

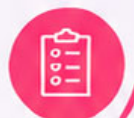
با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe



ریاضی ۲ یازدهم - فصل دوم

هندسه

فهرست

۱۶	صفحه ۲۹ - فعالیت - نقطه هم فاصله از دو ضلع زاویه روی نیمساز است	۴	صفحه ۲۶ - پرسش - تقسیم زمین مثلثی به دو قسمت هم مساحت
۱۱	صفحه ۲۹ - فعالیت - رسم نیمساز یک زاویه	۴	صفحه ۲۶ - فعالیت ۱ - مجموعه نقاط هم فاصله از یک نقطه
۱۱	صفحه ۲۹ - تمرین ۱ - نقطه هم فاصله از چهار رأس	۴	صفحه ۲۶ - فعالیت ۲ - دایره و فاصله نقاط آن تا مرکز
۱۲	صفحه ۲۹ - تمرین ۲ - عمودمنصف های دو ضلع مثلث	۵	صفحه ۲۶ - فعالیت ۳ - نقاط درون و بیرون دایره
۱۲	صفحه ۳۰ - تمرین ۳ - نیمسازهای دو زاویه مثلث	۵	صفحه ۲۶ - فعالیت ۴ - نقاط هم فاصله از یک خط
۱۳	صفحه ۳۰ - تمرین ۴ - رسم مثلث های متساوی الساقین	۵	صفحه ۲۶ - فعالیت ۵ - نقاط هم فاصله از یک نقطه روی یک خط
۱۴	صفحه ۳۱ - کار در کلاس ۱ - اثبات خواص تناسب	۶	صفحه ۲۶ - فعالیت ۶ - رسم مثلث با سه ضلع معلوم
۱۵	صفحه ۳۲ - کار در کلاس ۲ - تکمیل تناسب ها	۶	صفحه ۲۷ - فعالیت (عمودمنصف ۱) - نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره خط هم فاصله است
۱۶	صفحه ۳۳ - فعالیت (استدلال استقرایی) - نسبت های پاره خط ها در مثلث	۷	صفحه ۲۷ - فعالیت (عمودمنصف ۲) - نقطه هم فاصله از دو سر پاره خط روی عمودمنصف است
۱۶	صفحه ۳۳ - فعالیت - حدس قضیه تالس	۷	صفحه ۲۷ - فعالیت - خط های گذرنده از یک یا دو نقطه
۱۷	صفحه ۳۴ - فعالیت - اثبات قضیه تالس	۸	صفحه ۲۷ - فعالیت - رسم عمودمنصف یک پاره خط
۱۸	صفحه ۳۴ - کار در کلاس ۱ - کاربرد قضیه تالس (محاسبه AC و HC)	۸	صفحه ۲۸ - فعالیت - رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای روی آن
۱۸	صفحه ۳۵ - کار در کلاس ۲ - تشکیل معادله با قضیه تالس	۹	صفحه ۲۸ - فعالیت - رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای غیر واقع بر آن
۱۹	صفحه ۳۵ - فعالیت ۱ - تعمیم قضیه تالس (صورت های دیگر)	۹	صفحه ۲۸ - فعالیت - رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه ای غیر واقع بر آن
۱۹	صفحه ۳۵ - فعالیت ۲ - نتیجه گیری تناسب های دیگر از قضیه تالس	۱۰	صفحه ۲۸ - فعالیت - نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه هم فاصله است
۲۰	صفحه ۳۵ - فعالیت ۳ - اثبات تعمیم قضیه تالس		

۴۵ صفحه ۴۳ کار در کلاس ۱ — تشابه و محاسبه CA و DE ... ۲۶

۴۶ صفحه ۴۳ کار در کلاس ۲ — تشابه مثلث‌های ABC و MNP ... ۲۷

۴۷ صفحه ۴۴ کار در کلاس ۳ — ترایابی تشابه ... ۲۷

۴۸ صفحه ۴۴ فعالیت — روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ... ۲۸

۴۹ صفحه ۴۵ کار در کلاس — روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ... ۲۹

۵۰ صفحه ۴۵ تمرین ۱ — اثبات تشابه و یافتن x و y ... ۳۰

۵۱ صفحه ۴۵ تمرین ۲ — طول‌ها در مثلث قائم‌الزاویه (AH ارتفاع وارد بر وتر) ... ۳۱

۵۲ صفحه ۴۵ تمرین ۳ — مستطیل و عمود بر قطر ... ۳۲

۵۳ صفحه ۴۶ تمرین ۴ — فاصله تا پای نورافکن ... ۳۲

۵۴ صفحه ۴۶ تمرین ۵ — نسبت محیط و مساحت دو مثلث متشابه ... ۳۳

۵۵ صفحه ۴۶ تمرین ۶ — ارتفاع‌ها و مساحت در دو مثلث متشابه ... ۳۳

۳۲ صفحه ۳۶ کار در کلاس — درستی یا نادرستی تناسب‌ها ... ۲۰

۳۳ صفحه ۳۷ پرسش — فرض و حکم عکس قضیه تالس ... ۲۱

۳۴ صفحه ۳۹ کار در کلاس — عکس قضیه فیثاغورس ... ۲۱

۳۵ صفحه ۴۰ تمرین ۱ — مساحت مثلث قائم‌الزاویه به دو روش ... ۲۲

۳۶ صفحه ۴۱ تمرین ۲ — یافتن نسبت a/b ... ۲۲

۳۷ صفحه ۴۱ تمرین ۳ — قضیه پاره‌خط واصل وسط‌های دو ضلع ... ۲۲

۳۸ صفحه ۴۱ تمرین ۴ — محاسبه PQ و AP ... ۲۳

۳۹ صفحه ۴۱ تمرین ۵ — یافتن x و y ... ۲۳

۴۰ صفحه ۴۱ تمرین ۶ — قضیه در دوزنقه ... ۲۴

۴۱ صفحه ۴۱ تمرین ۷ — عکس قضیه‌ها ... ۲۴

۴۲ صفحه ۴۱ تمرین ۸ — برهان خلف: دو عمود از یک نقطه ... ۲۵

۴۳ صفحه ۴۱ تمرین ۹ — رد حکم‌های کلی با مثال نقض ... ۲۵

۴۴ صفحه ۴۲ اثبات (تکمیلی) — اثبات قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها ... ۲۶

پرسش

صفحه ۲۶

۱

فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم مساحت تقسیم نماییم. چگونه می توان این کار را انجام داد؟

از یک رأس مثلث به وسط ضلع مقابل، پاره خطی (میانه) رسم می کنیم؛ یعنی دیوار را روی میانه مثلث می سازیم.

دلیل: دو مثلثی که پدید می آیند قاعده های برابر دارند (چون نقطه، وسط ضلع است) و ارتفاع هر دو از رأس مشترک بر ضلع مقابل یکی است؛ پس مساحت هایشان برابر است: $S = \frac{1}{2} \times (BC/2) \times h$.

فعالیت ۱

صفحه ۲۶

۲

یک نقطه ثابت در صفحه، مانند O را در نظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصله ثابت ۲ سانتی متر از آن هستند در نظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می دهند؟

این نقاط یک دایره به مرکز O و شعاع ۲ سانتی متر تشکیل می دهند.

فعالیت ۲

صفحه ۲۶

۳

یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی آن در نظر بگیرید. فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

نتیجه: دایره C (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع r) را در نظر بگیرید. هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد دایره قرار دارد و هر نقطه که دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله r است.

فاصله هر نقطه دایره تا مرکز برابر شعاع، یعنی ۲ سانتی متر است.

نتیجه: هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد، روی دایره قرار دارد و هر نقطه که روی دایره قرار دارد، از نقطه O به فاصله r است.

مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک‌بار برای نقاط داخل دایره و یک‌بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به دست آورید.

- هر نقطه که داخل دایره قرار دارد، فاصله‌اش تا مرکز **کمتر** از شعاع (r) است و هر نقطه که فاصله‌اش تا مرکز از r کمتر باشد، داخل دایره قرار دارد.
- هر نقطه که بیرون دایره قرار دارد، فاصله‌اش تا مرکز **بیشتر** از شعاع (r) است و هر نقطه که فاصله‌اش تا مرکز از r بیشتر باشد، بیرون دایره قرار دارد.

خطی مانند d در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی‌متر از خط d هستند مشخص کنید. این نقاط چه شکل یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟

نقاطی که از خط d به فاصله ۲ سانتی‌متر هستند در دو طرف خط قرار می‌گیرند. این نقاط **دو خط موازی با d** تشکیل می‌دهند که یکی در یک سوی d و دیگری در سوی دیگر آن و هر کدام به فاصله ۲ سانتی‌متر از d است.

نقطه P به فاصله ۱ سانتی‌متر از خط d_1 قرار دارد.

الف) تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

الف) این نقاط روی دایره‌ای به مرکز P و شعاع ۲ سانتی‌متر قرار دارند.

ب) محل برخورد این دایره با خط d_1 نقاط خواسته شده است. چون فاصله P تا d_1 برابر ۱ و کمتر از شعاع (۲) است، دایره خط را در **دو نقطه** قطع می‌کند. اگر H پای عمود از P بر d_1 باشد، این دو نقطه در دو طرف H و به فاصله $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \approx 1.73$ سانتی‌متر از آن قرار دارند.

نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

الف) اندازه اضلاع مثلث های AXB و AYB را مشخص کنید.

ب) توضیح دهید که چگونه می توانید مثلثی به طول ضلع های داده شده ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

الف) $AX = AY = 4$ ، $BX = BY = 3$ و $AB = 5$. هر دو مثلث اضلاعی به طول ۳ و ۴ و ۵ دارند و چون $3^2 + 4^2 = 5^2$ ، هر دو مثلث قائم الزاویه اند (زاویه قائمه در X و Y) و با هم هم نهشت اند.

ب) ابتدا پاره خطی به طول ۷ سانتی متر (مثلاً AB) می کشیم. به مرکز A و شعاع ۴ و به مرکز B و شعاع ۵ دو کمان می زنیم تا یکدیگر را در نقطه C قطع کنند (چون $4 + 5 > 7$ کمان ها یکدیگر را قطع می کنند). مثلث ABC با اضلاع ۴ و ۵ و ۷ مثلث خواسته شده است.

در شکل مقابل پاره خط AB و عمود منصف آن مشخص شده اند. نقطه ای دلخواه مانند W روی عمود منصف AB در نظر بگیرید و نشان دهید W از دوسر AB به یک فاصله است.
نتیجه ۱: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط

فرض کنیم M وسط AB باشد؛ پس $WM \perp AB$ و $AM = MB$. دو مثلث WMA و WMB را در نظر می گیریم:

○ $AM = MB$ (وسط پاره خط)

○ $WM = WM$ (ضلع مشترک)

○ $\angle WMA = \angle WMB = 90^\circ$

طبق حالت (ض ز ض) دو مثلث هم نهشت اند؛ پس $WA = WB$.

نتیجه ۱: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

پاره خط AB و نقطه W مانند شکل مقابل به گونه ای قرار دارند که W از دوسر AB به یک فاصله است ($AW = BW$). نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد. (راهنمایی: از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم نهشتی مثلث ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد).
نتیجه ۲: هر نقطه که از دوسر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد
از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد از و هر نقطه که از روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

فرض کنیم M وسط AB باشد و W را به A، B و M وصل می کنیم. در مثلث های WAM و WBM:

$WA = WB$ (فرض) ☐

$AM = BM$ (وسط پاره خط) ☐

$WM = WM$ (ضلع مشترک) ☐

طبق حالت (ض ض ض) دو مثلث هم نهشت اند؛ پس $\angle WMA = \angle WMB$. این دو زاویه مجاورند و مجموعشان 180° است؛ بنابراین هر کدام 90° است. یعنی WM بر AB عمود است و از وسط آن می گذرد، پس W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

نتیجه ۲: هر نقطه که از دوسر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

جمع بندی: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

(۱) نقطه P در صفحه مشخص شده است. چند خط می توانید رسم کنید که از نقطه P عبور نمایند؟
(۲) دو نقطه A و B در صفحه مشخص شده اند. چند خط متمایز می توانید رسم کنید که از هر دو نقطه A و B عبور نمایند؟
(۳) به نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟

۱. ☐ از یک نقطه بی شمار خط می گذرد.
۲. ☐ تنها یک خط از دو نقطه متمایز می گذرد.
۳. ☐ حداقل دو نقطه متمایز از خط باید معلوم باشد.

رسم عمودمنصف یک پاره خط داده شده: می خواهیم عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنیم.

- ۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطه A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.
- ۲- آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟
- ۳- آیا با داشتن نقاط P و Q می توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟
- ۴- حال عمودمنصف AB را رسم کنید.

۱. ☐ کمان ها را مطابق دستور می زنیم؛ دو نقطه برخورد P و Q در دو سوی AB پدید می آیند.
۲. ☐ بله. چون هر دو کمان شعاع یکسان دارند، $PA = PB$ و $QA = QB$. هر نقطه که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن است (نتیجه ۲)، پس P و Q روی عمودمنصف AB هستند.
۳. ☐ بله. P و Q دو نقطه متمایزند و از دو نقطه متمایز فقط یک خط می گذرد؛ پس خط PQ همان عمودمنصف AB است.
۴. ☐ با خط کش خط PQ را رسم می کنیم؛ این خط عمودمنصف AB است.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای روی آن: خط d و نقطه M روی آن مانند شکل مشخص شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

- ۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d بیابید که $AM = MB$ باشد.
- ۲- عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید.
- ۳- عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d و از نقطه می گذرد.

۱. ☐ با نوک پرگار روی M و باز کردن دلخواه آن، خط d را در دو طرف M قطع می کنیم؛ دو نقطه A و B به دست می آیند و $AM = MB$.
۲. ☐ عمودمنصف AB را با روش رسم عمودمنصف می کشیم.
۳. ☐ عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود است و از نقطه M (وسط AB) می گذرد. پس این خط همان خط عمود خواسته شده است.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن؛ خط d و نقطه P مانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه P به یک فاصله باشند.

۲- عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید.

۳- آیا عمودمنصف پاره خط AB از نقطه P می‌گذرد؟ چرا؟

عمودمنصف پاره خط AB بر خط d و از نقطه P

۱. ☐ نوک پرگار را روی P می‌گذاریم و با شعاعی بزرگ‌تر از فاصله P تا d کمانی می‌زنیم تا d را در A و B قطع کند؛ پس $PA = PB$.
 ۲. ☐ عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم.
 ۳. ☐ بله؛ چون $PA = PB$ ، نقطه P از دو سر AB به یک فاصله است و بنابر نتیجه ۲ روی عمودمنصف AB قرار دارد.
- عمودمنصف پاره خط AB بر خط d عمود است و از نقطه P می‌گذرد؛ پس خط عمود خواسته شده است.

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن؛ خط d و نقطه P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲- خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب در نظر بگیرید)

۱. ☐ با روش «عمود از نقطه غیر واقع بر خط» از P بر d عمود می‌کنیم؛ این خط d_1 است.
۲. ☐ با روش «عمود از نقطه‌ای روی خط» در نقطه P بر d_1 عمود می‌کنیم؛ این خط d_2 است.
۳. ☐ d_2 با d موازی است. چون d_1 مورب دو خط d و d_2 است و هر دو زاویه متناظر برابر 90° هستند (هر دو خط بر d_1 عمودند)، پس $d_2 \parallel d$.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن: ۱- در شکل مقابل نیم خط Ow نیمساز زاویه $\angle vOu$ است. فرض کنید P یک نقطه دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه $\angle vOu$ یکسان است. (یعنی اگر از نقطه P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است).
نتیجه ۱: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه

از P عمودهای PH_1 بر Ov و PH_2 بر Ou را رسم می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویه OPH_1 و OPH_2 :

$\angle POH_1 = \angle POH_2$ (چون Ow نیمساز است) ☐

$\angle OH_1P = \angle OH_2P = 90^\circ$ ☐

$OP = OP$ (ضلع مشترک) ☐

طبق حالت (ز ز ص) دو مثلث هم‌نهشت‌اند؛ پس $PH_1 = PH_2$.

نتیجه ۱: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

۲- در شکل مقابل فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه $\angle vOu$ یکسان است. نشان دهید که نقطه P روی نیمساز زاویه $\angle vOu$ قرار دارد. (راهنمایی: پاره خط OP را و دو عمود از نقطه P بر Ov و Ou رسم کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویه $\angle vOu$ است).
نتیجه ۲: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی قرار دارد.
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی یک زاویه قرار داشته باشد، از و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی آن زاویه قرار دارد.

عمودهای $PH_1 \perp Ov$ و $PH_2 \perp Ou$ را رسم می‌کنیم؛ طبق فرض $PH_1 = PH_2$. در دو مثلث قائم‌الزاویه OPH_1 و OPH_2 :

$PH_1 = PH_2$ (فرض) ☐

$OP = OP$ (وتر مشترک) ☐

هر دو قائم‌الزاویه‌اند ☐

طبق حالت (وتر و یک ضلع) دو مثلث هم‌نهشت‌اند؛ پس $\angle POH_1 = \angle POH_2$ و OP نیمساز زاویه $\angle vOu$ است.

نتیجه ۲: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

جمع‌بندی: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

۳- رسم نیمساز یک زاویه

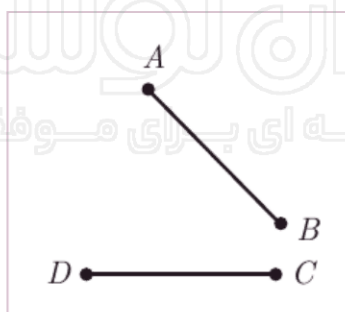
الف) زاویه uOv را در نظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم خط‌های Ov و Ou را در نقاطی مانند P و Q قطع کند. طول پاره خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟
 ب) دهانه پُرگار را کمی بیش از نصف طول پاره خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟
 پ) پاره خط‌های WO ، WP و WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ - اندازه زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ - پاره خط OW زاویه uOv است.

الف) $OP = OQ$ ، چون هر دو شعاع یک کمان‌اند.

ب) $PW = QW$ ، چون دو کمان شعاع یکسان دارند.

پ) دو مثلث OPW و OQW هم‌نهشت‌اند، زیرا $OP = OQ$ ، $PW = QW$ و OW ضلع مشترک است (ض ض ض). در نتیجه زاویه‌های متناظر برابرند: $\angle POW = \angle QOW$. پس پاره خط OW نیمساز زاویه uOv است.

الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه D و C نیز به یک فاصله باشد.
 ب) نقطه مورد نظر در قسمت الف) را O می‌نامیم. اگر نقطه O روی عمودمنصف پاره خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



الف) نقطه‌ای که از A و B به یک فاصله است روی عمودمنصف AB قرار دارد و نقطه‌ای که از C و D به یک فاصله است روی عمودمنصف CD است. پس عمودمنصف‌های AB و CD را رسم می‌کنیم؛ محل برخورد آنها نقطه O است.
 ب) $OA = OB$ (چون O روی عمودمنصف AB است)، $OB = OC$ (چون O روی عمودمنصف BC است) و $OC = OD$ (چون O روی عمودمنصف CD است). پس $OA = OB = OC = OD$. یعنی هر چهار رأس A ، B ، C و D از مرکز دایره G به فاصله شعاع‌اند و هر چهار رأس روی دایره G قرار دارند.

مثلی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

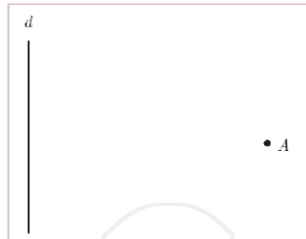
فرض کنیم O محل برخورد عمودمنصف‌های AB و AC باشد. O روی عمودمنصف AB است، پس $OA = OB$ ؛ و روی عمودمنصف AC است، پس $OA = OC$. بنابراین $OA = OB = OC$. یعنی B و C هم از مرکز O به فاصله شعاع OA هستند و **روی دایره قرار دارند**. (دایره از سه رأس مثلث می‌گذرد.)

مثلی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟
(در متن کتاب: «به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید.»)

فرض کنیم O محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و B باشد. چون O روی نیمساز زاویه A است، از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است و چون روی نیمساز زاویه B است، از AB و BC به یک فاصله است. پس فاصله O از هر سه ضلع یکسان و برابر OH است. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH از پای هر سه عمود می‌گذرد و هر ضلع در پای عمود بر شعاع عمود است؛ پس **هر سه ضلع مثلث بر دایره مماس‌اند** (دایره در مثلث محاط است).

توشه‌ای برای موفقیت

فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.
 الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.
 ب) مثلثی که شرایط الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.
 پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت الف) را داشته باشد و مساحت آن 8 cm^2 باشد.



الف) از A بر d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم ($AH = 4$). به مرکز H و شعاع دلخواه، d را در دو نقطه B و C قطع می‌کنیم ($HB = HC$). AH عمود منصف BC است، پس $AB = AC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

ب) به مرکز A و شعاع ۶ سانتی متر کمانی می‌زنیم تا d را در B و C قطع کند (چون $4 < 6$ قطع می‌کند). آنگاه $AB = AC = 6$ و A روی عمود منصف BC است. اندازه قاعده: $HB = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ پس $BC = 4\sqrt{5} \approx 8.94 \text{ cm}$.

پ) مساحت: $\frac{1}{2} \times BC \times 4 = 8$ پس $BC = 4 \text{ cm}$. روی d از H به هر طرف ۲ سانتی متر جدا می‌کنیم تا B و C به دست آیند ($HB = HC = 2$). مثلث ABC متساوی‌الساقین با مساحت 8 cm^2 است ($AB = AC = \sqrt{20} \approx 4.47$) است. (cm)

با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

(الف) $a/b = c/d \Rightarrow ad = bc$ (طرفین وسطین)

(ب) $ad = bc \Rightarrow a/b = c/d$ (تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

(پ) $a/b = c/d \Rightarrow b/a = d/c$ (معکوس کردن تناسب)

(ت) $a/b = c/d \Rightarrow c/a = d/b$ و $a/c = b/d$ (تعویض جای طرفین با وسطین)

(ث) $a/b = c/d \Rightarrow (a+b)/b = (c+d)/d$ و $a/(a+b) = c/(c+d)$ (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)

(ج) $a/b = c/d \Rightarrow (a-b)/b = (c-d)/d$ و $a/(b-a) = c/(d-c)$ (تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی (ث): برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا

کسرها را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید. راهنمایی (ج): در قسمت (ج) برای اثبات

اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده،

سپس از دو طرف عدد ۱ را کم کنید.

(الف) دو طرف $a/b = c/d$ را در bd ضرب می‌کنیم (مجاز است چون b و d مخالف صفرند): $a/b \cdot bd = c/d \cdot bd$
پس $ad = bc$.

(ب) دو طرف $ad = bc$ را بر bd (مخالف صفر) تقسیم می‌کنیم: $ad/(bd) = bc/(bd)$ پس $a/b = c/d$.

(پ) دو عدد مساوی و مخالف صفر، معکوس‌هایشان هم مساوی است. چون $a/b = c/d$ و مخرج‌ها و صورت‌ها مخالف صفرند، معکوس دو طرف را می‌گیریم: $b/a = d/c$.

(ت) از (الف) $ad = bc$. دو طرف را بر ab تقسیم می‌کنیم: $d/b = c/a$ یعنی $c/a = d/b$. دو طرف را بر cd تقسیم می‌کنیم: $a/c = b/d$.

(ث) به دو طرف $a/b = c/d$ عدد ۱ را اضافه می‌کنیم: $a/b + 1 = c/d + 1$ پس $(a+b)/b = (c+d)/d$. برای تناسب دوم، از $a/b = c/d$ نتیجه (پ) را می‌گیریم: $b/a = d/c$. به دو طرف ۱ اضافه می‌کنیم: $(b+a)/a = (d+c)/c$ و دوباره معکوس می‌گیریم: $a/(a+b) = c/(c+d)$.

(ج) از دو طرف $a/b = c/d$ عدد ۱ را کم می‌کنیم: $a/b - 1 = c/d - 1$ پس $(a-b)/b = (c-d)/d$. برای تناسب دوم: $b/a = d/c$ ؛ ۱ را کم می‌کنیم: $(b-a)/a = (d-c)/c$ و معکوس می‌گیریم: $a/(b-a) = c/(d-c)$.

با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

الف) $5/14 = 15/42 \Rightarrow 5 \times ___ = 15 \times ___$

ب) $3 \times 40 = 12 \times 10 \Rightarrow 3/___ = 12/___$

پ) $7/10 = 21/30 \Rightarrow 10/7 = ___$

ت) $6/11 = 18/33 \Rightarrow 6/18 = ___$ ، $33/11 = ___$

ث) $4/14 = 10/35 \Rightarrow 18/14 = ___$ ، $4/18 = ___$

ج) $5/12 = 10/24 \Rightarrow -7/12 = ___$ ، $5/-7 = ___$

- الف) $5 \times 42 = 15 \times 14$ (طرفین وسطین؛ هر دو طرف ۲۱۰ می شود)
- ب) $3/10 = 12/40$ (از $ad = bc$ تناسب $a/b = c/d$ به دست می آید)
- پ) $10/7 = 30/21$ (معکوس کردن تناسب)
- ت) $6/18 = 11/33$ و $33/11 = 18/6$ (تعویض جای طرفین با وسطین)
- ث) $4/18 = 10/45$ و $18/14 = 45/35$ (ترکیب نسبت در صورت و در مخرج)
- ج) $-7/12 = -14/24$ و $5/-7 = 10/-14$ (تفضیل نسبت؛ $5/(-7) = 10/(-14)$ هم ارز $5/7 = 10/14$ با تغییر علامت هر دو مخرج است)

در شکل مقابل داریم: $BC \parallel D_1E_1$ و $BC \parallel D_2E_2$ و $BC \parallel D_3E_3$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد:

$BC \parallel D_iE_i$ برای $1 \leq i \leq 3$.

اندازه پاره‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرهای جایگزین کنید و نسبت‌های برابر را در ستون‌های متمایز مشخص نمایید.

AD_1/D_1B ، AD_2/D_2B ، AD_3/D_3B و AE_1/E_1C ، AE_2/E_2C ، AE_3/E_3C

اندازه‌ها با خط‌کش (به سانتی‌متر، تقریبی)

نسبت	ستون دوم	ستون اول
حدود ۰/۷	$AE_1/E_1C = 1.0/1.4$	$AD_1/D_1B = 1.7/2.4$
حدود ۱/۶ تا ۱/۷	$AE_2/E_2C = 1.5/0.9$	$AD_2/D_2B = 2.5/1.6$
حدود ۴/۷ تا ۵	$AE_3/E_3C = 2.1/0.4$	$AD_3/D_3B = 3.3/0.7$

نسبت‌های هر ردیف با تقریب خوبی برابرند: $AD_i/D_iB = AE_i/E_iC$. (مثلاً AD_3/D_3B با AE_3/E_3C برابر است؛ همان‌طور که پیکان کتاب نشان می‌دهد. اختلاف‌های کوچک به خاطر خطای اندازه‌گیری است.)

اندازه‌ها از روی شکل تخمین زده شده‌اند و این جواب ممکن است دقیق نباشد؛ نکته اصلی برابری نسبت‌های هر ردیف است.

اگر پاره خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌ها با هم برابر باشند؟ $----- = -----$

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

حدس می‌زنیم: $AD/DB = AE/EC$.

این حدس تنها بر پایه مشاهده چند حالت است (استدلال استقرایی) و با چند مورد نمی‌توان به درستی آن برای همه حالات مطمئن شد. برای اطمینان باید آن را با استدلال استنتاجی ثابت کنیم؛ این کار در فعالیت بعد (قضیه تالس) انجام می‌شود.

فرض کنید مانند شکل مقابل پاره خط DE موازی ضلع BC باشد. می‌خواهیم نشان دهیم: $AD/DB = AE/EC$.

۱- از نقطه D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟

۲- از نقطه E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را H_1 بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را H_2 بنامید.

$$S_{ADE} / S_{DEB} = (\frac{1}{2} EH_1 \times AD) / (\frac{1}{2} EH_1 \times DB) = AD/DB \quad ۳$$

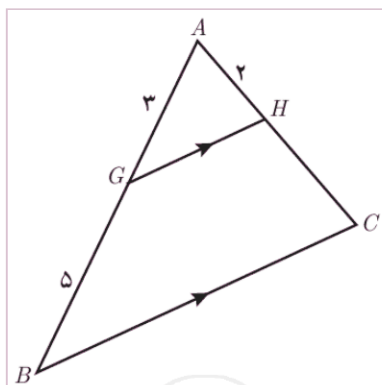
$$S_{ADE} / S_{DEC} = (\frac{1}{2} DH_2 \times AE) / (\frac{1}{2} DH_2 \times EC) = AE/EC \quad ۴$$

۵- از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $AD/DB = AE/EC$. چرا؟

۱. دو مثلث DEC و DEB قاعده مشترک DE دارند و چون $DE \parallel BC$ ، فاصله رؤس C و B از خط DE (ارتفاع‌های دو مثلث) برابر است. پس $S_{DEB} = S_{DEC}$.
۲. عمودها را رسم می‌کنیم.
۳. دو مثلث ADE و DEB ارتفاع مشترک EH_1 دارند (قاعده‌هایشان AD و DB روی یک خط‌اند)؛ پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها، یعنی AD/DB است.
۴. به همین ترتیب دو مثلث ADE و DEC ارتفاع مشترک DH_2 دارند و نسبت مساحت‌ها برابر AE/EC است.
۵. طبق (۱) $S_{DEB} = S_{DEC}$ ؛ پس سمت چپ دو تساوی (۳) و (۴) برابر است $S_{ADE}/S_{DEB} = S_{ADE}/S_{DEC}$ و در نتیجه سمت راست آنها نیز برابر است: $AD/DB = AE/EC$. (این همان قضیه تالس است).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازه پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.



طبق قضیه تالس در مثلث ABC با $GH \parallel BC$:

$$AG/GB = AH/HC \Rightarrow 3/5 = 2/HC \Rightarrow HC = 10/3 \approx 3.33$$

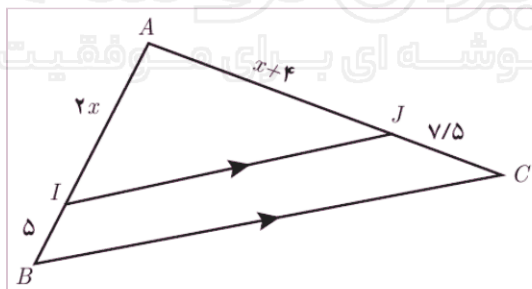
$$AC = AH + HC = 2 + 10/3 = 16/3 \approx 5.33$$

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازه پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.



چون $IJ \parallel BC$ ، طبق قضیه تالس: $AI/IB = AJ/JC$:

$$2x/5 = (x+4)/7.5 \Rightarrow 15x = 5(x+4) \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2$$

$$(4/5 = 6/7.5 = 0.8 \text{ بررسی}). AI = 2x = 4 \text{ و } AJ = x + 4 = 6$$

در شکل مقابل $BC \parallel DE$.

الف) تناسب قضیه تالس را بنویسید.

ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $AD/DB = AE/EC$ را $AD/AB = AE/AC$ نتیجه بگیرید.
پ) به کمک تفصیل نسبت در صورت از تناسب به دست آمده در (ب) تناسب $DB/AB = EC/AC$ را نتیجه بگیرید.

توجه کنید که تناسب‌های به دست آمده در (ب) و (پ) صورت‌های دیگر قضیه تالس اند.

الف) $AD/DB = AE/EC$

ب) طبق ترکیب نسبت در مخرج $(a/b = c/d \Rightarrow a/(a+b) = c/(c+d))$: $AD/(AD+DB) = AE/(AE+EC)$ و چون $AD + DB = AB$ و $AE + EC = AC$ ، داریم $AD/AB = AE/AC$.

پ) از $AD/AB = AE/AC$ با تفصیل نسبت در صورت $(a/b = c/d \Rightarrow (a-b)/b = (c-d)/d)$: $(AD-AB)/AB = (AE-AC)/AC$. چون $AD - AB = -DB$ و $AE - AC = -EC$ ، پس $-DB/AB = -EC/AC$ یعنی $DB/AB = EC/AC$.

در مثلث ABC پاره خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسب قضیه تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیه تالس نتیجه بگیرید.
 $AD/DB = \dots \Rightarrow \{ DB/DA = \dots, BD/BA = \dots, AB/BD = \dots; AD/AB = \dots, AB/AD = \dots \}$

قضیه تالس: $AD/DB = AE/EC$. با خواص تناسب (معکوس کردن، ترکیب و تفصیل نسبت):

- $DB/DA = EC/EA$ (معکوس کردن)
- $BD/BA = EC/CA$ (تفصیل نسبت در صورت و مخرج، نتیجه فعالیت ۱ (پ))
- $AB/BD = AC/CE$ (معکوس تناسب قبل)
- $AD/AB = AE/AC$ (ترکیب نسبت در مخرج)
- $AB/AD = AC/AE$ (معکوس تناسب قبل)

الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیه تالس داریم: $AD/AB = \dots$

ب) پاره خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم: $BF/BC = \dots$

پ) با توجه به قسمت‌های الف) و ب) داریم: $AD/AB = \dots/AC = \dots/BC$

ت) چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ پاره خط BF با کدام پاره خط برابر است؟ $BF = \dots$

ث) با توجه به قسمت‌های پ) و ت) داریم: $AD/AB = \dots/AC = \dots/BC$. این رابطه تعمیم قضیه تالس است.

الف) $AD/AB = AE/AC$ (صورت دیگر قضیه تالس)

ب) در مثلث ABC، خط $EF \parallel AB$ است؛ طبق قضیه تالس $CE/CA = CF/CB$. با تفصیل نسبت:
یعنی $(CA-CE)/CA = (CB-CF)/CB$ پس $AE/AC = BF/BC$.

پ) $AD/AB = AE/AC = BF/BC$

ت) در چهارضلعی DEFB داریم $DE \parallel BF$ (فرض) و $EF \parallel DB$ (ساخت)؛ پس متوازی‌الاضلاع است و اضلاع روبه‌روی آن برابرند: $BF = DE$.

ث) $AD/AB = AE/AC = DE/BC$. این رابطه تعمیم قضیه تالس است.

در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $AP/AB = AQ/AC = PQ/BC$ (ب) $AP/PB = AQ/QC = PQ/BC$

پ) $PB/AP = QC/AC = PQ/BC$ (ت) $PB/AB = QC/AC$

ث) $AB/AP = AC/AQ = BC/PQ$ (ج) $PB/AB = QC/AC$

الف) نادرست. $AP/PB = AQ/QC$ درست است، اما PQ/BC برابر AP/AB است نه AP/PB .

ب) درست. (تعمیم قضیه تالس)

پ) نادرست. صورت درست $PB/AP = QC/AQ$ است (مخرج دوم باید AQ باشد نه AC).

ت) نادرست. $PB/AB = QC/AC$ درست است، اما $PQ/BC = AP/AB$ و در حالت کلی با PB/AB برابر نیست.

ث) درست. (صورت دیگر قضیه تالس)

ج) درست. (معکوس تناسب قسمت ب)

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیه تالس را بنویسید.

فرض: حکم:

به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟

قضیه تالس: فرض $DE \parallel BC$ ، حکم $AD/DB = AE/EC$. در عکس، جای فرض و حکم عوض می شود:

فرض: در مثلث ABC نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC قرار دارند و $AD/DB = AE/EC$.

حکم: $DE \parallel BC$.

عکس قضیه تالس درست است؛ درستی آن با برهان خلف در صفحه بعد اثبات می شود.

با توجه به قضیه فیثاغورس اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱- فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه اضلاع آن برقرار است.

۲- پاره‌های $A'B$ و $A'C$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ است.

۳- با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C$ ، اندازه پاره خط $B'C$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

۴- توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید.

الف) اگر در مثلثی مانند ABC رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار باشد، آنگاه زاویه A قائمه است.

ب) (۳) در مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C$: $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 = c^2 + b^2$. طبق فرض $b^2 + c^2 = a^2$ ؛ پس $B'C'^2 = a^2$ و $B'C' = a = BC$.

(۴) دو مثلث ABC و $A'B'C$ سه ضلع نظیر برابر دارند ($BC = B'C'$ ، $AC = A'C'$ ، $AB = A'B'$)؛ طبق حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند. پس زاویه‌های متناظر برابرند: $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$.

ج) در مثلث ABC زاویه A قائمه است اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$ (یعنی $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$).

در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به دست آورید.

در مثلث ABC زاویه A قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است.

روش اول (قاعده AB و ارتفاع AC): $S = \frac{1}{2} \times AB \times AC$

روش دوم (قاعده BC و ارتفاع AH): $S = \frac{1}{2} \times BC \times AH$

از تساوی: $AB \times AC = BC \times AH$ و از آن تناسب $AB/BC = AH/AC$ (یا $AB/AH = BC/AC$) به دست می‌آید.

در هر مورد، مقدار عددی نسبت a/b را به دست آورید.

الف) $a/(10+a) = b/(8+b)$ ب) $(3a+10)/(10+2a) = (3b+7)/(7+2b)$

الف) طرفین وسطین: $a(8+b) = b(10+a)$ پس $8a + ab = 10b + ab$ و $8a = 10b$

$$a/b = 10/8 = 5/4$$

ب) $(3a+10)(7+2b) = (3b+7)(10+2a)$ پس $21a + 6ab + 70 + 20b = 30b + 6ab + 70 + 14a$ و $7a = 10b$

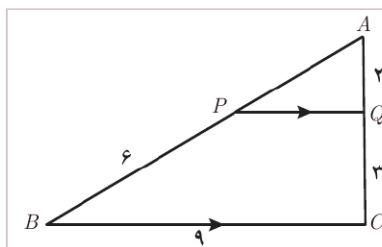
$$a/b = 10/7$$

ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

در مثلث ABC ، M وسط AB و N وسط AC است. پس $AM/MB = 1$ و $AN/NC = 1$ ، یعنی $AM/MB = AN/NC$.

طبق عکس قضیه تالس $MN \parallel BC$. همچنین طبق تعمیم قضیه تالس $MN/BC = AM/AB = 1/2$ پس $MN = \frac{1}{2} BC$.

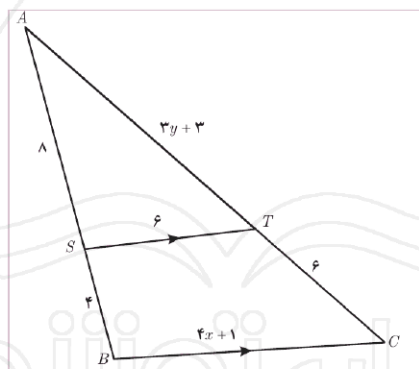
در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است. طول پاره‌های AP و PQ را به دست آورید.



طبق قضیه تالس: $AP/PB = AQ/QC$ $\Rightarrow AP/6 = 2/3 \Rightarrow AP = 4$

$2/5 = PQ/9 \Rightarrow PQ = 18/5 = 3.6$ $AQ/AC = PQ/BC$:

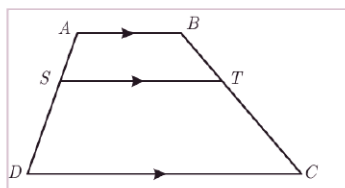
در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را به دست آورید.



$8/4 = (3y+3)/6 \Rightarrow 3y + 3 = 12 \Rightarrow y = 3$ $AS/SB = AT/TC$:

$8/12 = 6/(4x+1) \Rightarrow 4x + 1 = 9 \Rightarrow x = 2$ $AB = 8 + 4 = 12$: و $AS/AB = ST/BC$

در دوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $AS/SD = BT/TC$. (راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



قطر AC را رسم می‌کنیم تا ST را در K قطع کند.

در مثلث ADC داریم $SK \parallel DC$ ؛ پس $AS/SD = AK/KC$.

در مثلث CAB داریم $KT \parallel AB$ ؛ پس $CK/KA = CT/TB$ یعنی $AK/KC = BT/TC$.

از دو تساوی: $AS/SD = AK/KC = BT/TC$.

در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

(الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

(ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

(پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

(ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر». (راهنمایی: شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید.)

- (الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.
- (ب) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل با هم برابر باشند، در این صورت اضلاع روبه‌رو موازی‌اند.
- (پ) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل مکمل باشند، آنگاه رأس‌های آن روی یک دایره قرار دارند.
- (ت) اصل: در مثلث ABC اگر $h_a > h_b$ (دو ارتفاع نابرابر)، آنگاه $a < b$. عکس: در مثلث ABC اگر ضلع a از ضلع b کوچک‌تر باشد ($a < b$)، آنگاه ارتفاع وارد بر ضلع کوچک‌تر بزرگ‌تر است ($h_a > h_b$).

با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض خلف: از نقطهٔ P خارج خط d دو عمود متمایز PA و PB بر d رسم شده باشد (A و B پای عمودها و $A \neq B$ ، زیرا دو خط متمایز گذرنده از P خط d را در یک نقطه قطع نمی‌کنند).
در مثلث PAB دو زاویهٔ A و B هر دو 90° هستند و مجموع آنها 180° است؛ در نتیجه مجموع زاویه‌های مثلث از 180° بیشتر می‌شود که با قضیهٔ «مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است» تناقض دارد.
پس فرض خلف نادرست است و از یک نقطهٔ غیرواقع بر خط فقط یک عمود می‌توان رسم کرد.

هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

(الف) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

(ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

(پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

(ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

- (الف) عدد ۱۳۱ اول است و از ۱۲۷ بزرگ‌تر (بر هیچ عددی غیر از ۱ و خودش بخش‌پذیر نیست). پس حکم نادرست است.
- (ب) مثلث متساوی‌الاضلاعی با ضلع ۱ سانتی‌متر مساحتی برابر $\sqrt{3}/4 \approx 0.43$ دارد، ولی مربعی به ضلع ۱ سانتی‌متر مساحت ۱ دارد؛ $0.43 < 1$.
- (پ) مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ را در نظر می‌گیریم. ارتفاع وارد بر ضلع ۳ برابر ضلع ۴ است؛ یعنی ضلع ۳ از ارتفاع ۴ کوچک‌تر است.
- (ت) مثلث: $A(0,0)$ ، $B(4,0)$ ، $C(1,3)$ عمود منصف AB خط $x = 2$ است ولی میانهٔ وارد بر AB خطی است از $C(1,3)$ به $(2,0)$ که قائم نیست؛ پس برهم منطبق نیستند. (این دو فقط در مثلث متساوی‌الساقین نسبت به قاعده منطبق‌اند).

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است. اثبات:

۱- داریم $\hat{E} = \hat{C}$ و $\hat{D} = \hat{B}$ بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

۲- با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $AD/\dots = \dots/AC = DE/\dots$

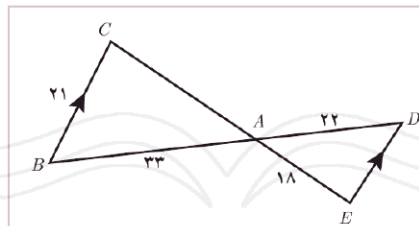
۳- با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

۱- $DE \parallel BC$ و AB مورب است؛ پس $\hat{D} = \hat{B}$ (زاویه‌های متناظر). به همین ترتیب با مورب AC ، $\hat{E} = \hat{C}$. زاویهٔ $\hat{A}$ هم مشترک است.

۲- $AD/AB = AE/AC = DE/BC$ (تعمیم قضیهٔ تالس).

۳- زاویه‌های نظیر دو مثلث برابر و نسبت اضلاع نظیر یکسان است؛ پس طبق تعریف $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

در شکل مقابل $DE \parallel BC$. اندازهٔ پاره‌های DE و CA را به دست آورید.



زاویه‌های B و D برابرند (متبادل داخلی) و زاویه‌های رأس A هم برابرند (متقابل به رأس)؛ پس $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (ز ز) و:

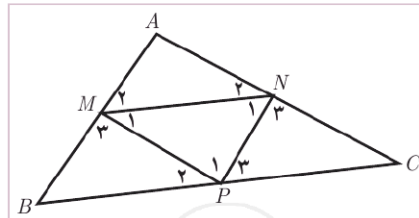
$$AB/AD = AC/AE = BC/DE \implies 33/22 = AC/18 = 21/DE$$

$$33/22 = 3/2 \text{ پس } AC = 18 \times 3/2 = 27 \text{ و } DE = 21 \times 2/3 = 14$$

اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.

حل: الف) $MN \parallel BC$ و $MP \parallel AC$ و $NP \parallel AB$ چرا؟

ب) بنابراین $\hat{M}_1 = \hat{P}_2 = \hat{C}$ و $\hat{N}_1 = \hat{P}_3 = \hat{B}$ (چرا؟) از (ب) درباره مثلث‌های موردنظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟



الف) پاره خط واصل وسط‌های دو ضلع مثلث با ضلع سوم موازی است (تمرین ۳ صفحه ۴۱).

ب) $MN \parallel BC$ و $NP \parallel AB$ مورب است؛ پس $\hat{N}_1 = \hat{P}_3$ (متبادل داخلی). $NP \parallel AB$ و BC مورب است؛ پس $\hat{P}_3 = \hat{B}$ (متناظر). بنابراین $\hat{N}_1 = \hat{P}_3 = \hat{B}$. به همین ترتیب $MN \parallel BC$ با مورب MP : $\hat{M}_1 = \hat{P}_2$ و $MP \parallel AC$ با مورب BC : $\hat{P}_2 = \hat{C}$ ؛ پس $\hat{M}_1 = \hat{P}_2 = \hat{C}$.

نتیجه: در مثلث‌های ABC و PNM دو زاویه از یکی با دو زاویه دیگری برابر است ($\hat{C} = \hat{M}_1$ و $\hat{B} = \hat{N}_1$) و زاویه سوم نیز برابر است ($\hat{A} = \hat{P}_1$)؛ پس طبق قضیه ۱ تشابه، $\triangle ABC \sim \triangle PNM$ (متشابه با نسبت تشابه ۲). (نسبت تشابه: $MN = \frac{1}{2}BC$, $NP = \frac{1}{2}AB$, $MP = \frac{1}{2}AC$).

اگر سه مثلث ABC و $A'B'C$ و $A''B''C$ به گونه‌ای باشند که $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$ و $\triangle A'B'C \sim \triangle A''B''C$ ، درباره دو مثلث ABC و $A''B''C$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

دو مثلث ABC و $A''B''C$ متشابه‌اند.

دلیل: زاویه‌ها: $\hat{A} = \hat{A}' = \hat{A}''$, $\hat{B} = \hat{B}' = \hat{B}''$ و $\hat{C} = \hat{C}' = \hat{C}''$. اضلاع: اگر $AB/A'B' = AC/A'C' = BC/B'C' = k_1$ و $A'B'/A''B'' = A'C'/A''C'' = B'C'/B''C'' = k_2$ پس $AB/A''B'' = AC/A''C'' = BC/B''C'' = k_1 k_2$. زاویه‌ها برابر و اضلاع متناسب‌اند.

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.

۱- نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید: $\triangle ABC \sim \triangle AHC$

۲- نشان دهید دو زاویه از مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید: $\triangle ABC \sim \triangle AHB$

۳- از (۱) و (۲) دربارهٔ مثلث‌های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه: در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

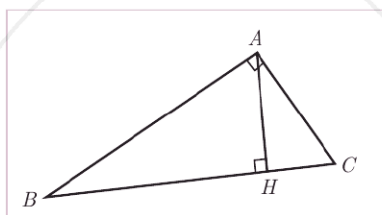
$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \Rightarrow AH/\dots = AC/\dots = HC/\dots \Rightarrow AC^2 = \dots \times \dots \quad ۴$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow AH/\dots = AB/\dots = HB/\dots \Rightarrow AB^2 = \dots \times \dots \quad ۵$$

$$\triangle AHB \sim \triangle AHC \Rightarrow AH/\dots = AC/\dots = HC/\dots \Rightarrow AH^2 = \dots \times \dots \quad ۶$$

۷- با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطه فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید. $BC^2 = \dots + \dots$

۸- مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید. $AB \times \dots = AH \times \dots$



۱. در مثلث‌های ABC و AHC : زاویه C مشترک است و $\angle BAC = \angle AHC = 90^\circ$. پس دو زاویه برابرند و طبق قضیه ۱ دو مثلث متشابه‌اند (رأس‌های متناظر: $C \leftrightarrow C, A \leftrightarrow H, B \leftrightarrow A$).

۲. در مثلث‌های ABC و AHB : زاویه B مشترک است و $\angle BAC = \angle AHB = 90^\circ$. پس متشابه‌اند (رأس‌های متناظر: $B \leftrightarrow B, A \leftrightarrow H, C \leftrightarrow A$).

۳. هر دو مثلث AHC و AHB با ABC متشابه‌اند؛ پس با هم نیز متشابه‌اند (تراپایی تشابه).

$$AH/AB = AC/BC = HC/AC \Rightarrow AC^2 = BC \times HC \quad (۴)$$

$$AH/AC = AB/BC = HB/AB \Rightarrow AB^2 = BC \times HB \quad (۵)$$

$$AH/BH = AC/AB = HC/AH \Rightarrow AH^2 = BH \times HC \quad (۶)$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ پس } AC^2 + AB^2 = BC \times HC + BC \times HB = BC (HC + HB) = BC \times BC \quad (۷)$$

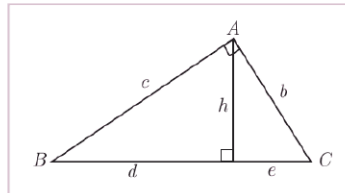
$$AB \times AC = AH \times BC \text{ پس } S = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} BC \times AH \quad (۸)$$

در مثلث قائم‌الزاویه مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

۱) $h = 5, d = 7, e = ?$

۲) $d = 5, e = 3, b = ?, c = ?$

۳) $c = 8, b = 6, h = ?$



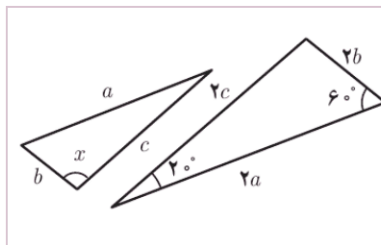
۱) $h^2 = d \times e \Rightarrow 25 = 7e \Rightarrow e = 25/7 \approx 3.57$

۲) $b^2 = e \times BC = 3 \times 8 = 24 \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$ و $c^2 = d \times BC = 5 \times 8 = 40 \Rightarrow c = 2\sqrt{10} \approx 6.32$. $BC = d + e = 8$
 ≈ 4.90

۳) $BC = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10$ و از برابری مساحت‌ها: $h \times BC = b \times c = 48$ $\Rightarrow h = 4.8$

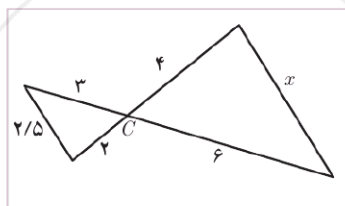
در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید. (الف، ب، پ مطابق شکل‌ها)

(الف)



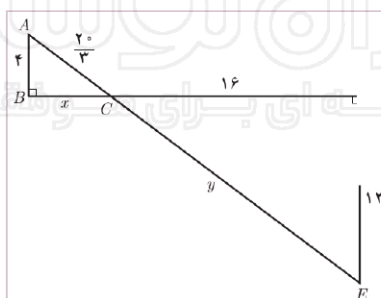
اضلاع مثلث بزرگ $2a, 2b, 2c$ و اضلاع مثلث کوچک a, b, c است؛ نسبت اضلاع نظیر ۲ است و طبق قضیه ۳ تشابه دو مثلث متشابه‌اند. زاویه‌های مثلث بزرگ: 20° و 60° و $180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ$. زاویه x بین b و c است و نظیر زاویه بین $2b$ و $2c$ (یعنی 100°) است؛ پس $x = 100^\circ$.

(ب)



دو مثلث در رأس C زاویه‌های متقابل به رأس برابر دارند و $3/6 = 2/4 = 1/2$. پس طبق قضیه ۲ تشابه دو مثلث متشابه‌اند با نسبت $1/2$ ؛ لذا $2.5/x = 1/2 \Rightarrow x = 5$.

(پ)



دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و EDC : $\angle B = \angle D = 90^\circ$ و زاویه‌های رأس C متقابل به رأس‌اند؛ پس متشابه‌اند (قضیه ۱) و $AB/ED = 4/12 = 1/3$ ؛

$$BC/DC = 1/3 \Rightarrow x/16 = 1/3 \Rightarrow x = 16/3 \approx 5.33 \quad \text{and} \quad AC/EC = 1/3 \Rightarrow (20/3)/y = 1/3 \Rightarrow y = 20$$

$$(\text{بررسی: } CE = \sqrt{(16^2 + 12^2)} = 20)$$

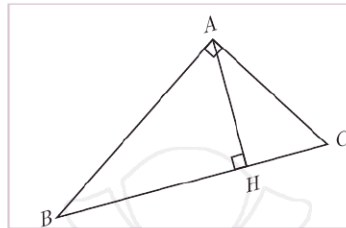
در مثلث قائم الزاویه روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به دست آورید.

الف) $BC = 10$ و $BH = 9$ و $AH = ?$ و $AB = ?$ و $AC = ?$

ب) $AC = 5$ و $CH = 2$ و $BC = ?$ و $AH = ?$ و $AB = ?$

پ) $AB = 8$ و $AC = 6$ و $BC = ?$ و $AH = ?$

ت) $AB = 12$ و $AH = 6$ و $BH = ?$ و $BC = ?$ و $AC = ?$



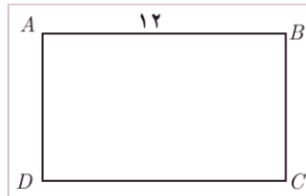
الف) $AC^2 = AB^2 = BH \times BC = 90 \Rightarrow AB = 3\sqrt{10} \approx 9.49$; $AH^2 = BH \times HC = 9 \Rightarrow AH = 3$; $HC = 10 - 9 = 1$
 $HC \times BC = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10} \approx 3.16$

ب) $AH^2 = BH \times CH = 21 \Rightarrow AH = \sqrt{21} \approx 4.58$; $BH = 12.5 - 2 = 10.5$; $AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 25 = 2 \times BC \Rightarrow BC = 12.5$
 $AB^2 = BH \times BC = 131.25 \Rightarrow AB = 5\sqrt{21/2} \approx 11.46$

پ) $AH = AB \times AC / BC = 48/10 = 4.8$; $BC = \sqrt{(8^2 + 6^2)} = 10$

ت) در مثلث قائم الزاویه ABH: $AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 144 = 6\sqrt{3} \times BH \Rightarrow BH = \sqrt{(12^2 - 6^2)} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \approx 10.39$
 $AB \times AC = (بررسی): AC^2 = BC^2 - AB^2 = 192 - 144 = 48 \Rightarrow AC = 4\sqrt{3} \approx 6.93$; $BC \Rightarrow BC = 8\sqrt{3} \approx 13.86$
 $(12 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \times 6 = 48\sqrt{3} \text{ } BC \times AH:$

شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازه عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازه عرض مستطیل را محاسبه کنید.



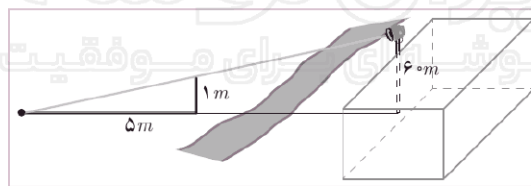
در مثلث ABD زاویه A قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر BD است.

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 144 - 121 = 23 \Rightarrow AH = \sqrt{23} \approx 4.80 \text{ عمود:}$$

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 144 = 11 \times BD \Rightarrow BD = 144/11 \approx 13.09 \text{ قطر:}$$

$$AB \times AD = (BD \times AH) \Rightarrow AD^2 = BD^2 - AB^2 = (144/11)^2 - 144 = 144 \times 23/121 \Rightarrow AD = 12\sqrt{23}/11 \approx 5.23 \text{ عرض:}$$

بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار یک چوب به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟

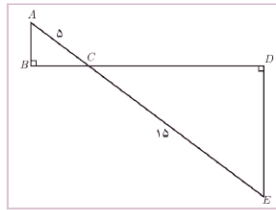


دو مثلث قائم‌الزاویه (چوب و سایه‌اش، نورافکن و فاصله مرد تا پای آن) زاویه حاد مشترک دارند؛ پس متشابه‌اند:

$$1/5 = 60/d \Rightarrow d = 300$$

فاصله مرد تا پای نورافکن ۳۰۰ متر است.

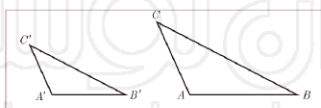
در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.



مثلث‌های ABC و EDC متشابه‌اند ($\angle B = \angle D = 90^\circ$ و زاویه‌های رأس C متقابل به رأس‌اند). نسبت تشابه: $AC/EC = 5/15 = 1/3$

نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه است: $1/3$ ؛ نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است: $(1/3)^2 = 1/9$.

دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به‌گونه‌ای که $AB/A'B' = AC/A'C' = BC/B'C' = K$.
 الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.
 ب) نسبت $AH/A'H'$ را به‌دست آورید.
 پ) نسبت مساحت‌های $S_{ABC} / S_{A'B'C'}$ را محاسبه کنید.
 ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌دست آورید.



الف) از تشابه ABC و $A'B'C'$ داریم $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\angle AHB = \angle A'H'B' = 90^\circ$ ؛ پس دو زاویه برابرند و $\triangle AHB \sim \triangle A'H'B'$.

ب) از تشابه الف): $AH/A'H' = AB/A'B' = K$.

پ) $S_{ABC} / S_{A'B'C'} = (\frac{1}{2} BC \times AH) / (\frac{1}{2} B'C' \times A'H') = (BC/B'C') \times (AH/A'H') = K \times K = K^2$

ت) $(AB+AC+BC)/(A'B'+A'C'+B'C') = K$ پس $BC = K \cdot B'C'$ ، $AC = K \cdot A'C'$ ، $AB = K \cdot A'B'$

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

