با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی (۲) پایه یازدهم

پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی و مسائل کتاب

پایه یازدهم · شاخه فنی و حرفه‌ای و کاردانش

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی و مسائل همه‌ی پودمان‌های کتاب

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۱ پودمان اول — تابع ۴

۲ پودمان دوم — تابع‌های خطی و درجه دوم و کاربرد آنها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها ... ۲۶

۳ پودمان سوم — زاویه‌های دلخواه و نسبت‌های مثلثاتی آنها ... ۴۳

۴ پودمان چهارم — لگاریتم و خواص آن ۶۶

۵ پودمان پنجم — آمار توصیفی ۸۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی (۲) یازدهم - پودمان اول

تابع

فهرست

۱ صفحه ۴ · فعالیت — طول فنر و جرم وزنه ۶

۲ صفحه ۷ · کار در کلاس — مساحت مربع ساخته شده از قطعه‌ی بریده شده از مفتول ۷

۳ صفحه ۱۰ · مسئله — کمیت‌های مرتبط ۸

۴ صفحه ۱۰ · مسئله — سانتی‌گراد و فارنهایت ۹

۵ صفحه ۱۰ · مسئله — وزن کتاب بر حسب تعداد ورق‌ها ۹

۶ صفحه ۱۰ · مسئله — مسافت و زمان راننده ۱۰

۷ صفحه ۱۰ · مسئله — حلقه‌ی دایره‌ای از طناب ۱۰

۸ صفحه ۱۱ · مسئله — مثال از کمیت‌های مرتبط ۱۱

۹ صفحه ۱۴ · کار در کلاس — تابع بودن جرم وزنه و مسافت ۱۱

۱۰ صفحه ۱۵ · کار در کلاس — دامنه و قانون تابع ۱۲

۱۱ صفحه ۱۶ · مسئله — دمای کلاس ۱۲

۱۲ صفحه ۱۶ · مسئله — دما و ارتفاع از سطح دریا ۱۳

۱۳ صفحه ۱۶ · مسئله — درآمد، هزینه و سود شیرینی‌فروشی ۱۳

۱۴ صفحه ۱۷ · مسئله — حجم آب حوضچه ۱۴

۱۵ صفحه ۱۷ · مسئله — ارتفاع سنگ پرتاب شده ۱۴

۱۶ صفحه ۱۷ · مسئله — مقاومت معادل ۱۴

۱۷ صفحه ۱۷ · مسئله — مربع یک عدد ۱۵

۱۸ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — نمایش بازه‌ها ۱۵

۱۹ صفحه ۲۰ · کار در کلاس — بازه‌های نامتناهی و اجتماع ۱۶

۲۰ صفحه ۲۱ · مسئله — مجموعه‌ها با بازه ۱۶

۲۱ صفحه ۲۱ · مسئله — نمایش بازه روی محور ۱۷

۲۲ صفحه ۲۱ · مسئله — نامعادله و بازه ۱۷

۲۳ صفحه ۲۱ · مسئله — تکمیل جدول نمایش‌های مجموعه ۱۷

۲۴ صفحه ۲۴ · کار در کلاس — نمادگذاری تابع مسافت خودرو ۱۸

۲۵ صفحه ۲۴ · کار در کلاس — نمادگذاری تابع مساحت مربع ۱۸

۲۶ صفحه ۲۵ · مسئله — تکمیل جدول مقادیر تابع ۱۹

۲۷ صفحه ۲۵ · مسئله — مقدار تابع g ۱۹

۲۸ صفحه ۲۵ · مسئله — محاسبه‌ی مقدار f ۲۰

۲۹ صفحه ۲۵ · مسئله — کرایه‌ی تاکسی ۲۰

۳۰ صفحه ۲۵ · مسئله — مساحت مستطیل با طول ۲ واحد بیشتر ۲۰

۳۱ صفحه ۲۵ · مسئله — سقوط سنگ از ساختمان ۲۱

۳۲ صفحه ۲۶ · فعالیت — ارقام اعشاری عدد پی ۲۱

۳۳ صفحه ۳۰ · مسئله — رسم نمودار از روی جدول ۲۲

۳۴ صفحه ۳۰ · مسئله — جدول و نمودار تابع f ۲۲

۳۵ صفحه ۳۰ · مسئله — خواندن مقدار تابع از نمودار ۲۳

۳۶ صفحه ۳۱ · مسئله — دامنه‌ی تابع‌ها از روی نمودار ۲۳

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۷ صفحه ۳۱ · مسئله — وضعیتی برای نمودار ۲۳
۳۸ صفحه ۳۱ · مسئله — رسم تابع g با شرایط داده شده ۲۴
۳۹ صفحه ۳۱ · مسئله — رسم تابع دلخواه f ۲۴
۴۰ صفحه ۳۱ · مسئله — یافتن ضریب ثابت تابع h ۲۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱ صفحه ۴ فعالیت

فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱۵ گرم وزنه که به آن آویزان می‌کنیم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود. حداکثر طول این فنر ۶۰ سانتی‌متر است و اگر بیش از این کشیده شود، پاره می‌شود. ۱) در جاهای خالی کلمه‌ی مناسب بگذارید. الف) هرچه جرم وزنه‌ی آویزان شده ..... شود، طول فنر ..... می‌شود. ب) اگر به این فنر یک وزنه‌ی ۳۰۰ گرمی آویزان کنیم، برای پیدا کردن طول فنر، چون به ازای هر ۱۵ گرم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود، پس ابتدا ۳۰۰ را بر .... تقسیم می‌کنیم و سپس .....

۲) در حالت کلی، اگر جرم وزنه‌ی آویزان شده را بر حسب گرم با a و طول فنر را بر حسب سانتی‌متر با l نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار l را بر حسب مقدار a بیان کند.

۳) حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم چقدر است؟ (راهنمایی: برای پیدا کردن حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، ابتدا باید حداکثر تغییر طول فنر را به دست آورد.)

۱) الف) هرچه جرم وزنه‌ی آویزان شده **بیشتر** شود، طول فنر **بیشتر** می‌شود.

ب) چون به ازای هر ۱۵ گرم، ۱ سانتی‌متر به طول فنر اضافه می‌شود، ابتدا ۳۰۰ را بر **۱۵** تقسیم می‌کنیم و سپس حاصل را با طول اولیه‌ی فنر (۱۰ سانتی‌متر) جمع می‌کنیم:

300 / 15 = 20 سانتی‌متر افزایش طول و 10 + 20 = 30

طول فنر برابر ۳۰ سانتی‌متر می‌شود.

۲) افزایش طول فنر برابر a/15 است و طول اولیه‌ی فنر ۱۰ سانتی‌متر است، پس:

l = 10 + a/15

۳) حداکثر طول فنر ۶۰ سانتی‌متر است، پس حداکثر تغییر طول برابر 50 = 10 – 60 سانتی‌متر است. چون هر ۱ سانتی‌متر تغییر طول، به ۱۵ گرم وزنه نیاز دارد:

50 x 15 = 750

حداکثر جرم وزنه‌ی قابل آویزان کردن، ۷۵۰ گرم است.

(درستی پاسخ: در رابطه‌ی l = 10 + a/15 به ازای a = 750 داریم l = 10 + 50 = 60.)

مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بریم و با قطعه‌ی بریده شده یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعه‌ی بریده شده رابطه دارد. ۱) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟

۲) اگر طول قطعه‌ی بریده شده از مفتول را با x نشان دهیم، x چه مقادیری می‌تواند باشد؟ ... < x < ...

۳) اگر طول قطعه‌ی بریده شده از مفتول ۸ سانتی‌متر باشد، مساحت مربع ساخته شده چند سانتی‌متر مربع است؟

۴) اگر طول قطعه‌ی بریده شده از مفتول را با x و مساحت مربع ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان کند.

۵) جدول زیر ارتباط بین طول قطعه‌ی بریده شده و مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

۶) ۴ نقطه‌ی اول جدول را در صفحه‌ی مختصات (محور افقی: طول قطعه‌ی بریده شده بر حسب سانتی‌متر، محور عمودی: مساحت مربع بر حسب سانتی‌متر مربع) بیابید و آن‌ها را به طور تقریبی به هم وصل کنید.

۷) با توجه به نمودار، برای ساختن مربعی به مساحت ۴۰ سانتی‌متر مربع، چه مقدار از مفتول را باید ببریم؟ این مقدار را به کمک رابطه‌ی قسمت (۴) نیز به دست آورید و سپس مقایسه کنید.

۸) آیا پاسخ به سؤال‌های (۲) و (۴) برای شناخت رابطه‌ی بین مساحت مربع ساخته شده و طول قطعه‌ی بریده شده از مفتول کافی هستند؟

---

۱) بله؛ مساحت وقتی صفر است که طول ضلع مربع صفر باشد، یعنی هیچ قسمتی از مفتول بریده نشود (x = 0). (در این صورت مربعی ساخته نمی‌شود؛ اما به این ترتیب مقدار 0 نیز جزو حالت‌های ممکن در نظر گرفته می‌شود و دامنه‌ی تابع، همان‌طور که در مثال‌های بعدی کتاب آمده، از صفر آغاز می‌شود.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) طول قطعه‌ی بریده شده نمی‌تواند منفی باشد و از طول کل مفتول هم بیشتر نمی‌شود، پس:

0 <= x <= 100

۳) محیط مربع ۸ سانتی‌متر است، پس طول ضلع آن 2 = 4 / 8 سانتی‌متر و مساحت آن 4 = 2^2 است.

مساحت مربع ۴ سانتی‌متر مربع است.

۴) قطعه‌ی بریده شده، محیط مربع است، پس ضلع مربع x/4 است و مساحت آن برابر است با:

S = (x/4)^2 = x^2/16

۵) با جای‌گذاری هر مقدار x در رابطه‌ی S = x^2/16:

جدول کامل‌شده

طول قطعه‌ی بریده شده (سانتی‌متر)	۱	۴	۲۰	۳۲	۴۸	۶۰	۱۰۰
مساحت مربع (سانتی‌متر مربع)	1/16	1	25	64	144	225	625

محاسبه‌ها: 1/16؛ 1 = 16/16؛ 25 = 400/16؛ 64 = 1024/16؛ 144 = 2304/16؛ 225 = 3600/16؛ 625 = 10000/16.

۶) چهار نقطه‌ی اول جدول عبارت‌اند از:

- (1/16, 1) که تقریباً روی محور افقی و بسیار نزدیک به مبدأ است؛
- (1, 4)؛
- (25, 20)؛
- (64, 32).

این نقاط را در صفحه‌ی مختصات مشخص می‌کنیم و به صورت یک منحنی هموار از مبدأ به هم وصل می‌کنیم. نمودار به صورت منحنی‌ای است که از مبدأ شروع می‌شود، رو به بالا است و هرچه x بزرگ‌تر می‌شود، شیبش بیشتر می‌شود (بخشی از یک سهمی)؛ یعنی نمودار پاره‌خط نیست.

۷) از روی نمودار: از نقطه‌ی ۴۰ روی محور عمودی خطی افقی رسم می‌کنیم تا نمودار را قطع کند و از آن نقطه به محور افقی عمود می‌کنیم؛ طول به دست آمده حدود ۲۵ سانتی‌متر است.

از روی رابطه: x^2/16 = 40 پس x^2 = 640 و

x = sqrt(640) = 8 sqrt(10) ~ 25.3 (تقریباً ۲۵٫۳ سانتی‌متر).

مقدار تقریبی از نمودار (حدود ۲۵) با مقدار دقیق (حدود ۲۵٫۳) نزدیک است؛ نمودار پاسخ تقریبی و رابطه پاسخ دقیق را می‌دهد.

۸) بله؛ در قسمت (۲) مقادیر ممکن برای x (دامنه) و در قسمت (۴) شیوه‌ی محاسبه‌ی S از روی x (قانون) را یافتیم. برای شناخت رابطه‌ی بین دو کمیت، دانستن این دو مورد کافی است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳ صفحه ۱۰ **مسئله**

کدام یک از گزینه‌های زیر دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه‌ی بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید. الف) طول ضلع یک مربع و محیط آن؛ ب) طول ضلع یک مربع و مساحت آن؛ پ) محیط یک مثلث و طول بزرگ‌ترین ضلع آن؛ ت) شعاع یک دایره و محیط آن؛ ث) شعاع یک دایره و مساحت آن؛ ج) مساحت یک مستطیل و محیط آن.

1. مرتبط‌اند. طول ضلع را a و محیط را P می‌نامیم: P = 4a.
2. مرتبط‌اند. طول ضلع را a و مساحت را S می‌نامیم: S = a^2.

3. هر دو به شکل مثلث بستگی دارند، اما رابطه‌ی دقیقی (قانون معین) بین آن‌ها وجود ندارد؛ با محیط معین، مثلث‌های متفاوتی با بزرگ‌ترین ضلع‌های متفاوت می‌توان ساخت. (فقط می‌دانیم بزرگ‌ترین ضلع کمتر از نصف محیط است.)
4. مرتبط‌اند. شعاع را r و محیط را P می‌نامیم: P = 2 pi r.
5. مرتبط‌اند. شعاع را r و مساحت را S می‌نامیم: S = pi r^2.
6. مساحت و محیط مستطیل رابطه‌ی معینی با هم ندارند؛ مثلاً مستطیل‌های 2 x 8 و 4 x 4 هر دو مساحت ۱۶ دارند، ولی محیط آن‌ها ۲۰ و ۱۶ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴ صفحه ۱۰ مسئله

آیا درجه حرارت یک مکان بر حسب سانتی‌گراد و درجه حرارت آن بر حسب فارنهایت مرتبط هستند؟ اگر مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه‌ی بین آن‌ها را بنویسید.

بله، مرتبط‌اند. دمای بر حسب سانتی‌گراد را C و دمای بر حسب فارنهایت را F می‌نامیم. رابطه‌ی آن‌ها این است:

F = 1.8 C + 32

برای نمونه، آب در C = 100 می‌جوشد و F = 1.8 x 100 + 32 = 212.

۵ صفحه ۱۰ مسئله

وزن جلد کتابی (با حداکثر ۲۰۰ صفحه) برابر ۴۰ گرم و وزن هر ورق آن ۰٫۸ گرم است. رابطه‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان وزن کتاب را بر حسب تعداد ورق‌های آن به دست آورد.

تعداد ورق‌ها را n و وزن کتاب (بر حسب گرم) را w می‌نامیم. وزن کتاب برابر است با وزن جلد به‌علاوه‌ی وزن ورق‌ها:

w = 40 + 0.8 n

چون هر ورق دو صفحه دارد، کتاب با حداکثر ۲۰۰ صفحه، حداکثر ۱۰۰ ورق دارد؛ پس n عددی طبیعی با شرط 1 <= n <= 100 است. مثلاً کتابی با ۱۰۰ ورق، w = 40 + 80 = 120 گرم وزن دارد.

۶ صفحه ۱۰ مسئله

راننده‌ای مسافت ۳۵۰ کیلومتری بین دو شهر را با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتر بر ساعت در حال طی کردن است. الف) آیا مقدار مسافتی که طی می‌کند (d) و زمان (t) دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، چه رابطه‌ای بین آن‌ها برقرار است؟ ب) هر یک از این دو کمیت چه مقادیری را می‌توانند داشته باشند؟

الف) بله؛ با گذشت زمان، مسافت طی شده تغییر می‌کند. چون سرعت ثابت است:

d = 70 t

ب) مسافت طی شده از ۰ تا ۳۵۰ کیلومتر تغییر می‌کند؛ زمان لازم برای طی کردن کل مسیر 350 / 70 = 5 ساعت است. پس:

0 <= d <= 350 و 0 <= t <= 5

۷ صفحه ۱۰ مسئله

طنابی به طول ۱۰ متر در اختیار داریم. قطعه‌ای از آن را می‌بریم و با قطعه‌ی بریده شده یک حلقه‌ی دایره‌ای شکل می‌سازیم. مساحت حلقه‌ی دایره‌ای شکل به دست آمده با طول قطعه‌ی بریده شده رابطه دارد. الف) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟

ب) طول قطعه‌ی بریده شده از طناب چه مقادیری می‌تواند باشد؟

پ) اگر طول قطعه‌ی بریده شده از طناب ۴ متر باشد، مساحت دایره‌ی ساخته شده چند متر مربع است؟

ت) اگر طول قطعه‌ی بریده شده از طناب را با x و مساحت دایره‌ی ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان کند.

ث) جدول ارتباط بین طول قطعه‌ی بریده شده و مساحت دایره‌ی ساخته شده را کامل کنید (فرض کنید pi ~ 3).

ج) به کمک جدول، این نقاط را بیابید و آن‌ها را به طور تقریبی به هم وصل کنید.

چ) برای شناخت رابطه‌ی مساحت دایره‌ی ساخته شده و طول قطعه‌ی بریده شده از طناب، چه مواردی را باید بدانیم؟

الف) بله، اگر هیچ قسمتی از طناب بریده نشود (x = 0)، مساحت صفر است (مانند کار در کلاس ۱).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ب) قطعه‌ی بریده شده نمی‌تواند منفی باشد و بیش از ۱۰ متر هم نمی‌شود:

0 <= x <= 10

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) قطعه‌ی بریده شده، محیط دایره است: 2 pi r = 4. با pi ~ 3 داریم r = 4/6 = 2/3 و S = pi r^2 = 3 x 4/9 = 4/3.

مساحت حدود 4/3 متر مربع (تقریباً ۱٫۳۳) است. (با مقدار دقیق‌تر pi حدود ۱٫۲۷ می‌شود.)

ت) از x = 2 pi r نتیجه می‌شود r = x / (2 pi) و

S = pi r^2 = pi x^2 / (4 pi^2) = x^2 / (4 pi)

با pi ~ 3: S = x^2/12.

ث) با استفاده از S = x^2/12:

جدول کامل‌شده

طول قطعه‌ی بریده شده	۱	۲	۴	۶	۸	۱۰
مساحت دایره	1/12	1/3	4/3	3	16/3	25/3

ج) نقاط (1, 1/12)، (2, 1/3)، (4, 4/3)، (6, 3)، (8, 16/3) و (10, 25/3) را در صفحه‌ی مختصات مشخص می‌کنیم و به هم وصل می‌کنیم. نمودار منحنی‌ای است که از مبدأ شروع می‌شود، رو به بالا است و به‌تدریج تندتر بالا می‌رود.

چ) باید بدانیم: ۱) x چه مقادیری می‌تواند داشته باشد (یعنی 0 <= x <= 10)؛ ۲) مساحت از روی x چگونه به دست می‌آید (یعنی S = x^2/(4 pi)).

۸ صفحه ۱۱ **مسئله**

دو کمیت مرتبط به هم مثال بزنید. هر یک را نام‌گذاری کنید و در صورت امکان رابطه‌ی بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

چند نمونه:

- شعاع r و محیط P دایره: P = 2 pi r؛
- مسافت d و زمان t برای حرکت با سرعت ثابت ۶۰ کیلومتر بر ساعت: d = 60 t؛
- تعداد کیلوگرم n میوه و بهای آن M اگر هر کیلوگرم ۲۰ هزار تومان باشد: M = 20000 n.

(هر مثال درست دیگری نیز پذیرفتنی است.)

۹ صفحه ۱۴ **کار در کلاس**

۱) در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده تابعی از طول فنر است؟ چرا؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲) در مثال (۱)، آیا مسافت طی شده توسط خودرو تابعی از حجم بنزین مصرف شده است؟ چرا؟

۱) بله. رابطه‌ی $l = 10 + a/15$ را می‌توان به صورت $a = 15\,l - 150$ نوشت. با مشخص شدن طول فنر l، جرم a دقیقاً یک مقدار معین دارد؛ پس جرم وزنه تابعی از طول فنر است. (مثلاً به ازای $l = 30$ فقط $a = 300$ به دست می‌آید.)

۲) بله. اگر حجم بنزین مصرف شده را u بنامیم، $u = 60 - v$ است و خودرو به ازای هر لیتر ۱۲٫۵ کیلومتر طی می‌کند، پس $d = 12.5\,u$. با مشخص شدن مقدار بنزین مصرف شده، مسافت طی شده یک مقدار معین دارد؛ بنابراین مسافت طی شده تابعی از حجم بنزین مصرف شده است.

۱۰ صفحه ۱۵ کار در کلاس

۱) در مثال (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط ماشین را بر حسب حجم بنزین باقی‌مانده در باک بیان می‌کند.

۲) در کار در کلاس (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مساحت مربع ساخته شده را بر حسب طول قسمت بریده شده از مفتول بیان می‌کند.

۱) حجم بنزین باقی‌مانده در باک حداقل ۵ و حداکثر ۶۰ لیتر است.

دامنه: [5, 60] = [{ v in R | 5 <= v <= 60 }]

قانون: d = 12.5 (60 – v)

۲) طول قسمت بریده شده از مفتول بین ۰ تا ۱۰۰ سانتی‌متر است.

دامنه: [0, 100] = [{ x in R | 0 <= x <= 100 }]

قانون: S = x^2/16

۱۱ صفحه ۱۶ مسئله

۱) آیا دمای کلاس شما در یک روز معین، تابعی از زمان است؟ چرا؟

بله. در یک روز معین، در هر لحظه (زمان مشخص) فقط یک دمای معین برای کلاس وجود دارد؛ یعنی با مشخص شدن زمان، دما یک مقدار معین دارد. پس دمای کلاس تابعی از زمان است. (اما عکس آن درست نیست: یک دمای معین ممکن است در چند زمان مختلف تکرار شود.)

۱۲ صفحه ۱۶ مسئله

۲) دمای هوا در یک منطقه، در ارتفاعات مختلف از سطح دریا، متفاوت است و به ازای هر ۱۵۰ متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. آیا دمای یک منطقه تابعی از ارتفاع آن منطقه از سطح دریا است؟ چرا؟

بله. اگر دمای هوا در سطح دریا T_0 و ارتفاع منطقه h متر باشد، دمای آن منطقه برابر است با:

$$T = T_0 - h/150$$

با مشخص شدن ارتفاع، دما دقیقاً یک مقدار معین دارد؛ پس دما تابعی از ارتفاع است.

۱۳ صفحه ۱۶ مسئله

۳) یک مغازه‌ی شیرینی‌فروشی ماهانه ۷ میلیون تومان بابت اجاره‌ی مغازه، آب، برق و دستمزد کارگران، به طور ثابت پرداخت می‌کند. تولید هر کیلوگرم شیرینی ۳۰۰۰ تومان هزینه‌ی مواد اولیه دارد. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش می‌رسد. اگر x میزان تولید شیرینی (به کیلوگرم) باشد: الف) درآمد این مغازه تابعی از میزان تولید آن است؛ این تابع را با به دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید. ب) هزینه‌ی ماهانه‌ی مغازه تابعی از میزان تولید آن است؛ این تابع را با به دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید. پ) سود مغازه تابعی از میزان تولید آن است؛ این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

میزان تولید x از ۰ تا ۲۵۰۰ کیلوگرم تغییر می‌کند.

الف) درآمد = قیمت هر کیلوگرم × مقدار فروش:

$$[D_R = [0, 2500 \ ,R(x) = 12000\ x$$

ب) هزینه = هزینه‌ی ثابت (۷,۰۰۰,۰۰۰ تومان) + هزینه‌ی مواد اولیه:

$$[D_C = [0, 2500 \ ,C(x) = 7000000 + 3000\ x$$

پ) سود = درآمد − هزینه:

$$P(x) = 12000\ x - (7000000 + 3000\ x) = 9000\ x - 7000000$$

$$[D_P = [0, 2500 \ ,P(x) = 9000\ x - 7000000$$

نکته: سود زمانی مثبت می‌شود که $9000\ x > 7000000$ یعنی $x > 777.8$ کیلوگرم تولید شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ صفحه ۱۷ مسئله

۴) از منبع آبی با حجم ۵۰۰ لیتر برای پر کردن یک حوضچه استفاده می‌شود. اگر شیر آب منبع به طور کامل باز باشد، در هر دقیقه ۵ لیتر آب از آن خارج می‌شود. الف) توضیح دهید که چرا حجم آب داخل حوضچه تابعی از زمان است. ب) با فرض آن‌که در لحظه‌ی صفر، حوضچه خالی است، قانون این تابع را با نوشتن حجم آب داخل حوضچه بر حسب زمان باز بودن شیر، بنویسید. پ) دامنه‌ی این تابع را مشخص کنید.

الف) با مشخص شدن مدت زمان باز بودن شیر، مقدار آب خارج‌شده (که وارد حوضچه می‌شود) دقیقاً یک مقدار معین است؛ پس حجم آب حوضچه تابعی از زمان است.

ب) اگر زمان باز بودن شیر t دقیقه و حجم آب حوضچه V لیتر باشد:

$$V(t) = 5t$$

پ) منبع ۵۰۰ لیتر آب دارد و در هر دقیقه ۵ لیتر خارج می‌شود، پس پس از 500/5 = 100 دقیقه منبع خالی می‌شود:

$$D = [0, 100]$$

۱۵ صفحه ۱۷ مسئله

۵) سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. در این صورت کمیت ارتفاع سنگ از سطح زمین و کمیت زمان با هم مرتبط هستند. الف) چرا ارتفاع سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است؟ ب) اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ، زمان شروع پرتاب باشد، دامنه‌ی این تابع چیست؟

الف) در هر لحظه، سنگ فقط در یک ارتفاع معین از سطح زمین قرار دارد؛ یعنی با مشخص شدن زمان، ارتفاع یک مقدار معین دارد. پس ارتفاع تابعی از زمان است.

ب) حرکت سنگ از لحظه‌ی پرتاب (t = 0) تا برگشتن به زمین (t = 3) ادامه دارد:

$$D = [0, 3]$$

۱۶ صفحه ۱۷ مسئله

۶) یک مقاومت ثابت ۳۰۰ اهمی (R_1) به طور موازی به یک مقاومت متغیر (R_2) متصل شده است. مقاومت نهایی (R_{eq}) تابعی از مقاومت متغیر است. اگر مقاومت متغیر حداقل ۵ اهم و حداکثر ۱۵۰۰ اهم باشد،

دامنه و قانون تابعی را به دست آورید که مقاومت نهایی را بر حسب مقاومت متغیر بیان می‌کند. (راهنمایی: از فرمول 1/R_eq = 1/R_1 + 1/R_2 کمک بگیرید.)

مقاومت متغیر را R می‌نامیم. از فرمول داده شده:

1/R_eq = 1/300 + 1/R = (R + 300)/(300 R)

با وارونه کردن دو طرف:

R_eq(R) = 300 R / (R + 300)

دامنه: D = [5, 1500]

مثلاً: R_eq(300) = 90000/600 = 150 اهم.

---

۱۷ صفحه ۱۷ مسئله

۷) فرض کنیم x^2 مربع عدد حقیقی x باشد. آیا با مشخص بودن x^2، برای x یک مقدار معین در اعداد حقیقی به دست می‌آید؟ آیا یک عدد، تابعی از مربع آن است؟ چرا؟

خیر. اگر x^2 = 4 باشد، هم x = 2 و هم x = −2 جواب‌اند؛ یعنی برای x یک مقدار معین به دست نمی‌آید (به‌جز وقتی x^2 = 0).

یک عدد تابعی از مربع خود نیست؛ زیرا با مشخص شدن مربع عدد، بیش از یک مقدار برای خود عدد به دست می‌آید. (اما مربع عدد، تابعی از خود عدد است.)

---

۱۸ صفحه ۱۹ کار در کلاس

۱) بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش داده و روی یک محور نشان دهید. سپس تعیین کنید 3− متعلق به کدام یک از بازه‌ها می‌باشد. [2, 5] ، (−1, 3) ، (4, 7) ، (−2, −4]

۲) هر یک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور نمایش داده و با نماد بازه‌ها نشان دهید. { x in R | −1/2 < x < 3 } ، { 3 } ، { x in R | 3 < x <= 5 } ، { x in R | 1 <= x < 10 } ، { x in R | −3 <= x <= 8 }

۱)

- { x in R | 2 <= x <= 5 } = [2, 5]: روی محور، از ۲ تا ۵ با دو نقطه‌ی توپر در هر دو سر؛
- { x in R | −1 < x < 3 } = (−1, 3): از ۱− تا ۳ با دو نقطه‌ی توخالی؛
- { x in R | 4 < x <= 7 } = (4, 7]: از ۴ تا ۷ با نقطه‌ی توخالی در ۴ و توپر در ۷؛

- $\{ x \in R \mid -4 <= x < -2 \} = [-4, -2)$: از ۴- تا ۲- با نقطه‌ی توپر در ۴- و توخالی در ۲-.

عدد 3- بین ۴- و ۲- و از ۴- بزرگ‌تر یا مساوی و از ۲- کوچک‌تر است؛ پس:

$-3 \in [-4, -2)$

(در سه بازه‌ی دیگر نیست.)

۲)

- $\{ x \mid -1/2 < x < 3 \} = (-1/2, 3)$: دو نقطه‌ی توخالی در 1/2- و ۳؛
- $\{ x \mid 3 < x <= 5 \} = (3, 5]$: توخالی در ۳ و توپر در ۵؛
- $\{ x \mid 1 <= x < 10 \} = [1, 10)$: توپر در ۱ و توخالی در ۱۰؛
- $\{ x \mid -3 <= x <= 8 \} = [-3, 8]$: دو نقطه‌ی توپر در ۳- و ۸.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۹ صفحه ۲۰ کار در کلاس

۱) بازه‌ی $[1, +\infty)$ را روی محور نمایش دهید. ۲) بازه‌ی $(-\infty, 1)$ را روی محور نمایش دهید. ۳) اجتماع این دو بازه را روی محور نمایش دهید. اجتماع این دو بازه چه مجموعه‌ای است؟

۱) $\{ x \in R \mid x >= 1 \} = [1, +\infty)$: نقطه‌ی توپر در ۱ و پاره‌خطی به سمت راست تا بی‌نهایت (با فلش).

۲) $\{ x \in R \mid x < 1 \} = (-\infty, 1)$: نقطه‌ی توخالی در ۱ و پاره‌خطی به سمت چپ تا بی‌نهایت (با فلش).

۳) اجتماع دو بازه شامل همه‌ی اعداد کوچک‌تر از ۱ و همه‌ی اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۱ است؛ یعنی کل محور اعداد.

$R = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$ یعنی مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی.

---

۲۰ صفحه ۲۱ مسئله

۱) مجموعه‌های زیر را با بازه نمایش دهید و روی محور مشخص کنید. الف) مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر از 3-؛ ب) مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۲؛ پ) مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین 3- و ۵.

1. $(-\infty, -3)$: نقطه‌ی توخالی در ۳- و پاره‌خط به سمت چپ.
2. $[2, +\infty)$: نقطه‌ی توپر در ۲ و پاره‌خط به سمت راست.
3. $(-3, 5)$: دو نقطه‌ی توخالی در ۳- و ۵ و پاره‌خط بین آن‌ها.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۱ صفحه ۲۱ مسئله

۲) مجموعه‌های زیر را روی محور مشخص کنید. الف) (0, 3) ب) [-1, 5) پ) [-1, 4]

1. از ۰ تا ۳، دو نقطه‌ی توخالی در هر دو سر.
2. از ۱- تا ۵، نقطه‌ی توخالی در ۱- و نقطه‌ی توپر در ۵.
3. از ۱- تا ۴، نقطه‌ی توپر در ۱- و نقطه‌ی توخالی در ۴.

۲۲ صفحه ۲۱ مسئله

۳) مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی 1 < 5 − 2x را با یک بازه نمایش دهید.

$x < 2 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow 1 < 5 - 2x$

مجموعه‌ی جواب: (-oo, 2)

۲۳ صفحه ۲۱ مسئله

۴) جدول زیر را کامل کنید. (ستون‌ها: توصیف مجموعه، نمایش روی محور اعداد، نمایش با بازه، نمایش با نماد مجموعه)

جدول کامل‌شده

توصیف مجموعه	نمایش روی محور اعداد	نمایش با بازه	نمایش با نماد مجموعه
اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۰ و کوچک‌تر از ۲	نقطه‌ی توپر در ۰، نقطه‌ی توخالی در ۲	[0, 2)	{ x in R | 0 <= x < 2 }
اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۱ و کوچک‌تر از ۴	نقطه‌ی توپر در ۱، نقطه‌ی توخالی در ۴	[1, 4)	{ x in R | 1 <= x < 4 }
مجموعه‌ی اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲	نقطه‌ی توپر در ۲ و پاره‌خط به سمت چپ	(-oo, 2]	{ x in R | x <= 2 }

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۴ صفحه ۲۴ کار در کلاس

۱) الف) تابع به دست آمده در مثال (۱)، که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند، g بنامید. D_g را بنویسید. قانون تابع g چگونه نوشته می‌شود؟ ب) مقدارهای g(45) و g(18) را بیابید. آیا مقدار g(75) معنایی دارد؟ چرا؟ پ) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ ت) اگر متغیر این تابع را با v نشان دهیم، مجموعه‌ای که v در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟ ث) دو تابع قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $D_g = [5, 60]$ و قانون تابع:

$$g(v) = 12.5\,(60 - v)$$

ب) $g(45) = 12.5 \times 15 = 187.5$ و $g(18) = 12.5 \times 42 = 525$.

g(75) معنا ندارد، زیرا ۷۵ در دامنه‌ی تابع نیست (باک خودرو فقط ۶۰ لیتر گنجایش دارد).

پ) مجموعه‌ای که t در آن است، **دامنه** $D_g = [5, 60]$ نام دارد و قانون تابع:

$$g(t) = 12.5\,(60 - t)$$

ت) v نیز در دامنه‌ی تابع، یعنی $[5, 60]$ قرار دارد و قانون تابع:

$$g(v) = 12.5\,(60 - v)$$

ث) دامنه و قانون هر دو تابع یکسان است و فقط نام متغیر فرق کرده است. نتیجه: عوض کردن نام متغیر، تابع را تغییر نمی‌دهد.

۲۵ صفحه ۲۴ کار در کلاس

۲) الف) تابع به دست آمده در کار در کلاس (۱)، که مساحت مربع ساخته شده را بر حسب طول مفتول بریده شده بیان می‌کند، h نام‌گذاری کنید و D_h را بنویسید. ب) مقدارهای h(5) و h(12) را بیابید. آیا مقدار h(200) معنایی دارد؟ چرا؟ پ) اگر متغیر این تابع را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که x در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ ت) اگر این تابع را با k و متغیر این تابع را با z نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که z در آن است مشخص کنید. ث) دو تابع قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $D_h = [0, 100]$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) $h(5) = 25/16 = 1.5625$ و $h(12) = 144/16 = 9$. مقدار $h(200)$ معنا ندارد، زیرا ۲۰۰ در دامنه‌ی تابع نیست (طول مفتول فقط ۱۰۰ سانتی‌متر است).

پ) مجموعه‌ای که x در آن است، دامنه‌ی تابع، یعنی $[0, 100]$ نام دارد و:

h(x) = x^2/16

ت)

[z in [0, 100 ,k(z) = z^2/16]

ث) قانون و دامنه‌ی دو تابع یکسان است؛ پس نام تابع و نام متغیر، تابع را تغییر نمی‌دهند.

---

۲۶ صفحه ۲۵ **مسئله**

۱) جاهای خالی را برای تابع با قانون $f(x) = x^2 - x + 2$ و دامنه‌ی R پر کنید. (جدول با ستون‌های x، f(x)، x^2 و (-x + 2)

جدول کامل‌شده

x	x^2	-x + 2	f(x)
-2	4	4	8
0	0	2	2
2	4	0	4

یعنی $f(-2) = 8$، $f(0) = 2$ و $f(2) = 4$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۷ صفحه ۲۵ **مسئله**

۲) تابع g با قانون $g(x) = 4x^2 - 3x$ و دامنه‌ی $D_g = [-2, 3]$ را در نظر بگیرید. g(-2) را محاسبه کنید. آیا g(4) معنایی دارد؟ چرا؟

$g(-2) = 4 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) = 16 + 6 = 22$

g(4) معنا ندارد، زیرا ۴ در دامنه‌ی تابع (یعنی $[-2, 3]$) نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۸ صفحه ۲۵ مسئله

۳) تابع f با دامنه‌ی R و قانون f(x) = x^2 − 4 مفروض است. مقادیر خواسته شده را بیابید. الف) f(−2) ب) f(1/2) پ) f(sqrt(2))

1. f(−2) = 4 − 4 = 0
2. f(1/2) = 1/4 − 4 = −15/4
3. f(sqrt(2)) = 2 − 4 = −2

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۹ صفحه ۲۵ مسئله

۴) کرایه‌ی تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیه‌ی تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰ متر، ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را به دست آورید که کرایه‌ی تاکسی را بر حسب مسافت طی شده بیان می‌کند. با توجه به آن‌که تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰ کیلومتر طی می‌کنند، دامنه‌ی این تابع را مشخص کنید. نامی برای این تابع و متغیر آن انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود بیان کنید.

به ازای هر ۱۰۰ متر، ۵۰ تومان؛ پس به ازای هر کیلومتر (۱۰ برابر) ۵۰۰ تومان. تابع را k و متغیر آن را (مسافت بر حسب کیلومتر) x می‌نامیم:

k(x) = 500 x + 600

مسافت طی شده حداقل صفر و حداکثر ۵۰۰ کیلومتر است:

[D_k = [0, 500

مثلاً برای ۱۰ کیلومتر: k(10) = 5000 + 600 = 5600 تومان. (اگر مسافت را بر حسب متر d بگیریم، k(d) = d/ 2 + 600 و [D_k = [0, 500000 می‌شود.)

۳۰ صفحه ۲۵ مسئله

۵) مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آن‌ها ۲ واحد بیشتر از عرض آن‌ها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آن‌ها است. این تابع را g بنامید و متغیر آن را با l نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا g(−1) معنایی دارد؟

عرض مستطیل را l می‌گیریم؛ طول آن l + 2 است و مساحت برابر است با:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$g(l) = l(l + 2) = l^2 + 2l$

عرض مستطیل باید مثبت باشد:

$D_g = (0, +\infty)$

$g(-1)$ معنا ندارد، زیرا -1 در دامنه نیست (عرض مستطیل منفی نمی‌شود). (هرچند با جای‌گذاری در قانون، $-1 - 2 = -1$ به دست می‌آید که برای مساحت هم معنا ندارد.)

---

۳۱ صفحه ۲۵ **مسئله**

۶) سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنیم. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر زمان را بر حسب ثانیه با t و ارتفاع از سطح زمین را بر حسب متر اندازه‌گیری کنیم و با $f(t) = -5t^2 + 25$ نشان دهیم و لحظه‌ی رها کردن سنگ، لحظه‌ی صفر باشد، قانون این تابع به صورت $f(t)$ است. الف) دامنه‌ی این تابع را تعیین کنید. ب) مقدارهای $f(1)$ و $f(2)$ را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟ پ) آیا $f(3)$ و $f(-1)$ معنایی دارند؟ چرا؟

الف) سنگ وقتی به زمین می‌رسد که $f(t) = 0$: $-5t^2 + 25 = 0 \Rightarrow t^2 = 5 \Rightarrow t = \sqrt{5} \sim 2.24$ ثانیه. پس:

$D_f = [0, \sqrt{5}]$

ب) $f(1) = -5 + 25 = 20$ و $f(2) = -20 + 25 = 5$. این مقادیر ارتفاع سنگ از سطح زمین را (به متر) به ترتیب ۱ ثانیه و ۲ ثانیه پس از رها شدن نشان می‌دهند.

پ) $f(3) = -45 + 25 = -20$ معنا ندارد، زیرا $3 > \sqrt{5}$ است و سنگ پیش‌تر به زمین رسیده است؛ یعنی ۳ در دامنه نیست. $f(-1)$ هم معنا ندارد، زیرا -1 زمانی پیش از رها شدن سنگ است و در دامنه نیست.

---

۳۲ صفحه ۲۶ **فعالیت**

عدد pi تا ده رقم اعشار برابر است با $\pi \sim 3.1415926535$. برای $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$، اگر $f(n)$ رقم nام اعشاری pi را نشان دهد، برای مثال $f(1) = 1$ و $f(2) = 4$. ۱) جاهای خالی را پر کنید: $f(6) = \ldots$، $f(9) = \ldots$، $f(10) = \ldots$، $f(8) = \ldots$ ۲) دامنه‌ی این تابع را با یک مجموعه نشان دهید. ۳) جدول را با توجه به دامنه‌ی داده شده کامل کنید.

ارقام اعشاری به ترتیب: ۱، ۴، ۱، ۵، ۹، ۲، ۶، ۵، ۳، ۵.

۱) $f(6) = 2$، $f(9) = 3$، $f(10) = 5$، $f(8) = 5$.

۲)

$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳)

جدول کامل‌شده

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
f(n)	۱	۴	۱	۵	۹	۲	۶	۵	۳	۵

۳۳ صفحه ۳۰ **مسئله**

۱) هر یک از جدول‌های زیر نمایش یک تابع با دامنه‌ی {−1, 0, 1, 2, 3} می‌باشد. نمودار هر یک را در صفحه‌ی مختصات رسم کنید. در صورت امکان قانون تابع را بنویسید. الف) x: ۱−، ۰، ۱، ۲، ۳ و y: ۲−، ۰، ۲، ۴، ۶ ب) x: ۱−، ۰، ۱، ۲، ۳ و y: ۱، ۰، ۱، ۴، ۹

الف) نقاط: (−2, −1)، (0, 0)، (1, 2)، (2, 4)، (3, 6). این پنج نقطه روی یک خط راست (با شیب ۲ که از مبدأ می‌گذرد) قرار دارند؛ نمودار فقط خود این ۵ نقطه است (نقطه‌های جدا از هم). قانون:

$y = 2x$

ب) نقاط: (−1, 1)، (0, 0)، (1, 1)، (2, 4)، (3, 9). این نقاط روی نمودار سهمی قرار دارند و نمودار فقط شامل همین ۵ نقطه است. قانون:

$y = x^2$

۳۴ صفحه ۳۰ **مسئله**

۲) نمایش جدول تابع f با دامنه‌ی {−2, 0, 1, 2, 4} به صورت زیر است: x: ۲−، ۰، ۱، ۲، ۴ و f(x): ۰، ۳، ۱−، ۳، ۱. الف) مقادیر f(4)، f(1) و f(0) را بیابید. ب) نمودار f را در صفحه‌ی مختصات رسم کنید.

الف) $f(4) = 1$، $f(1) = -1$، $f(0) = 3$.

ب) نمودار فقط از پنج نقطه‌ی زیر تشکیل می‌شود (نقاط به هم وصل نمی‌شوند):

- (−2, 0)
- (0, 3)
- (1, −1)
- (2, 3)
- (4, 1)

۳۵ صفحه ۳۰ مسئله

۳) نمودار تابع g در شکل کتاب رسم شده است. الف) با توجه به شکل، دامنه‌ی g را بنویسید. ب) g(2)، g(−2) و g(0) را به دست آورید. پ) آیا g(4) معنایی دارد؟ چرا؟

الف) دامنه شامل طول‌های همه‌ی نقاط نمودار است؛ یعنی تصویر (سایه) نمودار روی محور xها. بازه‌ای که نمودار روی آن قرار دارد (از چپ‌ترین تا راست‌ترین نقطه) دامنه است، و محور افقی شکل تا ۳ ادامه دارد.

ب) برای یافتن g(a)، از نقطه‌ی x = a بر محور افقی عمودی رسم می‌کنیم تا نمودار را قطع کند؛ عرض نقطه‌ی برخورد (خوانده شده روی محور y) مقدار g(a) است. این کار را برای a = 2، a = −2 و a = 0 انجام می‌دهیم.

پ) خیر؛ ۴ بیرون از محدوده‌ی نمودار و محور افقی شکل (که تا ۳ ادامه دارد) است، یعنی در دامنه نیست؛ پس g(4) معنا ندارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۶ صفحه ۳۱ مسئله

۴) سه تابع (الف)، (ب) و (پ) که نمودار آن‌ها در کتاب رسم شده است را در نظر بگیرید. دامنه‌ی هر یک از این تابع‌ها را بنویسید.

روش: از تمام نقاط نمودار خطی عمود بر محور xها رسم می‌کنیم؛ مجموعه‌ی طول‌های نقاط برخورد، دامنه است. اگر نمودار به‌صورت پاره‌خط یا منحنی پیوسته باشد، دامنه یک بازه است که سر و ته آن به ترتیب طول چپ‌ترین و راست‌ترین نقطه‌ی نمودار است؛ سر بازه در جایی که نقطه‌ی نمودار توپر است بسته و در جایی که توخالی است باز نوشته می‌شود. اگر نمودار از چند نقطه‌ی جدا از هم باشد، دامنه مجموعه‌ی طول‌های آن نقاط است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۷ صفحه ۳۱ مسئله

۵) وضعیتی از زندگی روزمره را بنویسید که نمودار زیر (نمودار مسافت بر حسب زمان) نشان‌دهنده‌ی آن وضعیت باشد.

نمونه‌ی وضعیت: «مسافت دوچرخه‌سواری از خانه، در طول ۴ ساعت». او در ساعت‌های اول با سرعت ثابت از خانه دور می‌شود (مسافت زیاد می‌شود)، سپس مدتی برای استراحت می‌ایستد (مسافت ثابت می‌ماند) و در پایان با سرعت ثابت به خانه برمی‌گردد (مسافت کم می‌شود).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۸ صفحه ۳۱ مسئله

۶) تابع g با دامنه‌ی {3, 0, −1, −2} را طوری رسم کنید که g(−2) = 1 و g(0) = 2.

مقدار g(−1) و g(3) دلخواه است؛ مثلاً g(−1) = 0 و g(3) = −1 می‌گیریم. جدول تابع:

یک نمونه جدول تابع

x	−2	−1	0	3
g(x)	1	0	2	−1

نمودار شامل چهار نقطه‌ی (1, −2)، (0, −1)، (2, 0) و (−1, 3) است و نقاط به هم وصل نمی‌شوند. (هر انتخاب دیگر برای g(−1) و g(3) نیز درست است.)

۳۹ صفحه ۳۱ مسئله

۷) تابع دلخواه f با دامنه‌ی [4, −1]] را طوری رسم کنید که f(−1) = 1 و f(2) = −3.

یک نمونه: دو پاره‌خط زیر را رسم می‌کنیم:

- پاره‌خطی از نقطه‌ی (1, −1) تا نقطه‌ی (−3, 2)؛
- پاره‌خطی از نقطه‌ی (−3, 2) تا نقطه‌ی (1, 4).

این نمودار به ازای هر x از −1 تا ۴ دقیقاً یک نقطه دارد (هر خط عمودی آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند)، پس نمودار یک تابع با دامنه‌ی [4, −1]] است و شرایط خواسته شده را دارد. (هر نمودار درست دیگری نیز پذیرفتنی است.)

۴۰ صفحه ۳۱ مسئله

۸) تابع h با دامنه‌ی [3, 0]] و قانون h(x) = 3x^2 + a را در نظر بگیرید. الف) مقدار a را طوری بیابید که h(1) = 2.
ب) h(2) را بیابید. پ) آیا h(4) معنایی دارد؟ چرا؟

الف) a = −1 ⇒ h(1) = 3 + a = 2، پس h(x) = 3x^2 − 1.

ب) h(2) = 3 × 4 − 1 = 11.

پ) خیر، چون ۴ در دامنه‌ی [3, 0]] نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی (۲) یازدهم - پودمان دوم

تابع‌های خطی و درجه دوم و کاربرد آنها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها

فهرست

۴۱ صفحه ۳۵ · فعالیت — رشد بامبو ۲۷

۴۲ صفحه ۳۷ · کار در کلاس — تعداد طرح‌های رضا ۲۷

۴۳ صفحه ۳۸ · فعالیت — خودرو پشت چراغ قرمز ۲۸

۴۴ صفحه ۳۹ · کار در کلاس — تابع ثابت و مساحت مثلث ۲۹

۴۵ صفحه ۴۱ · فعالیت — تغییر نمودار تابع خطی با a و b ۳۰

۴۶ صفحه ۴۲ · کار در کلاس — خط‌های هم‌خانواده ۳۰

۴۷ صفحه ۴۴ · مسئله — تشخیص جدول تابع خطی ۳۱

۴۸ صفحه ۴۴ · مسئله — حقوق علی در شرکت بیمه ۳۱

۴۹ صفحه ۴۴ · مسئله — حرکت کشتی از ساحل ۳۱

۵۰ صفحه ۴۵ · مسئله — دمای هوای تهران در یک هفته ۳۲

۵۱ صفحه ۴۵ · مسئله — سانتی‌گراد و فارنهایت ۳۲

۵۲ صفحه ۴۷ · فعالیت — شکل نمودار تابع‌های درجه‌ی دوم ۳۳

۵۳ صفحه ۴۸ · کار در کلاس — تعیین k و p و q از روی نمودار ۳۳

۵۴ صفحه ۴۹ · مسئله — k و p و q از نمودار ۳۴

۵۵ صفحه ۴۹ · مسئله — انتخاب قانون تابع از روی نمودار ۳۴

۵۶ صفحه ۴۹ · مسئله — پرتاب توپ بسکتبال ۳۵

۵۷ صفحه ۵۰ · فعالیت — دما و ارتفاع در کوه دماوند ۳۵

۵۸ صفحه ۵۲ · کار در کلاس — سقوط قطره‌ی آب از آبشار ۳۶

۵۹ صفحه ۵۳ · مسئله — جواب‌های معادله از روی نمودار ۳۶

۶۰ صفحه ۵۳ · مسئله — حل معادله با رسم نمودار ۳۷

۶۱ صفحه ۵۳ · مسئله — پرتاب توپ و ارتفاع ۲ متر ۳۷

۶۲ صفحه ۵۴ · فعالیت — درآمد فروش دست‌ساز ۳۸

۶۳ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — درآمد فروش تلفن همراه ۳۸

۶۴ صفحه ۵۶ · فعالیت — حل نامعادله با نمودار ۳۹

۶۵ صفحه ۵۸ · کار در کلاس — عرض مستطیل با مساحت کمتر از ۲۵ ۳۹

۶۶ صفحه ۵۹ · مسئله — جواب نامعادله از روی نمودار ۴۰

۶۷ صفحه ۵۹ · مسئله — حل نامعادله‌ها ۴۰

۶۸ صفحه ۵۹ · مسئله — ارتفاع پرتابه بیش از ۲۰۰ متر ۴۱

۶۹ صفحه ۵۹ · مسئله — محیط مثلث و مساحت مربع ۴۱

۷۰ صفحه ۵۹ · مسئله — درآمد کارگاه قطعات یدکی ۴۲

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۱ صفحه ۳۵ — فعالیت

نوعی بامبو پس از آن که به ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر می‌رسد، به طور تقریبی در هر ساعت ۳٫۸ سانتی‌متر رشد می‌کند. اگر ارتفاع بامبو (بر حسب سانتی‌متر) پس از t ساعت را با h(t) نشان دهیم، h(t) = 20 + 3.8 t و دامنه‌ی تابع [[0, 24 است. ۱) جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را بنویسید. (t = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ ساعت)

۲) به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t، مقدار h چه تغییری می‌کند؟

۳) رابطه‌ی بین دو کمیت h و t خطی است یا غیرخطی؟ چرا؟

۴) h(2) چه چیزی را نشان می‌دهد؟ h(18) چطور؟

۵) اگر h(a) = 39، a را پیدا کنید. این مقدار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۱) با جای‌گذاری در h(t) = 20 + 3.8 t:

جدول کامل‌شده

t (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (سانتی‌متر)	20	23.8	27.6	31.4	35.2
اختلاف مقادیر متوالی	—	3.8	3.8	3.8	3.8

۲) به ازای هر یک واحد افزایش t، مقدار h به اندازه‌ی ثابت **۳٫۸ واحد** افزایش می‌یابد.

۳) رابطه **خطی** است؛ زیرا قانون تابع یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ است، اختلاف مقادیر تابع به ازای هر یک واحد تغییر t ثابت (۳٫۸) است و نمودار آن خط راست با شیب ۳٫۸ است.

۴) h(2) = 20 + 3.8 x 2 = 27.6: ارتفاع بامبو پس از ۲ ساعت که ۲۷٫۶ سانتی‌متر است. h(18) = 20 + 3.8 x 18 = 88.4 =: ارتفاع بامبو پس از ۱۸ ساعت که ۸۸٫۴ سانتی‌متر است.

۵) 20 + 3.8 a = 39 پس 3.8 a = 19 و a = 5.

پس از ۵ ساعت، ارتفاع بامبو به ۳۹ سانتی‌متر می‌رسد.

۴۲ صفحه ۳۷ — کار در کلاس

رضا تا سال قبل ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد. ۱) رضا قبل از این تصمیم چند طرح داشت؟ در آخر ماه اول چند طرح داشت؟ در آخر ماه پنجم چطور؟

۲) اگر تعداد ماه‌های سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با f(x) نمایش دهیم، قانون تابع f و دامنه‌ی آن را بنویسید.

۳) مقادیر f(0) و f(10) را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا f(−1) معنایی دارد؟

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۴) اگر دامنه‌ی تابع را بازه‌ی [[0, 12 در نظر بگیریم، نمودار تابع را رسم کنید.

۵) اگر f(a) = 17، مقدار a را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید.

۱) قبل از تصمیم: ۵ طرح. آخر ماه اول: 7 = 2 + 5 طرح. آخر ماه پنجم: 15 = 5 x 2 + 5 طرح.

۲) هر ماه ۲ طرح به ۵ طرح اولیه اضافه می‌شود:

f(x) = 2x + 5 ، دامنه: [[0, 12

۳) f(0) = 5: تعداد طرح‌ها قبل از شروع برنامه (۵ طرح). f(10) = 2 x 10 + 5 = 25: تعداد کل طرح‌ها پس از ۱۰ ماه (۲۵ طرح). f(−1) معنایی ندارد؛ زیرا 1− خارج از دامنه است و ماه منفی (پیش از شروع برنامه) در این مسئله معنا ندارد.

۴) چون f(0) = 5 و f(12) = 29، نمودار پاره‌خطی است که نقطه‌ی (0, 5) را به نقطه‌ی (12, 29) وصل می‌کند و شیب آن ۲ است (به ازای هر ماه، ۲ واحد بالا می‌رود).

۵) 17 = 2a + 5 پس 2a = 12 و a = 6.

پس از ۶ ماه، تعداد کل طرح‌های رضا ۱۷ می‌شود.

۴۳ صفحه ۳۸ **فعالیت**

خودرویی از نقطه‌ی A شروع به حرکت می‌کند و پس از طی ۲ کیلومتر پشت چراغ قرمز می‌ایستد. مدت زمان چراغ قرمز ۲۰ ثانیه است. ۱) مقدار مسافت طی شده به وسیله‌ی خودرو از نقطه‌ی A پس از ۲ ثانیه توقف پشت چراغ قرمز چقدر است؟ پس از ۵ ثانیه چطور؟

۲) جدول را کامل کنید. (زمان توقف t: ۰، ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ ثانیه؛ مسافت طی شده d بر حسب کیلومتر)

۳) نمودار تابع را از زمان t = 0 تا زمان t = 20 رسم کنید.

۴) با تغییر زمان (t)، مسافت طی شده (d) چه تغییری می‌کند؟

۱) خودرو ایستاده است، پس مسافت آن از نقطه‌ی A تغییر نمی‌کند: پس از ۲ ثانیه و پس از ۵ ثانیه هر دو **۲ کیلومتر**.

۲)

جدول کامل‌شده

t (ثانیه)	۰	۲	۵	۱۰	۲۰
d (کیلومتر)	۲	۲	۲	۲	۲

۳) نمودار، پاره‌خطی افقی (موازی محور t) است که از نقطه‌ی (0, 2) تا نقطه‌ی (20, 2) کشیده می‌شود.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴) با تغییر t، مقدار d هیچ تغییری نمی‌کند و همیشه ۲ است. قانون تابع $d(t) = 2$ است که یک تابع ثابت است.

۴۴ صفحه ۳۹ کار در کلاس

۱) نمودارهای داده شده چند تابع خطی را نشان می‌دهند. مشخص کنید کدام نمودار مربوط به تابع ثابت است. دلیل خود را توضیح دهید.

۲) در صفحه‌ی مختصات، مثلثی با رئوس $A = (0, 0)$، $B = (3, 0)$ و $C = (0, 2)$ رسم کنید. خط L از نقطه‌ی C می‌گذرد و موازی محور xهاست. الف) مساحت مثلث ABC را به دست آورید. ب) x طول نقطه‌ای از خط L (مانند E) و $S(x)$ مساحت مثلث ABE است. جدول را برای $x = -2, -1, 0, 1, 2$ کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را بنویسید. پ) قانون این تابع را بنویسید و توضیح دهید چرا S تابعی خطی از x است؟ ت) به ازای هر یک واحد افزایش x، مقدار $S(x)$ چه تغییری می‌کند؟ شیب این خط چقدر است؟ ث) با استفاده از جدول، نمودار تابع را رسم کنید.

۱) نموداری که **خط افقی** (موازی محور xها) است، نمودار تابع ثابت است؛ زیرا در تابع ثابت $f(x) = c$ مقدار تابع به ازای همه‌ی xها یکسان است، پس همه‌ی نقاط نمودار عرض برابر دارند و خط، شیب صفر دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) الف) مثلث ABC در A قائمه است، پس مساحت آن $1/2 \times AB \times AC = 1/2 \times 3 \times 2 = 3$ است.

ب) نقطه‌ی E روی خط L (به ارتفاع ۲ از محور x) است، پس ارتفاع مثلث ABE نسبت به قاعده‌ی AB همیشه ۲ است و مساحت آن همیشه $1/2 \times 3 \times 2 = 3$ می‌شود:

جدول کامل‌شده

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
S(x)	۳	۳	۳	۳	۳
اختلاف مقادیر	—	۰	۰	۰	۰

پ) قانون تابع $S(x) = 3$ است. چندجمله‌ای ثابت، چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ با ضریب x برابر صفر $(S(x) = 0x + 3)$ است، پس S تابع خطی (و از نوع تابع ثابت) است.

ت) به ازای هر یک واحد افزایش x، مقدار $S(x)$ تغییری نمی‌کند (تغییر ۰). نمودار خطی افقی است و شیب آن 0 است.

ث) نمودار، خط راستی افقی است که از نقطه‌های $(-2, 3)$، $(-1, 3)$، $(0, 3)$، $(1, 3)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد (خط $y = 3$).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۵ صفحه ۴۱ **فعالیت**

تابع خطی $f(x) = ax + b$ را در نظر بگیرید. با استفاده از نرم‌افزار، دو لغزنده برای a و b در نظر بگیرید. ۱) با ثابت نگه داشتن a و تغییر مقادیر b، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خط‌های به دست آمده نسبت به هم چگونه است؟

۲) با ثابت نگه داشتن b، به ازای مقادیر مختلف a، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟

۳) اگر a مثبت باشد، زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور طول‌ها چگونه است؟ اگر a منفی باشد چطور؟

۱) شیب همه‌ی خط‌ها برابر a است، پس خط‌ها **با هم موازی** هستند. با افزایش b، خط به موازات خود به بالا و با کاهش b، به موازات خود به پایین منتقل می‌شود؛ وقتی $b = 0$ خط از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۲) همه‌ی خط‌ها از نقطه‌ی ثابت $(0, b)$ روی محور y می‌گذرند (زیرا $f(0) = b$) و شیب‌های متفاوت دارند؛ هرچه $|a|$ بزرگ‌تر باشد، خط تندتر است و با تغییر a خط حول این نقطه می‌چرخد.

۳) اگر $a > 0$ خط با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی **تند** (کمتر از ۹۰ درجه) می‌سازد و اگر $a < 0$ این زاویه **باز** (بیشتر از ۹۰ درجه) است.

۴۶ صفحه ۴۲ **کار در کلاس**

۱) وضعیت خط‌های به معادله‌ی $5x + 2y = c$ را به ازای مقادیر مختلف c توصیف کنید. شیب این خط‌ها چقدر است؟

۲) وضعیت خط‌های به معادله‌ی $cx + 2y = 4$ را به ازای مقادیر مختلف c توصیف کنید. این خط‌ها از چه نقطه‌ی مشترکی می‌گذرند؟

۳) آیا هر خطی در صفحه‌ی مختصات، نمودار یک تابع خطی است؟ چرا؟

۱) معادله را برای y حل می‌کنیم: $y = -5/2\ x + c/2$. پس همه‌ی خط‌ها شیب $-5/2$ دارند و با هم **موازی** هستند؛ با تغییر c فقط عرض از مبدأ $(c/2)$ عوض می‌شود و خط به موازات خود بالا یا پایین می‌رود.

۲) $y = -c/2\ x + 2$. شیب خط‌ها $(-c/2)$ با c تغییر می‌کند، ولی عرض از مبدأ همیشه ۲ است؛ پس همه‌ی خط‌ها از نقطه‌ی $(0, 2)$ می‌گذرند و با تغییر c حول آن می‌چرخند.

۳) خیر. خط قائم (موازی محور yها) مانند $x = 2$ نمودار تابع نیست، زیرا به یک x بی‌شمار y نسبت می‌دهد، پس تابع خطی هم نیست. هر خط غیرقائم نمودار یک تابع خطی است.

۴۷ صفحه ۴۴ مسئله

جدول مقادیر چهار تابع داده شده است. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟ g: برای x = −2, −1, 0, 1 مقدارها −40, −25, −10, 5 :f برای x = −2, −1, 0, 1 مقدارها −8, −1, 0, 1 :k برای x = 0, 1, 2, 3 مقدارها 1, 3, 5, 7 :h برای x = −2, −1, 0, 1 مقدارها 5, 5, 5, 5

در تابع خطی، به ازای هر ۱ واحد افزایش x، تغییر مقدار تابع ثابت است. اختلاف مقادیر متوالی را بررسی می‌کنیم:

- g: −15 − (−10) = −15 − (−25) = −15 − (−40) = 5، ثابت است، پس **خطی** است.
- f: 7 − (−8) = −1 − (−1) = 1 − 0 = 1 − 0 = 1، ثابت نیست، پس خطی **نیست**.
- k: 2 − 1 = 3 − 2 = 5 − 3 = 7 − 5 = 2، ثابت است، پس **خطی** است (k(x) = 2x + 1).
- h: همه‌ی اختلاف‌ها صفر است، پس **خطی** است (تابع ثابت h(x) = 5).

جدول‌های g، k و h می‌توانند مربوط به تابع خطی باشند.

۴۸ صفحه ۴۴ مسئله

علی در یک شرکت بیمه کار می‌کند. او ۱٬۰۰۰٬۰۰۰ تومان حقوق پایه دریافت می‌کند و به ازای هر مشتری جدید که جذب می‌کند، ۵۰٬۰۰۰ تومان به حقوقش اضافه می‌شود. الف) قانونی برای حقوق علی به عنوان تابعی از تعداد مشتری‌هایی که ماهانه جذب می‌کند بنویسید. ب) اگر او در یک ماه ۱۲ مشتری جدید جذب کرده باشد، میزان حقوق او در آن ماه چقدر است؟ پ) چرا این تابع خطی است؟ ت) اگر علی بخواهد در یک ماه ۲٬۰۰۰٬۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این ماه چند مشتری باید جذب کند؟

۱. اگر تعداد مشتری‌های جدید x باشد: f(x) = 1000000 + 50000 x (حقوق بر حسب تومان).

۲. f(12) = 1000000 + 50000 × 12 = 1600000 تومان.

۳. قانون تابع یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ است؛ به ازای هر مشتری جدید، حقوق به مقدار ثابت ۵۰٬۰۰۰ تومان افزایش می‌یابد (نمودار آن خط راست با شیب ۵۰٬۰۰۰ است).

۴. 1000000 + 50000 x = 2000000 پس 50000 x = 1000000 و x = 20. علی باید در آن ماه **۲۰ مشتری** جذب کند.

۴۹ صفحه ۴۴ مسئله

آرمان سوار بر یک کشتی در فاصله‌ی ۱۰ کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت ۳ کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می‌شود. این حرکت ۵ ساعت ادامه داشته است. الف) قانون و دامنه‌ی تابع مربوط به فاصله‌ی

آرمان از ساحل (بر حسب کیلومتر) را بر حسب t (زمان بر حسب ساعت) بنویسید. ب) آرمان پس از ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟ پ) چرا این تابع خطی است؟ شیب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟

۱. $d(t) = 10 + 3t$ با دامنه‌ی $[0, 5]$.

۲. $d(2) = 10 + 3 \times 2 = 16$، یعنی ۱۶ کیلومتر از ساحل.

۳. قانون تابع چندجمله‌ای درجه‌ی ۱ است و در هر ساعت فاصله به مقدار ثابت ۳ کیلومتر زیاد می‌شود. شیب نمودار برابر 3 و **مثبت** است.

۵۰ صفحه ۴۵ مسئله

دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت ۱ ظهر، ۳۵ درجه‌ی سانتی‌گراد بوده است. الف) جدول را برای روزهای $d = 1, 2, ..., 7$ کامل کنید (دما t بر حسب درجه‌ی سانتی‌گراد). ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید. پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟ ت) نمودار تابع را در دامنه‌اش رسم کنید.

۱. دما در هر هفت روز 35 است:

جدول کامل‌شده

d (روز)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (درجه‌ی سانتی‌گراد)	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵

ب) دامنه: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (روزهای هفته) و قانون: $t(d) = 35$.

پ) بله؛ به ازای همه‌ی مقادیر دامنه، مقدار تابع یکسان (۳۵) است.

ت) نمودار شامل ۷ نقطه‌ی $(1, 35), (2, 35), ..., (7, 35)$ است که همگی روی خط افقی $t = 35$ قرار دارند (اگر مدت زمان را پیوسته در نظر بگیریم، پاره‌خط افقی از $d = 1$ تا $d = 7$ است).

۵۱ صفحه ۴۵ مسئله

رابطه‌ی بین دو واحد اندازه‌گیری دما، درجه‌ی سانتی‌گراد (c) و درجه‌ی فارنهایت (F) با قانون $F(c) = 9/5\ c + 32$ بیان می‌شود. الف) مقدارهای $F(28)$ و $F(-40)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید. ب) دمای صفر درجه‌ی سانتی‌گراد، معادل چند درجه‌ی فارنهایت است؟ پ) اگر $F(c) = 212$، مقدار c را حساب کنید. c چه چیزی را نشان می‌دهد؟

الف) $F(28) = 9/5 \times 28 + 32 = 50.4 + 32 = 82.4$: دمای ۲۸ درجه‌ی سانتی‌گراد برابر ۸۲٫۴ درجه‌ی فارنهایت است.

$-40 = 32 + -72 = 32 + (-40) \times 9/5 = F(-40)$: دمای ۴۰- درجه‌ی سانتی‌گراد با ۴۰- درجه‌ی فارنهایت برابر است (دمایی که دو مقیاس عدد یکسان نشان می‌دهند).

ب) $32 = 32 + 0 \times 9/5 = F(0)$

صفر درجه‌ی سانتی‌گراد برابر ۳۲ درجه‌ی فارنهایت است.

پ) $212 = 32 + c \times 9/5$ پس $180 = c \times 9/5$ و $100 = 180 \times 5/9 = c$.

c = 100: دمای جوش آب (در شرایط معمولی) بر حسب سانتی‌گراد.

---

۵۲ صفحه ۴۷ **فعالیت**

به کمک نرم‌افزار نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید و به سؤال‌ها پاسخ دهید. ۱) نمودار تابع‌های درجه‌ی دوم $y = x^2 + p$ را به ازای مقادیر مختلف p رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y = x^2 + p$ را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.

۲) نمودار تابع‌های $y = (x - q)^2$ را به ازای مقادیر مختلف q رسم کنید. وضعیت نمودار را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.

۳) نمودار تابع‌های $y = kx^2$ را به ازای مقادیر مثبت و منفی برای k رسم کنید. با تغییر علامت k از مثبت به منفی چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

---

۱) نمودار $y = x^2 + p$ همان نمودار $y = x^2$ است که به اندازه‌ی $|p|$ واحد در راستای محور y جابه‌جا شده است: اگر $p > 0$ به بالا و اگر $p < 0$ به پایین. رأس سهمی از $(0, 0)$ به $(0, p)$ می‌رود.

۲) نمودار $y = (x - q)^2$ همان نمودار $y = x^2$ است که به اندازه‌ی $|q|$ واحد در راستای محور x جابه‌جا شده است: اگر $q > 0$ به راست و اگر $q < 0$ به چپ. رأس سهمی $(q, 0)$ می‌شود.

۳) اگر $k > 0$ نمودار رو به بالا (دهانه‌ی سهمی به سمت بالا) و اگر $k < 0$ رو به پایین است؛ یعنی نمودار $y = -|k| x^2$ قرینه‌ی نمودار $y = |k| x^2$ نسبت به محور xهاست. هرچه $|k|$ بزرگ‌تر باشد، سهمی تنگ‌تر است.

---

۵۳ صفحه ۴۸ **کار در کلاس**

نمودارهای داده شده مربوط به تابع درجه‌ی دوم $y = k(x - q)^2 + p$ هستند. علامت k و مقدار p و q را تعیین کنید. (دو نمودار الف و ب)

روش: رأس سهمی نقطه‌ی (q, p) است. اگر دهانه‌ی سهمی به بالا باشد $k > 0$ و اگر به پایین باشد $k < 0$. طول رأس را q و عرض رأس را p می‌گیریم.

الف) سهمی رو به پایین با رأس تقریبی $(2, 3)$:

$p = 3 ،q = 2 ،k < 0$

ب) سهمی رو به بالا با رأس تقریبی $(-2, -3)$:

$p = -2 ،q = -3 ،k > 0$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۴ صفحه ۴۹ مسئله

نمودارهای زیر مربوط به تابع درجه‌ی دوم $y = k(x - q)^2 + p$ هستند. علامت k و مقدار q و p را تعیین کنید.

از روی شکل، رأس سهمی (q, p) را می‌خوانیم و از جهت دهانه، علامت k را: دهانه‌ی رو به بالا یعنی $k > 0$ و رو به پایین یعنی $k < 0$.

۱. ○ سهمی رو به بالا با رأس تقریبی $(1, 3)$: $k > 0 ،q = 3 ،p = 1$.

۲. ○ سهمی رو به پایین با رأس تقریبی $(5, -2)$: $k < 0 ،q = -2 ،p = 5$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۵ صفحه ۴۹ مسئله

نمودار زیر مربوط به یک تابع درجه‌ی دوم است. مشخص کنید کدام قانون مربوط به این نمودار است. الف) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ ب) $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ پ) $f(x) = (x + 1)^2 + 2$ ت) $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

رأس سهمی در ناحیه‌ی $x < 0$ (سمت چپ محور y) است، پس $q = -1$ و قانون به شکل $(x + 1)^2 + p$ است؛ یعنی گزینه‌ی «پ» یا «ت». چون رأس زیر محور xها (حدود $(-2, -1)$) قرار دارد، $p = -2$؛ ریشه‌های تابع $x = -1 \pm \sqrt{2}$ (حدود ۰٫۴ و ۲٫۴-) هستند و سهمی محور x را در دو نقطه قطع می‌کند.

گزینه‌ی «ت»: $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۶ صفحه ۴۹ مسئله

فرید بسکتبال بازی می‌کند. تصویر یک پرتاب او را به سمت سبد نشان می‌دهد. صفحه‌ی مختصات طوری قرار داده شده است که مبدأ مختصات دقیقاً نقطه‌ی پرتاب توپ باشد. ارتفاع توپ از سطح زمین در هر لحظه یک تابع درجه‌ی دوم با قانون $h(x) = k(x - q)^2 + p$ است. علامت k و p و q را تعیین کنید.

توپ پس از پرتاب بالا می‌رود، به بیشترین ارتفاع می‌رسد و سپس پایین می‌آید؛ پس سهمی رو به پایین است و رأس آن (بالاترین نقطه‌ی مسیر) در ناحیه‌ی اول، یعنی بالا و سمت راست مبدأ، قرار دارد:

$k < 0$، $q > 0$، $p > 0$

(رأس (q, p): q فاصله‌ی افقی تا بالاترین نقطه و p بیشترین ارتفاع توپ است.)

۵۷ صفحه ۵۰ فعالیت

اگر دما در سطح دریا ۱۵ درجه‌ی سانتی‌گراد باشد، در کوه دماوند رابطه‌ی بین دما (T بر حسب درجه‌ی سانتی‌گراد) و ارتفاع از سطح دریا (h بر حسب متر) با تساوی $T(h) = 15 - h/150$ مشخص می‌شود. دامنه‌ی این تابع بازه‌ی [[0, 5610]] است. ۱) $T(0)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۲) در ارتفاع ۱۸۰۰ متری از سطح دریا، دما چند درجه است؟

۳) با توجه به نمودار تابع T: الف) تابع T از درجه‌ی .... است. ب) نمودار این تابع در چه نقطه‌ای محور افقی (ارتفاع) را قطع می‌کند؟ این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۴) جواب معادله‌ی $15 - h/150 = 0$ را بیابید. جواب این معادله چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۵) از مقایسه‌ی (۳) و (۴) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱) $T(0) = 15$: دمای هوا در سطح دریا ($h = 0$) که ۱۵ درجه‌ی سانتی‌گراد است.

۲) $T(1800) = 15 - 1800/150 = 15 - 12 = 3$

دما در ارتفاع ۱۸۰۰ متری، ۳ درجه‌ی سانتی‌گراد است.

۳) الف) $T(h) = -1/150\ h + 15$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی **۱** است (تابع خطی).

ب) نمودار محور ارتفاع را در نقطه‌ی $h = 2250$ قطع می‌کند (در نمودار، طول این نقطه ۲۲٫۵ واحد است، چون هر واحد ۱۰۰ متر است). در این نقطه $T = 0$ است، یعنی ارتفاعی که دما ۰ درجه‌ی سانتی‌گراد می‌شود.

۴) $15 - h/150 = 0$ پس $h/150 = 15$ و $h = 2250$.

در ارتفاع ۲۲۵۰ متری از سطح دریا، دما صفر درجه‌ی سانتی‌گراد است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵) جواب معادله‌ی T(h) = 0 با طول نقطه‌ی برخورد نمودار تابع T و محور افقی یکسان است؛ یعنی برای حل معادله‌ی T(h) = 0 می‌توان طول محل برخورد نمودار با محور h را پیدا کرد.

۵۸ صفحه ۵۲ | کار در کلاس

آب از بالای آبشاری که ارتفاع آن ۱۸۰ متر است، به رودخانه می‌ریزد. تابع h با قانون $h(t) = -5t^2 + 180$ ارتفاع هر قطره‌ی آب (بر حسب متر) از سطح رودخانه را بعد از t ثانیه از جدا شدن از بالای آبشار مشخص می‌کند.

۱) ارتفاع یک قطره‌ی آب از سطح رودخانه بعد از ۲ ثانیه چقدر است؟

۲) نمودار تابع h(t) با دامنه‌ی R آورده شده است (هر واحد ۱۰ متر). نمودار این تابع در چه نقطه‌هایی محور xها را قطع می‌کند؟ این نقطه‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۳) جواب‌های معادله‌ی $-5t^2 + 180 = 0$ چه مقادیری هستند؟ کدام جواب در شرایط این مسئله قابل قبول نیست؟ دلیل خود را بیان کنید.

۴) دامنه‌ی تابع h را طوری تعیین کنید که قانون h(t) ارتفاع قطره‌ی آب از سطح رودخانه را مشخص کند.

۱) $h(2) = -5 \times 4 + 180 = 160$

ارتفاع قطره بعد از ۲ ثانیه ۱۶۰ متر است.

۲) نمودار (سهمی رو به پایین با رأس (0, 180)) محور t را در دو نقطه‌ی (0, −6) و (0, 6) قطع می‌کند. این نقطه‌ها زمان‌هایی را نشان می‌دهند که ارتفاع قطره از سطح رودخانه صفر است، یعنی قطره به رودخانه می‌رسد.

۳) $-5t^2 + 180 = 0$ پس $t^2 = 36$ و $t = 6$ یا $t = -6$. جواب $t = -6$ قابل قبول نیست؛ زیرا زمان از لحظه‌ی جدا شدن قطره از آبشار شروع می‌شود و منفی نمی‌تواند باشد. زمان رسیدن قطره به رودخانه ۶ ثانیه است.

۴) قطره از $t = 0$ تا لحظه‌ی رسیدن به رودخانه ($t = 6$) سقوط می‌کند:

دامنه: [0, 6]

۵۹ صفحه ۵۳ | مسئله

اگر نمودار تابع f به شکل داده شده باشد، کدام گزینه جواب‌های معادله‌ی f(x) = 0 است؟ الف) ۲ و ۲− و ۱− ب) ۱ و ۱− و ۰٫۸ پ) ۲ و ۰٫۸ و ۱− ت) معادله جواب ندارد.

جواب‌های f(x) = 0 طول نقاط برخورد نمودار با محور xها هستند. نمودار محور xها را در سه نقطه به طول‌های حدود 1−، 0.8 و 2 قطع می‌کند.

گزینه‌ی «پ»: ۲ و ۰٫۸ و ۱−

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۰ صفحه ۵۳ مسئله

معادله‌های زیر را به کمک رسم نمودار با استفاده از نرم‌افزار حل کنید. الف) x^2 − 6 = 0 ب) 3x^2 − 2x = 16
پ) x^3 − x^2 = 4x + 1 ت) x^3 + 5x + 6 = 0

روش: هر معادله را به شکل f(x) = 0 می‌نویسیم، نمودار f را رسم می‌کنیم و طول نقاط برخورد با محور xها را می‌خوانیم.

۱. f(x) = x^2 − 6: سهمی رو به بالا با رأس (0, −6) که محور را در x = pm sqrt(6) ~ pm 2.45 قطع می‌کند. جواب‌ها: x = sqrt(6) و x = −sqrt(6).

۲. f(x) = 3x^2 − 2x − 16: سهمی رو به بالا که محور را در x = −2 و x = 8/3 ~ 2.67 قطع می‌کند. جواب‌ها: x = −2 و x = 8/3 (درستی: 3 x 4 + 4 − 16 = 0).

۳. f(x) = x^3 + 5x + 6: نمودار صعودی است و محور x را فقط یک بار در x = −1 قطع می‌کند. جواب: x = −1 (درستی: −1 − 5 + 6 = 0).

۴. f(x) = x^3 − x^2 − 4x − 1: نمودار محور xها را در سه نقطه‌ی تقریبی x ~ −1.38، x ~ −0.27 و x ~ 2.65 قطع می‌کند. جواب‌ها (تقریبی): همین سه مقدار.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۱ صفحه ۵۳ مسئله

اگر توپی را به هوا پرتاب کنیم، ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) است. برای یک پرتاب خاص، h(t) = −5t^2 + 20t و دامنه‌ی تابع [[0, 4 است. در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ چند جواب به دست می‌آید؟ چرا؟

h(t) = 2 یعنی −5t^2 + 20t − 2 = 0 یا 5t^2 − 20t + 2 = 0. با فرمول ریشه‌ها:

t = (20 pm sqrt(400 − 40)) / 10 = 2 pm (3 sqrt(10))/5 ~ 2 pm 1.90

t ~ 0.10 ثانیه و t ~ 3.90 ثانیه

هر دو جواب در دامنه‌ی [[0, 4 هستند، پس **دو جواب** به دست می‌آید؛ زیرا توپ یک بار در مسیر بالا رفتن و یک بار در مسیر پایین آمدن از ارتفاع ۲ متری می‌گذرد (بیشترین ارتفاع توپ h(2) = 20 متر است). در نمودار، خط y = 2 سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند.

۶۲ صفحه ۵۴ فعالیت

رابطه‌ی بین قیمت کالا (p بر حسب هزار تومان) و تعداد کالای فروخته شده (x) به صورت x = 200 − 80000p داده شده است. هدف، رسیدن درآمد فروش به بیش از ۸ میلیون تومان است. ۱) درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادله‌ی درآمد را تشکیل دهید.

۲) تابع درآمد را بر حسب p بنویسید.

۳) چندجمله‌ای قانون تابع درآمد بر حسب p از درجه‌ی چند است؟

۴) رابطه‌ای برای p بنویسید که در آن، درآمد حاصل از فروش دست‌سازها بیشتر از ۸ میلیون تومان باشد.

۱) درآمد برابر قیمت هر کالا ضرب‌در تعداد فروش است: R = p x x.

۲) با جای‌گذاری x = 200 − 80000p: R(p) = p(200 − 80000p) = −80000p^2 + 200p.

۳) درجه‌ی **۲** (بیشترین توان p برابر ۲ است).

۴) ۸ میلیون تومان برابر ۸۰۰۰ هزار تومان است، پس:

−80000p^2 + 200p > 8000

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۳ صفحه ۵۵ کار در کلاس

در یک شرکت سازنده‌ی تلفن همراه، رابطه‌ی بین قیمت فروش تلفن همراه (p برحسب صدهزار تومان) و تعداد تلفن همراه فروخته شده (x) از رابطه‌ی p = 0.25 − 15x به دست می‌آید. ۱) مقدار x را بر حسب p بنویسید.

۲) درآمد حاصل از فروش تعداد x کالا (R(p)) را بر حسب p بنویسید.

۳) نامعادله‌ای بنویسید که نشان دهد برای چه مقدارهای p، درآمد حاصل از فروش بیشتر از ۴۰۰ میلیون است.

۱) 15x = 0.25 − p پس x = (0.25 − p)/15.

۲) R(p) = p x x = p (0.25 − p)/15 = (0.25 p − p^2)/15.

۳) ۴۰۰ میلیون تومان برابر ۴۰۰۰ صدهزار تومان است (واحد درآمد را مانند واحد p می‌گیریم)، پس:

(0.25 p − p^2)/15 > 4000

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶۴ صفحه ۵۶ فعالیت

تابع f(x) = x^2 − 7x + 10 را با دامنه‌ی R در نظر بگیرید. نمودار آن رسم شده است. ۱) طول نقاط محل برخورد نمودار تابع با محور xها چه چیزی را نشان می‌دهند؟ ۲) با استفاده از نمودار، جواب‌های معادله‌ی f(x) = 0 را به دست آورید. ۳) آن قسمت از نمودار را که بالای محور xها است رنگی کنید و جمله را کامل کنید: عرض نقاط رنگی (کوچک‌تر از صفر / بزرگ‌تر از صفر) است. ۴) به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع مثبت است؟ این مقادیر را به صورت بازه نمایش دهید. ۵) مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی x^2 − 7x + 10 > 0 با مجموعه‌ی به دست آمده در (۴) چه رابطه‌ای دارد؟ ۶) آن قسمت از نمودار را که پایین محور xها است با رنگ دیگری مشخص کنید. ۷) به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع منفی است؟ با بازه بنویسید. ۸) آیا مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی x^2 − 7x + 10 < 0 همان مجموعه‌ی به دست آمده در (۷) است؟ توضیح دهید.

۱) این طول‌ها، جواب‌های (ریشه‌های) معادله‌ی f(x) = 0 هستند.

۲) x^2 − 7x + 10 = (x − 2)(x − 5) = 0 پس x = 2 یا x = 5 (نمودار محور را در این دو نقطه قطع می‌کند).

۳) عرض نقاط رنگی **بزرگ‌تر از صفر** است.

۴) نمودار سهمی رو به بالا، بیرون از دو ریشه بالای محور است:

(−inf, 2) U (5, +inf)

۵) دقیقاً یکی هستند؛ چون f(x) > 0 یعنی نقطه‌ی نمودار بالای محور xها باشد، پس مجموعه‌ی جواب نامعادله همان مقادیر x به دست آمده در (۴) است.

۶) قسمت پایین محور، بین دو نقطه‌ی برخورد (x = 2 تا x = 5) است.

۷) مقدار تابع در این بازه منفی است:

(2, 5)

۸) بله؛ f(x) < 0 یعنی نقطه‌ی نمودار پایین محور xها باشد و آن قسمت دقیقاً بازه‌ی (2, 5) است.

۶۵ صفحه ۵۸ کار در کلاس

مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آن‌ها ۸ سانتی‌متر بیشتر از عرض آن‌هاست. عرض این مستطیل‌ها چه مقادیری باید داشته باشد تا مساحت آن‌ها از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر باشد؟

عرض را x می‌گیریم (x > 0)؛ طول x + 8 است و باید x(x + 8) < 25 یعنی x^2 + 8x − 25 < 0.

تابع f(x) = x^2 + 8x − 25 سهمی رو به بالاست و ریشه‌های آن از x = (−8 pm sqrt(64 + 100))/2 = −4 pm sqrt(41) به دست می‌آید؛ یعنی x ~ −10.40 و x ~ 2.40. نمودار فقط بین دو ریشه زیر محور x ها است، پس −4 − sqrt(41) < x < −4 + sqrt(41).

چون عرض مثبت است، قسمت منفی کنار گذاشته می‌شود:

0 < x < −4 + sqrt(41) یعنی عرض بین ۰ و حدود ۲٫۴ سانتی‌متر

۶۶ صفحه ۵۹ مسئله

در شکل، نمودارهای چهار تابع رسم شده است. در هر مورد، مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی f(x) <= 0 را مشخص کنید.

f(x) <= 0 یعنی نقطه‌ی نمودار روی محور xها یا زیر آن باشد؛ پس مجموعه‌ی جواب، طول‌هایی از x است که نمودار در آن‌ها زیر محور است، به‌علاوه‌ی طول نقاط برخورد با محور (چون علامت «کمتر یا مساوی» داریم). برای هر نمودار:

- اگر نمودار (سهمی رو به بالا) محور را در x = a و x = b قطع کند: جواب [[a, b]] است.
- اگر نمودار (سهمی رو به پایین) محور را در x = a و x = b قطع کند: جواب (−inf, a] U [b, +inf) است.
- اگر نمودار کاملاً بالای محور باشد: جواب مجموعه‌ی تهی است؛ و اگر رأس روی محور باشد، فقط همان طول رأس جواب است.
- اگر نمودار خط باشد، جواب یک نیم‌خط بسته از محل برخورد با محور است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۷ صفحه ۵۹ مسئله

نامعادله‌های زیر را حل کنید. الف) 3x^2 − 3 > 0 ب) x^2 − 5x − 1 < 0 پ) −x^2 + 4x + 3 >= −2

الف) 3x^2 − 3 = 3(x − 1)(x + 1) با ریشه‌های x = pm 1. سهمی رو به بالاست و بیرون از ریشه‌ها بالای محور است:

(−inf, −1) U (1, +inf)

ب) ریشه‌های x^2 − 5x − 1 = 0: x = (5 pm sqrt(29))/2؛ یعنی x ~ −0.19 و x ~ 5.19. سهمی رو به بالا و بین ریشه‌ها زیر محور است:

((5 − sqrt(29))/2 , (5 + sqrt(29))/2)

پ) نامعادله را به شکل −x^2 + 4x + 5 >= 0 یا x^2 − 4x − 5 <= 0 می‌نویسیم: (x − 5)(x + 1) <= 0. ریشه‌ها −1 و 5 هستند و سهمی x^2 − 4x − 5 بین ریشه‌ها منفی است (و در خود ریشه‌ها صفر):

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

[[-1, 5

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۸ صفحه ۵۹ مسئله

پرتابه‌ای به طور عمودی به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این پرتابه از سطح دریا (بر حسب متر) به صورت تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) با رابطه‌ی h(t) = -5t^2 + 100t داده شده است. مشخص کنید در چه بازه‌ی زمانی، ارتفاع این پرتابه بیش از ۲۰۰ متر خواهد بود.

$-5t^2 + 100t > 200$ پس $-5t^2 + 100t - 200 > 0$ و با تقسیم بر -5 (جهت نامساوی عوض می‌شود): $t^2 - 20t + 40 < 0$.

ریشه‌ها: $t = (20 \pm \sqrt{400 - 160})/2 = 10 \pm \sqrt{60} = 10 \pm 2\sqrt{15}$ یعنی $t \approx 2.25$ و $t \approx 17.75$. سهمی $t^2 - 20t + 40$ بین ریشه‌ها منفی است:

$10 - 2\sqrt{15} < t < 10 + 2\sqrt{15}$؛ تقریباً بین ۲٫۲۵ و ۱۷٫۷۵ ثانیه

(پرتابه در $t = 20$ به زمین (ارتفاع صفر) می‌رسد و بیشترین ارتفاع آن $h(10) = 500$ متر است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۹ صفحه ۵۹ مسئله

مقدار x را طوری بیابید که اندازه‌ی محیط مثلث از اندازه‌ی مساحت مربع کمتر باشد. (اضلاع مثلث $x + 5$، $x + 4$ و $x + 5$ و ضلع مربع $x + 8$ است.)

محیط مثلث: $(x + 5) + (x + 4) + (x + 5) = 3x + 14$ و مساحت مربع: $(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$.

باید $x^2 + 16x + 64 > 3x + 14$ یعنی $x^2 + 13x + 50 > 0$. مبین این سه‌جمله‌ای $169 - 200 = -31 < 0$ است، پس سهمی محور xها را قطع نمی‌کند و همیشه بالای آن است؛ نامعادله به ازای هر x برقرار است.

به ازای همه‌ی مقادیر مجاز x (که طول‌ها مثبت باشند: $x > -4$، و برای طول‌های عملی $x > 0$) محیط مثلث کمتر از مساحت مربع است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۰ صفحه ۵۹ مسئله

علی به تازگی یک کارگاه تولید قطعات یدکی راه‌اندازی کرده است. درآمد حاصل از فروش کالا به قیمت p (بر حسب تومان) از قانون R(p) = −100p^2 + 50000p به دست می‌آید. به ازای چه مقادیری برای p، میزان درآمد شرکت بیش از ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ است؟

باید 10000000 < −100p^2 + 50000p یعنی (با تقسیم بر −100): 0 < p^2 − 500p + 100000.

مبین: 0 > −150000 = 400000 − 250000 = 100000 x 4 − 500^2؛ پس سهمی p^2 − 500p + 100000 همیشه بالای محور p است و هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. (به‌عبارت دیگر بیشترین درآمد در رأس سهمی، p = 250، برابر R(250) = 6250000 است که از ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ کمتر است.)

هیچ مقداری برای p وجود ندارد؛ مجموعه‌ی جواب تهی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی (۲) یازدهم - پودمان سوم

زاویه‌های دلخواه و نسبت‌های مثلثاتی آنها

فهرست

۷۱ صفحه ۶۶ · کار در کلاس — دوچرخه‌سوار روی مسیر دایره‌ای ... ۴۵

۷۲ صفحه ۶۷ · مسئله — وصل کردن زاویه‌های چرخش به شکل‌ها ... ۴۶

۷۳ صفحه ۶۷ · مسئله — نقاط متناظر زاویه‌های چرخش ۴۷

۷۴ صفحه ۶۷ · مسئله — زاویه‌ی چرخش صفر درجه ۴۷

۷۵ صفحه ۶۷ · مسئله — پنج دور دویدن ۴۷

۷۶ صفحه ۶۷ · مسئله — نقاط متناظر دو زاویه‌ی قرینه ۴۸

۷۷ صفحه ۶۸ · فعالیت — رابطه‌ی زاویه‌ی چرخش و مسافت طی شده ... ۴۸

۷۸ صفحه ۷۱ · کار در کلاس — تبدیل درجه و رادیان ۴۹

۷۹ صفحه ۷۳ · مسئله — درجه به رادیان ۵۱

۸۰ صفحه ۷۳ · مسئله — رادیان به درجه ۵۱

۸۱ صفحه ۷۳ · مسئله — انطباق نیم‌خط پس از چرخش ۵۱

۸۲ صفحه ۷۳ · مسئله — طول کمان و زاویه بر حسب رادیان ... ۵۲

۸۳ صفحه ۷۳ · مسئله — چرخ با پره‌های ۶۰ سانتی‌متری ۵۲

۸۴ صفحه ۷۳ · مسئله — چرخ و فلک به شعاع ۱۰ متر ۵۳

۸۵ صفحه ۷۶ · فعالیت — سینوس و کسینوس زاویه‌ی $\theta - \pi$ ... ۵۳

۸۶ صفحه ۷۸ · کار در کلاس — نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\theta + \pi$ ... ۵۴

۸۷ صفحه ۷۹ · کار در کلاس — نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $-\theta$ ... ۵۴

۸۸ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — افزودن مضرب‌های 2π به زاویه ... ۵۵

۸۹ صفحه ۸۱ · فعالیت — تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه ۵۵

۹۰ صفحه ۸۲ · فعالیت — بازه‌ی تغییر سینوس و کسینوس ... ۵۶

۹۱ صفحه ۸۳ · کار در کلاس — رابطه‌ی $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ... ۵۷

۹۲ صفحه ۸۴ · مسئله — تعیین ربع زاویه ۵۷

۹۳ صفحه ۸۴ · مسئله — علامت sin و cos زاویه‌ی $-5\pi/4$ ... ۵۸

۹۴ صفحه ۸۴ · مسئله — علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌ها ... ۵۸

۹۵ صفحه ۸۵ · مسئله — دوچرخه‌سوار روی مسیر دایره‌ای شعاع ۵۰ متر ... ۵۹

۹۶ صفحه ۸۵ · مسئله — نسبت‌های مثلثاتی در ربع سوم ... ۶۰

۹۷ صفحه ۸۵ · مسئله — $\sin\theta = -2/3$ ۶۰

۹۸ صفحه ۸۵ · مسئله — اثبات تساوی‌های تانژانت ۶۰

۹۹ صفحه ۸۵ · مسئله — زاویه‌هایی با تانژانت ۱- ۶۱

۱۰۰ صفحه ۸۷ · فعالیت — شیب خط با شیب مثبت و تانژانت زاویه ... ۶۱

۱۰۱ صفحه ۸۹ · فعالیت — شیب خط با شیب منفی و تانژانت زاویه ... ۶۱

۱۰۲ صفحه ۹۰ · کار در کلاس — خط و زاویه با محور طول‌ها ۶۲

۱۰۳ صفحه ۹۱ · مسئله — زاویه و شیب خط در شکل‌ها ۶۳

۱۰۴ صفحه ۹۱ · مسئله — خط با زاویه‌ی ۲۰ درجه ۶۳

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۰۵ صفحه ۹۱ · مسئله — زاویه‌ی خط گذرنده از دو نقطه ۶۳
۱۰۶ صفحه ۹۱ · مسئله — برخورد خط با محور طول‌ها ۶۴
۱۰۷ صفحه ۹۱ · مسئله — مثلث حاصل از دو خط و محور طول‌ها ... ۶۴
۱۰۸ صفحه ۹۱ · مسئله — خطوط $3x - 5y = c$ ۶۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۱ صفحه ۶۶ کار در کلاس

دوچرخه‌سواری در یک مسیر دایره‌ای‌شکل، از نقطه‌ی A با سرعت ثابت شروع به حرکت می‌کند و چندین بار این دایره را دور می‌زند. او یک دور این دایره را در ۳ دقیقه طی می‌کند. ۱) دوچرخه‌سوار، یک چهارم این دایره را در چند دقیقه طی می‌کند؟ مکان او را روی دایره با یک نقطه مشخص کنید.

۲) اگر دوچرخه‌سوار پس از ۲۰ ثانیه (1/3 دقیقه) به نقطه‌ی B رسیده باشد، زاویه‌ی بین دو شعاع OA و OB چند درجه است؟

۳) این دوچرخه‌سوار پس از ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه در چه نقطه‌ای از دایره قرار می‌گیرد؟

۴) اگر یک دوربین فیلم‌برداری از مرکز دایره به دوچرخه‌سوار نگاه کند، در هر دقیقه چند درجه چرخش می‌کند؟

۵) جدول (زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه و زاویه‌ی چرخش دوربین) را تکمیل کنید. در هر زمان، مکان دوچرخه را روی شکل نشان دهید و وضعیت او را توصیف کنید.

---

۱) یک دور کامل ۳ دقیقه طول می‌کشد، پس یک چهارم دور زمانی برابر 3/4 دقیقه، یعنی ۴۵ ثانیه لازم دارد. چون چرخش یک چهارم دور برابر 90° است، دوچرخه‌سوار روی دایره در نقطه‌ای قرار می‌گیرد که شعاع آن بر OA عمود است (بالاترین نقطه‌ی دایره، اگر A را در سمت راست در نظر بگیریم).

۲) یک دور ۳ دقیقه یعنی ۱۸۰ ثانیه است و ۲۰ ثانیه، 1/9 = 20/180 دور است:

360 x 1/9 = 40

زاویه‌ی بین OA و OB برابر ۴۰ درجه است.

۳) ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه یعنی یک دور کامل و ۲۰ ثانیه‌ی دیگر. پس از یک دور کامل دوچرخه‌سوار دوباره در A است و با ۲۰ ثانیه‌ی بعدی 40° جلوتر می‌رود:

او در نقطه‌ای قرار می‌گیرد که با OA زاویه‌ی ۴۰ درجه می‌سازد (همان نقطه‌ی B قسمت قبل).

۴) در هر ۳ دقیقه، دوربین ۳۶۰ درجه می‌چرخد، پس در هر دقیقه:

360 / 3 = 120

دوربین در هر دقیقه ۱۲۰ درجه می‌چرخد.

۵) زاویه‌ی چرخش دوربین برابر 120 x t است (t زمان بر حسب دقیقه). برای چند زمان نمونه:

جدول کامل‌شده

زمان (دقیقه)	1/3	3/4	۱	3/2	۲	۳	۴	13/3
زاویه‌ی چرخش دوربین (درجه)	۴۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰	۲۴۰	۳۶۰	۴۸۰	۵۲۰
وضعیت دوچرخه‌سوار	یک‌نهم دور	بالاترین نقطه	یک‌سوم دور	نقطه‌ی مقابل A	دو سوم دور	برگشته به A	یک دور و ۱۲۰ درجه	یک دور و ۱۶۰ درجه

توضیح: زمان‌ها در متن کتاب خوانا نبودند و چند زمان نمونه انتخاب شده است؛ برای هر زمان دیگر نیز کافی است زاویه‌ی t 120 درجه را محاسبه کنید. مثلاً در ۳ دقیقه، ۳۶۰ درجه و مکان او دوباره نقطه‌ی A است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۲ صفحه ۶۷ **مسئله**

در شکل‌های زیر چند زاویه‌ی چرخش رسم شده‌اند. زاویه‌های چرخش داده شده (340°، 180°، -410°، -240°، 120° یا -120° و 390°) را به شکل‌های صحیح آن وصل کنید.

برای تطبیق هر زاویه با شکل، جهت چرخش و مقدار آن را بررسی می‌کنیم (جهت مثبت: خلاف حرکت عقربه‌های ساعت):

- 340°: چرخش مثبت، کمی کمتر از یک دور کامل (نیم‌خط متحرک در ربع چهارم و ۲۰ درجه مانده به نیم‌خط اول)؛
- 180°: چرخش مثبت به اندازه‌ی نیم‌دور؛ دو نیم‌خط در امتداد هم و در خلاف جهت یکدیگرند؛
- -410°: چرخش منفی (موافق عقربه‌های ساعت)، یک دور کامل و ۵۰ درجه‌ی دیگر؛ نیم‌خط در ربع چهارم قرار می‌گیرد؛
- -240°: چرخش منفی به اندازه‌ی دو سوم دور؛ نیم‌خط در ربع دوم، همان جای 120° قرار می‌گیرد؛
- 120°: چرخش مثبت، یک سوم دور؛ نیم‌خط در ربع دوم؛
- 390°: چرخش مثبت، یک دور کامل و ۳۰ درجه‌ی دیگر؛ نیم‌خط در ربع اول.

هر زاویه را به شکلی وصل می‌کنیم که هم جهت چرخش (مثبت یا منفی) و هم تعداد دورهای آن با این توصیف‌ها بخواند. (چون شکل‌ها در دسترس نیستند، توصیف هر شکل به صورت بالا آمده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۳ صفحه ۶۷ مسئله

در دایره‌ی مقابل، نقطه‌ی A مبدأ در نظر گرفته شده است. نقاط متناظر زاویه‌های 50°، 145°، 300°، 460°، -60° و -180° را روی این دایره نشان دهید.

نقطه‌ی A را سمت راست دایره (0°) می‌گیریم و جهت مثبت را خلاف عقربه‌های ساعت. در هر مورد زاویه را با یک دور کامل (360°) کم یا زیاد می‌کنیم تا بین -360° و 360° قرار گیرد:

جای نقاط

زاویه	توضیح	ربع / موقعیت
50°	چرخش مثبت ۵۰ درجه	ربع اول
145°	$90^\circ < 145^\circ < 180^\circ$	ربع دوم
300°	$270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$	ربع چهارم
460°	$460 - 360 = 100$، یک دور کامل و ۱۰۰ درجه	ربع دوم (همان جای 100°)
-60°	چرخش ۶۰ درجه موافق عقربه‌ها (همان جای 300°)	ربع چهارم
-180°	نیم‌دور موافق عقربه‌ها	نقطه‌ی مقابل A (سمت چپ دایره)، همان جای 180°

۷۴ صفحه ۶۷ مسئله

وضعیت دو نیم‌خط که زاویه‌ی چرخش آن‌ها صفر درجه است چگونه است؟

زاویه‌ی چرخش صفر یعنی نیم‌خط متحرک اصلاً نچرخیده است؛ پس دو نیم‌خط کاملاً بر هم منطبق‌اند (نقطه‌ی متناظر همان مبدأ A است).

دو نیم‌خط بر هم منطبق‌اند.

۷۵ صفحه ۶۷ مسئله

اگر دوشنده‌ای ۵ بار روی یک مسیر دایره‌ای‌شکل در جهت مثبت بدود، زاویه‌ی چرخش او نسبت به نقطه‌ی شروع چند درجه است؟

هر دور کامل 360° است، پس:

5 x 360 = 1800

زاویه‌ی چرخش او ۱۸۰۰ درجه است (و او دوباره در نقطه‌ی شروع قرار دارد).

۷۶ صفحه ۶۷ **مسئله**

یک دایره و یک مبدأ روی آن انتخاب کنید. نقاط متناظر دو زاویه‌ی چرخش 120° و -120° را روی آن بیابید. از لحاظ هندسی، این نقاط چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دو زاویه‌ی قرینه‌ی دیگر مثال بزنید و وضعیت نقاط متناظر آن‌ها را نسبت به هم توصیف کنید. آیا این وضعیت برای هر دو زاویه که قرینه‌ی هم باشند برقرار است؟

دایره‌ی واحد را با مبدأ A(1, 0) در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی متناظر 120° در ربع دوم و با مختصات (-1/2, sqrt(3)/2) است؛ نقطه‌ی متناظر -120° در ربع سوم و با مختصات (-1/2, -sqrt(3)/2) است.

طول دو نقطه برابر و عرض‌هایشان قرینه‌اند، پس این دو نقطه نسبت به **خط افقی گذرنده از مبدأ A (محور طول‌ها)** قرینه‌ی یکدیگرند.

دو مثال دیگر: زاویه‌های 30° و -30° ؛ نقاط آن‌ها (sqrt(3)/2, 1/2) و (sqrt(3)/2, -1/2) هستند که باز نسبت به محور افقی قرینه‌اند. همچنین 50° و -50°.

بله؛ برای هر دو زاویه‌ی قرینه θ و θ-، چون یکی در جهت مثبت و دیگری در جهت منفی و به یک اندازه از A فاصله می‌گیرد، نقاط متناظر نسبت به محور افقی (خط گذرنده از مبدأ حرکت) قرینه‌اند. (در حالت خاص 180° و -180° دو نقطه بر هم منطبق‌اند.)

۷۷ صفحه ۶۸ **فعالیت**

دایره‌ای به شعاع r در نظر بگیرید و روی آن نقطه‌ی A را به عنوان مبدأ در نظر بگیرید. ۱) اگر از مبدأ، در جهت مثبت، شروع به حرکت کنیم، پس از طی یک دور کامل، زاویه‌ی چرخش چند درجه است؟ مسافت طی شده چقدر است؟

۲) به ازای هر یک درجه زاویه‌ی چرخش، مسافت طی شده چقدر است؟

۳) اگر D زاویه‌ی چرخش بر حسب درجه و L مسافت طی شده باشد، نسبت D/L چقدر است؟

۴) رابطه‌ای بنویسید که D را بر حسب L بیان کند و رابطه‌ای بنویسید که L را بر حسب D بیان کند.

۱) پس از یک دور کامل، زاویه‌ی چرخش 360° و مسافت طی شده برابر محیط دایره است:

L = 2 pi r و D = 360°

۲) برای 360° مسافت 2 pi r است، پس برای 1°:

(2 pi r)/360 = (pi r)/180

به ازای هر درجه، مسافت (pi r)/180 طی می‌شود.

۳) نسبت D/L برای تمام نقاط ثابت است (دو کمیت متناسب مستقیم‌اند):

D/L = 360/(2 pi r) = 180/(pi r)

۴) از تساوی بالا:

L = (pi r/180) D و D = (180/(pi r)) L

۷۸ صفحه ۷۱ کار در کلاس

۱) زاویه‌های 30° و 45° و 60° و 90° را بر حسب رادیان بنویسید.

۲) در جدول زیر تعدادی زاویه بر حسب درجه و رادیان داده شده است (360°، -270°، 55° و $-15\pi/4$، $11\pi/3$ رادیان). معادل آن‌ها را بر حسب واحد دیگر بیابید و جدول را کامل کنید.

۳) نقاط متناظر زاویه‌های $\pi/6$، 0، $-\pi/3$، 2π، $\pi/2$، $3\pi/2$، $-\pi$، $-5\pi/6$ و $7\pi/3$ را روی دایره مشخص کنید.

۴) در شکل زیر یک شش‌ضلعی منتظم را داخل دایره رسم کرده‌ایم به گونه‌ای که یکی از رأس‌های آن روی نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی صفر است (نقطه‌ی A). الف) بقیه‌ی رئوس این چندضلعی، متناظر چه زاویه‌هایی (بر حسب درجه) هستند؟ ب) اگر شش‌ضلعی بالا به اندازه‌ی ۳۰ درجه در جهت مثبت دوران کند به طوری که رأس A به A' انتقال یابد، رئوس این چندضلعی جدید متناظر چه زاویه‌هایی هستند؟

از رابطه‌ی R = (pi/180) D و D = (180/pi) R استفاده می‌کنیم.

۱)

- $30^\circ = 30 \times \pi/180 = \pi/6$
- $45^\circ = \pi/4$
- $60^\circ = \pi/3$
- $90^\circ = \pi/2$

۲)

جدول کامل‌شده

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

زاویه	۱	۲	۳	۴	۵
درجه	360°	−270°	55°	−675°	660°
رادیان	2 pi	−3 pi/2	11 pi/36	−15 pi/4	11 pi/3

محاسبه‌ها: 2 pi = 360 x pi/180؛ −3 pi/2 = −270 x pi/180؛ 11 pi/36 = 55 pi/180؛ −15 pi/4 x 180/pi = −675؛ −15 x 45 = 660 = 11 x 60 = 11 pi/3 x 180/pi.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳) دایره‌ی واحد با مبدأ A(1, 0)؛ با توجه به pi = 180°:

نقاط متناظر

زاویه	معادل درجه	موقعیت نقطه روی دایره
pi/6	30°	ربع اول، (sqrt(3)/2, 1/2)
0	0°	نقطه‌ی A، (1, 0)
−pi/3	−60°	ربع چهارم، (1/2, −sqrt(3)/2)
2 pi	360°	یک دور کامل، همان نقطه‌ی A
pi/2	90°	بالاترین نقطه، (0, 1)
3 pi/2	270°	پایین‌ترین نقطه، (0, −1)
−pi	−180°	نقطه‌ی (−1, 0) (سمت چپ)
pi	180°	نقطه‌ی (−1, 0) (منطبق بر نقطه‌ی −pi)
−5 pi/6	−150°	ربع سوم، (−sqrt(3)/2, −1/2) (همان جای 210°)
7 pi/3	420°	یک دور و pi/3؛ ربع اول، (sqrt(3)/2, 1/2)

۴) الف) زاویه‌ی مرکزی هر ضلع شش‌ضلعی منتظم 360/6 = 60 درجه است. با شروع از A و حرکت در جهت مثبت، رأس‌های بعدی متناظر زاویه‌های:

60°، 120°، 180°، 240°، 300°

هستند (و رأس A متناظر 0° است).

ب) با ۳۰ درجه دوران در جهت مثبت، به همه‌ی زاویه‌ها ۳۰ درجه اضافه می‌شود:

30° (رأس A')، 90°، 150°، 210°، 270°، 330°

(برچسب رأس‌ها در شکل خوانا نبود؛ فرض شده رأس‌ها در جهت مثبت دنبال هم آمده‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۹ صفحه ۷۳ مسئله

زاویه‌های 15°، 190°، 530° و -1000° را بر حسب رادیان بنویسید.

از R = D x pi/180 استفاده می‌کنیم:

- 15 x pi/180 = pi/12
- 190 x pi/180 = 19 pi/18
- 530 x pi/180 = 53 pi/18
- −1000 x pi/180 = −50 pi/9

۸۰ صفحه ۷۳ مسئله

زاویه‌های −14 pi/5، −8 pi/3، 4 pi/3 و 7 pi/2 را بر حسب درجه بنویسید.

از D = R x 180/pi استفاده می‌کنیم:

- −14 pi/5 x 180/pi = −14 x 36 = −504 درجه
- −8 pi/3 x 180/pi = −8 x 60 = −480 درجه
- 4 pi/3 x 180/pi = 240 درجه
- 7 pi/2 x 180/pi = 630 درجه

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۱ صفحه ۷۳ مسئله

اگر یک نیم‌خط بعد از چرخش روی حالت اول خود منطبق شود، توضیح دهید زاویه‌ی چرخش آن بر حسب رادیان چه مقادیری می‌تواند باشد؟

نیم‌خط فقط وقتی روی حالت اول منطبق می‌شود که تعداد صحیحی دور کامل (در جهت مثبت یا منفی) چرخیده باشد. هر دور کامل 2 pi رادیان است، پس:

θ = 2 k pi (k عددی صحیح؛ مثلاً ... ,0, ±2 pi, ±4 pi)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸۲ صفحه ۷۳ مسئله

در یک دایره به شعاع r، اگر زاویه‌ی یک کمان بر حسب رادیان θ باشد، طول این کمان بر حسب r و θ چقدر است؟

بنا به تعریف رادیان، θ = L/r؛ پس:

L = r θ

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۸۳ صفحه ۷۳ مسئله

طول پره‌های یک چرخ ۶۰ سانتی‌متر است. این چرخ را روی زمین بدون لغزش می‌چرخانیم. با مثبت در نظر گرفتن جهت چرخش، الف) پس از طی ۱۰۰ متر مسافت، زاویه‌ی چرخش یکی از پره‌ها نسبت به حالت اولیه‌ی آن (بر حسب درجه و رادیان) چقدر است؟ ب) اگر یکی از پره‌ها ۳۰۰۰ درجه چرخش کرده باشد، چرخ چند متر طی کرده است؟ پ) تحقیق کنید که کیلومترشمار ماشین، مسافت طی شده را چگونه نشان می‌دهد؟

شعاع چرخ r = 0.6 متر است و چون چرخ بدون لغزش می‌غلتد، مسافت طی شده روی زمین برابر طول کمان چرخیده‌شده است: L = r θ.

الف) θ = L/r = 100/0.6 = 500/3 ~ 166.7 رادیان، و بر حسب درجه:

D = 500/3 x 180/pi = 30000/pi ~ 9549

زاویه‌ی چرخش حدود ۱۶۶٫۷ رادیان، یعنی حدود ۹۵۴۹ درجه است.

ب) ابتدا ۳۰۰۰ درجه را به رادیان تبدیل می‌کنیم: 3000 x pi/180 = 50 pi/3. پس:

L = 0.6 x 50 pi/3 = 10 pi ~ 31.4

چرخ حدود ۳۱٫۴ متر راه رفته است.

پ) کیلومترشمار (مسافت‌شمار) تعداد دورهای چرخ را با یک حسگر یا چرخ‌دنده می‌شمارد و آن را در محیط چرخ (2 pi r) ضرب می‌کند؛ یعنی مسافت را از رابطه‌ی L = r θ به دست می‌آورد، که در آن θ مجموع زاویه‌ی چرخش چرخ بر حسب رادیان است. اندازه‌ی شعاع چرخ در دستگاه ثبت شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۴ صفحه ۷۳ **مسئله**

در یک چرخ و فلک به شعاع ۱۰ متر، اگر یک کابین نسبت به حالت اولیه‌ی خود، به اندازه‌ی ۱ رادیان چرخیده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟ اگر مسافت طی شده توسط کابین ۷۰ متر باشد، زاویه‌ی چرخش کابین بر حسب رادیان و درجه چقدر است؟

از $L = r\,\theta$ استفاده می‌کنیم:

$L = 10 \times 1 = 10$

مسافت طی شده ۱۰ متر است.

اگر $L = 70$ باشد:

$\theta = L/r = 70/10 = 7$ رادیان، و $D = 7 \times 180/\pi \sim 401.1$ درجه.

زاویه‌ی چرخش ۷ رادیان، یعنی حدود ۴۰۱٫۱ درجه است.

۸۵ صفحه ۷۶ **فعالیت**

۱) فرض کنید θ یک زاویه‌ی تند بر حسب رادیان باشد، $\pi - \theta$ چه نوع زاویه‌ای است؟

۲) با رسم شکل، وضعیت نقاط متناظر دو زاویه‌ی θ و $\pi - \theta$ روی دایره‌ی مثلثاتی را نسبت به هم و محور سینوس‌ها مشخص کنید.

۳) سینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) کسینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۱) چون $0 < \theta < \pi/2$، داریم $\pi/2 < \pi - \theta < \pi$؛ پس $\pi - \theta$ یک زاویه‌ی **باز** است و نقطه‌ی متناظر آن در ربع دوم قرار دارد.

۲) نقطه‌ی متناظر θ در ربع اول و نقطه‌ی متناظر $\pi - \theta$ در ربع دوم است. این دو نقطه هم‌ارتفاع‌اند (روی یک خط افقی) و به یک اندازه از محور سینوس‌ها (محور عمودی) فاصله دارند:

دو نقطه نسبت به محور سینوس‌ها قرینه‌ی یکدیگرند.

۳) چون عرض دو نقطه برابر است:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

۴) طول دو نقطه قرینه‌ی هم است:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

۸۶ صفحه ۷۸ | کار در کلاس

۱) اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی باشد، نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی θ + pi در کدام ربع قرار دارد؟

۲) وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و θ + pi نسبت به هم چگونه است؟

۳) طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۱) افزودن pi یعنی نیم‌دور بیشتر چرخیدن؛ پس نقطه‌ی متناظر θ + pi در **ربع سوم** است.

۲) دو نقطه روی یک قطر دایره و در دو سوی مرکز قرار دارند؛ یعنی نسبت به **مبدأ مختصات (مرکز دایره)** قرینه‌اند.

۳) طول و عرض هر نقطه، قرینه‌ی طول و عرض نقطه‌ی دیگر است.

۴) سینوس‌ها (عرض) و کسینوس‌ها (طول) قرینه‌ی هم‌اند:

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \ ، \ \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

۸۷ صفحه ۷۹ | کار در کلاس

۱) اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی باشد، نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی −θ در کدام ربع قرار دارد؟

۲) وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و −θ نسبت به هم چگونه است؟

۳) طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۱) چرخش منفی (موافق عقربه‌های ساعت) از A ، به ربع **چهارم** می‌رسد.

۲) دو نقطه نسبت به محور کسینوس‌ها (محور افقی) قرینه‌اند.

۳) طول دو نقطه برابر و عرض‌هایشان قرینه‌ی یکدیگر است.

۴) کسینوس‌ها برابر و سینوس‌ها قرینه‌اند:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta \ ، \ \cos(-\theta) = \cos\theta$

توشه ای برای موفقیت

۸۸ صفحه ۸۰ | کار در کلاس

۱) نقاط متناظر زاویه‌های داده شده در جدول (pi/3، pi/3 + 2 pi، pi/3 – 2 pi، pi/3 + 4 pi، pi/3 – 4 pi) را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید، سپس جدول را کامل کنید.

۲) اگر به یک زاویه مانند θ (بر حسب رادیان) مضرب صحیحی از 2 pi را اضافه یا کم کنیم، نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی جدید و θ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

۳) با ذکر دلیل، نتیجه بگیرید اگر به زاویه‌ای (بر حسب رادیان) مضارب صحیح 2 pi را اضافه یا کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند.

۴) سینوس و کسینوس زاویه‌های 14 pi/3 و –25 pi/6 رادیان را حساب کنید.

۱) همه‌ی این زاویه‌ها با pi/3 (60°) به اندازه‌ی چند دور کامل اختلاف دارند، پس نقطه‌ی متناظرشان یکی است و در ربع اول، با مختصات (1/2, sqrt(3)/2) قرار دارد:

جدول کامل‌شده

θ	pi/3	pi/3 + 2 pi	pi/3 – 2 pi	pi/3 + 4 pi	pi/3 – 4 pi
sin θ	sqrt(3)/2	sqrt(3)/2	sqrt(3)/2	sqrt(3)/2	sqrt(3)/2
cos θ	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

۲) هر 2 pi یک دور کامل است؛ پس نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی جدید بر نقطه‌ی متناظر θ **منطبق** است.

۳) نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، مختصات نقطه‌ی متناظر آن روی دایره‌ی مثلثاتی‌اند؛ چون نقاط متناظر بر هم منطبق‌اند، مختصاتشان برابر است. پس برای هر عدد صحیح k:

cos(θ + 2 k pi) = cos θ ، sin(θ + 2 k pi) = sin θ

۴) 14 pi/3 = 4 pi + 2 pi/3 و 2 pi/3 = pi – pi/3:

sin(14 pi/3) = sin(2 pi/3) = sin(pi – pi/3) = sin(pi/3) = sqrt(3)/2

cos(14 pi/3) = cos(pi – pi/3) = –cos(pi/3) = –1/2

–25 pi/6 = –4 pi – pi/6:

sin(–25 pi/6) = sin(–pi/6) = –sin(pi/6) = –1/2

cos(–25 pi/6) = cos(–pi/6) = cos(pi/6) = sqrt(3)/2

۸۹ صفحه ۸۱ | فعالیت

مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را با زاویه‌ی تند θ در نظر بگیرید (وتر مثلث ۱ واحد است). ۱) طول ضلع AB را بر حسب sin θ بنویسید.

۲) طول ضلع AC را بر حسب cos θ بنویسید.

۳) در این مثلث، tan θ را بر حسب sin θ و cos θ به دست آورید.

۴) به کمک رابطه‌ای که در (۳) به دست آوردید، برای تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه پیشنهادی ارائه کنید.

در مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۱، ضلع روبه‌رو به θ برابر sin θ و ضلع مجاور θ برابر cos θ است (در شکل، AB ضلع روبه‌رو و AC ضلع مجاور است).

۱) AB = sin θ

۲) AC = cos θ

۳) تانژانت، نسبت ضلع روبه‌رو به ضلع مجاور است:

tan θ = AB/AC = (sin θ)/(cos θ)

۴) این تساوی را برای هر زاویه‌ی دلخواه α تعریف تانژانت می‌گیریم:

tan α = (sin α)/(cos α) ، به شرط cos α ≠ 0

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۰ صفحه ۸۲ فعالیت

یک دایره‌ی مثلثاتی را در نظر بگیرید. در این شکل، B نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی θ است و C تصویر B روی محور کسینوس‌ها و D تصویر B روی محور سینوس‌ها است. وقتی θ در بازه‌های [0, pi/2]، [pi/2, pi]، [pi, 3 pi/2] و [3 pi/2, 2 pi] تغییر می‌کند، چگونگی تغییر مکان نقطه‌ی C روی محور کسینوس‌ها و نقطه‌ی D روی محور سینوس‌ها و مقدارهای cos θ و sin θ را در جدول مشخص کنید.

نقاط A(1, 0)، M(0, 1)، E(−1, 0) و N(0, −1) را در جهت مثبت روی دایره در نظر می‌گیریم. C روی محور افقی و D روی محور عمودی است.

جدول کامل‌شده

در بازه‌ی θ	0 تا pi/2	pi/2 تا pi	pi تا pi/2 3	pi/2 3 تا 2 pi
مکان نقطه‌ی C	روی پاره‌خط OA	روی پاره‌خط OE	روی پاره‌خط OE	روی پاره‌خط OA
مقدار cos θ	در بازه‌ی [0, 1]	در بازه‌ی [−1, 0]	در بازه‌ی [−1, 0]	در بازه‌ی [0, 1]
مکان نقطه‌ی D	روی پاره‌خط OM	روی پاره‌خط OM	روی پاره‌خط ON	روی پاره‌خط ON
مقدار sin θ	در بازه‌ی [0, 1]	در بازه‌ی [0, 1]	در بازه‌ی [−1, 0]	در بازه‌ی [−1, 0]

در همه‌ی حالت‌ها $-1 <= \cos\theta <= 1$ و $-1 <= \sin\theta <= 1$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۱ صفحه ۸۳ | کار در کلاس

۱) زاویه‌ی تند θ را در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی در نظر بگیرید. با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه‌ی OCB، درستی تساوی $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ را نشان دهید.

۲) تساوی بالا برای سایر زاویه‌ها نیز برقرار است. درستی این تساوی را برای چند زاویه در ربع‌های دیگر بررسی کنید.

۳) اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد به طوری که $\sin\theta = 3/5$، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورید.

۱) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OCB وتر OB شعاع دایره‌ی واحد و برابر ۱ است، $OC = \cos\theta$ و $CB = \sin\theta$. طبق قضیه‌ی فیثاغورس:

$OC^2 + CB^2 = OB^2 \Longrightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

۲) برای هر نقطه‌ی $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ از دایره‌ی واحد، $x^2 + y^2 = 1$ است. چند مثال:

- $\theta = 150^\circ$: $(\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2 = 3/4 + 1/4 = 1$ (ربع دوم)
- $\theta = 240^\circ$: $(-\sqrt{3}/2)^2 + (-1/2)^2 = 3/4 + 1/4 = 1$ (ربع سوم)
- $\theta = -30^\circ$: $(\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2 = 1$ (ربع چهارم)

۳) از $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$: $\cos^2\theta = 1 - 9/25 = 16/25$، پس $\cos\theta = \pm 4/5$. در ربع دوم کسینوس منفی است:

$\cos\theta = -4/5$ ، $\tan\theta = (3/5)/(-4/5) = -3/4$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۹۲ صفحه ۸۴ | مسئله

۱) در جدول‌های زیر مشخص کنید که هر کدام از زاویه‌های داده شده در کدام ربع از دایره‌ی مثلثاتی قرار دارند. زاویه‌ی θ بر حسب درجه: -80°، 140°، 280°، 363° زاویه‌ی θ بر حسب رادیان: $-3\pi/4$، $2\pi/5$، $7\pi/3$، $12\pi/5$

زاویه‌ها را (با کم یا زیاد کردن دور کامل) به بازه‌ی 0 تا 360° می‌آوریم:

ربع زاویه‌ها (درجه)

θ	-80°	140°	280°	363°
معادل در ° تا 0 360	280°	140°	280°	3°
مکان	ربع چهارم	ربع دوم	ربع چهارم	ربع اول

ربع زاویه‌ها (رادیان)

θ	-3 pi/4	2 pi/5	7 pi/3	12 pi/5
معادل در pi تا 2 0	5 pi/4	2 pi/5	pi/3	2 pi/5
مکان	ربع سوم	ربع اول	ربع اول	ربع اول

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۳ صفحه ۸۴ مسئله

با تعیین مکان زاویه‌ی 5- pi/4 تعیین کنید کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است. الف) cos(-5 pi/4) < 0 و sin(-5 pi/4) < 0 ب) cos(-5 pi/4) < 0 و sin(-5 pi/4) < 0 پ) cos(-5 pi/4) < 0 و sin(-5 pi/4) < 0 ت) cos(-5 pi/4) < 0 و sin(-5 pi/4) < 0

-5 pi/4 = -pi - pi/4؛ پس زاویه با چرخش ۲۲۵ درجه موافق عقربه‌های ساعت به دست می‌آید و نقطه‌ی متناظر آن با -5 pi/4 + 2 pi = 3 pi/4 یکی است که در ربع دوم قرار دارد.

در ربع دوم طول (کسینوس) منفی و عرض (سینوس) مثبت است:

cos(-5 pi/4) = cos(3 pi/4) = -sqrt(2)/2 < 0 ، sin(-5 pi/4) = sin(3 pi/4) = sqrt(2)/2 > 0

گزینه‌ی (پ) صحیح است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۴ صفحه ۸۴ مسئله

جدول زیر را با مشخص کردن علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها کامل کنید. در هر مورد مثالی بزنید.

علامت‌ها از علامت طول (کسینوس) و عرض (سینوس) نقطه‌ی متناظر به دست می‌آیند و tan θ = sin θ / cos θ:

علامت نسبت‌های مثلثاتی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

نسبت مثلثاتی	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin θ	+	+	−	−
cos θ	+	−	−	+
tan θ	+	−	+	−
مثال	30°	150°	210°	330°

تحقیق مثال‌ها: sin 150° = 1/2 > 0، cos 150° = −sqrt(3)/2 < 0، tan 150° = −sqrt(3)/3 < 0؛ sin 210° = −1/2، cos 210° = −sqrt(3)/2 < 0، tan 210° = sqrt(3)/3 > 0؛ sin 330° = −1/2، cos 330° = sqrt(3)/2، tan 330° = −sqrt(3)/3.

۹۵ صفحه ۸۵ مسئله

دوچرخه‌سواری روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۵۰ متر، با سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه از نقطه‌ی A شروع به حرکت می‌کند. دو محور عمود بر هم (مانند شکل) در این دایره رسم می‌کنیم. الف) اندازه‌ی زاویه‌ی چرخش (بر حسب رادیان) دوچرخه‌سوار را بر حسب زمان (ثانیه) به دست آورید. ب) اگر دوچرخه‌سوار پس از ۳۰ دقیقه حرکت بایستد، در کدام ربع از دایره ایستاده است؟

الف) مسافت طی شده پس از t ثانیه L = 2t متر است. از θ = L/r:

θ = 2t/50 = t/25 رادیان

ب) ۳۰ دقیقه برابر ۱۸۰۰ ثانیه است، پس:

θ = 1800/25 = 72 رادیان. هر دور کامل 2 pi ~ 6.283 رادیان است و 72/(2 pi) ~ 11.46؛ یعنی ۱۱ دور کامل (22 pi ~ 69.115)، و زاویه‌ی باقی‌مانده:

72 − 22 pi ~ 2.885 رادیان که بین pi/2 ~ 1.571 و pi ~ 3.142 است.

دوچرخه‌سوار در ربع دوم ایستاده است (با فرض اینکه A در ابتدای محور افقی مثبت باشد و حرکت در جهت مثبت انجام شود).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۶ صفحه ۸۵ مسئله

زاویه‌ی θ در ربع سوم است و cos θ = −1/5. سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورید.

از sin^2 θ + cos^2 θ = 1 :sin^2 θ = 1 − 1/25 = 24/25، پس sin θ = ±2 sqrt(6)/5. در ربع سوم سینوس منفی است:

sin θ = −2 sqrt(6)/5

tan θ = (sin θ)/(cos θ) = (−2 sqrt(6)/5)/(−1/5) = 2 sqrt(6) ~ 4.9

۹۷ صفحه ۸۵ مسئله

اگر برای زاویه‌ی θ داشته باشیم sin θ = −2/3، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورد؟ چرا؟ چه اطلاعات دیگری را هم باید بدانیم؟

از cos^2 θ = 1 − 4/9 = 5/9 نتیجه می‌شود cos θ = ± sqrt(5)/3؛ چون سینوس منفی است، زاویه می‌تواند در ربع سوم (کسینوس منفی) یا ربع چهارم (کسینوس مثبت) باشد و هر دو حالت ممکن است:

- ربع سوم: cos θ = −sqrt(5)/3 و tan θ = 2/sqrt(5)
- ربع چهارم: cos θ = sqrt(5)/3 و tan θ = −2/sqrt(5)

با اطلاعات داده شده یکتا نیستند؛ باید بدانیم زاویه در کدام ربع است (یا علامت cos θ یا tan θ را بدانیم).

۹۸ صفحه ۸۵ مسئله

نشان دهید برای زاویه‌ی دلخواه θ تساوی‌های زیر برقرارند. tan(pi − θ) = −tan θ ، tan(pi + θ) = tan θ ، tan(−θ) = −tan θ

از tan α = sin α / cos α و تساوی‌های آموخته‌شده استفاده می‌کنیم:

tan(pi − θ) = sin(pi − θ)/cos(pi − θ) = (sin θ)/(−cos θ) = −tan θ

tan(pi + θ) = sin(pi + θ)/cos(pi + θ) = (−sin θ)/(−cos θ) = tan θ

tan(−θ) = sin(−θ)/cos(−θ) = (−sin θ)/(cos θ) = −tan θ

هر سه تساوی ثابت شد (برای زاویه‌هایی که cos θ ≠ 0 است).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۹۹ صفحه ۸۵ مسئله

دو زاویه مشخص کنید که تانژانت آن‌ها 1- است.

$\tan(\pi - \pi/4) = -\tan(\pi/4) = -1$؛ پس $3\pi/4$ (یعنی 135°) تانژانتش 1- است.

همچنین $\tan(-\pi/4) = -\tan(\pi/4) = -1$؛ پس $-\pi/4$ (یعنی -45°) نیز تانژانتش 1- است.

135° و -45° (و هر زاویه‌ی هم‌ارز با آن‌ها، مثل 315°)

۱۰۰ صفحه ۸۷ فعالیت

یک خط دلخواه به معادله‌ی $y = ax + b$ با شیب مثبت $(a > 0)$ در نظر بگیرید. فرض کنید $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از این خط هستند و زاویه‌ی این خط با محور طول‌ها برابر θ است (C پای عمود از B بر خط افقی گذرنده از A است). ۱) شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

۲) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

۳) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، تانژانت زاویه‌ی θ را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

۴) از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و زاویه‌ی آن با محور افقی به دست می‌آورید؟

فرض می‌کنیم $x_2 > x_1$ و $C(x_2, y_1)$.

۱) $a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$

۲) $AC = x_2 - x_1$ و $BC = y_2 - y_1$

۳) $\tan\theta = BC/AC = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$

۴) سمت راست دو تساوی (۱) و (۳) یکی است، پس:

$a = \tan\theta$؛ شیب خط (با شیب مثبت) برابر تانژانت زاویه‌ی تند خط با محور طول‌ها است.

۱۰۱ صفحه ۸۹ فعالیت

یک خط دلخواه به معادله‌ی $y = ax + b$ با شیب منفی $(a < 0)$ در نظر بگیرید. فرض کنید $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از این خط هستند و زاویه‌ی این خط با محور طول‌ها برابر زاویه‌ی باز θ است. ۱) شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

۲) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

۳) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، تانژانت $\pi - \theta$ (زاویه‌ی A) را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

۴) از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب خط و $\tan(\pi - \theta)$ به دست می‌آورید؟

۵) با استفاده از (۴) چه رابطه‌ای بین شیب خط و تانژانت زاویه‌ی بین خط و محور طول‌ها به دست می‌آورید؟

خط نزولی است؛ پس y_2 − y_1 و x_2 − x_1 مختلف‌العلامت‌اند. مثلث ABC دارای زاویه‌ی θ − pi در رأس A (رأس پایین‌تر) است.

۱) a = (y_2 − y_1)/(x_2 − x_1) (عددی منفی)

۲) طول‌ها همواره مثبت‌اند: AC = |x_2 − x_1| و BC = |y_2 − y_1|

۳) tan(pi − θ) = BC/AC = |y_2 − y_1| / |x_2 − x_1| = −(y_2 − y_1)/(x_2 − x_1) (چون خارج‌قسمت اعداد مختلف‌العلامت منفی است)

۴) از (۱) و (۳):

tan(pi − θ) = −a

۵) چون tan(pi − θ) = −tan θ، نتیجه می‌شود −tan θ = −a:

a = tan θ؛ برای هر خط (با شیب مثبت یا منفی) شیب برابر تانژانت زاویه‌ی خط با محور طول‌ها است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۰۲ صفحه ۹۰ کار در کلاس

۱) زاویه‌ی بین خط به معادله‌ی y = sqrt(3) x + 2 و محور طول‌ها چند رادیان است؟

۲) معادله‌ی خطی را بنویسید که در نقطه‌ای به طول −1، محور طول‌ها را قطع می‌کند و با آن زاویه‌ی 150° می‌سازد.

۳) شیب خط y = −4 چقدر است؟ زاویه‌ی بین خط y = −4 و محور طول‌ها چقدر است؟

۱) شیب خط sqrt(3) است، پس tan θ = sqrt(3) و زاویه‌ی تند با این تانژانت 60° است:

θ = pi/3 رادیان

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) شیب: m = tan 150° = tan(pi − pi/6) = −tan 30° = −sqrt(3)/3. خط از نقطه‌ی (−1, 0) می‌گذرد:

y = −sqrt(3)/3 (x + 1) یا y = −sqrt(3)/3 x − sqrt(3)/3

۳) خط y = −4 موازی محور طول‌ها است؛ پس شیب آن صفر و زاویه‌اش با محور طول‌ها صفر است.

شیب ۰ و زاویه ۰ درجه

۱۰۳ صفحه ۹۱ مسئله

در شکل‌های زیر (الف، ب و پ) زاویه‌ی بین خط و محور طول‌ها و شیب خط را به دست آورید.

روش: دو نقطه‌ی مشخص روی هر خط می‌خوانیم، شیب را از $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ حساب می‌کنیم و زاویه را از $m = \tan\theta$ به دست می‌آوریم:

- اگر $m > 0$: $\theta = \tan^{-1} m$ (زاویه‌ی تند)؛ مثلاً $m = 1$ به $\theta = 45^\circ$ می‌انجامد.
- اگر $m < 0$: $\theta = 180^\circ - \tan^{-1}|m|$ (زاویه‌ی باز)؛ مثلاً $m = -1$ به $\theta = 135^\circ$ می‌انجامد.
- اگر خط افقی باشد: $m = 0$ و $\theta = 0$.

چون شکل‌ها در دسترس نیستند، پاسخ با همین روش برای هر شکل به دست می‌آید.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۴ صفحه ۹۱ مسئله

معادله‌ی خطی را بنویسید که با محور طول‌ها زاویه‌ی 20° بسازد و از نقطه‌ی $(-1, 2)$ بگذرد. (برای محاسبه‌ی شیب خط می‌توانید از رسم به کمک نقاله یا ماشین‌حساب استفاده کنید.)

شیب: $m = \tan 20^\circ \sim 0.364$. معادله‌ی خط با شیب m که از $(-1, 2)$ می‌گذرد:

$$y + 1 = 0.364\,(x - 2)$$

$$y \sim 0.364\,x - 1.728$$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۵ صفحه ۹۱ مسئله

خطی که از دو نقطه‌ی $(1, 2)$ و $(-1, 5)$ می‌گذرد چه زاویه‌ای با محور طول‌ها می‌سازد؟ (از رسم خط و نقاله استفاده کنید.)

شیب خط:

$$m = (-1 - 1)/(5 - 2) = -2/3$$

چون شیب منفی است، زاویه باز است. زاویه‌ی تندی که تانژانت آن $2/3$ است حدود 33.7° است؛ پس:

$$\theta = 180^\circ - 33.7^\circ = 146.3^\circ$$

زاویه‌ی خط با محور طول‌ها حدود ۱۴۶٫۳ درجه است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۶ صفحه ۹۱ مسئله

خط به معادله‌ی 2x + 3y = 4 در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع می‌کند و چه زاویه‌ای با آن می‌سازد؟

محور طول‌ها: y = 0، پس 2x = 4 و x = 2:

نقطه‌ی برخورد (2, 0)

شیب خط: y = −2/3 x + 4/3 پس m = −2/3. زاویه‌ی باز = θ = 180° − tan^(−1)(2/3) ~ 180° − 33.7° = 146.3°.

زاویه‌ی خط با محور طول‌ها حدود ۱۴۶٫۳ درجه است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۷ صفحه ۹۱ مسئله

از برخورد دو خط با معادله‌های y = sqrt(3) x و y = −x + 5 و محور طول‌ها، یک مثلث ساخته می‌شود. این مثلث را رسم کنید و زاویه‌های این مثلث را بر حسب رادیان به دست آورید.

رأس‌های مثلث: خط اول از مبدأ می‌گذرد (نقطه‌ی O(0, 0))؛ خط دوم محور را در B(5, 0) قطع می‌کند؛ و دو خط در نقطه‌ی P که از sqrt(3) x = −x + 5 به دست می‌آید یکدیگر را قطع می‌کنند: x = 5/(sqrt(3) + 1) ~ 1.83 و y ~ 3.17.

زاویه‌ی رأس O: شیب sqrt(3) ⟹ tan θ = sqrt(3) ⟹ θ = pi/3 (60°).

زاویه‌ی رأس B: خط دوم شیب −1 و زاویه‌ی 135° با محور دارد؛ پس زاویه‌ی داخلی مثلث 180° − 135° = 45° یعنی pi/4 است.

زاویه‌ی رأس P: pi − pi/3 − pi/4 = 5 pi/12 (75°).

زاویه‌های مثلث: pi/3، pi/4 و 5 pi/12 رادیان

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۸ صفحه ۹۱ مسئله

خط‌های به معادله‌ی $3x - 5y = c$ با هم (موازی‌اند / متقاطع‌اند). زاویه‌ی این خط‌ها با محور طول‌ها بر حسب درجه و رادیان به طور تقریبی چقدر است؟

همه‌ی این خط‌ها (به ازای مقادیر مختلف c) شیب یکسان دارند: $y = 3/5\ x - c/5$، $m = 3/5 = 0.6$ ؛ پس **موازی‌اند**.

$\tan\theta = 0.6 \Longrightarrow \theta \sim 31^\circ \sim 30.96^\circ$ و بر حسب رادیان $\theta \sim 0.54$.

موازی‌اند؛ زاویه حدود ۳۱ درجه (حدود ۰٫۵۴ رادیان).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی (۲) یازدهم - پودمان چهارم

لگاریتم و خواص آن

فهرست

۱۰۹ صفحه ۹۵ · فعالیت — فاصله‌ی ستارگان و توان‌های عدد ۳ ... ۶۷

۱۱۰ صفحه ۹۶ · کار در کلاس — تعریف لگاریتم ۶۸

۱۱۱ صفحه ۹۷ · فعالیت — مبنای ۱ برای لگاریتم ۶۸

۱۱۲ صفحه ۹۹ · کار در کلاس — تساوی لگاریتمی و توان‌دار ۶۹

۱۱۳ صفحه ۱۰۰ · فعالیت — علامت عدد در لگاریتم ۶۹

۱۱۴ صفحه ۱۰۱ · کار در کلاس — ویژگی‌های لگاریتم یک و مبنا ... ۷۰

۱۱۵ صفحه ۱۰۲ · کار در کلاس — استفاده از ماشین حساب: لگاریتم ۹ و ۰٫۰۰۱۶ ... ۷۰

۱۱۶ صفحه ۱۰۳ · مسئله — تعریف لگاریتم ۷۱

۱۱۷ صفحه ۱۰۳ · مسئله — نوشتن تساوی لگاریتمی ۷۱

۱۱۸ صفحه ۱۰۳ · مسئله — نوشتن تساوی توان‌دار ۷۲

۱۱۹ صفحه ۱۰۳ · مسئله — محاسبه‌ی لگاریتم ۷۲

۱۲۰ صفحه ۱۰۳ · مسئله — ماشین حساب و تقریب لگاریتم ... ۷۲

۱۲۱ صفحه ۱۰۳ · مسئله — رشد باکتری (۴ برابر) ۷۳

۱۲۲ صفحه ۱۰۳ · مسئله — تساوی لگاریتمی با ویژگی خاص ۷۳

۱۲۳ صفحه ۱۰۴ · فعالیت — لگاریتم حاصل‌ضرب ۷۳

۱۲۴ صفحه ۱۰۶ · کار در کلاس — استفاده از ماشین حساب: log(a+b) ... ۷۴

۱۲۵ صفحه ۱۰۶ · کار در کلاس — کاربرد خاصیت ضرب لگاریتم ... ۷۴

۱۲۶ صفحه ۱۰۷ · فعالیت — لگاریتم تقسیم ۷۵

۱۲۷ صفحه ۱۰۷ · کار در کلاس — استفاده از ماشین حساب: log(a−b) ... ۷۶

۱۲۸ صفحه ۱۰۸ · کار در کلاس — لگاریتم تفاضل و خارج‌قسمت ... ۷۶

۱۲۹ صفحه ۱۰۸ · فعالیت — لگاریتم توان ۷۷

۱۳۰ صفحه ۱۰۹ · کار در کلاس — ساده کردن عبارت‌های لگاریتمی ... ۷۷

۱۳۱ صفحه ۱۱۰ · فعالیت — تغییر مبنای لگاریتم ۷۸

۱۳۲ صفحه ۱۱۱ · کار در کلاس — استفاده از ماشین حساب: log5(8) ... ۷۹

۱۳۳ صفحه ۱۱۱ · کار در کلاس — نوشتن به صورت یک لگاریتم ... ۷۹

۱۳۴ صفحه ۱۱۲ · مسئله — نوشتن به صورت یک لگاریتم ۷۹

۱۳۵ صفحه ۱۱۲ · مسئله — محاسبه با مقادیر تقریبی لگاریتم ۲ و ۳ ... ۸۰

۱۳۶ صفحه ۱۱۲ · مسئله — بررسی درستی تساوی‌ها ۸۰

۱۳۷ صفحه ۱۱۲ · مسئله — لگاریتم حاصل‌ضرب با ماشین حساب ... ۸۰

۱۳۸ صفحه ۱۱۲ · مسئله — رشد باکتری (۲ برابر) ۸۱

۱۰۹ صفحه ۹۵ فعالیت

فاصله‌ی زمین از خورشید تقریباً ۱۲۹۱۴۰۱۶۳ کیلومتر و فاصله‌ی ستاره‌ی پروکسیما قنطورس تا زمین تقریباً ۱۷۷۱۴۷ برابر فاصله‌ی زمین تا خورشید است. ۱) برای تعیین فاصله‌ی این ستاره تا زمین باید از کدام چهار عمل اصلی استفاده کرد؟ حدس می‌زنید برای انجام این عمل چقدر زمان نیاز دارید؟

۲) ستاره‌ی شباهنگ (سیروس) در فاصله‌ی تقریبی ۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳ کیلومتری از زمین است. اگر بخواهیم بدانیم فاصله‌ی شباهنگ از زمین چند برابر فاصله‌ی خورشید تا زمین است، چه عملی باید انجام دهید؟ حدس می‌زنید زمان انجام این عمل چقدر است؟

۳) با استفاده از جدول توان‌های عدد ۳ جاهای خالی را کامل کنید و حاصل را با استفاده از ضرب (تقسیم) اعداد توان‌دار بنویسید. 3^... x 3^... = 3^... 129140163 x 177147 = 68630377364883 / 129140163 = 3^... / 3^... = 3^...

۴) با استفاده از قسمت قبل و جدول به سؤال‌های (الف) و (ب) پاسخ دهید. الف) فاصله‌ی پروکسیما قنطورس از زمین چقدر است؟ ب) فاصله‌ی ستاره‌ی شباهنگ (سیروس) چند برابر فاصله‌ی خورشید تا زمین است؟

۵) محاسبه‌ی مستقیم ساده‌تر است یا استفاده از جدول؟ زمان انجام کدام روش کمتر است؟

---

۱) باید دو عدد را در هم **ضرب** کنیم: 177147 x 129140163. ضرب دستی دو عدد ۹ رقمی و ۶ رقمی کار طولانی و پرخطایی است و چند دقیقه (با احتمال اشتباه) زمان می‌برد.

۲) باید عدد بزرگ‌تر را بر عدد کوچک‌تر **تقسیم** کنیم: 129140163 / 68630377364883. تقسیم دستی دو عدد به این بزرگی نیز زمان زیادی (چند دقیقه یا بیشتر) لازم دارد.

۳) از جدول می‌خوانیم: 3^17 = 129140163، 3^11 = 177147 و 3^29 = 68630377364883. پس:

```
129140163 x 177147 = 3^17 x 3^11 = 3^(17+11) = 3^28
68630377364883 / 129140163 = 3^29 / 3^17 = 3^(29-17) = 3^12
```

۴) الف) طبق جدول 3^28 = 22876792454961:

فاصله‌ی پروکسیما قنطورس از زمین ۲۲۸۷۶۷۹۲۴۵۴۹۶۱ کیلومتر است.

ب) از جدول 3^12 = 531441:

فاصله‌ی شباهنگ از زمین ۵۳۱۴۴۱ برابر فاصله‌ی خورشید تا زمین است.

۵) استفاده از جدول ساده‌تر و سریع‌تر است؛ چون به جای ضرب و تقسیم اعداد بزرگ، فقط توان‌ها (اعداد کوچک) را جمع و تفریق می‌کنیم و سپس مقدار حاصل را از جدول می‌خوانیم.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۱۰ صفحه ۹۶ کار در کلاس

۱) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) از $3^4 = 81$ نتیجه می‌شود: لگاریتم ..... در مبنای ..... عدد ۴ است. ب) لگاریتم ۱۰۰۰۰ در مبنای ۱۰ عدد ..... است؛ زیرا $10^{...} = 10000$ پ) $4^2 = 16$ نشان می‌دهد: لگاریتم ..... در مبنای ۴ عدد ..... است.

۲) عدد ۶۴ را به‌صورت یک عدد توان‌دار با پایه‌ی ۲ نوشته و با استفاده از آن لگاریتم ۶۴ در مبنای ۲ را بنویسید.

۱. لگاریتم **۸۱** در مبنای **۳** عدد ۴ است؛ یعنی $\log_3(81) = 4$.

۲. لگاریتم ۱۰۰۰۰ در مبنای ۱۰ عدد **۴** است؛ زیرا $10^4 = 10000$.

۳. از $4^2 = 16$ نتیجه می‌شود: لگاریتم **۱۶** در مبنای ۴ عدد **۲** است؛ یعنی $\log_4(16) = 2$.

۲) $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ پس:

$\log_2(64) = 6$

۱۱۱ صفحه ۹۷ فعالیت

تساوی‌های $1^0 = 1$، $1^1 = 1$، $1^2 = 1$، $1^3 = 1$، $(-1)^1 = 1$، $(1/3)^1 = 1$، ... را در نظر بگیرید. ۱) در تساوی $1 = 1^{...}$ به‌جای نقطه‌چین چه اعدادی می‌توان قرار داد؟

۲) آیا می‌توان عدد a را طوری پیدا کرد که $1^a = 2$؟ به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۲ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

۳) آیا عدد a را می‌توان طوری یافت که در تساوی $1^a = 3$ صدق کند؟ به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۳ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

۴) آیا عددی غیر از ۱ را می‌توان به‌صورت عددی توان‌دار با پایه‌ی ۱ نوشت؟ چرا؟

۵) با توجه به نتایج بالا، فکر می‌کنید می‌توان عدد ۱ را به‌عنوان مبنای لگاریتم انتخاب کرد؟ چرا؟

۱) به‌جای نقطه‌چین هر عدد حقیقی دلخواه می‌توان قرار داد؛ زیرا ۱ به هر توانی برسد، حاصل ۱ است.

۲) خیر؛ چون $1^a = 1$ و هیچ‌گاه برابر ۲ نمی‌شود. پس $\log_1(2)$ قابل تعریف نیست.

۳) خیر؛ به همین دلیل 1^a همواره ۱ است و نمی‌تواند برابر ۳ شود. پس $\log_1(3)$ نیز قابل تعریف نیست.

۴) خیر؛ هر توانی از ۱ برابر خود ۱ است، پس تنها عددی که به‌صورت توانی از ۱ نوشته می‌شود، همان ۱ است.

۵) خیر؛ اگر مبنا ۱ باشد، لگاریتم هیچ عددی غیر از ۱ تعریف نمی‌شود و لگاریتم خود ۱ هم یک مقدار یکتا ندارد (هر عدد دلخواهی جواب می‌شود).

عدد ۱ را نمی‌توان به‌عنوان مبنای لگاریتم در نظر گرفت.

۱۱۲ صفحه ۹۹ کار در کلاس

۱) هر سطر جدول زیر تساوی‌های متناظر را نشان می‌دهد. جدول را کامل کنید.

۲) عدد ۲۵ را به‌صورت یک عدد توان‌دار با پایه‌ی ۵ نوشته و با استفاده از آن حاصل log5(25) را بنویسید.

۱) با استفاده از تعریف لگاریتم (log_a(b) = c یعنی a^c = b):

جدول کامل‌شده

تساوی برحسب لگاریتم	تساوی برحسب عدد توان‌دار
log5(125) = 3	5^3 = 125
log7(49) = 2	7^2 = 49
log3(81) = 4	3^4 = 81
log4(64) = 3	4^3 = 64
log5(25) = 2	5^2 = 25
log_b(2.1) = 3	b^3 = 2.1
log3(27) = 3	3^3 = 27
log8(2) = 1/3	8^(1/3) = 2
log_a(4) = 3.3	a^3.3 = 4

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) 5^2 = 25 پس:

log5(25) = 2

۱۱۳ صفحه ۱۰۰ فعالیت

۱) اگر 4^c = b، جدول زیر را کامل کنید. (مقادیر c: ۲-، ۱-، ۰، ۱/۲، ۱، ۲)

۲) آیا در سطر دوم جدول عددی منفی وجود دارد؟ درباره‌ی علامت b چه می‌توان گفت؟

۳) با توجه به اینکه تساوی 4^c = b نشان می‌دهد log4(b) = c، درباره‌ی علامت b در log4(b) چه می‌توان گفت؟

۴) اگر در پایه به‌جای ۴، عدد ۳ باشد، با یک مثال درستی نتیجه‌ای را که از قسمت قبل به دست آورده‌اید بررسی کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵) اگر a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد و a^c = b، درباره‌ی علامت b چه می‌توان گفت؟ درباره‌ی علامت b در log_a(b) چه می‌توان گفت؟ آیا از عدد منفی می‌توان لگاریتم گرفت؟

۱) با جای‌گذاری c در b = 4^c:

جدول کامل‌شده

c	-2	-1	0	1/2	1	2
b = 4^c	1/16	1/4	1	2	4	16

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) خیر؛ در سطر دوم هیچ عدد منفی (و حتی صفر) وجود ندارد. b همیشه عددی **مثبت** است.

۳) چون b = 4^c همواره مثبت است، پس عددی که از آن لگاریتم می‌گیریم (b) باید مثبت باشد.

۴) مثلاً 3^2 = 9، 3^(-2) = 1/9، 3^0 = 1 و 3^(1/2) = sqrt(3)؛ همه مثبت‌اند و این نتیجه را تأیید می‌کنند.

۵) چون a > 0، هر توانی از آن مثبت است؛ پس b = a^c > 0. بنابراین در log_a(b) باید b > 0 باشد.

از عدد منفی (و صفر) نمی‌توان لگاریتم گرفت؛ فقط اعداد مثبت لگاریتم دارند.

---

۱۱۴ صفحه ۱۰۱ — کار در کلاس

با توجه به ویژگی‌های توان‌رسانی اعداد، جمله‌های زیر را کامل کنید. برای هر عدد مثبت و مخالف ۱ مانند a:

الف) با توجه به a = a^1 داریم: ... = log_a(a) ب) از a^0 = 1 نتیجه می‌شود: ... = log_a(1) پ) برای هر عدد n می‌توان گفت: ... = log_a(a^n) ت) اگر b = a^c آنگاه log_a(b) = c؛ بنابراین: ... = a^(log_a(b))

۱. log_a(a) = 1؛ زیرا a^1 = a.

۲. log_a(1) = 0؛ زیرا a^0 = 1.

۳. log_a(a^n) = n؛ زیرا توانی که a را به a^n می‌رساند، همان n است.

۴. a^(log_a(b)) = b؛ زیرا c = log_a(b) و a^c = b.

log_a(a) = 1 ، log_a(1) = 0 ، log_a(a^n) = n

---

۱۱۵ صفحه ۱۰۲ — کار در کلاس

با استفاده از ماشین حساب حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید. الف) ... = log 9 ب) ... = log 0.0016

۱. log 9 ~ 0.95

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲. log 0.0016 ~ −2.80

(لگاریتم بدون مبنا یعنی مبنای ۱۰؛ ب جواب منفی است زیرا 0.0016 < 1.)

---

۱۱۶ صفحه ۱۰۳ **مسئله**

۱) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید: الف) از 4^3 = 64 نتیجه می‌شود: لگاریتم ۶۴ در مبنای ..... عدد ..... است. ب) لگاریتم ۳۲ در مبنای ۲ عدد ..... است؛ زیرا 2^... = 32 پ) از cuberoot(2) = 2^(1/3) نتیجه می‌شود: لگاریتم cuberoot(2) در مبنای ۲ عدد ..... است. ت) با توجه به اینکه 7^4 = 2401 داریم: log7(2401) = ... ث) با توجه به 8^(−1/3) = 1/2 می‌توان گفت: log8(1/2) = ... = ... ج) تساوی‌های 0.001 = 10^(−3) = 1/1000 نشان می‌دهند: log(0.001) = ...

۱. لگاریتم ۶۴ در مبنای **۴** عدد **۳** است؛ log4(64) = 3.

۲. log2(32) = 5؛ زیرا 2^5 = 32.

۳. لگاریتم cuberoot(2) در مبنای ۲ عدد **1/3** است؛ log2(2^(1/3)) = 1/3.

۴. log7(2401) = 4

۵. log8(1/2) = −1/3

۶. log(0.001) = −3

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۱۷ صفحه ۱۰۳ **مسئله**

۲) مانند قسمت (الف)، تساوی شامل لگاریتم متناظر با هر قسمت را بنویسید. الف) log4(16) = 2 <-> 4^2 = 16 ب) 10^(−4) = 0.0001 پ) 2^(−3) = 0.125 ت) a^3 = 1.2 ث) x^2 = 4.3 ج) (1/3)^(−2) = 9 چ) (1/7)^(−4) = 2401

۱. log4(16) = 2

۲. log(0.0001) = −4 (مبنای ۱۰)

۳. log2(0.125) = −3

۴. log_a(1.2) = 3

۵. log_x(4.3) = 2

۶. log(1/3)(9) = −2 (مبنا ۱/۳)

۷. log(1/7)(2401) = −4 (مبنا ۱/۷)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۸ صفحه ۱۰۳ مسئله

۳) در هر کدام از موارد زیر یک تساوی شامل لگاریتم داده شده است. مانند قسمت (الف)، تساوی شامل عدد توان‌دار متناظر با هر کدام را بنویسید. الف) 64 = 2^6 <-> 6 = log2(64) ب) 3- = log(1/4)(64) پ) 6 = log_a(9) ت) 2 = log_b(c) ث) x = log3(2) ج) 1/5 = log(32)(2)

1. 2^6 = 64
2. (1/4)^(-3) = 64
3. a^6 = 9
4. b^2 = c
5. 3^x = 2
6. 32^(1/5) = 2

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۹ صفحه ۱۰۳ مسئله

۴) حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید: الف) ... = log7(49) ب) ... = log5(125) پ) ... = log2(128) ت) ... = log2(1/8) ث) ... = log(0.0001)

1. 7^2 = 49 پس log7(49) = 2.
2. 5^3 = 125 پس log5(125) = 3.
3. 2^7 = 128 پس log2(128) = 7.
4. 2^(-3) = 1/8 پس log2(1/8) = -3.
5. 10^(-4) = 0.0001 پس log(0.0001) = -4.

۱۲۰ صفحه ۱۰۳ مسئله

۵) با استفاده از ماشین حساب، حاصل لگاریتم‌های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید: الف) ... = log 50 ب) ... = log 12 پ) ... = log 2

1. log 50 ~ 1.70

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲. log 12 ~ 1.08

۳. log 2 ~ 0.30

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۲۱ صفحه ۱۰۳ مسئله

۶) نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آن‌ها پس از ۱ واحد زمانی ۴ برابر می‌شود. الف) پس از چند واحد زمانی، وزن ۱ گرم از این باکتری‌ها ۶۴ گرم خواهد شد؟ ب) پس از چند واحد زمانی، وزن این باکتری‌ها ۳۲ گرم خواهد شد؟

پس از t واحد زمانی وزن باکتری‌ها 4^t گرم می‌شود.

الف) 4^3 = 64 = 4^t پس t = log4(64) = 3.

پس از ۳ واحد زمانی.

ب) 4^t = 32. چون 4^t = 2^(2t) و 32 = 2^5، پس 2t = 5 و t = 5/2 = 2.5؛ یعنی t = log4(32) = 2.5.

پس از ۲٫۵ واحد زمانی.

---

۱۲۲ صفحه ۱۰۳ مسئله

۷) در هر مورد زیر، یک تساوی شامل عددی توان‌دار و تساوی لگاریتمی متناظر با آن را طوری بنویسید که حاصل لگاریتم، عددی با ویژگی خواسته‌شده باشد. الف) عدد طبیعی ب) عدد صحیح منفی پ) عدد گویا

پاسخ‌ها نمونه‌اند و پاسخ‌های دیگر نیز درست است؛ منظور از ویژگی، نوع مقدار لگاریتم است.

۱. 8 = 2^3 و 3 = log2(8) (۳ عدد طبیعی است).

۲. 0.01 = 10^(−2) و −2 = log(0.01) (−۲ عدد صحیح منفی است).

۳. 3 = 9^(1/2) و 1/2 = log9(3) (۱/۲ عدد گویا است).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۲۳ صفحه ۱۰۴ فعالیت

۱) جدول زیر را کامل کنید. (ستون‌ها: b ، c ، log b ، log c ، bc ، log bc) سطر اول: b = 1000، c = 10 سطر دوم: b = 10، c = 1000 سطر سوم: b = 100، c = 0.1 سطر چهارم: b = sqrt(10)، c = cuberoot(10) سطر پنجم: b = 10^x، c = 10^y

۲) در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های log b و log c و ستون log bc وجود دارد؟

۳) این رابطه را به صورت یک جمله بیان نمایید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

۱) مقدار log b و log c را از توان ۱۰ می‌خوانیم و bc را محاسبه می‌کنیم:

جدول کامل‌شده

b	c	log b	log c	bc	log bc
1000	10	3	1	10000	4
10	1000	1	3	10000	4
100	0.1	2	−1	10	1
10^(1/2)	10^(1/3)	1/2	1/3	10^(5/6)	5/6
10^x	10^y	x	y	10^(x+y)	x+y

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) در هر سطر، عدد ستون log bc برابر **مجموع** اعداد ستون‌های log b و log c است؛ مثلاً 4 = 1 + 3.

۳) لگاریتم حاصل‌ضرب دو عدد مثبت برابر مجموع لگاریتم‌های آن دو عدد است:

(b, c > 0) log(bc) = log b + log c

۱۲۴ صفحه ۱۰۶ **کار در کلاس**

با استفاده از ماشین حساب، log(100 + 1000) و log 1000 + log 100 را با تقریب تا دو رقم اعشار به دست آورید و در مربع علامت مساوی (=) یا نامساوی (≠) قرار دهید.

```
log(100 + 1000) = log(1100) ~ 3.04
log 100 + log 1000 = 2 + 3 = 5
```

log(100 + 1000) ≠ log 100 + log 1000

به‌طور کلی log(a + b) ≠ log a + log b؛ لگاریتم مجموع با مجموع لگاریتم‌ها برابر نیست.

۱۲۵ صفحه ۱۰۶ **کار در کلاس**

۱) حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید. الف) log 4 + log 25 = ... ب) log(100) + log(sqrt(10)) = ... پ)

log 20 + log 2 + log 2.5 = ...

۲) فاصله‌ی دورترین ستاره‌ای که با چشم غیرمسلح قابل رؤیت است از زمین، 5056119722 x 10^11 برابر فاصله‌ی زمین از خورشید است. فاصله‌ی این ستاره از زمین را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید. (فاصله‌ی زمین تا خورشید ۱۴۹۶۸۰۰۰۰ کیلومتر)

1. log 4 + log 25 = log(4 x 25) = log 100 = 2
2. log(sqrt(10)) + log 100 = log(100 sqrt(10)) = log(10^(5/2)) = 5/2
3. log 20 + log 2 + log 2.5 = log(20 x 2 x 2.5) = log 100 = 2

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) فاصله برابر است با 5056119722 x 10^11 x 149680000. لگاریتم‌ها را با ماشین حساب به دست می‌آوریم:

```
log(149680000) ~ 8.175
log(5056119722) ~ 9.704
log(10^11) = 11
```

طبق خاصیت ضرب: 8.175 + 9.704 + 11 = 28.879 ~ log(فاصله)؛ پس 10^28 x 7.57 ~ 10^28.879.

فاصله‌ی ستاره از زمین تقریباً 10^28 x 7.57 کیلومتر است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۶ صفحه ۱۰۷ **فعالیت**

۱) جدول زیر را کامل کنید. (ستون‌ها: log(b/c) ، log c ، log b ، b/c ، c ، b) سطر اول: b = 1000، c = 100
سطر دوم: b = 100، c = 10 سطر سوم: b = 100، c = 0.1 سطر چهارم: b = 10^(3/2)، c = 10^(1/2) سطر پنجم: b = 10^x، c = 10^y

۲) در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های log b و log c و ستون log(b/c) وجود دارد؟ این رابطه را به صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

جدول کامل‌شده

b	c	b/c	log b	log c	log(b/c)
1000	100	10	3	2	1
100	10	10	2	1	1
100	0.1	1000	2	−1	3
10^(3/2)	10^(1/2)	10	3/2	1/2	1
10^x	10^y	10^(x−y)	x	y	x−y

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) در هر سطر، log(b/c) برابر **log b منهای log c** است؛ یعنی لگاریتم خارج‌قسمت دو عدد مثبت برابر لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم‌علیه است:

(b, c > 0) log(b/c) = log b − log c

۱۲۷ صفحه ۱۰۷ **کار در کلاس**

با استفاده از ماشین حساب، log(8 − 2) و log 8 − log 2 را با تقریب دو رقم اعشار به دست آورید و در مربع علامت مناسب مساوی (=) یا نامساوی (≠) قرار دهید.

```
log(8 - 2) = log 6 ~ 0.78
log 8 - log 2 ~ 0.90 - 0.30 = 0.60
```

log(8 − 2) ≠ log 8 − log 2

به‌طور کلی log(a − b) ≠ log a − log b.

۱۲۸ صفحه ۱۰۸ **کار در کلاس**

۱) حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید. الف) log 20 − log 2 = ... ب) log(0.001) − log(1000) = ...

۲) با تکمیل نقطه‌چین‌ها، نتیجه‌ی فعالیت (۵) را با استفاده از خاصیت لگاریتم ضرب دو عدد به دست آورید

(b, c > 0). log(b/c) + log c = log(b/c x ...) = log ... بنابراین: log(b/c) = ...

1. log 20 − log 2 = log(20/2) = log 10 = 1 ○
2. log 0.001 − log 1000 = (−3) − 3 = −6 (یا log(0.001/1000) = log(10^(−6)) = −6) ○

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲) طبق خاصیت ضرب:

```
log(b/c) + log c = log(b/c x c) = log b
```

پس با انتقال log c به طرف دیگر:

log(b/c) = log b – log c

۱۲۹ صفحه ۱۰۸ **فعالیت**

۱) جدول زیر را تکمیل کنید. (ستون‌ها: $\log b^n$ ، $\log b$ ، b^n ، n ، b) سطر اول: b = 10، n = 5 سطر دوم: b = 100، n = 2 سطر سوم: b = 0.1، n = 3 سطر چهارم: b = sqrt(10)، n = 4 سطر پنجم: b = 10^x، n دلخواه

۲) در هر سطر، چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های n و $\log b$ و عدد ستون $\log b^n$ وجود دارد؟ این رابطه را به صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

جدول کامل‌شده

b	n	b^n	$\log b$	$\log b^n$
10	5	100000	1	5
100	2	10000	2	4
0.1	3	0.001	−1	−3
sqrt(10)	4	100	1/2	2
10^x	n	10^(nx)	x	nx

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) در هر سطر، $\log b^n$ برابر حاصل‌ضرب n در $\log b$ است؛ مثلاً 5 = 1 x 5 و 2 = 1/2 x 4. یعنی لگاریتم توان یک عدد مثبت برابر توان ضرب در لگاریتم آن عدد است:

(b > 0) log(b^n) = n log b

۱۳۰ صفحه ۱۰۹ **کار در کلاس**

۱) حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید. الف) ... = log5(200) – 3 log5(2) ب) log2(12) – (1/2)

log2(36) = ...

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲) عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید (b, c, x > 0). الف) 4 log b + (1/2) log c − 6 log 5 ب) 2 log x − log(x)

1. log5(200) − 3 log5(2) = log5(200) − log5(2^3) = log5(200/8) = log5(25) = 2 ○
2. log2(12) − (1/2) log2(36) = log2(12) − log2(36^(1/2)) = log2(12) − log2(6) = log2(2) = 1 ○

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

1. 4 log b + (1/2) log c − 6 log 5 = log(b^4) + log(sqrt(c)) − log(5^6) = log(b^4 sqrt(c) / 5^6) ○
2. 2 log x − log x = log(x^2) − log x = log(x^2 / x) = log x ○

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳۱ صفحه ۱۱۰ **فعالیت**

۱) جدول زیر را کامل کنید. (ستون‌ها: (log b)/(log a) ، log_a(b) ، log a ، log b ، a ، b) سطر اول: b = 100، a = 10 سطر دوم: b = 10، a = 100 سطر سوم: b = sqrt(10)، a = 10 سطر چهارم: b = 1000، a = 100

۲) با مقایسه‌ی اعداد دو ستون آخر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ چه رابطه‌ای بین log_a(b) و (log b)/(log a) وجود دارد؟

جدول کامل‌شده

b	a	log b	log a	log_a(b)	log b / log a
100	10	2	1	2	2
10	100	1	2	1/2	1/2
sqrt(10)	10	1/2	1	1/2	1/2
1000	100	3	2	3/2	3/2

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) اعداد دو ستون آخر در هر سطر با هم برابرند؛ یعنی:

log_a(b) = log b / log a (a, b > 0 و a ≠ 1)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳۲ صفحه ۱۱۱ کار در کلاس

با استفاده از ماشین حساب حاصل log5(8) را به دست آورید: log 8 / log 5 = ...

طبق خاصیت تغییر مبنا:

```
log5(8) = log 8 / log 5 ~ 0.903 / 0.699 ~ 1.29
```

log5(8) ~ 1.29

۱۳۳ صفحه ۱۱۱ کار در کلاس

حاصل هر کدام از قسمت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید. الف) log 4 / log 3 ب) 2 + log5(3)

1. طبق خاصیت تغییر مبنا: log3(4) = log 4 / log 3.
2. log5(25) = 2؛ پس log5(75) = log5(3) + log5(25) = log5(3) + 2.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳۴ صفحه ۱۱۲ مسئله

۱) عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید. الف) log 5 + log 2 = ... ب) log 4000 − log 4 = ... پ) 2 log 50 + 2 log 2 = ... ت) 5 log x − log y = ... ث) 2 log a + 3 log b − 2 log z − 4 log a = ... ج) 4 log 3 + log 4 = ... چ) 4 log 5 − log 3 = ...

1. log 5 + log 2 = log(5 x 2) = log 10 = 1
2. log 4000 − log 4 = log(4000/4) = log 1000 = 3
3. 2 log 50 + 2 log 2 = log 50^2 + log 2^2 = log(2500 x 4) = log 10000 = 4
4. 5 log x − log y = log x^5 − log y = log(x^5 / y)
5. 2 log a + 3 log b − 2 log z − 4 log a = −2 log a + 3 log b − 2 log z = log(b^3 / (a^2 z^2))
6. 4 log 3 + log 4 = log 81 + log 4 = log 324
7. 4 log 5 − log 3 = log 625 − log 3 = log(625/3)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳۵ صفحه ۱۱۲ مسئله

۲) اگر log 2 ~ 0.301 و log 3 ~ 0.477، حاصل عبارات زیر را به دست آورید. الف) log 4 ب) log 6 پ) log 18 ت) log(2/3) ث) log 5 ج) log 45

۱. log 4 = log 2^2 = 2 log 2 ~ 2 x 0.301 = 0.602

۲. log 6 = log 2 + log 3 ~ 0.301 + 0.477 = 0.778

۳. log 18 = log(2 x 3^2) = log 2 + 2 log 3 ~ 0.301 + 0.954 = 1.255

۴. log(2/3) = log 2 − log 3 ~ 0.301 − 0.477 = −0.176

۵. log 5 = log(10/2) = log 10 − log 2 ~ 1 − 0.301 = 0.699

۶. log 45 = log(9 x 5) = 2 log 3 + log 5 ~ 0.954 + 0.699 = 1.653

۱۳۶ صفحه ۱۱۲ مسئله

۳) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید. الف) log100(10) = 1/2 ب) log 100 + log 0.01 = 0 پ) log(1000^2) = 2^(log 1000)

۱. log100(10) = log 10 / log 100 = 1/2؛ همچنین 100^(1/2) = 10؛ پس تساوی **درست** است.

۲. log 100 + log 0.01 = 2 + (−2) = 0؛ (یا log(100 x 0.01) = log 1 = 0)؛ پس تساوی **درست** است.

۳. log(1000^2) = log(10^6) = 6 ولی (log 1000)^2 = 3^2 = 9؛ چون 6 ≠ 9، تساوی **نادرست** است.
(درست: log(1000^2) = 2 log 1000 = 6)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳۷ صفحه ۱۱۲ مسئله

۴) الف) با استفاده از ماشین حساب تقریب اعشاری اعداد log 20 و log 30 و log 600 را تا دو رقم اعشار به دست آورید. آیا تساوی log(30 x 20) = log 30 x log 20 برقرار است؟ ب) به کمک قسمت (الف) در مربع علامت مناسب (≠ یا =) را قرار دهید: برای اعداد مثبت a و b در حالت کلی داریم: log(b x a) ... log b x log a

الف) log 20 ~ 1.30، log 30 ~ 1.48، log 600 ~ 2.78.

```
log 30 x log 20 ~ 1.48 x 1.30 ~ 1.92
log(30 x 20) = log 600 ~ 2.78
```

چون 2.78 ≠ 1.92، تساوی **برقرار نیست**.

ب)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

log b x log a ≠ log(b x a)

(لگاریتم حاصل‌ضرب برابر **مجموع** لگاریتم‌هاست، نه حاصل‌ضرب آن‌ها.)

۱۳۸ صفحه ۱۱۲ مسئله

۵) باکتری‌هایی را در نظر بگیرید که وزن آن‌ها پس از ۱ واحد زمانی ۲ برابر می‌شود. با استفاده از ماشین حساب تعیین کنید پس از چند واحد زمانی وزن این باکتری‌ها (از ۱ گرم) ۲۰ گرم خواهد شد؟

2^t = 20 پس t = log2(20). با تغییر مبنا:

```
t = log 20 / log 2 ~ 1.301 / 0.301 ~ 4.32
```

پس از تقریباً ۴٫۳۲ واحد زمانی.

(درستی: 2^4.32 ~ 20.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریاضی (۲) یازدهم - پودمان پنجم

آمار توصیفی

فهرست

۱۳۹ صفحه ۱۱۵ · فعالیت — دور مچ و دور گردن؛ خط بهترین برازش ۸۳

۱۴۰ صفحه ۱۲۰ · فعالیت — حذف داده‌ی پرت ۸۵

۱۴۱ صفحه ۱۲۳ · کار در کلاس — تعداد هنرجویان کلاس و درصد قبولی ۸۶

۱۴۲ صفحه ۱۲۴ · مسئله — تشخیص رابطه از روی نمودار پراکنش ۸۷

۱۴۳ صفحه ۱۲۵ · مسئله — مدت رانندگی و مسافت باقی‌مانده ۸۷

۱۴۴ صفحه ۱۲۶ · مسئله — قد و فاصله‌ی نوک دو انگشت وسط ۸۸

۱۴۵ صفحه ۱۲۶ · مسئله — نمره‌ی ریاضی و علوم ۸۹

۱۴۶ صفحه ۱۲۷ · مسئله — نمره‌ی ریاضی و زبان ۸۹

۱۴۷ صفحه ۱۲۷ · مسئله — اندازه‌ی کفش و قد ۹۰

۱۴۸ صفحه ۱۲۷ · مسئله — وصل کردن اولین و آخرین نقطه ۹۱

۱۴۹ صفحه ۱۲۸ · فعالیت — درون‌یابی و برون‌یابی: نرخ سود و سرمایه ۹۱

۱۵۰ صفحه ۱۳۰ · کار در کلاس — دما و نرخ مصرف اکسیژن خرچنگ ۹۲

۱۵۱ صفحه ۱۳۲ · مسئله — نور و فتوسنتز ۹۳

۱۵۲ صفحه ۱۳۲ · مسئله — تمرین دو ۱۰۰ متر ایمان ۹۴

۱۵۳ صفحه ۱۳۳ · مسئله — تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک ۹۴

۱۵۴ صفحه ۱۳۴ · فعالیت — میانه‌ی حقوق کارکنان ۹۵

۱۵۵ صفحه ۱۳۶ · کار در کلاس — محاسبه‌ی میانه ۹۶

۱۵۶ صفحه ۱۳۷ · مسئله — میانه: مثال، دو برابر شدن، پرتاب نیزه ۹۷

۱۵۷ صفحه ۱۳۷ · مسئله — میانگین و میانه با داده‌ی پرت ۹۷

۱۵۸ صفحه ۱۳۷ · مسئله — مفهوم میانه و حل معکوس ۹۸

۱۵۹ صفحه ۱۳۹ · فعالیت — مفهوم نمودار جعبه‌ای و چارک‌ها ۹۸

۱۶۰ صفحه ۱۴۲ · کار در کلاس — چارک‌ها، نمودار جعبه‌ای و مقایسه‌ی کلاس‌ها ۹۹

۱۶۱ صفحه ۱۴۳ · مسئله — نمره‌های زبان انگلیسی (نمودار جعبه‌ای) ۱۰۱

۱۶۲ صفحه ۱۴۳ · مسئله — مقایسه‌ی دو کلاس درس عربی ۱۰۱

۱۶۳ صفحه ۱۴۳ · مسئله — قد بازیکنان تیم والیبال ۱۰۲

۱۶۴ صفحه ۱۴۳ · مسئله — غلظت قند خون ۱۰۲

۱۶۵ صفحه ۱۴۴ · مسئله — تعداد نخود در غلاف ۱۰۳

ایران توشه
وسیله‌ای برای موفقیت

۱۳۹ صفحه ۱۱۵ فعالیت

اندازه‌ی دور گردن (y بر حسب سانتی‌متر) و دور مچ (x بر حسب سانتی‌متر) ۱۵ نفر در جدول داده شده است. (دور مچ: ۱۴٫۸، ۱۵، ۱۵٫۴، ۱۵٫۷، ۱۶٫۱، ۱۶٫۲، ۱۶٫۲، ۱۶٫۲، ۱۶٫۳، ۱۶٫۷، ۱۶٫۹، ۱۷٫۱، ۱۷٫۲، ۱۷٫۶، ۱۷٫۸ ؛ دور گردن به ترتیب: ۳۳٫۵، ۳۳، ۳۵٫۲، ۳۴٫۲، ۳۳٫۷، ۳۲٫۲، ۳۵٫۵، ۳۵٫۸، ۳۶٫۴، ۳۷٫۳، ۳۵٫۵، ۳۶٫۶، ۳۸٫۵، ۴۶٫۸، ۳۸٫۳)

۱) در صفحه‌ی مختصات، نقطه‌هایی را مشخص کنید که طول هر نقطه اندازه‌ی دور مچ و عرض آن اندازه‌ی دور گردن یک نفر است.

۲) آیا نقاط روی یک خط راست قرار دارند؟

۳) خطی (به‌طور تقریبی) رسم کنید که تا حد ممکن با نقاط مشخص شده کمترین فاصله را داشته باشد. سعی کنید نیمی از نقاط بالای خط و نیمی دیگر زیر خط و با فاصله‌ی یکسان از خط قرار گیرند.

۴) اطلاعات جدول را در excel وارد کنید و به کمک آن خطی رسم کنید که کمترین فاصله را با نقاط داشته باشد.

۵) اگر x اندازه‌ی دور مچ و y اندازه‌ی دور گردن باشد، معادله‌ی خط رسم شده را به کمک excel پیدا کنید.

۶) ستون 'y را با دو رقم اعشار کامل کنید. ('y اندازه‌ی دور گردن به کمک معادله‌ی خط است.)

۷) آیا مقادیر به‌دست‌آمده به کمک معادله‌ی خط با مقادیر اندازه‌گیری شده برابرند؟ چرا؟

۸) ستون خطا (e)، اختلاف مقدار واقعی و مقدار تخمین‌زده‌شده ('e = y − y) را کامل کنید.

۹) مجموع خطاها (ستون e) را به دست آورید. آیا این عدد مجموع واقعی خطاها را نشان می‌دهد؟ چرا؟

۱۰) مجموع مجذور خطاها را به دست آورید.

۱۱) فکر می‌کنید چرا مجذور خطاها را به دست می‌آوریم؟

---

۱) پانزده نقطه‌ی (14.8, 33.5)، (15, 33)، (15.4, 35.2)، ... ، (17.6, 46.8)، (17.8, 38.3) را روی صفحه‌ی مختصات (محور افقی: دور مچ، محور عمودی: دور گردن) مشخص می‌کنیم. نقاط در ناحیه‌ای با x از ۱۴٫۸ تا ۱۷٫۸ و y از ۳۲ تا ۴۷ قرار می‌گیرند و یک نقطه‌ی (17.6, 46.8) به‌طور آشکار بالاتر از بقیه است.

۲) خیر؛ نقاط دقیقاً روی یک خط راست نیستند، ولی در مجموع از چپ به راست و از پایین به بالا پراکنده شده‌اند و نزدیک به یک خط شیب‌دار رو به بالا هستند.

۳) با خط‌کش خطی رسم می‌کنیم که از میان نقاط عبور کند و حدوداً نیمی از نقاط بالای آن و نیمی پایین آن باشند. این خط از نزدیکی نقطه‌ی (15.7, 34.4) و (16.7, 37.1) می‌گذرد و شیب مثبتی دارد.

۴ و ۵) با روش کمترین مجذورات (به کمک excel یا ماشین‌حساب آماری) معادله‌ی خط بهترین برازش به‌دست می‌آید:

y = 2.77x − 9.19

۶، ۸ و ۹) مقدار 'y، خطای e = y − 'y و مجذور خطا (e^2) به این صورت است:

جدول کامل‌شده

x دور مچ	y دور گردن	y'	e = y − y'	e^2
۱۴٫۸	۳۳٫۵	۳۱٫۸۷	۱٫۶۳	۲٫۶۴
۱۵	۳۳	۳۲٫۴۳	۰٫۵۷	۰٫۳۳
۱۵٫۴	۳۵٫۲	۳۳٫۵۴	۱٫۶۶	۲٫۷۶
۱۵٫۷	۳۴٫۲	۳۴٫۳۷	۰٫۱۷−	۰٫۰۳
۱۶٫۱	۳۳٫۷	۳۵٫۴۸	۱٫۷۸−	۳٫۱۸
۱۶٫۲	۳۲٫۲	۳۵٫۷۶	۳٫۵۶−	۱۲٫۶۷
۱۶٫۲	۳۵٫۵	۳۵٫۷۶	۰٫۲۶−	۰٫۰۷
۱۶٫۲	۳۵٫۸	۳۵٫۷۶	۰٫۰۴	۰٫۰۰
۱۶٫۳	۳۶٫۴	۳۶٫۰۴	۰٫۳۶	۰٫۱۳
۱۶٫۷	۳۷٫۳	۳۷٫۱۵	۰٫۱۵	۰٫۰۲
۱۶٫۹	۳۵٫۵	۳۷٫۷۰	۲٫۲۰−	۴٫۸۵
۱۷٫۱	۳۶٫۶	۳۸٫۲۶	۱٫۶۶−	۲٫۷۵
۱۷٫۲	۳۸٫۵	۳۸٫۵۳	۰٫۰۳−	۰٫۰۰
۱۷٫۶	۴۶٫۸	۳۹٫۶۴	۷٫۱۶	۵۱٫۲۰
۱۷٫۸	۳۸٫۳	۴۰٫۲۰	۱٫۹۰−	۳٫۶۱

۷) خیر؛ مقادیر y' فقط تخمینی از دور گردن‌اند. نقاط دقیقاً روی خط نیستند، پس اغلب مقدار واقعی و مقدار تخمینی متفاوت است.

۹) مجموع خطاها تقریباً صفر است (sum e ~ 0؛ اگر گردکردن اعداد نبود، دقیقاً صفر می‌شد). این عدد اندازه‌ی واقعی خطاها را نشان نمی‌دهد، چون خطاهای مثبت و منفی یکدیگر را خنثی می‌کنند.

۱۰) مجموع مجذور خطاها:

sum e^2 ~ 84.2

۱۱) با مجذور کردن، علامت خطا اثری ندارد و خطاهای مثبت و منفی همدیگر را حذف نمی‌کنند؛ همچنین خطاهای بزرگ‌تر اثر بیشتری پیدا می‌کنند و مجموع آن‌ها معیار مناسبی از فاصله‌ی خط تا داده‌ها است. (استفاده از قدر مطلق نیز ممکن است، ولی محاسبه با آن دشوارتر است.)

irantooshe.ir

۱۴۰ صفحه ۱۲۰ فعالیت

۱) در فعالیت (۱) با حذف سطر مربوط به ۱۷٫۶ (در ستون اول)، نقطه‌ی (17.6, 46.8) را از داده‌هایتان خارج کنید و خطی رسم کنید که کمترین فاصله را با نقاط داشته باشد.

۲) ستون "y را با دو رقم اعشار کامل کنید. ("y اندازه‌ی دور گردن به کمک معادله‌ی جدید خط است.)

۳) ستون 'e را کامل کنید.

۴) مجموع مجذور خطاها را برای مقادیر به‌دست‌آمده برای "y به دست آورید و با جواب قسمت ۱۰ در فعالیت (۱) مقایسه کنید.

۵) فکر می‌کنید کدام خط برای پیش‌بینی مناسب‌تر است؟ چرا این اتفاق می‌افتد؟

۱ و ۲) پس از حذف نقطه‌ی پرت، با ۱۴ داده‌ی باقی‌مانده خط بهترین برازش به دست می‌آید:

$$y'' = 1.75x + 6.96$$

۲ و ۳) مقدار "y، خطای $e' = y - y''$ و مجذور آن:

جدول کامل‌شده

x دور مچ	y دور گردن	y''	e'	e'^2
۱۴٫۸	۳۳٫۵	۳۲٫۸۶	۰٫۶۴	۰٫۴۱
۱۵	۳۳	۳۳٫۲۱	۰٫۲۱-	۰٫۰۴
۱۵٫۴	۳۵٫۲	۳۳٫۹۱	۱٫۲۹	۱٫۶۷
۱۵٫۷	۳۴٫۲	۳۴٫۴۳	۰٫۲۳-	۰٫۰۵
۱۶٫۱	۳۳٫۷	۳۵٫۱۳	۱٫۴۳-	۲٫۰۵
۱۶٫۲	۳۲٫۲	۳۵٫۳۱	۳٫۱۱-	۹٫۶۵
۱۶٫۲	۳۵٫۵	۳۵٫۳۱	۰٫۱۹	۰٫۰۴
۱۶٫۲	۳۵٫۸	۳۵٫۳۱	۰٫۴۹	۰٫۲۴
۱۶٫۳	۳۶٫۴	۳۵٫۴۸	۰٫۹۲	۰٫۸۴
۱۶٫۷	۳۷٫۳	۳۶٫۱۸	۱٫۱۲	۱٫۲۵
۱۶٫۹	۳۵٫۵	۳۶٫۵۳	۱٫۰۳-	۱٫۰۷
۱۷٫۱	۳۶٫۶	۳۶٫۸۸	۰٫۲۸-	۰٫۰۸
۱۷٫۲	۳۸٫۵	۳۷٫۰۶	۱٫۴۴	۲٫۰۸
۱۷٫۸	۳۸٫۳	۳۸٫۱۱	۰٫۱۹	۰٫۰۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴) مجموع مجذور خطاها در این حالت تقریباً ۱۹٫۵ است، در حالی که در فعالیت (۱) تقریباً ۸۴٫۲ بود. یعنی خط جدید با داده‌های باقی‌مانده فاصله‌ی بسیار کمتری دارد.

19.5 < 84.2

۵) خط دوم (y" = 1.75x + 6.96) برای پیش‌بینی مناسب‌تر است. نقطه‌ی پرت (17.6, 46.8) با بقیه‌ی داده‌ها هماهنگ نیست و خط اول را به سمت خود می‌کشد (شیب آن ۲٫۷۷ شده است در حالی که شیب خط دوم ۱٫۷۵ است)؛ پس خط اول بیشتر مربوط به این یک داده است تا رفتار عمومی بقیه‌ی افراد.

۱۴۱ صفحه ۱۲۳ **کار در کلاس**

جدول زیر تعداد هنرجویان در کلاس‌های مختلف یک هنرستان و درصد قبولی آن‌ها را نشان می‌دهد. زوج‌های (تعداد هنرجویان، درصد قبولی) عبارت‌اند از (۱۰، ۸۰)، (۱۵، ۶۰)، (۳۰، ۵۰)، (۱۲، ۸۰)، (۲۵، ۵۰)، (۲۴، ۵۰)، (۱۵، ۷۰)، (۶۰، ۷۰)، (۲۸، ۴۰)، (۱۲، ۸۰).) ۱) نمودار پراکنش را رسم کنید.

۲) خط بهترین برازش را رسم کنید.

۳) پیش‌بینی می‌کنید چند درصد از هنرجویان در یک کلاس ۴۰ نفره قبول می‌شوند.

۴) برخی عقیده دارند نقطه‌ی (۶۰، ۷۰) (اطلاعات مربوط به یک کلاس ۶۰ نفره) یک داده‌ی پرت (مربوط به یک وضعیت غیرمعمول) است. فکر می‌کنید اگر در تحلیل خود این داده را کنار بگذارید، بهتر است یا خیر؟ توضیح دهید چرا؟

۵) این داده را خارج کنید و پاسخ سؤال (۳) را مجدداً به دست آورید.

۱) ده نقطه‌ی (۱۰، ۸۰)، (۱۲، ۸۰)، (۱۲، ۸۰)، (۱۵، ۶۰)، (۱۵، ۷۰)، (۲۴، ۵۰)، (۲۵، ۵۰)، (۲۸، ۴۰)، (۳۰، ۵۰) و (۶۰، ۷۰) را روی صفحه‌ی مختصات مشخص می‌کنیم (محور افقی: تعداد هنرجویان، محور عمودی: درصد قبولی). نقطه‌های سمت چپ با افزایش تعداد، رو به پایین می‌روند و نقطه‌ی (۶۰، ۷۰) بسیار جدا از بقیه، بالا و سمت راست قرار می‌گیرد.

۲) خط بهترین برازش با تمام ۱۰ داده (روش کمترین مجذورات):

y = −0.31x + 70.13

این خط شیب منفی بسیار کمی دارد و به‌دلیل نقطه‌ی (۶۰، ۷۰) تقریباً افقی است.

۳) به ازای x = 40: y = −0.31 x 40 + 70.13 ~ 57.8

تقریباً ۵۸ درصد قبول می‌شوند.

۴) بله، بهتر است کنار گذاشته شود. کلاس ۶۰ نفره وضعیت غیرمعمول است (تعداد آن بیش از دو برابر بیشتر کلاس‌های دیگر است و درصد قبولی آن با روند بقیه سازگار نیست) و باعث می‌شود خط از روند واقعی بقیه‌ی داده‌ها دور شود.

۵) با حذف این داده، خط بهترین برازش ۹ داده‌ی باقی‌مانده چنین است:

y = −1.90x + 98.30

y = −1.90 x 40 + 98.30 ~ 22.3؛ یعنی تقریباً ۲۲ درصد. (توجه: ۴۰ خارج از بازه‌ی داده‌های باقی‌مانده، یعنی ۱۰ تا ۳۰، است؛ پس این پیش‌بینی برون‌یابی است و با احتیاط باید به آن نگاه کرد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۴۲ صفحه ۱۲۴ مسئله

۱) در نمودارهای داده‌شده (سه نمودار پراکنش)، هر نقطه نشان‌دهنده‌ی مقادیر متناظر بین دو کمیت است. در کدام نمودارها بین این دو کمیت رابطه‌ای وجود دارد؟ رابطه‌ی بین این دو کمیت را در هر نمودار، از لحاظ افزایشی یا کاهشی بودن یکی بر حسب دیگری، توصیف کنید.

برای تشخیص، مانند مثال ۲ همین بخش عمل می‌کنیم:

- اگر نقاط روی یک خط راست یا نزدیک به آن باشند و با افزایش x، مقدار y به‌طور کلی افزایش یابد، بین دو کمیت رابطه‌ی **افزایشی** وجود دارد؛
- اگر نقاط نزدیک به یک خط با شیب منفی باشند (با افزایش x، مقدار y کاهش یابد)، رابطه‌ی **کاهشی** است؛
- اگر نقاط بدون هیچ الگوی مشخصی پخش شده باشند و تغییر x اطلاعاتی درباره‌ی تغییر y ندهد، بین دو کمیت **رابطه‌ای وجود ندارد**.

بر این اساس: نمودار نخست (نقاط پراکنده که با افزایش x، به‌طور کلی y هم افزایش می‌یابد) رابطه‌ی افزایشی؛ نمودار دوم (نقاطی که به یک خط با شیب منفی نزدیک‌اند) رابطه‌ی کاهشی؛ و نمودار سوم (نقاط بدون الگو) فاقد رابطه است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۴۳ صفحه ۱۲۵ مسئله

۲) نمودار داده‌شده رابطه‌ی بین مدت زمانی که فرد رانندگی می‌کند (x) و مسافت باقی‌مانده تا مقصد (y) را نشان می‌دهد. کدام یک از نمودارهای زیر، خط بهترین برازش برای نمودار پراکنش بالا را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید.

با گذشت زمان رانندگی، مسافت باقی‌مانده کم می‌شود؛ بنابراین نقاط روند کاهشی دارند و خط بهترین برازش باید **شیب منفی** داشته باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

از میان چهار نمودار، خطی درست است که: (۱) شیب منفی دارد، (۲) از میان نقاط عبور می‌کند، به‌طوری که تقریباً نیمی از نقاط بالای آن و نیمی پایین آن باشند و (۳) در ابتدا (نزدیک x = 0) در بالا و در انتها نزدیک محور افقی باشد. خط‌هایی با شیب مثبت، یا خطی که همه‌ی نقاط را در یک طرف خود دارد، یا خطی که از ناحیه‌ی نقاط دور است، خط بهترین برازش نیستند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۴ صفحه ۱۲۶ مسئله

۳) جدول، طول قد (x) و فاصله‌ی نوک دو انگشت وسط (y) ۲۰ نفر را (در حالتی که دست‌ها از طرفین کاملاً باز است) بر حسب سانتی‌متر نشان می‌دهد. زوج‌های (قد، فاصله) عبارت‌اند از: (۱۸۰، ۱۸۱)، (۱۵۶، ۱۵۴)، (۱۶۸، ۱۶۸)، (۱۴۷، ۱۴۸)، (۱۳۱، ۱۳۸)، (۱۵۹، ۱۶۰)، (۱۵۴، ۱۴۲)، (۱۵۵، ۱۵۴)، (۱۷۸، ۱۸۱)، (۱۷۵، ۱۷۵)، (۱۳۵، ۱۳۰)، (۱۸۰، ۱۷۵)، (۱۷۸، ۱۸۶)، (۱۶۱، ۱۵۸)، (۱۳۹، ۱۳۹)، (۱۵۴، ۱۴۸)، (۱۵۶، ۱۵۶)، (۱۵۲، ۱۵۴)، (۱۷۰، ۱۷۵)، (۱۵۶، ۱۵۲)

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.

ب) آیا رابطه‌ای بین طول قد و فاصله‌ی نوک دو انگشت وسط افراد دیده می‌شود؟ توضیح دهید.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و معادله‌ی آن را به دست آورید.

ت) به کمک معادله یا نمودار، با داشتن طول قد خودتان، فاصله‌ی نوک دو انگشت وسط خودتان را تخمین بزنید.

ث) فاصله‌ی نوک دو انگشت وسط خودتان را اندازه بگیرید. آیا با مقدار تخمین‌زده‌شده تفاوت دارد؟ اگر بله، توضیح دهید چرا؟

الف) ۲۰ نقطه‌ی (قد، فاصله) مانند (۱۸۰، ۱۸۱)، (۱۵۶، ۱۵۴)، (۱۶۸، ۱۶۸)، ... ، (۱۳۵، ۱۳۰) را در صفحه‌ی مختصات رسم می‌کنیم (محور افقی: طول قد، محور عمودی: فاصله‌ی نوک انگشتان). نقاط تقریباً در امتداد یک خط رو به بالا قرار می‌گیرند.

ب) بله؛ رابطه‌ی افزایشی و قوی بین آن‌ها دیده می‌شود (نقاط خیلی نزدیک به یک خط هستند). هر چه قد بلندتر باشد، فاصله‌ی نوک دو انگشت وسط نیز بیشتر است و این دو مقدار تقریباً برابرند.

پ) خط بهترین برازش (روش کمترین مجذورات):

y = 1.045x − 7.70

ضریب ۱٫۰۴۵ نزدیک به ۱ است؛ یعنی تقریباً y ~ x.

ت) مثلاً اگر قد شما ۱۷۰ سانتی‌متر باشد: y = 1.045 × 170 − 7.70 ~ 170؛ یعنی فاصله‌ی نوک دو انگشت وسط حدود ۱۷۰ سانتی‌متر تخمین زده می‌شود. (برای قد دلخواه h از 1.045h − 7.7 استفاده کنید.)

ث) مقدار اندازه‌گیری‌شده معمولاً با مقدار تخمینی کمی تفاوت دارد؛ زیرا نقاط دقیقاً روی خط نیستند و خط فقط روند کلی داده‌های این ۲۰ نفر را نشان می‌دهد، نه ویژگی‌های هر فرد؛ ضمن اینکه خطای اندازه‌گیری هم وجود دارد.

۱۴۵ صفحه ۱۲۶ مسئله

۴) سینا می‌گوید: اگر ریاضی شما خوب باشد، علوم شما نیز خوب است. علی می‌خواهد درستی این گفته را بررسی کند. به همین دلیل نمره‌ی ریاضی و علوم ۷ نفر را پرسید. (ریاضی: ۸، ۶٫۵، ۱۰، ۱۶، ۹، ۵٫۵، ۱۷؛ علوم به ترتیب: ۱۰، ۹، ۱۱، ۱۵، ۱۰، ۸، ۱۵) الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.

ب) آیا با گفته‌ی سینا موافقید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید.

ت) پیش‌بینی می‌کنید نمره‌ی علوم دانش‌آموزی که در آزمون ریاضی ۱۴ شده است، چند باشد؟

الف) هفت نقطه‌ی (۸، ۱۰)، (۶٫۵، ۹)، (۱۰، ۱۱)، (۱۶، ۱۵)، (۹، ۱۰)، (۵٫۵، ۸) و (۱۷، ۱۵) را مشخص می‌کنیم (محور افقی: نمره‌ی ریاضی، محور عمودی: نمره‌ی علوم). نقاط به‌خوبی در امتداد یک خط رو به بالا قرار می‌گیرند.

ب) بله؛ در این داده‌ها هر چه نمره‌ی ریاضی بیشتر است، نمره‌ی علوم هم بیشتر است (نقاط بسیار نزدیک به یک خط با شیب مثبت). البته نتیجه فقط برای این ۷ نفر است و نمی‌توان آن را بدون بررسی بیشتر به همه تعمیم داد.

پ) معادله‌ی خط بهترین برازش:

$$y = 0.617x + 4.80$$

ت) $y = 0.617 \times 14 + 4.80 \sim 13.4$

نمره‌ی علوم حدود ۱۳٫۴ (تقریباً ۱۳ تا ۱۴) پیش‌بینی می‌شود.

۱۴۶ صفحه ۱۲۷ مسئله

۵) جدول زیر نمرات ریاضی و زبان ۱۰ دانش‌آموز را نشان می‌دهد. (ریاضی: ۸، ۱۳، ۱۴، ۱۷، ۱۲، ۱۳، ۹، ۴٫۵، ۱، ۹؛ زبان به ترتیب: ۹، ۹، ۱۳، ۱۲، ۲، ۱۸، ۱۸، ۶، ۸، ۱۰) الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید. (طول هر نقطه نمره‌ی ریاضی و عرض هر نقطه نمره‌ی زبان یک دانش‌آموز است.)

ب) آیا بین نمره‌ی ریاضی و نمره‌ی زبان دانش‌آموزان رابطه‌ای مشاهده می‌کنید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و به کمک معادله‌ی آن یا نمودار، نمره‌ی زبان دانش‌آموزی را که در آزمون ریاضی ۱۵ گرفته است، پیش‌بینی کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ت) نقطه‌های نشان‌دهنده‌ی نمره‌ی ریاضی و زبان کدام دو دانش‌آموز با نمرات بقیه‌ی دانش‌آموزان هماهنگی ندارد؟

ث) این دو داده را از داده‌هایتان حذف کنید و خط بهترین برازش را رسم کنید و این بار نمره‌ی زبان دانش‌آموزی را که در آزمون ریاضی ۱۵ گرفته است، پیش‌بینی کنید.

ج) آیا تفاوتی بین دو پیش‌بینی شما وجود دارد؟ دلیل خود را توضیح دهید.

الف) ده نقطه‌ی (۸، ۹)، (۱۳، ۹)، (۱۴، ۱۳)، (۱۷، ۱۲)، (۱۲، ۲)، (۱۳، ۱۸)، (۹، ۱۸)، (۴٫۵، ۶)، (۱، ۸) و (۹، ۱۰) را در صفحه‌ی مختصات مشخص می‌کنیم.

ب) رابطه‌ی قوی دیده نمی‌شود. نقاط پراکنده‌اند و فقط یک گرایش ضعیف افزایشی دارند؛ دو نقطه‌ی (۱۲، ۲) و (۹، ۱۸) از بقیه جدا هستند.

پ) خط بهترین برازش همه‌ی داده‌ها: $y = 0.317x + 7.31$؛ برای $x = 15$:

$$y = 0.317 \times 15 + 7.31 \sim 12.1$$

ت) دو دانش‌آموزی که نمره‌ی ریاضی و زبان آن‌ها (۱۲، ۲) و (۹، ۱۸) است.

ث) پس از حذف این دو داده، خط بهترین برازش ۸ داده‌ی باقی‌مانده: $y = 0.448x + 6.17$؛ برای $x = 15$:

$$y = 0.448 \times 15 + 6.17 \sim 12.9$$

ج) بله، پیش‌بینی دوم (حدود ۱۲٫۹) کمی بیشتر از پیش‌بینی اول (حدود ۱۲٫۱) است. داده‌های پرت خط را از روند اکثر داده‌ها منحرف می‌کنند و شیب آن را تغییر می‌دهند؛ پس بدون آن‌ها خط بازتاب بهتری از رابطه‌ی بقیه‌ی دانش‌آموزان است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۴۷ صفحه ۱۲۷ مسئله

۶) جدول داده‌های مربوط به اندازه‌ی کفش و قد ۱۲ مرد را نشان می‌دهد. (قد (سانتی‌متر)، اندازه‌ی کفش): (۱۷۵، ۴۴)، (۱۸۲، ۴۳)، (۱۷۰، ۴۰)، (۱۷۳، ۴۴)، (۱۷۰، ۴۲)، (۱۸۵، ۴۶)، (۱۷۷، ۴۶)، (۱۷۲، ۴۳)، (۱۶۵، ۴۲)، (۱۷۸، ۴۲)، (۱۷۵، ۴۴)، (۱۸۳، ۴۶) الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را به کمک excel رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، اندازه‌ی کفش مردی را که قد او ۱۸۰ سانتی‌متر است پیش‌بینی کنید.

پ) باستان‌شناسان ردپایی به اندازه‌ی ۵۸ سانتی‌متر پیدا کرده‌اند. پیش‌بینی می‌کنید طول قد این انسان چقدر بوده است؟

الف) دوازده نقطه‌ی (قد، اندازه‌ی کفش) را رسم می‌کنیم (محور افقی: قد، محور عمودی: اندازه‌ی کفش). نقاط روند افزایشی ضعیف تا متوسطی دارند. خط بهترین برازش:

y = 0.213x + 6.10

ب) y = 0.213 x 180 + 6.10 ~ 44.5

اندازه‌ی کفش حدود ۴۴ تا ۴۵ پیش‌بینی می‌شود.

پ) برای پیش‌بینی قد از روی اندازه‌ی کفش، خط بهترین برازش قد بر حسب اندازه‌ی کفش (x: اندازه‌ی کفش، y: قد) را می‌نویسیم: y = 2.115x + 83.40. برای x = 58:

y = 2.115 x 58 + 83.40 ~ 206

قد این انسان حدود ۲۰۶ سانتی‌متر پیش‌بینی می‌شود.

توجه: اندازه‌ی ۵۸ بسیار بیرون از بازه‌ی داده‌ها (۴۰ تا ۴۶) است؛ پس این پیش‌بینی برون‌یابی است و ممکن است دقیق نباشد. (اگر منظور از ۵۸ سانتی‌متر طول واقعی ردپا باشد، باید ابتدا آن را به اندازه‌ی کفش تبدیل کرد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۸ صفحه ۱۲۷ مسئله

۷) دانش‌آموزی برای توصیف داده‌هایش، نمودار پراکنش را رسم کرد. او برای رسم نمودن خط بهترین برازش، اولین نقطه و آخرین نقطه را به هم وصل کرد. آیا او خط بهترین برازش را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

خیر، به‌طور کلی درست نیست. خط بهترین برازش باید طوری باشد که مجموع مجذور خطاها (فاصله‌ی همه‌ی نقاط از خط) کمترین مقدار شود و همه‌ی نقاط در تعیین آن نقش دارند. اگر فقط اولین و آخرین نقطه را وصل کنیم، از بقیه‌ی نقاط صرف‌نظر شده است و ممکن است بسیاری از نقاط (مثلاً همه‌ی نقاط میانی) در یک سمت خط و دور از آن باشند. حتی اگر اولین یا آخرین نقطه، داده‌ی پرت باشد، خط به‌شدت منحرف می‌شود. این روش فقط در حالت خاصی که نقاط تقریباً روی یک خط باشند، تقریب قابل قبولی می‌دهد.

۱۴۹ صفحه ۱۲۸ فعالیت

جدول زیر، نرخ سود بانکی (درصد) و سرمایه‌ی جذب‌شده (میلیون تومان) یک بانک را نشان می‌دهد: (نرخ سود، سرمایه): (۱۰، ۲۵)، (۸، ۲۶)، (۹، ۲۱)، (۱۱، ۱۵)، (۱۱، ۱۷)، (۱۱، ۱۹)، (۱۰، ۲۷)، (۹، ۲۶)، (۷، ۳۱)، (۶، ۳۶)، (۶، ۳۹)، (۵، ۴۰)

۱) به کمک excel خط بهترین برازش را برای این اطلاعات رسم کنید.

۲) اگر نرخ سود ۱۰٫۵ درصد تعیین شود، مقدار سرمایه‌ی جذب‌شده را پیش‌بینی کنید.

۳) اگر نرخ سود به ۱۲ درصد افزایش یابد، مقدار سرمایه‌ی جذب‌شده را پیش‌بینی کنید.

۴) اگر نرخ سود به ۱۸ درصد افزایش یابد، مقدار سرمایه‌ی جذب‌شده را پیش‌بینی کنید.

۵) در کدام حالت پیش‌بینی شما به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود؟ توضیح دهید.

۱) نقاط (نرخ سود، سرمایه) را رسم می‌کنیم. با افزایش نرخ سود، سرمایه‌ی جذب‌شده کاهش می‌یابد. خط بهترین برازش (x: نرخ سود، y: سرمایه):

$y = -3.63x + 57.99$

۲) $y = -3.63 \times 10.5 + 57.99 \sim 19.9$؛ یعنی حدود ۲۰ میلیون تومان.

۳) $y = -3.63 \times 12 + 57.99 \sim 14.4$؛ یعنی حدود ۱۴ میلیون تومان.

۴) $y = -3.63 \times 18 + 57.99 \sim -7.4$؛ عدد منفی به‌دست می‌آید که سرمایه‌ی منفی معنا ندارد.

۵) پیش‌بینی قسمت (۲) به واقعیت نزدیک‌تر است؛ زیرا ۱۰٫۵ در بازه‌ی 5, 11 داده‌ها قرار دارد (درون‌یابی)، ولی ۱۲ و ۱۸ بیرون از بازه‌اند (برون‌یابی) و هرچه از بازه‌ی داده‌ها دورتر شویم، خطای پیش‌بینی بیشتر و حتی غیرواقعی می‌شود.

درون‌یابی (قسمت ۲) مطمئن‌تر از برون‌یابی (قسمت‌های ۳ و ۴) است.

۱۵۰ صفحه ۱۳۰ کار در کلاس

نرخ مصرف اکسیژن نوعی خرچنگ در زیر آب در جدول آورده شده است. (دما (درجه‌ی سانتی‌گراد): ۵٫۵، ۱۰، ۱۲٫۵، ۱۵، ۱۷٫۵، ۲۰؛ نرخ مصرف اکسیژن (میلی‌مول بر کیلوگرم بر دقیقه) به ترتیب: ۴٫۵، ۵٫۵، ۹، ۱۲، ۱۷، ۲۳)

۱) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش این داده‌ها را رسم کنید.

۲) به کمک نمودار، مقدار تقریبی دما را در حالتی که نرخ مصرف اکسیژن ۱۴ است، پیدا کنید.

۳) به کمک معادله‌ی خط بهترین برازش، نرخ مصرف اکسیژن این خرچنگ را در دماهای 0، 17، 50 و 150 درجه‌ی سانتی‌گراد پیش‌بینی کنید.

۴) برای پیش‌بینی مقدار اکسیژن در کدام دماها از درون‌یابی و برای کدام دماها از برون‌یابی استفاده کردید؟

۵) پیش‌بینی در کدام وضعیت با خطای زیاد همراه و یا آن‌که غیرواقعی است؟ توضیح دهید.

۱) شش نقطه را رسم می‌کنیم؛ نقاط روند افزایشی (و کمی خمیده رو به بالا) دارند. خط بهترین برازش (x : دما، y: نرخ مصرف اکسیژن):

$y = 1.29x - 5.43$

۲) از نقطه‌ی ۱۴ روی محور عمودی خط افقی رسم می‌کنیم تا خط را قطع کند و به محور افقی عمود می‌کنیم؛ دما تقریباً ۱۵ درجه به دست می‌آید. (از معادله: $1.29x - 5.43 = 14$ پس $x \sim 15.1$.)

۳) مقادیر پیش‌بینی‌شده از معادله‌ی $y = 1.29x - 5.43$:

پیش‌بینی نرخ مصرف اکسیژن

دما (°C)	۰	۱۷	۵۰	۱۵۰
نرخ مصرف اکسیژن	۵٫۴-	۱۶٫۴	۵۸٫۹	۱۸۷٫۶

۴) دمای ۱۷ درجه در بازه‌ی 5.5, 20 قرار دارد، پس **درون‌یابی** است؛ دماهای ۰، ۵۰ و ۱۵۰ بیرون از بازه‌اند، پس **برون‌یابی** هستند.

۵) پیش‌بینی در دماهای ۵۰ و ۱۵۰ (به‌ویژه ۱۵۰) خطای زیاد دارد و غیرواقعی است: آب در ۱۰۰ درجه می‌جوشد و خرچنگ در آن دماها زنده نمی‌ماند. در دمای ۰ هم نرخ مصرف منفی به دست می‌آید که بی‌معنا است؛ در دماهای دور از بازه‌ی داده‌ها نمی‌توان به رابطه‌ی خطی اعتماد کرد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۱ صفحه ۱۳۲ **مسئله**

۱) مهرناز می‌خواهد تأثیر نور را بر سرعت غذاسازی گیاه از طریق فتوسنتز بررسی کند. او لامپ را در ۱۰۰ متری گیاه قرار داد و تعداد حباب‌هایی را که گیاه در یک دقیقه تولید کرد شمرد و در فواصل دیگر هم این کار را کرد. (فاصله‌ی لامپ از گیاه (متر)، تعداد حباب در دقیقه): (۱۰۰، ۱۰)، (۸۰، ۲۰)، (۷۰، ۲۸)، (۶۰، ۳۲)، (۴۰، ۳۷)، (۲۰، ۳۷) الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، جمله‌ی زیر را کامل کنید: هر چه فاصله‌ی لامپ از گیاه ..... باشد، سرعت فتوسنتز ..... است.

پ) اگر لامپ در ۱۰ سانتی‌متری گیاه قرار داشته باشد، تعداد حباب‌ها در دقیقه را پیش‌بینی کنید.

ت) اگر لامپ را در ۲ سانتی‌متری گیاه قرار دهیم، برای پیدا کردن تعداد حباب‌هایی که گیاه تولید می‌کند از برون‌یابی استفاده می‌کنیم یا درون‌یابی؟ فکر می‌کنید در این وضعیت این پیش‌بینی چقدر درست باشد؟

الف) شش نقطه را رسم می‌کنیم. با کم شدن فاصله، تعداد حباب‌ها زیاد می‌شود (ولی بین ۴۰ و ۲۰ متر تغییر نمی‌کند). خط بهترین برازش (x: فاصله بر حسب متر، y: تعداد حباب):

$$y = -0.346x + 48.68$$

ب) هر چه فاصله‌ی لامپ از گیاه **کمتر** باشد، سرعت فتوسنتز **بیشتر** است.

پ) ۱۰ سانتی‌متر برابر ۰٫۱ متر است: $y = -0.346 \times 0.1 + 48.68 \sim 48.6$؛ یعنی از روی خط حدود ۴۹ حباب در دقیقه. ولی داده‌ها نشان می‌دهند که از ۴۰ متر به بعد تعداد حباب‌ها دیگر زیاد نمی‌شود (حدود ۳۷ می‌ماند)؛ پس عدد واقعی احتمالاً از این مقدار کمتر و نزدیک به همان ۳۷ است.

ت) ۲ سانتی‌متر (۰٫۰۲ متر) بسیار کمتر از کمترین فاصله‌ی داده‌ها (۲۰ متر) است؛ پس **برون‌یابی** است (پیش‌بینی خط: حدود ۴۹ حباب). این پیش‌بینی چندان درست نیست؛ چون فتوسنتز با افزایش نور تا حدی بالا می‌رود و بعد ثابت می‌ماند و رابطه‌ی آن با فاصله خطی نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۲ صفحه ۱۳۲ مسئله

۲) ایمان برای شرکت در مسابقات دو ۱۰۰ متر تمرین می‌کند. جدول، زمان به پایان رساندن مسیر را بر حسب ثانیه در پایان هر هفته‌ی تمرین نشان می‌دهد. (هفته‌ی تمرین، زمان): (۱، ۱۳)، (۲، ۱۲)، (۳، ۱۱٫۵)، (۴، ۱۱٫۲۵)، (۵، ۱۱) الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.

ب) به کمک نمودار یا معادله‌ی خط بهترین برازش، زمان به پایان رساندن مسیر توسط ایمان پس از ۱۴ هفته را پیش‌بینی کنید.

پ) آیا پیش‌بینی شما درست است؟ برای پاسخ به این سؤال رکورد جهانی دو ۱۰۰ متر مردان را از اینترنت پیدا کنید.

ت) برای این پیش‌بینی از درون‌یابی استفاده کردید یا برون‌یابی؟ آیا پاسخ به‌دست‌آمده معنادار است؟ توضیح دهید چرا؟

الف) پنج نقطه‌ی (۱، ۱۳)، (۲، ۱۲)، (۳، ۱۱٫۵)، (۴، ۱۱٫۲۵) و (۵، ۱۱) را رسم می‌کنیم. زمان با هفته‌ها کاهش می‌یابد. خط بهترین برازش (x: هفته، y: زمان به ثانیه):

$$y = -0.475x + 13.175$$

ب) $y = -0.475 \times 14 + 13.175 = 6.525$؛ یعنی حدود ۶٫۵ ثانیه.

پ) این پیش‌بینی درست نیست. رکورد جهانی دو ۱۰۰ متر مردان ۹٫۵۸ ثانیه است (اوسین بولت، ۲۰۰۹)؛ زمان ۶٫۵ ثانیه برای انسان ناممکن است.

ت) ۱۴ هفته خارج از بازه‌ی داده‌ها (۱ تا ۵ هفته) است؛ پس **برون‌یابی** است و جواب معنادار نیست. بهبود زمان ایمان با گذشت هفته‌ها کند می‌شود و از حدی (رکورد جهانی) کمتر نخواهد شد؛ رابطه‌ی خطی فقط در بازه‌ی داده‌ها معتبر است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۳ صفحه ۱۳۳ مسئله

۳) جدول، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک تابستانی را از سال ۱۹۴۸ تا ۲۰۰۰ نشان می‌دهد: (سال، تعداد): (۱۹۴۸، ۵۹)، (۱۹۵۲، ۶۹)، (۱۹۵۶، ۷۲)، (۱۹۶۰، ۸۳)، (۱۹۶۴، ۹۳)، (۱۹۶۸، ۱۱۲)، (۱۹۷۲، ۱۲۱)، (۱۹۷۶، ۹۲)،

(۱۹۸۰، ۸۰)، (۱۹۸۴، ۱۴۰)، (۱۹۸۸، ۱۶۰)، (۱۹۹۲، ۱۶۹)، (۱۹۹۶، ۱۹۷)، (۲۰۰۰، ۱۹۹) الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.

ب) به کمک معادله‌ی خط بهترین برازش، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک ۲۰۰۴ و المپیک ۲۰۱۶ را پیش‌بینی کنید.

پ) با مراجعه به اینترنت، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در سال ۲۰۰۴ و ۲۰۱۶ را پیدا کنید. این تعداد را با پیش‌بینی‌های خودتان مقایسه کنید. در صورت وجود اختلاف، توضیح دهید چرا این اختلاف وجود دارد.

ت) به کمک معادله یا نمودار، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در سال ۲۰۲۸ را پیش‌بینی کنید. آیا این پیش‌بینی معنادار است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

الف) چهارده نقطه (سال، تعداد) را رسم می‌کنیم؛ روند کلی افزایشی است (با دو کاهش در ۱۹۷۶ و ۱۹۸۰ که به‌دلیل تحریم‌ها بود). اگر x سال و y تعداد کشورها باشد، خط بهترین برازش:

$y = 2.61x - 5034.35$

ب) $x = 2004$: $y \sim 195.9$؛ یعنی حدود ۱۹۶ کشور.

$x = 2016$: $y \sim 227.2$؛ یعنی حدود ۲۲۷ کشور.

پ) طبق آمار رسمی، در ۲۰۰۴ (آتن) حدود ۲۰۱ کشور (کمیته‌ی ملی المپیک) و در ۲۰۱۶ (ریو) ۲۰۷ تیم شرکت داشتند. پیش‌بینی ۱۹۶ برای ۲۰۰۴ نزدیک به واقعیت است، ولی پیش‌بینی ۲۲۷ برای ۲۰۱۶ حدود ۲۰ بیشتر از مقدار واقعی است. علت اختلاف: تعداد کشورها محدود است (حدود ۲۰۶ کمیته‌ی ملی المپیک در جهان) و رشد آن نمی‌تواند برای همیشه خطی بماند؛ رشد از دهه‌ی ۱۹۹۰ کند شده است.

ت) $x = 2028$: $y \sim 258.5$؛ یعنی حدود ۲۵۹ کشور.

این پیش‌بینی معنادار نیست.

تعداد کشورهای جهان محدود است و بیشتر از تعداد کمیته‌های ملی موجود نمی‌شود؛ پس ۲۵۹ کشور در المپیک ۲۰۲۸ نمی‌تواند باشد. ۲۰۲۸ هم از بازه‌ی داده‌ها (۱۹۴۸ تا ۲۰۰۰) بسیار دور است (برون‌یابی).

(منبع: آمار مجموع کمیته‌های ملی المپیک شرکت‌کننده در هر دوره: ۲۰۰۰: ۱۹۹؛ ۲۰۰۴: ۲۰۱؛ ۲۰۰۸: ۲۰۴؛ ۲۰۱۲: ۲۰۴؛ ۲۰۱۶: ۲۰۷؛ سایت topendsports.com)

۱۵۴ صفحه ۱۳۴ فعالیت

جدول حقوق کارکنان یک شرکت (میلیون تومان): مدیرعامل ۵٫۸؛ معاون ۳٫۲؛ کارمند قراردادها ۱٫۷؛ روابط عمومی ۱٫۳؛ حسابدار ۱٫۸؛ مسئول فناوری ۱٫۲؛ بایگانی ۱؛ منشی ۱٫۱؛ نگهبان ۰٫۹.

۱) داده‌های ارائه‌شده در لیست حقوق کارکنان را از کم به زیاد مرتب کنید.

۲) عددی را پیدا کنید که تعداد حقوق‌های قبل از آن، با تعداد حقوق‌های بعد از آن برابر باشد.

۱) مرتب‌شده از کم به زیاد (میلیون تومان):

0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 1.8, 3.2, 5.8

۲) کل داده‌ها ۹ تا هستند. عدد وسط (پنجمین عدد) ۱٫۳ است؛ چهار حقوق قبل از آن (0.9, 1, 1.1, 1.2) و چهار حقوق بعد از آن (1.7, 1.8, 3.2, 5.8) قرار دارند.

عدد ۱٫۳ میلیون تومان (میانه)

۱۵۵ صفحه ۱۳۶ کار در کلاس

۱) تعداد روزهای مسافرت چند خانواده به صورت مقابل است: ۸، ۳، ۶، ۴، ۳، ۷، ۵، ۲. میانه‌ی این داده‌ها را بنویسید.

۲) اگر تعداد داده بدون تکرار و ..... (فرد / زوج) باشد، میانه در داده‌ها قرار ندارد.

۳) داده‌های زیر تعداد شرکت‌کنندگان شهرهای مختلف را در یک مسابقه نشان می‌دهد و میانه‌ی داده‌ها عدد ۱۷ است. در دایره و مربع چه اعدادی می‌توانند قرار بگیرند؟ چرا؟ ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۳، ۱۴، ۱۵، □، ○، ۱۸، ۱۹، ۱۹، ۲۰، ۲۰

۱) داده‌ها را مرتب می‌کنیم: 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8. تعداد داده‌ها ۸ (زوج) است؛ پس میانه میانگین دو داده‌ی وسط (۴ و ۵) است:

(4 + 5)/2 = 4.5

۲) اگر تعداد داده‌ها **زوج** باشد، دو داده‌ی وسطی وجود دارد و میانه (میانگین آن‌ها) در بین داده‌ها قرار ندارد. (مگر آن‌که دو داده‌ی وسط برابر باشند.)

۳) تعداد داده‌ها ۱۳ است؛ پس میانه هفتمین داده است. شش داده‌ی ۱۱ تا ۱۵ قبل از مربع و شش داده‌ی ۱۸ تا ۲۰ بعد از دایره است، ولی میانه ۱۷ است و باید هفتمین داده، یعنی مربع، برابر ۱۷ باشد.

مربع: ۱۷؛ دایره: ۱۷ یا ۱۸

چون داده‌ها مرتب‌اند، داده‌ی هشتم (دایره) باید بزرگ‌تر یا مساوی ۱۷ و کوچک‌تر یا مساوی ۱۸ باشد و چون تعداد شرکت‌کنندگان عدد صحیح است، فقط ۱۷ یا ۱۸ می‌تواند باشد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵۶ صفحه ۱۳۷ مسئله

۱) مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها نباشد و مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها باشد.

۲) اگر همه‌ی داده‌ها ۲ برابر شوند، میانه چه تغییری می‌کند؟

۳) در جلسه‌های تمرین پرتاب نیزه، دو ورزشکار پرتاب‌های مختلفی انجام داده‌اند. مسافت پرتاب‌شده توسط آن‌ها بر حسب متر به صورت زیر است: ورزشکار اول: ۷۰، ۶۵، ۶۰، ۷۲، ۶۳، ۷۱، ۶۶، ۶۹، ۵۸، ۶۶، ۵۵، ۷۰
ورزشکار دوم: ۷۵، ۶۰، ۷۰، ۷۲، ۶۵، ۷۱، ۶۵، ۶۸، ۵۸، ۵۹، ۶۸، ۷۰ میانه‌ی پرتاب دو ورزشکار را با هم مقایسه کنید. توضیح دهید در این مسئله، میانه چه چیزی را نشان می‌دهد. عملکرد کدام یک را بهتر ارزیابی می‌کنید؟

۱) میانه در بین داده‌ها نیست: داده‌های 2, 4, 7, 9 (تعداد زوج)، میانه (4+7)/2 = 5.5 است که جزو داده‌ها نیست. میانه در بین داده‌ها است: داده‌های 1, 3, 5, 8, 9 (تعداد فرد)، میانه 5 است.

۲) میانه نیز ۲ برابر می‌شود. (برای مثال، داده‌های 1, 3, 5 میانه‌ی ۳ دارند و داده‌های 2, 6, 10 میانه‌ی ۶؛ ترتیب داده‌ها عوض نمی‌شود و داده‌ی وسط ۲ برابر می‌شود.)

۳) مرتب‌شده‌ی داده‌ها:

ورزشکار اول: 55, 58, 60, 63, 65, 66, 66, 69, 70, 70, 71, 72

ورزشکار دوم: 58, 59, 60, 65, 65, 68, 68, 70, 70, 71, 72, 75

هر دو ۱۲ داده دارند؛ میانه‌ی اول (66+66)/2 = 66 و میانه‌ی دوم (68+68)/2 = 68 است.

میانه‌ی ورزشکار دوم (۶۸ متر) بیشتر از میانه‌ی ورزشکار اول (۶۶ متر) است.

میانه نشان می‌دهد که نیمی از پرتاب‌های هر ورزشکار بیشتر یا مساوی این مقدار و نیم دیگر کمتر یا مساوی آن است؛ یعنی مسافت «معمولی» پرتاب او را نشان می‌دهد. بنابراین عملکرد ورزشکار دوم بهتر ارزیابی می‌شود. (میانگین‌ها نیز ۶۵٫۴ و ۶۶٫۸ هستند.)

۱۵۷ صفحه ۱۳۷ مسئله

۴) داده‌های ۳، ۵، ۸ را در نظر بگیرید: الف) میانگین و میانه‌ی این داده‌ها را حساب کنید.
ب) در داده‌ها به جای عدد ۸، عدد ۹۰ را بنویسید و مجدداً میانگین و میانه را حساب کنید.
با توجه به تغییرات انجام‌شده در قسمت «ب»، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. پ) با تغییر یکی از داده‌ها (میانه / میانگین) همواره تغییر می‌یابد.
ت) میانه به کوچکی و بزرگی داده‌های قبل و بعد از خود بستگی (دارد / ندارد).

الف) میانگین (3+5+8)/3 = 16/3 ~ 5.33 و میانه 5 است.

ب) داده‌ها 3, 5, 90: میانگین (3+5+90)/3 = 98/3 ~ 32.67 و میانه هنوز 5 است.

پ) با تغییر یکی از داده‌ها، **میانگین** همواره تغییر می‌یابد.

ت) میانه به کوچکی و بزرگی داده‌های قبل و بعد از خود بستگی **ندارد**؛ فقط جایگاه (وسط بودن) داده مهم است.

۱۵۸ صفحه ۱۳۷ مسئله

۵) میانه‌ی نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۲۵ نفری، برابر ۱۷ است. میانه چه اطلاعاتی درباره‌ی نمره‌های کلاس به شما می‌دهد؟

۶) میانه‌ی نمرات ریاضی در دو کلاس، ۱۷ و ۱۲ است. وضعیت نمرات دو کلاس را توصیف کنید.

۷) میانگین ۵ داده برابر با ۱۷ و میانه‌ی آن‌ها ۱۴ است. ۵ عدد مثال بزنید که این شرایط را داشته باشند. این مسئله چند جواب می‌تواند داشته باشد؟

۵) چون تعداد نمرات (۲۵) فرد است، میانه نمره‌ی سیزدهم است. یعنی ۱۲ نفر نمره‌ی کمتر یا مساوی ۱۷ و ۱۲ نفر نمره‌ی بیشتر یا مساوی ۱۷ دارند؛ نیمی از دانش‌آموزان نمره‌ی بالاتر از ۱۷ و نیمی پایین‌تر از ۱۷ دارند.

۶) نیمی از دانش‌آموزان کلاس اول نمره‌ی ۱۷ یا بیشتر دارند، در حالی که این برای کلاس دوم ۱۲ است؛ پس به‌طور کلی وضعیت نمرات کلاس اول (که میانه‌ی بالاتری دارد) بهتر از کلاس دوم است.

۷) مجموع ۵ داده باید 85 = 17 x 5 باشد و داده‌ی وسط (سوم) پس از مرتب کردن ۱۴ باشد. مثلاً:

10, 12, 14, 20, 29

که میانه‌ی آن ۱۴ و مجموع آن 85 = 29+20+14+12+10 و میانگین آن ۱۷ است. مثال دیگر: 1, 13, 14, 25, 32 یا 14, 14, 14, 20, 23.

این مسئله بی‌شمار جواب دارد.

زیرا کافی است دو عدد کوچک‌تر یا مساوی ۱۴ و دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۱۴ انتخاب شوند که مجموع کل ۸۵ شود.

۱۵۹ صفحه ۱۳۹ فعالیت

نمره‌های مرتب‌شده‌ی درس ریاضی کلاس «کوشش» به صورت زیر است: ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۵، ۱۵، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۹، ۱۹، ۲۰، ۲۰

۱) میانه‌ی نمره‌ها را با نقطه‌ای به نام M روی خط‌چین (محور ۶ تا ۲۰) مشخص کنید.

۲) برای اعداد قبل از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خط‌چین با نقطه‌ی C مشخص کنید. همچنین برای اعداد بعد از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را با نقطه‌ی D مشخص کنید.

۳) کمترین نمره را با نقطه‌ی A و بیشترین نمره را با نقطه‌ی B روی خط‌چین مشخص کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴) مستطیلی رسم کنید که نقاط C و D روی عرض‌های این مستطیل (جعبه) قرار گیرند. پاره‌خطی از A به C و پاره‌خطی از B به D وصل کنید. درصد تعداد نمرات دانش‌آموزان در هر بازه را پیدا کرده و جدول را کامل کنید.

۱) تعداد نمره‌ها ۱۶ است؛ میانه میانگین نمره‌های هشتم و نهم، یعنی 15 و 17 است:

$$M = (15 + 17)/2 = 16$$

۲) نمره‌های قبل از میانه: 10, 10, 10, 10, 12, 12, 15, 15 (۸ نمره)؛ میانه‌ی آن‌ها میانگین نمره‌ی چهارم و پنجم است:

$$C = (10 + 12)/2 = 11$$

نمره‌های بعد از میانه: 17, 17, 17, 17, 19, 19, 20, 20؛ میانه‌ی آن‌ها:

$$D = (17 + 19)/2 = 18$$

۳) کمترین نمره A = 10 و بیشترین نمره B = 20 است. روی خط‌چین به ترتیب از چپ به راست نقاط A=10، C=11، M=16، D=18 و B=20 قرار می‌گیرند.

۴) جعبه از ۱۱ تا ۱۸ رسم می‌شود و داخل آن در ۱۶ خطی عمودی (میانه) قرار می‌گیرد. دنباله‌ی چپ از ۱۰ تا ۱۱ و دنباله‌ی راست از ۱۸ تا ۲۰ است. با توجه به آن‌که هر چارک ۴ نمره از ۱۶ نمره را جدا می‌کند، جدول به صورت زیر است:

جدول کامل‌شده

بازه‌ی نمرات	C قبل از	D و C بین	D قبل از	D بعد از
درصد تعداد نمرات هنرجویان	۲۵٪	۵۰٪	۷۵٪	۲۵٪

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶۰ صفحه ۱۴۲ کار در کلاس

۱) میزان بارندگی (بر حسب میلی‌متر) در یک شهر طی ۱۵ روز به صورت زیر گزارش شده است: ۲، ۰، ۵، ۱، ۹، ۰، ۱۲، ۱۵، ۲۵، ۵، ۰، ۸، ۲، ۳، ۱۶ الف) چارک اول، میانه و چارک سوم چه اعدادی هستند؟ ب) تقریباً چند درصد داده‌ها بین Q1 و Q3 قرار دارند؟ پ) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم و آن را تفسیر کنید.

۲) نمودار جعبه‌ای مدت بستری شدن (بر حسب روز) تعدادی بیمار پس از حمله‌ی قلبی در یک بیمارستان (اعداد روی نمودار: ۶، ۷، ۸، ۱۲، ۱۸) رسم شده است. الف) میانه‌ی داده‌ها چند است؟ ب) چارک اول چند است؟ چند درصد داده‌ها قبل از آن و چند درصد بعد از آن قرار دارند؟ پ) مقدار Q3 چند است؟ این عدد نشان‌دهنده‌ی چیست؟ ت) چند درصد داده‌ها درون جعبه قرار دارند؟ ث) بلندتر بودن دنباله‌ی سمت راست جعبه نشان‌دهنده‌ی چیست؟

۳) نمودار جعبه‌ای فهرست نمرات کلاس‌های «تلاش» و «کوشش» (در ابتدای این بخش) را رسم کنید. سپس با مقایسه‌ی این نمودارها، به نظر شما کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ چرا؟

۱ الف) داده‌های مرتب‌شده: 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 8, 9, 12, 15, 16, 25. تعداد داده‌ها ۱۵ است و میانه هشتمین داده است:

M = 5؛ نیمه‌ی پایین (۷ داده‌ی اول): 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3 و میانه‌ی آن Q1 = 1؛ نیمه‌ی بالا: 5, 8, 9, 12, 15, 16, 25 و میانه‌ی آن Q3 = 12.

Q1 = 1، M = 5، Q3 = 12

ب) تقریباً ۵۰ درصد.

پ) نمودار با پنج عدد 0, 1, 5, 12, 25 رسم می‌شود: جعبه از ۱ تا ۱۲ و خط میانه در ۵؛ دنباله‌ی چپ از ۰ تا ۱ و دنباله‌ی راست از ۱۲ تا ۲۵. تفسیر: دامنه‌ی تغییرات ۲۵ است. میانه نزدیک چارک اول است؛ یعنی داده‌ها بین ۱ و ۵ متمرکزتر از بین ۵ و ۱۲ هستند. دنباله‌ی راست بلندتر است؛ پس در ۲۵ درصد روزهای پرباران پراکندگی بارندگی زیاد است. در نیمی از روزها بارندگی حداکثر ۵ میلی‌متر و در ۲۵ درصد روزها حداقل ۱۲ میلی‌متر بوده است.

۲ الف) میانه‌ی داده‌ها M = 8 روز است.

ب) چارک اول Q1 = 7 است؛ تقریباً ۲۵ درصد داده‌ها قبل از آن و تقریباً ۷۵ درصد بعد از آن قرار دارند.

پ) Q3 = 12 است؛ نشان می‌دهد که تقریباً ۷۵ درصد بیماران حداکثر ۱۲ روز و تقریباً ۲۵ درصد آن‌ها بیش از ۱۲ روز بستری بوده‌اند.

ت) تقریباً ۵۰ درصد داده‌ها.

ث) نشان می‌دهد که پراکندگی ۲۵ درصد بالایی داده‌ها (مدت‌های بستری طولانی، از ۱۲ تا ۱۸ روز) بیشتر از پراکندگی بقیه‌ی داده‌ها است؛ یعنی تعداد کمی از بیماران خیلی مدت‌های بیشتری بستری بوده‌اند.

۳) مقادیر پنج‌عددی:

خلاصه‌ی پنج‌عددی دو کلاس

کلاس	کمترین	Q1	M	Q3	بیشترین
تلاش	۹	۱۴	۱۴٫۵	۱۸٫۵	۱۹٫۵
کوشش	۱۰	۱۱	۱۶	۱۸	۲۰

جعبه‌ی کلاس «تلاش» از ۱۴ تا ۱۸٫۵ (طول ۴٫۵) و جعبه‌ی کلاس «کوشش» از ۱۱ تا ۱۸ (طول ۷) است. در کلاس «تلاش»، چارک اول (۱۴) از چارک اول «کوشش» (۱۱) بیشتر است؛ یعنی ۷۵ درصد هنرجویان «تلاش» حداقل ۱۴ گرفته‌اند، اما فقط ۷۵ درصد «کوشش» حداقل ۱۱. در عوض میانه‌ی «کوشش» (۱۶) از میانه‌ی «تلاش» (۱۴٫۵) بالاتر است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

کلاس «تلاش» عملکرد پایدارتر و بهتر دارد.

زیرا پراکندگی نمرات آن کمتر و نمرات ضعیف‌ترین هنرجویان بالاتر است (جعبه‌ی کوتاه‌تر و Q1 بزرگ‌تر)؛ ولی اگر تمرکز بر نیمه‌ی بالاتر باشد، کلاس «کوشش» با میانه‌ی بیشتر قوی‌تر دیده می‌شود. هر دو پاسخ با دلیل پذیرفته است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۱ صفحه ۱۴۳ مسئله

۱) نمودار جعبه‌ای نمره‌های زبان انگلیسی در یک کلاس به صورت زیر است (محور ۴۰ تا ۱۰۰): الف) میانه برابر چه عددی است؟ ب) فاصله‌ی بین Q1 و Q3 چقدر است؟ پ) چند درصد از نمره‌ها قبل از Q3 قرار دارند؟

الف و ب) مقدارها را باید از روی جعبه‌ی نمودار خواند: میانه همان خط داخل جعبه، و فاصله‌ی Q1 تا Q3 برابر Q3 − Q1 (طول جعبه) است. با خواندن تقریبی نمودار: میانه حدود ۷۰ و طول جعبه حدود ۲۰ (مثلاً Q1 = 60 و Q3 = 80).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

پ) تقریباً ۷۵ درصد نمره‌ها قبل از Q3 قرار دارند (۲۵٪ بین کمترین نمره و Q1، ۲۵٪ بین Q1 و میانه و ۲۵٪ بین میانه و Q3).

۱۶۲ صفحه ۱۴۳ مسئله

۲) نمودارهای جعبه‌ای زیر عملکرد دو کلاس را در درس عربی نشان می‌دهد (محور ۰ تا ۲۰). الف) در کدام کلاس نمره‌ی دانش‌آموزان پراکندگی کمتری دارد؟ ب) نیمی از دانش‌آموزان کلاس ۱، نمره‌شان بیشتر از چند است؟ پ) کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ چرا؟ ت) آیا می‌توان گفت ۷۵ درصد دانش‌آموزان کلاس ۱ از همه‌ی دانش‌آموزان کلاس ۲ بهتر عمل کرده‌اند؟

بر اساس خواندن تقریبی دو نمودار (کلاس ۱ با جعبه‌ای بالاتر و بلندتر؛ کلاس ۲ با جعبه‌ای پایین‌تر و کوتاه‌تر):

الف) کلاسی که جعبه و دنباله‌های کوتاه‌تری دارد، پراکندگی کمتری دارد؛ یعنی کلاس ۲.

ب) نیمی از دانش‌آموزان کلاس ۱ نمره‌ای بیشتر از میانه‌ی آن کلاس (حدود ۱۵) دارند.

پ) کلاس ۱؛ زیرا میانه و چارک‌های آن بالاتر است و دانش‌آموزان بیشتری نمره‌های بالا دارند.

ت) این ادعا وقتی درست است که چارک اول کلاس ۱ (که ۷۵ درصد نمره‌های کلاس ۱ بزرگ‌تر یا مساوی آن‌اند) از بیشترین نمره‌ی کلاس ۲ (انتهای دنباله‌ی بالایی آن) بزرگ‌تر یا مساوی باشد. با توجه به دو نمودار، چنین چیزی دیده نمی‌شود (دنباله‌ی بالایی کلاس ۲ با جعبه‌ی کلاس ۱ هم‌پوشانی دارد)؛ پس نمی‌توان چنین گفت و فقط می‌توان گفت نیمی از کلاس ۱ از نیمی از کلاس ۲ بهتر عمل کرده‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۳ صفحه ۱۴۳ مسئله

۳) در یک تیم والیبال، کوتاه‌ترین قد ۱۶۸ و بلندترین قد ۲۰۳ سانتی‌متر و میانه برابر ۱۸۴ سانتی‌متر است. اگر فاصله‌ی بین Q3 و Q1 برابر ۱۱ باشد، آیا می‌توان نمودار جعبه‌ای قد افراد این تیم را رسم کرد؟

خیر، به‌طور یکتا نمی‌توان؛ زیرا برای رسم نمودار جعبه‌ای پنج عدد لازم است: کمترین، Q1، میانه، Q3 و بیشترین. ما سه عدد (168، 184، 203) و فقط تفاضل Q3 − Q1 = 11 را داریم، ولی خود Q1 و Q3 را نمی‌دانیم؛ جعبه می‌تواند در مکان‌های مختلفی با طول ۱۱ قرار گیرد (به شرط آن‌که شامل ۱۸۴ باشد؛ مثلاً از ۱۷۹ تا ۱۹۰ یا از ۱۸۲ تا ۱۹۳).

نمودار جعبه‌ای یکتا نداریم؛ فقط یک نمودار ممکن (مثلاً Q1 = 179، Q3 = 190) را می‌توان رسم کرد.

۱۶۴ صفحه ۱۴۳ مسئله

۴) غلظت قند خون ۱۲ نفر (بر حسب mM) ۳۰ دقیقه پس از مصرف غذا اندازه‌گیری شده است: ۳٫۸، ۴٫۲، ۳٫۷، ۵٫۱، ۴٫۶، ۳٫۹، ۳٫۸، ۴٫۷، ۴، ۵٫۲، ۴، ۳٫۹. الف) میانه و چارک‌های اول و سوم را پیدا کنید.
ب) اگر غلظت قند خون شما، ۳۰ دقیقه پس از مصرف غذا ۴٫۱ باشد، وضعیت خود را نسبت به این افراد توصیف کنید.

الف) داده‌های مرتب‌شده: 3.7, 3.8, 3.8, 3.9, 3.9, 4.0, 4.0, 4.2, 4.6, 4.7, 5.1, 5.2. تعداد ۱۲ است؛ میانه میانگین ششمین و هفتمین داده است:

M = (4.0 + 4.0)/2 = 4.0؛ نیمه‌ی پایین ۶ داده است و Q1 = (3.8 + 3.9)/2 = 3.85؛ نیمه‌ی بالا: Q3 = (4.6 + 4.7)/2 = 4.65.

Q1 = 3.85، M = 4.0، Q3 = 4.65

ب) غلظت ۴٫۱ کمی بیشتر از میانه (۴٫۰) و کمتر از Q3 (۴٫۶۵) است؛ یعنی حدود ۵۰ تا ۶۰ درصد افراد غلظت کمتر یا مساوی من دارند و وضعیت من نزدیک میانه و عادی است.

۱۶۵ صفحه ۱۴۴ مسئله

۵) سجاد در رشته‌ی کشاورزی تحصیل می‌کرد. او تنوع تعداد نخودهای موجود در غلاف‌ها را بررسی کرد. تعداد نخودهای موجود در ۱۷ غلاف به شرح زیر است: ۴، ۵، ۸، ۱۲، ۱۰، ۴، ۳، ۱۱، ۵، ۶، ۵، ۹، ۸، ۷، ۱۰، ۹، ۷. نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم و تفسیر کنید.

داده‌های مرتب‌شده: 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12. تعداد ۱۷ است؛ میانه نهمین داده است.

M = 7؛ نیمه‌ی پایین (3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7): Q1 = (5+5)/2 = 5؛ نیمه‌ی بالا (8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12): Q3 = (9+10)/2 = 9.5.

کمترین ۳، Q1 = 5، M = 7، Q3 = 9.5، بیشترین ۱۲

نمودار: روی محور ۳ تا ۱۲، جعبه‌ای از ۵ تا ۹٫۵ با خط میانه در ۷؛ دنباله‌ی چپ از ۳ تا ۵ و دنباله‌ی راست از ۹٫۵ تا ۱۲.

تفسیر: دامنه‌ی تغییرات ۹ است. تعداد نخود در نیمی از غلاف‌ها حداکثر ۷ است. ۵۰ درصد غلاف‌ها بین ۵ تا ۹٫۵ نخود دارند. میانه بیشتر به Q1 نزدیک است (فاصله‌ی ۲ با Q1 و ۲٫۵ با Q3)، یعنی پراکندگی بین Q1 و میانه کمی کمتر است. طول دنباله‌ی چپ (۲) و راست (۲٫۵) نزدیک‌اند؛ پس توزیع تقریباً متقارن است و داده‌ی پرت وجود ندارد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir