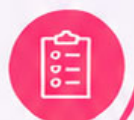


با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe



ریاضی ۲ یازدهم - فصل چهارم

مثلثات

فهرست

۱۷ صفحه ۷۶ · تمرین — زاویه $\pi/2$ رادیان	۱ صفحه ۷۲ · یادآوری — دایره مثلثاتی با ۲۴ قسمت
۱۸ صفحه ۷۶ · تمرین — زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر	۲ صفحه ۷۲ · فعالیت — رابطه زاویه و کمان (محیط دایره)
۱۹ صفحه ۷۶ · تمرین — درستی یا نادرستی جمله‌ها	۳ صفحه ۷۲ · فعالیت — کمانی به طول شعاع
۲۰ صفحه ۷۷ · فعالیت — علامت نسبت‌ها در ربع‌ها (جدول اول)	۴ صفحه ۷۳ · فعالیت — چند رادیان در دایره جا می‌گیرد؟
۲۱ صفحه ۷۷ · فعالیت — علامت نسبت‌ها در ربع‌ها (جدول دوم)	۵ صفحه ۷۳ · فعالیت — اندازه یک رادیان در دایره‌های مختلف
۲۲ صفحه ۷۸ · فعالیت — یافتن نسبت‌ها با داشتن سینوس	۶ صفحه ۷۳ · فعالیت — جدول طول کمان و زاویه
۲۳ صفحه ۷۸ · فعالیت — یافتن نسبت‌ها با داشتن کتانژانت	۷ صفحه ۷۴ · کار در کلاس — رابطه زاویه، طول کمان و شعاع
۲۴ صفحه ۷۸ · کار در کلاس — نسبت‌ها با داشتن کسینوس	۸ صفحه ۷۴ · یادآوری — تبدیل رادیان به درجه (π و 180°)
۲۵ صفحه ۷۸ · کار در کلاس — جدول نسبت‌های زاویه‌های خاص	۹ صفحه ۷۵ · تکمیل — π رادیان و کسرهای آن
۲۶ صفحه ۷۹ · کار در کلاس — محاسبه عبارت‌های مثلثاتی (۱)	۱۰ صفحه ۷۵ · کار در کلاس — تبدیل درجه به رادیان
۲۷ صفحه ۷۹ · فعالیت — نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه	۱۱ صفحه ۷۵ · کار در کلاس — تبدیل درجه و رادیان با نسبت
۲۸ صفحه ۷۹ · کار در کلاس — نسبت‌های مثلثاتی زاویه منفی $\pi/4$	۱۲ صفحه ۷۵ · کار در کلاس — دایره مثلثاتی بر حسب رادیان
۲۹ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — حاصل عبارت‌ها با زاویه‌های قرینه	۱۳ صفحه ۷۶ · خواندن — تبدیل رادیان به درجه با ماشین حساب
۳۰ صفحه ۸۰ · فعالیت — نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل	۱۴ صفحه ۷۶ · فعالیت — ایستگاه فضایی بین‌المللی
۳۱ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — مکمل زاویه‌ها	۱۵ صفحه ۷۶ · تمرین — تبدیل درجه به رادیان و نمایش روی دایره
	۱۶ صفحه ۷۶ · تمرین — تبدیل رادیان به درجه و نمایش روی دایره

۳۲	صفحه ۸۱ - کار در کلاس - نسبت‌های مثلثاتی زاویه $5\pi/6$... ۲۷
۳۳	صفحه ۸۱ - فعالیت - حاصل نسبت‌ها به کمک زاویه مکمل ... ۲۷
۳۴	صفحه ۸۱ - فعالیت - نسبت‌های مثلثاتی زاویه $2\pi/3$ درجه ... ۲۸
۳۵	صفحه ۸۲ - کار در کلاس - نسبت‌های مثلثاتی زاویه $7\pi/6$... ۲۸
۳۶	صفحه ۸۲ - فعالیت - حاصل نسبت‌ها به کمک اختلاف π ... ۲۹
۳۷	صفحه ۸۳ - فعالیت - زاویه‌های متمم ... ۳۰
۳۸	صفحه ۸۳ - فعالیت - نسبت‌های زاویه $2\pi/3$ به دو روش ... ۳۱
۳۹	صفحه ۸۴ - کار در کلاس - نسبت‌های زاویه 135° درجه به دو روش ... ۳۲
۴۰	صفحه ۸۵ - کار در کلاس - پرسش‌هایی با نقاله ... ۳۳
۴۱	صفحه ۸۵ - فعالیت - زاویه‌های هم‌انتهای 45° و 405° (درجه) ... ۳۴
۴۲	صفحه ۸۶ - فعالیت - زاویه $5\pi/3$ رادیان ... ۳۵
۴۳	صفحه ۸۶ - کار در کلاس - زاویه‌های بزرگ‌تر از یک دور ... ۳۶
۴۴	صفحه ۸۷ - خواندنی - کار با ماشین حساب (۱) ... ۳۶
۴۵	صفحه ۸۷ - خواندنی - کار با ماشین حساب (۲) ... ۳۷
۴۶	صفحه ۸۷ - تمرین - محاسبه عبارت‌های مثلثاتی (۲) ... ۳۷
۴۷	صفحه ۸۷ - تمرین - محاسبه عبارت‌های مثلثاتی (۲)، ادامه ... ۳۸
۴۸	صفحه ۸۷ - تمرین - جدول نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مختلف ... ۳۹
۴۹	صفحه ۸۷ - تمرین - بررسی درستی تساوی‌ها ... ۳۹
۵۰	صفحه ۸۷ - تمرین - یافتن زاویه مناسب در تساوی‌ها ... ۴۰
۵۱	صفحه ۸۸ - فعالیت - رسم تابع سینوس - جدول و زوج‌های مرتب ... ۴۱
۵۲	صفحه ۸۸ - فعالیت - رسم تابع سینوس - مشخص کردن نقطه‌ها ... ۴۲
۵۳	صفحه ۸۸ - فعالیت - رسم تابع سینوس - نقطه‌های بیشتر ... ۴۲
۵۴	صفحه ۸۹ - فعالیت - رسم تابع سینوس - وصل کردن نقطه‌ها ... ۴۳
۵۵	صفحه ۸۹ - فعالیت - رسم تابع سینوس در نیمه دوم دوره ... ۴۴
۵۶	صفحه ۸۹ - فعالیت - رفتار تابع سینوس در یک دوره ... ۴۵
۵۷	صفحه ۸۹ - فعالیت - تناوب تابع سینوس و تکرار نمودار ... ۴۶
۵۸	صفحه ۹۰ - فعالیت - ویژگی‌های تابع سینوس ... ۴۷
۵۹	صفحه ۹۰ - کار در کلاس - تطبیق ضابطه با نمودار (سینوس) ... ۴۷
۶۰	صفحه ۹۱ - فعالیت - رسم تابع کسینوس - جدول و زوج‌های مرتب ... ۴۸
۶۱	صفحه ۹۱ - فعالیت - رسم تابع کسینوس - مشخص کردن نقطه‌ها ... ۴۹
۶۲	صفحه ۹۱ - فعالیت - رسم تابع کسینوس - نقطه‌های بیشتر ... ۴۹
۶۳	صفحه ۹۲ - فعالیت - رسم تابع کسینوس - وصل کردن نقطه‌ها ... ۵۰
۶۴	صفحه ۹۲ - فعالیت - رسم تابع کسینوس در نیمه دوم دوره ... ۵۰
۶۵	صفحه ۹۲ - فعالیت - رفتار تابع کسینوس در یک دوره ... ۵۱
۶۶	صفحه ۹۲ - فعالیت - تناوب تابع کسینوس و تکرار نمودار ... ۵۱
۶۷	صفحه ۹۳ - فعالیت - ویژگی‌های تابع کسینوس ... ۵۲
۶۸	صفحه ۹۳ - کار در کلاس - رسم تابع‌ها با استفاده از نمودار کسینوس ... ۵۲
۶۹	صفحه ۹۳ - تمرین - انطباق نمودار توابع ... ۵۴
۷۰	صفحه ۹۳ - تمرین - رسم نمودار توابع در بازه‌های داده شده ... ۵۴
۷۱	صفحه ۹۴ - تمرین - تشخیص ضابطه نمودار ... ۵۶
۷۲	صفحه ۹۴ - تمرین - درستی یا نادرستی گزاره‌ها درباره نمودارها ... ۵۷

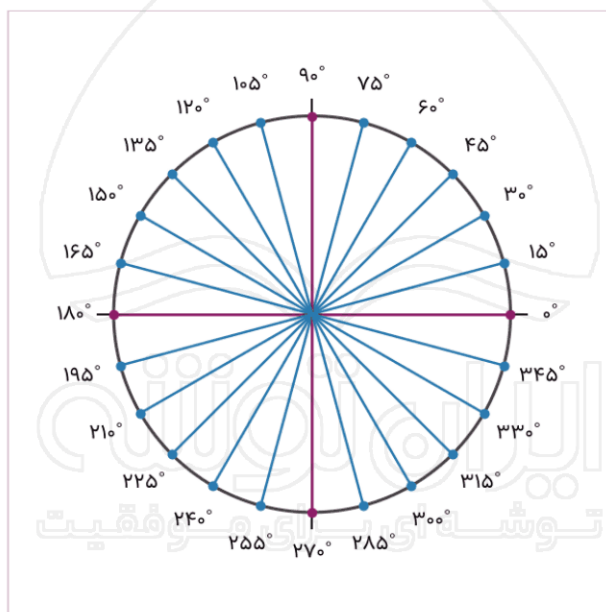


شکل مقابل یک دایرهٔ مثلثاتی را نمایش می‌دهد که به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی زاویهٔ مناسب را روی شکل مشخص کنید.

محیط دایره ۳۶۰ درجه است و به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است؛ پس اندازهٔ هر قسمت برابر است با

$$360^\circ \div 24 = 15^\circ$$

زاویه‌ها از محور افقی (۰°) و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، هر بار ۱۵° بیشتر می‌شوند: ۰°، ۱۵°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰°، ۷۵°، ۹۰°، ۱۰۵°، ۱۲۰°، ۱۳۵°، ۱۵۰°، ۱۶۵°، ۱۸۰°، ۱۹۵°، ۲۱۰°، ۲۲۵°، ۲۴۰°، ۲۵۵°، ۲۷۰°، ۲۸۵°، ۳۰۰°، ۳۱۵°، ۳۳۰° و ۳۴۵°.



۱) یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخ را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط‌کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به دست آورید.

طول نخ، محیط دایره را مشخص می‌کند.

چون محیط دایره $C = 2\pi r$ است، شعاع از رابطه $r = C / (2\pi)$ به دست می‌آید.

نمونه: اگر نخ که دور در یک شیشه پیچیده شده 31.4 سانتی‌متر باشد، با فرض $\pi \approx 3.14$ خواهیم داشت:

$$r = 31.4 / (2 \times 3.14) = 5 \text{ cm}$$

این جواب ممکن است دقیق نباشد؛ عدهای نمونه به شیئی که انتخاب می‌کنید بستگی دارد.

۲) قطعه نخ را به اندازه شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطه A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطه B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\hat{AOB}$ را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه است؟

کمان AB هم‌طول شعاع است. اندازه‌گیری با نقاله نشان می‌دهد که زاویه مرکزی $\hat{AOB}$ تقریباً 57° درجه است (مقدار دقیق‌تر: 57.3°). این مقدار به اندازه شعاع دایره بستگی ندارد.

ایران توئین
توشه‌ای برای موفقیت

۳) دوباره این قطعه نخ را از نقطه B روی محیط دایره قرار دهید تا نقطه C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D، E، F و G روی محیط دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{B\hat{O}C}$ و $\widehat{C\hat{O}D}$ ، $\widehat{D\hat{O}E}$ ، $\widehat{E\hat{O}F}$ ، $\widehat{F\hat{O}G}$ با زاویه برابر و هر یک تقریباً درجه است. آیا دو نقطه G و A برهم منطبق می‌شوند؟ به این ترتیب ۶ زاویه مرکزی حاصل می‌شود که طول کمان روبه‌روی هر یک از آنها با دایره برابر است. به هر یک از این زاویه‌ها یک رادیان می‌گوییم.

هر یک از زاویه‌های $\widehat{B\hat{O}C}$ ، $\widehat{C\hat{O}D}$ ، $\widehat{D\hat{O}E}$ ، $\widehat{E\hat{O}F}$ و $\widehat{F\hat{O}G}$ با زاویه $\widehat{A\hat{O}B}$ برابر است (چون کمان روبه‌روی همه آنها به اندازه شعاع است) و هر یک تقریباً 57° درجه است.

آیا G و A برهم منطبق می‌شوند؟ خیر. شش کمان هم‌طول شعاع، روی هم $6r$ از محیط را می‌پوشانند، ولی محیط دایره $2\pi r \approx 6.28r$ است؛ بنابراین حدود $0.28r$ (یعنی حدود ۱۶ درجه) باقی می‌ماند و نقطه G کمی قبل از A قرار می‌گیرد.

طول کمان روبه‌روی هر یک از این زاویه‌ها با شعاع دایره برابر است.

در تمام دایره‌های زیر زاویه مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازه زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.

با اندازه‌گیری در هر سه دایره، زاویه ۱ رادیان تقریباً 57° درجه (دقیق‌تر $57,3^\circ$) به دست می‌آید. یعنی اندازه یک رادیان به شعاع دایره بستگی ندارد؛ زیرا در هر دایره طول کمان روبه‌روی زاویه با شعاع آن برابر است ($OA'' = A''B''$ ، $OA' = A'B'$ ، $OA = AB$) و شکل‌ها متشابه‌اند.

توشه ای برای موفقیت

(۴) جدول زیر را کامل کنید.

شکل	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
طول کمان AB_i ، $1 \leq i \leq 7$	r	$(3/2)r$	$2r$		$4r$		$6r$
اندازه زاویه $\angle AOB_i$	۱ رادیان	$3/2$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان		۵ رادیان	

زاویه مرکزی بر حسب رادیان برابر است با طول کمان تقسیم بر شعاع؛ پس $r \times \text{طول کمان} = \text{زاویه (رادیان)}$.
جدول کامل شده (خانه‌های پررنگ پاسخ‌اند):

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
طول کمان AB_i ، $1 \leq i \leq 7$	r	$(3/2)r$	$2r$	$3r$	$4r$	$5r$	$6r$
اندازه زاویه $\angle AOB_i$	۱ رادیان	$3/2$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۴ رادیان	۵ رادیان	۶ رادیان

با استفاده از رابطه بالا ($\alpha = l / r$) جدول زیر را کامل کنید:

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
.....	۵۰۰ سانتی متر		۲۰۰ سانتی متر	۹۰ سانتی متر	۵۰ متر	۱۰ متر		۱
۵ سانتی متر	۵ متر	۰/۵ متر	۱ متر		۱۰ متر		۲۰ سانتی متر	r
۱ رادیان		۱/۵ رادیان		۳ رادیان		۱۰ رادیان	۲۰ رادیان	α

طبق رابطه $\alpha = l / r$ (که در آن l و r هم واحدند) داریم $l = \alpha \cdot r$ و $r = l / \alpha$. هر ستون را جداگانه حل می‌کنیم (خانه‌های پررنگ پاسخ‌اند):

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
۵ سانتی متر	۵۰۰ سانتی متر	۰/۷۵ متر	۲۰۰ سانتی متر	۹۰ سانتی متر	۵۰ متر	۱۰ متر	۴۰۰ سانتی متر	۱
۵ سانتی متر	۵ متر	۰/۵ متر	۱ متر	۳۰ سانتی متر	۱۰ متر	متر ۱	۲۰ سانتی متر	r
۱ رادیان	رادیان ۱	۱/۵ رادیان	رادیان ۲	۳ رادیان	۵ رادیان	۱۰ رادیان	۲۰ رادیان	α

برای نمونه: ستون ۱: $l = 20 \times 20 = 400 \text{ cm}$ ؛ ستون ۳: $\alpha = 50 / 10 = 5$ ؛ ستون ۵: $\alpha = 200 \text{ cm} / 100 \text{ cm} = 2$ ؛ ستون ۶: $l = 1.5 \times 0.5 = 0.75 \text{ m}$.

می‌دانیم نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد $3/14$ است. حال جدول زیر را کامل کنید:

بنابراین، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نیم‌دایره برابر است با درجه یا رادیان. به عبارت دیگر اندازه زاویه نیم‌صفحه برابر است با رادیان. در نتیجه: $\pi/180^\circ$ رادیان = یک درجه

زاویه بر حسب رادیان	π	$3/14$	۳	۲	۱	۰/۵
زاویه بر حسب درجه	دقیقاً 180°	تقریباً	تقریباً	تقریباً	تقریباً 57°	تقریباً

چون ۱ رادیان تقریباً $57.3^\circ \approx 180^\circ/\pi$ است، هر زاویه بر حسب رادیان را در این عدد ضرب می‌کنیم:

زاویه بر حسب رادیان	π	$3/14$	۳	۲	۱	۰/۵
زاویه بر حسب درجه	دقیقاً 180°	تقریباً 179.9°	تقریباً 171.9°	تقریباً 114.6°	تقریباً 57°	تقریباً 28.6°

طول کمان نیم‌دایره πr و شعاع r است، پس زاویه مرکزی روبه‌رو به آن $\pi r / r = \pi$ رادیان است. بنابراین:

اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نیم‌دایره برابر است با **۱۸۰ درجه** یا **π رادیان**. به عبارت دیگر اندازه زاویه نیم‌صفحه برابر است با **π رادیان**.

و از $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ نتیجه می‌شود $1^\circ = \pi/180 \text{ rad}$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

به این ترتیب: $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ (با تقسیم بر ۲، ۳، ۴ و ۶ جاهای خالی را پر کنید)

$$\div 2 \rightarrow \dots \text{ rad} = 90^\circ$$

$$\div 3 \rightarrow \pi/3 = \dots^\circ$$

$$\div 4 \rightarrow \dots \text{ rad} = \dots^\circ$$

$$\div 6 \rightarrow \dots \text{ rad} = 30^\circ$$

$$\pi/2 \text{ rad} = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$$

$$\pi/3 \text{ rad} = 180^\circ \div 3 = 60^\circ$$

$$\pi/4 \text{ rad} = 180^\circ \div 4 = 45^\circ$$

$$\pi/6 \text{ rad} = 180^\circ \div 6 = 30^\circ$$

(۱) مطابق نمونه هریک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید.

نمونه: $30^\circ \rightarrow (\pi/180) \times 30 = \pi/6 \text{ rad}$

90°	45°	180°	6°	36°
.....				

برای تبدیل درجه به رادیان، عدد را در $\pi/180$ ضرب می‌کنیم:

درجه	عمل	رادیان
45°	$45 \times \pi/180$	$\pi/4$
90°	$90 \times \pi/180$	$\pi/2$
36°	$36 \times \pi/180$	$\pi/5$
6°	$60 \times \pi/180$	$\pi/3$
180°	$180 \times \pi/180$	π

(۲) حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید.

اگر D اندازه زاویه α بر حسب درجه و R اندازه زاویه α بر حسب رادیان باشد، آنگاه:

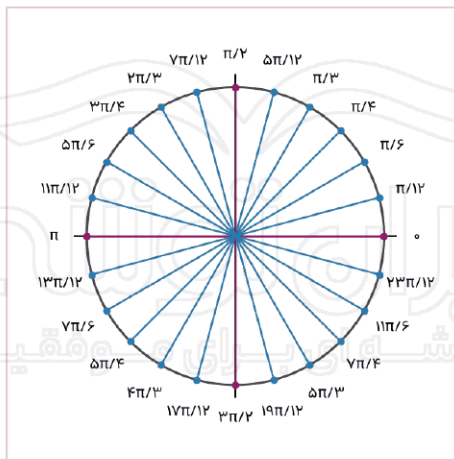
$$D / 180^\circ = R / \pi$$

۶	۵	۴	۳	۲	۱	
5°		24°		120°		D (درجه)
$\pi/36$	$\pi/7$		$2\pi/5$		$5\pi/4$	R (رادیان)

از رابطه $R = (\pi/180) \cdot D$ و $D = (180/\pi) \cdot R$ استفاده می‌کنیم (خانه‌های پررنگ پاسخ‌اند):

۶	۵	۴	۳	۲	۱	
5°	$180/7 \approx 25.7^\circ$	24°	72°	120°	225°	D (درجه)
$\pi/36$	$\pi/7$	$2\pi/15$	$2\pi/5$	$2\pi/3$	$5\pi/4$	R (رادیان)

برای نمونه $R = \pi \times 24/180 = 2\pi/15$ ، $D = 180 \times 2/5 = 72$ ، $R = \pi \times 120/180 = 2\pi/3$ ، $D = 180 \times 5/4 = 225$ و $D = 180/7$.



حال مقدار تقریبی زاویه‌های زیر را مشابه نمونه با ماشین حساب به دست آورید.

نمونه: برای محاسبهٔ ۱ رادیان کافی است حاصل $1 \times (180/\pi)$ را به دست آوریم که تقریباً برابر با 57.3° است.

زاویه	مقدار تقریبی بر حسب درجه
۰/۵ رادیان	
۴/۵ رادیان	
۲ رادیان	
۳ رادیان	
۳/۱۴ رادیان	
$\pi/3$ رادیان	
$\pi/4$ رادیان	
π رادیان	

هر مقدار را در $180/\pi \approx 57.2958$ ضرب می‌کنیم:

زاویه (رادیان)	0.5	4/5 = 0.8	2	3	3.14	$\pi/3$	$\pi/4$	π
زاویه (درجه)	$\approx 28.6^\circ$	$\approx 45.8^\circ$	$\approx 114.6^\circ$	$\approx 171.9^\circ$	$\approx 179.9^\circ$	$= 60^\circ$	$= 45^\circ$	$= 180^\circ$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه A تا نقطه B که با مرکز زمین زاویه 45° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A به B پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

(۱) ابتدا زاویه مرکزی 45° را به رادیان تبدیل کنید.

(۲) شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با

(۳) طول کمان روبه‌روی $A'OB'$ با فرض $\pi = 3.14$ و با استفاده از رابطه $\alpha = l/r$ به طور تقریبی برابر است با:

$$\alpha = \angle AOB = 45^\circ \times \dots = \pi/4 \text{ rad}$$

$$l = \pi/4 \times \dots \approx 5338 \text{ km}$$

(۱) اندازه زاویه مرکزی AOB بر حسب رادیان:

$$\alpha = 45^\circ \times \pi/180 = \pi/4 \text{ rad}$$

(۲) شعاع مدار برابر است با شعاع زمین به علاوه ارتفاع ایستگاه از سطح زمین:

$$r = 6400 + 400 = 6800 \text{ km}$$

(۳) زاویه مرکزی $A'OB'$ همان $AOB = \pi/4$ است. از رابطه $\alpha = l/r$ داریم:

$$l = \alpha \cdot r = (\pi/4) \times 6800 \approx (3.14/4) \times 6800 = 5338 \text{ km}$$

پس ایستگاه فضایی در این مدت تقریباً **۵۳۳۸ کیلومتر** از مدار خود را می‌پیماید.

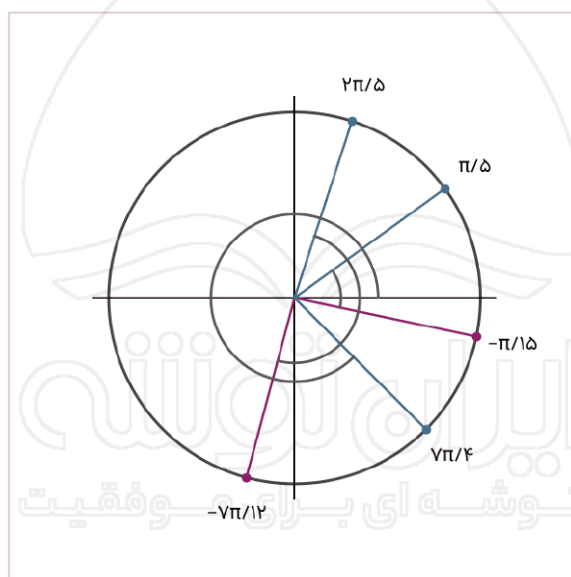


۱) هریک از زاویه‌های -12° ، 36° ، 72° ، -105° و 315° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

با ضرب هر زاویه در $\pi/180$

درجه	محاسبه	رادیان	ربع انتهایی کمان
-12°	$-12\pi/180$	$-\pi/15$	چهارم (جهت منفی)
36°	$36\pi/180$	$\pi/5$	اول
72°	$72\pi/180$	$2\pi/5$	اول
-105°	$-105\pi/180$	$-7\pi/12$	سوم (جهت منفی)
315°	$315\pi/180$	$7\pi/4$	چهارم

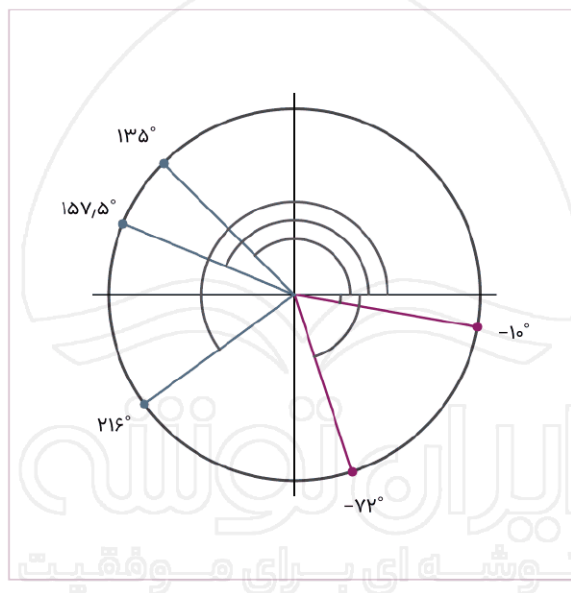
زاویه‌های مثبت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت و زاویه‌های منفی در جهت عقربه‌های ساعت از محور افقی رسم می‌شوند:



۲) هریک از زاویه‌های $-\pi/18$ رادیان، $-2\pi/5$ رادیان، $3\pi/4$ رادیان، $7\pi/8$ رادیان، $6\pi/5$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به طور تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

با ضرب هر زاویه در $180^\circ/\pi$

رادیان	محاسبه	درجه	ربع انتهایی کمان
$-\pi/18$	$-180/18$	-10°	چهارم (جهت منفی)
$-2\pi/5$	$-2 \times 180/5$	-72°	چهارم (جهت منفی)
$3\pi/4$	$3 \times 180/4$	135°	دوم
$7\pi/8$	$7 \times 180/8$	157.5°	دوم
$6\pi/5$	$6 \times 180/5$	216°	سوم



۳) زاویه D بر حسب درجه برابر با $\pi/20$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

$$D = (\pi/20) \times (180/\pi) = 180/20 = 9^\circ$$

پس این زاویه ۹ درجه است.

۴) دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

$$\alpha = l / r = 8 / 10 = 0.8 \text{ rad}$$

پس اندازه زاویه ۰٫۸ رادیان است (حدود ۴۵٫۸ درجه).

۵) درستی یا نادرستی هریک از جمله‌های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.
 الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک‌تر از اندازه هر یک از ساق‌های آن است.
 ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با $3/14$ سانتی‌متر است.
 پ) انتهای کمان زاویه $6\pi/5$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد.
 ت) زاویه‌های $2\pi/3$ رادیان، $\pi/9$ رادیان، $7\pi/36$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

الف) درست. یک رادیان تقریباً $57,3^\circ$ و کمتر از 60° است. زاویه بین دو ساق (زاویه رأس) $57,3^\circ$ است و زاویه‌های قاعده هر کدام $61,3^\circ \approx (180^\circ - 57,3^\circ)/2$ می‌شوند. در مثلث، ضلع روبه‌روی زاویه کوچک‌تر، کوچک‌تر است؛ پس قاعده (روبه‌روی $57,3^\circ$) از ساق‌ها (روبه‌روی $61,3^\circ$) کوچک‌تر است.

ب) درست. $l = \alpha \cdot r = \pi \times 1 = \pi \approx 3.14 \text{ cm}$.

پ) نادرست. $6\pi/5 = 216^\circ$ و چون $180^\circ < 216^\circ < 270^\circ$ (یعنی $\pi < 6\pi/5 < 3\pi/2$)، انتهای کمان در ربع سوم است.

ت) نادرست. مجموع زاویه‌های هر مثلث π رادیان است، ولی

$$2\pi/3 + \pi/9 + 7\pi/36 = (24\pi + 4\pi + 7\pi)/36 = 35\pi/36 \neq \pi$$

پس این سه زاویه، زاویه‌های یک مثلث نیستند.

(۱) جدول‌های زیر را مطابق نمونه کامل کنید. (جدول اول)

علامت نسبت مثلثاتی	α انتهای کمان روبه‌روی	α زاویه
$\tan \alpha > 0$	ربع اول	۷۵°
$\sin \alpha > 0$		۱۵°
$\cos \alpha < 0$		۲۱۰°
$\cot \alpha > 0$		۲۴۰°
$\tan \alpha < 0$		۲۸۵°

ابتدا ربع را از روی اندازه زاویه تعیین می‌کنیم ($0^\circ - 90^\circ$ ربع اول، $90^\circ - 180^\circ$ ربع دوم، $180^\circ - 270^\circ$ ربع سوم، $270^\circ - 360^\circ$ ربع چهارم) و سپس علامت را از جدول صفحه ۷۷ می‌خوانیم:

علامت نسبت مثلثاتی	α انتهای کمان روبه‌روی	α زاویه
$\tan \alpha > 0$	ربع اول	۷۵°
$\sin \alpha > 0$	ربع دوم	۱۵°
$\cos \alpha < 0$	ربع سوم	۲۱۰°
$\cot \alpha > 0$	ربع سوم	۲۴۰°
$\tan \alpha < 0$	ربع چهارم	۲۸۵°

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱) (ادامه) جدول دوم را مطابق نمونه کامل کنید.

علامت نسبت مثلثاتی	α انتهای کمان روبه‌روی	α زاویه
$\cos \alpha < 0$	ربع دوم	$3\pi/4$ رادیان
$\sin \alpha > 0$		$4\pi/5$ رادیان
$\tan \alpha < 0$		$5\pi/3$ رادیان
$\cos \alpha > 0$		$5\pi/12$ رادیان
$\cot \alpha > 0$		$5\pi/4$ رادیان

با تبدیل به درجه یا مقایسه با: $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$

علامت نسبت مثلثاتی	α انتهای کمان روبه‌روی	α زاویه
$\cos \alpha < 0$	ربع دوم	$3\pi/4$ رادیان (135°)
$\sin \alpha > 0$	ربع دوم	$4\pi/5$ رادیان (144°)
$\tan \alpha < 0$	ربع چهارم	$5\pi/3$ رادیان (300°)
$\cos \alpha > 0$	ربع اول	$5\pi/12$ رادیان (75°)
$\cot \alpha > 0$	ربع سوم	$5\pi/4$ رادیان (225°)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲) اگر $\sin \alpha = -1/3$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \dots \rightarrow (\cos \alpha < 0) \rightarrow \cos \alpha = - \dots / \dots$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = \dots \rightarrow \tan \alpha = \dots$$

$$\cot \alpha = 1 / \tan \alpha = \dots \rightarrow \cot \alpha = 2\sqrt{2}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 1/9 = 8/9$$

چون α در ربع سوم است، $\cos \alpha < 0$ ؛ پس

$$\cos \alpha = -\sqrt{(8/9)} = -2\sqrt{2}/3$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = (-1/3) / (-2\sqrt{2}/3) = 1/(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}/4$$

$$\cot \alpha = 1 / \tan \alpha = 2\sqrt{2}$$

که با مقدار داده‌شده در کتاب ($\cot \alpha = 2\sqrt{2}$) سازگار است.



۳) اگر $\cot \alpha = -2$ و $\cos \alpha > 0$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.
 حل: چون $\cos \alpha > 0$ و $\cot \alpha < 0$ لذا انتهای کمان α در ربع واقع است. بنابراین:

$$1/\sin^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha = \dots \rightarrow \sin^2 \alpha = \dots \rightarrow \sin \alpha = -1/\sqrt{5}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \dots \rightarrow \cos \alpha = \dots$$

$$\tan \alpha = 1/\cot \alpha \rightarrow \tan \alpha = \dots$$

چون $\cos \alpha > 0$ و $\cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha < 0$ ، پس $\sin \alpha < 0$ ؛ یعنی انتهای کمان α در ربع **چهارم** واقع است.
 بنابراین:

$$1/\sin^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + 4 = 5$$

$$\sin^2 \alpha = 1/5 \Rightarrow \sin \alpha = -1/\sqrt{5} = -\sqrt{5}/5$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 1/5 = 4/5$$

$$\cos \alpha = 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5 \quad (\cos \alpha > 0)$$

$$\tan \alpha = 1/\cot \alpha = -1/2$$

راستی‌آزمایی: $\cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha = (2/\sqrt{5})/(-1/\sqrt{5}) = -2$ که همان $\cot \alpha$ است.

۱) اگر $\cos x = -4/5$ و $\sin x > 0$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویه x را بیابید.

چون $\cos x < 0$ و $\sin x > 0$ ، زاویه x در ربع دوم است.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - 16/25 = 9/25 \Rightarrow \sin x = 3/5 \quad (\sin x > 0)$$

$$\tan x = \sin x / \cos x = (3/5) / (-4/5) = -3/4$$

$$\cot x = 1 / \tan x = -4/3$$

(۲) جدول زیر را کامل کنید.

2π (360°)	$3\pi/2$ (270°)	π (180°)	$\pi/2$ (90°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/6$ (30°)	$^\circ$ ($^\circ$)	α
0	-1			$\sqrt{3}/2$		1/2		$\sin \alpha$
.....		-1			$\sqrt{2}/2$		1	$\cos \alpha$
.....	تعریف نشده		تعریف نشده					$\tan \alpha$
.....				$\sqrt{3}/3$	1			$\cot \alpha$

مقدارهای زاویه‌های 30° ، 45° و 60° را از مثلث‌های قائم‌الزاویه و مقدارهای زاویه‌های محورها (نقطه‌های $(1,0)$ ، $(0,1)$ ، $(-1,0)$ ، $(0,-1)$ روی دایره مثلثاتی) را از تعریف $\sin \alpha = y$ و $\cos \alpha = x$ به دست می‌آوریم. «تعریف نشده» یعنی مخرج صفر است.

2π (360°)	$3\pi/2$ (270°)	π (180°)	$\pi/2$ (90°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/6$ (30°)	$^\circ$ ($^\circ$)	α
0	-1	0	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$\sin \alpha$
1	0	-1	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\cos \alpha$
0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$\tan \alpha$
تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	$\cot \alpha$

۳) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\cot \pi/6 - \tan \pi/3 \times \sin \pi/4 = (\text{الف})$$

$$(\tan^2(\pi/6) + \sin^2(\pi/4)) / (\cot^2(\pi/4) - \cos^2(\pi/3)) + \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ = (\text{ب})$$

$$\text{الف)} \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2; \tan \pi/3 = \sqrt{3}, \cot \pi/6 = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{2}/2 = \sqrt{3} - \sqrt{6}/2 = (2\sqrt{3} - \sqrt{6})/2$$

$$\text{ب)} \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ = 1; \cos^2(\pi/3) = 1/4, \cot^2(\pi/4) = 1, \sin^2(\pi/4) = 1/2, \tan^2(\pi/6) = 1/3$$

$$(1/3 + 1/2) / (1 - 1/4) + 1 = (5/6) / (3/4) + 1 = 10/9 + 1 = 19/9$$

دو زاویه α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha = 30^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه -30° در مثلث $OP'H$ عبارت‌اند از:

$$\sin(-30^\circ) = -y/r = -\sin 30^\circ = -1/2$$

$$\cos(-30^\circ) = \dots\dots = \dots\dots = \sqrt{3}/2$$

$$\tan(-30^\circ) = -y/x = \dots\dots = \dots\dots$$

$$\cot(-30^\circ) = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$$

نقطه $P'(x, -y)$ قرینه $P(x, y)$ نسبت به محور افقی است و: $r = 1$

$$\cos(-30^\circ) = x/r = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\tan(-30^\circ) = -y/x = -\tan 30^\circ = -\sqrt{3}/3$$

$$\cot(-30^\circ) = x/(-y) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

در حالت کلی: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$, $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$.

(۱) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\pi/4$ - رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

نمونه:

$$\sin(-\pi/4) = -\sin \pi/4$$

$$\sin(-\pi/4) = -\sin \pi/4 = -\sqrt{2}/2$$

$$\cos(-\pi/4) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$$

$$\tan(-\pi/4) = -\tan \pi/4 = -1$$

$$\cot(-\pi/4) = -\cot \pi/4 = -1$$

(۲) حاصل هریک از عبارتهای زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\text{الف) } (\cos(-90^\circ) + \sin(-270^\circ)) / (\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)) =$$

$$\text{ب) } \cot(-\pi/6) + \tan(-\pi/3) =$$

$$\text{پ) } \cos(-45^\circ) \times \cos(-60^\circ) + \sin(-45^\circ) \times \sin(-60^\circ) =$$

نمونه:

$$\cot(-\pi/3) \times \cos(-\pi/6) + \tan(-\pi/4) = -\cot \pi/3 \times \cos \pi/6 - \tan \pi/4 = -(\sqrt{3}/3) \times (\sqrt{3}/2) - 1 = -3/2$$

$$\text{الف) با استفاده از } \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \text{ و } \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(-90^\circ) = \cos 90^\circ = 0, \sin(-270^\circ) = -\sin 270^\circ = -(-1) = 1$$

$$\sin(-180^\circ) = -\sin 180^\circ = 0, \cos(-360^\circ) = \cos 360^\circ = 1$$

$$(0 + 1) / (0 - 1) = -1$$

ب)

$$\cot(-\pi/6) + \tan(-\pi/3) = -\cot \pi/6 - \tan \pi/3 = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

پ)

$$\cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ = (\sqrt{2}/2)(1/2) + (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) = \sqrt{2}/4 + \sqrt{6}/4 = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$$

دو زاویه α و β را مکمل گوئیم؛ هرگاه مجموع آنها 180° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویه 30° و 150° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویه $\pi/3$ رادیان و $2\pi/3$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایره مثلثاتی زیر اگر $\alpha = 30^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'' و انتهای کمان زاویه 150° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 150° عبارت‌اند از:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = y = \sin 30^\circ = 1/2$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -x = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan 150^\circ = \dots = \dots$$

$$\cot 150^\circ = \dots = \dots$$

چرا $\pi/3$ و $2\pi/3$ مکمل‌اند؟ زیرا $\pi/3 + 2\pi/3 = \pi$ است.

نقطه $P''(-x, y)$ قرینه $P(x, y)$ نسبت به محور عمودی است، پس:

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\sqrt{3}/3$$

$$\cot 150^\circ = \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

در حالت کلی: $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$, $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$.

۱) مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید: الف) 75° (ب) -25° (پ) $\pi/12$ رادیان (ت) $-\pi/4$ رادیان

مکمل زاویه α برابر $180^\circ - \alpha$ (یا $\pi - \alpha$) است:

$$180^\circ - 75^\circ = 105^\circ \text{ (الف)}$$

$$180^\circ - (-25^\circ) = 205^\circ \text{ (ب)}$$

$$\pi - \pi/12 = 11\pi/12 \text{ (پ)}$$

$$\pi - (-\pi/4) = 5\pi/4 \text{ (ت)}$$

۲) نسبت‌های مثلثاتی زاویه $5\pi/6$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\sin 5\pi/6 = \sin(\pi - \pi/6) = \sin \pi/6 = 1/2$$

$$\cos 5\pi/6 = \dots\dots$$

$$\tan 5\pi/6 = \dots\dots$$

$$\cot 5\pi/6 = \dots\dots$$

$$\cos 5\pi/6 = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos \pi/6 = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan 5\pi/6 = \tan(\pi - \pi/6) = -\tan \pi/6 = -\sqrt{3}/3$$

$$\cot 5\pi/6 = \cot(\pi - \pi/6) = -\cot \pi/6 = -\sqrt{3}$$

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan 2\pi/3 = \tan(\pi - \pi/3) = -\tan \pi/3 = -\sqrt{3}$$

$$\cos 3\pi/4 = \cos(\dots\dots) = \dots\dots$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - \dots\dots) = \dots\dots = \dots\dots$$

$$\cot(-120^\circ) = -\cot(\dots\dots) = -\cot(180^\circ - \dots\dots) = \dots\dots$$

$$\cos(135^\circ) = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$$

$$\cos 3\pi/4 = \cos(\pi - \pi/4) = -\cos \pi/4 = -\sqrt{2}/2$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\cot(-120^\circ) = -\cot 120^\circ = -\cot(180^\circ - 60^\circ) = -(-\cot 60^\circ) = \cot 60^\circ = \sqrt{3}/3$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 210° را به دست آورید. انتهای کمان زاویه 210° در ربع سوم واقع است. در ضمن 30° $210^\circ = 180^\circ +$ ، یعنی اختلاف دو زاویه 210° و 30° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha = 30^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P''' ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 210° عبارت‌اند از:

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -y = -\sin 30^\circ = -1/2$$

$$\cos 210^\circ = \dots = -x = \dots$$

$$\tan 210^\circ = \sin 210^\circ / \cos 210^\circ = \dots$$

$$\cot 210^\circ = \dots = \dots$$

نقطه $P'''(-x, -y)$ قرینه $P(x, y)$ نسبت به مبدأ مختصات است:

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -x = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan 210^\circ = \sin 210^\circ / \cos 210^\circ = (-1/2) / (-\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$$

$$\cot 210^\circ = 1 / \tan 210^\circ = \sqrt{3}$$

در حالت کلی: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ ، $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ ، $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$ ، $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$.

سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $7\pi/6$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.

$$\sin 7\pi/6 = \sin(\pi + \pi/6) = -\sin \pi/6 = -1/2$$

$$\cos 7\pi/6 = \cos(\pi + \pi/6) = -\cos \pi/6 = -\sqrt{3}/2$$

$$\tan 7\pi/6 = \tan(\pi + \pi/6) = \tan \pi/6 = \sqrt{3}/3$$

$$\cot 7\pi/6 = \cot(\pi + \pi/6) = \cot \pi/6 = \sqrt{3}$$

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

$$\tan 225^\circ = \dots\dots$$

$$\cos(-4\pi/3) = \cos \dots\dots = \cos(\pi + \dots\dots) = \dots\dots = \dots\dots$$

$$\sin(-7\pi/6) = \dots\dots$$

$$\cot(5\pi/4) = \dots\dots$$

$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cos(-4\pi/3) = \cos(4\pi/3) = \cos(\pi + \pi/3) = -\cos \pi/3 = -1/2$$

$$\sin(-7\pi/6) = -\sin 7\pi/6 = -\sin(\pi + \pi/6) = -(-\sin \pi/6) = 1/2$$

$$\cot 5\pi/4 = \cot(\pi + \pi/4) = \cot \pi/4 = 1$$

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

زاویه‌ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد. برای چنین زاویه‌ای داریم:
همچنین زاویه و $\pi/2$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین:

$$\sin \dots = \cos \dots = \dots$$

$$\tan \dots = \cot \dots = \dots$$

$$\sin \pi/2 = \cos \dots = \dots$$

$$\tan \pi/2 = \cot \dots = \dots$$

اگر زاویه‌ای با متمم خودش برابر باشد، $\alpha = 90^\circ - \alpha$ و در نتیجه $\alpha = 45^\circ = \pi/4$ است:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

زاویه ۰ (صفر) نیز با $\pi/2$ رادیان متمم است ($0 + \pi/2 = \pi/2$). بنابراین:

$$\sin \pi/2 = \cos 0 = 1$$

$\tan \pi/2$ و $\cot 0$ هر دو تعریف نشده‌اند (مخرج صفر).

در حالت کلی: $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$ ، $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$ ، $\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha$ ، $\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan \alpha$.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $2\pi/3$ رادیان را به دست آورید. چون انتهای کمان زاویه $2\pi/3$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

روش اول - زاویه $2\pi/3$ رادیان و $\pi/3$ رادیان مکمل یکدیگرند؛ یعنی $2\pi/3 = \pi - \pi/3$. بنابراین (جاهای خالی را کامل کنید).

روش دوم - اختلاف دو زاویه $2\pi/3$ رادیان و $\pi/6$ رادیان برابر با $\pi/2$ رادیان است؛ یعنی $2\pi/3 = \pi/2 + \pi/6$. بنابراین با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم (جاهای خالی را کامل کنید).

روش اول (مکمل: $2\pi/3 = \pi - \pi/3$):

$$\sin 2\pi/3 = \sin(\pi - \pi/3) = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 2\pi/3 = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos \pi/3 = -1/2$$

$$\tan 2\pi/3 = \tan(\pi - \pi/3) = -\tan \pi/3 = -\sqrt{3}$$

$$\cot 2\pi/3 = \cot(\pi - \pi/3) = -\cot \pi/3 = -\sqrt{3}/3$$

روش دوم ($2\pi/3 = \pi/2 + \pi/6$):

$$\sin 2\pi/3 = \sin(\pi/2 + \pi/6) = \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 2\pi/3 = \cos(\pi/2 + \pi/6) = -\sin \pi/6 = -1/2$$

$$\tan 2\pi/3 = \tan(\pi/2 + \pi/6) = -\cot \pi/6 = -\sqrt{3}$$

$$\cot 2\pi/3 = \cot(\pi/2 + \pi/6) = -\tan \pi/6 = -\sqrt{3}/3$$

هر دو روش یک نتیجه می‌دهند. در حالت کلی: $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha$ ، $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin \alpha$ ، $\tan(\pi/2 + \alpha) = -\cot \alpha$ ، $\cot(\pi/2 + \alpha) = -\tan \alpha$.

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 135° را به دو روش به دست آورید.

روش اول (مکمل، $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$):

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2, \quad \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

$$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1, \quad \cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1$$

روش دوم ($135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$):

$$\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

$$\tan 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1, \quad \cot 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$



به کمک نقاله سؤال‌های زیر را پاسخ دهید:

- (۱) سینوس کدام دو زاویه برابر است؟ (مثلاً $\sin 10^\circ = \sin 170^\circ$)
- (۲) اختلاف کدام دو زاویه $\pi/2$ رادیان $= 90^\circ$ می‌شود؟ نسبت‌های مثلثاتی یک نمونه را به دست آورید.
- (۳) آیا دو زاویه می‌توان یافت که دارای کسینوس یکسان باشند؟ چرا؟
- (۴) نسبت‌های مثلثاتی زاویه 180° را از روی مکمل آن بیابید.
- (۵) نسبت‌های مثلثاتی زاویه 135° را از روی مکمل آن بیابید.

(۱) سینوس دو زاویه مکمل با هم برابر است $(\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha)$ ؛ مثلاً $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$ ، $\sin 45^\circ = \sin 135^\circ$ ، $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$ ، $\sin 80^\circ = \sin 100^\circ$.

(۲) دو زاویه‌ای که اختلافشان 90° است؛ مثلاً 30° و 120° . با: $120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$

$$\sin 120^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2, \quad \cos 120^\circ = -\sin 30^\circ = -1/2$$

$$\tan 120^\circ = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}, \quad \cot 120^\circ = -\tan 30^\circ = -\sqrt{3}/3$$

(۳) بله. دو زاویه قرینه (α و $-\alpha$) کسینوس برابر دارند، زیرا نقطه‌های انتهای کمانشان نسبت به محور افقی قرینه‌اند و طول (x) یکسان دارند؛ مثلاً $\cos 60^\circ = \cos(-60^\circ) = \cos 300^\circ = 1/2$. همچنین $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

(۴) مکمل 180° برابر 0° است:

$$\sin 180^\circ = \sin 0^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -\cos 0^\circ = -1$$

$$\tan 180^\circ = -\tan 0^\circ = 0$$

و $\cot 180^\circ$ تعریف نشده است (چون $\cot 0^\circ$ تعریف نشده است).

(۵) مکمل 135° برابر 45° است:

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2, \quad \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

$$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1, \quad \cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1$$

برای رسم چنین زاویه‌ای (مانند 405°) ابتدا در جهت مثلثاتی یک دور کامل را طی می‌کنیم؛ سپس ادامهٔ زاویه را که به اندازهٔ 45° است رسم می‌کنیم. در این حالت دو زاویهٔ 405° و 45° را هم‌انتهای می‌نامیم. دو زاویهٔ α و β را هم‌انتهای گوئیم؛ هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود. اگر دو زاویه هم‌انتهای باشند، اختلاف آنها مضرب زوجی از π رادیان یا 180° است. مثلاً زاویه‌های 405° و 45° هم‌انتهای هستند؛ زیرا $405^\circ - 45^\circ = 360^\circ$. در این حالت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 405° و 45° یکسان‌اند. چون انتهای کمان زاویهٔ 45° در ربع اول است، بنابراین:

$$\sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \dots$$

$$\cos 405^\circ = \dots = \dots = \dots$$

$$\tan 405^\circ = \dots = \dots = \dots$$

$$\cot 405^\circ = \dots = \dots = \dots$$

$$\sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$

$$\tan 405^\circ = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

حال همین بررسی را روی زاویه $5\pi/3$ رادیان انجام دهید؛ چون $5\pi/3 = 2\pi - \pi/3$ بنابراین دو زاویه و $5\pi/3$ رادیان هم‌انتهای هستند (شکل سمت راست). چون انتهای کمان زاویه $5\pi/3$ رادیان در ربع چهارم است؛ بنابراین نسبت‌های مثلثاتی آن را بیابید.

$$\sin 5\pi/3 = \sin(2\pi - \pi/3) = \sin(-\pi/3) = \dots$$

$$\cos 5\pi/3 = \dots$$

$$\tan 5\pi/3 = \dots$$

$$\cot 5\pi/3 = \dots$$

$5\pi/3 = 2\pi - \pi/3 = 2\pi + (-\pi/3)$ ؛ پس دو زاویه $5\pi/3$ و $-\pi/3$ رادیان هم‌انتهای هستند (اختلافشان 2π است).

$$\sin 5\pi/3 = \sin(2\pi - \pi/3) = \sin(-\pi/3) = -\sin \pi/3 = -\sqrt{3}/2$$

$$\cos 5\pi/3 = \cos(-\pi/3) = \cos \pi/3 = 1/2$$

$$\tan 5\pi/3 = \tan(-\pi/3) = -\tan \pi/3 = -\sqrt{3}$$

$$\cot 5\pi/3 = \cot(-\pi/3) = -\cot \pi/3 = -\sqrt{3}/3$$

در حالت کلی برای هر عدد صحیح k : $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$, $\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$, $\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$ و $\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$, $\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$, $\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مطابق نمونه هریک از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر را مشخص کنید. (شکل سمت راست)

$$\cos(-7\pi/4) \quad (۶) \quad \sin 11\pi/4 \quad (۵) \quad \cot(-330^\circ) \quad (۴) \quad \tan(-225^\circ) \quad (۳) \quad \sin 420^\circ \quad (۲) \quad \cos 300^\circ \quad (۱)$$

نمونه:

$$\sin 750^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2$$

$$\tan(-315^\circ) = -\tan(315^\circ) = -\tan(360^\circ - 45^\circ) = -(-\tan 45^\circ) = \dots = -1$$

$$\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2 \quad (۱)$$

$$\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 \quad (۲)$$

$$\tan(-225^\circ) = -\tan 225^\circ = -\tan(180^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1 \quad (۳)$$

$$\cot(-330^\circ) = -\cot 330^\circ = -\cot(360^\circ - 30^\circ) = -(-\cot 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3} \quad (۴)$$

$$\sin 11\pi/4 = \sin(2\pi + 3\pi/4) = \sin 3\pi/4 = \sin(\pi - \pi/4) = \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2 \quad (۵)$$

$$\cos(-7\pi/4) = \cos 7\pi/4 = \cos(2\pi - \pi/4) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2 \quad (۶)$$

با استفاده از ماشین حساب مطابق نمونه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\pi/8$ رادیان و $3\pi/8$ رادیان را به طور

تقریبی بیابید. (ماشین حساب باید در حالت رادیان باشد). نمونه: $\sin 3\pi/8 = \cos \pi/8 \approx 0.9239$

چون $\pi/8 + 3\pi/8 = \pi/2$ ، این دو زاویه متمم‌اند. با ماشین حساب (در حالت رادیان):

زاویه	sin	cos	tan	cot
$\pi/8$ رادیان ($22,5^\circ$)	≈ 0.3827	≈ 0.9239	≈ 0.4142	≈ 2.4142
$3\pi/8$ رادیان ($67,5^\circ$)	≈ 0.9239	≈ 0.3827	≈ 2.4142	≈ 0.4142

حاصل هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را با ماشین حساب به طور تقریبی به دست آورید. $\tan$ و $\cos 105^\circ$ و $\tan 170^\circ$ و $\tan 3\pi/4$ و $\cos 5\pi/9$ و $\sin \pi/15$ و 20°

نسبت	مقدار تقریبی
$(12^\circ) \sin \pi/15$	≈ 0.2079
$\cos 105^\circ$	≈ -0.2588
$\tan 20^\circ$	≈ 0.3640
$(100^\circ) \cos 5\pi/9$	≈ -0.1736
$(135^\circ) \tan 3\pi/4$	$= -1$
$\tan 170^\circ$	≈ -0.1763

(برای نسبت‌های با زاویه درجه، ماشین حساب را در حالت درجه و برای نسبت‌های با زاویه رادیان، در حالت رادیان قرار دهید.)

۱) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sin 630^\circ + \tan(-540^\circ) = (\text{پ}) \quad \cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ) = (\text{ب}) \quad \tan 135^\circ + \cot 120^\circ = (\text{الف})$$

(الف)

$$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1, \quad \cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\sqrt{3}/3$$

$$\tan 135^\circ + \cot 120^\circ = -1 - \sqrt{3}/3 = -(3 + \sqrt{3})/3$$

(ب)

$$\cos(-210^\circ) = \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2, \quad \cot 240^\circ = \cot(180^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \sqrt{3}/3$$

$$-\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/3 = (-3\sqrt{3} + 2\sqrt{3})/6 = -\sqrt{3}/6$$

(پ)

$$\sin 630^\circ = \sin(360^\circ + 270^\circ) = \sin 270^\circ = -1, \quad \tan(-540^\circ) = -\tan 540^\circ = -\tan(3 \times 180^\circ) = 0$$

$$\sin 630^\circ + \tan(-540^\circ) = -1 + 0 = -1$$

(۱) (ادامه)

$$\cos(-720^\circ) + \cot(-600^\circ) + \tan 720^\circ - \tan(-600^\circ) = \text{ت)}$$

$$\sin(25\pi/3) - \cos(23\pi/4) = \text{ث)}$$

$$(\sin 3\pi/4 - \cos 5\pi/6) / (\sin(-3\pi/4) + \tan(-4\pi/3)) = \text{ج)}$$

(ت)

$$\cos(-720^\circ) = \cos 720^\circ = 1$$

$$\cot(-600^\circ) = -\cot 600^\circ = -\cot(3 \times 180^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\sqrt{3}/3$$

$$\tan 720^\circ = 0, \tan(-600^\circ) = -\tan 600^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$1 - \sqrt{3}/3 + 0 - (-\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3}/3 + \sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3}/3 = (3 + 2\sqrt{3})/3$$

(ث)

$$25\pi/3 = 8\pi + \pi/3 \Rightarrow \sin 25\pi/3 = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$$

$$23\pi/4 = 6\pi - \pi/4 \Rightarrow \cos 23\pi/4 = \cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$$

$$\sqrt{3}/2 - \sqrt{2}/2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/2$$

(ج) صورت کسر:

$$\sin 3\pi/4 - \cos 5\pi/6 = \sqrt{2}/2 - (-\sqrt{3}/2) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})/2$$

مخرج کسر:

$$\sin(-3\pi/4) + \tan(-4\pi/3) = -\sqrt{2}/2 - \tan(\pi + \pi/3) = -\sqrt{2}/2 - \sqrt{3} = -(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})/2$$

حاصل:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) / (-(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})) = -(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) / ((2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2) = -(4 + \sqrt{6})/10 \approx -0.645$$

(۲) جدول زیر را کامل کنید.

زاویه x	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$								
$\cos x$								
$\tan x$								
$\cot x$								

با کمک زاویه مکمل $(180^\circ - \alpha)$ ، زاویه اختلاف $\pi (180^\circ + \alpha)$ و زاویه هم‌انتهای یا قرینه $(360^\circ - \alpha)$:

x	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$\cos x$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
$\cot x$	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$

(۳) بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 840^\circ = \sin 60^\circ$ (ب) $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$ (پ) $\tan(-1000^\circ) = \tan 80^\circ$ (ت) $\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$

الف) درست.

$$\sin 840^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$$

ب) درست.

$$\cos(-324^\circ) = \cos 324^\circ = \cos(360^\circ - 36^\circ) = \cos(-36^\circ) = \cos 36^\circ$$

پ) درست.

$$\tan(-1000^\circ) = -\tan 1000^\circ = -\tan(5 \times 180^\circ + 100^\circ) = -\tan 100^\circ = -\tan(180^\circ - 80^\circ) = \tan 80^\circ$$

ت) درست.

$$\sin 875^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 155^\circ) = \sin 155^\circ$$

۴) در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید:

الف) $\sin x = \cos(20^\circ + x)$ ب) $\tan(x + \pi/18) = \cot(2\pi/9 + x)$

آیا برای زاویه x تنها یک مقدار می‌توان یافت؟ جواب خود را با جواب‌های دوستان خود مقایسه کنید.

الف) چون $\sin x = \cos(90^\circ - x)$ ، کافی است دو زاویه x و $20^\circ + x$ متکم باشند:

$$x + (20^\circ + x) = 90^\circ \implies 2x = 70^\circ \implies x = 35^\circ$$

بررسی: $\sin 35^\circ = \cos 55^\circ$ درست است.

ب) چون $\tan \theta = \cot(\pi/2 - \theta)$ ، باید دو زاویه متکم باشند:

$$(x + \pi/18) + (2\pi/9 + x) = \pi/2 \implies 2x = \pi/2 - 5\pi/18 = 2\pi/9 \implies x = \pi/9$$

بررسی: $\tan(\pi/9 + \pi/18) = \tan \pi/6$ و $\cot(2\pi/9 + \pi/9) = \cot \pi/3$ و $\tan \pi/6 = \cot \pi/3 = \sqrt{3}/3$.

آیا فقط یک مقدار وجود دارد؟ خیر؛ جواب یکتا نیست. به دلیل تناوب این توابع، با افزودن مضرب‌های مناسب

نیز تساوی برقرار می‌ماند؛ مثلاً در بخش الف) $x = 35^\circ + k \cdot 180^\circ$ (مانند 215° یا -145°) و در بخش ب) $x = \pi/9$

$k \in \mathbb{Z}$ ، $9 + k\pi/2$ جواب‌اند. هر دانش‌آموز ممکن است یکی از این مقادیر را بنویسد و همه درست باشند.



۱) جدول روبه‌رو را کامل کنید. مجموعه زوج‌های مرتب حاصل در جدول مقابل یک تابع را به صورت زیر مشخص می‌کند.

مختصات نقطه	$y = \sin x$	x
$(0, 0)$	0	0
...	...	$\pi/6$
...	...	$\pi/2$
...	...	$5\pi/6$
...	...	π

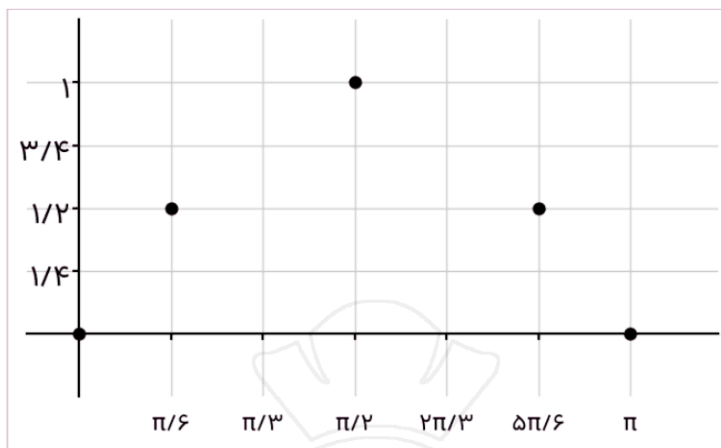
$$f = \{(0, 0), (\pi/6, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots)\}$$

مختصات نقطه	$y = \sin x$	x
$(0, 0)$	0	0
$(\pi/6, 1/2)$	1/2	$\pi/6$
$(\pi/2, 1)$	1	$\pi/2$
$(5\pi/6, 1/2)$	1/2	$5\pi/6$
$(\pi, 0)$	0	π

$$f = \{(0, 0), (\pi/6, 1/2), (\pi/2, 1), (5\pi/6, 1/2), (\pi, 0)\}$$

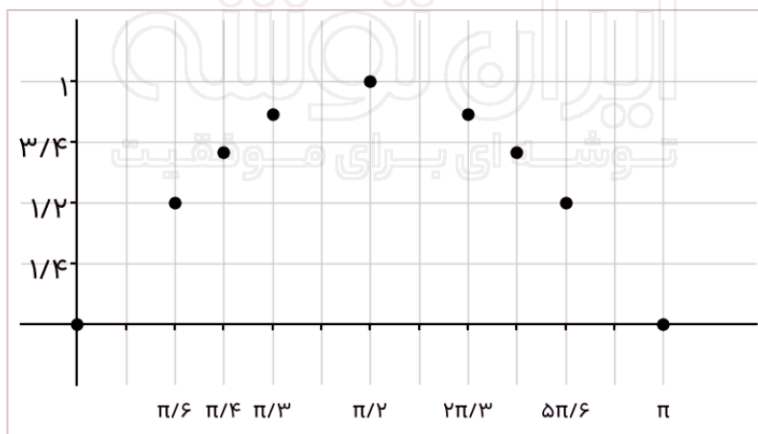
۲) نقاط حاصل در جدول را در شکل زیر مشخص کنید.

پنج نقطه جدول را روی صفحه مختصات (با محور افقی بر حسب π) مشخص می‌کنیم:



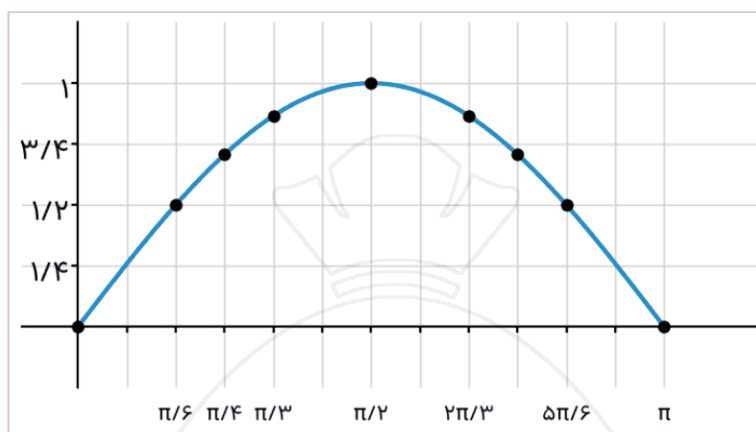
۳) با افزودن نقاط $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$ ، $(\pi/3, \dots)$ ، $(2\pi/3, \sqrt{3}/2)$ و $(3\pi/4, \dots)$ به جدول بالا، شکل زیر به دست می‌آید. (با فرض $\sqrt{2} \approx 1/4$ و $\sqrt{3} \approx 1/7$)

$\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$ و $\sin 3\pi/4 = \sin(\pi - \pi/4) = \sqrt{2}/2 \approx 0.7$ پس نقطه‌های خالی $(\pi/3, \sqrt{3}/2)$ و $(3\pi/4, \dots)$ (با تقریب‌های داده شده: $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$ و $\sqrt{3}/2 \approx 0.85$) هستند.



۴) نقاط حاصل در شکل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به دست آید. با افزودن تعداد نقاط جدول فوق در بازه $[0, \pi]$ این شکل به طور دقیق‌تری به دست می‌آید. شکل حاصل نمودار تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ را در این بازه مشخص می‌کند.

نقطه‌ها را با یک منحنی هموار از ۰ تا π به هم وصل می‌کنیم؛ منحنی از $(0,0)$ بالا می‌رود، در $x = \pi/2$ به بیشترین مقدار ۱ می‌رسد و دوباره در $(\pi, 0)$ به محور x برمی‌گردد:

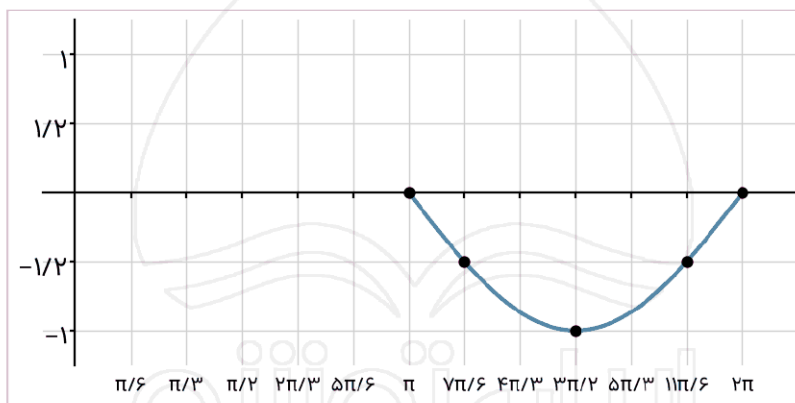


ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵) مراحل صفحه قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ انجام دهید. برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس نقاط به دست آمده در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل زیر مشخص و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

مختصات نقطه	$y = \sin x$	x
$(\pi, 0)$	0	π
$(7\pi/6, -1/2)$	$-1/2$	$7\pi/6$
$(3\pi/2, -1)$	-1	$3\pi/2$
$(11\pi/6, -1/2)$	$-1/2$	$11\pi/6$
$(2\pi, 0)$	0	2π

برای نمونه $\sin 7\pi/6 = -\sin \pi/6 = -1/2$ و $\sin 3\pi/2 = -1$. نمودار در این بازه زیر محور x قرار می‌گیرد:



توشه ای برای موفقیت

۶) با توجه به شکل‌های فوق، نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. حال با توجه به این شکل جدول زیر را درباره مقدار این تابع در هر بازه تکمیل کنید.

بازه	$[0, \pi/2]$	$[\pi/2, \pi]$	$[\pi, 3\pi/2]$	$[3\pi/2, 2\pi]$
تغییر مقدار	مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.			
علامت	مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.			

بازه	$[0, \pi/2]$	$[\pi/2, \pi]$	$[\pi, 3\pi/2]$	$[3\pi/2, 2\pi]$
تغییر مقدار	از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.	از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	از ۰ به -۱ کاهش می‌یابد.	از -۱ به ۰ افزایش می‌یابد.
علامت	در ربع اول مثبت است.	در ربع دوم مثبت است.	در ربع سوم منفی است.	در ربع چهارم منفی است.

(۷) با توجه به رابطه $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، که در درس قبل آشنا شدید می‌توان گفت: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن 2π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند. بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$ یکسان است. همچنین داریم: $\sin(x - 2\pi) = \sin x$ یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن 2π رادیان از کمان آن تغییر نمی‌کند. در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[0, 2\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ یکسان است. در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند، نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[2k\pi, (2k+2)\pi]$ و $[0, 2\pi]$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در بازه $[0, 2\pi]$ رسم شده در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ ، $[-4\pi, -2\pi]$ ، $[-6\pi, -4\pi]$ ، $[4\pi, 6\pi]$ ، $[6\pi, 8\pi]$ ، $[8\pi, 10\pi]$ ، $[10\pi, 12\pi]$ ، $[12\pi, 14\pi]$ ، $[14\pi, 16\pi]$ ، $[16\pi, 18\pi]$ ، $[18\pi, 20\pi]$ ، $[20\pi, 22\pi]$ ، $[22\pi, 24\pi]$ ، $[24\pi, 26\pi]$ ، $[26\pi, 28\pi]$ ، $[28\pi, 30\pi]$ ، $[30\pi, 32\pi]$ ، $[32\pi, 34\pi]$ ، $[34\pi, 36\pi]$ ، $[36\pi, 38\pi]$ ، $[38\pi, 40\pi]$ ، $[40\pi, 42\pi]$ ، $[42\pi, 44\pi]$ ، $[44\pi, 46\pi]$ ، $[46\pi, 48\pi]$ ، $[48\pi, 50\pi]$ ، $[50\pi, 52\pi]$ ، $[52\pi, 54\pi]$ ، $[54\pi, 56\pi]$ ، $[56\pi, 58\pi]$ ، $[58\pi, 60\pi]$ ، $[60\pi, 62\pi]$ ، $[62\pi, 64\pi]$ ، $[64\pi, 66\pi]$ ، $[66\pi, 68\pi]$ ، $[68\pi, 70\pi]$ ، $[70\pi, 72\pi]$ ، $[72\pi, 74\pi]$ ، $[74\pi, 76\pi]$ ، $[76\pi, 78\pi]$ ، $[78\pi, 80\pi]$ ، $[80\pi, 82\pi]$ ، $[82\pi, 84\pi]$ ، $[84\pi, 86\pi]$ ، $[86\pi, 88\pi]$ ، $[88\pi, 90\pi]$ ، $[90\pi, 92\pi]$ ، $[92\pi, 94\pi]$ ، $[94\pi, 96\pi]$ ، $[96\pi, 98\pi]$ ، $[98\pi, 100\pi]$ ، $[100\pi, 102\pi]$ ، $[102\pi, 104\pi]$ ، $[104\pi, 106\pi]$ ، $[106\pi, 108\pi]$ ، $[108\pi, 110\pi]$ ، $[110\pi, 112\pi]$ ، $[112\pi, 114\pi]$ ، $[114\pi, 116\pi]$ ، $[116\pi, 118\pi]$ ، $[118\pi, 120\pi]$ ، $[120\pi, 122\pi]$ ، $[122\pi, 124\pi]$ ، $[124\pi, 126\pi]$ ، $[126\pi, 128\pi]$ ، $[128\pi, 130\pi]$ ، $[130\pi, 132\pi]$ ، $[132\pi, 134\pi]$ ، $[134\pi, 136\pi]$ ، $[136\pi, 138\pi]$ ، $[138\pi, 140\pi]$ ، $[140\pi, 142\pi]$ ، $[142\pi, 144\pi]$ ، $[144\pi, 146\pi]$ ، $[146\pi, 148\pi]$ ، $[148\pi, 150\pi]$ ، $[150\pi, 152\pi]$ ، $[152\pi, 154\pi]$ ، $[154\pi, 156\pi]$ ، $[156\pi, 158\pi]$ ، $[158\pi, 160\pi]$ ، $[160\pi, 162\pi]$ ، $[162\pi, 164\pi]$ ، $[164\pi, 166\pi]$ ، $[166\pi, 168\pi]$ ، $[168\pi, 170\pi]$ ، $[170\pi, 172\pi]$ ، $[172\pi, 174\pi]$ ، $[174\pi, 176\pi]$ ، $[176\pi, 178\pi]$ ، $[178\pi, 180\pi]$ ، $[180\pi, 182\pi]$ ، $[182\pi, 184\pi]$ ، $[184\pi, 186\pi]$ ، $[186\pi, 188\pi]$ ، $[188\pi, 190\pi]$ ، $[190\pi, 192\pi]$ ، $[192\pi, 194\pi]$ ، $[194\pi, 196\pi]$ ، $[196\pi, 198\pi]$ ، $[198\pi, 200\pi]$ ، $[200\pi, 202\pi]$ ، $[202\pi, 204\pi]$ ، $[204\pi, 206\pi]$ ، $[206\pi, 208\pi]$ ، $[208\pi, 210\pi]$ ، $[210\pi, 212\pi]$ ، $[212\pi, 214\pi]$ ، $[214\pi, 216\pi]$ ، $[216\pi, 218\pi]$ ، $[218\pi, 220\pi]$ ، $[220\pi, 222\pi]$ ، $[222\pi, 224\pi]$ ، $[224\pi, 226\pi]$ ، $[226\pi, 228\pi]$ ، $[228\pi, 230\pi]$ ، $[230\pi, 232\pi]$ ، $[232\pi, 234\pi]$ ، $[234\pi, 236\pi]$ ، $[236\pi, 238\pi]$ ، $[238\pi, 240\pi]$ ، $[240\pi, 242\pi]$ ، $[242\pi, 244\pi]$ ، $[244\pi, 246\pi]$ ، $[246\pi, 248\pi]$ ، $[248\pi, 250\pi]$ ، $[250\pi, 252\pi]$ ، $[252\pi, 254\pi]$ ، $[254\pi, 256\pi]$ ، $[256\pi, 258\pi]$ ، $[258\pi, 260\pi]$ ، $[260\pi, 262\pi]$ ، $[262\pi, 264\pi]$ ، $[264\pi, 266\pi]$ ، $[266\pi, 268\pi]$ ، $[268\pi, 270\pi]$ ، $[270\pi, 272\pi]$ ، $[272\pi, 274\pi]$ ، $[274\pi, 276\pi]$ ، $[276\pi, 278\pi]$ ، $[278\pi, 280\pi]$ ، $[280\pi, 282\pi]$ ، $[282\pi, 284\pi]$ ، $[284\pi, 286\pi]$ ، $[286\pi, 288\pi]$ ، $[288\pi, 290\pi]$ ، $[290\pi, 292\pi]$ ، $[292\pi, 294\pi]$ ، $[294\pi, 296\pi]$ ، $[296\pi, 298\pi]$ ، $[298\pi, 300\pi]$ ، $[300\pi, 302\pi]$ ، $[302\pi, 304\pi]$ ، $[304\pi, 306\pi]$ ، $[306\pi, 308\pi]$ ، $[308\pi, 310\pi]$ ، $[310\pi, 312\pi]$ ، $[312\pi, 314\pi]$ ، $[314\pi, 316\pi]$ ، $[316\pi, 318\pi]$ ، $[318\pi, 320\pi]$ ، $[320\pi, 322\pi]$ ، $[322\pi, 324\pi]$ ، $[324\pi, 326\pi]$ ، $[326\pi, 328\pi]$ ، $[328\pi, 330\pi]$ ، $[330\pi, 332\pi]$ ، $[332\pi, 334\pi]$ ، $[334\pi, 336\pi]$ ، $[336\pi, 338\pi]$ ، $[338\pi, 340\pi]$ ، $[340\pi, 342\pi]$ ، $[342\pi, 344\pi]$ ، $[344\pi, 346\pi]$ ، $[346\pi, 348\pi]$ ، $[348\pi, 350\pi]$ ، $[350\pi, 352\pi]$ ، $[352\pi, 354\pi]$ ، $[354\pi, 356\pi]$ ، $[356\pi, 358\pi]$ ، $[358\pi, 360\pi]$ ، $[360\pi, 362\pi]$ ، $[362\pi, 364\pi]$ ، $[364\pi, 366\pi]$ ، $[366\pi, 368\pi]$ ، $[368\pi, 370\pi]$ ، $[370\pi, 372\pi]$ ، $[372\pi, 374\pi]$ ، $[374\pi, 376\pi]$ ، $[376\pi, 378\pi]$ ، $[378\pi, 380\pi]$ ، $[380\pi, 382\pi]$ ، $[382\pi, 384\pi]$ ، $[384\pi, 386\pi]$ ، $[386\pi, 388\pi]$ ، $[388\pi, 390\pi]$ ، $[390\pi, 392\pi]$ ، $[392\pi, 394\pi]$ ، $[394\pi, 396\pi]$ ، $[396\pi, 398\pi]$ ، $[398\pi, 400\pi]$ ، $[400\pi, 402\pi]$ ، $[402\pi, 404\pi]$ ، $[404\pi, 406\pi]$ ، $[406\pi, 408\pi]$ ، $[408\pi, 410\pi]$ ، $[410\pi, 412\pi]$ ، $[412\pi, 414\pi]$ ، $[414\pi, 416\pi]$ ، $[416\pi, 418\pi]$ ، $[418\pi, 420\pi]$ ، $[420\pi, 422\pi]$ ، $[422\pi, 424\pi]$ ، $[424\pi, 426\pi]$ ، $[426\pi, 428\pi]$ ، $[428\pi, 430\pi]$ ، $[430\pi, 432\pi]$ ، $[432\pi, 434\pi]$ ، $[434\pi, 436\pi]$ ، $[436\pi, 438\pi]$ ، $[438\pi, 440\pi]$ ، $[440\pi, 442\pi]$ ، $[442\pi, 444\pi]$ ، $[444\pi, 446\pi]$ ، $[446\pi, 448\pi]$ ، $[448\pi, 450\pi]$ ، $[450\pi, 452\pi]$ ، $[452\pi, 454\pi]$ ، $[454\pi, 456\pi]$ ، $[456\pi, 458\pi]$ ، $[458\pi, 460\pi]$ ، $[460\pi, 462\pi]$ ، $[462\pi, 464\pi]$ ، $[464\pi, 466\pi]$ ، $[466\pi, 468\pi]$ ، $[468\pi, 470\pi]$ ، $[470\pi, 472\pi]$ ، $[472\pi, 474\pi]$ ، $[474\pi, 476\pi]$ ، $[476\pi, 478\pi]$ ، $[478\pi, 480\pi]$ ، $[480\pi, 482\pi]$ ، $[482\pi, 484\pi]$ ، $[484\pi, 486\pi]$ ، $[486\pi, 488\pi]$ ، $[488\pi, 490\pi]$ ، $[490\pi, 492\pi]$ ، $[492\pi, 494\pi]$ ، $[494\pi, 496\pi]$ ، $[496\pi, 498\pi]$ ، $[498\pi, 500\pi]$ ، $[500\pi, 502\pi]$ ، $[502\pi, 504\pi]$ ، $[504\pi, 506\pi]$ ، $[506\pi, 508\pi]$ ، $[508\pi, 510\pi]$ ، $[510\pi, 512\pi]$ ، $[512\pi, 514\pi]$ ، $[514\pi, 516\pi]$ ، $[516\pi, 518\pi]$ ، $[518\pi, 520\pi]$ ، $[520\pi, 522\pi]$ ، $[522\pi, 524\pi]$ ، $[524\pi, 526\pi]$ ، $[526\pi, 528\pi]$ ، $[528\pi, 530\pi]$ ، $[530\pi, 532\pi]$ ، $[532\pi, 534\pi]$ ، $[534\pi, 536\pi]$ ، $[536\pi, 538\pi]$ ، $[538\pi, 540\pi]$ ، $[540\pi, 542\pi]$ ، $[542\pi, 544\pi]$ ، $[544\pi, 546\pi]$ ، $[546\pi, 548\pi]$ ، $[548\pi, 550\pi]$ ، $[550\pi, 552\pi]$ ، $[552\pi, 554\pi]$ ، $[554\pi, 556\pi]$ ، $[556\pi, 558\pi]$ ، $[558\pi, 560\pi]$ ، $[560\pi, 562\pi]$ ، $[562\pi, 564\pi]$ ، $[564\pi, 566\pi]$ ، $[566\pi, 568\pi]$ ، $[568\pi, 570\pi]$ ، $[570\pi, 572\pi]$ ، $[572\pi, 574\pi]$ ، $[574\pi, 576\pi]$ ، $[576\pi, 578\pi]$ ، $[578\pi, 580\pi]$ ، $[580\pi, 582\pi]$ ، $[582\pi, 584\pi]$ ، $[584\pi, 586\pi]$ ، $[586\pi, 588\pi]$ ، $[588\pi, 590\pi]$ ، $[590\pi, 592\pi]$ ، $[592\pi, 594\pi]$ ، $[594\pi, 596\pi]$ ، $[596\pi, 598\pi]$ ، $[598\pi, 600\pi]$ ، $[600\pi, 602\pi]$ ، $[602\pi, 604\pi]$ ، $[604\pi, 606\pi]$ ، $[606\pi, 608\pi]$ ، $[608\pi, 610\pi]$ ، $[610\pi, 612\pi]$ ، $[612\pi, 614\pi]$ ، $[614\pi, 616\pi]$ ، $[616\pi, 618\pi]$ ، $[618\pi, 620\pi]$ ، $[620\pi, 622\pi]$ ، $[622\pi, 624\pi]$ ، $[624\pi, 626\pi]$ ، $[626\pi, 628\pi]$ ، $[628\pi, 630\pi]$ ، $[630\pi, 632\pi]$ ، $[632\pi, 634\pi]$ ، $[634\pi, 636\pi]$ ، $[636\pi, 638\pi]$ ، $[638\pi, 640\pi]$ ، $[640\pi, 642\pi]$ ، $[642\pi, 644\pi]$ ، $[644\pi, 646\pi]$ ، $[646\pi, 648\pi]$ ، $[648\pi, 650\pi]$ ، $[650\pi, 652\pi]$ ، $[652\pi, 654\pi]$ ، $[654\pi, 656\pi]$ ، $[656\pi, 658\pi]$ ، $[658\pi, 660\pi]$ ، $[660\pi, 662\pi]$ ، $[662\pi, 664\pi]$ ، $[664\pi, 666\pi]$ ، $[666\pi, 668\pi]$ ، $[668\pi, 670\pi]$ ، $[670\pi, 672\pi]$ ، $[672\pi, 674\pi]$ ، $[674\pi, 676\pi]$ ، $[676\pi, 678\pi]$ ، $[678\pi, 680\pi]$ ، $[680\pi, 682\pi]$ ، $[682\pi, 684\pi]$ ، $[684\pi, 686\pi]$ ، $[686\pi, 688\pi]$ ، $[688\pi, 690\pi]$ ، $[690\pi, 692\pi]$ ، $[692\pi, 694\pi]$ ، $[694\pi, 696\pi]$ ، $[696\pi, 698\pi]$ ، $[698\pi, 700\pi]$ ، $[700\pi, 702\pi]$ ، $[702\pi, 704\pi]$ ، $[704\pi, 706\pi]$ ، $[706\pi, 708\pi]$ ، $[708\pi, 710\pi]$ ، $[710\pi, 712\pi]$ ، $[712\pi, 714\pi]$ ، $[714\pi, 716\pi]$ ، $[716\pi, 718\pi]$ ، $[718\pi, 720\pi]$ ، $[720\pi, 722\pi]$ ، $[722\pi, 724\pi]$ ، $[724\pi, 726\pi]$ ، $[726\pi, 728\pi]$ ، $[728\pi, 730\pi]$ ، $[730\pi, 732\pi]$ ، $[732\pi, 734\pi]$ ، $[734\pi, 736\pi]$ ، $[736\pi, 738\pi]$ ، $[738\pi, 740\pi]$ ، $[740\pi, 742\pi]$ ، $[742\pi, 744\pi]$ ، $[744\pi, 746\pi]$ ، $[746\pi, 748\pi]$ ، $[748\pi, 750\pi]$ ، $[750\pi, 752\pi]$ ، $[752\pi, 754\pi]$ ، $[754\pi, 756\pi]$ ، $[756\pi, 758\pi]$ ، $[758\pi, 760\pi]$ ، $[760\pi, 762\pi]$ ، $[762\pi, 764\pi]$ ، $[764\pi, 766\pi]$ ، $[766\pi, 768\pi]$ ، $[768\pi, 770\pi]$ ، $[770\pi, 772\pi]$ ، $[772\pi, 774\pi]$ ، $[774\pi, 776\pi]$ ، $[776\pi, 778\pi]$ ، $[778\pi, 780\pi]$ ، $[780\pi, 782\pi]$ ، $[782\pi, 784\pi]$ ، $[784\pi, 786\pi]$ ، $[786\pi, 788\pi]$ ، $[788\pi, 790\pi]$ ، $[790\pi, 792\pi]$ ، $[792\pi, 794\pi]$ ، $[794\pi, 796\pi]$ ، $[796\pi, 798\pi]$ ، $[798\pi, 800\pi]$ ، $[800\pi, 802\pi]$ ، $[802\pi, 804\pi]$ ، $[804\pi, 806\pi]$ ، $[806\pi, 808\pi]$ ، $[808\pi, 810\pi]$ ، $[810\pi, 812\pi]$ ، $[812\pi, 814\pi]$ ، $[814\pi, 816\pi]$ ، $[816\pi, 818\pi]$ ، $[818\pi, 820\pi]$ ، $[820\pi, 822\pi]$ ، $[822\pi, 824\pi]$ ، $[824\pi, 826\pi]$ ، $[826\pi, 828\pi]$ ، $[828\pi, 830\pi]$ ، $[830\pi, 832\pi]$ ، $[832\pi, 834\pi]$ ، $[834\pi, 836\pi]$ ، $[836\pi, 838\pi]$ ، $[838\pi, 840\pi]$ ، $[840\pi, 842\pi]$ ، $[842\pi, 844\pi]$ ، $[844\pi, 846\pi]$ ، $[846\pi, 848\pi]$ ، $[848\pi, 850\pi]$ ، $[850\pi, 852\pi]$ ، $[852\pi, 854\pi]$ ، $[854\pi, 856\pi]$ ، $[856\pi, 858\pi]$ ، $[858\pi, 860\pi]$ ، $[860\pi, 862\pi]$ ، $[862\pi, 864\pi]$ ، $[864\pi, 866\pi]$ ، $[866\pi, 868\pi]$ ، $[868\pi, 870\pi]$ ، $[870\pi, 872\pi]$ ، $[872\pi, 874\pi]$ ، $[874\pi, 876\pi]$ ، $[876\pi, 878\pi]$ ، $[878\pi, 880\pi]$ ، $[880\pi, 882\pi]$ ، $[882\pi, 884\pi]$ ، $[884\pi, 886\pi]$ ، $[886\pi, 888\pi]$ ، $[888\pi, 890\pi]$ ، $[890\pi, 892\pi]$ ، $[892\pi, 894\pi]$ ، $[894\pi, 896\pi]$ ، $[896\pi, 898\pi]$ ، $[898\pi, 900\pi]$ ، $[900\pi, 902\pi]$ ، $[902\pi, 904\pi]$ ، $[904\pi, 906\pi]$ ، $[906\pi, 908\pi]$ ، $[908\pi, 910\pi]$ ، $[910\pi, 912\pi]$ ، $[912\pi, 914\pi]$ ، $[914\pi, 916\pi]$ ، $[916\pi, 918\pi]$ ، $[918\pi, 920\pi]$ ، $[920\pi, 922\pi]$ ، $[922\pi, 924\pi]$ ، $[924\pi, 926\pi]$ ، $[926\pi, 928\pi]$ ، $[928\pi, 930\pi]$ ، $[930\pi, 932\pi]$ ، $[932\pi, 934\pi]$ ، $[934\pi, 936\pi]$ ، $[936\pi, 938\pi]$ ، $[938\pi, 940\pi]$ ، $[940\pi, 942\pi]$ ، $[942\pi, 944\pi]$ ، $[944\pi, 946\pi]$ ، $[946\pi, 948\pi]$ ، $[948\pi, 950\pi]$ ، $[950\pi, 952\pi]$ ، $[952\pi, 954\pi]$ ، $[954\pi, 956\pi]$ ، $[956\pi, 958\pi]$ ، $[958\pi, 960\pi]$ ، $[960\pi, 962\pi]$ ، $[962\pi, 964\pi]$ ، $[964\pi, 966\pi]$ ، $[966\pi, 968\pi]$ ، $[968\pi, 970\pi]$ ، $[970\pi, 972\pi]$ ، $[972\pi, 974\pi]$ ، $[974\pi, 976\pi]$ ، $[976\pi, 978\pi]$ ، $[978\pi, 980\pi]$ ، $[980\pi, 982\pi]$ ، $[982\pi, 984\pi]$ ، $[984\pi, 986\pi]$ ، $[986\pi, 988\pi]$ ، $[988\pi, 990\pi]$ ، $[990\pi, 992\pi]$ ، $[992\pi, 994\pi]$ ، $[994\pi, 996\pi]$ ، $[996\pi, 998\pi]$ ، $[998\pi, 1000\pi]$ ، $[1000\pi, 1002\pi]$ ، $[1002\pi, 1004\pi]$ ، $[1004\pi, 1006\pi]$ ، $[1006\pi, 1008\pi]$ ، $[1008\pi, 1010\pi]$ ، $[1010\pi, 1012\pi]$ ، $[1012\pi, 1014\pi]$ ، $[1014\pi, 1016\pi]$ ، $[1016\pi, 1018\pi]$ ، $[1018\pi, 1020\pi]$ ، $[1020\pi, 1022\pi]$ ، $[1022\pi, 1024\pi]$ ، $[1024\pi, 1026\pi]$ ، $[1026\pi, 1028\pi]$ ، $[1028\pi, 1030\pi]$ ، $[1030\pi, 1032\pi]$ ، $[1032\pi, 1034\pi]$ ، $[1034\pi, 1036\pi]$ ، $[1036\pi, 1038\pi]$ ، $[1038\pi, 1040\pi]$ ، $[1040\pi, 1042\pi]$ ، $[1042\pi, 1044\pi]$ ، $[1044\pi, 1046\pi]$ ، $[1046\pi, 1048\pi]$ ، $[1048\pi, 1050\pi]$ ، $[1050\pi, 1052\pi]$ ، $[1052\pi, 1054\pi]$ ، $[1054\pi, 1056\pi]$ ، $[1056\pi, 1058\pi]$ ، $[1058\pi, 1060\pi]$ ، $[1060\pi, 1062\pi]$ ، $[1062\pi, 1064\pi]$ ، $[1064\pi, 1066\pi]$ ، $[1066\pi, 1068\pi]$ ، $[1068\pi, 1070\pi]$ ، $[1070\pi, 1072\pi]$ ، $[1072\pi, 1074\pi]$ ، $[1074\pi, 1076\pi]$ ، $[1076\pi, 1078\pi]$ ، $[1078\pi, 1080\pi]$ ، $[1080\pi, 1082\pi]$ ، $[1082\pi, 1084\pi]$ ، $[1084\pi, 1086\pi]$ ، $[1086\pi, 1088\pi]$ ، $[1088\pi, 1090\pi]$ ، $[1090\pi, 1092\pi]$ ، $[1092\pi, 1094\pi]$ ، $[1094\pi, 1096\pi]$ ، $[1096\pi, 1098\pi]$ ، $[1098\pi, 1100\pi]$ ، $[1100\pi, 1102\pi]$ ، $[1102\pi, 1104\pi]$ ، $[1104\pi, 1106\pi]$ ، $[1106\pi, 1108\pi]$ ، $[1108\pi, 1110\pi]$ ، $[1110\pi, 1112\pi]$ ، $[1112\pi, 1114\pi]$ ، $[1114\pi, 1116\pi]$ ، $[1116\pi, 1118\pi]$ ، $[1118\pi, 1120\pi]$ ، $[1120\pi, 1122\pi]$ ، $[1122\pi, 1124\pi]$ ، $[1124\pi, 1126\pi]$ ، $[1126\pi, 1128\pi]$ ، $[1128\pi, 1130\pi]$ ، $[1130\pi, 1132\pi]$ ، $[1132\pi, 1134\pi]$ ، $[1134\pi, 1136\pi]$ ، $[1136\pi, 1138\pi]$ ، $[1138\pi, 1140\pi]$ ، $[1140\pi, 1142\pi]$ ، $[1142\pi, 1144\pi]$ ، $[1144\pi, 1146\pi]$ ، $[1146\pi, 1148\pi]$ ، $[1148\pi, 1150\pi]$ ، $[1150\pi, 1152\pi]$ ، $[1152\pi, 1154\pi]$ ، $[1154\pi, 1156\pi]$ ، $[1156\pi, 1158\pi]$ ، $[1158\pi, 1160\pi]$ ، $[1160\pi, 1162\pi]$ ، $[1162\pi, 1164\pi]$ ، $[1164\pi, 1166\pi]$ ، $[1166\pi, 1168\pi]$ ، $[1168\pi, 1170\pi]$ ، $[1170\pi, 1172\pi]$ ، $[1172\pi, 1174\pi]$ ، $[1174\pi, 1176\pi]$ ، $[1176\pi, 1178\pi]$ ، $[1178\pi, 1180\pi]$ ، $[1180\pi, 1182\pi]$ ، $[1182\pi, 1184\pi]$ ، $[1184\pi, 1186\pi]$ ، $[1186\pi, 1188\pi]$ ، $[1188\pi, 1190\pi]$ ، $[1190\pi, 1192\pi]$ ، $[1192\pi, 1194\pi]$ ، $[1194\pi, 1196\pi]$ ، $[1196\pi, 1198\pi]$ ، $[1198\pi, 1200\pi]$ ، $[1200\pi, 1202\pi]$ ، $[1202\pi, 1204\pi]$ ، $[1204\pi, 1206\pi]$ ، $[1206\pi, 1208\pi]$ ، $[1208\pi, 1210\pi]$ ، $[1210\pi, 1212\pi]$ ، $[1212\pi, 1214\pi]$ ، $[1214\pi, 1216\pi]$ ، $[1216\pi, 1218\pi]$ ، $[1218\pi, 1220\pi]$ ، $[1220\pi, 1222\pi]$ ، $[1222\pi, 1224\pi]$ ، $[1224\pi, 1226\pi]$ ، $[1226\pi, 1228\pi]$ ، $[1228\pi, 1230\pi]$ ، $[1230\pi, 1232\pi]$ ، $[1232\pi, 1234\pi]$ ، $[1234$

۸) با توجه به شکل بالا جاهای خالی را درباره ویژگی‌های تابع با ضابطه $y = \sin x$ کامل کنید.

الف) دامنه تابع سینوس و برد آن است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ برابر با است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با است که در نقاطی به طول‌های $x = \pi/2$, $x = \dots$, $x = \dots$, $x = \dots$ و

در حالت کلی $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با است که در نقاطی به طول‌های $x = 3\pi/2$, $x = \dots$, $x = \dots$, $x = \dots$ و

در حالت کلی $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

الف) دامنه تابع سینوس مجموعه همه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و برد آن بازه بسته $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x = k\pi$ برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ۱ است که در نقاطی به طول‌های $x = \pi/2$, $x = 5\pi/2$, $x = -3\pi/2$, $x = \dots$ و

در حالت کلی $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با -۱ است که در نقاطی به طول‌های $x = 3\pi/2$, $x = 7\pi/2$, $x = -\pi/2$, $x = \dots$ و

در حالت کلی $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید.

هریک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱) $y = 2 \sin x$ (۲) $y = \sin(x - \pi/2)$ (۳) $y = \sin x + 1$ (۴) $y = -\sin x + 1$

۱) نمودار (الف): دامنه نوسان از -۲ تا ۲ است و نمودار از مبدأ مختصات می‌گذرد و ابتدا صعودی است.

۲) نمودار (پ): $\sin(x - \pi/2) = -\cos x$; در $x = 0$ مقدار -۱ (کمینه) را دارد و بین -۱ و ۱ نوسان می‌کند.

۳) نمودار (ب): نمودار $\sin x$ یک واحد بالا رفته است؛ بین ۰ و ۲ نوسان می‌کند و در $x = 0$ مقدار ۱ را دارد و صعودی است.

۴) نمودار (ت): نمودار $-\sin x$ یک واحد بالا رفته است؛ بین ۰ و ۲ نوسان می‌کند و در $x = 0$ مقدار ۱ را دارد و نزولی است.

۱) جدول زیر را کامل کنید.

به این ترتیب مجموعه زوج‌های مرتب زیر به دست می‌آید. $f = \{(0, 1), (\dots, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots), (\dots, \dots)\}$
 آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

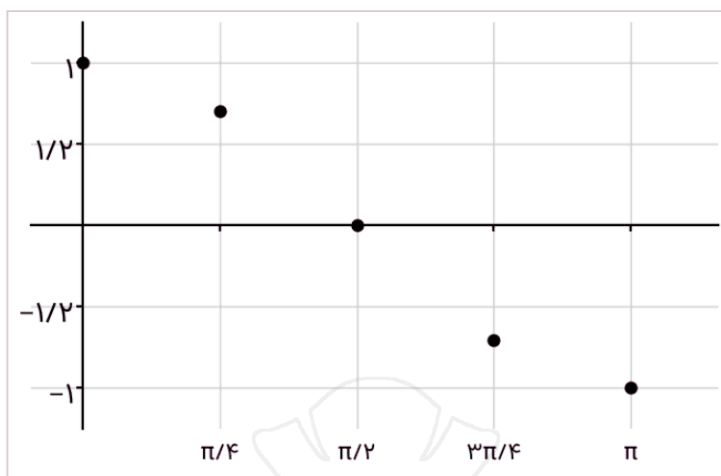
مختصات نقطه	$y = \cos x$	x
$(0, 1)$	1	0
$(\pi/4, 0.7)$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.7$	$\pi/4$
.....		$\pi/2$
.....		$3\pi/4$
.....		π

مختصات نقطه	$y = \cos x$	x
$(0, 1)$	1	0
$(\pi/4, 0.7)$	$\sqrt{2}/2 \approx 0.7$	$\pi/4$
$(\pi/2, 0)$	0	$\pi/2$
$(3\pi/4, -0.7)$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0.7$	$3\pi/4$
$(\pi, -1)$	-1	π

$$f = \{(0, 1), (\pi/4, 0.7), (\pi/2, 0), (3\pi/4, -0.7), (\pi, -1)\}$$

آیا تابع است؟ بله؛ زیرا هیچ دو زوج مرتبی در این مجموعه مؤلفه اول یکسان ندارند (به هر x دقیقاً یک y نسبت داده شده است).

۲) نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.

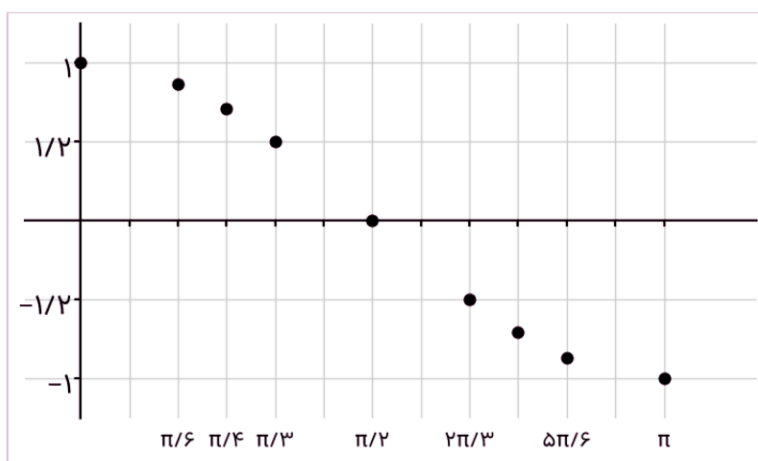


۳) نقاط به طول‌های $x = \pi/6, \pi/3, 2\pi/3, 5\pi/6$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به دست آید.
($\sqrt{3} \approx 1.7$)

$5\pi/6$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/6$	x
...	$-1/2$	...	...	$y = \cos x$

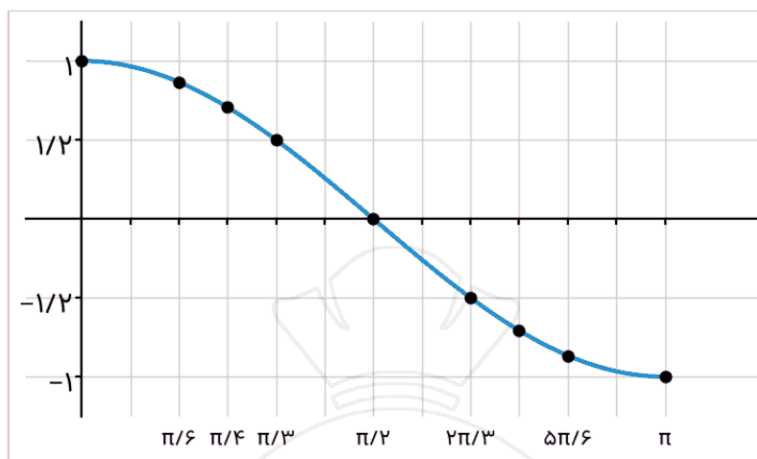
$5\pi/6$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/6$	x
$-\sqrt{3}/2 \approx -0.85$	$-1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2 \approx 0.85$	$y = \cos x$

(با تقریب $\sqrt{3} \approx 1.7$ مقدار $\sqrt{3}/2$ برابر ۰٫۸۵ می‌شود.)



۴) نقاط شکل صفحه قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به دست آید. این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ را در بازه $[0, \pi]$ مشخص می‌کند.

منحنی از $(0, 1)$ شروع می‌شود، در $x = \pi/2$ محور x را قطع می‌کند و در $(\pi, -1)$ به کمترین مقدار می‌رسد:

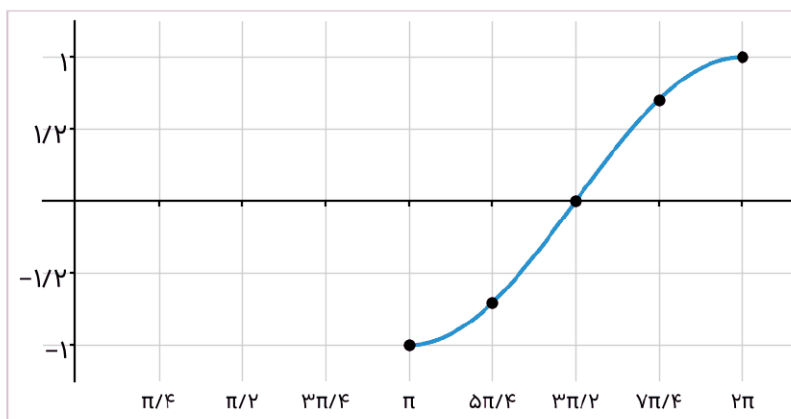


۵) جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ به صورت شکل مقابل به دست آید.

2π	$7\pi/4$	$3\pi/2$	$5\pi/4$	π	x
1	...	...	...	-1	y

2π	$7\pi/4$	$3\pi/2$	$5\pi/4$	π	x
1	$\sqrt{2}/2 \approx 0.7$	0	$-\sqrt{2}/2 \approx -0.7$	-1	y

مثلاً $\cos 7\pi/4 = \cos(2\pi - \pi/4) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$ و $\cos 5\pi/4 = \cos(\pi + \pi/4) = -\cos \pi/4 = -\sqrt{2}/2$



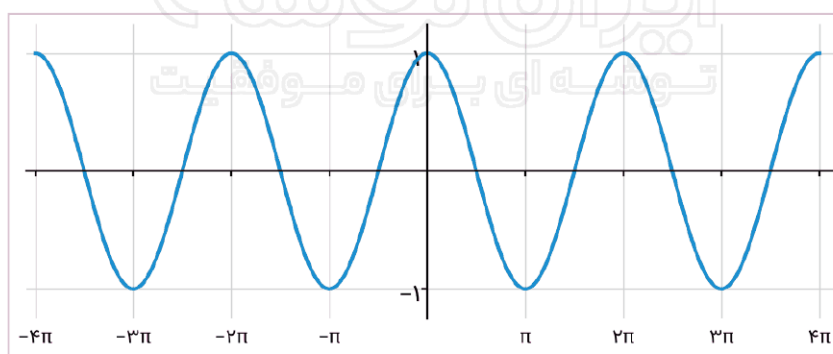
۶) با توجه به مراحل بالا نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.

بازه	$[0, \pi/2]$	$[\pi/2, \pi]$	$[\pi, 3\pi/2]$	$[3\pi/2, 2\pi]$
تغییر مقدار	مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.			
علامت	مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.			

بازه	$[0, \pi/2]$	$[\pi/2, \pi]$	$[\pi, 3\pi/2]$	$[3\pi/2, 2\pi]$
تغییر مقدار	از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	از ۰ به -۱ کاهش می‌یابد.	از -۱ به ۰ افزایش می‌یابد.	از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
علامت	در ربع اول مثبت است.	در ربع دوم منفی است.	در ربع سوم منفی است.	در ربع چهارم مثبت است.

۷) تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازه $[0, 4\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.

چون $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ ، همان نمودار بازه $[0, 2\pi]$ در بازه‌های $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ هم تکرار می‌شود. نمودار کامل شده در بازه $[-4\pi, 4\pi]$:



۸) با توجه به شکل صفحه قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطه $y = \cos x$ کامل کنید.
الف) دامنه تابع کسینوس و برد آن است.

ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس است که در طول‌های $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس است که در طول‌های به دست می‌آید.

الف) دامنه تابع کسینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (یعنی $\dots, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \dots$) برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس ۱ است که در طول‌های $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

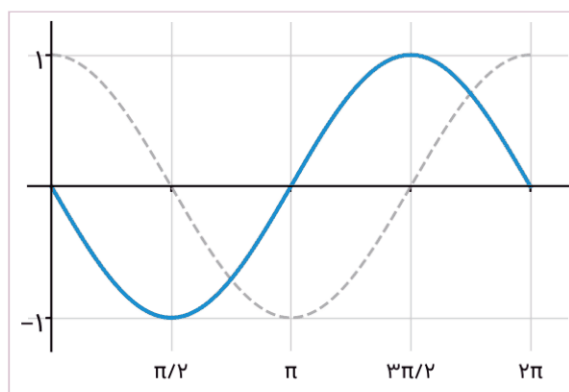
ت) حداقل مقدار تابع کسینوس -۱ است که در طول‌های $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (یعنی $\dots, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$) به دست می‌آید.

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = 3\cos x$ را نشان می‌دهد. به طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازه $[0, 2\pi]$ ، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.

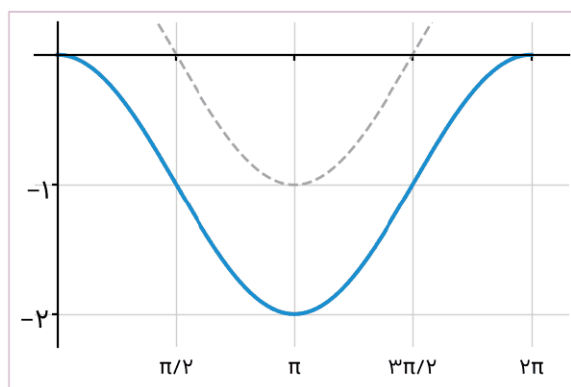
$$1) y = \cos(x + \pi/2) \quad 2) y = \cos x - 1 \quad 3) y = \cos x - (1/2) \quad 4) y = 1 - \cos(x - \pi/2)$$

در هر شکل، نمودار خط‌چین نمودار $y = \cos x$ است.

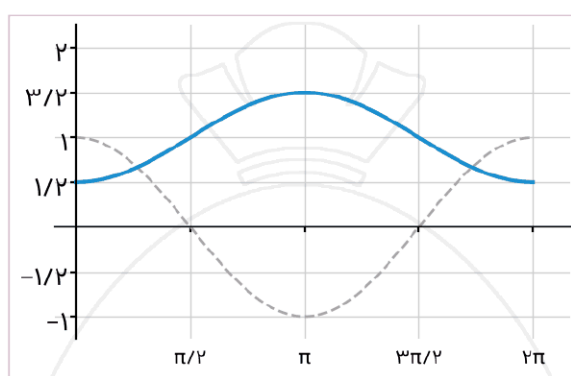
۱) $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ ؛ نمودار کسینوس به اندازه $\pi/2$ به چپ منتقل می‌شود (معادل قرینه نمودار سینوس نسبت به محور x است).



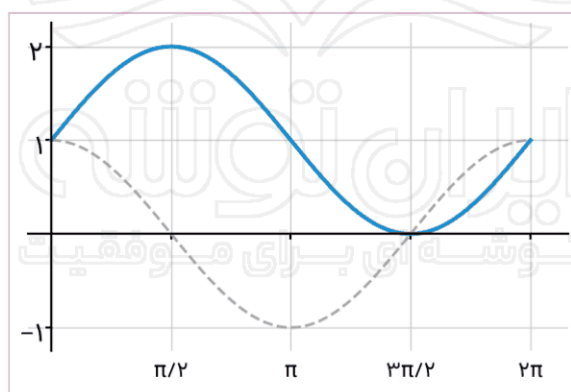
۲) نمودار کسینوس یک واحد به پایین منتقل می‌شود؛ برد $[-2, 0]$ است.



۳) نمودار کسینوس ابتدا نسبت به محور x قرینه، سپس با ضریب $1/2$ فشرده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می‌شود؛ برد $[1/2, 3/2]$ است.



۴) پس این نمودار همان $y = \sin x + 1$ است (نمودار کسینوس به اندازه $\pi/2$ به راست و یک واحد به بالا منتقل می‌شود)؛ برد $[0, 2]$ است.



۱) آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y = \cos(x - \pi/2)$ ، $y = \sin x$

۲) $y = \sin(\pi/2 + x)$ ، $y = \cos x$

۳) $y = \cos(2\pi - x)$ ، $y = \cos x$

۴) $y = \sin(5\pi - x)$ ، $y = \sin x$

۱) منطبق‌اند. زیرا $\cos(x - \pi/2) = \cos(\pi/2 - x) = \sin x$

۲) منطبق‌اند. زیرا $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$

۳) منطبق‌اند. زیرا $\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$

۴) منطبق‌اند. زیرا $\sin(5\pi - x) = \sin(\pi - x + 4\pi) = \sin(\pi - x) = \sin x$

۲) نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

۱) $[0, 2\pi]$ ، $y = (1/2) \sin x$

۲) $[-2\pi, 2\pi]$ ، $y = 2\cos x + 1$

۳) $[-2\pi, 2\pi]$ ، $y = 1 - \sin x$

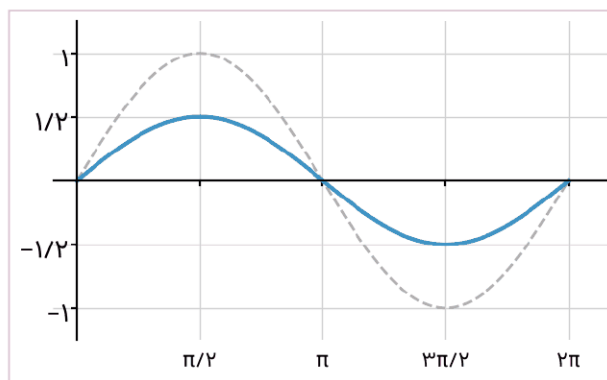
۴) $[-4\pi, 4\pi]$ ، $y = -1 + \cos x$

۵) $[0, 2\pi]$ ، $y = 1 + \sin(x + \pi/4)$

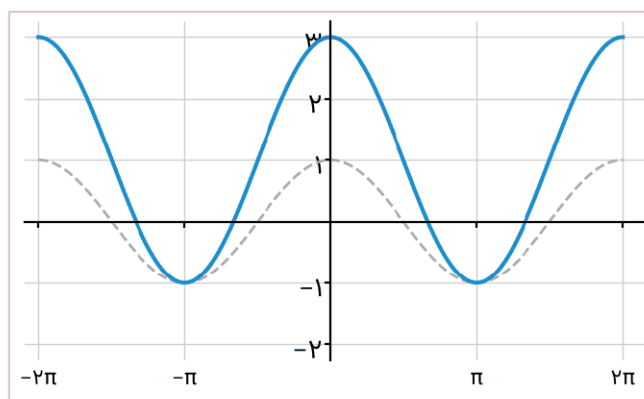
۶) $[2\pi, 4\pi]$ ، $y = \cos(x - \pi/2)$

در شکل‌ها، خط چین نمودار تابع پایه ($\sin x$ یا $\cos x$) است.

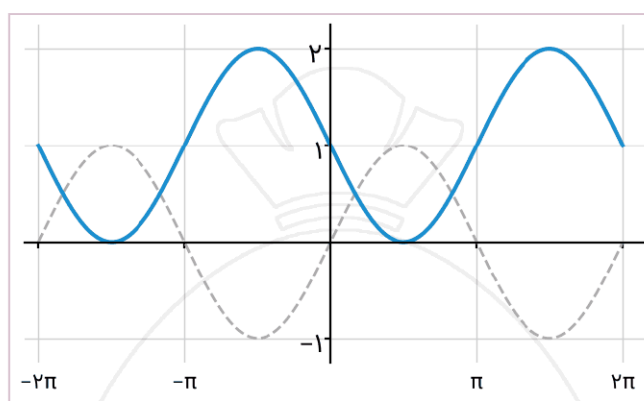
۱) $y = (1/2) \sin x$: دامنه نوسان نصف می‌شود؛ برد $[-1/2, 1/2]$.



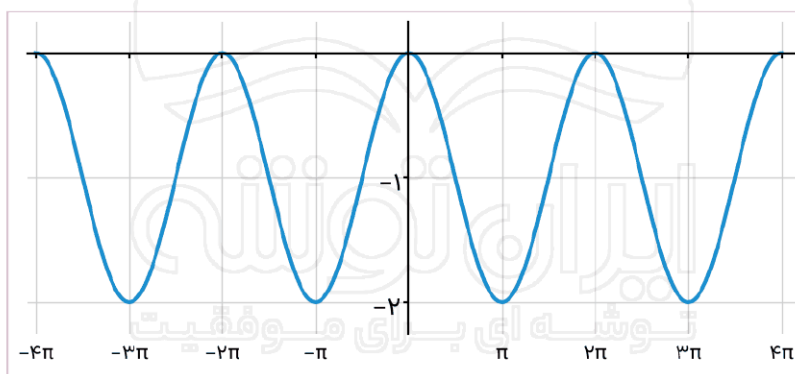
۲) $y = 2\cos x + 1$: دامنه نوسان ۲ برابر و نمودار یک واحد بالا می‌رود؛ برد $[-1, 3]$.



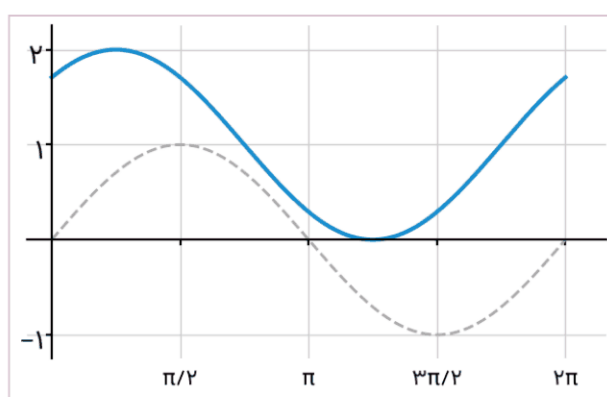
(۳) $y = 1 - \sin x$: قرینه $\sin x$ نسبت به محور x و سپس یک واحد بالا؛ برد $[0, 2]$.



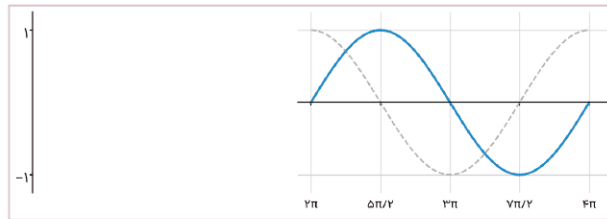
(۴) $y = -1 + \cos x$: نمودار کسینوس یک واحد پایین می‌آید؛ برد $[-2, 0]$.



(۵) $y = 1 + \sin(x + \pi/4)$: نمودار سینوس به اندازه $\pi/4$ به چپ و یک واحد به بالا منتقل می‌شود؛ برد $[0, 2]$.



۶) $y = \cos(x - \pi/2) = \sin x$: نمودار سینوس (همان یک دور تکرار شده سینوس) رسم می‌شود؛ برد $[-1, 1]$.



تمرین

صفحه ۹۴

۷۱

۳) با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.

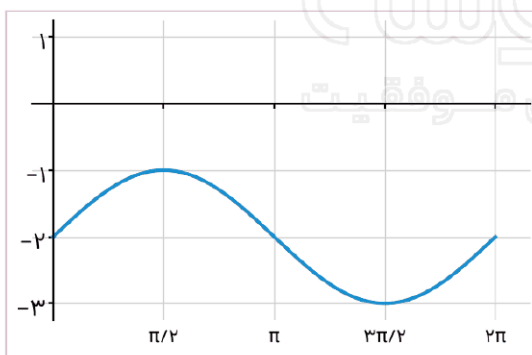
الف) $y = 2\cos x + 1$ (ب) $y = 2\sin x - 1$ (پ) $y = 2 - \cos x$ (ت) $y = \sin x - 2$

نمودار سمت چپ کتاب در $x = 0$ مقدار ۱، در $x = \pi$ مقدار ۳ و در $x = 2\pi$ دوباره مقدار ۱ دارد؛ نمودار سمت راست در $x = 0$ مقدار -۱، در $x = \pi/2$ مقدار ۱ و در $x = 3\pi/2$ مقدار -۳ دارد.

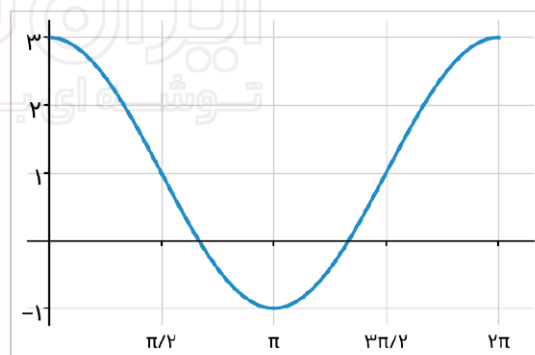
نمودار سمت چپ ← ضابطه (پ): $y = 2 - \cos x$ در $x = 0$ داریم $2 - 1 = 1$ ، در $x = \pi$ داریم $2 - (-1) = 3$ و در $x = 2\pi$ دوباره ۱ می‌شود.

نمودار سمت راست ← ضابطه (ب): $y = 2\sin x - 1$ در $x = 0$ داریم -۱، در $x = \pi/2$ داریم $2 - 1 = 1$ ، در $x = 3\pi/2$ داریم $2 - 3 = -1$.

برای ضابطه‌های دیگر، نمودار الف) $y = 2\cos x + 1$ (برد $[-1, 3]$ ، مقدار ۳ در $x = 0$) و ت) $y = \sin x - 2$ (برد $[-3, -1]$) به صورت زیر است:



ت) $y = \sin x - 2$



الف) $y = 2\cos x + 1$

۴) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟
 الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = (1/2) \sin x$ را نشان می‌دهد. (نموداری بین $-1/2$ و $1/2$ در بازه $[0, 2\pi]$ با بیشینه $1/2$ در $\pi/2$)
 ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - 1/2$ را نشان می‌دهد. (نموداری که از $1/2$ در $x = 0$ آغاز می‌شود، در $x = \pi$ به حدود $-3/2$ می‌رسد و در 2π دوباره $1/2$ است)
 پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور x ‌ها انتقال دهیم.
 ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ‌ها قرینه کنیم.

الف) درست. نمودار $y = \sin x$ با ضرب $1/2$ فشرده می‌شود: ماکزیمم $1/2$ در $x = \pi/2$ ، مینیمم $-1/2$ در $x = 3\pi/2$ و صفر در $x = 0, \pi, 2\pi$ ؛ دقیقاً مطابق شکل.
 ب) درست. $y = \cos x - 1/2$ در $x = 0$ مقدار $1/2$ ، در $x = \pi/2$ مقدار $-1/2$ ، در $x = \pi$ مقدار $-1 - 1/2 = -3/2$ و در $x = 2\pi$ دوباره $1/2$ است؛ این مقادیر با شکل (کمینه‌ای کمی پایین‌تر از خط -1) سازگار است.
 پ) نادرست. انتقال نمودار به اندازه یک واحد به موازات محور x ‌ها، تابع $\sin(x - 1)$ یا $\sin(x + 1)$ را می‌دهد. برای رسم $y = 1 + \sin x$ باید نمودار سینوس را یک واحد به بالا (به موازات محور y ‌ها) منتقل کنیم.
 ت) درست. چون $-\cos x$ قرینه $\cos x$ نسبت به محور x است (هر y به $-y$ تبدیل می‌شود).

طول روز به طور تقریبی در ایران در t امین روز سال بر حسب ساعت با استفاده از تابع مثلثاتی H با ضابطه زیر مدل سازی می شود: $H(t) = 12 + 2.4 \sin(2\pi/365 (t - 1))$. (مثلاً طول روز در اول مهر ماه که ۱۸۷ امین روز سال است، تقریباً برابر است با: $H(187) \approx 11.8$ ساعت.) حال شما طول روز تقریبی را در روزهای ۱۲ اردیبهشت ماه، ۱۵ مرداد ماه، ۲۲ بهمن ماه و ۳۰ آذر ماه به دست آورید.

ابتدا شماره هر روز را در سال می یابیم. شش ماه اول سال ۳۱ روزه (جمعاً ۱۸۶ روز) و ماه های مهر تا بهمن ۳۰ روزه اند:

تاریخ	(t) شماره روز	$t - 1$	بر حسب ساعت $H(t)$
۱۲ اردیبهشت	$31 + 12 = 43$	42	$12 + 2.4 \sin(2\pi \cdot 42 / 365) \approx 13.59$
۱۵ مرداد	$4 \times 31 + 15 = 139$	138	$12 + 2.4 \sin(2\pi \cdot 138 / 365) \approx 13.66$
۲۲ بهمن	$186 + 4 \times 30 + 22 = 328$	327	$12 + 2.4 \sin(2\pi \cdot 327 / 365) \approx 10.54$
۳۰ آذر	$186 + 3 \times 30 = 276$	275	$12 + 2.4 \sin(2\pi \cdot 275 / 365) \approx 9.60$

پس طول روز تقریباً $۱۳٫۶$ ساعت در ۱۲ اردیبهشت، $۱۳٫۷$ ساعت در ۱۵ مرداد، $۱۰٫۵$ ساعت در ۲۲ بهمن و $۹٫۶$ ساعت در ۳۰ آذر (کوتاه ترین روز سال) است. (ماشین حساب باید در حالت رادیان باشد.)

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت