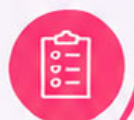


با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe



ریاضی ۲ یازدهم - فصل سوم

تابع

فهرست

۱۹ صفحه ۵۵ - فعالیت - جزء صحیح و انتقال عدد صحیح ... ۱۷	۱ صفحه ۴۸ - فعالیت - سهم مشارکت داوطلبان ... ۴
۲۰ صفحه ۵۶ - تمرین - نمودار تابع گویا با دامنه محدود ... ۱۸	۲ صفحه ۴۹ - فعالیت - نمودار سهم مشارکت ... ۵
۲۱ صفحه ۵۶ - تمرین - دامنه تابع گویا ... ۱۸	۳ صفحه ۴۹ - فعالیت - دامنه نمودار تابع گویا ... ۵
۲۲ صفحه ۵۶ - تمرین - برابری دو تابع ... ۱۸	۴ صفحه ۴۹ - خواندنی - هزینه پاکسازی رودخانه ... ۶
۲۳ صفحه ۵۶ - تمرین - ساخت تابع گویا با دامنه داده شده ... ۱۹	۵ صفحه ۵۰ - کار در کلاس - عملکرد پرتاب های آزاد ... ۷
۲۴ صفحه ۵۶ - تمرین - رسم نمودار تابع رادیکالی منتقل شده ... ۱۹	۶ صفحه ۵۰ - کار در کلاس - دامنه توابع گویا ... ۷
۲۵ صفحه ۵۶ - تمرین - جزء صحیح اعداد بزرگ ... ۱۹	۷ صفحه ۵۱ - کار در کلاس - برابری دو تابع ... ۸
۲۶ صفحه ۵۶ - تمرین - رسم تابع پله ای ... ۲۰	۸ صفحه ۵۱ - کار در کلاس - تشخیص ضابطه از روی نمودار ... ۹
۲۷ صفحه ۵۶ - تمرین - رسم تابع جزء صحیح با انتقال ... ۲۱	۹ صفحه ۵۲ - کار در کلاس - تابع سونامی ... ۱۰
۲۸ صفحه ۵۶ - خواندنی - قد متوسط کودکان ... ۲۱	۱۰ صفحه ۵۲ - خواندنی - آیا سونامی سیراف را ویران کرد؟ ... ۱۰
۲۹ صفحه ۵۷ - کار در کلاس - مایل و کیلومتر ... ۲۲	۱۱ صفحه ۵۳ - فعالیت - انتقال نمودار تابع رادیکالی ... ۱۱
۳۰ صفحه ۵۷ - کار در کلاس - وارون مجموعه ای از زوج های مرتب ... ۲۲	۱۲ صفحه ۵۳ - فعالیت - رسم نمودار با سه مرحله انتقال ... ۱۲
۳۱ صفحه ۵۸ - فعالیت - وارون و نمودار قرینه ... ۲۳	۱۳ صفحه ۵۳ - فعالیت - رسم نمودار تابع رادیکالی منتقل شده ... ۱۳
۳۲ صفحه ۵۸ - فعالیت - تابع بودن و وارون ... ۲۴	۱۴ صفحه ۵۴ - فعالیت - هزینه پارکینگ خودرو ... ۱۴
۳۳ صفحه ۵۸ - فعالیت - وارون یک پاره خط ... ۲۶	۱۵ صفحه ۵۵ - کار در کلاس - جزء صحیح اعداد ... ۱۵
۳۴ صفحه ۵۹ - فعالیت - وارون و تابع یک به یک ... ۲۷	۱۶ صفحه ۵۵ - کار در کلاس - حاصل جزء صحیح کسرها ... ۱۵
۳۵ صفحه ۵۹ - فعالیت - اثر انگشت و گروه خونی ... ۲۸	۱۷ صفحه ۵۵ - فعالیت - معادله و نمودار جزء صحیح ... ۱۵
۳۶ صفحه ۶۰ - فعالیت - رسم تابع و یک به یکی ... ۲۹	۱۸ صفحه ۵۵ - فعالیت - رسم نمودار تابع جزء صحیح ... ۱۶

۳۷	صفحه ۶۰ فعالیت — کدام نمودارها یک به یک اند؟	۳۰
۳۸	صفحه ۶۱ فعالیت — وارون تابع خطی	۳۱
۳۹	صفحه ۶۲ کار در کلاس — وارون توابع خطی	۳۲
۴۰	صفحه ۶۳ کار در کلاس — یک به یک نبودن و حذف نقطه	۳۳
۴۱	صفحه ۶۳ کار در کلاس — محدود کردن دامنه سهمی	۳۴
۴۲	صفحه ۶۳ تمرین — وارون مجموعه زوج های مرتب	۳۴
۴۳	صفحه ۶۳ تمرین — وارون یک نمودار	۳۵
۴۴	صفحه ۶۴ تمرین — ضابطه وارون توابع خطی	۳۶
۴۵	صفحه ۶۴ تمرین — حداکثر نقاط یک به یک	۳۶
۴۶	صفحه ۶۴ تمرین — نمودار تابع با دامنه و برد مشخص	۳۷
۴۷	صفحه ۶۴ تمرین — یک به یک کردن نیم دایره	۳۸
۴۸	صفحه ۶۵ فعالیت — جمع، تفریق، ضرب و تقسیم توابع	۳۹
۴۹	صفحه ۶۶ خواندنی — هزینه خرید هنرمند	۴۰
۵۰	صفحه ۶۷ کار در کلاس — عمل های جبری روی دو تابع	۴۰
۵۱	صفحه ۶۷ کار در کلاس — عمل های جبری روی توابع رادیکالی	۴۱
۵۲	صفحه ۶۷ فعالیت — جمع و تفریق توابع خطی	۴۲
۵۳	صفحه ۶۸ فعالیت — ضرب تابع در عدد	۴۴
۵۴	صفحه ۶۸ کار در کلاس — قرینه نمودار نسبت به محور x	۴۵
۵۵	صفحه ۶۹ کار در کلاس — رسم نمودار قرینه و انبساط	۴۶
۵۶	صفحه ۶۹ تمرین — رسم توابع قدر مطلق	۴۶
۵۷	صفحه ۶۹ تمرین — جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع	۴۸
۵۸	صفحه ۶۹ تمرین — رسم توابع رادیکالی	۴۹
۵۹	صفحه ۶۹ تمرین — جمع دو تابع از روی نمودار	۵۰
۶۰	صفحه ۷۰ تمرین — کدام تابع مجموع دو تابع دیگر است؟	۵۱
۶۱	صفحه ۷۰ خواندنی — دمای اجاق با دو منبع گرمایی	۵۲

۱) الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می بایست $1/1$ از ده میلیون تومان را می پرداخت، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می شد، هر کدام باید $1/2$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

ب) اگر تعداد داوطلبانی که می خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟

پ) رابطه بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطه این تابع چیست؟

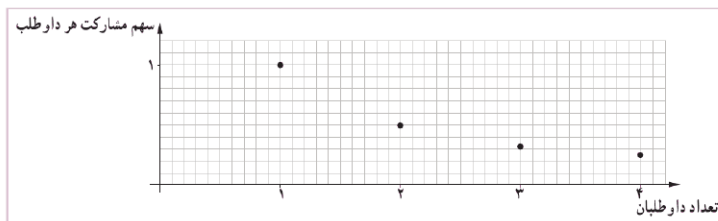
الف) اگر n نفر داوطلب باشند، هزینه بین آنها مساوی تقسیم می شود و سهم هر نفر $1/n$ است:

تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$1/1$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/6$	$1/7$	$1/8$	$1/9$	$1/10$

ب) سهم هر نفر برابر است با $1/n$ از ده میلیون تومان.

پ) اگر تعداد داوطلبان را x بگیریم، سهم مشارکت هر نفر $f(x) = 1/x$ است؛ یعنی ضابطه این تابع همان $f(x) = 1/x$ است.

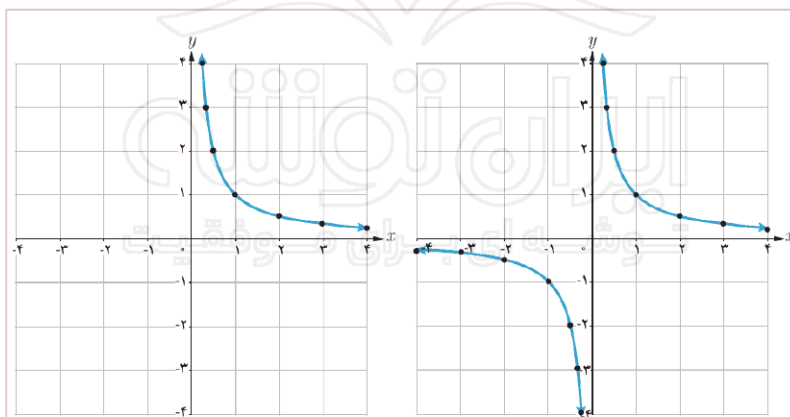
۲) در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینه مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟
«با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب □ کاهش □ افزایش می‌یابد.»



نقطه‌ها از چپ به راست پایین می‌آیند: به‌ازای $x = 1, 2, 3, 4$ مقدار تابع برابر $1, 1/2, 1/3, 1/4$ است و کاهش می‌یابد.

پاسخ: «با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب **کاهش** می‌یابد.»

در نمودارهای زیر تابع با ضابطه $f(x) = 1/x$ با دو دامنه متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟
الف) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ب) $D_f = (0, +\infty)$



- نمودار سمت چپ فقط شاخه ناحیه اول (به‌ازای $x > 0$) را دارد، پس مربوط به الف) $D_f = (0, +\infty)$ است.
- نمودار سمت راست هر دو شاخه (به‌ازای $x < 0$ و $x > 0$) را دارد، پس مربوط به ب) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ است.

هزینهٔ پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطهٔ $p(x) = 255x / (100 - x)$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $p(x)$ هزینهٔ پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی خواهد شد؟
پ) چرا هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

الف) مقدار $p(x)$ را در هر ستون حساب می‌کنیم؛ مثلاً: $p(10) = 255 \times 10 / 90 \approx 28.33$

۹۰	۷۰	۵۰	۳۰	۱۰	x
2295	595	255	≈ 109.29	≈ 28.33	$p(x)$

ب) یک میلیارد تومان برابر ۱۰۰۰ میلیون تومان است، پس: $p(x) = 1000$

$$255x = 1000(100 - x) \Rightarrow 1255x = 100000 \Rightarrow x \approx 79.7$$

یعنی با یک میلیارد تومان حدود 79.7% درصد از آلودگی‌ها پاک‌سازی می‌شود.

پ) برای پاک‌سازی ۱۰۰ درصد باید $x = 100$ باشد، اما به‌ازای $x = 100$ مخرج کسر صفر می‌شود و تابع تعریف‌شده نیست ($100 \notin D_p$). همچنین هرچه x به ۱۰۰ نزدیک‌تر شود، مخرج به صفر نزدیک و هزینه بسیار بزرگ می‌شود؛ پس هزینهٔ پاک‌سازی کامل بی‌نهایت است و هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد آلودگی‌ها پاک نمی‌شود.

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» است. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همه پرتاب‌های آزاد او حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن خوب است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همه پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطه تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x) = (7 + x) / (10 + x) \quad f(x) = x / (0.7 + x) \quad f(x) = x + 0.7$$

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپی دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟ $f(x) = 80/100 \rightarrow \dots$

الف) اگر x پرتاب موفق پیاپی دیگر داشته باشد، تعداد پرتاب‌های موفق $7 + x$ و تعداد کل پرتاب‌ها $10 + x$ می‌شود. پس ضابطه برابر است با گزینه سوم:

$$f(x) = (7 + x) / (10 + x)$$

ب) بله؛ چون صورت و مخرج هر دو چندجمله‌ای هستند و مخرج $10 + x$ چندجمله‌ای ناصفر است (به‌ازای $x \geq 0$ صفر نمی‌شود)، این تابع گویاست.

پ) باید $f(x) = 80/100$ شود:

$$(7 + x) / (10 + x) = 80/100 \Rightarrow 100(7 + x) = 80(10 + x) \Rightarrow 700 + 100x = 800 + 80x \Rightarrow 20x = 100 \Rightarrow x = 5$$

یعنی پس از ۵ پرتاب آزاد موفق پیاپی دیگر، درصد موفقیت وحیده ۸۰ درصد می‌شود (۱۲ پرتاب موفق از ۱۵ پرتاب).

توشه ای برای موفقیت

دامنه هر یک از توابع گویای داده‌شده را به دست آورید.

$$D_g = \mathbb{R}, g(x) = 3 / (x - 4) \dots D_f = \mathbb{R}, f(x) = x / (x + 5) \dots$$

دامنه تابع گویا همه اعداد حقیقی است، به جز اعدادی که مخرج را صفر می‌کنند.

$$D_f = \mathbb{R} - \{-5\} \quad x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \quad \bigcirc$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{4\} \quad x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \quad \bigcirc$$

۱) آیا دو تابع با ضابطه $f(x) = x^2/x$ و $g(x) = x$ با هم برابرند؟ چرا؟

خیر. ضابطه دو تابع پس از ساده کردن یکی می شود، اما دامنه ها متفاوت است:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

برای برابری دو تابع باید دامنه ها نیز برابر باشند؛ چون $D_f \neq D_g$ ، دو تابع برابر نیستند (نمودار f در نقطه $x = 0$ «حفره» دارد ولی نمودار g ندارد).

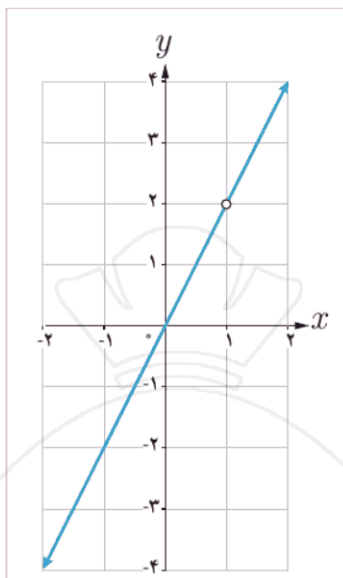


۲) نمودار مقابل مربوط به کدام یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟

الف) $D_g = \mathbb{R}$ ، $g(x) = 2x$ ب) $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ ، $g(x) = 2x$

پ) $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ ، $g(x) = 2x$ ت) $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ ، $g(x) = (2x^2 - 2x)/(x - 1)$

ث) $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ ، $g(x) = (2x^2 - 4x)/(x - 2)$



نمودار، خط $y = 2x$ است که در نقطه $(1, 2)$ «حفره» دارد؛ یعنی $x = 1$ در دامنه نیست.

○ الف) دامنه $\mathbb{R}$ است و حفره ندارد؛ نادرست.

○ ب) حفره در $x = 2$ (نقطه $(2, 4)$) است؛ نادرست.

○ پ) $y = 2x$ با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ ؛ درست.

○ ت) $(2x^2 - 2x)/(x - 1) = 2x(x - 1)/(x - 1) = 2x$ با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ ؛ درست.

○ ث) حفره در $x = 2$ (نقطه $(2, 4)$) است؛ نادرست.

پاسخ: گزینه‌های پ و ت. مسئله دو جواب دارد، ولی این دو گزینه یک تابع را نشان می‌دهند (ضابطه و دامنه هر دو یکی است).

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطه $S = 356\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است. $(1/4) = \sqrt{3} = 1/7, \sqrt{2}$

الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) عبارت زیر را کامل کنید. چون هر عدد، تنها ریشه دوم مثبت دارد، پس رابطه سونامی یک تابع
پ) کدام یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنه تابع سونامی است؟

الف) $S = 356\sqrt{d}$:

۴	۳	۲	۱	d
$356 \times 2 = 712$	$356 \times 1.7 = 605.2$	498.4	356	$S = 356\sqrt{d}$

ب) چون هر عدد نامنفی، تنها یک ریشه دوم مثبت دارد، پس رابطه سونامی یک تابع است.

پ) d عمق دریاست و نمی‌تواند منفی باشد؛ همچنین $\sqrt{d}$ فقط برای $d \geq 0$ تعریف می‌شود. پس عدد ۵ عضو دامنه است و عدد ۵- عضو دامنه نیست.

در کتاب‌های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین‌لرزه‌ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق این سؤال را که «آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» باید با کمک پژوهش‌های باستان‌شناسی و زمین‌شناسی یافت. با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس حدود ۵۰ متر است، نظر شما چیست؟

میانگین عمق خلیج فارس ۵۰ متر، یعنی $d = 0.05$ کیلومتر است. تندی سونامی در این عمق تقریباً

$$S = 356\sqrt{0.05} \approx 356 \times 0.22 \approx 80 \text{ km/h}$$

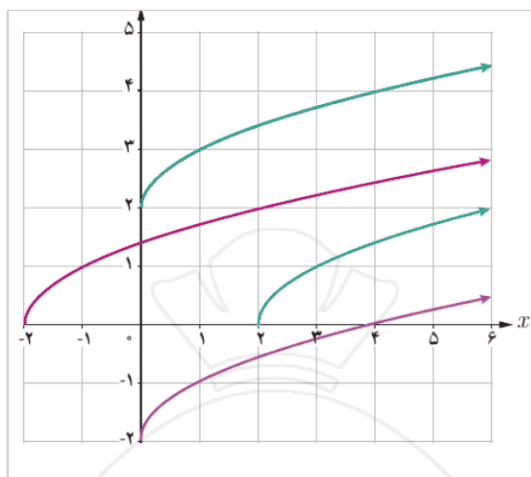
است؛ یعنی بسیار کمتر از تندی سونامی در اقیانوس‌های عمیق (که به بیش از ۸۰۰ کیلومتر بر ساعت می‌رسد). در دریای کم‌عمقی مثل خلیج فارس، سونامی بزرگ و پرانرژی شکل نمی‌گیرد؛ به‌علاوه سونامی آب را موقتاً به ساحل می‌آورد و پس می‌کشد و باعث فرورفتن دائمی بخش بزرگی از شهر زیر آب نمی‌شود. بنابراین ویرانی سیراف را بیشتر باید به زمین‌لرزه شدید سده چهارم هجری قمری نسبت داد، نه به غرق‌شدن در اثر سونامی.

این جواب ممکن است دقیق نباشد (پرسشی پژوهشی و نظری است؛ نظر نمونه ارائه شده است).

۱) در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنه آنها را تعیین کنید.

الف) $g(x) = \sqrt{x-2}$ ، $D_g = \dots\dots$ ب) $h(x) = \sqrt{x+2}$ ، $D_h = \dots\dots$

پ) $k(x) = \sqrt{x+2}$ ، $D_k = \dots\dots$ ت) $l(x) = \sqrt{x-2}$ ، $D_l = \dots\dots$



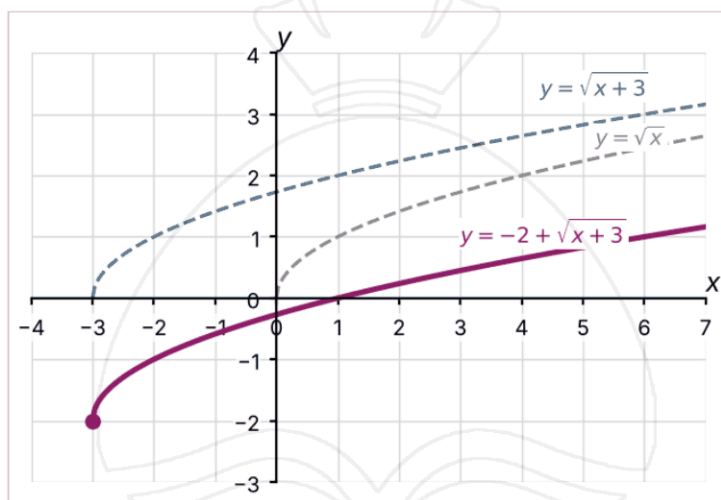
نقطه شروع هر نمودار، نقطه شروع $\sqrt{x}$ است که منتقل شده:

- الف) $g(x) = \sqrt{x-2}$ دو واحد به راست؛ شروع از $(2, 0)$ — نمودار آبی؛ $D_g = [2, +\infty)$
- ب) $h(x) = \sqrt{x+2}$ دو واحد به بالا؛ شروع از $(0, 2)$ — نمودار سبز؛ $D_h = [0, +\infty)$
- پ) $k(x) = \sqrt{x+2}$ دو واحد به چپ؛ شروع از $(-2, 0)$ — نمودار صورتی؛ $D_k = [-2, +\infty)$
- ت) $l(x) = \sqrt{x-2}$ دو واحد به پایین؛ شروع از $(0, -2)$ — نمودار بنفش؛ $D_l = [0, +\infty)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- ۲) می‌خواهیم نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنیم.
- الف) (مرحله اول) نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x}$ در صفحه قبل را در نظر بگیرید.
- ب) (مرحله دوم) حال، نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.
- پ) (مرحله سوم) در پایان، نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.

۱. نمودار $y = \sqrt{x}$ از $(0, 0)$ شروع می‌شود و از نقاط $(1, 1)$ ، $(4, 2)$ و $(9, 3)$ می‌گذرد.
۲. برای $y = \sqrt{x+3}$ نمودار مرحله اول را ۳ واحد به چپ منتقل می‌کنیم؛ شروع از $(-3, 0)$.
۳. برای $y = -2 + \sqrt{x+3}$ نمودار مرحله دوم را ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم؛ شروع از $(-3, -2)$ و عبور از $(-2, -1)$ و $(1, 0)$.

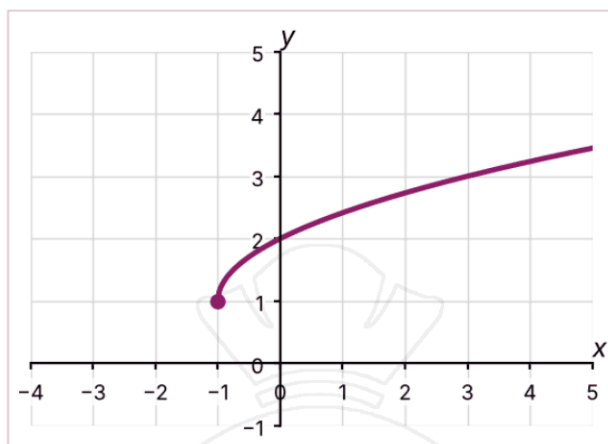


دامنه این تابع $[-3, +\infty)$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ را رسم کنید؛ سپس دامنه آن را بیابید.

نمودار $\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم؛ شروع از $(-1, 1)$ و عبور از $(0, 2)$ ، $(3, 3)$ و $(8, 4)$.



دامنه: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ پس $D_f = [-1, +\infty)$.

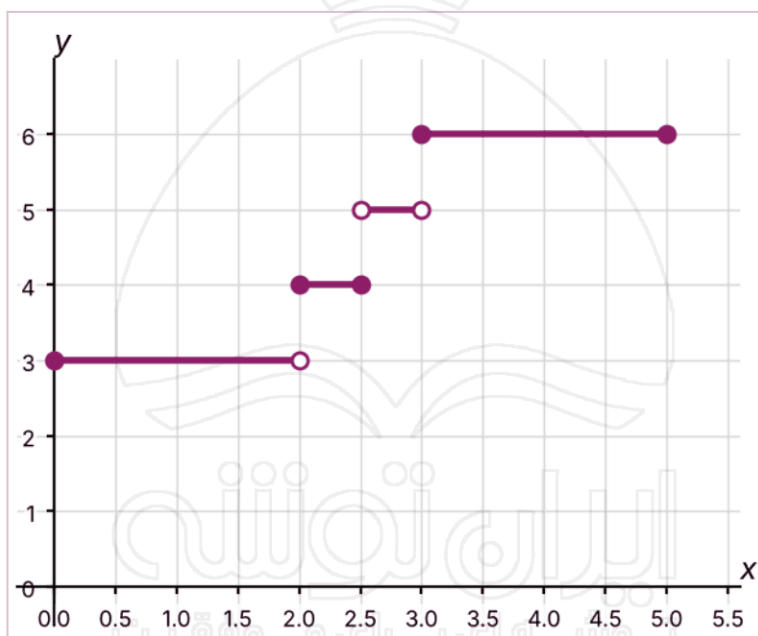
در یک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود: از هنگام ورود تا کمتر از ۲ ساعت: ۳ هزار تومان؛ از ۲ ساعت تا ۲/۵ ساعت: ۴ هزار تومان؛ از بیشتر از ۲/۵ ساعت تا کمتر از ۳ ساعت: ۵ هزار تومان؛ از ۳ ساعت تا ۵ ساعت: ۶ هزار تومان.

الف) ضابطهٔ هزینهٔ پارکینگ خودرو چیست؟
ب) نمودار این تابع را رسم کنید.

الف) اگر x مدت توقف (ساعت) و $f(x)$ هزینه (هزار تومان) باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 2.5 \\ 5 & 2.5 < x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

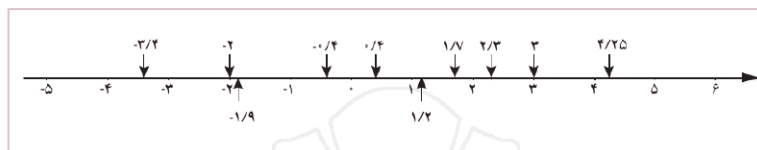
ب) نمودار، تابع پله‌ای است (دایرهٔ توپر: نقطه شامل می‌شود؛ دایرهٔ توخالی: شامل نمی‌شود):



۱) با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به دست آورید.
 $[-3.4]$ ، $[-2]$ ، $[-1.9]$ ، $[0.4]$ ، $[-0.4]$ ، $[4.25]$ ، $[3]$ ، $[2.3]$ ، $[1.7]$ ، $[1.2]$

جزء صحیح هر عدد، اولین عدد صحیح سمت چپ آن (یا خود آن، اگر صحیح باشد) روی محور است:

عبارت	$[-3.4]$	$[-2]$	$[-1.9]$	$[0.4]$	$[-0.4]$	$[4.25]$	$[3]$	$[2.3]$	$[1.7]$	$[1.2]$
مقدار	-4	-2	-2	0	-1	4	3	2	1	1



۲) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.
 $[-13/51] = \dots\dots$ ، $[41/37] = \dots\dots$

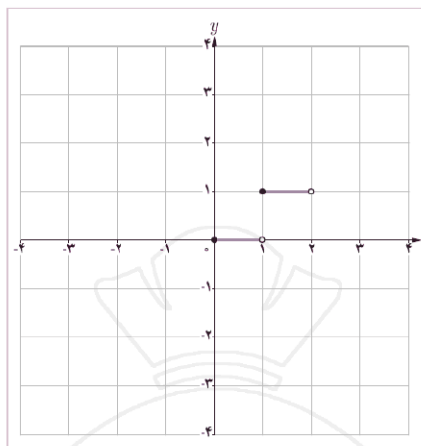
- $41/37 \approx 1.108$ و عدد صحیح سمت چپ آن ۱ است؛ پس $[41/37] = 1$.
- $-13/51 \approx -0.255$ و عدد صحیح سمت چپ آن -1 است؛ پس $[-13/51] = -1$.

۱) اگر $x = -2$ ، آنگاه x برابر چه اعدادی می‌تواند باشد؟ مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

$x = -2$ یعنی x از -2 کمتر نیست و به -1 نرسیده است:

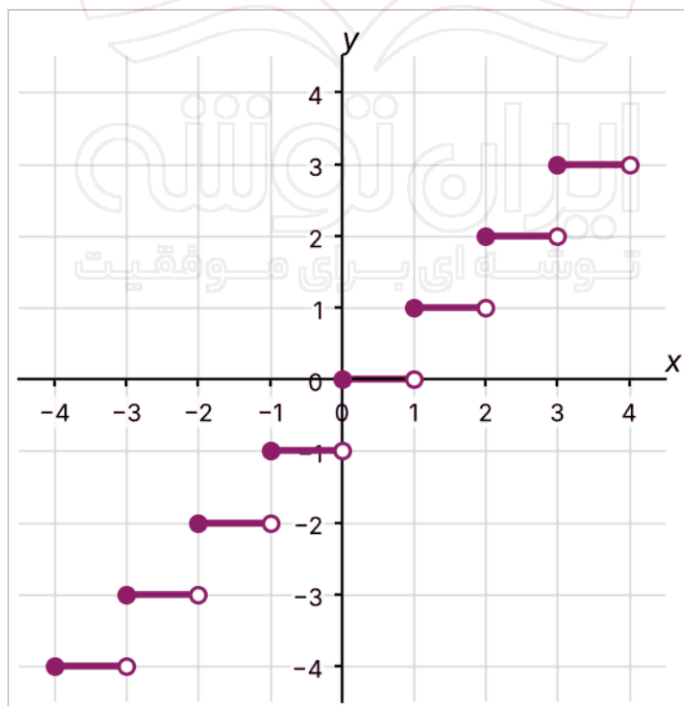
پس $-2 \leq x < -1$ و مجموعه جواب برابر است با بازه $[-2, -1)$.

۲) برای رسم نمودار یک تابع پله‌ای باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر $0 \leq x < 1$ ، آنگاه $[x] = 0$ ؛ پس مقدار تابع $f(x) = [x]$ برای همه اعداد عضو بازه $[0, 1)$ برابر صفر می‌شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ رسم شده است. نمودار این تابع را در بازه $[-4, 4]$ تکمیل کنید.



در هر بازه $[k, k+1)$ مقدار تابع برابر k است:

بازه	$[-4, -3)$	$[-3, -2)$	$[-2, -1)$	$[-1, 0)$	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$
$[x]$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3



۳ الف) نقطه‌ای مانند a را به دلخواه روی محور اعداد داده‌شده مشخص کنید.

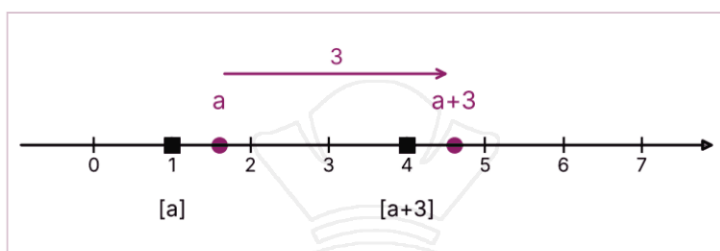
ب) نقطه $a + 3$ را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط $[a]$ و $[a + 3]$ را روی محور مشخص کنید.

ت) چه رابطه‌ای بین $[a]$ و $[a + 3]$ برقرار است؟ $[a + 3] = [a] + \dots$

ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ «اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a + n] = [a] + n$»

برای نمونه $a = 1.6$ را انتخاب می‌کنیم. $a + 3 = 4.6$ است (۳ واحد به راست)، و $[a] = 1$ و $[a + 3] = 4$:



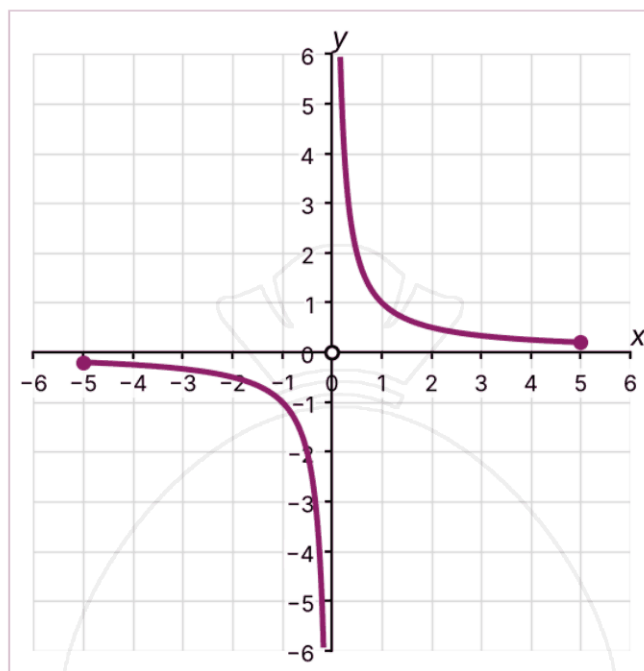
ت) $[a + 3] = [a] + 3$ (در مثال: $4 = 1 + 3$).

ث) «اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a + n] = [a] + n$ » (افزودن عدد صحیح به a جزء صحیح را به همان اندازه جابه‌جا می‌کند).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1/x$ و با دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ را رسم کنید.

جدول نقاط: $(1, 1)$ ، $(2, 1/2)$ ، $(5, 1/5)$ ، $(-1, -1)$ ، $(-2, -1/2)$ ، $(-5, -1/5)$. نمودار دو شاخه دارد و در $x = 0$ تعریف نشده است.



۲) دامنه تابع گویای با ضابطه $f(x) = (x+3)/(x-3)$ را به دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\} \quad \text{پس } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

۳) در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $(x > 0)$ ؛ $f(x) = -1$ ، $g(x) = |x|/x$ ب) $f(x) = x - 2$ ، $g(x) = (x^2 - 4)/(x + 2)$

الف) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$. برای $x > 0$: $g(x) = x/x = 1$ و برای $x < 0$: $g(x) = -x/x = -1$. پس دامنه‌ها برابر و ضابطه‌ها در هر نقطه یکسان است؛ دو تابع برابرند.

ب) $g(x) = (x-2)(x+2)/(x+2) = x - 2$ ولی $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ در حالی که $D_f = \mathbb{R}$. دامنه‌ها برابر نیستند؛ دو تابع برابر نیستند.

۴) تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش برابر $\mathbb{R} - \{-1\}$ شود. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

مخرج باید فقط در $x = -1$ صفر شود، مثلاً مخرج: $x + 1$

☐ $f(x) = 1/(x + 1)$

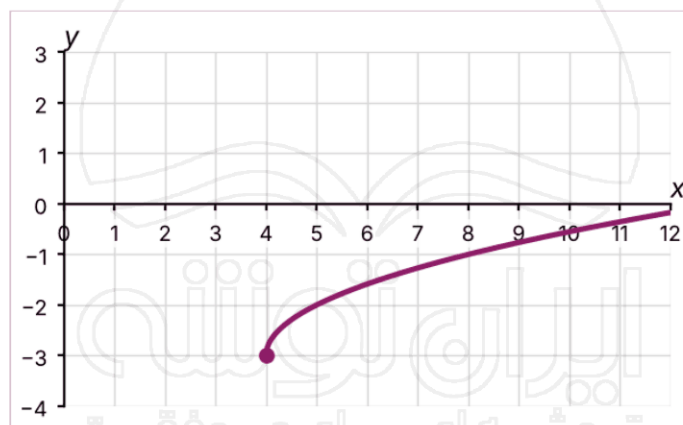
☐ $f(x) = (x - 3)/(x + 1)$

☐ $f(x) = 2x/(x + 1)$

در هر کدام $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ است (پاسخ‌های دیگری نیز ممکن است).

۵) نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x - 4}$ را رسم کنید.

نمودار $\sqrt{x}$ را ۴ واحد به راست و ۳ واحد به پایین منتقل می‌کنیم؛ شروع از $(4, -3)$ و عبور از $(5, -2)$ ، $(8, -1)$ و $(13, 0)$ ؛ دامنه $[4, +\infty)$.



۶) حاصل عبارت‌های مقابل را حساب کنید.

$[300.4002]$ $[-103.003]$ $[-2309.54]$

☐ $[300.4002] = 300$

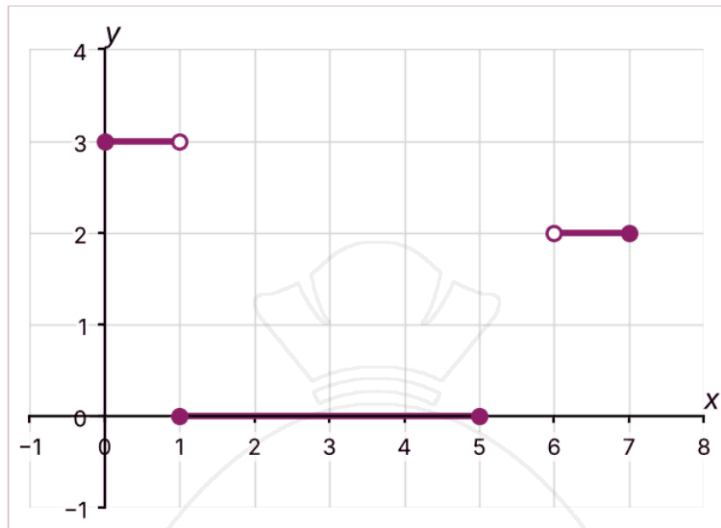
☐ $[-103.003] = -104$ (چون $-104 \leq -103.003 < -103$)

☐ $[-2309.54] = -2310$ (چون $-2310 \leq -2309.54 < -2309$)

۷) تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

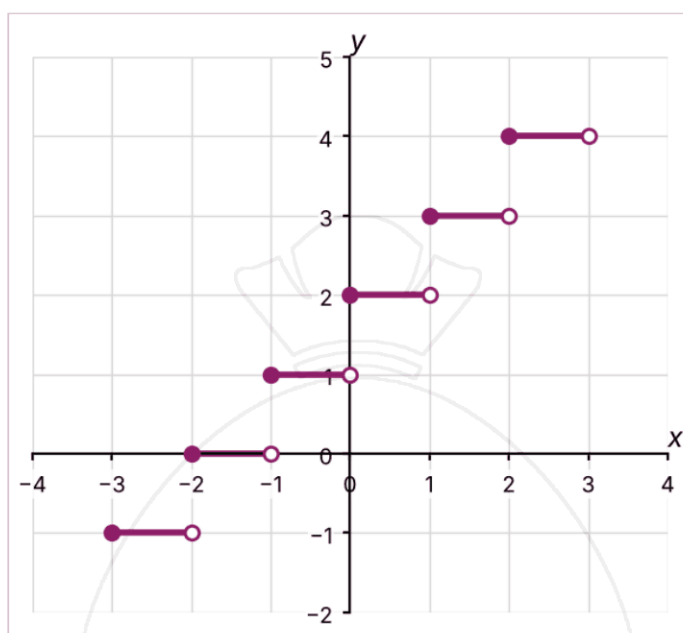
$$f(x) = \begin{cases} 3 & (x \in [0, 1)) \\ 0 & (x \in [1, 5]) \\ 2 & (x \in (6, 7]) \end{cases}$$

سه پاره افقی: ارتفاع ۳ روی بازه $[0, 1)$ ، ارتفاع ۰ روی $[1, 5]$ و ارتفاع ۲ روی $(6, 7]$



۸) تابع با ضابطه $f(x) = [x] + 2$ و دامنه $D_f = [-3, 3)$ را رسم کنید.

