

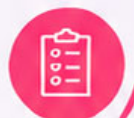
با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe



ریاضی ۲ یازدهم - فصل ششم

حد و پیوستگی

فهرست

۱۶	صفحه ۱۲۹۰ کار در کلاس — حد مجموع	۱۶
۱۶	صفحه ۱۳۰۰ کار در کلاس — حد حاصل ضرب و توان	۱۶
۱۷	صفحه ۱۳۱۰ فعالیت — حد تابع چندجمله‌ای	۱۷
۱۷	صفحه ۱۳۱۰ فعالیت — حد تابع کسری (مخرج غیرصفر)	۱۷
۱۸	صفحه ۱۳۲۰ کار در کلاس — حد با ساده‌سازی $(x+2)/(x^2+5x+6)$	۱۸
۱۸	صفحه ۱۳۳۰ کار در کلاس — حد با ساده‌سازی $(x^3-1)/(x-1)$	۱۸
۱۹	صفحه ۱۳۳۰ کار در کلاس — حد ریشه $((2x-6)\sqrt{})$	۱۹
۱۹	صفحه ۱۳۴۰ کار در کلاس — بررسی گزاره‌های $h(x)= x /x$	۱۹
۲۰	صفحه ۱۳۴۰ کار در کلاس — حد جزء صحیح از روی نمودار	۲۰
۲۱	صفحه ۱۳۴۰ فعالیت — حدهای مثلثاتی	۲۱
۲۳	صفحه ۱۳۵۰ تمرین — تمرین ۱ — حد با نمودار f و g	۲۳
۲۴	صفحه ۱۳۶۰ تمرین — تمرین ۱ (ادامه) — طرح پرسش مشابه	۲۴
۲۴	صفحه ۱۳۶۰ تمرین — تمرین ۲ (دو تابع با حد برابر)	۲۴
۲۵	صفحه ۱۳۶۰ تمرین — تمرین ۳ — محاسبه حدها	۲۵
۲۶	صفحه ۱۳۶۰ تمرین — تمرین ۴ — قوانین حد	۲۶
۲۷	صفحه ۱۳۶۰ تمرین — تمرین ۵ — $ x-3 /(x-3)$ و ۱	۲۷
۲۷	صفحه ۱۳۶۰ تمرین — تمرین ۶ — حد مجموع	۲۷
۴	صفحه ۱۲۰۰ فعالیت — چندضلعی‌های منتظم محاطی در دایره	۴
۵	صفحه ۱۲۱۰ کار در کلاس — چندضلعی‌های منتظم محیطی	۵
۶	صفحه ۱۲۱۰ فعالیت — مساحت مستطیل‌ها و حد از چپ و راست	۶
۷	صفحه ۱۲۳۰ مثال — حد چپ و راست تابع دو ضابطه‌ای	۷
۸	صفحه ۱۲۵۰ فعالیت — رفتار سه تابع در نزدیکی ۴	۸
۱۰	صفحه ۱۲۷۰ تمرین — تمرین ۱ — نمودار و حد	۱۰
۱۱	صفحه ۱۲۷۰ تمرین — تمرین ۲ — حد برابر ۱-	۱۱
۱۱	صفحه ۱۲۷۰ تمرین — تمرین ۳ — تابع بدون حد با $f(3)=1$	۱۱
۱۲	صفحه ۱۲۷۰ تمرین — تمرین ۴ — حد ۴ و تعریف نشده در ۲	۱۲
۱۲	صفحه ۱۲۷۰ تمرین — تمرین ۵ — حدهای $(x-2)\sqrt{}$	۱۲
۱۳	صفحه ۱۲۷۰ تمرین — تمرین ۶ — $ x $ بدون نقطه صفر	۱۳
۱۳	صفحه ۱۲۷۰ تمرین — تمرین ۷ — سه تابع f, g, h	۱۳
۱۴	صفحه ۱۲۷۰ تمرین — تمرین ۸ — وجود حد در $x=2$	۱۴
۱۴	صفحه ۱۲۷۰ تمرین — تمرین ۹ — حد در صفر	۱۴
۱۵	صفحه ۱۲۷۰ تمرین — تمرین ۱۰ — $x/ x $	۱۵
۱۵	صفحه ۱۲۸۰ کار در کلاس — حد تابع ثابت و همانی	۱۵

۳۴ صفحه ۱۴۲۰ کار در کلاس — بازه بسته با پیوستگی متفاوت ... ۴۴

۳۵ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۱ — f, g و h در $x=2$... ۴۵

۳۵ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۲ — نمودار و ناپیوستگی ... ۴۶

۳۶ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۳ — $(x-3)/(x^2-9)$... ۴۷

۳۶ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۴ — پیوستگی جزء صحیح ... ۴۸

۳۶ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۵ — پیوستگی در صفر ... ۴۹

۳۷ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۶ — حد ۱- ولی ناپیوسته ... ۵۰

۳۷ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۷ — پیوستگی در $x=1$ از روی نمودار ... ۵۱

۳۸ صفحه ۱۴۲۰ تمرین — تمرین ۸ — جرم کودک ... ۵۲

۳۴ صفحه ۱۳۶۰ تمرین — تمرین ۷ — حد جزء صحیح ... ۲۸

۳۵ صفحه ۱۳۷۰ فعالیت — نمودارهای پیوسته و ناپیوسته ... ۲۹

۳۶ صفحه ۱۳۸۰ فعالیت — مثال‌های دیگر از ناپیوستگی ... ۳۰

۳۷ صفحه ۱۳۹۰ کار در کلاس — ناپیوستگی در $x=1$... ۳۰

۳۸ صفحه ۱۳۹۰ فعالیت — پیوستگی راست $\sqrt{x-2}$... ۳۱

۳۹ صفحه ۱۴۰۰ کار در کلاس — پیوستگی چپ $g(x)$... ۳۱

۴۰ صفحه ۱۴۰۰ کار در کلاس — پیوستگی روی بازه‌های نیم باز ... ۳۲

۴۱ صفحه ۱۴۱۰ کار در کلاس — سه تابع روی بازه‌های مختلف ... ۳۲

۴۲ صفحه ۱۴۱۰ کار در کلاس — تابع سه ضابطه‌ای — نمودار، دامنه، پیوستگی ... ۳۳

۴۳ صفحه ۱۴۱۰ کار در کلاس — درست یا نادرست درباره پیوستگی f ... ۳۴



در دایره‌های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به گونه‌ای رسم شده‌اند که رأس‌های آنها روی دایره واقع‌اند. چنین چند ضلعی‌هایی را محاطی می‌نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کمتر است.

حدس می‌زنید مساحت کدام یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های منتظم محاطی بیشتر شوند، چه اتفاقی می‌افتد؟

در جدول زیر مساحت تعدادی از n ضلعی‌های منتظم محاطی به شعاع r (با دقت یک رقم اعشار) داده شده است. برای نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی به مساحت دایره چه می‌توان کرد؟ آیا به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟

مساحت تقریبی n ضلعی منتظم محاطی در دایره‌ای به شعاع r

تعداد اضلاع	۳	۴	۵	۶	۷	...	۱۲
مساحت تقریبی	$۱.۳r^2$	$۲r^2$	$۲.۳۸r^2$	$۲.۶r^2$	$۲.۷r^2$	...	$۳r^2$

حدس: مساحت مربع به مساحت دایره نزدیک‌تر است؛ زیرا مربع بخش بیشتری از دایره را می‌پوشاند و فاصله ضلع‌هایش با دایره کمتر از مثلث است. با بیشتر شدن تعداد اضلاع، چندضلعی منتظم محاطی هرچه بیشتر شبیه دایره می‌شود و مساحتش بزرگ‌تر می‌شود و به مساحت دایره نزدیک‌تر می‌گردد.

جدول: با افزایش تعداد اضلاع، مساحت‌ها به ترتیب $۱.۳r^2$ ، $۲r^2$ ، $۲.۴r^2$ ، $۲.۶r^2$ ، $۲.۷r^2$ ، ...، $۳r^2$ می‌شوند و به مساحت دایره، یعنی $\pi r^2 \approx 3.14r^2$ نزدیک می‌شوند. پس جای خالی جدول «مساحت دایره» است.

پاسخ پرسش آخر: برای نزدیک‌تر شدن مساحت چندضلعی به مساحت دایره باید تعداد اضلاع را بیشتر کنیم. بله؛ به هر میزان که بخواهیم (هر چقدر هم که کوچک باشد فاصله مطلوب) می‌توانیم با انتخاب تعداد اضلاع به اندازه کافی بزرگ، مساحت چندضلعی منتظم محاطی را به مساحت دایره نزدیک کنیم.

فرض کنید در فعالیت قبل برای دایره به شعاع r از چند ضلعی‌های منتظم محیطی (چند ضلعی که همه اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند) استفاده کنیم. نتیجه مشابه آنچه را در فعالیت قبل به دست آمد، درباره این چند ضلعی‌ها بیان کنید (محاسبه مساحت‌ها لازم نیست).

مساحت چند ضلعی منتظم محیطی از مساحت دایره **بیشتر** است (مثلث محیطی بزرگ‌تر از مربع محیطی است). هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی منتظم محیطی بیشتر شود، مساحت آن کمتر می‌شود و به مساحت دایره نزدیک‌تر می‌گردد.

یعنی مساحت چند ضلعی‌های منتظم محیطی را نیز می‌توانیم به هر میزان که بخواهیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم؛ با این تفاوت که این مساحت‌ها از بالا (از سمت بزرگ‌تر) به مساحت دایره نزدیک می‌شوند.



مربع ABCD به ضلع ۴ واحد را در نظر می‌گیریم. پاره خط MN وسط AB را به وسط DC وصل می‌کند. مساحت مستطیل AMND چقدر است؟ به موازات MN پاره خط‌هایی رسم می‌کنیم که مانند شکل، نقاط انتهایی آنها روی AB و CD است. مساحت مستطیل‌های جدید پدید آمده، در جدول داده شده است. جاهای خالی را پر کنید (طول مستطیل‌ها برابر ۴ واحد است).

مشابه همین کار را با شروع از پاره خط BC انجام می‌دهیم. پاره خط‌هایی که به موازات BC رسم می‌شوند، همانند شکل زیر، مستطیل‌های جدیدی را می‌سازند. جدول را کامل کنید.

خلاصه دو جدول قبل در جدول زیر ارائه شده است (جاهای خالی را پر کنید).

طول مستطیل‌ها ۴ و عرض آنها x است، پس مساحت $f(x) = 4x$ می‌شود. مساحت مستطیل AMND با عرض ۲ برابر $8 = 4 \times 2$ است.

جدول اول: عرض‌های کمتر از ۳

عرض مستطیل‌ها	۲	۲.۱	۲.۵	۲.۷	۲.۸	۲.۹	۲.۹۹
مساحت مستطیل رنگی	۸	۸.۴	۱۰	۱۰.۸	۱۱.۲	۱۱.۶	۱۱.۹۶

هرچه عرض مستطیل‌ها (با مقادیر کمتر از ۳) به ۳ نزدیک‌تر می‌شود، مساحت به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود.

جدول دوم: عرض‌های بیشتر از ۳

عرض مستطیل‌ها	۴	۳.۹	۳.۵	۳.۲	۳.۱	۳.۰۱
مساحت مستطیل رنگی	۱۶	۱۵.۶	۱۴	۱۲.۸	۱۲.۴	۱۲.۰۴

هرچه عرض مستطیل‌ها (با مقادیر بیشتر از ۳) به ۳ نزدیک‌تر می‌شود، مساحت به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود.

جدول خلاصه

x	۲	۲.۱	۲.۵	۲.۸	۲.۹	۲.۹۹	$\rightarrow 3 \leftarrow$	۳.۰۱	۳.۱	۳.۲	۳.۵	۳.۹	۴
$f(x)$	۸	۸.۴	۱۰	۱۱.۲	۱۱.۶	۱۱.۹۶	$\leftarrow 12 \rightarrow$	۱۲.۰۴	۱۲.۴	۱۲.۸	۱۴	۱۵.۶	۱۶

یعنی وقتی x از سمت چپ یا از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود، مقدار $f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود.

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x$ برای $x < 1$ و $f(x) = -x + 5$ برای $x > 1$ رسم شده است. جدول صفحه بعد را کامل کنید و با استفاده از آن و به کمک نمودار $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

جدول کامل شده (x از سمت راست و چپ به ۱ نزدیک می شود)

x	۲	۱.۸	۱.۵	۱.۲	۱.۱	۱.۰۱	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۰.۹۹	۰.۹	۰.۸	۰.۵	۰.۲	۰
f(x)	۳	۳.۲	۳.۵	۳.۸	۳.۹	۳.۹۹		۱.۹۸	۱.۸	۱.۶	۱	۰.۴	۰

برای $x > 1$ داریم $f(x) = -x + 5$ ؛ وقتی x از راست به ۱ نزدیک می شود، $f(x)$ به ۴ نزدیک می شود. برای $x < 1$ داریم $f(x) = 2x$ ؛ وقتی x از چپ به ۱ نزدیک می شود، $f(x)$ به ۲ نزدیک می شود:

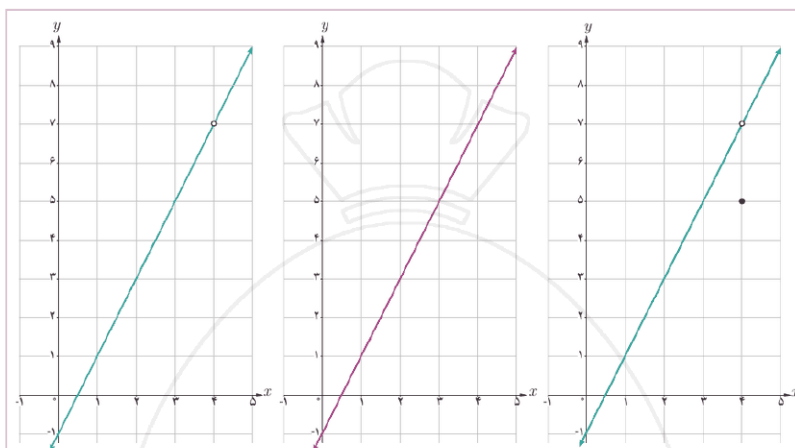
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \text{ and } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$$

حد چپ و حد راست هر دو موجود ولی نابرابرند؛ بنابراین تابع در $x = 1$ حد ندارد.



نمودار توابع زیر رسم شده‌اند: $f(x) = 2x - 1$ ، $g(x) = 2x - 1$ برای $x \neq 4$ و $g(x) = 5$ برای $x = 4$ ، $h(x) = 2x - 1$ (4) $\neq$. هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟ دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.

می‌خواهیم رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطه ۴ بررسی کنیم. ابتدا جدول را کامل کنید.
مقادیر f ، g و h را به اندازه‌ای که بخواهیم می‌توانیم به عدد ... نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ... نزدیک شود. حد هر سه تابع وقتی که $x \rightarrow 4$ (بخوانید x به سمت ۴ میل می‌کند) برابر ... است. به عبارت دیگر: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \dots$ ، $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \dots$ ، $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = \dots$



تعلق نمودارها (از چپ به راست در کتاب): نمودار اول (آبی، خط با یک دایره توخالی در نقطه $(4, 7)$) مربوط به h ؛ نمودار دوم (صورتی، خط کامل) مربوط به f ؛ نمودار سوم (سبز، خط با دایره توخالی در $(4, 7)$ و نقطه جدا در $(4, 5)$) مربوط به g است.

این سه تابع با هم برابر نیستند؛ زیرا دامنه آنها یا مقدارشان در $x = 4$ فرق دارد:

- f : دامنه $\mathbb{R}$ و برد $\mathbb{R}$
- g : دامنه $\mathbb{R} - \{4\}$ و برد $\mathbb{R} - \{7\}$ (مقدار ۷ هرگز گرفته نمی‌شود؛ مقدار $g(4) = 5$ هم برای $x = 3$ گرفته شده است)
- h : دامنه $\mathbb{R} - \{4\}$ و برد $\mathbb{R} - \{7\}$

جدول کامل شده

۵	۴.۵	۴.۲	۴.۱	۴.۰۱	$\rightarrow 4 \leftarrow$	۳.۹۹	۳.۹	۳.۸	۳.۵	۳	x
۹	۸	۷.۴	۷.۲	۷.۰۲	$\leftarrow 7 \rightarrow$	۶.۹۸	۶.۸	۶.۶	۶	۵	$f(x)$
۹	۸	۷.۴	۷.۲	۷.۰۲	$\leftarrow 7 \rightarrow$	۶.۹۸	۶.۸	۶.۶	۶	۵	$g(x)$
۹	۸	۷.۴	۷.۲	۷.۰۲	$\leftarrow 7 \rightarrow$	۶.۹۸	۶.۸	۶.۶	۶	۵	$h(x)$

مقادیر f ، g و h را به اندازه‌ای که بخواهیم می‌توانیم به عدد 7 نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد 4 نزدیک شود. حد هر سه تابع وقتی $x \rightarrow 4$ برابر 7 است:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7, \quad \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 7, \quad \lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 7$$

توجه: مقدار $5 = g(4)$ و $7 = f(4)$ است ولی $h(4)$ تعریف نشده است؛ با این حال حد هر سه تابع در 4 برابر 7 است (حد به مقدار تابع در خود نقطه بستگی ندارد).



برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

ب) $f(1) = 2$

پ) $f(2) = 1$

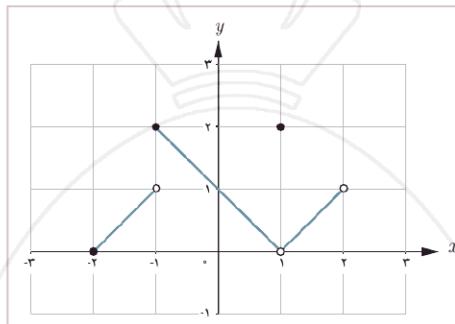
ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

چ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.

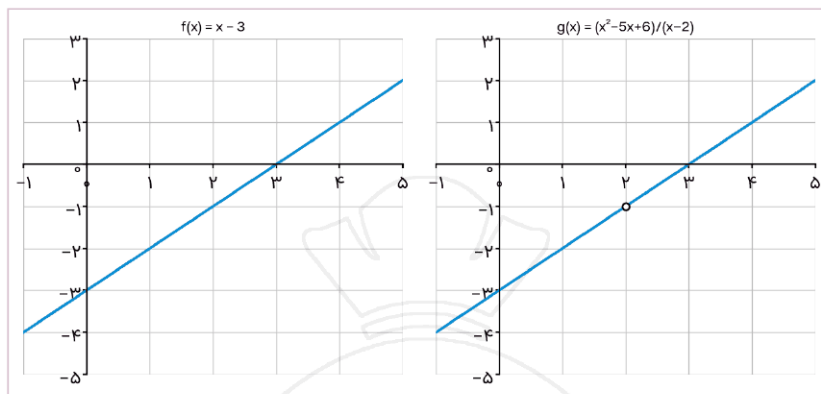


- الف) نادرست؛ وقتی x از چپ یا راست به ۱ نزدیک می‌شود، $f(x)$ به ۰ نزدیک می‌شود. پس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ (نقطه $(1, 2)$ فقط مقدار تابع است).
- ب) درست؛ نقطه توپر $(1, 2)$ روی نمودار است: $f(1) = 2$.
- پ) نادرست؛ در $x = 2$ دایره توخالی $(2, 1)$ است، یعنی $f(2)$ تعریف نشده است.
- ت) درست؛ از سمت راست -2 نمودار از نقطه $(-2, 0)$ شروع می‌شود و حد راست برابر ۰ است.
- ث) نادرست؛ حد چپ در -1 برابر ۱ و حد راست برابر ۲ است؛ نابرابرند و حد وجود ندارد.
- ج) درست؛ نمودار از نقطه $(0, 1)$ می‌گذرد و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- چ) درست؛ تابع فقط در سمت چپ ۲ تعریف شده است (حد چپ برابر ۱ است ولی حد راست وجود ندارد)، پس حد وجود ندارد.
- ح) درست؛ حد چپ ۱ و حد راست ۲ است، پس حد در -1 وجود ندارد.

مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه ۲ مساوی ۱- باشد.

تابع $f(x) = x - 3$ را در نظر می‌گیریم: $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1$.

تابع $g(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x - 2)$ هم مثال دیگری است؛ برای $x \neq 2$ داریم $g(x) = (x-2)(x-3)/(x-2) = x - 3$ و در $x = 2$ تعریف نشده است، ولی حد آن در ۲ برابر ۱- است.

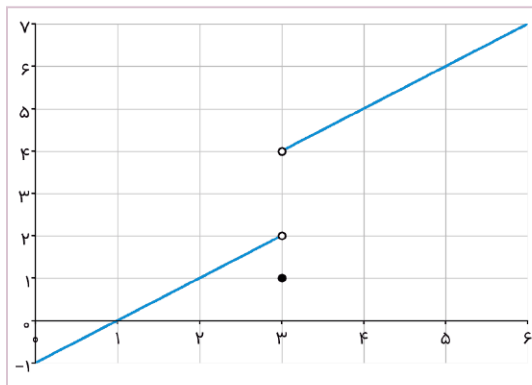


تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه ۳ حد نداشته باشد. $f(3) = 1$.

تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 1 && \text{اگر } x < 3 \\ f(x) &= 1 && \text{اگر } x = 3 \\ f(x) &= x + 1 && \text{اگر } x > 3 \end{aligned}$$

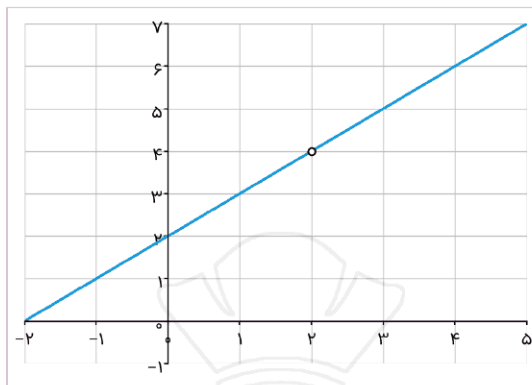
حد چپ در ۳ برابر $3 - 1 = 2$ و حد راست برابر $3 + 1 = 4$ است. چون حد چپ و راست نابرابرند، تابع در ۳ حد ندارد، و $f(3) = 1$ است.



تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه ۲ تعریف نشده باشد. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

$$f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2) \quad x = 2 \quad x \neq 2:$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \text{ پس } f(x) = (x-2)(x+2)/(x-2) = x + 2$$

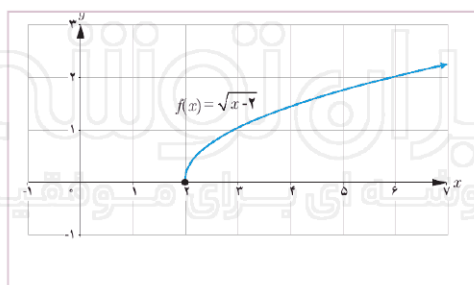


درباره تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ت) $f(2)$



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ ○

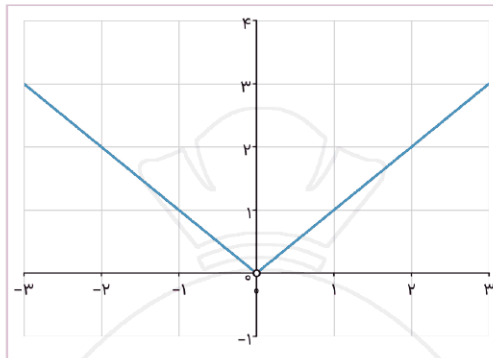
ب) تابع برای $x < 2$ تعریف نشده است، پس حد چپ وجود ندارد. ○

پ) چون حد چپ وجود ندارد، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد. ○

ت) $f(2) = \sqrt{0} = 0$ ○

تابع با ضابطه $f(x) = x$ برای $x > 0$ و $f(x) = -x$ برای $x < 0$ را در نظر می‌گیریم. آیا f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ آیا $f(0)$ موجود است؟

برای $x > 0$ مقدار $f(x) = x$ و برای $x < 0$ مقدار $f(x) = -x = |x|$ است.
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$ ؛ حد چپ و راست برابرند، پس **حد وجود دارد** و برابر ۰ است.
 اما ضابطهٔ تابع برای $x = 0$ تعریف نشده است؛ پس $f(0)$ **موجود نیست**.



توابع زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید: $f(x) = 2x + 1$ ، $g(x) = 2x + 1$ ($x \neq 2$)، $h(x) = 2x + 1$ برای $x \neq 2$ و $h(2) = 3$.

الف) مقادیر $f(2)$ ، $h(2)$ و $g(2)$ را در صورت وجود به دست آورید.

ب) حدهای $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ را وقتی $x \rightarrow 2$ محاسبه کنید.

الف) $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$ ؛ $h(2) = 3$ ؛ $g(2)$ تعریف نشده است.

ب) در هر سه تابع برای $x \neq 2$ مقدار تابع $2x + 1$ است و وقتی $x \rightarrow 2$ به $2 \times 2 + 1 = 5$ نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 5$$

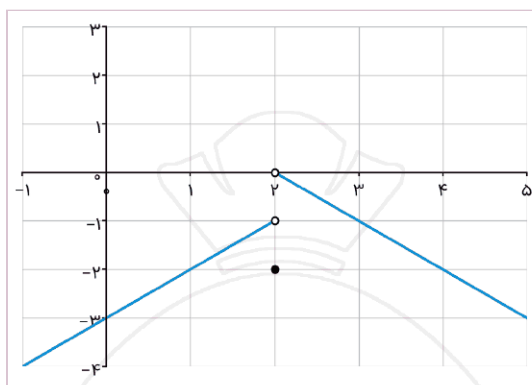
توجه: $h(2) = 3 \neq 5$ است؛ یعنی حد تابع با مقدار تابع در آن نقطه لزوماً برابر نیست.

آیا حد تابع زیر در $x = 2$ موجود است؟ $f(x) = -x + 2$ برای $x > 2$ ، $f(x) = -2$ برای $x = 2$ ، $f(x) = x - 3$ برای $x < 2$

حد چپ: $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 3) = -1$

حد راست: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (-x + 2) = 0$

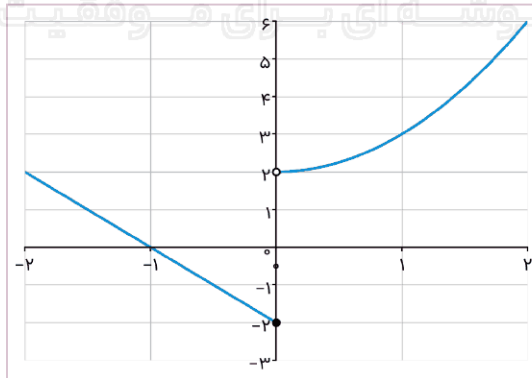
چون حد چپ و حد راست برابر نیستند، حد تابع در $x = 2$ **وجود ندارد** (مقدار $f(2) = -2$ در این نتیجه تأثیری ندارد).



نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 2$ برای $x > 0$ و $f(x) = -2x - 2$ برای $x \leq 0$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را — در صورت وجود — بیابید.

حد راست: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 2$ ؛ حد چپ: $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x - 2) = -2$

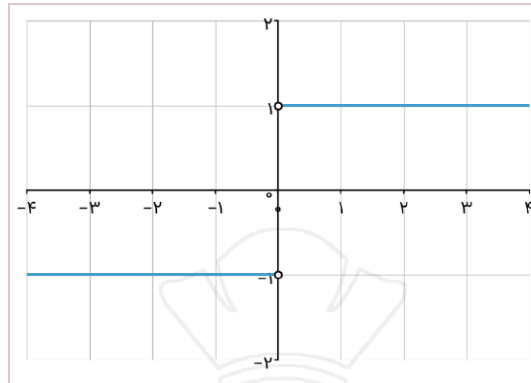
حد چپ و راست نابرابرند، پس تابع در صفر **حد ندارد** ($f(0) = -2$).



اگر $f(x) = |x|/x$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟

برای $x > 0$ داریم $f(x) = x/x = 1$ و برای $x < 0$ داریم $f(x) = -x/x = -1$ ؛ در $x = 0$ تابع تعریف نشده است.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ؛ چون برابر نیستند، حد در صفر وجود ندارد.



حدهای زیر را حساب کنید:

$\lim_{x \rightarrow 7} x = 7$ ☐

$\lim_{x \rightarrow 7} 5 = 5$ ☐

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ☐

$\lim_{x \rightarrow 5} 0 = 0$ ☐

$\lim_{x \rightarrow 4} (-2) = -2$ ☐

$\lim_{x \rightarrow -7} x = -7$ ☐

اگر $f(x) = x$ و $g(x) = 2x - 1$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$ را به کمک قانون بالا محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها قانون حد مجموع را نیز توضیح دهید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 + 3 = 5$$

توضیح با نمودار: نمودار مجموع، یعنی $(f+g)(x) = 3x - 1$ ، در $x = 2$ به ارتفاع $3 \times 2 - 1 = 5$ می‌رسد. وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، مقدار f به ۲ و مقدار g به ۳ نزدیک می‌شود؛ پس مقدار مجموع به $2 + 3 = 5$ نزدیک می‌شود.

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ، به کمک قانون حد حاصل ضرب حد هریک از حدهای زیر را بیابید: $\lim (f(x))^2 =$
 $\lim (f(x))^3 =$ ؛ $\lim (f(x) \cdot f(x)) =$
ب) برای محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow 20} ((2/5)x - 3)$ چگونه از قوانین ۲، ۴ و ۵ استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \cdot l = l^2 \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^3 = \lim_{x \rightarrow a} ((f(x))^2 \cdot f(x)) = l^2 \cdot l = l^3$$

ب) طبق قانون ۲ (حد تابع همانی) $\lim_{x \rightarrow 20} x = 20$. طبق قانون ۵ (ضریب ثابت از حد بیرون می‌آید)
 $\lim_{x \rightarrow 20} (2/5)x = (2/5) \cdot 20 = 8$. طبق قانون ۱ (حد تابع ثابت) $\lim_{x \rightarrow 20} 3 = 3$. سپس با قانون ۴ (حد تفاضل):

$$\lim_{x \rightarrow 20} ((2/5)x - 3) = 8 - 3 = 5$$

۱) برای تابع f با ضابطه $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ ،

الف) با تکمیل جاهای خالی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به دست آورید: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x - 7) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2) + \lim_{x \rightarrow 1} (2x) - \lim_{x \rightarrow 1} 7 = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \dots + \dots$

ب) $f(1)$ را محاسبه کنید و درستی تساوی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ را بررسی کنید.

پ) دربارهٔ تابع با ضابطه $g(x) = (1/8)x^4 - x^3 + 5x - 1/2$ ، درستی تساوی $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ را وقتی $x \rightarrow 2$ بررسی کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1^2 = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} 7 = 7$ ؛ یعنی جاهای خالی ۲
 $\lim_{x \rightarrow 1} x$ و $\lim_{x \rightarrow 1} 7$ هستند.

ب) $f(1) = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 7 = -2$ ؛ پس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -2$ و تساوی درست است.

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = (1/8) \cdot 2^4 - 2^3 + 5 \cdot 2 - 1/2 = 2 - 8 + 10 - 0.5 = 3.5$ و $g(2) = (1/8) \cdot 2^4 - 2^3 + 5 \cdot 2 - 1/2 = 3.5$ ؛ پس $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ درست است.

۲) الف) مطلوب است: $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1)/(x^2 - 4x + 1)$. جاهای خالی را کامل کنید:

$\dots / \dots \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1)/(x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) / \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + 1) =$

ب) حدهای مقابل را حساب کنید: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/((3/5)x^2 - 2x + 1)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + 2x^3 + 1)/(5x^2 + 2/3)$.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1)/(x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) / \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + 1) = 5 / (9 - 12 + 1) = 5/(-2) = -5/2$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + 2x^3 + 1)/(5x^2 + 2/3) = (1 + 2 + 1)/(5 + 2/3) = 4/(17/3) = 12/17$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/((3/5)x^2 - 2x + 1) = (1 - 1)/(3/5 - 2 + 1) = 0/(-2/5) = 0$

مانند مثال قبل حدها را محاسبه کنید؛ سپس به کمک نمودارها نیز محاسبه حد را توضیح دهید. الف)

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x + 6) / (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -2} (\dots) / (\dots)$$

صورت و مخرج هر دو در $x = -2$ صفرند. صورت را تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x + 6) / (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2)(x + 3) / (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 3) = 1$$

توضیح با نمودار: برای $x \neq -2$ تابع $f(x) = (x^2 + 5x + 6) / (x + 2)$ با $g(x) = x + 3$ برابر است؛ نمودار f همان خط $y = x + 3$ با یک «حفره» در نقطه $(-2, 1)$ است. وقتی x به -2 نزدیک می‌شود، ارتفاع نمودار هر دو تابع به ۱ نزدیک می‌شود؛ پس حد برابر ۱ است (هرچند $f(-2)$ تعریف نشده است).

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) / (x - 1)$ (مانند مثال قبل محاسبه کنید و با نمودار توضیح دهید).

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) / (x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)(x^2 + x + 1) / (x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

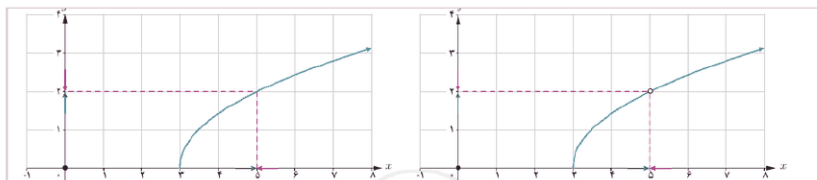
توضیح با نمودار: برای $x \neq 1$ این تابع با $g(x) = x^2 + x + 1$ برابر است؛ نمودار آن همان سهمی با یک حفره در نقطه $(1, 3)$ است و وقتی $x \rightarrow 1$ ارتفاع نمودار به ۳ نزدیک می‌شود.

۱) نمودارهای توابع با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{2x-6}$ و $g(x) = \sqrt{2x-6}$ ($x \neq 5$) رسم شده‌اند.

الف) هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟

ب) آیا $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$ موجودند؟

پ) کدام یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{2x-6}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{2x-6}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{2x-6}$



الف) نمودار سمت چپ (بدون دایرهٔ توخالی) مربوط به f و نمودار سمت راست (با دایرهٔ توخالی در $(5, 2)$) مربوط به g است.

ب) بله؛ $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = \sqrt{2 \times 5 - 6} = \sqrt{4} = 2$ چون $\lim_{x \rightarrow 5} (2x-6) = 4 > 0$.

پ) دامنه $x \geq 3$ است. حد راست: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{2x-6} = \sqrt{0} = 0$ موجود است. حد چپ $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{2x-6}$ وجود ندارد. وجود ندارد (تابع برای $x < 3$ تعریف نشده است). در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{2x-6}$ نیز وجود ندارد.

۲) دربارهٔ تابع $h(x) = |x|/x$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید: الف) $h(x) = 1$

ب) $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$

ت) $h(0) = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ وجود ندارد.

الف) نادرست؛ $h(x) = 1$ فقط برای $x > 0$ است و برای $x < 0$ برابر -1 است.

ب) درست؛ تابع فقط در $x = 0$ تعریف نشده است.

پ) درست؛ برای $x > 0$ داریم $h(x) = 1$.

ت) نادرست؛ $h(0)$ تعریف نشده است.

ث) درست؛ حد چپ (-1) و حد راست (1) برابر نیستند.

۳ با استفاده از نمودار تابع $f(x) = [x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید: الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$

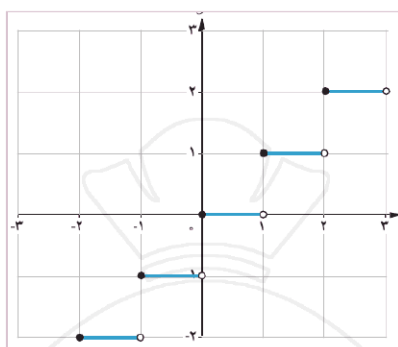
ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1.5} [x]$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} [x]$



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$ ☐

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$ ☐

پ) حد چپ (۱) و حد راست (۲) برابر نیستند؛ $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ وجود ندارد. ☐

ت) به همین دلیل (حد چپ ۰ و حد راست ۱) $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$ وجود ندارد. ☐

ث) در نزدیکی ۱٫۵ تابع ثابت و برابر ۱ است؛ $\lim_{x \rightarrow 1.5} [x] = 1$ ☐

ج) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} [x] = -2$ و در نزدیکی آن $[x] = -2$ ؛ پس ☐

ایران تووشه
توشه ای برای موفقیت

با استفاده از نمودار $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ حدهای زیر را بیابید: الف) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \sin x$

پ) $\lim_{x \rightarrow \pi/3^-} \sin x$

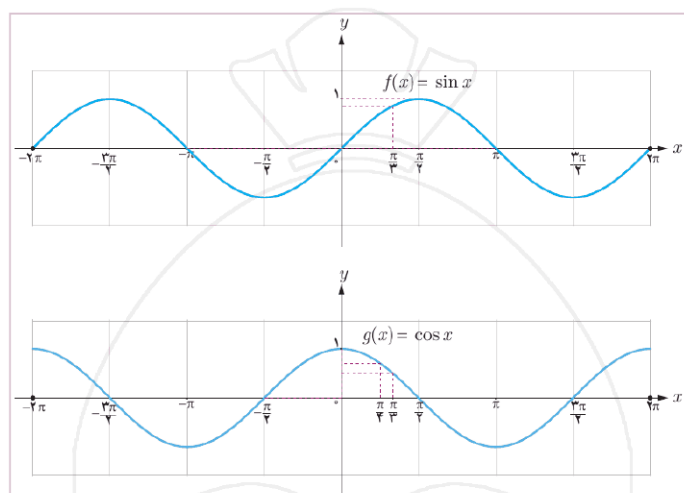
ت) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin x$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

ج) $\lim_{x \rightarrow \pi/4^-} \cos x$

چ) $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \cos x$

ح) $\lim_{x \rightarrow \pi/3^+} \cos x$



الف) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = \sin(\pi/2) = 1$ ○

ب) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \sin x = \sin(-\pi) = 0$ ○

پ) $\lim_{x \rightarrow \pi/3^-} \sin x = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ ○

ت) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin x = \sin \pi = 0$ ○

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ ○

ج) $\lim_{x \rightarrow \pi/4^-} \cos x = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ ○

چ) $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \cos x = \cos(-\pi/2) = 0$ ○

ح) $\lim_{x \rightarrow \pi/3^+} \cos x = \cos(\pi/3) = 1/2$ ○

در همه موارد حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر است؛ زیرا $\sin$ و $\cos$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.





۱) با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$

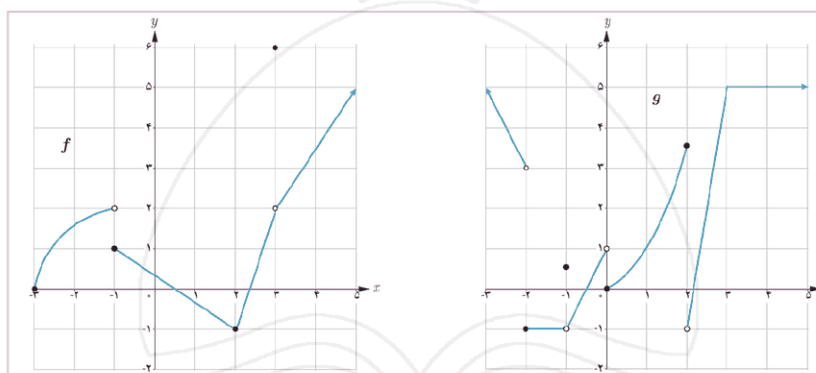
ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$

چ) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)/g(x)$

د) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x))$



از نمودارها: f در ۳ از هر دو طرف به ۲ نزدیک می‌شود ($f(3) = 6$ اثری ندارد). f در -۱ حد چپ ۲ و حد راست ۱ دارد. f در ۰ روی خط $y = 1 - (2/3)(x+1)$ است و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1/3$ در ۲ داریم $\lim f = -1$. در ۵ حد f برابر ۵ است. نمودار g در ۳ حد چپ و راست ۵ است؛ در -۱ حد چپ و راست -۱ است؛ در ۰ حد چپ ۱ و حد راست ۰ است؛ در ۲ حد چپ ۳/۵ و حد راست -۱ است؛ در ۵ حد برابر ۵ است.

○ الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

○ ب) حد چپ ۲ و حد راست ۱ است؛ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.

○ پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$

○ ت) هر دو حد موجودند: $\lim_{x \rightarrow 3} (f+g)(x) = 2 + 5 = 7$

○ ث) f در -۱ حد ندارد؛ حد چپ مجموع $1 + (-1) = 0$ و حد راست $2 + (-1) = 1$ است؛ پس حد وجود ندارد.

○ ج) g در ۲ حد ندارد (حد چپ ۳/۵ و حد راست -۱)؛ حد چپ عبارت $2(-1) + 5(3.5) = 15.5$ و حد راست

$-7 = 2(-1) + 5(-1)$ است؛ پس حد وجود ندارد.

○ چ) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4 = (1/3)^4 = 1/81$

- ج) حد چپ g برابر 1 و حد راست آن 0 است؛ حد چپ مربع 1 و حد راست 0 است؛ حد وجود ندارد.
- خ) حد چپ $-2/7 = -1/3.5$ و حد راست $1 = -1/-1$ است؛ حد وجود ندارد.
- د) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \cdot g(x) = 5 \times 5 = 25$

تمرین

صفحه ۱۳۶

۲۸

حداقل سه پرسش مانند موارد صفحه بعد مطرح کنید و به آنها پاسخ دهید. درباره مسائل مطرح شده در کلاس گفت‌وگو کنید.

نمونه‌ای از سه پرسش و پاسخ آنها:

۱. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x - 5)$ را بیابید. پاسخ: $-1 - 2 - 5 = -8$.
۲. $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 16)/(x - 4)$ را بیابید. پاسخ: $\lim_{x \rightarrow 4} (x-4)(x+4)/(x-4) = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 8$.
۳. $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$ را بیابید. پاسخ: 1 و 2 ؛ چون برابر نیستند، $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ وجود ندارد.

تمرین

صفحه ۱۳۶

۲۹

دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

تابع‌های $f(x) = x + 2$ و $g(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ متفاوت‌اند (دامنه f برابر $\mathbb{R}$ و دامنه g برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است) ولی $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$.

مثال دیگر: $h(x) = x^2$ و $x \neq 2$ برای x^2 ، $x = 2$ برای $k(x) = 4$ نیز در 2 حد برابر 4 دارند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 7} (-3)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x - 7)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 4x + 5)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x) / (x^2 - 9)$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} x / (2x^2 - x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 8) / (x + 2)$

چ) $\lim_{x \rightarrow -2} [x]$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 7}$

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$

ذ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 5}$

ر) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 2}$

ز) $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) / ([x] + 1)$

ژ) $\lim_{x \rightarrow -\pi/3} \cos x$

س) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin x + \cos x)$

ش) $\lim_{x \rightarrow -2^+} x / [x]$

ص) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \sin^2 x) / (1 - \sin x)$

ض) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + [x])$

○ الف) -3

○ ب) $-2(0) - 7 = -7$

○ پ) $3(1) - 4(-1) + 5 = 3 + 4 + 5 = 12$

○ ت) $\lim x(x-3) / ((x-3)(x+3)) = \lim x / (x+3) = 3/6 = 1/2$

○ ث) $\lim x / (x(2x-1)) = \lim 1 / (2x-1) = 1/(-1) = -1$

○ ج) $\lim (x+2)(x^2-2x+4) / (x+2) = \lim (x^2-2x+4) = 4 + 4 + 4 = 12$

○ چ) برای x کمی کمتر از -2 داریم $[x] = -3$ و برای x کمی بیشتر از -2 داریم $[x] = -2$ ؛ **حد وجود ندارد.**

○ ح) 0

○ خ) $\sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$

○ د) تابع برای $x < 0$ تعریف نشده است؛ **حد وجود ندارد.**

○ ذ) $\sqrt{2+5} = \sqrt{7}$

- ر) در نزدیکی ۱ داریم $x - 2 < 0$ و تابع تعریف نشده است؛ **حد وجود ندارد.**
- ز) برای x کمی بزرگ‌تر از ۳ داریم $[x] = 3$ ؛ $(3-2)/(3+1) = 1/4$
- ژ) $\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$
- س) $\sin(\pi/4) + \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$
- ش) برای x کمی بزرگ‌تر از -2 داریم $[x] = 2$ ؛ $(-2)/(-2) = 1$
- ص) $\lim (1 - \sin x)(1 + \sin x)/(1 - \sin x) = \lim (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$
- ض) حد چپ: $-1 = 0 + (-1)$ ؛ حد راست: $0 + 0 = 0$ ؛ نابرابرند و **حد وجود ندارد.**

تمرین

صفحه ۱۳۶

۳۱

۴) اگر $\lim f(x) = 3$ و $\lim g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$ ، حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim (f(x) + h(x))$

ب) $\lim (h(x))^5$

پ) $\lim f(x)/g(x)$

ت) $\lim g(x)/f(x)$

ث) $\lim 3f(x)/(g(x) - 5h(x))$

ج) $\lim 1/h(x)$

- الف) $3 + (-1) = 2$
- ب) $(-1)^5 = -1$
- پ) مخرج به ۰ و صورت به ۳ (غیرصفر) میل می‌کند؛ قانون تقسیم کاربرد ندارد و عبارت بی‌کران می‌شود، پس حد (به عنوان عدد حقیقی) **وجود ندارد.**
- ت) $0/3 = 0$
- ث) $3 \times 3 / (0 - 5 \times (-1)) = 9/5$
- ج) $1/(-1) = -1$

۵) نمودار دو تابع $f(x) = |x - 3|/(x - 3)$ و $g(x) = 1$ را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟)
 $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ چگونه؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

برای $x > 3$ داریم $f(x) = 1$ و برای $x < 3$ داریم $f(x) = -1$ ؛ پس نمودار f دو نیم خط افقی $(x < 3)$ روی $y = -1$ و $x > 3$ روی $(y = 1)$ با دایره توخالی در $x = 3$ است؛ نمودار g خط افقی $y = 1$ است.
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$ ؛ چون حد چپ و راست برابر نیستند، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ وجود ندارد.
 اما $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$ موجود است.

حد دو تابع در هر نقطه $a > 3$ برابر ۱ است (برای $a > 3$ داریم $f = g = 1$ نزدیک a)؛ در نقاط $a < 3$ حد f برابر -1 و حد g برابر ۱ است (برابر نیستند) و در $a = 3$ حد f وجود ندارد. پس حد دو تابع در نقاط $x > 3$ برابر است.

۶) در هر یک از حالت‌های زیر درباره حد تابع $f + g$ چه می‌توان گفت؟
 الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.
 ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

الف) نمی‌توان نتیجه‌ای قطعی گرفت؛ ممکن است $f + g$ حد داشته باشد یا نداشته باشد. مثال: $f(x) = [x]$ و $g(x) = -[x]$ در $a = 1$ حد ندارند ولی $f + g = 0$ حد دارد. اما $f(x) = [x]$ و $g(x) = [x]$ در $a = 1$ حد ندارند و $f + g = 2[x]$ هم حد ندارد.

ب) $f + g$ حد ندارد. اگر $f + g$ حد داشت، آنگاه $f = (f + g) - g$ به عنوان تفاضل دو تابع دارای حد، حد داشت که با فرض در تناقض است.

۷) اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow m^+} [x]$

ب) $\lim_{x \rightarrow m^-} [x]$

پ) $\lim_{x \rightarrow m} [x]$. به طور کلی تابع $f(x) = [x]$ در چه نقاطی حد دارد؟

○ الف) $\lim_{x \rightarrow m^+} [x] = m$

○ ب) $\lim_{x \rightarrow m^-} [x] = m - 1$

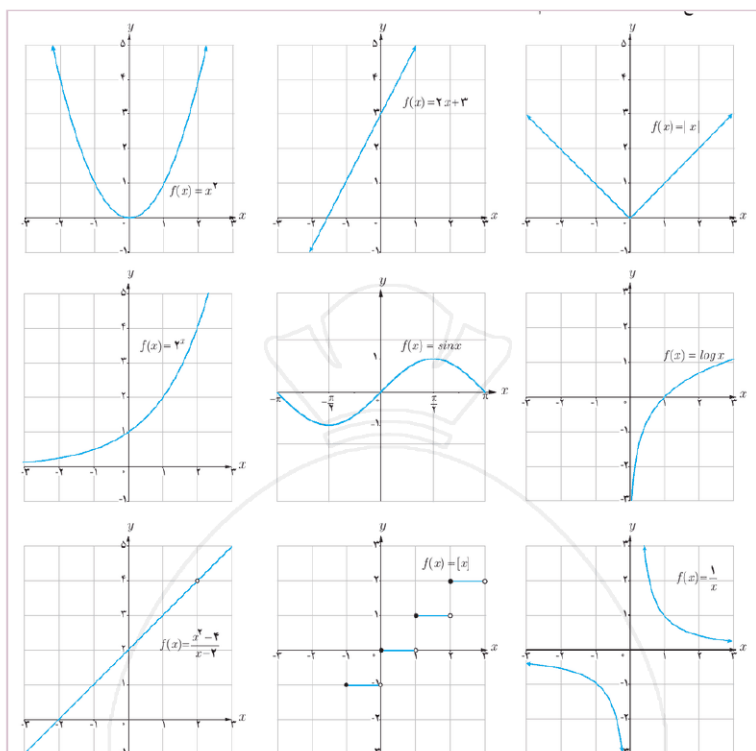
○ پ) حد چپ و راست نابرابرند؛ $\lim_{x \rightarrow m} [x]$ وجود ندارد.

به طور کلی: تابع $f(x) = [x]$ در هر عدد صحیح حد ندارد، و در هر عدد حقیقی غیر صحیح مانند a حد دارد و برابر $[a]$ است.



نمودارهای نه تابع در شکل‌های زیر رسم شده‌اند.

الف) کدام یک از نمودارهای فوق را می‌توان بدون آنکه قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم کرد؟
 ب) مثال دیگری مشابه توابع بالا ارائه کنید. ردیف‌های اول و دوم نمونه‌ای از توابع پیوسته هستند.



الف) نمودارهای ردیف اول و دوم را می‌توان بدون برداشتن قلم رسم کرد: $f(x) = |x|$ ، $2x + 3$ ، x^2 ، 2^x ، $\sin x$ و $\log x$ (روی دامنه خودش). نمودارهای ردیف سوم را نمی‌توان بدون برداشتن قلم کشید: $(x^2 - 4)/(x - 2)$ (حفره در $x = 2$)، $[x]$ (پرش در هر عدد صحیح) و $1/x$ (گسست در $x = 0$).
 ب) مثال‌های مشابه: توابع پیوسته مانند x^3 ، $\sqrt{x}$ ، $\cos x$ ، $-2x + 1$ ؛ توابع ناپیوسته مانند $(x^2 - 9)/(x - 3)$ ، $x - [x]$ و $1/(x - 1)$.

در نمودارهای صفحه ناپیوسته بودن یک تابع در نقطه c در شرایط مختلف نمایش داده شده است. شما هم مثال‌های دیگری ارائه کنید.

نمونه‌هایی از ناپیوستگی در $x = c$

مثال	حالت
$c = 1$ در $f(x) = [x]$	حد چپ و راست موجود ولی نابرابر (پرش)
$c = 0$ در $f(x) = 1/x$	حد وجود ندارد (تابع بی‌کران می‌شود)
$c = 1$ در $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$	$f(c)$ موجود نیست ولی حد موجود است
$c = 2$ در $f(x) = x$ برای $x \neq 2$ و $f(2) = 5$	حد و $f(c)$ هر دو موجودند ولی برابر نیستند
$c = 0$ در $f(x) = x /x$	$f(c)$ موجود نیست و حد وجود ندارد

کدام یک از توابع با ضابطه‌های داده شده در $x = 1$ ناپیوسته‌اند؟ الف) $f(x) = (x-3)^2$

ب) $g(x) = |x-1|/(x-1)$

پ) $h(x) = x$ برای $x > 1$ ، $h(1) = 2$ ، $h(x) = -x + 2$ برای $x < 1$

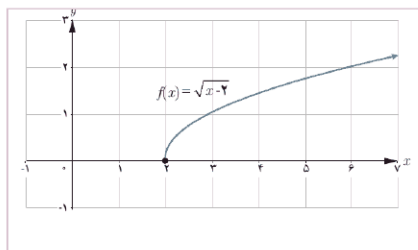
الف) f چند جمله‌ای است و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 = f(1)$ ؛ پیوسته است.

ب) $g(1)$ تعریف نشده است (و حد چپ -1 با حد راست 1 برابر نیست)؛ ناپیوسته است.

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+2) = 1$ ، پس $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$ ولی $h(1) = 2 \neq 1$ ؛ ناپیوسته است.

پس توابع g و h در $x = 1$ ناپیوسته‌اند.

تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ با نمودار زیر را در نظر بگیرید. الف) کدامیک از حدهای $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $x \rightarrow 2^+$ موجودند؟ ب) آیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود است؟ پ) آیا تابع f در $x = 2$ پیوسته است؟



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ موجود است، ولی $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ موجود نیست (تابع در سمت چپ ۲ تعریف نشده است).

ب) خیر، چون حد چپ وجود ندارد.

پ) خیر؛ f در ۲ پیوسته نیست (حد وجود ندارد). فقط پیوسته از راست است، زیرا $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 = f(2)$.

تابع با ضابطه $g(x) = 3x$ برای $x > 2$ و $g(x) = x + 1$ برای $x \leq 2$ و نمودار آن را در نظر بگیرید. الف) کدامیک از حدهای $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ و $x \rightarrow 2^+$ موجودند؟ ب) آیا $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ موجود است؟ پ) آیا تابع g در $x = 2$ پیوسته است؟

الف) هر دو موجودند: $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 2 + 1 = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 3 \times 2 = 6$.

ب) خیر؛ حد چپ و راست نابرابرند.

پ) خیر؛ چون حد در ۲ وجود ندارد، g در ۲ پیوسته نیست. g از چپ پیوسته است، زیرا $g(2) = 3 = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$.

پیوستگی روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید. تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه
...؛ تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است هرگاه ...

تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه f روی بازه باز (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست داشته باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است هرگاه f روی بازه باز (a, b) پیوسته باشد و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

سه تابع متفاوت مثال بنزید که: الف) روی بازه $(-\infty, \infty)$ پیوسته باشد. ب) روی بازه $[-2, +\infty)$ پیوسته باشد.
پ) روی بازه $(-\infty, 0]$ پیوسته باشد.

الف) هر چند جمله‌ای یا $\sin x$ و $\cos x$ ، مثلاً $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = \sin x$ ، $h(x) = 2x - 5$.

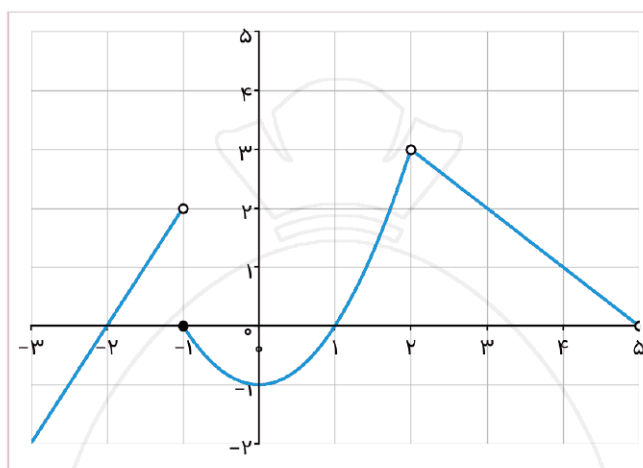
ب) توابعی مانند $f(x) = \sqrt{x+2}$ (دامنه $[-2, +\infty)$ و پیوسته روی آن)، $g(x) = \sqrt{x+2} + 3$ و $h(x) = x\sqrt{x+2}$.

پ) توابعی مانند $f(x) = \sqrt{-x}$ (دامنه $(-\infty, 0]$ و پیوسته روی آن)، $g(x) = \sqrt{-x} - 1$ و $h(x) = 2\sqrt{-x}$.

۱) تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم: $f(x) = 2x + 4$ برای $x < -1$ ، $f(x) = x^2 - 1$ برای $-1 \leq x < 2$ ، $f(x) = -x + 5$ برای $2 \leq x < 5$.

الف) نمودار f را کامل کنید. ب) دامنه و برد f را به دست آورید. پ) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-1, 1]$ و $[2, 5]$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

الف) نمودار کامل شده در شکل زیر است: خط $y = 2x + 4$ تا دایرهٔ توخالی $(-1, 2)$ ، نقطهٔ توپر $(-1, 0)$ ، سهمی $y = x^2 - 1$ از $(-1, 0)$ تا دایرهٔ توخالی $(2, 3)$ ، و پاره خط $y = -x + 5$ از دایرهٔ توخالی $(2, 3)$ تا دایرهٔ توخالی $(5, 0)$.



ب) دامنه: $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 5)$. برد: بخش اول $(-\infty, 2)$ ، بخش دوم $[-1, 3)$ و بخش سوم $(0, 3)$ است؛ پس $R_f = (-\infty, 3)$.

پ) روی $[-1, 1]$ ضابطه $x^2 - 1$ چندجمله‌ای است؛ در $x = -1$ فقط پیوستگی راست لازم است و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$ ؛ پس f روی $[-1, 1]$ پیوسته است. روی $(2, 5)$ ضابطه $-x + 5$ است و چندجمله‌ای است؛ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 = f(2)$ ؛ پس f روی $(2, 5)$ پیوسته است. روی $[-2, 0]$ در $x = -1$ داریم $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2 \neq f(-1) = 0$ ؛ در $x = -1$ ناپیوسته است، پس روی $[-2, 0]$ پیوسته نیست.

توشه ای برای موفقیت

۲) درباره تابع f کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ الف) f روی بازه $(-\infty, -1]$ پیوسته است. ب) f روی بازه $(-\infty, -1)$ پیوسته است. پ) f روی بازه $[2, 5]$ پیوسته است. ت) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$. ث) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 0$. ج) f روی بازه $(-2, 0)$ پیوسته است.

- الف) نادرست؛ در $x = -1$ حد چپ ۲ است ولی $f(-1) = 0$ ؛ f در -1 پیوستگی چپ ندارد.
- ب) درست؛ روی این بازه ضابطه $2x + 4$ چندجمله‌ای است.
- پ) نادرست؛ f در ۲ و ۵ تعریف نشده است.
- ت) نادرست؛ تابع در سمت راست ۵ تعریف نشده است، پس حد دوطرفه وجود ندارد.
- ث) درست؛ $\lim_{x \rightarrow 5^-} (-x + 5) = 0$.
- ج) نادرست؛ بازه $(-2, 0)$ شامل -1 است و f در -1 ناپیوسته است.

۳) با توجه به تابع f : الف) دو بازه بسته مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد. ب) a و b ای را مثال بزنید که تابع روی (a, b) پیوسته باشد؛ اما روی $[a, b]$ پیوسته نباشد.

- الف) f روی $[-1, 1]$ پیوسته است (چون $x^2 - 1$ روی آن پیوسته است و در -1 پیوستگی راست دارد) ولی روی $[-2, 0]$ پیوسته نیست (در $x = -1$ ناپیوسته است).
- ب) مثلاً $a = -1$ و $b = 2$: f روی $(-1, 2)$ پیوسته است (ضابطه $x^2 - 1$ ولی $f(2)$ تعریف نشده است، پس روی $[-1, 2]$ پیوسته نیست. (مثال دیگر: $a = -3$ و $b = -1$ ؛ f روی $(-3, -1)$ پیوسته است ولی در $b = -1$ پیوستگی چپ ندارد).

۱) با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید: $f(x) = 2x + 1$ ($x \neq 2$)، $g(x) = 2x + 1$ ($x \neq 2$)، $h(x) = 2 + x$ برای $x \neq 2$ و $h(2) = 3$.

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید: $f(2)$ ، $g(2)$ ، $h(2)$.

ب) حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

پ) کدام تابع در $x = 2$ پیوسته است؟

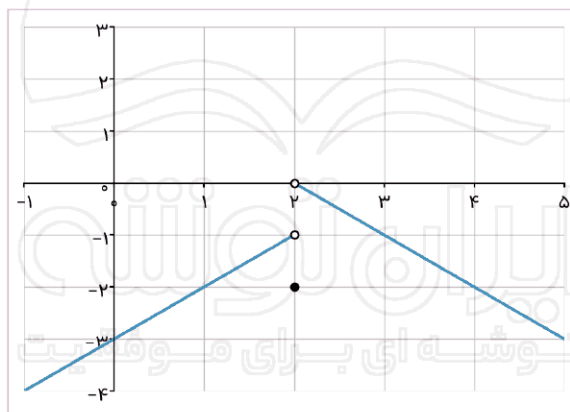
الف) $f(2) = 5$ ؛ $g(2)$ تعریف نشده است؛ $h(2) = 3$.

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 2 + 2 = 4$.

پ) تنها f پیوسته است ($\lim_{x \rightarrow 2} f = f(2) = 5$). در $x = 2$ تعریف نشده است و h ناپیوسته است زیرا $\lim_{x \rightarrow 2} h = 4 \neq h(2) = 3$.

۲) نمودار تابع $f(x) = x - 3$ برای $x < 2$ ، $f(2) = -2$ ، $f(x) = -x + 2$ برای $x > 2$ را رسم کنید. f در چه نقاطی

پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



در هر نقطه $x \neq 2$ ضابطه تابع چندجمله‌ای است و تابع پیوسته است. در $x = 2$ حد چپ -1 و حد راست 0 است؛ حد وجود ندارد، پس f در $x = 2$ ناپیوسته است.

تابع در همه نقاط $\mathbb{R} - \{2\}$ پیوسته و در $x = 2$ ناپیوسته است.

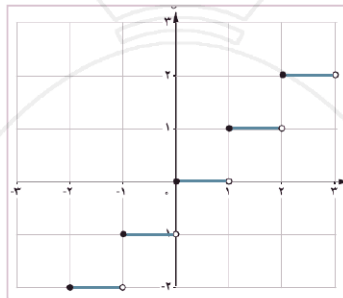
۳) توابع $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ برای $x \neq 3$ و $f(3) = 6$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این توابع را در $x = 3$ بررسی کنید.

برای $x \neq 3$: $(x^2 - 9)/(x - 3) = x + 3$ ؛ پس $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 6$.

f : $f(3) = 6 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ؛ f در ۳ پیوسته است.

g : $g(3)$ تعریف نشده است؛ g در ۳ ناپیوسته است.

۴) با توجه به نمودار تابع $f(x) = [x]$ ، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



در هر عدد صحیح مانند m حد چپ $m - 1$ و حد راست m است؛ حد وجود ندارد و تابع ناپیوسته است (پرش به اندازه ۱).

در هر عدد حقیقی غیر صحیح a تابع در همسایگی a ثابت است و $\lim_{x \rightarrow a} [x] = [a]$ ؛ تابع پیوسته است.

یعنی f روی $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ پیوسته و در نقاط $\mathbb{Z}$ ناپیوسته است (در اعداد صحیح فقط پیوستگی راست دارد).

۵) پیوستگی تابع $f(x) = -2x + 2$ برای $x \leq 0$ و $f(x) = x^2 + 2$ برای $x > 0$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

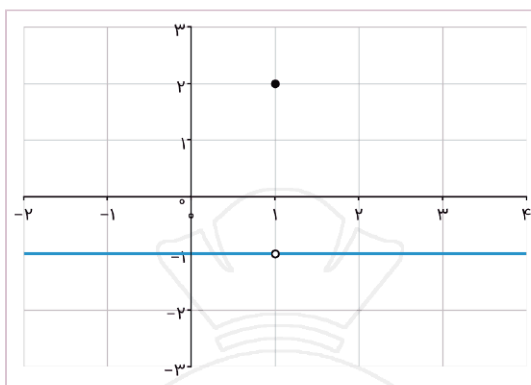
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 2; \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 2) = 2; f(0) = -2(0) + 2 = 2$$

حد چپ و راست با هم و با $f(0)$ برابرند؛ پس f در $x = 0$ پیوسته است.

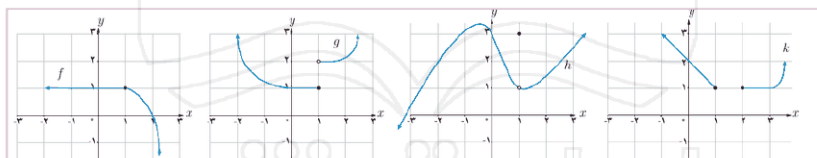
در $x < 0$ ضابطه $-2x + 2$ و در $x > 0$ ضابطه $x^2 + 2$ چند جمله‌ای است؛ بنابراین f در همه نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۶) تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه $x = 1$ مساوی -1 باشد؛ ولی تابع در 1 پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

تابع $f(1) = 2$ ، $x \neq 1$ برای $f(x) = -1$ را در نظر می‌گیریم: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ ولی $f(1) = 2 \neq -1$ پس f در 1 پیوسته نیست.



۷) کدام یک از توابع زیر در $x = 1$ پیوسته است؟



- f : از چپ ثابت 1 و از راست منحنی‌ای که از $(1, 1)$ شروع می‌شود؛ $\lim f = f(1) = 1$ ؛ پیوسته است.
 - g : حد چپ 1 ولی حد راست 2 است (دایرهٔ توخالی در $(1, 2)$)؛ حد وجود ندارد؛ ناپیوسته.
 - h : $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$ ولی $h(1) = 3$ ؛ ناپیوسته.
 - k : تابع بلافاصله بعد از 1 تا 2 تعریف نشده است، پس حد راست وجود ندارد؛ ناپیوسته.
- پس فقط تابع f در $x = 1$ پیوسته است.

۸) در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t) = 6t + 4$ برای $0 \leq t < 1$ و $f(t) = 2t + 10$ برای $1 \leq t \leq 10$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به‌طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود:

$$f(1/2) = 6 \times (1/2) + 4 = 7, \quad 6 \text{ ماه} \rightarrow 6/12 = 1/2 \text{ سال}$$

الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید. ب) آیا f در بازه $[0, 10]$ پیوسته است؟

الف) $f(2) = 2 \times 2 + 10 = 14$ و $f(5) = 2 \times 5 + 10 = 20$ (کیلوگرم).

ب) هر ضابطه چندجمله‌ای است و درون بازه‌های خودش پیوسته است. در $t = 1$ داریم $\lim_{t \rightarrow 1^-} (6t + 4) = 10$ ولی $f(1) = 2 \times 1 + 10 = 12$. چون حد چپ با مقدار تابع برابر نیست، f در $t = 1$ ناپیوسته است؛ پس f روی $[0, 10]$ پیوسته نیست.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت