‌ای است؛ بنابراین f در همه نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۶) تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه $x = 1$ مساوی -1 باشد؛ ولی تابع در 1 پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

تابع $f(1) = 2$ ، $x \neq 1$ برای $f(x) = -1$ را در نظر می‌گیریم: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ ولی $f(1) = 2 \neq -1$ پس f در 1 پیوسته نیست.



۷) کدامیک از توابع زیر در $x = 1$ پیوسته است؟



- f : از چپ ثابت 1 و از راست منحنی‌ای که از $(1, 1)$ شروع می‌شود؛ $\lim_{x \rightarrow 1} f = f(1) = 1$ ؛ پیوسته است.
 - g : حد چپ 1 ولی حد راست 2 است (دایرهٔ توخالی در $(1, 2)$)؛ حد وجود ندارد؛ ناپیوسته.
 - h : $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$ ولی $h(1) = 3$ ؛ ناپیوسته.
 - k : تابع بلافاصله بعد از 1 تا 2 تعریف نشده است، پس حد راست وجود ندارد؛ ناپیوسته.
- پس فقط تابع f در $x = 1$ پیوسته است.

۸) در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t) = 6t + 4$ برای $0 \leq t < 1$ و $f(t) = 2t + 10$ برای $1 \leq t \leq 10$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به‌طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود:

$$f(1/2) = 6 \times (1/2) + 4 = 7, \quad 6 \text{ ماه} \rightarrow 6/12 = 1/2 \text{ سال}$$

الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید. ب) آیا f در بازه $[0, 10]$ پیوسته است؟

الف) $f(2) = 2 \times 2 + 10 = 14$ و $f(5) = 2 \times 5 + 10 = 20$ (کیلوگرم).

ب) هر ضابطه چندجمله‌ای است و درون بازه‌های خودش پیوسته است. در $t = 1$ داریم $\lim_{t \rightarrow 1^-} (6t + 4) = 10$ ولی $f(1) = 2 \times 1 + 10 = 12$. چون حد چپ با مقدار تابع برابر نیست، f در $t = 1$ ناپیوسته است؛ پس f روی $[0, 10]$ پیوسته نیست.



ریاضی ۲ یازدهم - فصل هفتم

آمار و احتمال

فهرست

۳۳۳ صفحه ۱۵۷۰ فعالیت — اختلاف داده‌ها از میانگین ۲۵۴	۳۱۷ صفحه ۱۴۴۰ پرسش — احتمال شرطی (قرعه‌کشی) ۲۴۶
۳۳۴ صفحه ۱۵۸۰ فعالیت — مجذور اختلاف از میانگین و واریانس ۲۵۵	۳۱۸ صفحه ۱۴۵۰ کار در کلاس — احتمال شرطی (مسابقه اتومبیل‌رانی) ۲۴۶
۳۳۵ صفحه ۱۵۹۰ کار در کلاس — واریانس تعداد کتاب‌های مطالعه‌شده ۲۵۶	۳۱۹ صفحه ۱۵۱۰ تمرین ۱ — استقلال سه پیشامد در پرتاب تاس ۲۴۷
۳۳۶ صفحه ۱۵۹۰ پرسش — ویژگی‌های واریانس ۲۵۷	۳۲۰ صفحه ۱۵۱۰ تمرین ۲ — پرتاب سه باره سکه ۲۴۷
۳۳۷ صفحه ۱۵۹۰ کار در کلاس — واریانس جرم و دمای هوا ۲۵۷	۳۲۱ صفحه ۱۵۱۰ تمرین ۳ — متمم پیشامدهای مستقل ۲۴۸
۳۳۸ صفحه ۱۶۰۰ پرسش — انتخاب شاخص پراکندگی ۲۵۸	۳۲۲ صفحه ۱۵۲۰ تمرین ۴ — تیم کوهنوردی و تیم ملی ۲۴۸
۳۳۹ صفحه ۱۶۰۰ کار در کلاس — ضریب تغییرات دمای مشهد و کیش ۲۵۸	۳۲۳ صفحه ۱۵۲۰ تمرین ۵ — قبولی در درس ریاضی ۲۴۹
۳۴۰ صفحه ۱۶۲۰ کار در کلاس — چارک‌های زمان استفاده از اینترنت ۲۵۹	۳۲۴ صفحه ۱۵۲۰ تمرین ۶ — احتمال شرطی در پرتاب دو تاس ۲۴۹
۳۴۱ صفحه ۱۶۲۰ خواندنی — دهک و صدک ۲۶۰	۳۲۵ صفحه ۱۵۲۰ تمرین ۷ — واکنش مواد شیمیایی ۲۵۰
۳۴۲ صفحه ۱۶۲۰ تمرین ۱ — درستی یا نادرستی جمله‌ها (ویژگی‌های میانگین و پراکندگی) ۲۶۱	۳۲۶ صفحه ۱۵۳۰ فعالیت — محاسبه میانگین جرم دوستان ۲۵۰
۳۴۳ صفحه ۱۶۲۰ تمرین ۲ — مقایسه دو نوع لاستیک ۲۶۱	۳۲۷ صفحه ۱۵۴۰ پرسش — ویژگی‌های میانگین ۲۵۱
۳۴۴ صفحه ۱۶۲۰ تمرین ۳ — پول توجیبی مینا و مریم ۲۶۲	۳۲۸ صفحه ۱۵۴۰ کار در کلاس — میانگین جرم و دمای هوا ۲۵۱
۳۴۵ صفحه ۱۶۳۰ تمرین ۴ — نرخ تورم سال‌های ۸۴ تا ۹۴ ۲۶۳	۳۲۹ صفحه ۱۵۵۰ مثال — میانگین یا میانه؟ (نمره‌های سمیرا) ۲۵۲
۳۴۶ صفحه ۱۶۳۰ تمرین ۵ — ارتفاع شهرهای مرکزی و کهگیلویه و بویراحمد ۲۶۴	۳۳۰ صفحه ۱۵۵۰ کار در کلاس — میانه و میانگین ضربان قلب ۲۵۲
	۳۳۱ صفحه ۱۵۶۰ فعالیت — میانه و میانگین نمره دو کلاس ۲۵۳
	۳۳۲ صفحه ۱۵۷۰ کار در کلاس — دامنه تغییرات (کتاب‌های غیردرسی) ۲۵۳

فرض کنیم در یک قرعه‌کشی اعداد ۱ تا ۲۰ به بیست نفر اختصاص داده شده‌اند و قرار است یک شماره به تصادف انتخاب و به عنوان برنده اعلام شود. اگر شماره ۸ به دست شما افتاده باشد، با چه احتمالی شما برنده خواهید شد؟

اگر بدانید که یک شماره یک رقمی انتخاب خواهد شد، با چه احتمالی برنده خواهید شد؟

بخش اول: فضای نمونه‌ای $S = \{1, 2, \dots, 20\}$ است و $n(S) = 20$. فقط یکی از ۲۰ حالت به نفع شماست، پس

$$P(A) = 1/20 = 0.05$$

بخش دوم: پیشامد B را «یک رقمی بودن شماره انتخاب شده» می‌گیریم؛ $B = \{1, 2, \dots, 9\}$ و $n(B) = 9$. با دانستن اینکه B رخ داده است، فقط ۹ حالت ممکن (هم‌شانس) باقی می‌ماند و شماره ۸ یکی از آنهاست:

$$P(A|B) = n(A \cap B) / n(B) = 1/9 \approx 0.11$$

یعنی احتمال برنده شدن شما از ۱/۲۰ به ۱/۹ افزایش می‌یابد؛ چون اطلاع از رخ دادن B احتمال را تغییر داده است.

در یک مسابقه اتومبیل‌رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

• A: پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

• B: پیشامد رسیدن به خط پایان

پیران زون الله
توشه ای برای موفقیت

طبق مسئله:

$$P(A) = 0.8 \text{ and } P(A \cap B) = 0.7$$

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A) = 0.7 / 0.8 = 7/8 = 0.875$$

پس اگر بدانیم اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با احتمال ۷/۸ (یعنی ۸۷/۵ درصد) به خط پایان می‌رسد.

در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

فضای نمونه‌ای $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. پیشامدها:

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$P(A) = 3/6 = 1/2, P(B) = 2/6 = 1/3, P(C) = 4/6 = 2/3$$

دو پیشامد مستقل اند اگر و فقط اگر $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$.

۱. A و $B: A \cap B = \{6\}$ پس $P(A \cap B) = 1/6$ و $P(A) \cdot P(B) = 1/2 \times 1/3 = 1/6$. برابرند، پس **مستقل** هستند.

۲. A و $C: A \cap C = \{4, 6\}$ پس $P(A \cap C) = 2/6 = 1/3$ و $P(A) \cdot P(C) = 1/2 \times 2/3 = 1/3$. برابرند، پس **مستقل** هستند.

۳. B و $C: B \cap C = \{3, 6\}$ پس $P(B \cap C) = 2/6 = 1/3$ اما $P(B) \cdot P(C) = 1/3 \times 2/3 = 2/9$. برابر نیستند، پس **وابسته (غیرمستقل)** هستند.

یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به دست آورید، به شرطی که در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.

پیشامد A: رو آمدن سکه در پرتاب سوم؛ پیشامد B: پشت آمدن در دو پرتاب اول و دوم. فضای نمونه‌ای ۸ حالت هم‌شانس دارد ($n(S) = 8$).

پیشامد B دو حالت دارد: «پشت، پشت، رو» و «پشت، پشت، پشت»؛ پس $P(B) = 2/8 = 1/4$. همچنین $A \cap B$ فقط حالت «پشت، پشت، رو» است و $P(A \cap B) = 1/8$.

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = (1/8) / (1/4) = 1/2$$

این نتیجه انتظار می‌رفت؛ زیرا پرتاب‌های سکه از هم مستقل‌اند و نتیجه دو پرتاب اول بر پرتاب سوم اثری ندارد.

فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل اند.

ب) با توجه به الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل اند.

الف) چون A و B مستقل اند، $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. پیشامد B را به دو بخش ناسازگار «همراه با A» و «بدون A» تقسیم می‌کنیم:

$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$ و این دو بخش مشترکی ندارند، پس

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(A') \cdot P(B)$$

یعنی A' و B مستقل اند.

ب) طبق الف)، A' و B مستقل اند. حال همان استدلال الف) را برای دو پیشامد مستقل B و A' (به جای A و B) تکرار می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود متمم یکی از آنها (یعنی B') با دیگری (A') مستقل است:

$$P(B' \cap A') = P(A') - P(B \cap A') = P(A') - P(B) \cdot P(A') = P(A') \cdot (1 - P(B)) = P(A') \cdot P(B')$$

پس A' و B' نیز مستقل اند.

احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ‌کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

فرض می‌کنیم انتخاب شدن در دو تیم از هم مستقل است. A: انتخاب در تیم کوهنوردی، B: انتخاب در تیم ملی فوتبال؛ $P(A) = 0.7$ و $P(B) = 0.8$ (پس $P(A') = 0.3$ و $P(B') = 0.2$).

۱. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$ ○

۲. $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = 0.3 \times 0.2 = 0.06$ (متمم‌ها نیز مستقل اند) ○

۳. $P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$ ○

۴. $P(A \cap B') + P(A' \cap B) = 0.7 \times 0.2 + 0.3 \times 0.8 = 0.14 + 0.24 = 0.38$ ○

۵. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94$ (یا $1 - P(A' \cap B') = 1 - 0.06 = 0.94$) ○

احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر 0.625 باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

فرض می‌کنیم قبولی دو نفر مستقل است. احتمال قبولی دوست رؤیا را x می‌گیریم؛ پس احتمال قبولی رؤیا $2x$ است.

«حداقل یکی قبول شود» متمم «هیچ‌کدام قبول نشوند» است:

$$1 - (1 - 2x)(1 - x) = 0.625$$

$$(1 - 2x)(1 - x) = 0.375 \Rightarrow 1 - 3x + 2x^2 = 0.375 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 0.625 = 0$$

$$\Delta = 9 - 5 = 4 \Rightarrow x = (3 \pm 2)/4 \Rightarrow x = 0.25 \text{ یا } x = 1.25$$

چون احتمال نمی‌تواند از ۱ بیشتر باشد، $x = 0.25$ و احتمال قبولی رؤیا برابر $2x = 0.5$ است.

پاسخ: رؤیا با احتمال 0.5 (۵۰ درصد) در درس ریاضی قبول می‌شود. (راستی آزمایی: $0.625 = 0.75 \times 0.5 - 1$)

دو تاس با هم برتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

B : مجموع دو عدد برابر ۸ باشد؛ A : هر دو عدد زوج باشند.

$$B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\} \quad n(B) = 5$$

از این پنج حالت، حالت‌های $(2,6)$ ، $(4,4)$ و $(6,2)$ هر دو عدد زوج دارند: $A \cap B = \{(2,6), (4,4), (6,2)\}$

$$n(A \cap B) = 3$$

$$P(A|B) = n(A \cap B) / n(B) = 3/5 = 0.6$$

ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A، $1/5$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B، $1/7$ است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B، $1/4$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

داده‌ها: $P(B|A) = 1/4$ ، $P(B) = 1/7$ ، $P(A) = 1/5$

از رابطه احتمال شرطی: $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = 1/4 \times 1/5 = 1/20$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/5 + 1/7 - 1/20 = (28 + 20 - 7)/140 = 41/140 \approx 0.293$

پاسخ: احتمال واکنش نشان دادن حداقل یکی از دو ماده برابر $41/140$ (حدود $29/3$ درصد) است.

محمد، جرم ۵ نفر از دوستان خود را پرسید و آنها را در جدول زیر یادداشت کرد. سپس میانگین جرم دوستان خود را حساب کرد:

نحوه محاسبه میانگین

۱- محمد ابتدا مجموع جرم دوستان خود را محاسبه کرد:

۲- سپس عدد حاصل را بر عدد ۵ (تعداد دوستان) تقسیم کرد:

میانگین جرم دوستان محمد برابر است با

دوست	رضا	نیما	سام	احمد	علی
جرم (کیلوگرم)	۵۵	۶۱	۵۷	۵۵	۶۲

۱- مجموع جرم‌ها: $55 + 61 + 57 + 55 + 62 = 290$ کیلوگرم

۲- تقسیم بر تعداد دوستان: $290 \div 5 = 58$

میانگین جرم دوستان محمد برابر است با ۵۸ کیلوگرم.

اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آنها نیز با همان مقدار ثابت جمع خواهد شد. چرا؟

اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آنها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

فرض کنیم داده‌ها $x_1, x_2, \dots, x_n$ و میانگین آنها $\bar{X} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / N$ باشد.

جمع با مقدار ثابت: c میانگین داده‌های جدید برابر است با

$$((x_1 + c) + \dots + (x_n + c)) / N = (x_1 + \dots + x_n + N \cdot c) / N = \bar{X} + c$$

یعنی در مجموع N بار مقدار c به جمع داده‌ها اضافه می‌شود و پس از تقسیم بر N ، فقط c به میانگین افزوده می‌شود.

ضرب در مقدار ثابت:

$$(c \cdot x_1 + \dots + c \cdot x_n) / N = c \cdot (x_1 + \dots + x_n) / N = c \cdot \bar{X}$$

زیرا c از مجموع فاکتور گرفته می‌شود و میانگین جدید c برابر میانگین قبلی خواهد بود.

۱ در فعالیت قبل، میانگین جرم دوستان محمد چند گرم است؟

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجه سانتی‌گراد باشد،

میانگین دمای هوا چند درجه فارنهایت است؟ (راهنمایی: $F = (9/5)C + 32$)

۱) میانگین جرم دوستان محمد ۵۸ کیلوگرم است؛ چون هر کیلوگرم ۱۰۰۰ گرم است: $58 \times 1000 = 58000$

یعنی میانگین جرم آنها ۵۸۰۰۰ گرم است.

۲) دمای فارنهایت تابعی خطی از دمای سانتی‌گراد است (ضرب در ثابت $9/5$ و جمع با ثابت ۳۲)؛ طبق

ویژگی‌های میانگین، میانگین نیز همین تبدیل را می‌پذیرد:

$$\bar{F} = (9/5) \cdot \bar{C} + 32 = (9/5) \times 28 + 32 = 50.4 + 32 = 82.4$$

پس میانگین دمای هوا ۸۲/۴ درجه فارنهایت است.

اعداد زیر نمره‌های درس ریاضی سمیرا در طول یک سال است.

— میانگین و میانه نمره‌های او را حساب کنید.

19 17 18 18 20 5

پ) به نظر شما کدام معیار توانایی دانش‌آموز را در این درس بهتر ارزیابی می‌کند؟ چرا؟

میانگین نمره‌ها $16.17 \approx$ و میانه $Q_2 = 18$ است (محاسبه آنها در متن مثال آمده است).

میانه معیار بهتری است. نمره ۵ در مقایسه با بقیه نمره‌ها (که همه بین ۱۷ تا ۲۰ هستند) یک داده دورافتاده است و میانگین را از ۱۸ به حدود $16/17$ پایین کشیده است؛ در حالی که میانه (۱۸) تحت تأثیر این داده قرار نگرفته و توانایی واقعی سمیرا را بهتر نشان می‌دهد.

داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایه یازدهم، قبل از یک مسابقه دو است.

100 91 82 75 105 98 98 101 89 92 97 86

— میانه داده‌ها را مشخص کنید.

— میانگین داده‌ها را مشخص کنید.

میانه: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

75 82 86 89 91 92 97 98 98 100 101 105

تعداد داده‌ها ۱۲ (زوج) است؛ پس میانه میانگین دو داده وسط (ششم و هفتم) است:

$$Q_2 = (92 + 97)/2 = 94.5$$

$$\bar{X} = (75+82+86+89+91+92+97+98+98+100+101+105)/12 = 1114/12 \approx 92.83$$

میانگین:

نمره ریاضی دانش آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است :

الف) میانه نمره این دو کلاس را محاسبه کنید.

ب) میانگین نمره این دو کلاس را محاسبه کنید.

پ) به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

نمره ریاضی کلاس A (سطر اول) و کلاس B (سطر دوم)

۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	A
۲۰	۱۵	۱۰	۵	۰	B

الف) داده ها از قبل مرتب اند و تعداد هر کدام ۵ (فرد) است؛ میانه همان داده وسط (سوم) است: کلاس A: ۱۰؛ کلاس B: ۱۰.

ب) کلاس A: $(0+5+10+15+20)/5 = 50/5 = 10$ ؛ کلاس B: $(8+9+10+11+12)/5 = 50/5 = 10$.

پ) میانه و میانگین هر دو کلاس برابر ۱۰ است، اما نمره های کلاس A به هم نزدیک اند (۸ تا ۱۲) و نمره های کلاس B بسیار پراکنده اند (۰ تا ۲۰). معلم ترجیح می دهد در کلاس A تدریس کند؛ زیرا دانش آموزان آن از نظر سطح درسی همگن ترند و می توان روش تدریس را متناسب با همه آنها انتخاب کرد، ولی در کلاس B هم دانش آموزان بسیار ضعیف و هم بسیار قوی وجود دارند.

معلم از ۷ نفر از دانش آموزان خواست تا تعداد کتاب های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده اند، گزارش کنند.

الف) دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید. 15 8 9 12 14 4 1

ب) دو دانش آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعداد کتاب های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنه تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید.

پ) از مقایسه پاسخ الف و ب چه نتیجه ای می گیرید؟

الف) بزرگ ترین داده ۱۵ و کوچک ترین ۱ است: $R = 15 - 1 = 14$

ب) با افزودن ۵ و ۱۱ بزرگ ترین داده هنوز ۱۵ و کوچک ترین هنوز ۱ است: $R = 15 - 1 = 14$

پ) با وجود افزایش تعداد داده ها، دامنه تغییرات تغییری نکرد. دامنه تغییرات فقط به بزرگ ترین و کوچک ترین داده بستگی دارد و به مقدار و تعداد داده های میانی وابسته نیست؛ پس این معیار نمی تواند پراکندگی کل داده ها را به خوبی نشان دهد.

الف) در ادامه فعالیت قبل اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جدول‌های زیر محاسبه کنید.

ب) مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

میانگین هر دو کلاس ۱۰ است ($\bar{X} = \bar{Y} = 10$).

الف) جدول کلاس A:

کلاس A

x_i	$(x_i - \bar{X})$
۸	$8 - 10 = -2$
۹	$9 - 10 = -1$
۱۰	$10 - 10 = 0$
۱۱	$11 - 10 = 1$
۱۲	$12 - 10 = 2$

جدول کلاس B:

کلاس B

y_i	$(y_i - \bar{Y})$
۰	$0 - 10 = -10$
۵	$5 - 10 = -5$
۱۰	$10 - 10 = 0$
۱۵	$15 - 10 = 5$
۲۰	$20 - 10 = 10$

ب) کلاس A: $0 + 1 + (-1) + (-2) = 0$ ؛ کلاس B: $0 + 5 + (-5) + (-10) = 0$

در هر دو کلاس مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر شد (و این همیشه برقرار است).

- الف) مجذور اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جداول زیر محاسبه کنید.
- ب) مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.
- پ) میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه و مقایسه کنید.

الف) جدول کلاس A:

کلاس A

x_i	$(x_i - \bar{X})$	$(x_i - \bar{X})^2$
۸	-2	۴
۹	-1	۱
۱۰	۰	۰
۱۱	۱	۱
۱۲	۲	۴

جدول کلاس B:

کلاس B

y_i	$(y_i - \bar{Y})$	$(y_i - \bar{Y})^2$
۰	-10	۱۰۰
۵	-5	۲۵
۱۰	۰	۰
۱۵	۵	۲۵
۲۰	۱۰	۱۰۰

ب) مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین:

$$\text{کلاس A: } (8-10)^2 + \dots + (12-10)^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$$

$$\text{کلاس B: } (0-10)^2 + \dots + (20-10)^2 = 100 + 25 + 0 + 25 + 100 = 250$$

پ) میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین (همان واریانس):

$$\text{کلاس A: } 10/5 = 2 \quad \text{کلاس B: } 250/5 = 50$$

مقایسه: این مقدار برای کلاس (۵۰) B بسیار بزرگ‌تر از کلاس (۲) A است؛ یعنی داده‌های کلاس B پراکندگی بیشتری حول میانگین دارند.

نکته: در جدول صفحه بعد کتاب برای واریانس این دو کلاس اعداد ۲/۵ و ۶۲/۵ آمده است که با تقسیم بر $N-1 = 4$ به دست می‌آید؛ اما مطابق رابطه کتاب $(\sigma^2 = \sum(x_i - \bar{X})^2 / N)$ و تقسیم بر ۵، پاسخ درست ۲ و ۵۰ است.

کار در کلاس

صفحه ۱۵۹

۳۳۵

واریانس تعداد کتاب‌های غیردرسی مطالعه شده در «کار در کلاس» قبل، توسط ۷ و ۹ دانش‌آموز را محاسبه کنید.

طبق رابطه $\sigma^2 = \sum(x_i - \bar{X})^2 / N$ و داده‌های جدول کتاب:

۷ دانش‌آموز (1, 4, 12, 8, 8, 15): مجموع داده‌ها ۶۲ و $\bar{X} = 62/7 \approx 8.857$ ؛ مجموع مجذور اختلاف‌ها ≈ 160.86 و

$$\sigma^2 = 160.86 / 7 \approx 22.98$$

۹ دانش‌آموز (11, 5, 1, 4, 12, 8, 8, 15): مجموع داده‌ها ۷۸ و $\bar{X} = 78/9 \approx 8.667$ ؛ مجموع مجذور اختلاف‌ها $= 180$ و

$$\sigma^2 = 180 / 9 = 20$$

دامنۀ تغییرات	واریانس
۱۴	≈ 22.98
۱۴	۲۰

دامنۀ تغییرات در هر دو حالت ۱۴ است، اما واریانس با تغییر تعداد و مقدار داده‌ها تغییر می‌کند. (اگر در کار در کلاس صفحه ۱۵۷ سومین داده را ۹ بگیریم، واریانس ۷ داده برابر $\approx 22/86$ می‌شود.)

توشه ای برای موفقیت

اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آنها تغییر نخواهد کرد. چرا؟
اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آنها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

جمع با مقدار ثابت: میانگین نیز c واحد زیاد می‌شود $(\bar{X} + c)$ ؛ پس اختلاف هر داده از میانگین تغییر نمی‌کند:

$$(x_i + c) - (\bar{X} + c) = x_i - \bar{X}$$

چون همه اختلاف‌ها (و مجذورهای آنها) همان‌اند، واریانس ثابت می‌ماند. (جابه‌جا کردن همه داده‌ها به اندازه c پراکندگی را عوض نمی‌کند.)

ضرب در مقدار ثابت: میانگین جدید $c \cdot \bar{X}$ است؛ پس

$$c \cdot x_i - c \cdot \bar{X} = c \cdot (x_i - \bar{X}) \quad (c \cdot x_i - c \cdot \bar{X})^2 = c^2 \cdot (x_i - \bar{X})^2$$

یعنی هر مجذور اختلاف در c^2 ضرب می‌شود و در نتیجه واریانس نیز در c^2 (مجذور مقدار ثابت) ضرب می‌شود.

۱ در اولین فعالیت، واریانس جرم دوستان محمد چند گرم به توان دو است؟
۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر واریانس دمای هوا ۶ درجه سانتی‌گراد به توان دو باشد، واریانس دمای هوا چند درجه فارنهایت به توان دو است؟ (راهنمایی: $F = (9/5)C + 32$)

۱) میانگین ۵۸ است و اختلاف‌ها از میانگین: $-3, 3, -1, -3, 4$ پس

$$\sigma^2 = (9 + 9 + 1 + 9 + 16)/5 = 44/5 = 8.8$$

یعنی واریانس جرم دوستان محمد ۸/۸ کیلوگرم به توان دو است. چون هر کیلوگرم ۱۰۰۰ گرم است، واریانس برحسب گرم به توان دو برابر است با $8.8 \times 1000^2 = 8\,800\,000$ (۸۰۰۰ گرم به توان دو).

۲) افزودن عدد ثابت ۳۲ واریانس را عوض نمی‌کند و ضرب در ۹/۵ واریانس را در $(9/5)^2$ ضرب می‌کند:

$$\sigma^2(F) = (9/5)^2 \times 6 = (81/25) \times 6 = 19.44$$

پس واریانس دمای هوا ۱۹/۴۴ درجه فارنهایت به توان دو است.

برای گزارش پراکندگی کدام شاخص را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟
مجدداً این سؤال را مطرح می‌کنیم که در این فعالیت، به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

شاخص ترجیحی: انحراف معیار. دامنه تغییرات فقط به دو داده (بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین) بستگی دارد؛ واریانس هرچند از همه داده‌ها استفاده می‌کند، واحدش توان دوم واحد داده‌هاست (مثلاً سانتی‌متر مربع)، ولی انحراف معیار هم از همه داده‌ها استفاده می‌کند و هم واحد آن با واحد داده‌ها یکی است و بهتر پراکندگی حول میانگین را نشان می‌دهد.

معلم ریاضی: ترجیح می‌دهد در کلاس A تدریس کند؛ زیرا انحراف معیار نمره‌های آن ($\approx 1/4$ طبق رابطه $\sigma = \sqrt{2}$) بسیار کمتر از کلاس B ($\approx 7/1$ طبق $\sigma = \sqrt{50}$) است؛ یعنی نمره‌ها به هم نزدیک‌اند و کلاس همگن‌تر است.

دمای هوای یک هفته اسفند مشهد و کیش، به ترتیب به فارنهایت و سانتی‌گراد گزارش شده است. دمای هوای این هفته در کدام شهر از ثبات بیشتری برخوردار است (ضریب تغییرات کمتری دارد)؟

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	
۵۰	۵۳	۴۹	۴۱	۳۹	۳۷	۳۷	مشهد (فارنهایت)
۲۷	۲۶	۲۴	۲۳	۲۲	۲۲	۲۱	کیش (سانتی‌گراد)

چون واحدهای دو جامعه متفاوت است (فارنهایت و سانتی‌گراد)، برای مقایسه پراکندگی از ضریب تغییرات $cv = \sigma / \bar{X}$ استفاده می‌کنیم.

مشهد: داده‌ها ۵۰، ۵۳، ۴۹، ۴۱، ۳۹، ۳۷، ۳۷؛ مجموع ۳۰۶ و $\bar{X} = 306/7 \approx 43.71$. مجموع مجذور اختلاف‌ها ۲۷۳.۴۳ و $\sigma^2 \approx 39.06$ پس $\sigma \approx 6.25$.

$$cv = 6.25 / 43.71 \approx 0.143 \text{ (حدود } 14/3 \%)$$

کیش: داده‌ها ۲۷، ۲۶، ۲۴، ۲۳، ۲۲، ۲۲، ۲۱؛ مجموع ۱۶۵ و $\bar{X} = 165/7 \approx 23.57$. مجموع مجذور اختلاف‌ها ۲۹۷.۱ و $\sigma^2 \approx 4.24$ پس $\sigma \approx 2.06$.

$$cv = 2.06 / 23.57 \approx 0.087 \text{ (حدود } 8/7 \%)$$

نتیجه: ضریب تغییرات کیش ($\approx 8/7 \%$) کمتر از مشهد ($\approx 14/3 \%$) است؛ پس دمای هوای کیش در این هفته ثبات بیشتری دارد.

معلم یک کلاس می‌خواهد متوسط مدت زمان استفاده دانش‌آموز از اینترنت را برآورد کند. وی از ۳۵ دانش‌آموز کلاس خود پرسید، در یک شبانه‌روز چند دقیقه از اینترنت استفاده می‌کنند؟ در زیر پاسخ آنها گزارش شده است.

چارک اول، میانه و چارک سوم مدت زمان استفاده از اینترنت دانش‌آموزان این کلاس را مشخص کنید.

۴۵	۹۰	۶۰	۲۰۰	۱۵	۱۸۰	۴۵	۸۰	۳۰	۱۲۰
۷۵	۹۰	۹۰	۶۰	۲۰	۱۲۰	۱۱۵	۶۰	۳۰	۲۰
۴۵	۴۵	۶۰	۶۰	۶۰	۱۰۰	۹۰	۷۵	۲۰۰	۲۵
					۱۵	۳۰	۱۸۰	۱۰۰	۱۲۰

ابتدا ۳۵ داده را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

15 15 20 20 25 30 30 30 45 45 45 45 60 60 60 60 60 60 75 75 80 90 90 90 90 100 100 115 120 120
120 180 180 200 200

تعداد داده‌ها ۳۵ (فرد) است؛ پس میانه، داده هجدهم است: $Q_2 = 60$.

چارک اول: میانه ۱۷ داده پیش از میانه (نهمین داده): $Q_1 = 45$

چارک سوم: میانه ۱۷ داده پس از میانه (نهمین داده از آن بخش، یعنی داده بیست‌وششم): $Q_3 = 100$

پاسخ: چارک اول ۴۵ دقیقه، میانه ۶۰ دقیقه و چارک سوم ۱۰۰ دقیقه است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

به نقل از روزنامه همشهری ۹۲/۱۱/۹، شناسایی سه دهک پایین درآمدی باید در دستور کار دولت قرار گیرد. با توجه به این جمله چه افرادی باید شناسایی شوند؟

اگر دولت بخواهد یارانه افرادی را که درآمد آنها بیشتر از دهک هشتم است، حذف کند و به یارانه افرادی که درآمد آنها از دهک سوم کمتر است، ۵۰ درصد اضافه کند، آیا برای دولت مقرون به صرفه است؟

کودکانی که زیر صدک سوم قد رشد می‌کنند، فارغ از اندازه قد باید ارزیابی شوند. — منظور از صدک سوم قد چیست؟

— بر اساس جمله فوق چه کودکانی باید مورد ارزیابی قرار گیرند؟

۱. دهک‌ها داده‌های مرتب‌شده را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند؛ پس «سه دهک پایین» یعنی ۳۰ درصد پایین جامعه از نظر درآمد. باید افرادی شناسایی شوند که درآمدشان در میان ۳۰ درصد کم‌درآمدترین افراد جامعه قرار دارد (درآمد آنها از دهک سوم کمتر یا برابر آن است).
۲. فرض می‌کنیم همه افراد جامعه یارانه برابر (مثلاً y) دریافت می‌کنند و جمعیت N نفر است. افرادی که درآمدشان بیشتر از دهک هشتم است، ۲۰ درصد جامعه (دهک‌های نهم و دهم) هستند؛ حذف یارانه آنها $0.2 \cdot N \cdot y$ صرفه‌جویی دارد. افرادی که درآمدشان کمتر از دهک سوم است، ۳۰ درصد جامعه‌اند و افزایش ۵۰ درصدی یارانه آنها هزینه‌ای برابر $0.3 \cdot N \cdot 0.5y = 0.15 \cdot N \cdot y$ دارد. چون $0.2 \cdot N \cdot y > 0.15 \cdot N \cdot y$ ، دولت خالصاً $0.05 \cdot N \cdot y$ (۵ درصد کل یارانه یک نفر ضرب در جمعیت) صرفه‌جویی می‌کند؛ پس با این فرض‌ها مقرون به صرفه است.
۳. صدک‌ها داده‌های مرتب‌شده را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. صدک سوم قد مقداری از قد است که ۳ درصد از داده‌های (مرتب‌شده) قد کمتر از آن‌اند و ۹۷ درصد بیشتر از آن.
۴. کودکانی که قدشان کمتر از صدک سوم است، یعنی در میان هم‌سن‌وسالان خود جزو ۳ درصد کوتاه‌قدترین‌ها هستند، باید برای بررسی علت کندی رشد مورد ارزیابی قرار گیرند.

توشه‌ای برای موفقیت

درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

- اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازه $\sqrt{c}$ کاهش می‌یابد.
- اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییر بزرگ‌تر می‌شود.
- اگر مقدار ثابت $1/c$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $1/c$ برابر می‌شود.
- اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

۱. **نادرست.** کم کردن عدد ثابت از همه داده‌ها میانگین را به همان اندازه جابه‌جا می‌کند ولی اختلاف داده‌ها از میانگین و در نتیجه واریانس و انحراف معیار تغییر نمی‌کند.
۲. **نادرست.** با افزودن c (برای $c > 0$ و داده‌های مثبت) انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی میانگین بزرگ‌تر می‌شود؛ پس $cv = \sigma/\bar{X}$ کوچک‌تر می‌شود، نه بزرگ‌تر.
۳. **درست.** با ضرب داده‌ها در $1/c$ ، واریانس در $(1/c)^2$ ضرب می‌شود؛ پس انحراف معیار (جذر واریانس) در $1/c$ ضرب می‌شود، یعنی $1/c$ برابر می‌شود (برای $c > 0$ ؛ در حالت کلی در $1/|c|$).
۴. **درست.** هم انحراف معیار و هم میانگین در c ضرب می‌شوند (برای $c > 0$): $cv' = c\sigma / (c\bar{X}) = \sigma/\bar{X} = cv$ ؛ پس ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

کارخانه‌ای دو نوع لاستیک تولید می‌کند. میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۱۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به ترتیب ۲۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

برای مقایسه پراکندگی (پایداری کیفیت) ضریب تغییرات هر نوع را حساب می‌کنیم:

$$\text{نوع A: } cv = 2000 / 11000 \approx 0.182 \quad (\text{حدود } 18.2\%)$$

$$\text{نوع B: } cv = 1000 / 10000 = 0.1 \quad (10\%)$$

ضریب تغییرات نوع B کمتر است؛ یعنی طول عمر لاستیک‌های نوع B از یک لاستیک به لاستیک دیگر کمتر تغییر می‌کند و کیفیت پایدارتر و قابل اعتمادتری دارد. بنابراین (با معیار ضریب تغییرات) **نوع B بهتر است.** هرچند میانگین طول عمر نوع A ۱۰۰۰ کیلومتر بیشتر است، پراکندگی نسبی آن بسیار بیشتر است.

جدول زیر پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد. الف) میانگین و میانۀ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده‌تر است یا مریم؟

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵

الف) مینا: $25 = 125/5 = (23+24+25+26+27)/5$ ، میانۀ (دادهٔ وسط) $= 25$. مریم: $(15+20+25+30+35)/5 = 25$ ، میانۀ $= 25$. میانگین و میانۀ هر دو ۲۵ (ده هزار ریال) است.

ب) مینا: اختلاف‌ها $2, 1, 0, -1, -2 \Rightarrow \sigma^2 = (4+1+0+1+4)/5 = 2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2} \approx 1.41$

مریم: اختلاف‌ها $10, 5, 0, -5, -10 \Rightarrow \sigma^2 = (100+25+0+25+100)/5 = 50 \Rightarrow \sigma = \sqrt{50} \approx 7.07$

پ) ضریب تغییرات مینا $0.057 \approx 1.41/25$ (حدود ۵/۷٪) و مریم $0.283 \approx 7.07/25$ (حدود ۲۸/۳٪) است. چون میانگین‌ها برابرند و پراکندگی پول توجیبی دوستان مینا بسیار کمتر است، توان مالی دوستان او به هم نزدیک است و می‌توان برنامه‌ای (هزینه‌ای) را که برای همه مناسب باشد انتخاب کرد؛ بنابراین **برنامه‌ریزی برای مینا ساده‌تر است**. دوستان مریم از نظر پول توجیبی خیلی متفاوت‌اند (از ۱۵۰ هزار تا ۳۵۰ هزار ریال).

میانگین، میانه و انحراف معیار نرخ تورم (مراجعه به خواندنی) سال‌های ۹۴-۸۴ را بر اساس جدول زیر محاسبه کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱	۱۳۹۰	۱۳۸۹	۱۳۸۸	۱۳۸۷	۱۳۸۶	۱۳۸۵	۱۳۸۴
نرخ تورم	۱۱/۹	۱۵/۶	۳۴/۷	۳۰/۵	۲۱/۵	۱۲/۴	۱۰/۸	۲۵/۴	۱۸/۴	۱۱/۹	۱۰/۴

میانگین: مجموع ۱۱ داده برابر $10.4 + 11.9 + 18.4 + 25.4 + 10.8 + 12.4 + 21.5 + 30.5 + 34.7 + 15.6 + 11.9$
 $= 203.5$ است:

$$\bar{X} = 203.5 / 11 = 18.5$$

میانه: داده‌های مرتب‌شده:

10.4 10.8 11.9 11.9 12.4 15.6 18.4 21.5 25.4 30.5 34.7

تعداد داده‌ها فرد است؛ داده ششم میانه است: $Q_2 = 15.6$

انحراف معیار: مجموع مجذور اختلاف‌ها از میانگین 18.5 برابر $\sum (x_i - 18.5)^2 = 720.7$ است (مثلاً $(10.4 - 18.5)^2 = 65.61$ ، $(34.7 - 18.5)^2 = 262.44$ و ...):

$$\sigma^2 = 720.7 / 11 \approx 65.52 \quad \sigma = \sqrt{65.52} \approx 8.09$$

پاسخ: میانگین ≈ 18.5 ؛ میانه $= 15.6$ ؛ انحراف معیار ≈ 8.1 (درصد).

در جدول زیر ارتفاع از سطح دریا برای بعضی از شهرهای استان مرکزی و کهگیلویه و بویراحمد دیده می‌شود.
(راهنمایی: $1\text{ m} = 3.281\text{ ft}$ ، فوت: ft، متر: m)

- الف) میانگین ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟
ب) انحراف معیار ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟
پ) ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای کدام استان بیشتر است؟

شهر	دنا	دهدشت	ياسوج	شازند	خمین	محلات	اراک
فاصله از سطح دریا	۷۲۱۸/۲۰ (ft)	۳۲۴۸/۱۹ (ft)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۱۹۲۰ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۷۰۸ (m)

الف) شهرهای استان مرکزی (برحسب متر): ۱۷۰۸، ۱۷۷۵، ۱۸۳۰، ۱۹۲۰

$$\bar{X} = (1920 + 1830 + 1775 + 1708) / 4 = 7233 / 4 = 1808.25 \text{ متر}$$

ب) اختلاف‌ها از میانگین: ۱۱۱.۷۵، ۲۱.۷۵، -۳۳.۲۵، -۱۰۰.۲۵؛ مجموع مجذورها $12488.06 + 473.06 + 1105.56 + 10050.06 = 24116.75$

$$\sigma^2 = 24116.75 / 4 \approx 6029.19 \Rightarrow \sigma \approx 77.65 \text{ متر}$$

پ) ارتفاع شهرهای استان کهگیلویه و بویراحمد را به متر تبدیل می‌کنیم:

$$7218.20 \div 3.281 = 2200 \text{ m (دنا)}, 3248.19 \div 3.281 = 990 \text{ m (دهدشت)}, 6135.47 \div 3.281 = 1870 \text{ m (ياسوج)}$$

$$\bar{X} = (2200 + 990 + 1870) / 3 \approx 1686.67 \text{ متر}$$

چون $۱۶۸۶/۶۷ < ۱۸۰۸/۲۵$ ، میانگین ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای استان مرکزی بیشتر است.

توشه‌ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

