با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

irantooshe.ir

t.me/irantooshe

ریاضی ۲ یازدهم - فصل پنجم

توابع نمایی و لگاریتمی

فهرست

۱ صفحه ۹۶ · فعالیت — جام حذفی فوتبال و الگوی توان‌دار ... ۴

۲ صفحه ۹۷ · فعالیت — جدول و نمودار تابع ۲^x ۵

۳ صفحه ۹۸ · کار در کلاس — مقایسهٔ نمودار x^2 و ۲^x ۶

۴ صفحه ۹۹ · فعالیت — نمودار تابع نمایی $y = ۲^x$ ۷

۵ صفحه ۱۰۰ · کار در کلاس — نمودار تابع $y = ۴^x$ ۸

۶ صفحه ۱۰۰ · خواندنی — محاسبهٔ توان‌های حقیقی با ماشین‌حساب ... ۹

۷ صفحه ۱۰۱ · فعالیت — نمودار تابع $y = (۱/۲)^x$ ۱۰

۸ صفحه ۱۰۲ · کار در کلاس — تقارن نمودار ۲^x و $(۱/۲)^x$ ... ۱۱

۹ صفحه ۱۰۲ · کار در کلاس — رسم نمودار $y = (۱/۲)^x$ ۱۲

۱۰ صفحه ۱۰۳ · فعالیت — دامنه و برد تابع نمایی ۱۲

۱۱ صفحه ۱۰۴ · تمرین ۱ — تشخیص تابع نمایی ۱۳

۱۲ صفحه ۱۰۴ · تمرین ۲ — نقاط روی نمودار $y = ۳^x$ ۱۳

۱۳ صفحه ۱۰۴ · تمرین ۳ — درست یا نادرست دربارهٔ توابع نمایی ... ۱۴

۱۴ صفحه ۱۰۴ · تمرین ۴ — مقدار تقریبی توان‌های گنگ از روی نمودار ... ۱۵

۱۵ صفحه ۱۰۴ · تمرین ۵ — محاسبهٔ مقدار توابع نمایی ۱۵

۱۶ صفحه ۱۰۴ · تمرین ۶ — حل معادلات نمایی ۱۶

۱۷ صفحه ۱۰۵ · فعالیت — وارون تابع نمایی ۲^x ۱۷

۱۸ صفحه ۱۰۶ · فعالیت — وارون تابع نمایی ۳^x و تابع لگاریتمی ... ۱۸

۱۹ صفحه ۱۰۷ · کار در کلاس — توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگر ... ۱۹

۲۰ صفحه ۱۰۷ · کار در کلاس — برآورد مقدار لگاریتم از روی نمودار ... ۲۰

۲۱ صفحه ۱۰۸ · کار در کلاس — نوشتن ضابطهٔ تابع لگاریتمی از روی نمودار ... ۲۰

۲۲ صفحه ۱۰۸ · فعالیت — دامنه و برد تابع لگاریتمی ۲۱

۲۳ صفحه ۱۰۹ · فعالیت — رابطهٔ نمایی و لگاریتمی (مبنای ۲) ... ۲۲

۲۴ صفحه ۱۱۰ · کار در کلاس — تبدیل شکل نمایی و لگاریتمی ... ۲۳

۲۵ صفحه ۱۱۱ · فعالیت ۱ — ویژگی‌های لگاریتم (۱) ۲۳

۲۶ صفحه ۱۱۱ · فعالیت ۲ — لگاریتم حاصل‌ضرب ۲۴

۲۷ صفحه ۱۱۱ · فعالیت ۳ — لگاریتم توان ۲۴

۲۸ صفحه ۱۱۱ · فعالیت ۴ — لگاریتم خارج‌قسمت ۲۵

۲۹ صفحه ۱۱۱ · خواندنی — فشار هوا در قلهٔ دماوند ۲۵

۳۰ صفحه ۱۱۲ · کار در کلاس — محاسبهٔ تقریبی لگاریتم ۲۶

۳۱ صفحه ۱۱۲ · فعالیت — معادلات لگاریتمی ۲۶

۳۲ صفحه ۱۱۳ · کار در کلاس — حل معادلات لگاریتمی ۲۷

۳۳ صفحه ۱۱۳ · تمرین ۱ — اثبات تساوی‌های لگاریتمی ۲۸

۳۴ صفحه ۱۱۴ · تمرین ۲ — محاسبهٔ عبارت‌های لگاریتمی ۲۸

ایران توشه

۳۵ صفحه ۱۱۴ · تمرین ۳ — مقدار تابع لگاریتمی ۲۹

۳۶ صفحه ۱۱۴ · تمرین ۴ — تعیین پایهٔ تابع لگاریتمی ۲۹

۳۷ صفحه ۱۱۴ · تمرین ۵ — رسم نمودار $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ۳۰

۳۸ صفحه ۱۱۴ · تمرین ۶ — درستی و نادرستی گزاره‌های لگاریتمی ... ۳۰

۳۹ صفحه ۱۱۴ · تمرین ۷ — حل معادلات لگاریتمی ۳۱

۴۰ صفحه ۱۱۵ · فعالیت — نظیر کردن ضابطه و نمودار (انتقال توابع) ... ۳۱

۴۱ صفحه ۱۱۶ · کار در کلاس — ضابطهٔ توابع انتقال‌یافته ۳۲

۴۲ صفحه ۱۱۶ · کار در کلاس — نظیر کردن ضابطه‌ها با نمودارها ... ۳۲

۴۳ صفحه ۱۱۷ · کار در کلاس — انرژی زلزلهٔ رودبار ـ منجیل ۳۳

۴۴ صفحه ۱۱۸ · تمرین ۱ — تعیین a و b از روی نمودار ۳۳

۴۵ صفحه ۱۱۸ · تمرین ۲ — مقدار تابع $g(x) = ۴^x + ۲$ ۳۳

۴۶ صفحه ۱۱۸ · تمرین ۳ — رسم نمودار $y = ۴^{-x} - ۱$ ۳۴

۴۷ صفحه ۱۱۸ · تمرین ۴ — رسم نمودار توابع انتقال‌یافته ۳۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱ صفحه ۹۶ فعالیت

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴-۹۳ با شرکت ۳۲ تیم و در پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا بازی نهایی به صورت زیر برگزار شد. همان‌طور که می‌بینید، در هر مرحله تیم برنده به مرحلهٔ بعدی می‌رود و تیم بازنده حذف می‌شود؛ به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.

۱) در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟

۲) در مرحلهٔ قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟

۳) تعداد تیم‌ها در هر مرحله با تعداد تیم‌ها در مرحلهٔ قبل از آن چه ارتباطی دارد؟

۴) چه رابطه‌ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌های شرکت‌کننده در این مسابقات برقرار است؟

۵) با توجه به الگوی ارائه شده در شکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم‌های اولیه چند است؟

۶) اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟

۱) در بازی نهایی **۲ تیم** حضور دارند.

۲) در مرحلهٔ قبل از بازی نهایی (نیمه‌نهایی) **۴ تیم** حضور دارند.

۳) در هر مرحله نیمی از تیم‌ها حذف می‌شوند؛ پس تعداد تیم‌های هر مرحله **دو برابر** تعداد تیم‌های مرحلهٔ بعد از آن است.

۴) اگر از بازی نهایی به عقب برگردیم، تعداد تیم‌ها در هر مرحله دو برابر می‌شود. با ۵ مرحله: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$؛ یعنی تعداد کل تیم‌ها برابر است با عدد ۲ به توان تعداد مراحل.

۵) با ۶ مرحله: $2^6 = 64$؛ پس **۶۴ تیم** در ابتدا شرکت داشته‌اند.

۶) $y = 2^x$

تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌ها

x (تعداد مراحل)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y (تعداد تیم‌ها)	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴

۲ صفحه ۹۷ **فعالیت**

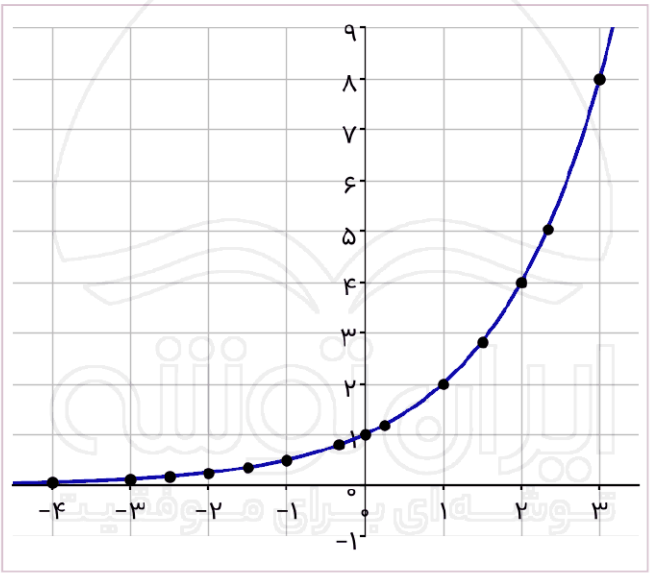
جدول زیر را کامل و نقاط به‌دست آمده را در نمودار مشخص کنید. مقادیر به‌صورت تقریبی نوشته شده است.