$[2,3)$	$[1,2)$	$[0,1)$	$[-1,0)$	$[-2,-1)$	$[-3,-2)$	x
4	3	2	1	0	-1	$f(x) = [x] + 2$



تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ به طور تقریبی قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد. در این تابع x نشان دهنده ماه های پس از تولد است. قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً چقدر است؟ در چه سنی قد متوسط یک کودک تقریباً یک متر می شود؟

۹ ماهگی: $f(9) = 7\sqrt{9} + 50 = 7 \times 3 + 50 = 71$ سانتی متر.

یک متر (۱۰۰ سانتی متر): $7\sqrt{x} + 50 = 100 \Rightarrow \sqrt{x} = 50/7 \approx 7.14 \Rightarrow x \approx 51$

یعنی در حدود ۵۱ ماهگی (تقریباً ۴ سال و ۳ ماهگی) قد متوسط کودک به یک متر می رسد.

الف) هر مایل تقریباً $\frac{1}{6}$ کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام یک از رابطه‌های سمت چپ است.

$f(x) = (8/5)x$ — این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است.

$g(x) = (5/8)x$ — این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است.

ب) تندی 30 مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟

الف) $1.6 = 8/5$ ، پس برای تبدیل مایل به کیلومتر باید در $8/5$ ضرب کنیم؛ این کار را f انجام می‌دهد. برعکس، برای تبدیل کیلومتر به مایل در $5/8$ ضرب می‌کنیم که همان g است. پس هر جمله مربوط به رابطه هم‌ردیف خودش است: f : مایل به کیلومتر؛ g : کیلومتر به مایل. (این دو رابطه، وارون یکدیگرند.)

ب) $f(30) = (8/5) \times 30 = 48$ ؛ یعنی 30 مایل بر ساعت تقریباً 48 کیلومتر بر ساعت است.

وارون تابع‌های داده‌شده را حساب کنید.

$$s^{-1} = \dots, s = \{(4,1), (1,4), (3,3), (2,5)\}$$

$$t^{-1} = \dots, t = \{(5,1), (1,4), (4,3), (2,3)\}$$

$$u^{-1} = \dots, u = \{(2,3), (5,2), (4,1), (3,4)\}$$

برای وارون، مؤلفه‌های هر زوج مرتب را جابه‌جا می‌کنیم:

$$s^{-1} = \{(1,4), (4,1), (3,3), (5,2)\} \quad \bigcirc$$

$$t^{-1} = \{(1,5), (4,1), (3,4), (3,2)\} \quad \bigcirc \quad \text{(تابع نیست، زیرا ۳ دو بار به عنوان مؤلفه اول آمده است)}$$

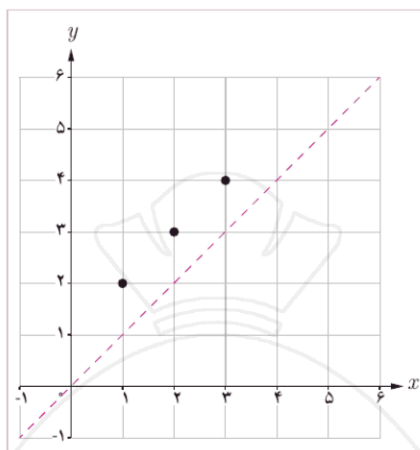
$$u^{-1} = \{(3,2), (2,5), (1,4), (4,3)\} \quad \bigcirc$$

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



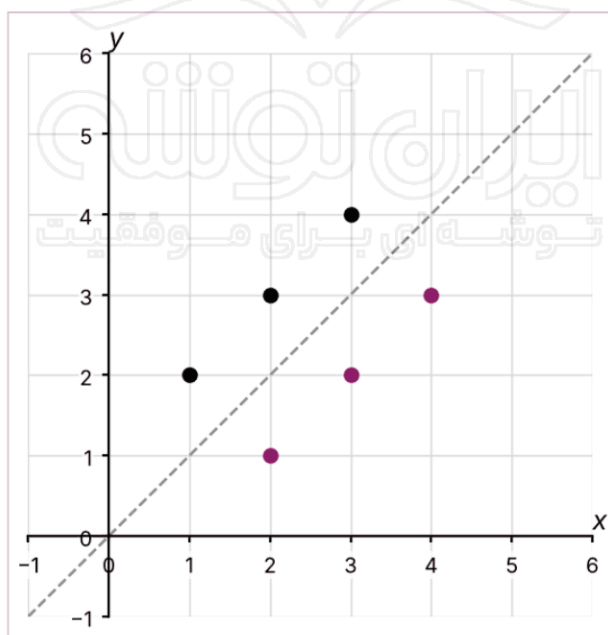
- ۱) در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.
 الف) تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.
 ب) تابع f^{-1} را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.
 پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار f^{-1} را رسم کنید.
 ت) نمودار f و f^{-1} چه ارتباطی با هم دارند؟ «نمودار f و f^{-1} نسبت به قرینه یکدیگرند.»



الف) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

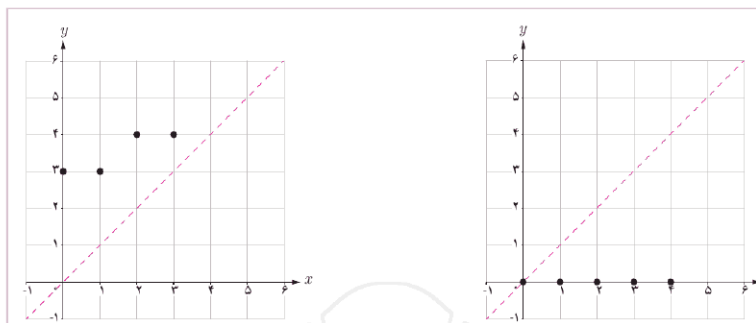
ب) $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

پ) نقاط $(2, 1)$ ، $(3, 2)$ و $(4, 3)$ را (به رنگ تیره‌تر) رسم می‌کنیم:



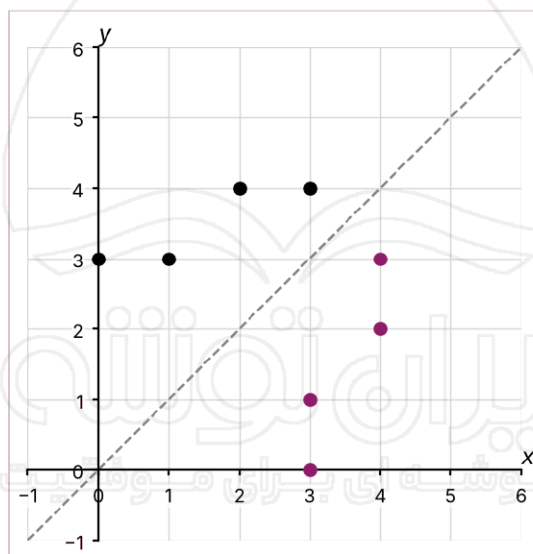
ت) «نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) قرینه یکدیگرند.»

۲) الف) در مورد بیان کنید چرا نمودار داده‌شده معرفی یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید.
 ب) عبارت زیر را کامل کنید. «برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به رسم کنیم.»

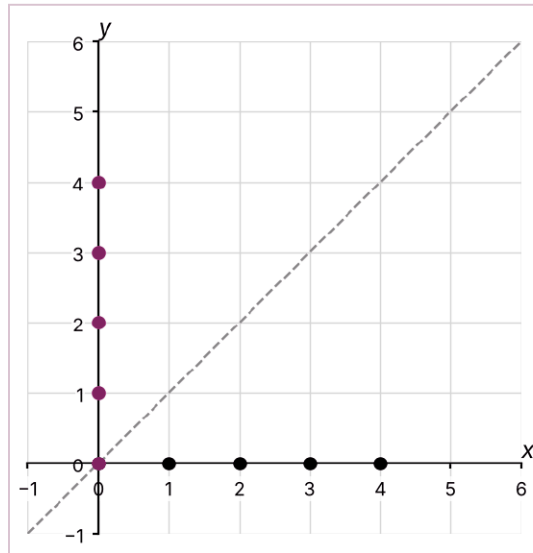


الف) در هر دو نمودار به ازای هر x دقیقاً یک y وجود دارد (هیچ خط عمودی نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند)؛ پس هر دو تابع‌اند. وارون‌ها را با جابه‌جایی مؤلفه‌ها (نقاط بنفش) رسم می‌کنیم:

نمودار سمت چپ: $\{(0,3), (1,3), (2,4), (3,4)\} \leftarrow$ وارون: $\{(3,0), (3,1), (4,2), (4,3)\}$

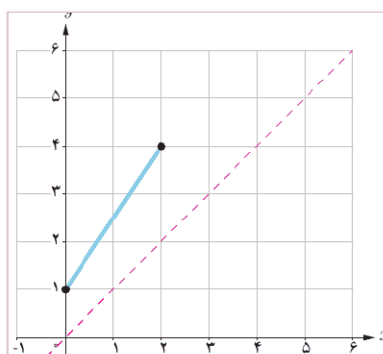


نمودار سمت راست: $\{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\} \leftarrow$ وارون: $\{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4)\}$

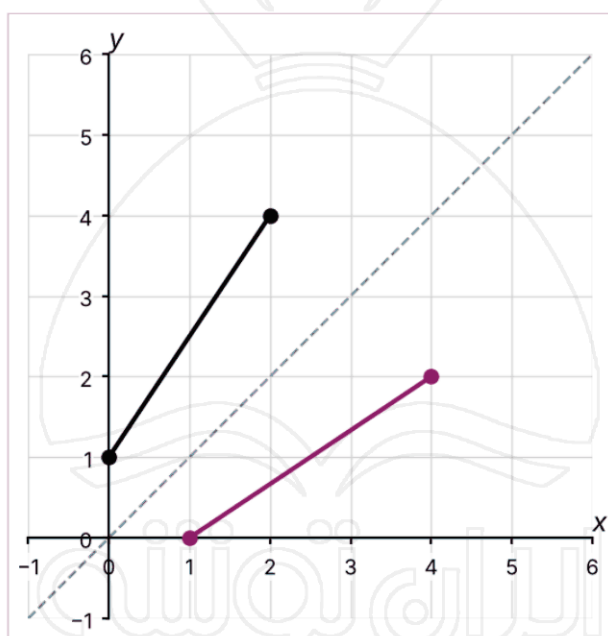


(در هر دو مورد وارون تابع نیست، چون نقاط با مؤلفهٔ اول یکسان و مؤلفهٔ دوم متفاوت دارد.)
ب) «برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم.»

۳) نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

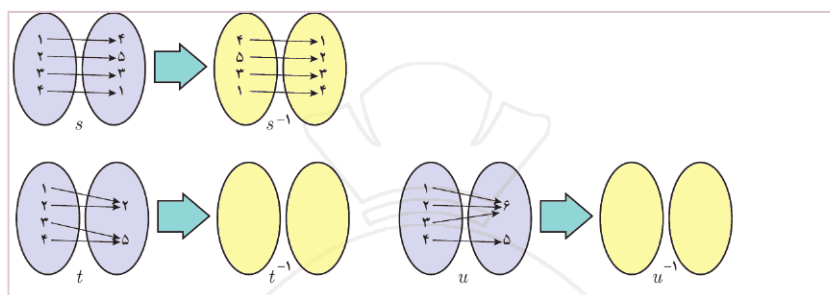


تابع، پاره خطی از (0, 1) تا (2, 4) است. قرینه آن نسبت به $y = x$ ، پاره خطی از (1, 0) تا (4, 2) است:



توشه ای برای موفقیت

- (الف) به نمونه داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به دست آورید.
- (ب) در جدول مقابل گزینه های درست را انتخاب کنید. s^{-1} یک تابع است: ☐ بله ☐ خیر؛ t^{-1} یک تابع است: ☐ بله ☐ خیر؛ u^{-1} یک تابع است: ☐ بله ☐ خیر
- (پ) عبارت زیر را کامل کنید. وارون تابع f ، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه های تکراری وجود نداشته باشد.
- (ت) تابع $f = \{(1,2), (-2,4), (2,-1), (-1,2)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبه f^{-1} ، تعیین کنید که این تابع یک به یک است یا خیر؟



(الف) در نمودار پیکانی جهت پیکان ها را برعکس می کنیم:

- $t^{-1} = \{(2,1), (2,2), (5,3), (5,4)\} \leftarrow t = \{(1,2), (2,2), (3,5), (4,5)\}$ (از ۲ دو پیکان به ۱ و ۲ و از ۵ دو پیکان به ۳ و ۴ می رود)
- $u^{-1} = \{(6,1), (6,2), (6,3), (5,4)\} \leftarrow u = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,5)\}$ (از ۶ سه پیکان خارج می شود)

خیر	بله	
	✓	s^{-1} یک تابع است.
✓		t^{-1} یک تابع است.
✓		u^{-1} یک تابع است.

(ب) s^{-1} تابع است (از هر عضو فقط یک پیکان خارج می شود)، ولی t^{-1} و u^{-1} تابع نیستند.

(پ) «وارون تابع f ، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه های دوم تکراری وجود نداشته باشد.»

(ت) مؤلفه های دوم ۲، ۴، -۱، ۲ هستند و عدد ۲ دو بار تکرار شده است ($f(1) = f(-1) = 2$)؛ پس f یک به یک نیست و وارونش تابع نیست.

۲) نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.
الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

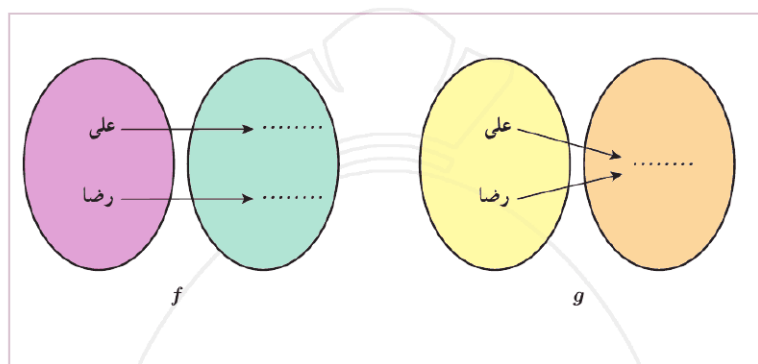
ب) آیا f و g هر دو تابع اند؟

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟

ت) کدام یک از دو تابع f و g یک به یک هستند؟

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید. با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او و به طور یکتا تعیین با

دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین



الف) در f علی و رضا به دو عنصر متفاوت می‌روند؛ این نمودار «اثر انگشت» است (اثر انگشت هیچ دو نفری یکسان نیست): علی $\leftarrow$ اثر انگشت علی، رضا $\leftarrow$ اثر انگشت رضا. در g هر دو به یک عنصر می‌روند؛ این نمودار «گروه خونی» است (علی و رضا می‌توانند گروه خونی یکسان داشته باشند).

ب) بله؛ هر انسان فقط یک اثر انگشت و یک گروه خونی دارد.

پ) f^{-1} تابع است (هر اثر انگشت فقط به یک نفر برمی‌گردد)؛ ولی g^{-1} تابع نیست (یک گروه خونی به چند نفر برمی‌گردد).

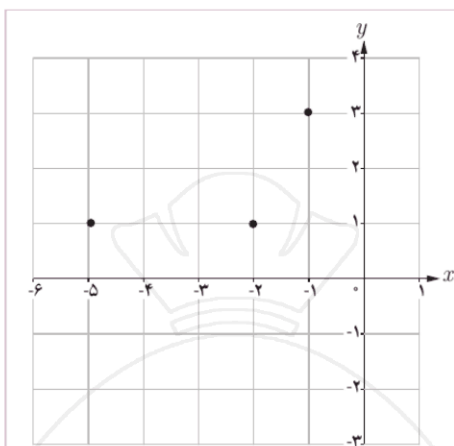
ت) تابع f (اثر انگشت) یک به یک است؛ g یک به یک نیست.

ث) با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین نمی‌شود. با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین می‌شود.

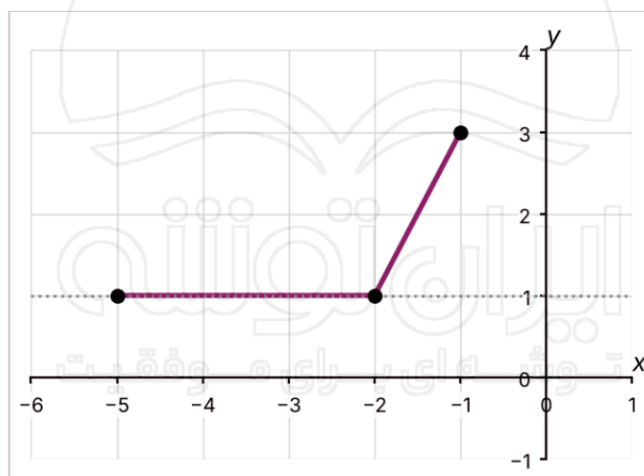
۱) در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نمودار تابعی رسم کنید که تابع باشد.

الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک به یک است؟

ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟ «اگر هر خط موازی محور نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع یک به یک است.»



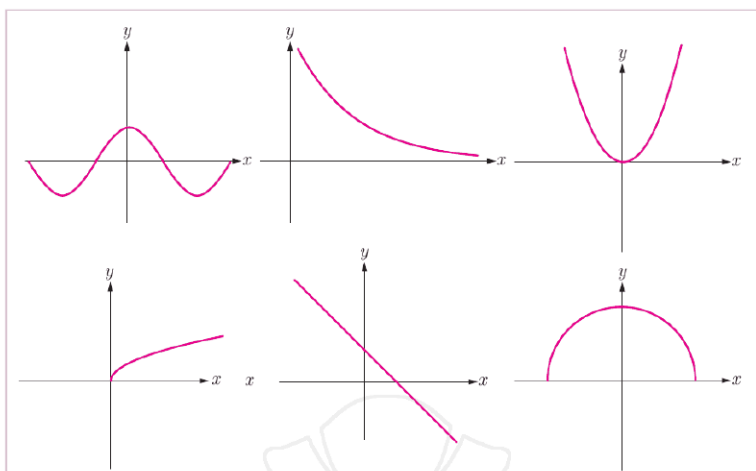
نقاط $(-5, 1)$ ، $(-2, 1)$ و $(-1, 3)$ را با پاره خط به هم وصل می‌کنیم (هر x فقط یک y دارد، پس تابع است):



الف) خیر؛ دو نقطه $(-5, 1)$ و $(-2, 1)$ مؤلفه دوم یکسان دارند، پس خط $y = 1$ نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. (هر تابعی که از این نقاط بگذرد یک به یک نیست.)

ب) «اگر هر خط موازی محور x ها (خط افقی) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع یک به یک است.»

۲) کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟



با آزمون خط افقی: تابعی یک به یک است که هر خط افقی آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

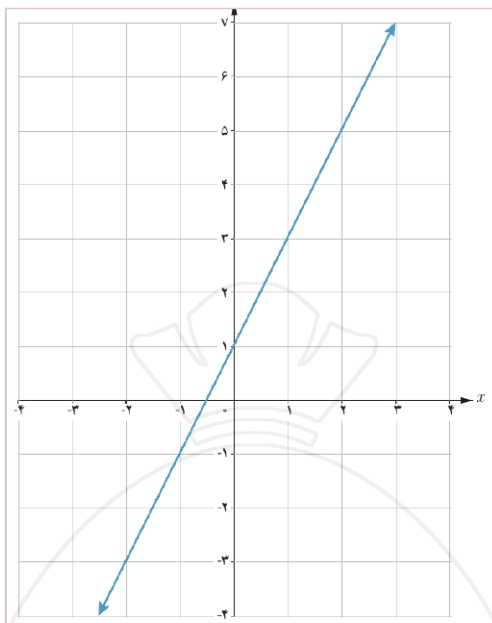
- ردیف بالا، نمودار اول (موج‌دار): یک به یک نیست (خط‌های افقی آن را چند بار قطع می‌کنند).
 - ردیف بالا، نمودار دوم (منحنی نزولی): **یک به یک است.**
 - ردیف بالا، نمودار سوم (سه‌می): یک به یک نیست (قرینه نسبت به محور y).
 - ردیف پایین، نمودار اول (منحنی رادیکالی صعودی): **یک به یک است.**
 - ردیف پایین، نمودار دوم (خط نزولی): **یک به یک است.**
 - ردیف پایین، نمودار سوم (نیم‌دایره): یک به یک نیست.
- (ردیف‌ها از سمت چپ شمرده شده‌اند، مطابق شکل.)

ایران توئینش
توشه‌ای برای موفقیت

تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم.

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

ب) نمودار زیر را توضیح دهید: $f^{-1}(7) = 3$ و $f(3) = 7$ ؛ به عبارت دیگر $(3, 7) \in f$ و $(7, 3) \in f^{-1}$.



الف) نمودار f یک خط با شیب ۲ است. هر خط افقی (موازی محور x ها) آن را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس f یک به یک است.

ب) $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$ ، پس زوج $(3, 7)$ عضو f است. وارون با جابه‌جایی مؤلفه‌هاست؛ پس $(7, 3) \in f^{-1}$ یعنی $f^{-1}(7) = 3$. در شکل، f عدد ۳ را با «ضرب در ۲ و جمع با ۱» به ۷ می‌برد و f^{-1} با «کم کردن ۱ و تقسیم بر ۲» $(7 - 1) / 2 = 3$ را به ۳ برمی‌گرداند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱) هر تابع خطی غیر ثابت یک به یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = x + 5$ ب) $g(x) = 4x$ پ) $u(x) = 2x + 3$ ت) $v(x) = (2/3)x - 4$

چرا؟ نمودار تابع خطی غیر ثابت خطی با شیب ناصفر است و هر خط افقی آن را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس یک به یک است.

الف) $f^{-1}(x) = x - 5$ پس $y = x + 5 \Rightarrow x = y - 5$

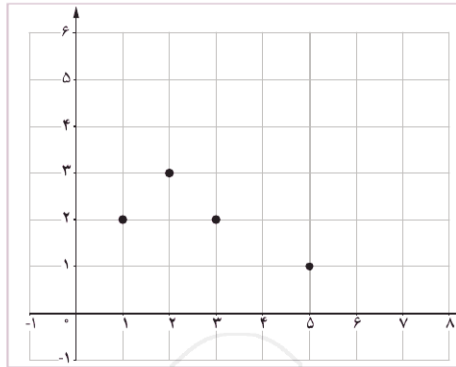
ب) $g^{-1}(x) = x/4$ پس $y = 4x \Rightarrow x = y/4$

پ) $u^{-1}(x) = (x - 3)/2$ پس $y = 2x + 3 \Rightarrow x = (y - 3)/2$

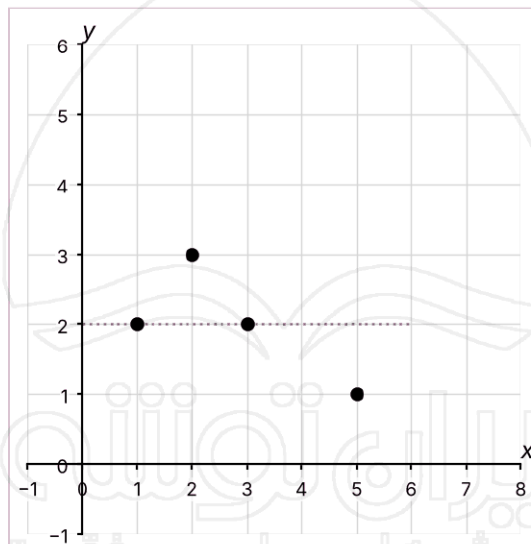
ت) $v^{-1}(x) = 3(x + 4)/2 = (3x + 12)/2$ پس $y = (2/3)x - 4 \Rightarrow (2/3)x = y + 4 \Rightarrow x = 3(y + 4)/2$



۲) الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک به یک نیست؟
 ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید. مسئله چند جواب دارد؟

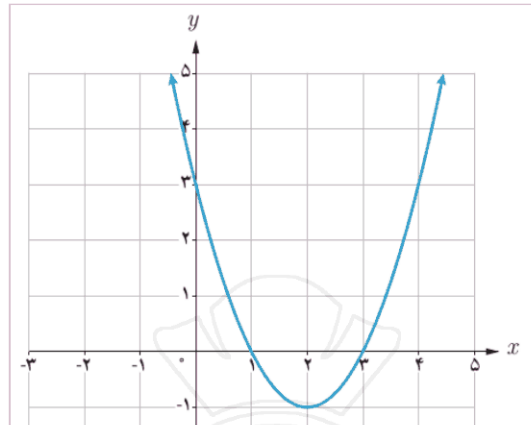


الف) نقاط نمودار: $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(5,1)$. دو نقطه $(1,2)$ و $(3,2)$ مؤلفه دوم یکسان دارند؛ یعنی خط افقی $y = 2$ نمودار را در دو نقطه قطع می کند.



ب) باید یکی از این دو نقطه را حذف کنیم: یا $(1,2)$ یا $(3,2)$. مسئله ۲ جواب دارد.

الف) به نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 4x + 3$ در شکل مقابل دقت کنید. با محدود کردن دامنه این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟ $[1, 4] \square [0, 2]$
 ب) آیا هر تابع درجه ۲، تابعی یک‌به‌یک است؟ چرا؟



الف) رأس سهمی $x = 2$ است و نمودار روی $(-\infty, 2]$ نزولی و روی $[2, +\infty)$ صعودی است.

○ بازه $[1, 4]$ رأس را در بر دارد و مثلاً $f(1) = f(3) = 0$ ؛ یک‌به‌یک نیست.

○ بازه $[0, 2]$ کاملاً در قسمت نزولی است؛ یک‌به‌یک است.

پس فقط بازه $[0, 2]$ درست است.

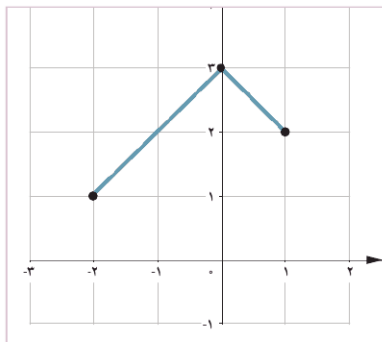
ب) خیر. نمودار هر تابع درجه ۲ (سهمی) نسبت به خط گذرا از رأس قرینه است و خط‌های افقی بالای (یا پایین) رأس آن را در دو نقطه قطع می‌کنند؛ مثلاً $f(1) = f(3)$ با $1 \neq 3$.

۱) وارون تابع $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\}$ را به دست آورید.

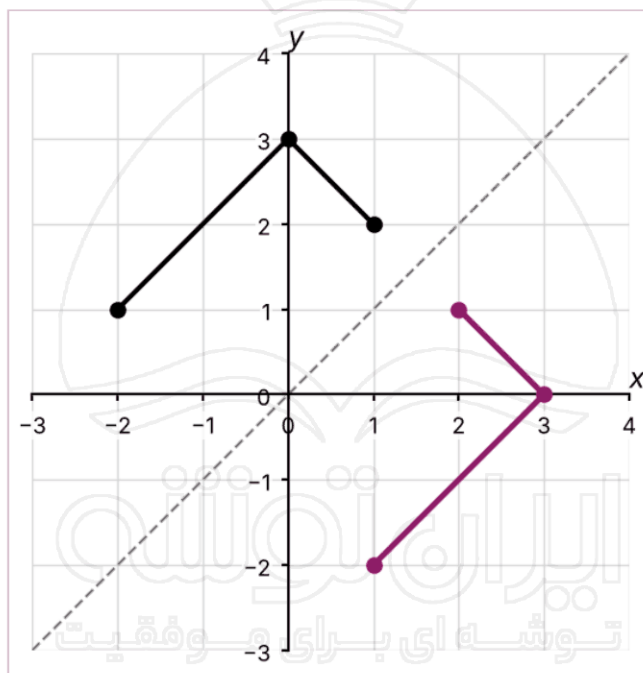
مؤلفه‌های هر زوج را جابه‌جا می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1)\}$$

۲) نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.



نقاط شکستگی $(-2, 1)$ ، $(0, 3)$ و $(1, 2)$ هستند. قرینه آنها نسبت به $y = x$: $(1, -2)$ ، $(3, 0)$ و $(2, 1)$. این نقاط را با پاره خط به هم وصل می کنیم (نمودار بنفش):



توجه: چون تابع اصلی یک به یک نیست (مثلاً مقدار $2/5$ دو بار گرفته می شود)، وارون رسم شده تابع نیست.

۳) ضابطه وارون هر یک از توابع زیر را بیابید.

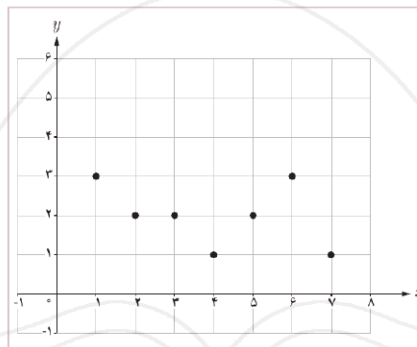
الف) $f(x) = 5x - 2$ ب) $f(x) = (3/5)x + 4$ پ) $f(x) = (-7x + 3)/5$

الف) $f^{-1}(x) = (x + 2)/5$ پس $y = 5x - 2 \Rightarrow x = (y + 2)/5$

ب) $f^{-1}(x) = (5/3)x - 20/3 = (5x - 20)/3$ پس $y = (3/5)x + 4 \Rightarrow x = (5/3)(y - 4)$

پ) $f^{-1}(x) = (3 - 5x)/7$ پس $5y = -7x + 3 \Rightarrow x = (3 - 5y)/7$

۴) می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه باقی می‌تواند بماند؟



نقاط: $(1,3), (2,2), (3,2), (4,1), (5,2), (6,3), (7,1), (1,2), (2,3), (3,1)$. مؤلفه‌های دوم: ۳ (دو بار)، ۲ (سه بار)، ۱ (دو بار).

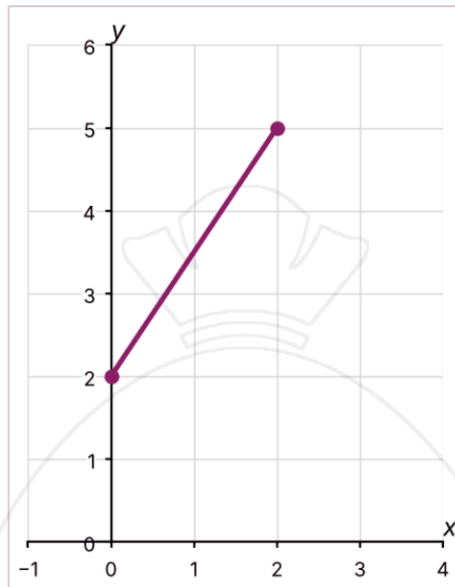
در تابع یک‌به‌یک هر مقدار y فقط یک بار می‌آید؛ پس از هر مقدار یک نقطه می‌ماند. چون سه مقدار متفاوت $(1,2,3)$ داریم، حداکثر ۳ نقطه باقی می‌ماند (مثلاً $(1,3), (2,2), (4,1)$).

۵) نمودار تابعی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ را رسم کنید:

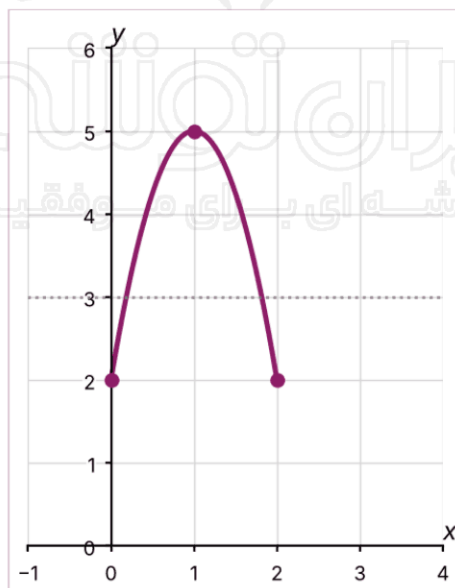
الف) به شرطی که این تابع یک به یک باشد.

ب) به شرطی که این تابع یک به یک نباشد.

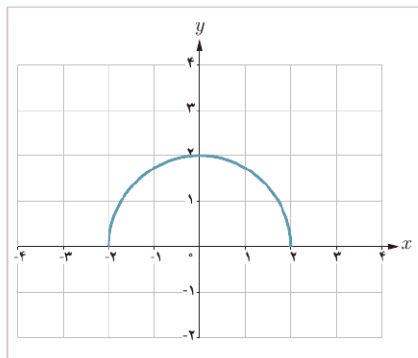
الف) پاره خط از $(0, 2)$ تا $(2, 5)$ (مثلاً $f(x) = 1.5x + 2$) یک به یک است و دامنه و برد خواسته شده را دارد:



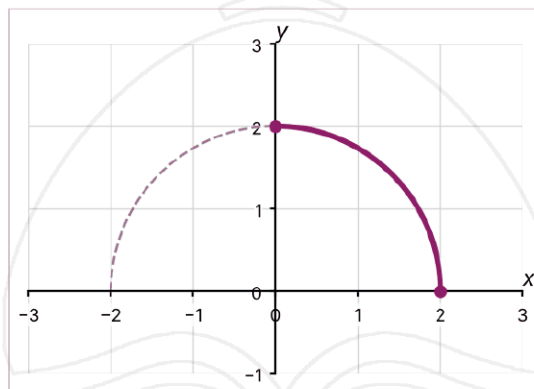
ب) نمودار سهمی $f(x) = 5 - 3(x - 1)^2$ روی $[0, 2]$ برد آن $[2, 5]$ است ولی $f(0) = f(2) = 2$ پس یک به یک نیست (پاسخ‌های دیگری نیز ممکن است):



۶) با حذف بخشی از نمودار نیم‌دایره داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص کنید.



نیم‌دایره (شعاع ۲) نسبت به محور y متقارن است و خط‌های افقی آن را در دو نقطه قطع می‌کنند. اگر نیمه سمت چپ ($x < 0$) را حذف کنیم، ربع‌دایره باقی‌مانده از $(0, 2)$ تا $(2, 0)$ نزولی و یک‌به‌یک است:



(حذف نیمه راست و نگه داشتن ربع‌دایره سمت چپ نیز پاسخ درست است.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x - 2$ ، آنگاه مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها (f/g) را به دست آورید و دامنه هر یک را مشخص کنید.

حل: $(f - g)(x) = \dots\dots (f/g)(x) = f(x)/g(x) = \dots\dots$

$$(f + g)(x) = (2x - 1) + (x - 2) = 3x - 3$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 1) - (x - 2) = 2x - 1 - x + 2 = x + 1: \text{تفاضل}$$

$$(f \cdot g)(x) = (2x - 1)(x - 2) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$D_{\{f+g\}} = D_{\{f-g\}} = D_{\{f \cdot g\}} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = (2x - 1)/(x - 2): \text{تقسیم}$$

$$D_{\{f/g\}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x \mid x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$



نمودار تابع f نشان می‌دهد که در هر ماه سال گذشته، چند هزار تومان جرم خریداری شده است؛ برای مثال $300 = f(\text{تیر})$. نمودار تابع g نشان می‌دهد این هنرمند در هر ماه سال گذشته چند هزار تومان ابزار و براق خریده است. نمودار تابع هزینه خرید علی در سال گذشته رسم شده است. این تابع را با c نشان می‌دهیم. الف) بر روی شکل، درستی مقادیر تابع c را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید. ب) آیا برای هر x در دامنه تابع c ، $c(x) = f(x) + g(x)$ درست است؟

مقادیر خوانده شده از نمودارها (هزار تومان):

ماه	دی	بهمن	اسفند
f (جرم)	450	450	0
g (ابزار و براق)	150	150	100
c (هزینه کل)	600	600	100
$f + g$	600	600	100

الف) فصل زمستان دی، بهمن و اسفند است. در هر سه ماه $c = f + g$ برقرار است: $450 + 150 = 600$ ، $450 + 0 = 450$ ، $150 + 100 = 250$.

ب) بله؛ هزینه کل هر ماه برابر مجموع هزینه جرم و هزینه ابزار و براق همان ماه است (درستی آن برای همه ۱۲ ماه سال با نمودارها بررسی می‌شود؛ مثلاً در تیر $300 + 300 = 600$). پس برای هر x در دامنه: $c(x) = f(x) + g(x)$.

۱) برای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 3x + 1$ و $g(x) = x - 3$ جدول داده شده را کامل کنید. (ستون‌ها: تابع، ضابطه، دامنه برای $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ ، f/g)

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$(f+g)(x) = x^2 + 4x - 2$	$\mathbb{R}$
$f - g$	$(f-g)(x) = x^2 + 2x + 4$	$\mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = (x^2 + 3x + 1)(x - 3) = x^3 - 8x - 3$	$\mathbb{R}$
f / g	$(f/g)(x) = (x^2 + 3x + 1)/(x - 3)$	$\mathbb{R} - \{3\}$

۲) برای دو تابع با ضابطه‌های $u(x) = \sqrt{x} + 1$ و $v(x) = x - 1$ جدول داده‌شده را کامل کنید. (ستون‌ها: تابع، ضابطه، دامنه برای $u/v, u \cdot v, u - v, u + v$)

$D_u = [0, +\infty)$ و $D_v = \mathbb{R}$ ؛ پس $D_u \cap D_v = [0, +\infty)$.

تابع	ضابطه	دامنه
$u + v$	$(u+v)(x) = \sqrt{x} + 1 + x - 1 = \sqrt{x} + x$	$[0, +\infty)$
$u - v$	$(u-v)(x) = (\sqrt{x} + 1) - (x - 1) = \sqrt{x} - x + 2$	$[0, +\infty)$
$u \cdot v$	$(u \cdot v)(x) = (\sqrt{x} + 1)(x - 1) = x\sqrt{x} - \sqrt{x} + x - 1$	$[0, +\infty)$
u / v	$(u/v)(x) = (\sqrt{x} + 1)/(x - 1)$	$[0, +\infty) - \{1\}$



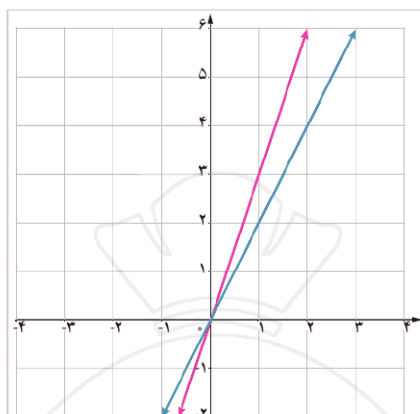
مطابق شکل، دو تابع f و g به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند.

الف) ضابطه دو تابع f و g را به دست آورید.

ب) ضابطه دو تابع $f + g$ و $f - g$ را به دست آورید.

پ) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع $f + g$ و $f - g$ را با رنگ‌های مختلف رسم کنید.

ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟



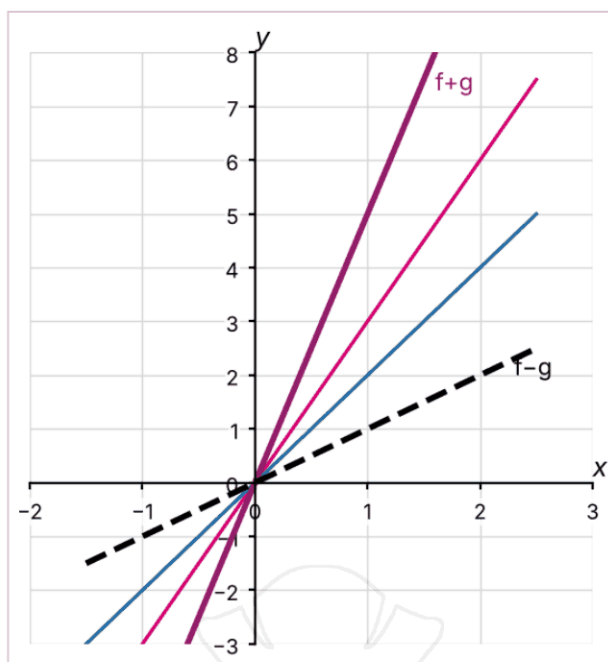
الف) هر دو خط از مبدأ می‌گذرند. خط قرمز از $(1, 3)$ و خط آبی از $(1, 2)$ می‌گذرد؛ پس

$$f(x) = 3x, \quad g(x) = 2x$$

ب) $(f - g)(x) = 3x - 2x = x$ ، $(f + g)(x) = 3x + 2x = 5x$

پ)

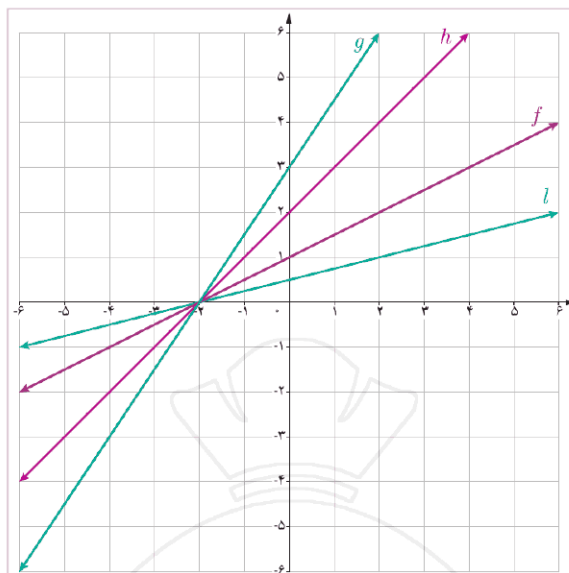
۱	۰	x
3	0	$f(x)$
2	0	$g(x)$
5	0	$(f + g)(x)$
1	0	$(f - g)(x)$



ت) بله؛ اگر $f(x) = ax + b$ و $g(x) = cx + d$ باشند، $(f + g)(x) = (a + c)x + (b + d)$ نیز تابعی خطی است. تفریق هم همین طور است: $(f - g)(x) = (a - c)x + (b - d)$ یک تابع خطی است. (ممکن است ضریب x صفر شود و تابع ثابت شود، مثلاً $x + (-x) = 0$.)

با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x) = (1/2)f(x)$. جاهای خالی را پر کنید.

$$f(x) \dots\dots h(x) = f(x) \dots\dots g(x) =$$



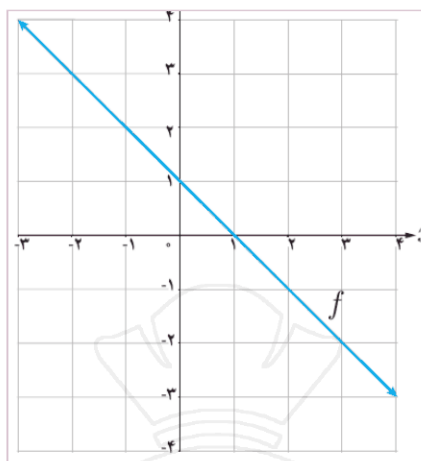
نمودارها همه از نقطه $(-2, 0)$ می‌گذرند. f از $(0, 1)$ می‌گذرد: $f(x) = (x + 2)/2$. عرض نقطه برخورد با محور y : برابر ۱، h برابر ۲ و g برابر ۳ است؛ پس عرض هر نقطه از f در ۲ (برای h) و در ۳ (برای g) ضرب شده است:

$$g(x) = 3 f(x) , h(x) = 2 f(x)$$

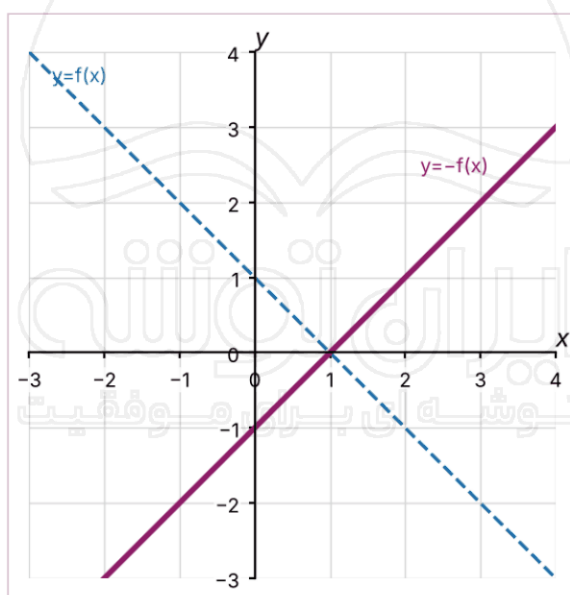
(بررسی: $g(x) = 3(x+2)/2$ در $x = 0$ برابر ۳ و $h(x) = x + 2$ در $x = 0$ برابر ۲ است.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- ۱) با توجه به نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ را رسم کنید.
- ۲) عبارت زیر را کامل کنید. «برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ کافی است قرینه نمودار ضابطه $y = f(x)$ را نسبت به محور رسم کنیم.»

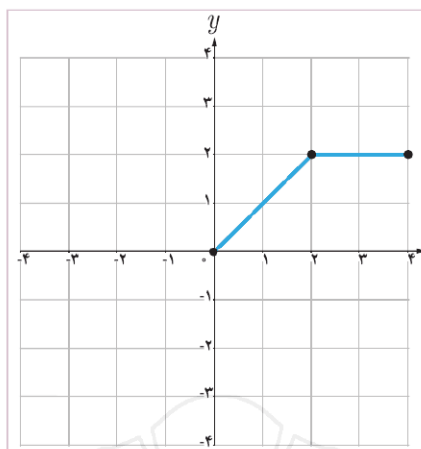


- ۱) نمودار f خطی است که از $(0, 1)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد ($f(x) = 1 - x$). عرض هر نقطه را قرینه می‌کنیم: $-f(x) = x - 1$ از $(0, -1)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد.

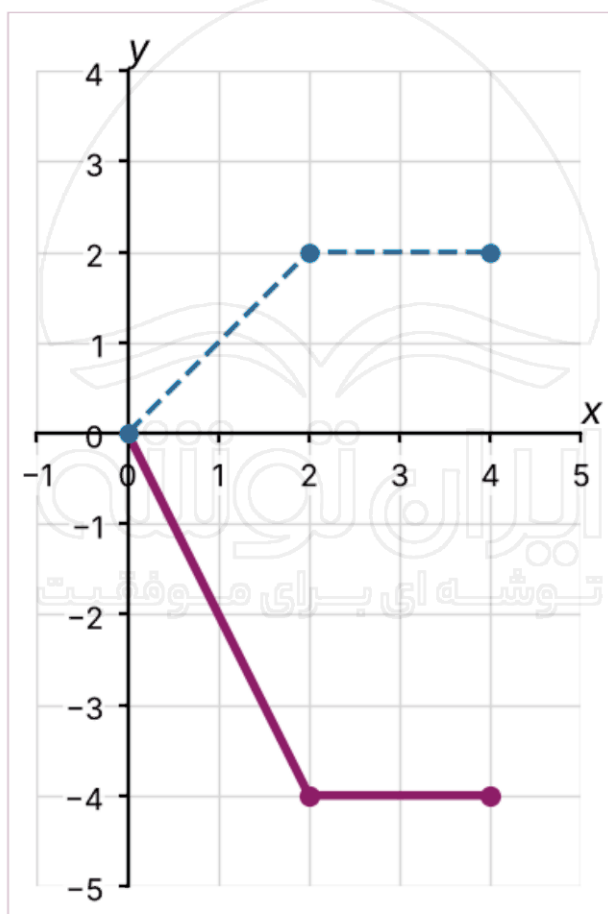


- ۲) «... قرینه نمودار ضابطه $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.»

۳) در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطه $y = -2f(x)$ را رسم کنید.



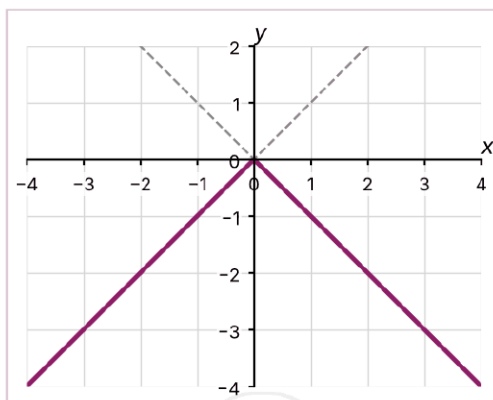
عرض هر نقطه را در -2 ضرب می‌کنیم: $(0,0) \rightarrow (0,0)$ ، $(2,2) \rightarrow (2,-4)$ و $(4,2) \rightarrow (4,-4)$



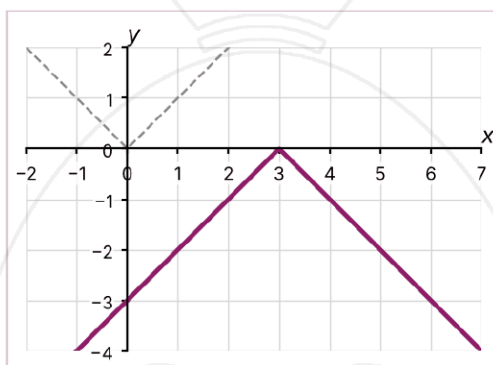
۱) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$ ب) $h(x) = -|x - 3|$ پ) $l(x) = 2|x - 2|$

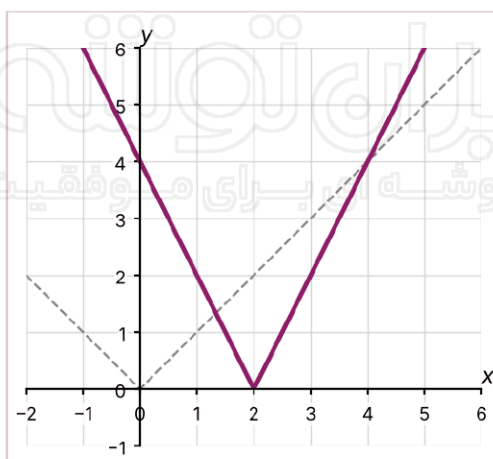
الف) قرینه $|x|$ نسبت به محور x ها (رأس در مبدأ، رو به پایین):



ب) $|x|$ را ۳ واحد به راست منتقل و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم (رأس $(3, 0)$):



پ) $|x|$ را ۲ واحد به راست منتقل و عرض‌ها را ۲ برابر می‌کنیم (رأس $(2, 0)$ ، رو به بالا و تندتر؛ $l(0) = 4$):



(خط چین، نمودار $|x|$ است.)

۲) در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = |x|$ ، $g(x) = 1/x$ ب) $f(x) = x^2 - 4$ ، $g(x) = x + 2$

پ) $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = -\sqrt{x}$ ت) $f(x) = (x-2)/(x+5)$ ، $g(x) = x^2 + 3x - 10$

ث) $f = \{(2,5), (3,4), (0,-2)\}$ ، $g = \{(-1,2), (0,3), (2,4), (3,0)\}$

الف) $D_f = \mathbb{R}$ ، $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ ؛ $D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ و $g(x)$ هیچ گاه صفر نمی شود.

○ $(f/g)(x) = |x|/(1/x) = x|x|$ ، $(f \cdot g)(x) = |x|/x$ ، $(f-g)(x) = |x| - 1/x$ ، $(f+g)(x) = |x| + 1/x$

○ دامنه هر چهار تابع: $\mathbb{R} - \{0\}$

ب) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

○ $(f+g)(x) = x^2 + x - 2$ ، $(f-g)(x) = x^2 - x - 6$ ، $(f \cdot g)(x) = (x^2-4)(x+2) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ (دامنه $\mathbb{R}$)

○ $(f/g)(x) = (x^2-4)/(x+2)$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-2\}$ (ساده شده: $x-2$ ، ولی دامنه همان $\mathbb{R} - \{-2\}$ می ماند)

پ) $D_f = D_g = [0, +\infty)$

○ $(f+g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ ، $(f-g)(x) = 2\sqrt{x}$ ، $(f \cdot g)(x) = -x$ (دامنه $[0, +\infty)$)

○ $(f/g)(x) = \sqrt{x}/(-\sqrt{x}) = -1$ با دامنه $[0, +\infty) - \{0\} = (0, +\infty)$ (چون $g(0) = 0$)

ت) $D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$ ، $D_g = \mathbb{R}$ ، $D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$ و $g(x) = (x+5)(x-2)$

○ $(f+g)(x) = (x-2)/(x+5) + x^2 + 3x - 10 = (x^3 + 8x^2 + 6x - 52)/(x+5)$

○ $(f-g)(x) = (x-2)/(x+5) - (x^2 + 3x - 10) = (-x^3 - 8x^2 - 4x + 48)/(x+5)$

○ $(f \cdot g)(x) = (x-2)/(x+5) \cdot (x+5)(x-2) = (x-2)^2$ ؛ دامنه این سه تابع: $\mathbb{R} - \{-5\}$

○ $(f/g)(x) = (x-2)/(x+5) \div (x^2 + 3x - 10) = 1/(x+5)^2$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$ (زیرا $g(x) = 0$ برای $x = -5$ و $x = 2$)

ث) $D_f = \{0, 2, 3\}$ ، $D_g = \{-1, 0, 2, 3\}$ ؛ $D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$

○ $f + g = \{(0, 1), (2, 9), (3, 4)\}$ (مثلاً $-2 + 3 = 1$)

○ $f - g = \{(0, -5), (2, 1), (3, 4)\}$

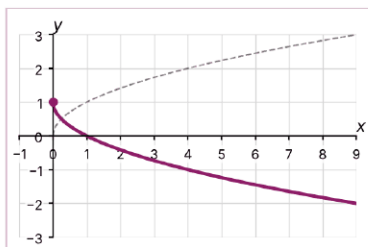
○ $f \cdot g = \{(0, -6), (2, 20), (3, 0)\}$

○ $f / g = \{(0, -2/3), (2, 5/4)\}$ (دامنه $\{0, 2\}$ است، چون $g(3) = 0$)

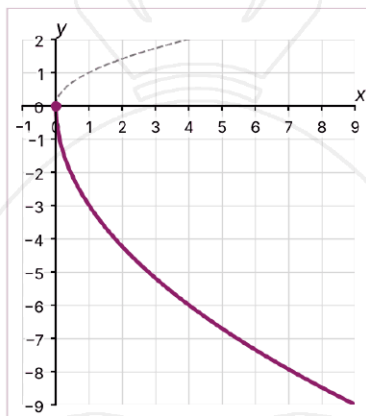
۳) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$ ب) $s(x) = -\sqrt{x-2}$ پ) $t(x) = -3\sqrt{x}$ ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$ ث) $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$

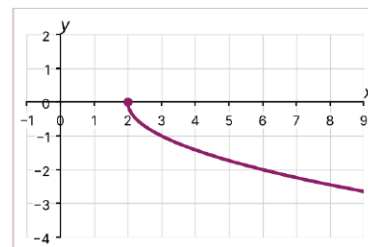
- الف) عرض هر نقطه $\sqrt{x}$ دو برابر می شود؛ از $(0,0)$ ، $(1,2)$ ، $(4,4)$.
- ب) $\sqrt{x}$ را ۲ واحد به راست می بریم و نسبت به محور x قرینه می کنیم؛ شروع از $(2,0)$ ، عبور از $(3,-1)$ و $(6,-2)$.
- پ) عرض ها را در -3 ضرب می کنیم؛ از $(0,0)$ ، $(1,-3)$ ، $(4,-6)$.
- ت) $-\sqrt{x}$ را یک واحد بالا می بریم؛ شروع از $(0,1)$ ، عبور از $(1,0)$ و $(4,-1)$.
- ث) $-\sqrt{x-3}$ را یک واحد بالا می بریم؛ شروع از $(3,1)$ ، عبور از $(4,0)$ و $(7,-1)$.



ت) u



پ) t

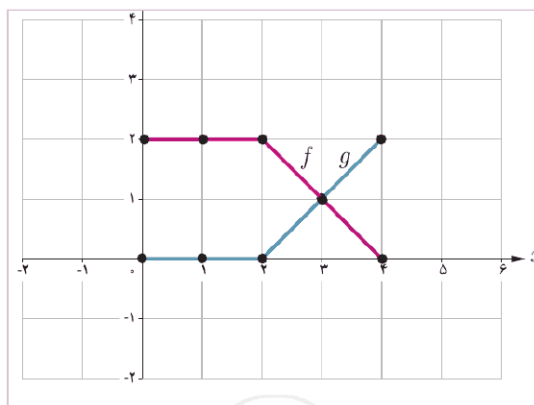


ب) s

(خط چین ها نمودار $\sqrt{x}$ هستند.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

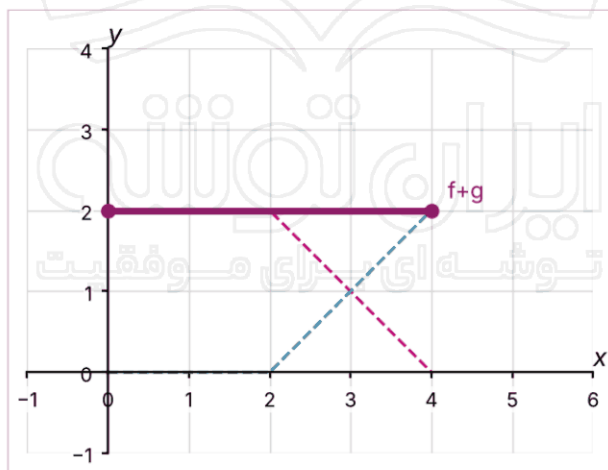
۴) در شکل مقابل، نمودار تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.



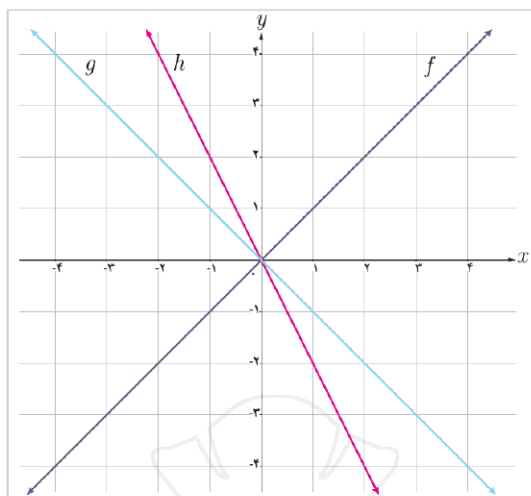
f : $(0,0), (1,2), (2,2), (3,1), (4,0)$ و g : $(0,0), (1,0), (2,0), (3,1), (4,2)$. مقدار مجموع در هر نقطه:

۴	۳	۲	۱	۰	x
0	1	2	2	2	$f(x)$
2	1	0	0	0	$g(x)$
2	2	2	2	2	$(f+g)(x)$

نمودار $f+g$ پاره خطی افقی در ارتفاع ۲ از $x=0$ تا $x=4$ است $(f+g=2)$:



۵) با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟

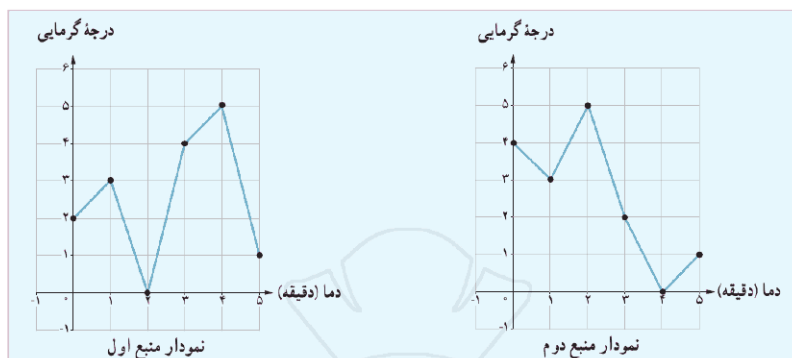


از نمودارها: $f(x) = x$ (خط صعودی)، $g(x) = -x$ ، $h(x) = -2x$ از $(1, -2)$ می‌گذرد.

$$f(x) + h(x) = x + (-2x) = -x = g(x)$$

پس تابع g برابر مجموع f و h است ($g = f + h$). (دو حالت دیگر برقرار نیستند: $f + g = 0$ و $g + h = -3x$).

یک اجاق دارای دو منبع گرمایی قابل تنظیم است که می‌توانند هم‌زمان، به‌طور مستقل و جدا از هم گرما تولید کنند. نمودار دمایی که این دو منبع گرمایی تولید می‌کنند، به‌صورت زیر است. این نمودارها نشان می‌دهد که در عرض ۵ دقیقه، چگونه مقدار دما افزایش یا کاهش می‌یابد. با توجه به نمودارهای زیر بیشترین و کمترین دمایی که در این اجاق تولید می‌شود چه مقدار است؟



دمای کل در هر لحظه، مجموع دمای دو منبع است:

۵	۴	۳	۲	۱	۰	زمان (دقیقه)
1	5	4	0	3	2	منبع اول
1	0	2	5	3	4	منبع دوم
2	5	6	5	6	6	مجموع

هر نمودار پاره‌خطی است و مجموع دو نمودار نیز بین نقاط گره‌ای خطی است، پس بیشترین و کمترین مقدار در همین نقاط رخ می‌دهد: بیشترین دما ۶ (در دقیقه‌های ۰، ۱ و ۳) و کمترین دما ۰ (در دقیقه ۵) است.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