هر مقدار 2^x را با ماشین‌حساب (یا از روی خواص توان) حساب می‌کنیم؛ مثلاً $2^{-2} = 1/4 = 0.25$، $2^0 = 1$، $2^1 = 2$، $2^2 = 4$ و $2^3 = 8$.

x	-۴	-۳	-۵/۲	-۲	-۳/۲	-۱	-۱/۳
2^x	۰/۰۶	۰/۱۲	۰/۱۸	۰/۲۵	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۹

x	۰	۱/۴	۱	۳/۲	۲	۷/۳	۳
2^x	۱	۱/۱۹	۲	۲/۸۳	۴	۵/۰۴	۸

نقاط $(x, 2^x)$ را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم؛ مثلاً $(-4, 0.06)$، $(-1, 0.5)$، $(0, 1)$، $(1, 2)$ و $(3, 8)$. با وصل کردن این نقاط، منحنی هموار شکل زیر به‌دست می‌آید. هرچه x کوچک‌تر (منفی‌تر) شود، منحنی به محور x نزدیک‌تر می‌شود بی‌آنکه آن را قطع کند.



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳ صفحه ۹۸ کار در کلاس

۱) نمودار توابع با ضابطه‌های $y = x^2$ و $y = 2^x$ را با تکمیل جدول‌های زیر رسم کنید. مقادیر به‌صورت تقریبی نوشته شده است.

۲) حال این دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^x و x^2 با هم مساوی‌اند؟

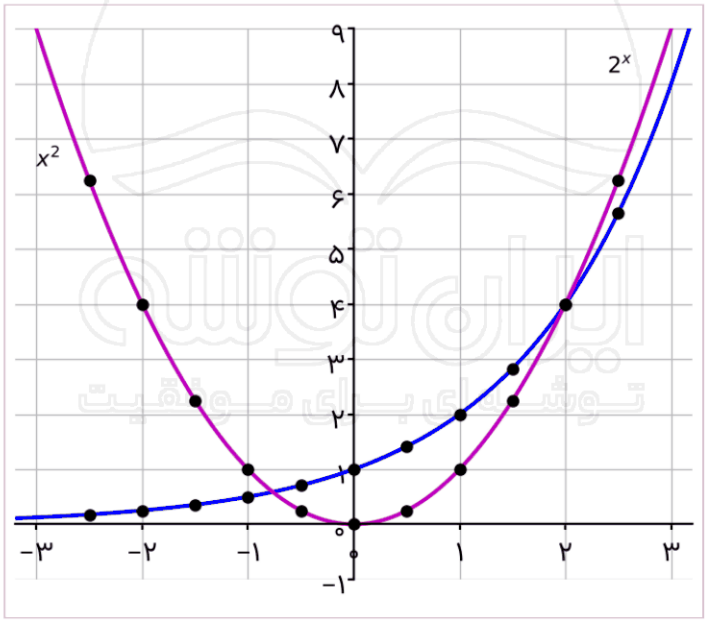
۳) در x^2، متغیر در ..... و عدد ثابت در ..... است؛ ولی در 2^x، ..... در توان و ..... در پایه است.

۱) جدول‌ها را کامل می‌کنیم:

x	-۵/۲	-۲	-۳/۲	-۱	-۱/۲	۰	۱/۲	۱	۳/۲	۲	۵/۲
$y = x^2$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵

x	-۳	-۲	-۳/۲	-۱	-۱/۲	۰	۱/۲	۱	۳/۲	۲	۵/۲
$y = 2^x$	۰/۱۲	۰/۲۵	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۱	۱	۱/۴۱	۲	۲/۸۳	۴	۵/۶۶

نقاط هر جدول را در دستگاه مختصات مشخص و به هم وصل می‌کنیم (شکل زیر؛ منحنی بنفش $y = x^2$ و منحنی آبی $y = 2^x$).



۲) دو نمودار در **سه نقطه** یکدیگر را قطع می‌کنند: در $x = 2$ (مقدار مشترک ۴)، در $x = 4$ (مقدار مشترک ۱۶) و در نقطه‌ای در سمت چپ محور y با طول تقریبی $x \approx -0.77$ (بین -1 و -0.5). پس در سه نقطه $x^2 = 2^x$ است.

۳) در x^2 متغیر (x) در **پایه** و عدد ثابت (۲) در **توان** است؛ ولی در 2^x، متغیر (x) در **توان** و عدد ثابت (۲) در **پایه** است.

۴ صفحه ۹۹ فعالیت

در شکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y = 2^x$ رسم شده است.

۱) محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟

۲) دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.

۳) آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

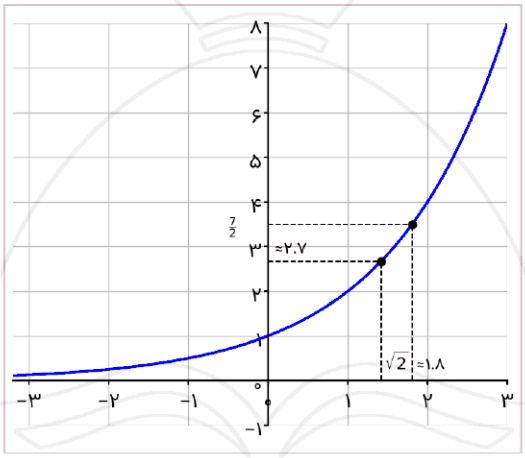
۴) عدد $\sqrt{2}$ را روی محور x ها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $2^{\sqrt{2}}$ را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید.

۵) عدد 7/2 روی محور y ها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را از روی محور طول‌ها به‌دست آورید؛ به طوری که $2^a \approx 7/2$.

۶) اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

2^{-1}, $2^{-0.4}$, 2^{5}, $2^{0.3}$, $2^{5/2}$, $2^{3/2}$, $2^{\sqrt{5}}$

۷) در حالت کلی اگر $x < y$، چه رابطه‌ای بین 2^x و 2^y برقرار است؟



۱) نمودار محور y ها را در نقطهٔ (0, 1) قطع می‌کند (چون $2^0 = 1$).

۲) دامنه: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$؛ برد: $(0, +\infty)$ (نمودار همواره بالای محور x ها است).

۳) بله، یک‌به‌یک است؛ زیرا هر خط افقی (موازی محور x ها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ یعنی دو عدد متفاوت $x_1 \neq x_2$ هرگز مقدار یکسان $2^{x_1} = 2^{x_2}$ نمی‌دهند.

۴) $\sqrt{2} \approx 1.41$ را روی محور x ها مشخص می‌کنیم و از آن خطی قائم تا نمودار و از نقطهٔ برخورد خطی افقی تا محور y ها می‌کشیم (شکل زیر): $2^{\sqrt{2}} \approx 2.7$.

۵) از عدد $7/2 = 3.5$ روی محور y ها خطی افقی تا نمودار و از آنجا خطی قائم تا محور x ها می‌کشیم؛ طول نقطهٔ برخورد تقریباً $a \approx 1.8$ است (راستی‌آزمایی: $2^{1.8} \approx 3.48$).

۶) چون تابع 2^x صعودی است، اعداد به ترتیب توان‌هایشان مرتب می‌شوند. توان‌ها: $-1 < -0.4 < 0.3 < 3/2 < 5/2 < \sqrt{5} \approx 2.24 <$. پس: $2^{-1} < 2^{-0.4} < 2^{0.3} < 2^{3/2} < 2^{\sqrt{5}} < 2^{5/2} < 2^5$

۷) اگر $x < y$ آنگاه $2^x < 2^y$ (تابع 2^x اکیداً صعودی است).

۵ صفحه ۱۰۰ کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 3^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.

۱) جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع $y = 4^x$ را رسم کنید.

۲) دامنه و برد توابع فوق را با هم مقایسه کنید.

۳) با استفاده از نمودار، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^{(2.5)}$ ○ $3^{7/3}$ ب) $4^{(\sqrt{7})}$ ○ $4^{(\sqrt{5})}$

۴) اگر $x < y$، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) 3^x ○ 3^y ب) 4^x ○ 4^y

جدول داده‌شدهٔ $y = 3^x$

x	-۲	-۳/۲	-۱	۰	۱/۲	۱
$y = 3^x$	۰/۱۱	۰/۱۹	۰/۳۳	۱	۱/۷۳	۳

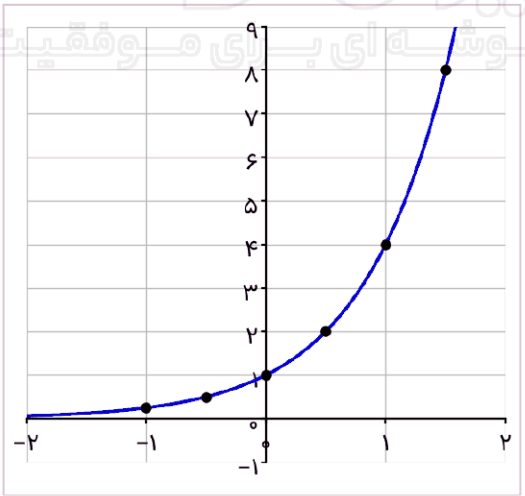
جدول تکمیل‌نشدهٔ $y = 4^x$

x	.....	-۱/۲	۰	۱/۲	۳/۲
$y = 4^x$	۱/۴	۱/۲	.....	.....	۸

۱) مقدار 4^x را حساب می‌کنیم: $4^{-1} = 1/4$، $4^{-1/2} = 1/2$، $4^0 = 1$، $4^{1/2} = 2$ و $4^{3/2} = 8$.

x	-۱	-۱/۲	۰	۱/۲	۳/۲
$y = 4^x$	۱/۴	۱/۲	۱	۲	۸

با نقاط جدول (و نقاط $(1, 4)$، $(-2, 1/16)$) نمودار زیر به‌دست می‌آید.



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲) هر دو تابع دامنهٔ $\mathbb{R}$ و برد $(0, +\infty)$ دارند. نمودار هر دو از نقطهٔ $(0, 1)$ می‌گذرد، صعودی است و محور x ها را قطع نمی‌کند. تفاوت: برای $x > 0$ نمودار 4^x تندتر بالا می‌رود (بالاتر از 3^x است) و برای $x < 0$ به محور x ها نزدیک‌تر است.

۳) هر دو تابع صعودی‌اند، پس توان بزرگ‌تر مقدار بزرگ‌تری می‌دهد (در کتاب ۲/۵ یعنی عدد اعشاری 2.5):

- الف) $2.33 \approx 7/3 < 2.5$ پس $3^{7/3} < 3^{(2.5)}$ (علامت <).
- ب) $2.24 \approx \sqrt{5} < \sqrt{7} \approx 2.65$ پس $4^{(\sqrt{5})} < 4^{(\sqrt{7})}$ (علامت <).

۴) الف) $3^y < 3^x$ ب) $4^y < 4^x$ (چون پایه‌ها بزرگ‌تر از ۱ و توابع صعودی‌اند).

---

۶ صفحه ۱۰۰ **خواندنی**

برای تمرین، مقادیر زیر را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید. (تا یک رقم اعشار)

۱) $2^{(\sqrt{2})}$ ۲) $2^{(\sqrt{8})}$ ۳) $2^{(0.1)}$ ۴) $2^{(-0.5)}$ ۵) $2^{((1+\sqrt{3}))}$

دکمه‌های x^y، پرانتز و $\sqrt{}$ را مانند نمونهٔ کتاب پشت‌سرهم می‌زنیم. نتیجه‌ها:

عبارت	۱	۲	۳	۴	۵
مقدار دقیق‌تر	۲/۶۶۵	۷/۱۰۳	۱/۰۷۲	۰/۷۰۷	۶/۶۴۴
تقریب تا یک رقم اعشار	۲/۷	۷/۱	۱/۱	۰/۷	۶/۶

۱) $2^{(\sqrt{2})} \approx 2.7$

۲) $2^{(\sqrt{8})} \approx 7.1$ (توجه: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ پس $(2^{(\sqrt{2})})^2 = 2^{(\sqrt{8})}$)

۳) $2^{(0.1)} \approx 1.1$

۴) $2^{(-0.5)} \approx 0.7$ (برابر $1/\sqrt{2}$)

۵) $2^{((1+\sqrt{3}))} \approx 6.6$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷ صفحه ۱۰۱ **فعالیت**

۱) با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (1/2)^x$ را رسم کنید.

۲) محل تقاطع نمودار این تابع با محور y ها چه نقطه‌ای است؟

۳) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

۴) آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

۵) با استفاده از نمودار فوق، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $(1/2)^{(0.5)}$ ○ $(1/2)^{(1.5)}$ ب) $(1/2)^{(\sqrt{2})}$ ○ $(1/2)^4$ پ) $(1/2)^4$ ○ $(1/2)^3$

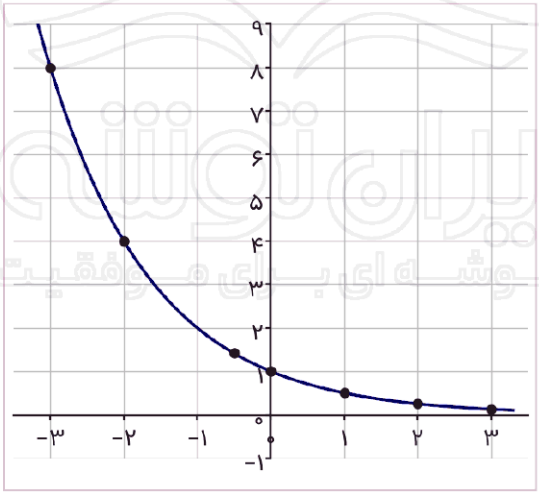
۶) با استفاده از نمودار، اگر $x < y$، چه رابطه‌ای بین $(1/2)^y$ و $(1/2)^x$ وجود دارد؟

جدول تکمیل‌نشده

x	-۳	-۲	.....	۰	۱	.....	۳
$y = (1/2)^x$	.....	.....	$\sqrt{2}$	۱	.....	۱/۴	۱/۸

۱) جاهای خالی جدول: چون $\sqrt{2} = 2^{۱/۲} = (1/2)^{-۱/۲}$ پس $x = -1/2$؛ و چون $1/4 = (1/2)^2$ پس $x = 2$. بقیهٔ مقدارها:

x	-۳	-۲	-۱/۲	۰	۱	۲	۳
$y = (1/2)^x$	۸	۴	$\sqrt{2}$	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۸



۱) نمودار محور y ها را در نقطهٔ $(0, 1)$ قطع می‌کند.

۲) دامنه: $\mathbb{R}$؛ برد: $(0, +\infty)$.

۳) بله، یک‌به‌یک است؛ زیرا هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴) الف) 1.5 > 0.5 و تابع نزولی است، پس (1.5)^(1/2) < (0.5)^(1/2) (علامت <). (در کتاب ۰/۵ و ۱/۵ اعداد اعشاری‌اند.) ب) 4 > 1.41 ≈ √2 پس $(1/2)^{4} < (1/2)^{\sqrt{2}}$ (علامت <). پ) 3 < 4 پس $(1/2)^{3} > (1/2)^{4}$ (علامت >).

۵) اگر x < y آنگاه $(1/2)^{x} > (1/2)^{y}$ (تابع $(1/2)^{x}$ نزولی است؛ با بزرگ‌تر شدن x، مقدار تابع کوچک‌تر می‌شود).

۸ صفحه ۱۰۲ **کار در کلاس**

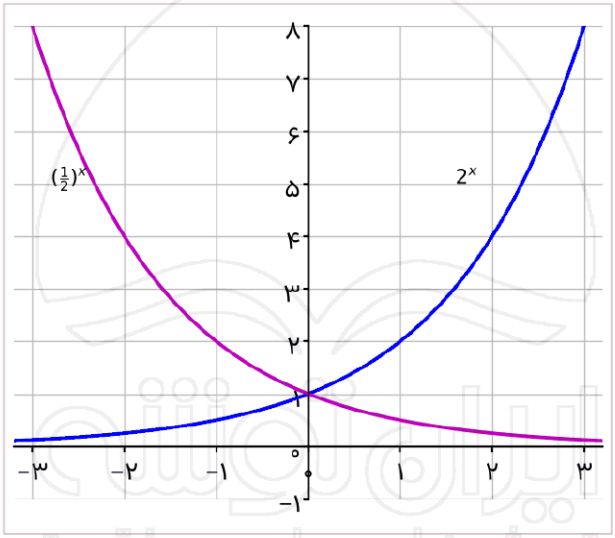
نمودار توابع $y = 2^{x}$ و $y = (1/2)^{x}$ را در نظر بگیرید.

۱) نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟

۲) با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y = 2^{x}$ به تابع با ضابطهٔ ..... = y یا همان ..... = y دست می‌یابیم.

۳) دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور y ها قرینه‌اند، مثال بزنید.



۱) نمودارها نسبت به **محور y ها** قرینه‌اند.

۲) $y = 2^{-x}$ یا همان $y = (1/2)^{x}$ (زیرا $2^{-x} = (2^{-1})^{x} = (1/2)^{x}$).

۳) دامنهٔ هر دو $\mathbb{R}$ و برد هر دو $(0, +\infty)$ است؛ یعنی دامنه و برد آنها یکسان است.

۴) مثلاً $y = 3^{x}$ و $y = (1/3)^{x}$؛ یا $y = 5^{x}$ و $y = (1/5)^{x}$. در حالت کلی $y = a^{x}$ و $y = a^{-x}$ نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

irantooshe.ir

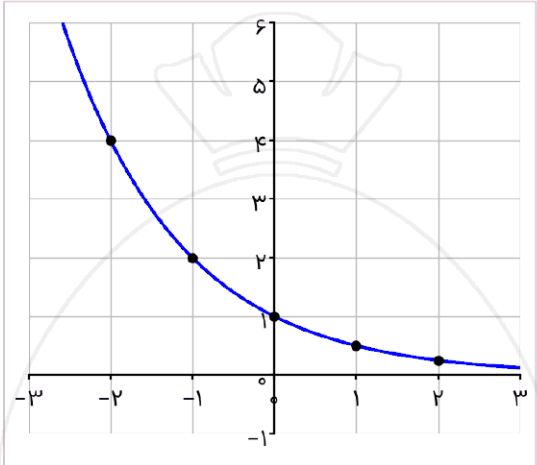
۹ صفحه ۱۰۲ کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (1/2)^x$ را رسم کنید.

چند نقطه از نمودار را به‌دست می‌آوریم:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = (1/2)^x$	۴	۲	۱	۱/۲	۱/۴

نقاط را در دستگاه مختصات مشخص و به هم وصل می‌کنیم. نمودار نزولی است، از نقطهٔ (0, 1) می‌گذرد و وقتی x بزرگ می‌شود به محور x ها نزدیک می‌شود (بدون آنکه آن را قطع کند).



۱۰ صفحه ۱۰۳ فعالیت

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته‌اید، جمله‌های زیر را تکمیل کنید.

۱) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = a^x$ $(a > 1)$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن ..... است.

۲) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = a^x$ $(0 < a < 1)$ ..... و برد آن بازهٔ $(0, +\infty)$ است.

۳) نمودار توابع فوق محور y ها را در نقطهٔ ..... قطع می‌کند و محور x ها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

۴) این دو تابع، یک‌به‌یک ..... زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در ..... نقطه قطع می‌کند.

۱) برد آن $(0, +\infty)$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت) است.

۲) دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ است.

۳) $(0, 1)$ (چون $a^0 = 1$).

۴) این دو تابع یک‌به‌یک **هستند**، زیرا خطوط موازی محور x ها نمودار آنها را حداکثر در **یک** نقطه قطع می‌کند.

irantooshe.ir

۱۱ صفحه ۱۰۴ تمرین ۱

کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$ ب) $y = x^3$ پ) $y = (0.1)^x$

ت) $y = (3/2)^x$ ث) $y - 3x = 2$ ج) $y = \sqrt{(x - 1)}$

تابع نمایی به شکل $y = a^x$ است که $a > 0$ و $a \neq 1$ و متغیر در **توان** قرار دارد.

- الف) چندجمله‌ای درجهٔ ۲ است؛ نمایی نیست.
- ب) x^3: متغیر در پایه است؛ نمایی نیست.
- **پ)** $y = (0.1)^x$: پایه 0.1 مثبت و مخالف ۱ است؛ **نمایی** است.
- **ت)** $y = (3/2)^x$: پایه 3/2 مثبت و مخالف ۱ است؛ **نمایی** است.
- ث) $y = 3x + 2$ خطی است؛ نمایی نیست.
- ج) تابع رادیکالی است؛ نمایی نیست.

پاسخ: گزینه‌های «پ» و «ت».

۱۲ صفحه ۱۰۴ تمرین ۲

کدام یک از نقطه‌های زیر، روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 3^x$ قرار دارند؟

الف) (1, 0) ب) (3, 1) پ) (0, 1) ت) (√3, 1/3) ث) (1, 3) ج) (−1, 1/3)

نقطهٔ (a, b) روی نمودار است اگر $3^a = b$ باشد:

- الف) $3^1 = 3 \neq 0$ ✗
- ب) $3^3 = 27 \neq 1$ ✗
- پ) $3^0 = 1$ ✓
- ت) $3^{(\sqrt{3})} \approx 6.7 \neq 1/3$ ✗
- ث) $3^1 = 3$ ✓
- ج) $3^{-1} = 1/3$ ✓

پاسخ: نقطه‌های «پ»، «ث» و «ج».

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۱۰۴ تمرین ۳

کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 5^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 10^x$ با محور y ها، نقطهٔ $(10, 0)$ است.

پ) دامنهٔ توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی‌اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 6^x$ با محور x ها، نقطهٔ $(0, 6)$ است.

- **الف) درست:** $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$.
- ب) نادرست: $10^0 = 1$ پس نمودار محور y ها را در $(1, 0)$ قطع می‌کند، نه $(10, 0)$.
- **پ) درست:** دامنهٔ هر دو تابع $\mathbb{R}$ است.
- ت) نادرست: 6^x همواره مثبت است و هرگز صفر نمی‌شود؛ پس نمودار محور x ها را قطع نمی‌کند.

پاسخ: گزاره‌های «الف» و «پ» صحیح‌اند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

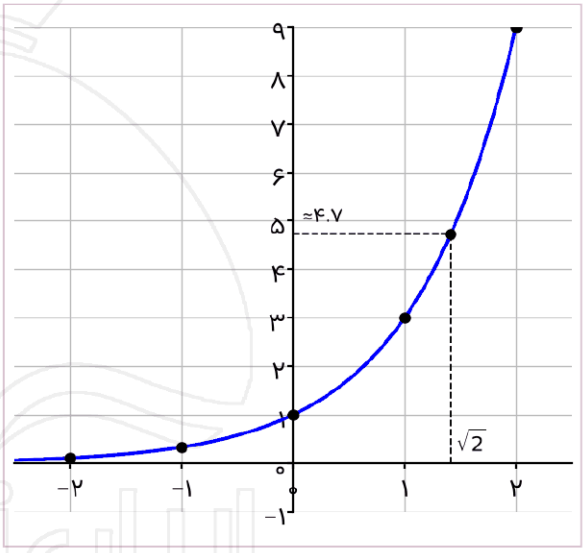
۱۴ صفحه ۱۰۴ تمرین ۴

الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{(\sqrt{2})}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

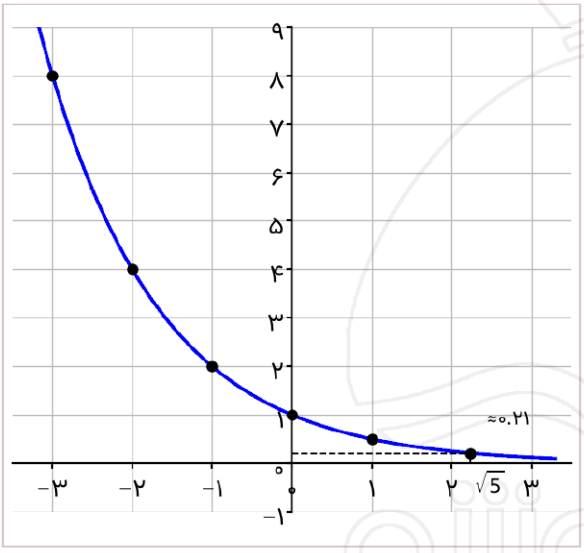
ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (1/2)^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(1/2)^{(\sqrt{5})}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

الف) جدول: $3^{-2} = 1/9$، $3^{-1} = 1/3$، $3^0 = 1$، $3^1 = 3$، $3^2 = 9$. نقاط را به هم وصل می‌کنیم. $\sqrt{2} \approx 1.41$ را روی محور x ها مشخص و از آن خط قائم تا نمودار و سپس خط افقی تا محور y ها رسم می‌کنیم؛ مقدار تقریبی $3^{(\sqrt{2})} \approx 4.7$ به‌دست می‌آید.

ب) جدول: $(1/2)^{-3} = 8$، $(1/2)^{-2} = 4$، $(1/2)^{-1} = 2$، $(1/2)^0 = 1$، $(1/2)^1 = 1/2$. $\sqrt{5} \approx 2.24$ را روی محور x ها مشخص می‌کنیم؛ مقدار تابع در این نقطه بین $(1/2)^3 = 0.125$ و $(1/2)^2 = 0.25$ است و از نمودار $(1/2)^{(\sqrt{5})} \approx 0.21$ خوانده می‌شود.



الف



ب

۱۵ صفحه ۱۰۴ تمرین ۵

فرض کنیم $f(x) = 3^x$ و $g(x) = (1/16)^x$ و $h(x) = 10^x$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(3)$ ب) $g(-1)$ پ) $h(-2)$

- الف) $f(3) = 3^3 = 27$
- ب) $g(-1) = (1/16)^{-1} = 16$
- پ) $h(-2) = 10^{-2} = 1/100 = 0.01$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۶ صفحه ۱۰۴ تمرین ۶

معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{3n-2} = 1/32^2$ **ب)** $9^{3y-3} = 27^{y+1}$ **پ)** $4^{3x+2} = 1/64^3$

ت) $9^x = 3^{(x^2-4x)}$ **ث)** $(3/5)^{x+1} = 25/9$

از یک‌به‌یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم: اگر $a^x = a^y$ آنگاه $x = y$. دو طرف را با پایهٔ یکسان می‌نویسیم.

الف) $32^2 = (2^5)^2 = 2^{10}$ پس $2^{3n-2} = 2^{-10} \Longrightarrow 3n - 2 = -10 \Longrightarrow n = -8/3$

ب) $9^{3y-3} = 3^{2(3y-3)} = 3^{6y-6}$ و $27^{y+1} = 3^{3y+3} \Longrightarrow 6y - 6 = 3y + 3 \Longrightarrow y = 3$

پ) $64^3 = (4^3)^3 = 4^9$ پس $4^{3x+2} = 4^{-9} \Longrightarrow 3x + 2 = -9 \Longrightarrow x = -11/3$

ت) $9^x = 3^{2x}$ پس $2x = x^2 - 4x \Longrightarrow x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x(x - 6) = 0 \Longrightarrow x = 0$ یا $x = 6$

ث) $25/9 = (5/3)^2 = (3/5)^{-2}$ پس $x + 1 = -2 \Longrightarrow x = -3$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷ صفحه ۱۰۵ فعالیت

در درس اول با تابع نمایی $f(x) = 2^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، این تابع یک‌به‌یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱) دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به‌دست آورید.

۲) با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

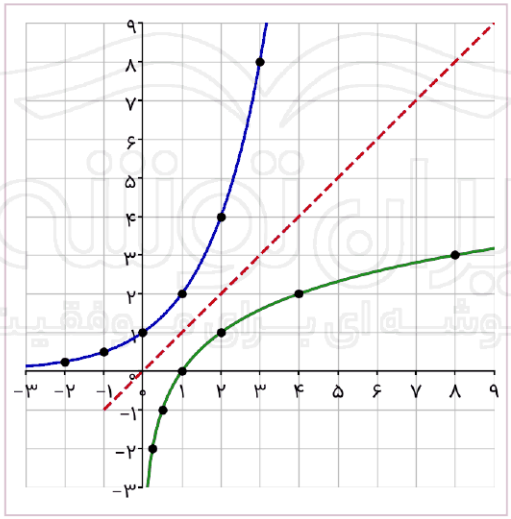
x	-۲	-۱	۰	۲
f(x)	۱/۴	.....	.....	.....

x	۱/۴	۱/۲	۱	۴
$f^{-1}(x)$	.....	.....	.....	.....

نمودار f^{-1} قرینهٔ نمودار f نسبت به خط $y = x$ است؛ پس اگر (a, b) روی f باشد، (b, a) روی f^{-1} است.

۱) برای $f(x) = 2^x$: دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0, +\infty)$. برای f^{-1}: دامنه $(0, +\infty)$ و برد $\mathbb{R}$. (دامنه و برد وارون با هم جابه‌جا می‌شوند.)

۲) جاهای خالی: $f(-1) = 1/2$، $f(0) = 1$، $f(2) = 4$؛ $f^{-1}(1/4) = -2$، $f^{-1}(1/2) = -1$، $f^{-1}(1) = 0$، $f^{-1}(4) = 2$.



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۸ صفحه ۱۰۶ فعالیت

نمودار تابع $f(x) = 3^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱) با توجه به نقاط نمودار f، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

۲) با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

۳) دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به‌دست آورید.

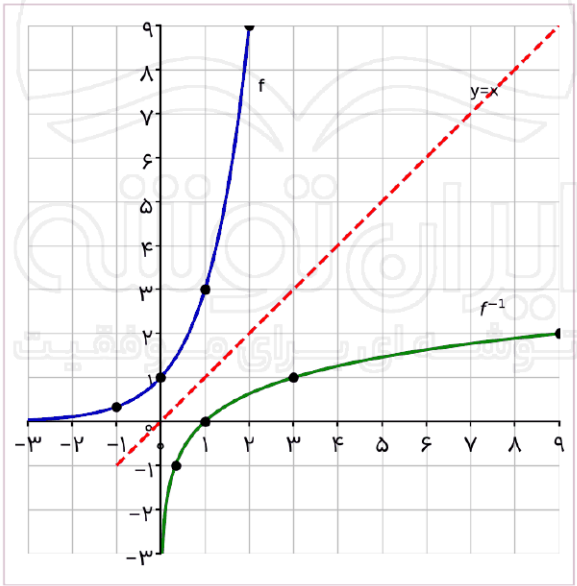
با توجه به مطالب فوق، وارون تابع $f(x) = 3^x$ را به‌صورت $f^{-1}(x) = \log_3 x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای ۳ می‌نامیم. به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

۴) با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به‌طور کلی بنویسید.

x	-۲	۰	۱	.....
f(x)	۱/۹	.....	.....	۹

x	۱/۹	۱	.....	۹
$f^{-1}(x)$	.....	.....	۱	.....

۱) نقطه‌های (2, 9)، (1, 3)، (0, 1) و (−1, 1/3) از f را نسبت به خط y = x قرینه می‌کنیم؛ نقاط (9, 2)، (3, 1)، (1, 0) و (1/3, −1) روی f^{-1} به‌دست می‌آیند (منحنی سبز).



۲) جدول کامل‌شده:

x	-۲	۰	۱	۲
$f(x) = 3^x$	۱/۹	۱	۳	۹

x	۱/۹	۱	۳	۹

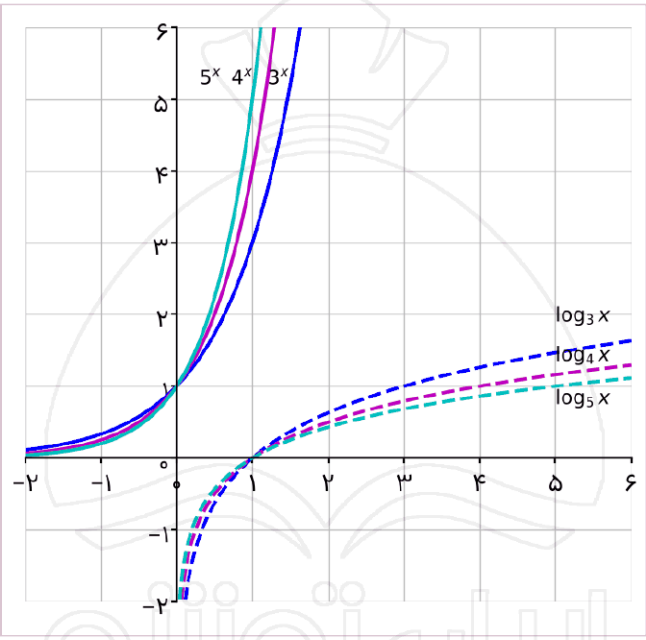
$f^{-1}(x)$	-۲	۰	۱	۲

۳) f: دامنه $\mathbb{R}$، برد $(0, +\infty)$؛ f^{-1}: دامنه $(0, +\infty)$، برد $\mathbb{R}$.

۴) برای تابع نمایی $f(x) = a^x$: دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0, +\infty)$. برای تابع لگاریتمی $f(x) = \log_a x$: دامنه $(0, +\infty)$ و برد $\mathbb{R}$.

۱۹ صفحه ۱۰۷ | کار در کلاس

در شکل مقابل، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطهٔ آنها نوشته شده، ضابطهٔ وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.



روی نمودار کتاب سه تابع نمایی 3^x، 4^x، 5^x و سه تابع لگاریتمی $\log_3 x$، $\log_4 x$، $\log_5 x$ رسم شده است. در نمودار، توابع 3^x، 4^x و $\log_5 x$ نام‌گذاری شده‌اند؛ وارون آنها:

تابع	وارون آن	دامنهٔ تابع	برد تابع
4^x	$\log_4 x$	$\mathbb{R}$	$(0, +\infty)$
3^x	$\log_3 x$	$\mathbb{R}$	$(0, +\infty)$
$\log_5 x$	5^x	$(0, +\infty)$	$\mathbb{R}$

سه تابع باقی‌مانده نیز وارون همین‌هاست: وارون $\log_4 x$ همان 4^x، وارون $\log_3 x$ همان 3^x و وارون 5^x همان $\log_5 x$ است. برای هر تابع نمایی a^x: دامنه $\mathbb{R}$ و برد $(0, +\infty)$؛ برای هر تابع لگاریتمی $\log_a x$: دامنه $(0, +\infty)$ و برد $\mathbb{R}$. نمودار هر جفت نسبت به خط $y = x$ قرینه است.

irantooshe.ir

۲۰ صفحه ۱۰۷ | کار در کلاس

نمودار تابع $y = \log_{1/2} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{1/2} 3$ ب) $\log_{0.5}(1.5)$

نمودار $y = \log_{1/2} x$ از نقاط $(1/2, 1)$، $(1, 0)$، $(2, -1)$، $(4, -2)$ می‌گذرد و نزولی است (مقدار تابع هم‌زمان با بزرگ شدن x کم می‌شود).

- الف) چون $2 < 3 < 4$، مقدار تابع بین -1 و -2 است؛ پس $-2 < \log_{1/2} 3 < -1$ (در واقع ≈ -1.58).
- ب) چون $1 < 1.5 < 2$، مقدار تابع بین 0 و -1 است؛ پس $-1 < \log_{0.5}(1.5) < 0$ (در واقع ≈ -0.58).

(در کتاب «۱/۵» به شکل عدد اعشاری 1.5 نوشته شده است. اگر منظور کسر $1/5 = 0.2$ باشد، چون $1/8 < 1/5 < 1/4$، مقدار لگاریتم بین 2 و 3 است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱ صفحه ۱۰۸ | کار در کلاس

نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.

هر نمودار از نقطهٔ $(1, 0)$ می‌گذرد. اگر نمودار از نقطهٔ $(a, 1)$ بگذرد، چون $\log_a a = 1$، پایهٔ تابع برابر a است؛ پس پایه را از نقطه‌ای که $y = 1$ دارد می‌خوانیم و با نقطهٔ دیگر امتحان می‌کنیم:

۱) نقاط $(1/2, 1)$ و $(2, -1)$: $y = \log_{1/2} x$ (زیرا $(1/2)^{-1} = 2$).

۲) نقاط $(2, 1)$ و $(4, 2)$: $y = \log_2 x$ (زیرا $2^2 = 4$).

۳) نقاط $(1/5, 1)$ و $(5, -1)$: $y = \log_{1/5} x$ (زیرا $(1/5)^{-1} = 5$).

۴) نقاط $(3, 1)$ و $(1/3, -1)$: $y = \log_3 x$ (زیرا $3^{-1} = 1/3$).

۵) نقاط $(1/3, 1)$ و $(3, -1)$: $y = \log_{1/3} x$ (زیرا $(1/3)^{-1} = 3$).

۶) نقاط $(5, 1)$ و $(1/5, -1)$: $y = \log_5 x$ (زیرا $5^{-1} = 1/5$).

نمودارهای (۲)، (۴) و (۶) صعودی‌اند (پایه بزرگ‌تر از ۱) و نمودارهای (۱)، (۳) و (۵) نزولی‌اند (پایه بین ۰ و ۱).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۲ صفحه ۱۰۸ فعالیت

با توجه به مطالعی که تا به‌حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

۱) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(a > 1)$، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن ..... است.

۲) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$، بازهٔ ..... و برد آن ..... است.

۳) نمودار توابع فوق، محور ..... را در نقطهٔ ..... قطع می‌کند و محور y ها را قطع نمی‌کند.

۴) این دو تابع، یک‌به‌یک ..... زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در ..... نقطه قطع می‌کند.

۵) وارون تابع نمایی، تابع ..... است و وارون تابع لگاریتمی، تابع ..... است.

۱) برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ است.

۲) دامنه: بازهٔ $(0, +\infty)$؛ برد: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

۳) محور x ها را در نقطهٔ $(0, 1)$ قطع می‌کند (چون $\log_a 1 = 0$).

۴) یک‌به‌یک **هستند**، زیرا خطوط موازی محور x ها نمودار آنها را حداکثر در **یک** نقطه قطع می‌کنند.

۵) وارون تابع نمایی، تابع **لگاریتمی** است و وارون تابع لگاریتمی، تابع **نمایی** است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳ صفحه ۱۰۹ فعالیت

نمودار تابع $f(x) = 2^x$ و $f^{-1}(x) = \log_2 x$ را در نظر بگیرید.

با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

جدول تکمیل‌نشده

نمایی	لگاریتمی
$2^{-2} = 1/4$	$\log_2(1/4) = -2$
$2^{-1} = 1/2$	$\log_2(1/2) =$ .....
$2^0 = 1$	.....
.....	$\log_2 2 = 1$
$2^2 = 4$	.....
.....	$\log_2 8 =$ .....

هر تساوی نمایی $2^y = x$ را به صورت لگاریتمی $\log_2 x = y$ می‌نویسیم و برعکس:

نمایی	لگاریتمی
$2^{-2} = 1/4$	$\log_2(1/4) = -2$
$2^{-1} = 1/2$	$\log_2(1/2) = -1$
$2^0 = 1$	$\log_2 1 = 0$
$2^1 = 2$	$\log_2 2 = 1$
$2^2 = 4$	$\log_2 4 = 2$
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$

به‌طور کلی اگر $a^y = x$ آنگاه $\log_a x = y$ و به عکس $(x > 0، a > 0، a \neq 1)$.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۲۴ صفحه ۱۱۰ **کار در کلاس**

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

نمونه‌ها: $\log_8 1 = 0 \rightarrow 8^0 = 1$ و $10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = 3$

از رابطهٔ $b^a = c \iff \log_b c = a$ استفاده می‌کنیم. ردیف‌های سمت چپ جدول کتاب از شکل نمایی به لگاریتمی و ردیف‌های سمت راست از شکل لگاریتمی به نمایی تبدیل می‌شوند:

نمایی ← لگاریتمی	لگاریتمی ← نمایی
$9^{1/2} = 3 \rightarrow \log_9 3 = 1/2$	$\log_2(1/16) = -4 \rightarrow 2^{-4} = 1/16$
$4^3 = 64 \rightarrow \log_4 64 = 3$	$\log_5 125 = 3 \rightarrow 5^3 = 125$
$2^5 = 32 \rightarrow \log_2 32 = 5$	$\log_{1/3} 27 = -3 \rightarrow (1/3)^{-3} = 27$
$2^{-3} = 1/8 \rightarrow \log_2(1/8) = -3$	$\log_{1/5} 125 = -3 \rightarrow (1/5)^{-3} = 125$
$3^{-4} = 1/81 \rightarrow \log_3(1/81) = -4$	$\log_{1/2} 16 = -4 \rightarrow (1/2)^{-4} = 16$

۲۵ صفحه ۱۱۱ **فعالیت ۱**

اگر a عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، همواره داریم: $\log_a 1 = 0$ و $\log_a a = 1$ و $\log_a(1/a) = -1$

طبق تعریف لگاریتم ($\log_a x = y \iff a^y = x$):

- $a^0 = 1$ پس $\log_a 1 = 0$؛
- $a^1 = a$ پس $\log_a a = 1$؛
- $a^{-1} = 1/a$ پس $\log_a(1/a) = -1$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۱۱۱ **فعالیت ۲**

برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c (c ≠ 1) داریم: $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

اثبات: فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$، پس طبق تعریف ..... = a و ..... = b، از این‌رو $ab = c^m \cdot c^n$

..... = بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم: ..... = $\log_c ab$ و در نتیجه $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

از $m = \log_c a$ طبق تعریف $a = c^m$ و از $n = \log_c b$ طبق تعریف $b = c^n$ است. پس

$ab = c^m \cdot c^n = c^{m+n}$

طبق تعریف لگاریتم، $\log_c ab = m + n$ و چون $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$:

$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ ∎

جاهای خالی: $a = c^m$، $b = c^n$، c^{m+n}، $m + n$.

مثال کتاب: با $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.48$: $\log 6 = \log 3 + \log 2 \approx 0.48 + 0.3 = 0.78$.

۲۷ صفحه ۱۱۱ **فعالیت ۳**

اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم: $\log_a b^n = n \log_a b$

اثبات: $\log_a b^n = \log_a (b \cdot b \cdots b)$ (n بار) $= \log_a b + \cdots + \log_a b$ (n بار) $= n \log_a b$

توان طبیعی یعنی ضرب مکرر: $b^n = b \cdot b \cdots b$ (n بار). طبق فعالیت ۲ لگاریتم حاصل‌ضرب برابر جمع لگاریتم‌هاست (این ویژگی برای چند عامل نیز برقرار است)، پس

$\log_a b^n = \log_a(b \cdot b \cdots b) = \log_a b + \log_a b + \cdots + \log_a b$ (n جمله)

$= n \cdot \log_a b$ ∎

جاهای خالی: در تساوی دوم $b \cdot b \cdots b$ (n بار) و در جمع، n جملهٔ $\log_a b$ قرار می‌گیرد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۸ صفحه ۱۱۱ **فعالیت ۴**

برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c (c ≠ 1) داریم: log_c(a/b) = log_c a − log_c b

اثبات: فرض می‌کنیم a/b = d. بنابراین ..... a = bd → log_c a = log_c b + log_c d → log_c d = log_c a − .....

log_c(a/b) = ... − log_c .....

از a/b = d نتیجه می‌شود a = bd. با لگاریتم گرفتن و استفاده از لگاریتم حاصل‌ضرب:

log_c a = log_c(bd) = log_c b + log_c d

پس log_c d = log_c a − log_c b و چون d = a/b:

■ log_c(a/b) = log_c a − log_c b

جاهای خالی: log_c b، log_c a، log_c b.

مثال کتاب: log 5 = log(10/2) = log 10 − log 2 = 1 − log 2 ≈ 1 − 0.3 = 0.7.

۲۹ صفحه ۱۱۱ **خواندنی**

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر (جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطهٔ محاسبهٔ فشار براساس ارتفاع به‌صورت a = 15500(5 − log p) است، که در آن a ارتفاع برحسب متر و p نیز فشار برحسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قلهٔ دماوند به ارتفاع ۵۶۱۰ متر محاسبه کنید.

a = 5610 را در رابطه می‌گذاریم (لگاریتم در مبنای ۱۰):

5610 = 15500(5 − log p) 5 − log p = 5610/15500 ≈ 0.362

log p ≈ 5 − 0.362 = 4.638 p ≈ 10^(4.638) ≈ 43 400

پاسخ: فشار هوا در قلهٔ دماوند تقریباً 4.3×10^4 پاسکال (حدود ۴۳ هزار پاسکال، نزدیک به نصف فشار سطح دریا 10^5 پاسکال) است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۰ صفحه ۱۱۲ | کار در کلاس

اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.48$، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.

۱) $\log 12 = \log(3 \times 4) = \log 3 + \log 2^2 = \log 3 + 2\log 2 \approx 0.48 + 0.6 = 1.08$

۲) $\log 0.75$ **۳)** $\log \sqrt{5}$ **۴)** $\log (25/18)$ **۵)** $\log \sqrt[3]{6}$ **۶)** $\log (\sqrt{27} / \sqrt[4]{5})$

یادآوری: $\log 5 = \log(10/2) = 1 - \log 2 \approx 1 - 0.3 = 0.7$.

۱) (نمونهٔ کتاب) $\log 12 \approx 1.08$

۲) $\log 0.75 = \log(3/4) = \log 3 - 2\log 2 \approx 0.48 - 0.6 = -0.12$

۳) $\log \sqrt{5} = (1/2)\log 5 \approx (1/2)(0.7) = 0.35$

۴) $\log (25/18) = 2\log 5 - \log 2 - 2\log 3 \approx 1.4 - 0.3 - 0.96 = 0.14$ (زیرا $18 = 2 \times 3^2$ و $25 = 5^2$)

۵) $\log \sqrt[3]{6} = (1/3)\log(2 \times 3) = (1/3)(\log 2 + \log 3) \approx (1/3)(0.78) = 0.26$

۶) $\log (\sqrt{27} / \sqrt[4]{5}) = (3/2)\log 3 - (1/4)\log 5 \approx 0.72 - 0.175 = 0.545$ (زیرا $\sqrt{27} = 3^{3/2}$)

۳۱ صفحه ۱۱۲ | فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_3 x = 2$ **۲)** $\log_5(2x-3) = \log_5(x+6)$ **۳)** $\log_5(x+2) + \log_5(x+6) = 1$

۴) $\log_4(x+2) = \log_4 8$ **۵)** $\log_2 x = -\log_2 27$ **۶)** $\log(x-3) - \log(x+1) = 3$

در حل معادلهٔ لگاریتمی باید جواب‌ها را در معادلهٔ اصلی امتحان کنیم؛ زیرا عبارت داخل لگاریتم باید مثبت باشد.

۱) $\log_3 x = 2 \Longrightarrow x = 3^2 = 9$

۲) $x + 6 = 2x - 3 \Longrightarrow x = 9$؛ برای $x = 9$ هر دو عبارت 15 و مثبت‌اند؛ پس $x = 9$ قابل قبول است.

۳) $\log_5[(x+6)(x+2)] = 1 \Longrightarrow (x+6)(x+2) = 5 \Longrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \Longrightarrow (x+7)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -7$ یا $x = -1$. برای $x = -7$ عبارت $x + 6 = -1$ منفی است، پس قابل قبول نیست؛ تنها جواب $x = -1$ است.

۴) $x + 2 = 8 \Longrightarrow x = 6$ (قابل قبول، چون $x + 2 = 8 > 0$).

۵) $\log_2 x^3 = \log_2 27^{-1} = \log_2(1/27) \Longrightarrow 3\log_2 x = -\log_2 27 \Longrightarrow x^3 = 1/27 \Longrightarrow x = 1/3$ (مثبت است و قابل قبول).

۶) $(x+1)/(x-3) = 10^3 = 1000 \Longrightarrow \log((x+1)/(x-3)) = 3 \Longrightarrow x + 1 = 1000x - 3000 \Longrightarrow 999x = 3001 \Longrightarrow x = 3001/999 \approx 3.004$. این مقدار از ۳ بزرگ‌تر است و هر دو عبارت $x + 1$ و $x - 3$ مثبت‌اند؛ پس قابل قبول است.

۳۲ صفحه ۱۱۳ | کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_5 x = 3$ **۲)** $\log_2(2x+1) = 3$ **۳)** $\log_2(x+1) + \log_2(x+4) = 2$ **۴)** $\log_3 243 = 2x+1$

۵) $2\log_4(x-1) = 3$ **۶)** $\log_3(x-1) = 4$ **۷)** $\log(2x) - \log(x-3) = 1$

۱) $x = 5^3 = 125$

۲) $2x+1 = 2^3 = 8 \Longrightarrow 2x = 7 \Longrightarrow x = 7/2$

۳) $x(x+5) = 0 \Longrightarrow x^2 + 5x = 0 \Longrightarrow (x+1)(x+4) = 4 \Longrightarrow \log_2[(x+1)(x+4)] = 2 \Longrightarrow x = 0$ یا $x = -5$. برای $x = -5$ عبارت‌های $x+1$ و $x+4$ منفی‌اند و قابل قبول نیست؛ جواب: $x = 0$.

۴) $243 = 3^5$ پس $\log_3 243 = 5 \Longrightarrow 5 = 2x+1 \Longrightarrow x = 2$

۵) $x - 1 = 3^4 = 81 \Longrightarrow x = 82$

۶) $\log(2x/(x-3)) = 1 \Longrightarrow 2x/(x-3) = 10 \Longrightarrow 2x = 10x - 30 \Longrightarrow x = 30/8 = 15/4$ (بزرگ‌تر از ۳ است و قابل قبول).

۷) $\log_4(x-1) = 3/2 \Longrightarrow x - 1 = 4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 8 \Longrightarrow x = 9$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۳ صفحه ۱۱۳ **تمرین ۱**

تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ **(a و b و c و d اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$)**

ب) $\log_b a = \log_c a / \log_c b$ **(a و b و c اعداد حقیقی مثبت‌اند و b و $c \neq 1$)**

پ) $a^{(\log_a b)} = b$ **(a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند و $a \neq 1$)**

ت) $\log_b a \times \log_a b = 1$

الف) با دوبار استفاده از لگاریتم حاصل‌ضرب:

$\log_c abd = \log_c(ab \cdot d) = \log_c ab + \log_c d = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ ∎

ب) فرض می‌کنیم $y = \log_b a$؛ طبق تعریف $b^y = a$. از دو طرف لگاریتم در مبنای c می‌گیریم و از لگاریتم توان استفاده می‌کنیم:

$\log_c b^y = \log_c a \Longrightarrow y \cdot \log_c b = \log_c a \Longrightarrow y = \log_c a / \log_c b$

(چون $b \neq 1$، $\log_c b \neq 0$ و تقسیم ممکن است.) پس $\log_b a = \log_c a / \log_c b$ ∎

پ) فرض می‌کنیم $y = \log_a b$؛ طبق تعریف لگاریتم $a^y = b$. با جایگذاری y: $a^{(\log_a b)} = b$ ∎

ت) طبق (ب) با $c = a$: $\log_b a = \log_a a / \log_a b = 1 / \log_a b$. بنابراین

$\log_b a \times \log_a b = (1 / \log_a b) \times \log_a b = 1$ ∎ (برای $a \neq 1$ و b مثبت)

۳۴ صفحه ۱۱۴ **تمرین ۲**

حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_7 \sqrt[5]{49}$ **ب)** $\log_3 27^{1/2}$ **پ)** $-\log_5 125$ **ت)** $3 \log_{10} \sqrt{1000}$

الف) $\log_7 7^{2/5} = 2/5$ پس $\sqrt[5]{49} = 49^{1/5} = (7^2)^{1/5} = 7^{2/5}$

ب) $\log_3 27^{1/2} = (1/2) \log_3 27 = (1/2) \times 3 = 3/2$

پ) $-\log_5 125 = -\log_5 5^3 = -3$

ت) $3 \log_{10} 10^{3/2} = 3 \times 3/2 = 9/2$ پس $\sqrt{1000} = 10^{3/2}$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۵ صفحه ۱۱۴ **تمرین ۳**

اگر $f(x) = 3 - 2\log_4(x/2 - 5)$، مقدار $f(42)$ را به‌دست آورید.

$f(42) = 3 - 2\log_4(42/2 - 5) = 3 - 2\log_4(21 - 5) = 3 - 2\log_4 16$

$\log_4 16 = 2 \quad f(42) = 3 - 2 \times 2 = -1$

۳۶ صفحه ۱۱۴ **تمرین ۴**

الف) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به‌دست آورید.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(-4, 1/2)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

الف) $f(2) = 2 \Longrightarrow \log_a 2 = 2 \Longrightarrow a^2 = 2$ و چون $a > 0$: $a = \sqrt{2}$

ب) $a^4 = 2 \Longrightarrow a^{-4} = 1/2 \Longrightarrow \log_a(1/2) = -4 \Longrightarrow f(1/2) = -4 \Longrightarrow a = \sqrt[4]{2} = 2^{1/4} \approx 1.19$

(در کتاب، نقطهٔ ب به صورت «$(1/2, -4)$» با چینش چپ‌به‌راست خوانده شد؛ چون تابع لگاریتمی برای x منفی تعریف نمی‌شود، طول نقطه باید 1/2 و عرض آن 4- باشد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

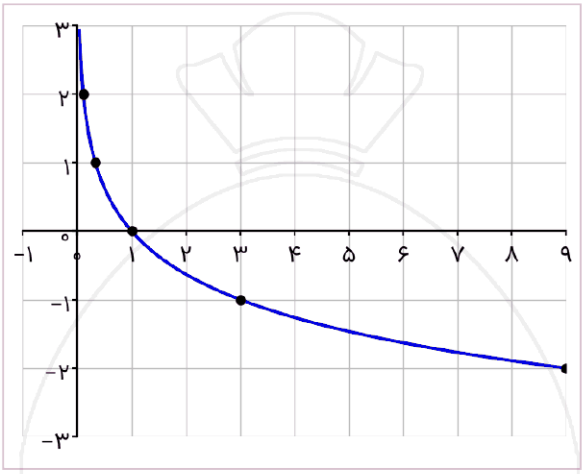
۳۷ صفحه ۱۱۴ **تمرین ۵**

نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{1/3} x$ را رسم کنید.

چند نقطه: $\log_{1/3} x = y \iff (1/3)^y = x$

x	۱/۹	۱/۳	۱	۳	۹
$y = \log_{1/3} x$	۲	۱	۰	−۱	−۲

پایه بین ۰ و ۱ است، پس نمودار نزولی است؛ دامنه $(0, +\infty)$ و برد $\mathbb{R}$؛ از نقطهٔ $(1, 0)$ می‌گذرد و به محور y ها نزدیک می‌شود (بدون برخورد).



۳۸ صفحه ۱۱۴ **تمرین ۶**

کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y = \log_a x$، آنگاه $a^x = y$.

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$ از نقطهٔ $(1, 0)$ عبور می‌کند.

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

- **الف) نادرست:** طبق تعریف $y = \log_a x \iff a^y = x$ (توان y است نه x). مثلاً $y = \log_2 8 = 3$ ولی $2^8 = 256 \neq 3$.
- **ب) درست:** $\log_a 1 = 0$ برای هر پایه (از جمله $0 < a < 1$)؛ پس نقطهٔ $(1, 0)$ روی نمودار است.
- **پ) درست:** a^y (با $a > 0$) همواره مثبت است؛ پس $x = a^y$ نمی‌تواند منفی باشد و دامنهٔ تابع لگاریتمی فقط اعداد مثبت است.

۳۹ صفحه ۱۱۴ تمرین ۷

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_2 p = \log_2(p^2 - 2)$ **ب)** $\log_5(x - 1) + \log_5(x + 1) = 1$

پ) $\log_2 25 - \log_2 5 = \log_2 a$ **ت)** $\log_{1/10}(x^2 - 21) = -2$

الف) $(p - 2)(p + 1) = 0 \Longrightarrow p^2 - p - 2 = 0 \Longrightarrow p^2 - 2 = p \Longrightarrow p = 2$ یا $p = -1$. برای $p = -1$ لگاریتم p تعریف نمی‌شود؛ پس $p = 2$ (و $p^2 - 2 = 2 > 0$).

ب) $\log_5[(x + 1)(x - 1)] = 1 \Longrightarrow x^2 - 1 = 5 \Longrightarrow x^2 = 6 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{6}$. چون $x - 1 > 0$ لازم است، $x = -\sqrt{6}$ رد می‌شود؛ جواب: $x = \sqrt{6}$.

پ) $\log_2 a^3 - \log_2 5 = \log_2 25 \Longrightarrow \log_2(a^3/5) = \log_2 25 \Longrightarrow a^3/5 = 25 \Longrightarrow a^3 = 125 \Longrightarrow a = 5$

ت) $(1/10)^{-2} = 100 \Longrightarrow x^2 = 121 \Longrightarrow x = 11$ یا $x = -11$. در هر دو حالت $x^2 - 21 = 100 > 0$ است؛ پس هر دو جواب قابل قبول‌اند.

۴۰ صفحه ۱۱۵ فعالیت

نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_2 x$ **ب)** $l(x) = 2 + \log x$ **پ)** $h(x) = -(1/2)^x$

ت) $g(x) = \log(x - 1)$ **ث)** $j(x) = 3^{(x-1)}$ **ج)** $f(x) = 2^x + 1$

هر ضابطه را با انتقال یا قرینه‌سازی تابع پایه به نمودار مناسب می‌رسانیم:

- **ج)** $2^x + 1$: نمودار 2^x یک واحد بالا رفته است؛ مجانب افقی $y = 1$ و عبور از $(0, 2)$ ← نمودار **(۱)**.
- **ت)** $\log(x - 1)$: نمودار لگاریتم یک واحد به راست رفته است؛ مجانب قائم $x = 1$ و عبور از $(2, 0)$ ← نمودار **(۲)**.
- **پ)** $-(1/2)^x$: قرینهٔ $(1/2)^x$ نسبت به محور x ها؛ زیر محور x ها و عبور از $(0, -1)$ ← نمودار **(۳)**.
- **ب)** $\log x + 2$: نمودار لگاریتم دو واحد بالا رفته است؛ مجانب قائم $x = 0$ و عبور از $(1, 2)$ ← نمودار **(۴)**.
- **ث)** $3^{(x-1)}$: نمودار 3^x یک واحد به راست رفته است؛ عبور از $(1, 1)$ و $(0, 1/3)$ ← نمودار **(۵)**.
- **الف)** $-\log_2 x$: قرینهٔ $\log_2 x$ نسبت به محور x ها؛ نزولی و عبور از $(1, 0)$ ← نمودار **(۶)**.

ضابطه	الف	ب	پ	ت	ث	ج
شمارهٔ نمودار	۶	۴	۳	۲	۵	۱

توشه ای برای موفقیت

۴۱ صفحه ۱۱۶ **کار در کلاس**

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.

شکل سمت چپ (تابع نمایی $y = 4^x$):

- y_1: مجانب افقی $y = 2$ و گذر از $(0, 3)$؛ نمودار 4^x دو واحد بالا رفته است: $y_1 = 4^x + 2$.
- y_2: مجانب افقی $y = -2$ و گذر از $(0, -3)$؛ نمودار 4^x نسبت به محور x ها قرینه و سپس دو واحد پایین رفته است: $y_2 = -4^x - 2$.

شکل سمت راست (تابع لگاریتمی $y = \log_2 x$):

- y_1: مجانب قائم همان $x = 0$ و گذر از $(1, 2)$، $(2, 3)$، $(4, 4)$؛ نمودار دو واحد بالا رفته است: $y_1 = \log_2 x + 2$.
- y_2: مجانب قائم $x = 4$ و گذر از $(5, 0)$، $(8, 2)$؛ نمودار چهار واحد به راست رفته است: $y_2 = \log_2(x - 4)$.

۴۲ صفحه ۱۱۶ **کار در کلاس**

کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۱) $y = \log_3(x - 1)$ ۲) $y = 3^x + 1$ ۳) $y = 1 - 3^x$

۴) $y = \log_3 x - 1$ ۵) $y = 1 - \log_3 x$ ۶) $y = 3^{(x-2)}$

نمودارها در کتاب به صورت ردیف بالا: (الف)، (ب)، (پ) و ردیف پایین: (ت)، (ث)، (ج) (از چپ به راست) نام‌گذاری شده‌اند.

- **۱) ← (ت):** مجانب قائم $x = 1$ و گذر از $(2, 0)$.
- **۲) ← (ج):** مجانب افقی $y = 1$ و گذر از $(0, 2)$.
- **۳) ← (پ):** نزولی، همواره کمتر از ۱ و گذر از مبدأ $(0, 0)$.
- **۴) ← (الف):** صعودی با مجانب قائم $x = 0$ و گذر از $(3, 0)$ (چون $\log_3 3 - 1 = 0$).
- **۵) ← (ب):** نزولی با مجانب قائم $x = 0$ و گذر از $(3, 0)$ و $(1, 1)$.
- **۶) ← (ث):** نمودار 3^x دو واحد به راست رفته است؛ گذر از $(2, 1)$ و $(3, 3)$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۳ صفحه ۱۱۷ — کار در کلاس

زلزلهٔ ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار ـ منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقهٔ بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

رابطهٔ انرژی و بزرگی زلزله: $\log E = 11.8 + 1.5\,M$. برای $M = 7.4$:

$$\log E = 11.8 + 1.5 \times 7.4 = 11.8 + 11.1 = 22.9$$

$$E = 10^{(22.9)} \approx 7.9 \times 10^{22}$$

پاسخ: انرژی آزاد شده در این زلزله حدود $7.9 \times 10^{22} \approx 10^{(22.9)}$ ارگ بوده است.

۴۴ صفحه ۱۱۸ — تمرین ۱

در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به‌دست آورید.

نمودار 2^x به اندازهٔ b واحد افقی و a واحد قائم انتقال یافته است. در نمودار، مجانب افقی خط $y = 1$ است؛ پس $a = 1$.

نمودار از نقطهٔ $(0, 2)$ می‌گذرد: $2 = 1 + 2^{(0-b)} \Longrightarrow 2^{-b} = 1 \Longrightarrow b = 0$.

پاسخ: $a = 1$ و $b = 0$؛ یعنی $y = 1 + 2^x$. (راستی‌آزمایی: $x = 1 \Longrightarrow y = 3$ و $x = 2 \Longrightarrow y = 5$ که با نمودار می‌خواند.)

۴۵ صفحه ۱۱۸ — تمرین ۲

فرض می‌کنیم $g(x) = 4^x + 2$. الف) $g(-1)$ را به‌دست آورید. ب) اگر $g(x) = 66$، مقدار x چقدر است؟

الف) $g(-1) = 4^{-1} + 2 = 1/4 + 2 = 9/4$

ب) $4^x + 2 = 66 \Longrightarrow 4^x = 64 = 4^3 \Longrightarrow x = 3$

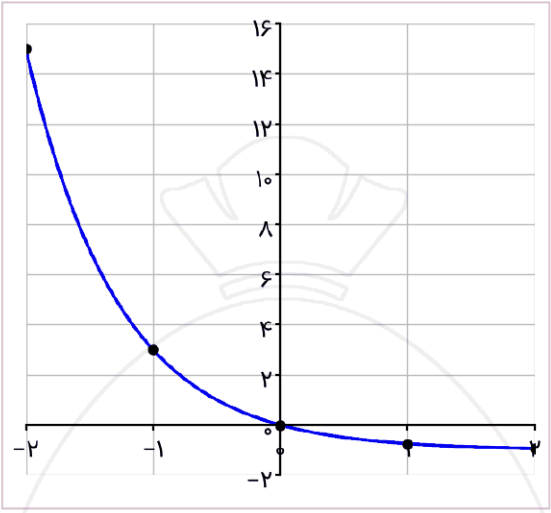
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۶ صفحه ۱۱۸ تمرین ۳

نمودار تابع $y = 4^{-x} - 1$ را در بازهٔ $[-2, 2]$ رسم کنید.

$y = 4^{-x} - 1 = (1/4)^{x} - 1$: نمودار $y = (1/4)^{x}$ است که یک واحد پایین آمده؛ نزولی با مجانب افقی $y = -1$.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = 4^{-x} - 1$	۱۵	۳	۰	-۳/۴	-۱۵/۱۶



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۷ صفحه ۱۱۸ تمرین ۴

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

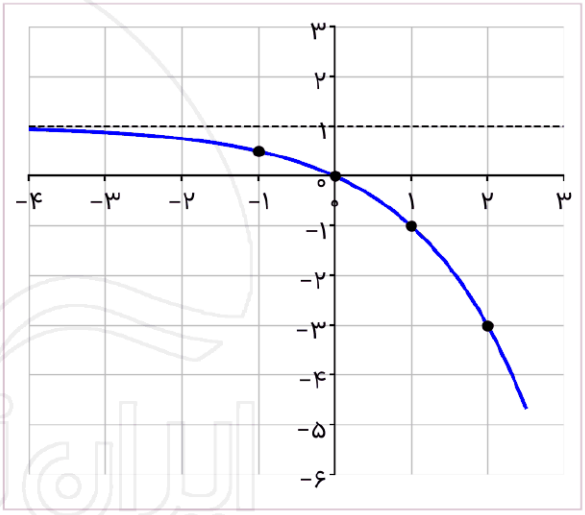
الف) $y = -2^x + 1$ ب) $y = -\log_2(x - 1)$

الف) نمودار 2^x را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم (-2^x) و یک واحد بالا می‌بریم. مجانب افقی $y = 1$؛ نقاط:

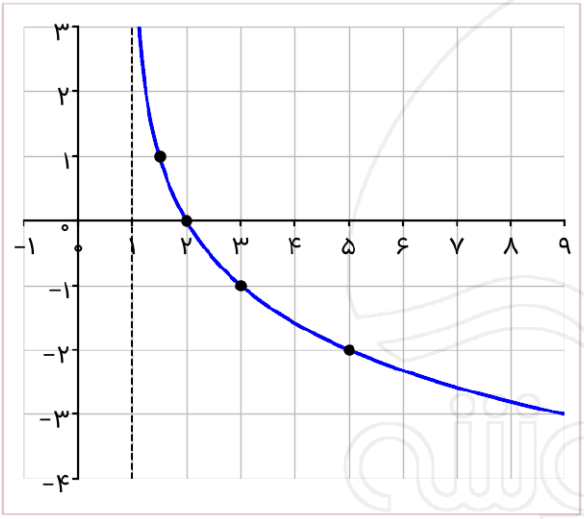
x	-۱	۰	۱	۲
$y = -2^x + 1$	۱/۲	۰	-۱	-۳

ب) نمودار $\log_2 x$ را یک واحد به راست می‌بریم ($\log_2(x - 1)$)، مجانب قائم $x = 1$، دامنه $(1, +\infty)$ و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نقاط:

x	۳/۲	۲	۳	۵
$y = -\log_2(x - 1)$	۱	۰	-۱	-۲



الف



ب

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir