با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی (۱) پایه دهم

پاسخ فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب

پایه دهم · دوره دوم متوسطه · ریاضی و فیزیک ـ علوم تجربی

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای در کلاس و تمرین‌های همه‌ی فصل‌های کتاب

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۱ فصل اول — مجموعه، الگو و دنباله ۴

۲ فصل دوم — مثلثات ۴۲

۳ فصل سوم — توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ۶۲

۴ فصل چهارم — معادله‌ها و نامعادله‌ها ۸۸

۵ فصل پنجم — تابع ۱۱۶

۶ فصل ششم — شمارش، بدون شمردن ۱۵۲

۷ فصل هفتم — آمار و احتمال ۱۷۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی (۱) دهم - فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

فهرست

۱ صفحه ۲ · کار در کلاس — مجموعه‌های اعداد و محور اعداد حقیقی ۶

۲ صفحه ۳ · فعالیت — بازه‌ها ۷

۳ صفحه ۳ · فعالیت — جدول انواع بازه‌ها ۷

۴ صفحه ۳ · فعالیت — جای اعداد گنگ روی محور ۷

۵ صفحه ۴ · فعالیت — بازه‌های بی‌پایان ۸

۶ صفحه ۴ · فعالیت — جدول بازه‌های بی‌پایان ۹

۷ صفحه ۴ · مثال — اجتماع و اشتراک بازه‌ها ۹

۸ صفحه ۵ · کار در کلاس — درستی یا نادرستی (عضویت و زیرمجموعه) ۹

۹ صفحه ۵ · کار در کلاس — وصل کردن اعداد به بازه‌ها ۱۰

۱۰ صفحه ۵ · کار در کلاس — عملیات روی بازه‌ها ۱۱

۱۱ صفحه ۵ · فعالیت — مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۱۱

۱۲ صفحه ۶ · کار در کلاس — متناهی یا نامتناهی؟ ۱۲

۱۳ صفحه ۶ · کار در کلاس — دو مجموعهٔ متناهی ۱۲

۱۴ صفحه ۶ · کار در کلاس — دو مجموعهٔ نامتناهی با رابطهٔ زیرمجموعه ۱۳

۱۵ صفحه ۶ · کار در کلاس — تفاضل تک‌عضوی دو مجموعهٔ نامتناهی ۱۳

۱۶ صفحه ۶ · فکر کنید — درخت‌های جنگل آمازون ۱۳

۱۷ صفحه ۷ · فکر کنید — عدد آووگادرو ۱۳

۱۸ صفحه ۷ · فعالیت — اعداد گویا در بازهٔ (۰, ۱) ۱۴

۱۹ صفحه ۷ · تمرین — مضرب‌های طبیعی عدد ۵ ۱۴

۲۰ صفحه ۷ · تمرین — تشخیص متناهی و نامتناهی ۱۵

۲۱ صفحه ۷ · تمرین — اشتراک متناهی دو مجموعهٔ نامتناهی ۱۵

۲۲ صفحه ۷ · تمرین — اجتماع و اشتراک بازه‌ها روی محور ۱۵

۲۳ صفحه ۷ · تمرین — R منهای یک نقطه ۱۶

۲۴ صفحه ۷ · تمرین — زیرمجموعهٔ مجموعهٔ متناهی ۱۶

۲۵ صفحه ۸ · فعالیت — متمم یک مجموعه ۱۶

۲۶ صفحه ۹ · کار در کلاس — متمم؛ استان‌های غیرساحلی ۱۷

۲۷ صفحه ۹ · کار در کلاس — متمم؛ پلاک اتومبیل ۱۷

۲۸ صفحه ۹ · کار در کلاس — وصل کردن مجموعه به متمم (مرجع N) ۱۷

۲۹ صفحه ۹ · کار در کلاس — ویژگی‌های متمم ۱۸

۳۰ صفحه ۹ · کار در کلاس — متمم N در Z و در R ۱۸

۳۱ صفحه ۹ · کار در کلاس — قوانین دمورگان (جدول) ۱۸

۳۲ صفحه ۱۰ · کار در کلاس — متمم و رابطهٔ زیرمجموعه بودن ۱۹

۳۳ صفحه ۱۰ · فعالیت — تعداد اعضای اجتماع دو مجموعهٔ مجزا ۱۹

۳۴ صفحه ۱۱ · فعالیت — فرمول $n(A \cup B)$ ۲۰

۳۵ صفحه ۱۱ · کار در کلاس — جشنوارهٔ فیلم کوتاه ۲۱
۳۶ صفحه ۱۲ · کار در کلاس — تیم فوتبال و بسکتبال ۲۱
۳۷ صفحه ۱۲ · تمرین — متمم بازه‌ها ۲۲
۳۸ صفحه ۱۲ · تمرین — متمم در N ۲۲
۳۹ صفحه ۱۳ · تمرین — محاسبهٔ n(B) ۲۲
۴۰ صفحه ۱۳ · تمرین — زیرمجموعه‌های U با n(U) = ۱۰۰ ۲۲
۴۱ صفحه ۱۳ · تمرین — گروه سرود و تئاتر ۲۳
۴۲ صفحه ۱۳ · تمرین — نظرسنجی از مشتریان فروشگاه ۲۳
۴۳ صفحه ۱۴ · مثال — الگوی چوب‌کبریت و نمادگذاری اندیس‌دار ۲۳
۴۴ صفحه ۱۵ · فعالیت — جملهٔ عمومی الگوی چوب‌کبریت ۲۴
۴۵ صفحه ۱۷ · کار در کلاس — الگوی مربع‌های رنگی ۲۵
۴۶ صفحه ۱۷ · فعالیت — الگوی غیرخطی نقطه‌ها (۱ و ۲) ۲۵
۴۷ صفحه ۱۸ · فعالیت — الگوی غیرخطی نقطه‌ها (۳ تا ۶) ۲۶
۴۸ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — مثال‌هایی از دنباله ۲۶
۴۹ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — یافتن جمله‌ها از جملهٔ عمومی ۲۷
۵۰ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — سه جملهٔ بعدی و حدس جملهٔ عمومی ۲۷
۵۱ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — الگوی مربع‌ها؛ دنبالهٔ اعداد مثلثی ۲۸
۵۲ صفحه ۲۰ · تمرین — الگوی کاشی سفید و تیره ۲۹
۵۳ صفحه ۲۰ · تمرین — الگوی نقطه‌ها (۱، ۶، ۱۵، ...) ۲۹
۵۴ صفحه ۲۰ · تمرین — نظیر کردن الگوی هندسی به جملهٔ عمومی ۳۰
۵۵ صفحه ۲۰ · تمرین — جملهٔ عمومی دنباله‌های درجه ۲ ۳۰
۵۶ صفحه ۲۱ · فعالیت — سال‌های برگزاری المپیک ۳۱
۵۷ صفحه ۲۲ · کار در کلاس — جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی ۳۱
۵۸ صفحه ۲۲ · کار در کلاس — مقایسهٔ تعرفهٔ دو سیم‌کارت ۳۲
۵۹ صفحه ۲۳ · مثال — جملهٔ شانزدهم دنبالهٔ حسابی ۳۳
۶۰ صفحه ۲۳ · کار در کلاس — مثال زدن دنبالهٔ حسابی ۳۳
۶۱ صفحه ۲۳ · کار در کلاس — واسطه‌های حسابی ۳۳
۶۲ صفحه ۲۴ · تمرین — تشخیص دنبالهٔ حسابی و جملهٔ بیست‌ویکم ۳۴
۶۳ صفحه ۲۴ · تمرین — تعیین دنبالهٔ حسابی از دو جمله ۳۴
۶۴ صفحه ۲۴ · تمرین — سه جملهٔ بعدی با مجموع معلوم ۳۵
۶۵ صفحه ۲۴ · تمرین — الگوی ۱, ۵, ۹ ۳۵
۶۶ صفحه ۲۴ · تمرین — واسطهٔ حسابی ۳۵
۶۷ صفحه ۲۴ · تمرین — مسئلهٔ پاپیروس رایند ۳۶
۶۸ صفحه ۲۵ · فعالیت — انتشار ویروس آنفلوانزا ۳۶
۶۹ صفحه ۲۵ · فعالیت — جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی ۳۷
۷۰ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — روش نرگس و نگار ۳۷
۷۱ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی ۳۷
۷۲ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — واسطهٔ هندسی ۳۸
۷۳ صفحه ۲۷ · تمرین — تشخیص دنبالهٔ هندسی ۳۸
۷۴ صفحه ۲۷ · تمرین — ساختن دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت ۵/۴ ۳۹
۷۵ صفحه ۲۷ · تمرین — درست یا نادرست دربارهٔ دنباله‌ها ۳۹
۷۶ صفحه ۲۷ · تمرین — قیمت دوچرخه ۳۹
۷۷ صفحه ۲۷ · تمرین — حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول ۴۰
۷۸ صفحه ۲۷ · تمرین — تعیین دنبالهٔ هندسی از دو جمله ۴۰
۷۹ صفحه ۲۷ · تمرین — آمار تلفات جاده‌ای ۴۰

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱ صفحه ۲ کار در کلاس

۱ الف) مجموعهٔ Q − R چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیهٔ هاشورخورده بنویسید.

ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آن‌ها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید. ۲۰۰ ، ۰ ، ۱۷/۲۳− ، ۲۵√− ، π ، ... (فهرست اعداد کتاب)

ت) مجموعهٔ اعداد صحیح غیرحسابی را با نمایش اعضا بنویسید. Z − W = { ... }

ث) مجموعهٔ W − N چند عضو دارد؟

در شکل کتاب، مجموعه‌ها به‌صورت تودرتو کشیده شده‌اند: N درون W، W درون Z، Z درون Q و Q درون R.

الف) مجموعهٔ R − Q (اعداد حقیقی که گویا نیستند) «مجموعهٔ اعداد گنگ» نام دارد و آن را با Q′ نشان می‌دهند؛ ناحیهٔ بیرون از Q و درون R هاشور زده می‌شود. دو عضو دلخواه: و π.

ب) مثلاً و (یا ۲/۵ و ۰/۷۵−)؛ این‌ها گویا هستند ولی صحیح نیستند، پس باید در ناحیهٔ داخل Q و بیرون Z نوشته شوند.

پ) جای هر عدد:

- π ← عددی گنگ است؛ در ناحیهٔ Q′ (درون R و بیرون Q).
- ۲۵√− = ۵− ← عدد صحیح منفی است؛ در ناحیهٔ Z بیرون W.
- ۱۷/۲۳− ← گویای غیرصحیح؛ در ناحیهٔ Q بیرون Z.
- ۰ ← عدد حسابی است؛ در ناحیهٔ W بیرون N.
- ۲۰۰ ← عدد طبیعی؛ در ناحیهٔ N.
- برای هر عدد دیگر فهرست کتاب همین قاعده را به‌کار ببرید: طبیعی ← N؛ ۰ ← W؛ صحیح منفی ← Z؛ کسر یا اعشاری مختوم/متناوب ← Q؛ رادیکال‌های غیرکامل و π ← Q′.

ت) Z − W = {..., −3, −2, −1} (صحیح‌های منفی).

ث) W − N = {0} ← فقط یک عضو دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲ صفحه ۳ فعالیت

فرض کنید A مجموعهٔ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۲- و ۱ به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی $A = \{x \in R \mid -2 \le x \le 1\}$. اعضای A را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای A را فهرست کرد؟ آیا می‌توان اولین عدد حقیقی بعد از ۲- را مشخص کرد؟

پاره‌خط بین ۲- و ۱ را (با دو سر آن) پررنگ می‌کنیم؛ همهٔ اعداد حقیقی این پاره‌خط عضو A هستند.

خیر، نمی‌توان اعضای A را فهرست کرد؛ زیرا بین هر دو عدد حقیقی، بی‌شمار عدد حقیقی دیگر وجود دارد و A نامتناهی است.

خیر، «اولین عدد حقیقی بعد از ۲-» وجود ندارد: اگر عددی مثل c را بعد از ۲- در نظر بگیریم، میانگین ۲- و c یعنی عددی است که از c کوچک‌تر و از ۲- بزرگ‌تر است.

۳ صفحه ۳ فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به‌طوری که $a < b$، آنگاه جدول زیر را کامل کنید: نوع بازه | نمایش مجموعه‌ای | نمایش بازه‌ای | نمایش هندسی (بازهٔ باز، بسته، نیم‌باز، نیم‌باز، $\{x \in R \mid 1 < x \le 5\}$).

نوع بازه	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نمایش هندسی
باز	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	(a, b)	a و b هر دو شامل نیستند؛ دو دایرهٔ توخالی در دو سر پاره‌خط
بسته	$\{x \in R \mid a \le x \le b\}$	$[a, b]$	هر دو سر شامل‌اند؛ دو دایرهٔ توپر
نیم‌باز	$\{x \in R \mid a < x \le b\}$	$(a, b]$	a توخالی، b توپر
نیم‌باز	$\{x \in R \mid a \le x < b\}$	$[a, b)$	a توپر، b توخالی
نیم‌باز	$\{x \in R \mid 1 < x \le 5\}$	$(1, 5]$	۱ توخالی، ۵ توپر

در نمایش هندسی، سر «شامل» با دایرهٔ توپر و سر «غیرشامل» با دایرهٔ توخالی نشان داده می‌شود. مثلاً بازهٔ آخر:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴ صفحه ۳ فعالیت

۲ هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص‌شده روی محور بنویسید. کدام‌یک از این شش عدد گنگ‌اند؟ زیر آن‌ها خط بکشید. ۲/۴۵ ، ۷/۲- ، ۶√ ، ۴/۹- ، ۲√- ، π

ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

عدد	مقدار تقریبی	گویا یا گنگ
۴/۹-	۴/۹-	گویا
۷/۲-	۳/۵-	گویا
	۱/۴۱۴- ≈	**گنگ**
	۲/۴۴۹ ≈	**گنگ**
۲/۴۵	۲/۴۵	گویا
π	۳/۱۴۲ ≈	**گنگ**

ترتیب روی محور: $-4.9 < -3.5 < -\sqrt{2} < \sqrt{6} < 2.45 < \pi$. توجه کنید که $\sqrt{۶} \approx ۲/۴۴۹$ کمی از ۲/۴۵ کوچک‌تر است.

اعداد گنگ: π، و (رادیکال عددهایی که مربع کامل نیستند و π). بقیه کسر یا اعشاری مختومند و گویا هستند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵ صفحه ۴ **فعالیت**

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به‌عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x > ۲$ به‌صورت $C = \{x \in R \mid x > ۲\}$ است. اعضای C را روی محور زیر نشان دهید. آیا می‌توانید C را به‌صورت یک بازه بنویسید؟

از ۲ (با دایرهٔ توخالی) به سمت راست تا بی‌نهایت پررنگ می‌کنیم. بله، $C = (2, +\infty)$ یک بازهٔ باز است؛ $+\infty$ عدد حقیقی نیست، پس همیشه کنار آن پرانتز می‌گذاریم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶ صفحه ۴ فعالیت

اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید. (نوع بازه | نمایش مجموعه‌ای | نمایش بازه‌ای | نمایش هندسی؛ ردیف‌ها: $x > ۵$ ، R ، $(-\infty, a]$ ، $[a, +\infty)$ ، $x < a$)

نمایش مجموعه‌ای	نمایش بازه‌ای	نوع بازه	نمایش هندسی
$\{x \in R \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز	از a به سمت چپ، a توخالی
$\{x \in R \mid x \le a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز	از a به سمت چپ، a توپر
$\{x \in R \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	باز	از a به سمت راست، a توخالی
$\{x \in R \mid x \ge a\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز	از a به سمت راست، a توپر
R	$(-\infty, +\infty)$	باز	کل محور
$\{x \in R \mid x > 5\}$	$(5, +\infty)$	باز	از ۵ به سمت راست، ۵ توخالی

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷ صفحه ۴ مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازهٔ $A = (-1, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ را به‌دست آوریم ... توضیح دهید که چرا $2 \notin A \cap B$.

از روی شکل: $A \cup B = (-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$ و $A \cap B = (2, 4]$.

چرا $2 \notin A \cap B$؟ چون ۲ عضو A هست ولی عضو B نیست (B شامل اعداد **بزرگ‌تر از ۲** است و سر ۲ در آن توخالی است). عضو اشتراک باید عضو هر دو مجموعه باشد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸ صفحه ۵ کار در کلاس

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $۴/۳ \in [۱/۲ , ۲)$ ب) $-۲ \in [-۲, ۰)$ پ) $۰ \in [-۲, ۰)$ ت) $-۲ \in \{-۲, ۰\}$ ث) $-۱ \in \{-۲, ۰\}$

ج) $[-1, 2] \supseteq (-1, 2)$ چ) $\{1, 0\} \supseteq [-1, 2)$ ح) $\varnothing \supseteq [-17, 0)$ خ) $(2, 5] = [2, 5)$ د) $\sqrt{2} \ni (1, 0)$

مورد	پاسخ	دلیل
الف	درست	$1/2 \geq 4/3 > 2$ $(1/33 \approx 4/3)$
ب	درست	۲- سر چپ بازه است و بازه از سمت چپ بسته است
پ	نادرست	۰ سر راست بازه است و بازه از راست باز است
ت	درست	۲- یکی از دو عضو مجموعهٔ $\{-2, 0\}$ است
ث	نادرست	۱- عضو $\{-2, 0\}$ نیست
ج	نادرست	۱- در $[-1, 2]$ هست ولی در $(-1, 2)$ نیست
چ	درست	۰ و ۱ هر دو بین ۱- و ۲ هستند
ح	درست	تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است
خ	نادرست	$2 \notin (2, 5]$ ولی $2 \ni [2, 5)$؛ ۵ هم برعکس
د	نادرست	$\sqrt{2} \approx 1/41$ و از ۱ بزرگ‌تر است

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹ صفحه ۵ کار در کلاس

۲ هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده‌شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید. اعداد: ۲-، ۳، ۵۰۰-، ۵-، ۴، ۶/۰۲۲×۱۰^۲۳، ۰/۲ بازه‌ها: $[1, 4]$، $(-\infty, -4)$، $[-2, 0)$، $[3, +\infty)$، $(-1/2, 1/2]$، $(-2, 3]$

بازه	اعداد عضو آن
$[1, 4]$	۳ و ۴
$(-\infty, -4)$	۵۰۰- و ۵-
$[-2, 0)$	۲-
$[3, +\infty)$	۳ و ۴ و ۶/۰۲۲×۱۰^۲۳
$(-1/2, 1/2]$	۰/۲
$(-2, 3]$	۳ و ۰/۲

پس هر عدد دست‌کم به یک بازه وصل می‌شود: ۳ و ۴ و ۰/۲ به بیش از یک بازه وصل می‌شوند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰ صفحه ۵ کار در کلاس

۳ نمایش هندسی دو بازهٔ A = (−۴, ۲] و B = (−۱, ۳] را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید. الف) A ∪ B ب) A ∩ B پ) A − B ت) B − A

- **الف)** A ∪ B = (−4, 3]
- **ب)** A ∩ B = (−1, 2]
- **پ)** A − B = (−4, −1] (اعضای A که در B نیستند؛ سر −۱ چون در B نیست، به A − B تعلق دارد)
- **ت)** B − A = (2, 3]

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱ صفحه ۵ فعالیت

فرض کنید A مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعهٔ اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آن‌ها مشخص کنید. A = { } ، B = { }

ب) A چند عضو دارد؟

پ) دربارهٔ تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟

الف) A = {1, 2, 3} و B = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}.

ب) A سه عضو دارد: n(A) = ۳.

پ) B از سمت چپ پایان ندارد؛ تعداد اعضای آن را نمی‌توان با هیچ عدد حسابی بیان کرد (از هر عددی که در نظر بگیریم بیشتر است). پس B مجموعه‌ای **نامتناهی** است و A متناهی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ صفحه ۶ کار در کلاس

۱ متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آن‌ها را بنویسید. (جدول: مجموعه | متناهی | نامتناهی | تعداد اعضا)

مجموعه	نوع	تعداد اعضا (متناهی)
اعداد اول یک‌رقمی	متناهی	۴ عضو: {۲, ۳, ۵, ۷}
انسان‌های روی زمین	متناهی	حدود ۸ میلیارد نفر
اعداد طبیعی فرد	نامتناهی	—
سلول‌های عصبی مغز یک انسان	متناهی	حدود ۸۶ میلیارد (از مرتبهٔ 10^{11})
تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	نامتناهی	—
دانش‌آموزان مدرسهٔ شما	متناهی	مثلاً حدود ۳۰۰ نفر (بسته به مدرسه)
اعداد طبیعی ده‌رقمی	متناهی	$9 \times 10^9 = 9000000000$ (از 10^9 تا ۹۹۹۹۹۹۹۹۹)
درخت‌های جنگل‌های آمازون	متناهی	حدود ۳۹۰ میلیارد اصله
کسرهای مثبت با صورت یک	نامتناهی	{۱/۱, ۱/۲, ۱/۳, ...} —
مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰	نامتناهی	—
بازهٔ (۰, ۱)	نامتناهی	—
مولکول‌های یک مول مشخص از آب	متناهی	حدود $6/022 \times 10^{23}$

برای مجموعه‌های متناهی عددهای تقریبی‌اند و ممکن است در منابع کمی متفاوت باشند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳ صفحه ۶ کار در کلاس

۲ دو مجموعهٔ متناهی نام ببرید.

مثلاً: مجموعهٔ روزهای هفته (۷ عضو) و مجموعهٔ استان‌های ایران (۳۱ عضو). همچنین {۱, ۲, ۳} و مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۴ صفحه ۶ کار در کلاس

۳ دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

مثلاً N (اعداد طبیعی) و Z (اعداد صحیح): هر دو نامتناهی‌اند و $N \subseteq Z$. یا مضرب‌های طبیعی عدد ۴ که زیرمجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۲ است.

۱۵ صفحه ۶ کار در کلاس

۴ دو مجموعهٔ نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک‌عضوی باشد.

اگر $B = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ و $A = \{2, 3, 4, \ldots\}$ (اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱)، آنگاه هر دو نامتناهی‌اند، $A \subseteq B$ و $B - A = \{1\}$ فقط یک عضو دارد.

نمونهٔ دیگر: $B = [0, 1)$ و $A = (0, 1)$ که $B - A = \{1\}$.

۱۶ صفحه ۶ فکر کنید

با این‌حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعهٔ متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟

تعداد درخت‌ها حدود ۳۹۰ میلیارد و جمعیت جهان حدود ۸ میلیارد نفر است؛ پس سهم هر نفر حدود درخت است.

با وجود این عدد بسیار بزرگ، تعداد درخت‌ها یک عدد (حسابی) معین است؛ پس این مجموعه **متناهی** است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷ صفحه ۷ فکر کنید

به نظر شما، مجموعهٔ مولکول‌های یک مول مشخص از آب، یک مجموعهٔ متناهی است یا نامتناهی؟

متناهی است؛ زیرا تعداد مولکول‌ها با عددی مشخص (حدود $۶/۰۲۲ \times ۲۳^{۱۰}$) بیان می‌شود. هرچند این عدد بسیار بزرگ است، یک عدد حسابی است و در صورت داشتن امکانات و زمان کافی، شمردنی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ صفحه ۷ فعالیت

۱ الف) عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازهٔ (۰,۱) بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید. (عدد مثال: ۱/۳)

ب) آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازهٔ (۰,۱) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می‌توان گفت؟

ث) اگر A دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعهٔ ..... خواهد بود.

الف) مثلاً ، ، (یا ۰/۱ ، ۰/۲۵ ، ،).

ب) بله؛ مثلاً کسرهای برای $n = 2, 3, 4, \ldots$ همگی بین ۰ و ۱ هستند و هرگز تمام نمی‌شوند. همچنین بین هر دو عدد گویا، میانگین آن‌ها گویاست.

پ) اعداد گویای بازهٔ (۰,۱) **نامتناهی**اند.

ت) چون مجموعهٔ گویاهای (۰,۱) نامتناهی و زیرمجموعهٔ Q است، Q هم **نامتناهی** است.

ث) نامتناهی (اگر A متناهی بود، هر زیرمجموعهٔ آن هم متناهی می‌شد).

۱۹ صفحه ۷ تمرین

۱ فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به‌طوری که $D \subseteq C$.

الف) $U = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$

ب) نامتناهی (بزرگ‌ترین مضرب ندارد).

پ) مثلاً {5, 10, 15} یا {5, 25}.

ت) مثلاً $C = \{10, 20, 30, \ldots\}$ (مضرب‌های طبیعی ۱۰) و $D = \{20, 40, 60, \ldots\}$ (مضرب‌های طبیعی ۲۰)؛ هر دو نامتناهی‌اند، هر دو زیرمجموعهٔ U هستند و $D \subseteq C$. (نمونهٔ دیگر: $C = U$ و D = مضرب‌های طبیعی ۱۰.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

تـوشـه ای بـرای مـوفـقیـت

۲۰ صفحه ۷ تمرین

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی. ب) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶. پ) بازهٔ (۱/۴ , ۱۲).

ت) $A = \{x \in N \mid 1 < x < 2\}$ ث) مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰.

الف) نامتناهی.

ب) متناهی: {۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲, ۱۸, ۳۶} با ۹ عضو.

پ) نامتناهی (هر بازهٔ غیرتهی از اعداد حقیقی بی‌شمار عضو دارد).

ت) هیچ عدد طبیعی بین ۱ و ۲ نیست؛ پس $A = \emptyset$ و متناهی است (۰ عضو).

ث) نامتناهی: {۱۰۰, ۲۰۰, ۳۰۰, ...}.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱ صفحه ۷ تمرین

۳ دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آن‌ها مجموعه‌ای متناهی باشد.

مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد: هر دو نامتناهی‌اند و اشتراکشان $\emptyset$ است (متناهی).

مثالی با اشتراک غیرتهی: $A = (-\infty, 3]$ و $B = [3, +\infty)$ که $A \cap B = \{3\}$.

۲۲ صفحه ۷ تمرین

۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به‌دست آورید:

الف) [۵ ,۲-) و (۰ ,۳-] ب) (۹ ,۲) و (۶ ,∞-] پ) (∞+ ,۳) و (۱۰ ,۶] ت) (۱ ,∞-) و [∞+ ,۱] ث) و ج) (دو مورد دیگر با کران‌های کسری)

در هر قسمت، علامت عمل (∪ یا ∩) در متن کتاب خوانا نبود؛ برای اطمینان هم اجتماع و هم اشتراک را می‌نویسیم. روش: دو بازه را روی یک محور رسم می‌کنیم؛ اجتماع، ناحیه‌ای است که با دست‌کم یکی از دو بازه پوشیده شده و اشتراک، ناحیه‌ای است که هر دو آن را می‌پوشانند.

- $(-3, 5) = (-3,0] \cup [-2,5)$ ، $[-2, 0] = [-2,5) \cap (-3,0]$ ← (الف) $[-2,5)$ با $[-3,0)$
- $(-\infty, 9) = (-\infty,6] \cup (2,9)$ ، $(2, 6] = (2,9) \cap (-\infty,6]$ ← (ب) $(2,9)$ با $(-\infty,6]$
- $(3, +\infty) = (6,10] \cup (3,+\infty)$ ، $(6, 10] = (3,+\infty) \cap (6,10]$ ← (پ) $(3,+\infty)$ با $(6,10]$
- $R = (-\infty,1) \cup [1,+\infty)$ ، $\emptyset = (-\infty,1) \cap [1,+\infty)$ ← (ت) $(-\infty,1)$ با $[1,+\infty)$

ث) و ج) این دو مورد بازه‌هایی با کران‌های کسری و $\pm\infty$ هستند که در متن موجود به‌طور کامل خوانا نبود. روش همان است: هر دو بازه را روی یک محور رسم کنید؛ برای اجتماع هر قسمتی که حتی با یک بازه پوشیده می‌شود و برای اشتراک فقط قسمتِ مشترک را بنویسید و به باز یا بسته بودن سرها دقت کنید (سر مشترک فقط وقتی در جواب می‌آید که در هر دو بازه باشد).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳ صفحه ۷ تمرین

۵ مجموعهٔ $R - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به‌صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

همهٔ اعداد حقیقی به‌جز ۳: $R - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

۲۴ صفحه ۷ تمرین

۶ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

A متناهی است. زیرا هر عضو A عضو B هم هست؛ پس تعداد اعضای A از تعداد اعضای B (که یک عدد حسابی است) بیشتر نمی‌شود. (به‌عبارت دیگر، اگر A نامتناهی بود، B هم که شامل A است نامتناهی می‌شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵ صفحه ۸ فعالیت

الف) دو مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید. $A = \{x \in Z \mid -3 < x \leq 2\}$ ، $B = \{x \in R \mid -3 < x \leq 2\}$

ب) A را با نمایش اعضا و B را به‌صورت یک بازه بنویسید.

پ) در مورد A، اگر مجموعهٔ مرجع را Z در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

ت) در مورد B با فرض اینکه R مجموعهٔ مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.

ب) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و $B = (-3, 2]$.

پ) $A' = Z - A = \{..., -5, -4, -3, 3, 4, 5, ...\}$ (صحیح‌هایی که از ۲- کوچک‌ترند یا از ۲ بزرگ‌ترند).

ت) $B' = R - B = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۹ کار در کلاس

۱ اگر U مجموعهٔ شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعهٔ استان‌های غیرساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

A' استان‌های «ساحلی» (دارای مرز آبی با دریا) است:

{گیلان، مازندران، گلستان، خوزستان، بوشهر، هرمزگان، سیستان و بلوچستان}

(سه استان اول در کنار دریای خزر و چهار استان دیگر در کنار خلیج فارس و دریای عمان قرار دارند.)

۲۷ صفحه ۹ کار در کلاس

۲ فرض کنیم U مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری‌شدهٔ کشور و B مجموعهٔ اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این‌صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

B' مجموعهٔ تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری‌شدهٔ کشور است که پلاک آن‌ها **فرد نیست**؛ یعنی مجموعهٔ اتومبیل‌های با پلاک **زوج**.

۲۸ صفحه ۹ کار در کلاس

۳ با فرض آنکه N مجموعهٔ مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

مجموعه	N متمم آن در
{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ...} (فردها)	{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ...} (زوج‌ها)
{۳, ۶, ۹, ۱۲, ...} (مضرب‌های ۳)	{۱, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸, ...}
{۱, ۲, ۳, ..., ۹}	{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ...}
{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ...} (اول‌ها)	{۱, ۴, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ...} (۱ و ترکیبی‌ها)

رابطه متقابل است: متمم هر کدام از مجموعه‌های ستون دوم، همان مجموعهٔ ستون اول است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۹ | کار در کلاس

۴ U مجموعهٔ مرجع و A زیرمجموعهٔ دلخواهی از آن می‌باشد. طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید. $\varnothing' = \ldots$ ، $U' = \ldots$ ، $A \cap A' = \ldots$ ، $A \cup A' = \ldots$

- $\varnothing' = U$ (متمم تهی همهٔ مجموعهٔ مرجع است)
- $U' = \varnothing$
- $A \cup A' = U$
- $A' \cap A = \varnothing$

۳۰ صفحه ۹ | کار در کلاس

۵ الف) اگر Z را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، آنگاه N' را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

ب) اگر R را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، در این صورت N' را روی محور نمایش دهید.

الف) $N' = Z - N = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

ب) $N' = R - N$: همهٔ اعداد حقیقی به‌جز ۱, ۲, ۳, ...؛ یعنی کل محور با برداشتن نقطه‌های ۱, ۲, ۳, ... (دایرهٔ توخالی روی هر کدام):
به‌صورت بازه‌ای: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup \ldots$

۳۱ صفحه ۹ | کار در کلاس

۶ فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$A = \{1, 2, 3\} = (A')'$ ، $B' = \{1, 3, 5\}$ ، $A' = \{4, 5\}$.

$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$	نتیجه
{۱, ۲, ۳, ۴}	{۵}	{۵}	$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$	نتیجه
{۲}	{۱, ۳, ۴, ۵}	{۱, ۳, ۴, ۵}	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

$A - B$	$A - (A \cap B)$	$A \cap B'$	نتیجه
{۱, ۳}	{۱, ۳}	{۱, ۳}	$A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'$

تـوشـه ای بـرای مـوفقیت

نتیجه: متمم اجتماع دو مجموعه برابر اشتراک متمم‌هاست، متمم اشتراک برابر اجتماع متمم‌هاست (قوانین دمورگان) و تفاضل $A - B$ همان $A \cap B'$ است.

---

۳۲ صفحه ۱۰ کار در کلاس

۷ الف) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعهٔ مرجع است. در نمودارهای مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطهٔ زیرمجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

ب) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$، در این‌صورت $A \subseteq B$ می‌باشد. با به‌دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطهٔ زیرمجموعه بودن برقرار است.

الف) در نمودار، A درون B و B درون U است. A' ناحیهٔ بیرون A (داخل U) و B' ناحیهٔ بیرون B (داخل U) است. ناحیهٔ B' فقط بخشی از ناحیهٔ A' است، پس $B' \subseteq A'$.

دلیل: اگر $x \in B'$ باشد، $x \notin B$ و چون $A \subseteq B$ است، $x \notin A$؛ یعنی $x \in A'$. پس $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$ (رابطهٔ زیرمجموعه‌بودن «برعکس» می‌شود).

ب) $A' = \{c, d, e\}$ و $B' = \{d, e\}$. هر عضو B' در A' هم هست؛ پس $B' \subseteq A'$ ✓.

---

۳۳ صفحه ۱۰ فعالیت

۱ یک تیم کوهنوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسهٔ طرفدار محیط زیست است. ... اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعهٔ A = {آنیتا، زهرا، الناز، الهام} و اعضای دانشجوی آن مجموعهٔ B = {فاطمه، معصومه، فرزانه} هستند.

الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوهنوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید. $n(A) \mid n(B) \mid n(A \cap B) \mid n(A \cup B)$

ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک فرمول بنویسید.

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعهٔ دلخواه A و B برقرار است؟

الف) $A \cup B$ = {آنیتا، زهرا، الناز، الهام، فاطمه، معصومه، فرزانه}

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۴	۳	۰	۷

ب) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ $(۷ = ۴ + ۳)$.

پ) وقتی دو مجموعه مجزا باشند، یعنی $A \cap B = \varnothing$ (عضو مشترک نداشته باشند).

۳۴ صفحه ۱۱ فعالیت

۲ الف) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و 30 را به‌ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته‌شده را بنویسید.

A: مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۲۸ ← n(A) = ۶ B ← مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۳۰ ← A ∩ B = ... ← n(B) =:

شمارنده‌های مشترک ۲۸ و ۳۰ ← n(A ∪ B) ← A ∪ B = { } = ... ← n(A ∩ B) = ...

ب) جدول زیر را کامل کنید. n(A ∪ B) | n(A ∩ B) | n(B) | n(A)

پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به‌دست آوردید؛ یعنی n(A ∪ B) = n(A) + n(B)، در این مثال برقرار نیست؟

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطهٔ درست برای n(A ∪ B) را حدس بزنید.

الف)

- n(A) = ۶ ← A = {1, 2, 4, 7, 14, 28}
- n(B) = ۸ ← B = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
- n(A ∩ B) = ۲ ← A ∩ B = {1, 2}
- n(A ∪ B) = ۱۲ ← A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30}

ب)

n(A)	n(B)	n(A ∩ B)	n(A ∪ B)
۶	۸	۲	۱۲

پ) چون این دو مجموعه عضو مشترک دارند (A ∩ B ≠ ∅)؛ با جمع n(A) و n(B)، اعضای مشترک (۱ و ۲) دو بار شمرده می‌شوند: ۶ + ۸ = ۱۴ ≠ ۱۲.

ت) در نمودار ون: ناحیهٔ فقطA دارای ۴ عضو ({۴, ۷, ۱۴, ۲۸})، ناحیهٔ مشترک ۲ عضو ({۱, ۲}) و ناحیهٔ فقطB دارای ۶ عضو ({۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰}) است. چون ناحیهٔ مشترک دو بار شمرده شده، یک بار کم می‌کنیم:

()

بحث دربارهٔ علت درستی رابطه: n(A) شامل ناحیهٔ مشترک نیز هست و n(B) هم همین ناحیه را دارد؛ پس در n(A) + n(B) ناحیهٔ مشترک دو بار شمرده می‌شود. با کم کردن n(A ∩ B) یک بار از آن، هر عضو اجتماع دقیقاً یک بار شمرده می‌شود.

۳۵ صفحه ۱۱ کار در کلاس

۱ یک دورهٔ جشنوارهٔ فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به‌طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) پویانمایی یا طنزند. ب) غیرپویانمایی و غیرطنزند.

روش اول حل: مجموعهٔ شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعهٔ فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعهٔ فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

روش دوم حل: در نمودار ون مقابل، دو مجموعهٔ C و T سطح درون U را به چهار ناحیهٔ جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

روش اول: $n(U) = ۲۱ ، n(C) = ۷ ، n(T) = ۸ ، n(C \cap T) = ۳$

الف)

ب)

روش دوم: فیلم‌های فقط پویانمایی = ۷ − ۳ = ۴ (عدد نوشته‌شده در نمودار «۴ فیلم»)، فیلم‌های هر دو = ۳ («سه فیلم»)، فیلم‌های فقط طنز = ۸ − ۳ = ۵ و فیلم‌های بیرون هر دو دایره = ۲۱ − (۴ + ۳ + ۵) = ۹.

الف) پویانمایی یا طنز: ۴ + ۳ + ۵ = ۱۲ فیلم. ب) غیرپویانمایی و غیرطنز: ۹ فیلم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۶ صفحه ۱۲ کار در کلاس

۲ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند.

روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار x را بیابید.

روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ‌یک از این دو تیم نیستند، پس $n(F \cup B) = ۲۰$. حال با نوشتن فرمول $n(F \cup B)$ می‌توان $n(F \cap B)$ را به‌دست آورد.

روش اول: اگر x نفر عضو هر دو تیم باشند، فقط فوتبال: ۱۵ − x نفر، فقط بسکتبال: ۱۱ − x نفر و بیرون دو تیم ۵ نفر است. جمع همه ۲۵ نفر است:

روش دوم:

پس ۶ نفر عضو هر دو تیم هستند.

۳۷ صفحه ۱۲ تمرین

R ۱ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $A = [-۳, ۲)$ **ب)** $B = \{۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$ **پ)** $C = (۰, +\infty)$ **ت)** $D = (-\infty, ۱]$

الف) $A' = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$
ب) $B' = R - W$: همهٔ اعداد حقیقی که عددی حسابی نیستند؛ یعنی $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup ...$
(کل محور بدون نقطه‌های ۰, ۱, ۲, ۳, ...).
پ) $C' = (-\infty, 0]$
ت) $D' = (1, +\infty)$

۳۸ صفحه ۱۲ تمرین

N ۲ را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به‌دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

الف) $A = \{2, 4, 6, ...\}$ (زوج‌ها) که $A' = \{1, 3, 5, ...\}$ (فردها) هم نامتناهی است.

ب) $B = \{4, 5, 6, ...\}$ که $B' = \{1, 2, 3\}$ متناهی است.

پ) $C = \{1, 2, 3\} \Rightarrow C' = \{4, 5, 6, ...\}$ **نامتناهی** است (N نامتناهی است و اگر C' هم متناهی بود، $N = C \cup C'$ متناهی می‌شد).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۹ صفحه ۱۳ تمرین

۳ اگر $n(A \cap B) = ۵$ ، $n(A) = ۱۵$ و $n(A \cup B) = ۳۰$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

۴۰ صفحه ۱۳ تمرین

۴ فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به‌طوری که $n(B) = ۴۰$ ، $n(A) = ۶۰$ ، $n(U) = ۱۰۰$ و $n(A \cap B) = ۲۰$ مطلوب است:

الف) $n(A \cup B)$ **ب)** $n(A \cap B')$ **پ)** $n(A' \cap B)$ **ت)** $n(A' \cap B')$

○ **الف)** $n(A \cup B) = ۶۰ + ۴۰ - ۲۰ = ۸۰$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- **ب)** $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۶۰ - ۲۰ =$ **۴۰**
- **پ)** $n(A' \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = ۴۰ - ۲۰ =$ **۲۰**
- **ت)** $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = ۱۰۰ - ۸۰ =$ **۲۰**

---

۴۱ صفحه ۱۳ | تمرین

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آن‌ها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

الف) فقط سرود = ۱۴ − ۵ = **۹ نفر**.

ب) و بقیه عضو هیچ گروهی نیستند: ۳۱ − ۲۸ = **۳ نفر**.

---

۴۲ صفحه ۱۳ | تمرین

۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست‌کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند. ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند. ت) از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

- **الف)** $n(A \cup B) = ۷۰ + ۵۷ - ۳۲ =$ **۹۵ نفر**
- **ب)** فقط A: ۷۰ − ۳۲ = **۳۸ نفر**
- **پ)** دقیقاً یکی: (۷۰ − ۳۲) + (۵۷ − ۳۲) = ۳۸ + ۲۵ = **۶۳ نفر** (یا ۹۵ − ۳۲ = ۶۳)
- **ت)** هیچ‌کدام: ۱۱۰ − ۹۵ = **۱۵ نفر**

---

۴۳ صفحه ۱۴ | مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در هر یک از آن‌ها توجه کنید. (شکل ۱: ۵ چوب‌کبریت، شکل ۲: ۸ چوب‌کبریت، شکل ۳: ۱۱ چوب‌کبریت) n: شمارهٔ شکل = ۱, ۲, ۳, ۴, ... ، a_n: تعداد چوب‌کبریت‌ها = ۵, ۸, ۱۱, ... ، رابطهٔ بین n و a_n: $a_1 = ۵$ ، $a_2 = ۸$ ، $a_3 = ۱۱$ ، ...

الف) با این نمادگذاری، a_4 نشان‌دهندهٔ چیست و مقدار آن چقدر است؟

ب) a_n به چه معناست؟

پ) آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n به‌دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

الف) a_4 تعداد چوب‌کبریت‌های **شکل چهارم** است. هر شکل نسبت به شکل قبل ۳ چوب‌کبریت بیشتر دارد (۵, ۸, ۱۱ ← ۱۴)، پس $a_4 = ۱۱ + ۳ = ۱۴$.

ب) a_n تعداد چوب‌کبریت‌های **شکل nام** است (جملهٔ nام الگو).

پ) بله؛ $a_n = 3n + 2$ (در فعالیت صفحهٔ بعد به‌دست می‌آید؛ مثلاً $a_1 = ۳ + ۲ = ۵$ ✓).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۴ صفحه ۱۵ فعالیت

۱ آیدا برای به‌دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل‌های الگو را به‌صورت روبه‌رو در نظر گرفت. به‌کمک این روش، مقدار a_{10} و a_n را به‌دست آورید. $a_4 = ۴(۳) + ۲$ ، $a_3 = ۳(۳) + ۲$ ، $a_2 = ۲(۳) + ۲$ ، $a_1 = ۱(۳) + ۲$ ، ... ، a_n ، ... = a_{10} = ...

۲ آیسا روش دیگری را به‌کار برد. او تعداد چوب‌کبریت‌های افقی و عمودی در هر شکل را به‌طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص‌شده بنویسید. a_n ، ... ، $a_{10} = ۱۰ + ۲(۱۰+۱)$ ، ... ، $a_4 = ۴ + ۲(۵)$ ، $a_3 = ۳ + ۲(۴)$ ، $a_2 = ۲ + ۲(۳)$ ، $a_1 = ۱ + ۲(۲)$ = ...

۳ آیا شما راه دیگری را برای به‌دست آوردن حاصل a_n می‌دانید؟

۴ همان‌طور که در قسمت‌های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیسا مقدار a_n را به‌ترتیب به‌صورت‌های $a_n = ۳n + ۲$ و $a_n = n + ۲(n+۱)$ به‌دست آوردند. جواب آیسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

۵ به‌کمک رابطهٔ $a_n = ۳n + ۲$ تعداد چوب‌کبریت‌های شکل بیستم را بیابید.

۶ با استفاده از رابطهٔ $a_n = ۳n + ۲$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب‌کبریت است.

۱) شکل nام یک «اولیهٔ ۲ چوب‌کبریتی» دارد و به ازای هر یک از n واحد، ۳ چوب‌کبریت اضافه می‌شود:

$a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$ ، ... ، $a_{10} = 10(3) + 2 = 32$ ، ... ، $a_4 = 14$ ، $a_3 = 11$ ، $a_2 = 8$ ، $a_1 = 5$

۲) $a_n = n + 2(n + 1)$ (n چوب افقی و $۲(n+۱)$ چوب عمودی؛ مثلاً $a_{10} = ۱۰ + ۲(۱۱) = ۳۲$ ✓).

۳) بله؛ مثلاً از دنبالهٔ ۵, ۸, ۱۱, ... می‌بینیم جمله‌ها با اضافه کردن ۳ هر بار ساخته می‌شوند: $a_n = 5 + 3(n - 1)$ که برابر $۳n + ۲$ می‌شود. یا از رابطهٔ خط $y = ۳x + ۲$ (شیب ۳ و عرض از مبدأ ۲).

۴) $n + 2(n + 1) = n + 2n + 2 = 3n + 2$ ✓ همان جواب آیدا.

۵) $a_{20} = 3(20) + 2 = 62$ چوب‌کبریت.

۶) $3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$ ← شکل بیست‌وپنجم.

۴۵ صفحه ۱۷ کار در کلاس

۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید. (شکل ۱: ۴ مربع رنگی، شکل ۲: ۸ مربع رنگی، شکل ۳ ...) n: شمارهٔ شکل = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ ؛ b_n: تعداد مربع‌های رنگی = ۴, ۸, ... ؛ رابطهٔ بین n و b_2 ، $b_1 = ۴$:b_n = ... ، ...

۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می‌شود.

۳ با توجه به میزان افزایش جمله‌های الگو، مقدار a در رابطهٔ b_n = an + h را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل b_n را به‌دست آورید.

۴ شکل شمارهٔ ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

۵ در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

۱) شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب ۴ و ۸ مربع رنگی دارند؛ یعنی در هر مرحله ۴ مربع رنگی اضافه می‌شود. پس شکل بعدی (شکل ۳) ۱۲ مربع رنگی دارد. جدول:

n	۱	۲	۳	۴	۵
b_n	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه	$b_1 = ۴(۱)$	$b_2 = ۴(۲)$	$b_3 = ۴(۳)$	$b_4 = ۴(۴)$	$b_5 = ۴(۵)$

۲) اختلاف هر دو جملهٔ متوالی ثابت (برابر ۴) است؛ پس خطی است.

۳) $a = ۴$ (میزان افزایش). از $b_1 = ۴ = ۴(۱) + h$ نتیجه می‌شود $h = ۰$؛ پس $b_n = 4n$.

۴) $b_{250} = 4 \times 250 = 1000$ مربع رنگی.

۵) $4n = 144 \Rightarrow n = 36$ ← شکل سی‌وششم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۶ صفحه ۱۷ فعالیت

۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید. (شکل ۱: ۵ نقطه، شکل ۲: ۱۲ نقطه) n: ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ ؛ t_n: ۵, ۱۲, ... ؛ رابطهٔ بین n و t_2 ، $t_1 = ۵$:t_n = ... ، ...

۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

۱) تعداد نقطه‌ها در شکل‌های متوالی ۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵, ... است (اختلاف‌ها ۷, ۹, ۱۱, ۱۳؛ پس شکل سوم ۲۱ و شکل چهارم ۳۲ نقطه دارد).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

n	۱	۲	۳	۴	۵
t_n	۵	۱۲	۲۱	۳۲	۴۵
رابطه	$۴(۱) + ۱^۲$	$۴(۲) + ۲^۲$	$۴(۳) + ۳^۲$	$۴(۴) + ۴^۲$	$۴(۵) + ۵^۲$

۲) خیر؛ اختلاف جمله‌های متوالی ثابت نیست: ۱۲−۵ = ۷ ، ۲۱−۱۲ = ۹ ، ۳۲−۲۱ = ۱۱ ، ... (اختلاف‌ها خودشان ۲ تا ۲ زیاد می‌شوند). پس الگو خطی نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۷ صفحه ۱۸ **فعالیت**

۳ امیررضا برای یافتن جملهٔ عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید. $t_1 = (۱)^۲ + ۴(۱)$ ، $t_2 = (۲)^۲ + ۴(۲)$ ، $t_3 = (۳)^۲ + ۴(۳)$ ، t_4 = ... ، ... ، t_n = ... $(۴)۴ + ^۲(۴)$

۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به‌صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید. $t_1 = ۳^۲ - ۴ = (۱+۲)^۲ - ۴$ ، $t_2 = ۴^۲ - ۴ = (۲+۲)^۲ - ۴$ ، t_3 = ... ، ... ، t_n ، ... $= t_4 = (۴+۲)^۲ - ۴$ ، $(۳+۲)^۲ - ۴$

۵ نشان دهید که دو مقدار به‌دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

۳) با دسته‌بندی شکل‌ها، هر شکل از یک مربع n × n از نقطه‌ها و ۴ دستهٔ nتایی دیگر تشکیل می‌شود: $t_n = n^2 + 4n$.

۴) هر شکل را مربع (n+۲) × (n+۲) در نظر می‌گیریم که ۴ نقطهٔ گوشه‌ای آن کم شده است: $t_n = (n + 2)^2 - 4$.

۵) $n^2 + 4n = n^2 + 4n + 4 - 4 = (n+2)^2 - 4$ ✓ هر دو یکسان‌اند.

۶) بله؛ مثلاً می‌توان t_n را به‌صورت مستطیل (n+۴) × n دید: $t_n = n(n + 4)$ که برابر $n^2 + 4n$ است. یا با دیدن اینکه اختلاف‌ها ۷, ۹, ۱۱, ... (دنباله‌ای حسابی) هستند، یک چندجمله‌ای درجه ۲ برازش داد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۸ صفحه ۱۹ **کار در کلاس**

۱ دو دنبالهٔ دلخواه مثال بزنید.

مثلاً: ... ,۸ ,۶ ,۴ ,۲ (زوج‌ها) و ... ,۱۶ ,۹ ,۴ ,۱ (مربع‌های کامل). یا دنباله‌ای بدون الگو مثل ... ,۴ ,۱۹ ,۳ ,۷

۴۹ صفحه ۱۹ | کار در کلاس

۲ جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف) ۲۴ ، ۱۵ ، ... ، ۳ ، ۰ : $a_n = n^2 - 1$

ب) ۲- ، ... ، ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ : $b_n = -n + 4$

پ) ۳- ، ... ، ۷- ، ... ، ۱۱- : $c_n = -13 + 2n$

الف) $0, 3, 8, 15, 24 \leftarrow a_3 = 3^2 - 1 = 8$

ب) $3, 2, 1, 0, -1, -2 \leftarrow b_5 = -5 + 4 = -1$ ($b_6 = -2$).

پ) $c_2 = -13 + 4 = -9$ و $c_4 = -13 + 8 = -5 \leftarrow -3, -5, -7, -9, -11$.

۵۰ صفحه ۱۹ | کار در کلاس

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جملهٔ بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید یک جملهٔ عمومی برای دنباله نیز حدس بزنید.

(۱) ۱-, ۲-, ۳-, ۴-, ... (۲) ۱, ۳, ۵, ۷, ... (۳) ۱, ۴, ۹, ۱۶, ... (۴) ۰/۱, ۰/۰۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۰۰۱, ... (۵) ۱-, ۸, ۲۷-, ۶۴, ...

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

(۶) ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ... (۷) ۱/۴, ۱/۲-, ۱, -۲, ... (۸) ۱, ۲, ۴, ۷, ... (۹) ۳, ۱, ۴, ۱, ۵, ... (۱۰) ۱, ۱, ۲, ۱, ۳, ۲, ۵, ... (۱۱) ۲, ۳, ۵, ۷, ...

دنباله	سه جملهٔ بعدی	جملهٔ عمومی
-۱, -۲, -۳, -۴	-۵, -۶, -۷	$t_n = -n$
۱, ۳, ۵, ۷	۹, ۱۱, ۱۳	$t_n = ۲n - ۱$
۱, ۴, ۹, ۱۶	۲۵, ۳۶, ۴۹	$t_n = n^2$
۰/۱, ۰/۰۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۰۰۱	$t_n = ۱۰^{(-n)}$
-۱, ۸, -۲۷, ۶۴	-۱۲۵, ۲۱۶, -۳۴۳	$t_n = (-۱)^n \cdot n^3$
۵, ۸, ۱۱, ۱۴	۱۷, ۲۰, ۲۳	$(t_n = ۳n + ۲)$
۱/۴, -۱, ۱/۲, -۲	۴, -۸, ۱۶	(هر جمله -۲ برابر قبلی)
۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ...	۱۱, ۱۶, ۲۲	(اختلاف‌ها ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ...)
۳, ۱, ۴, ۱, ۵	۹, ۲, ۶	(رقم‌های عدد $\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶...$)
۱, ۱, ۲, ۳, ۵	۸, ۱۳, ۲۱	(دنبالهٔ فیبوناچی: هر جمله مجموع دو جملهٔ قبلی)
۲, ۳, ۵, ۷	۱۱, ۱۳, ۱۷	(اعداد اول)

برای ردیف (۸) می‌توان جملهٔ عمومی را هم نوشت. توجه: بعضی ردیف‌های جدول کتاب به‌طور کامل خوانا نبود و برداشت بالا بر پایهٔ الگوی آشکار آن‌هاست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۱ صفحه ۱۹ کار در کلاس

۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید. (شکل ۱: ۱ مربع، شکل ۲: ۳ مربع، شکل ۳: ۶ مربع، شکل ۴ ...)

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

ب) آیا دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ خطی است؟ چرا؟

پ) شکل‌های الگوی صفحهٔ قبل را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر زیر سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به‌دست آورید. $a_1 = ...$ ، $a_2 = ...$ ، $a_3 = ... = ...$

ت) به کمک مرحلهٔ قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید. $۱ + ۲ + ۳ + ... + n = ...$

الف) هر شکل یک ردیف تازه (یک مربع بیشتر از ردیف قبل) دارد: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

ب) خیر؛ اختلاف جمله‌های متوالی ثابت نیست (۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ...).

پ) دو نسخهٔ یک شکل (پلکانی) را کنار هم می‌گذاریم تا مستطیلی به ابعاد (n+۱) × n پدید آید؛ پس دو برابر a_n برابر n(n+۱) است:

(مثلاً و و)

ت) مجموع ۱ + ۲ + ۳ + ... + n همان تعداد مربع‌های شکل nام است:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۲ صفحه ۲۰ تمرین

۱ به الگوی روبه‌رو توجه کنید. (شکل ۱: ۱ کاشی سفید و ۶ کاشی تیره، شکل ۲: ۲ کاشی سفید و ۸ کاشی تیره، شکل ۳: ۳ کاشی سفید و ۱۰ کاشی تیره)

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیرهٔ آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟

الف) شکل چهارم ۴ کاشی سفید و ۱۲ کاشی تیره دارد (با هر کاشی سفید جدید، ۲ کاشی تیره اضافه می‌شود).

ب) 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

پ) $t_n = 2n + 4$ (مثلاً n = ۱: ۲ + ۴ = ۶ ✓).

ت) $t_{100} = 2(100) + 4 = 204$ کاشی تیره.

ث) $2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$ که عدد طبیعی است؛ پس بله، شکل بیست‌وسوم ۵۰ کاشی تیره و **۲۳ کاشی سفید** دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۳ صفحه ۲۰ تمرین

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید. (شکل ۱: ۱ نقطه، شکل ۲: ۶ نقطه، شکل ۳: ۱۵ نقطه، شکل ۴ ...)

الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

ب) جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

الف) اختلاف‌ها ۵ و ۹ هستند و هر بار ۴ تا زیاد می‌شوند (۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ...). پس جمله‌ها:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

1, 6, 15, 28, 45, 66

ب) چون اختلاف مرتبهٔ دوم ثابت و برابر ۴ است، جمله به‌صورت با $a = 2$ است. با حل: $t_n = 2n^2 - n = n(2n - 1)$ (n=۱: ۱ ✓ ، n=۲: ۶ ✓ ، n=۳: ۱۵ ✓).

پ) $t_{10} = 10 \times 19 = 190$ نقطه.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۴ صفحه ۲۰ تمرین

۳ جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $a_n = 4n$ ب) $b_n = 3n + 1$ پ) $c_n = n^2$ ت) $d_n = n^2 + n + 2$

الف) 4, 8, 12, 16 ← مثلاً n گروه چهارتایی از نقطه‌ها (یا n مربع که هر کدام ۴ ضلع جدا دارند).

ب) 4, 7, 10, 13 ← زنجیره‌ای از n مربع کنار هم با چوب‌کبریت (۴ چوب برای اولی و هر مربع بعدی ۳ چوب).

پ) 1, 4, 9, 16 ← مربع $n \times n$ از نقطه‌ها یا مربع‌ها.

ت) 4, 8, 14, 22 (اگر $d_n = n^2 + n + 2$ باشد) ← مستطیلی $(n+1) \times n$ از نقطه‌ها (۲, ۶, ۱۲, ۲۰) به‌اضافهٔ ۲ نقطهٔ ثابت.

پاسخ هندسی یکتا نیست و هر الگوی هندسی که شمارش آن به همین جمله‌ها برسد پذیرفتنی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۵ صفحه ۲۰ تمرین

۴ برای هریک از دنباله‌های درجه دوم زیر جملهٔ عمومی را به‌دست آورید و سپس برای هرکدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) ۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ... ب) ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...

الف) اختلاف‌ها: ۳, ۵, ۷, ۹ و اختلاف مرتبهٔ دوم: ۲ ⇒ ضریب n^2 برابر ۱ است. $t_n = n^2 + 4$ (n=۱: ۵ ✓ ، n=۲: ۸ ✓ ، n=۳: ۱۳ ✓ ، n=۵: ۲۹ ✓). الگوی هندسی: مربع $n \times n$ از نقطه‌ها به‌اضافهٔ ۴ نقطهٔ ثابت.

ب) اختلاف‌ها: ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶ و اختلاف مرتبهٔ دوم: ۳ ⇒ ضریب n^2 برابر ۳/۲ است. حل دستگاه:

(مثلاً ✓)

الگوی هندسی: اعداد «پنج‌ضلعی» (پنج‌ضلعی‌های تودرتو با رأس مشترک) که شکل nام تعداد نقطهٔ پنج‌ضلعی با ضلع n+۱ را دارد؛ ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۶ صفحه ۲۱ | فعالیت

۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزارهٔ سوم میلادی به بعد به‌صورت زیر است که جمله‌های یک دنبالهٔ حسابی‌اند. ۲۰۰۰ , ۲۰۰۴ , ۲۰۰۸ , ۲۰۱۲ , ۲۰۱۶ , ۲۰۲۰ , ...

الف) جملهٔ اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید. d ، ... = t_1 = ...

ب) نهمین دورهٔ المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پ) با تکمیل جدول زیر، جملهٔ عمومی این دنباله را به‌دست آورید. t_n ، ... ، t_9 ، ... ، t_4 ، t_3 ، t_2 ، t_1 ؛ ۲۰۰۰ ، ۲۰۰۰+۱(۴) ، ۲۰۰۰+۲(۴) ، ۲۰۰۰+۳(۴) ، ... ، ۲۰۰۰+(...)(۴) ، ... ، ۲۰۰۰+(.....)(۴)

ت) بیست‌وچهارمین دورهٔ المپیک در هزارهٔ سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟ t_{24} = ...

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی را به‌دست آورید. t_n ، ... ، t_6 ، t_5 ؛ t_1 + (.....)d ، ... ، t_1 + ۳d ، t_1 + ۲d ، t_1 + ۱d ، t_1 ، t_4 ، t_3 ، t_2 ، t_1

الف) $d = 4$ ، $t_1 = 2000$

ب) $t_9 = 2000 + 8(4) = 2032$ (نهمین دوره در سال ۲۰۳۲).

پ) $t_2 = 2000 + 1(4)$ ، $t_3 = 2000 + 2(4)$ ، ... ، $t_9 = 2000 + 8(4)$ ، ... ، $t_n = 2000 + (n - 1)(4) = 4n + 1996$

ت) $t_{24} = 2000 + 23(4) = 2092$

۲) t_1 ، $t_1 + d$ ، $t_1 + 2d$ ، $t_1 + 3d$ ، $t_1 + 4d$ ، $t_1 + 5d$ ، ... ، $t_n = t_1 + (n - 1)d$

ضریب d، همیشه «یکی کمتر از شمارهٔ جمله» است؛ چون برای رسیدن از جملهٔ اول به جملهٔ nام، $(n - 1)$ بار d اضافه می‌کنیم.

---

۵۷ صفحه ۲۲ | کار در کلاس

۱ در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جملهٔ بعدی را بنویسید و سپس جملهٔ عمومی هر کدام را به‌دست آورید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ... ب) ۱, ۳, ۵, ۷, ... پ) ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ... ت) ۱۳, ۷, ۱, -۵, ...

دنباله	d قدر نسبت	سه جملهٔ بعدی	جملهٔ عمومی
الف	۵	۳۵ ,۳۰ ,۲۵	$a_n = ۵ + (n-۱)۵ = ۵n$
ب	۲	۱۳ ,۱۱ ,۹	$b_n = ۱ + (n-۱)۲ = ۲n - ۱$
پ	۴	۲۹ ,۲۵ ,۲۱	$c_n = ۵ + (n-۱)۴ = ۴n + ۱$
ت	-۶	-۲۳ ,-۱۷ ,-۱۱	$d_n = ۱۳ + (n-۱)(-۶) = ۱۹ - ۶n$

۵۸ صفحه ۲۲ | کار در کلاس

۲ A و B دو شرکت عرضه‌کنندهٔ سیم‌کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند. (شرکت A: هزینهٔ ثابت ماهانه ۲۰۰۰ تومان و هر دقیقه مکالمه ۳۰ تومان؛ شرکت B: هزینهٔ ثابت ماهانه ۳۰۰۰ تومان و هر دقیقه مکالمه ۲۰ تومان) فرض کنیم a_n نشان‌دهندهٔ هزینهٔ کل n دقیقه مکالمهٔ ماهانه از طریق سیم‌کارت شرکت A و b_n هزینهٔ مشابه برای استفاده از سیم‌کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار a_n و b_n را بر حسب n بنویسید.

ب) جدول زیر را کامل کنید. (n: ۱، ۴۰، ۶۰، ۱۱۰، ۱۶۰)

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می‌توانند جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشند؟ چرا؟ اگر جواب مثبت است، قدر نسبت هر یک را مشخص کنید.

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آن‌ها کدام سیم‌کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

الف) $a_n = 30n + 2000$ و $b_n = 20n + 3000$

ب)

زمان مکالمه (دقیقه) :n	۱	۴۰	۶۰	۱۱۰	۱۶۰
a_n: هزینهٔ سیم‌کارت A	۲۰۳۰	۳۲۰۰	۳۸۰۰	۵۳۰۰	۶۸۰۰
b_n: هزینهٔ سیم‌کارت B	۳۰۲۰	۳۸۰۰	۴۲۰۰	۵۲۰۰	۶۲۰۰

پ) بله، هر دو؛ چون هر دو به شکل «عدد × n + عدد ثابت» (الگوی خطی) هستند و اختلاف دو جملهٔ متوالی ثابت است: قدر نسبت a_n برابر ۳۰ و قدر نسبت b_n برابر ۲۰ است.

ت) سارا (۶۰ دقیقه): A هزینه ۳۸۰۰ و B هزینه ۴۲۰۰ ← سیم‌کارت **A** ارزان‌تر است. فاطمه (۱۵۰ دقیقه): A ← ۶۵۰۰ و B ← ۶۰۰۰ ← سیم‌کارت **B** ارزان‌تر است. (دو تعرفه در ۱۰۰ دقیقه برابر می‌شوند: ۵۰۰۰ تومان؛ برای کمتر از ۱۰۰ دقیقه A و برای بیشتر از آن B بهتر است.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ صفحه ۲۳ **مثال**

در دنبالهٔ حسابی زیر جملهٔ شانزدهم را به‌دست آورید. ۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵, ... (آرتین و آرکان این مثال را به روش‌های زیر حل کرده‌اند. شما کدام روش را می‌پسندید؟)

روش آرتین: $t_{16} = t_1 + 15d = 4 + 15(7) = 109$

روش آرکان (الگوی خطی با قدر نسبت ۷): $t_1 = 7(1) + b = 4 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow t_n = 7n - 3 \Rightarrow t_{16} = 7(16) - 3 = 109$ ، $t_n = 7n + b$

هر دو روش ۱۰۹ را می‌دهند؛ روش آرتین مستقیم و با فرمول است و روش آرکان جملهٔ عمومی کامل را هم می‌دهد (انتخاب با شماست).

۶۰ صفحه ۲۳ **کار در کلاس**

۱ الف) یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جملهٔ چهارم آن ۱۰ باشد.

ب) یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جملهٔ چهارم آن ۱۰ باشد.

پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جملهٔ مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

الف) با $(t_4 = 10)$ ... 4, 6, 8, 10, 12, ... $d = 2$.

ب) با $(t_4 = 10)$ ... 19, 16, 13, 10, 7, ... $d = -3$.

پ) مثلاً ... 5, 3, 1, −1, −3, −5, ... (قدر نسبت −۲): فقط سه جملهٔ اول مثبت‌اند و بقیه منفی‌اند.

۶۱ صفحه ۲۳ **کار در کلاس**

۲ الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. حل: با فرض اینکه ۱۸ جملهٔ اول باشد، قدرنسبت را به‌دست آورید و جدول را کامل کنید.

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص‌شده در هر مورد واسطهٔ حسابی درج کنید.

الف) $t_1 = ۱۸$ و $t_5 = ۶۲$:

18, 29, 40, 51, 62 ← واسطه‌ها: ۲۹ ، ۴۰ ، ۵۱.

ب) اگر k واسطه درج کنیم، تعداد جمله‌ها k + ۲ است و :

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

تعداد واسطه‌ها	d	دنباله
۱	۳۰	20, 50, 80
۲	۲۰	20, 40, 60, 80
۳	۱۵	20, 35, 50, 65, 80
۴	۱۲	20, 32, 44, 56, 68, 80
۵	۱۰	20, 30, 40, 50, 60, 70, 80

(تعداد واسطه‌ها در هر ردیف شکل کتاب از روی تصویر قابل تشخیص نبود؛ برای ۱ تا ۵ واسطه جواب داده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۲ صفحه ۲۴ تمرین

۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آن‌ها با تعیین قدرنسبت، جملهٔ بیست‌ویکم را بیابید.

الف) ۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, ... ب) ۱, ۲, ۴, ۸, ... پ) $۳^{۲}$, $۳^{۳}$, $۳^{۴}$, ... ت) ۱, ۴, ۷, ۱۰, ... ث) و ج) (دو دنبالهٔ دیگر)

الف) حسابی است: $d = ۷$ و $t_{21} = 3 + 20(7) = 143$

ب) حسابی نیست (اختلاف‌ها ۱, ۲, ۴ برابر نیستند؛ هندسی با نسبت ۲ است).

پ) حسابی نیست (اختلاف‌ها: $۲۰۳^{۲} = ۱۸$ ، $۲۰۳^{۳} = ۵۴$ ؛ برابر نیستند؛ هندسی با نسبت ۳ است).

ت) حسابی است: $d = ۳$ و $t_{21} = 1 + 20(3) = 61$

ث) و ج) این دو دنباله در متن کتاب خوانا نبود. روش: اختلاف هر جمله و جملهٔ قبلی را بنویسید؛ اگر همهٔ این اختلاف‌ها برابر باشند دنباله حسابی است و .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۳ صفحه ۲۴ تمرین

۲ در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم و هفتم به‌ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به‌دست آوردن جملهٔ اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

،

$t_n = 2 + 9(n-1) = 9n - 7$ و $2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, \ldots$

---

۶۴ صفحه ۲۴ — تمرین

۳ در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ اول ۳ و مجموع سه جملهٔ بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

سه جملهٔ بعدی: $(3+d) + (3+2d) + (3+3d) = 9 + 6d = 39 \Rightarrow 6d = 30 \Rightarrow d = 5$.

$3, 8, 13, 18, 23, \ldots$ و $t_n = 5n - 2$ (بررسی: $8 + 13 + 18 = 39$ ✓)

---

۶۵ صفحه ۲۴ — تمرین

۴ الف) دو جملهٔ بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید. (شکل‌ها با ۱، ۵ و ۹ عنصر)

ب) جملهٔ عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

الف) هر شکل ۴ عنصر بیشتر از شکل قبل دارد: $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ (دو شکل بعدی ۱۳ و ۱۷ عنصر دارند). دنباله **حسابی** با $d = 4$ است.

ب) $t_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$

پ) $4n - 3 = 397 \Rightarrow 4n = 400 \Rightarrow n = 100$ ← جملهٔ صدم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۶۶ صفحه ۲۴ — تمرین

۵ الف) واسطهٔ حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

ب) واسطهٔ حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $d = 3$ ← واسطه $5, 8, 11 \Rightarrow$ **۸**.

ب) $d = 5$ ← $20, 25, 30 \Rightarrow$ **۲۵**.

پ) واسطهٔ حسابی بین دو عدد، **میانگین** آن دو عدد است: (مثلاً $8 = 25$ و). چون اگر a, x, b حسابی باشند، $x - a = b - x$ و $x = (a+b)/2$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۷ صفحه ۲۴ | تمرین

۶ مسئلهٔ زیر در پاپیروس رایند آمده است. آن را حل کنید. «۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت‌شده، دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

سهم‌ها را از کوچک به بزرگ $a-2d$ ، $a-d$ ، a ، $a+d$ ، $a+2d$ می‌گیریم. مجموع آن‌ها ۱۰۰ = $5a$ ⇒ $a=20$.

سه سهم بزرگ‌تر: $(20+2d)+(20+d)+20 = 60+3d$ و یک‌سوم آن $20+d$ است. دو سهم کوچک‌تر: $(20-2d)+(20-d) = 40-3d$. پس:

سهم‌ها: 10, 15, 20, 25, 30 نان. (بررسی: ۷۵ ÷ ۳ = ۲۵ = ۱۰ + ۱۵ ✓، و مجموع = ۱۰۰ ✓)

۶۸ صفحه ۲۵ | فعالیت

علی به بیماری آنفلوانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش ... امید و محسن روز یکشنبه مبتلا شدند ... در روز اول بیماری هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل می‌کنند؛ به‌طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.

۱ جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید. (n: روز ؛ t_n: تعداد افراد جدیدی که در روز nام مبتلا می‌شوند ؛ ۱: ۲ ، ۲: ۲×۲ = 2^2 ، ۳: ۲×۴ = 2^3 ، ۴: ۲×۸ = ...)

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفلوانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

۱) هر روز تعداد مبتلایان جدید دو برابر روز قبل است.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	n
t_n	۲	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$	$2^5=32$	$2^6=64$	...	n^۲

$t_n = 2^n$

۲) $t_{10} = 2^{10} = 1024$ نفر.

۳) $t_{11} = 2^{11} = 2048$ نفر (دو برابر روز دهم).

۴) $2^n = 16384 = 2^{14} \Rightarrow n = 14$ ← روز چهاردهم.

۶۹ صفحه ۲۵ فعالیت

در حالت کلی در یک دنبالهٔ هندسی، اگر جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید. $t_1 ، t_1r ، t_1r^2 ؛ t_1 ، t_2 ، t_3 ، t_4 ، t_5 ، ... ، t_n$ **، ... ، ...**

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	...	t_n
t_1	$t_1 r$	$t_1 r^2$	$t_1 r^3$	$t_1 r^4$	...	$t_1 r^{(n-1)}$

هر بار در r ضرب می‌شود؛ پس برای رسیدن به جملهٔ nام، (n − ۱) بار ضرب در r داریم: $t_n = t_1 \cdot r^{(n-1)}$ (با $t_1 \neq 0$ و $r \neq 0$).

۷۰ صفحه ۲۶ کار در کلاس

۱ نرگس و نگار برای محاسبهٔ هفتمین جملهٔ دنبالهٔ هندسی ۹, ۳, ۱, ... روش‌های مقابل را به‌کار برده‌اند. کدام‌یک از آن‌ها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ توضیح دهید.

در دنبالهٔ ۹, ۳, ۱, ... جملهٔ اول ۹ است و هر جمله، **یک‌سوم** جملهٔ قبل است؛ پس قدر نسبت (جملهٔ بعدی ÷ جملهٔ قبلی).

نگار درست حل کرده است:

نرگس اشتباه کرده است: او قدر نسبت را (جملهٔ قبلی ÷ جملهٔ بعدی) گرفته و به نتیجهٔ ۶۵۶۱ رسیده؛ این عدد از جملهٔ هفتم دنباله‌ای صعودی ۹, ۲۷, ۸۱, ... است، نه این دنباله. قدر نسبت باید همیشه «جملهٔ بعدی تقسیم بر جملهٔ قبلی» باشد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۱ صفحه ۲۶ کار در کلاس

۲ در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جملهٔ بعدی را بنویسید. سپس جملهٔ عمومی هر دنباله را به‌دست آورید.

الف) ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ... ، ب) $a_n = ۲\times۳^{(n-۱)}$ ۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, ... ، ... = b_n

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) ۶, −۶۰, ۶۰۰, −۶۰۰۰, ... ، c_n = ... ت) ۴, ۲, ۱, ۱/۲, ... ، d_n = ...

دنباله	r	دو جملهٔ بعدی	جملهٔ عمومی
الف	۳	۴۸۶ ,۱۶۲	$a_n = ۲ \times ۳^{(n-۱)}$
ب	۲	۱۶۰ ,۸۰	$b_n = ۵ \times ۲^{(n-۱)}$
پ	−۱۰	−۶۰۰۰۰۰ ,۶۰۰۰۰	$c_n = ۶ \times (-۱۰)^{(n-۱)}$
ت	۱/۲	۱/۸ ,۱/۴	$d_n = ۴ \times (۱/۲)^{(n-۱)} = ۲^{(۳-n)}$

(قدر نسبت از تقسیم هر جمله بر جملهٔ قبل به‌دست می‌آید؛ مثلاً در (پ): −۶۰ ÷ ۶ = −۱۰.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۷۲ صفحه ۲۶ **کار در کلاس**

۳ الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک واسطهٔ هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به‌جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطهٔ هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنبالهٔ هندسی حاصل شود. (۱) ۱۰ ، □ ، ۴۰۰۰ (۲) ۱۰ ، □ ، □ ، ۸۰۰۰۰ (۳) ۴ ، □ ، □ ، □ ، □ ، ۹۷۲

الف) . با ۳, ۱۲, ۴۸ ← $r = ۴$. با $r = -۴$ ← 3, −12, 48. پس عدد دیگر **−۱۲** است.

ب) سه واسطه یعنی ۵ جمله:

با $r = ۲$: 3, 6, 12, 24, 48 و با $r = -۲$: 3, −6, 12, −24, 48. جواب **یکتا نیست** (دو جواب).

پ) (۱) : 10, 200, 4000 یا 10, −200, 4000

(۲) : 10, 200, 4000, 80000

(۳) : 4, 12, 36, 108, 324, 972

(تعداد خانه‌های خالی هر مورد از روی شکل کتاب برداشت شده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۷۳ صفحه ۲۷ **تمرین**

۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آن‌ها را بنویسید.

الف) ۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, ... ب) ۲/۵, ۴/۵, ۶/۵, ۸/۵, ... پ) ۱, -۱/۲, ۱/۴, -۱/۸, ... ت) ۵, ۵, ۵, ۵, ...

الف) هندسی است:

ب) هندسی نیست: ولی (دنباله حسابی با d = ۲/۵ است).

پ) هندسی است:

ت) هندسی است: r = ۱ (دنبالهٔ ثابت؛ همزمان حسابی با d = ۰ هم هست).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۷۴ صفحه ۲۷ تمرین

۲ چند دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت ۵/۴ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

بی‌شمار؛ چون جملهٔ اول می‌تواند هر عدد غیرصفر باشد. مثلاً:

4, 5, 25/4, 125/16, ... و 16, 20, 25, 125/4, ...

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۷۵ صفحه ۲۷ تمرین

۳ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

الف) نادرست. مثال نقض: دنبالهٔ ۱, ۴, ۹, ۱۶, ... (مربع‌ها): اختلاف‌ها ۳, ۵, ۷ برابر نیستند (حسابی نیست) و نسبت‌ها ۴, ۹/۴, ۱۶/۹ برابر نیستند (هندسی نیست). همچنین دنبالهٔ بدون الگوی ۷, ۳, ۱۹, ۴.

ب) نادرست. مثال نقض: دنبالهٔ ثابت ۵, ۵, ۵, ۵, ...؛ حسابی با d = ۰ و هندسی با r = ۱ است.

---

۷۶ صفحه ۲۷ تمرین

۴ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخهٔ دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

هر سال قیمت در ۰/۸ ضرب می‌شود (دنبالهٔ هندسی با $r = ۰/۸$ و $t_۱ = ۵۰۰$ (قیمت اولیه)).

الف) ← **۲۵۶ هزار تومان.**

ب) $P_n = 500 \times (0.8)^n$ (هزار تومان).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۷۷ صفحه ۲۷ تمرین

۵ حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی مقابل را محاسبه کنید. ۲, ۴, ۸, ...

جمله‌ها $2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{20}$ هستند؛ پس حاصل‌ضرب برابر است با:

(از فرمول مجموع $۱ + ۲ + ... + n = n(n+۱)/۲$ استفاده شد.)

---

۷۸ صفحه ۲۷ تمرین

۶ جملات سوم و ششم یک دنبالهٔ هندسی به‌ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

،

$3, 6, 12, 24, 48, 96, ...$ و $t_n = 3 \times 2^{(n-1)}$

---

۷۹ صفحه ۲۷ تمرین

۷ بنابر آمار منتشرشده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهندهٔ حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هموطنان ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

کاهش ۵ درصد در سال یعنی ضرب سالانه در ۰/۹۵. از ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ شروع می‌کنیم:

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۵	۱۴۹۶۷	۱۴۲۱۹	۱۳۵۰۸	۱۲۸۳۲	۱۲۱۹۱

(مقادیر به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد شده‌اند؛ مثلاً ۱۶۵۸۴ × ۰/۹۵ = ۱۵۷۵۴/۸ ≈ ۱۵۷۵۵.)

ب) یک **دنبالهٔ هندسی** با جملهٔ اول ۱۶۵۸۴ و قدر نسبت ۰/۹۵ تشکیل می‌شود: t_n = 16584 × (0.95)^(n−1).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی (۱) دهم - فصل دوم

مثلثات

فهرست

۸۰ صفحه ۳۰ · کار در کلاس — تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویه ... ۴۴

۸۱ صفحه ۳۰ · فعالیت — نسبت اضلاع و تانژانت ۴۴

۸۲ صفحه ۳۱ · فعالیت — تانژانت و کتانژانت در مثلث‌های قائم‌الزاویه ... ۴۵

۸۳ صفحه ۳۱ · فعالیت — مثلث متساوی‌الاضلاع و نسبت‌های ۳۰°، ۶۰° و ۴۵° ... ۴۵

۸۴ صفحه ۳۲ · کار در کلاس — جدول نسبت‌های مثلثاتی ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° ... ۴۶

۸۵ صفحه ۳۳ · فعالیت — محاسبهٔ تقریبی نسبت‌ها، مساحت مثلث ... ۴۶

۸۶ صفحه ۳۴ · کار در کلاس — طول طناب بالن ۴۷

۸۷ صفحه ۳۴ · کار در کلاس — نردبان و پنجره ۴۸

۸۸ صفحه ۳۴ · تمرین — ارتفاع درخت ۴۸

۸۹ صفحه ۳۵ · تمرین — مساحت شش‌ضلعی منتظم ۴۸

۹۰ صفحه ۳۵ · تمرین — فاصلهٔ فرود هواپیما ۴۹

۹۱ صفحه ۳۵ · تمرین — مساحت مثلث با دو ضلع و زاویهٔ بین ... ۴۹

۹۲ صفحه ۳۵ · تمرین — مساحت مثلث متساوی‌الساقین ... ۴۹

۹۳ صفحه ۳۶ · فعالیت — زاویه‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی ۴۹

۹۴ صفحه ۳۶ · فعالیت — سینوس و کسینوس روی دایرهٔ مثلثاتی ... ۵۰

۹۵ صفحه ۳۷ · کار در کلاس — ربع‌های مثلثاتی ۵۰

۹۶ صفحه ۳۷ · کار در کلاس — مثبت بودن نسبت‌ها در ربع اول ... ۵۱

۹۷ صفحه ۳۸ · فعالیت — نسبت‌های مثلثاتی ۹۰°، ۱۸۰° و ۲۷۰° ... ۵۱

۹۸ صفحه ۳۸ · کار در کلاس — جدول نسبت‌های زاویه‌های مرزی ... ۵۲

۹۹ صفحه ۳۸ · فعالیت — علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌ها ... ۵۲

۱۰۰ صفحه ۳۹ · فعالیت — یافتن نقطه و نسبت‌ها از روی یک نسبت ... ۵۳

۱۰۱ صفحه ۴۰ · فعالیت — شیب خط و تانژانت ۵۳

۱۰۲ صفحه ۴۰ · کار در کلاس — شیب خط و زاویه ۵۴

۱۰۳ صفحه ۴۰ · تمرین — ناحیهٔ زاویه‌ها ۵۴

۱۰۴ صفحه ۴۱ · تمرین — یافتن سایر نسبت‌ها ۵۵

۱۰۵ صفحه ۴۱ · تمرین — تانژانت و سینوس هم‌علامت ۵۵

۱۰۶ صفحه ۴۱ · تمرین — حدود زاویه از روی علامت ۵۵

۱۰۷ صفحه ۴۱ · تمرین — حاصل‌ضرب سینوس و کسینوس مثبت ... ۵۵

۱۰۸ صفحه ۴۱ · تمرین — مقایسهٔ تانژانت و کتانژانت ۵۶

۱۰۹ صفحه ۴۱ · تمرین — مقایسهٔ سینوس و کسینوس ۵۶

۱۱۰ صفحه ۴۱ · تمرین — معادلهٔ خط با زاویهٔ ۴۵° ۵۶

۱۱۱ صفحه ۴۱ · تمرین — معادلهٔ خط ۱ از روی شکل ۵۶

۱۱۲ صفحه ۴۲ · فعالیت — مثلث ۳-۴-۵ و رابطهٔ $\sin^2+\cos^2=1$ ... ۵۷

۱۱۳ صفحه ۴۳ · کار در کلاس — بیان سینوس و کسینوس با رابطهٔ اصلی ... ۵۷

۱۱۴ صفحه ۴۳ · کار در کلاس — تانژانت برحسب کسینوس و کتانژانت برحسب سینوس ... ۵۸

۱۱۵ صفحه ۴۳ · کار در کلاس — مقدارهای tan و cot از روی $\tan\alpha$ ... ۵۸

۱۱۶ صفحه ۴۴ · کار در کلاس — اثبات اتحادهای مثلثاتی ۵۸

۱۱۷ صفحه ۴۴ · کار در کلاس — تشخیص اتحاد ۵۸

۱۱۸ صفحه ۴۴ · کار در کلاس — ساختن اتحاد با ضرب ۵۹

۱۱۹ صفحه ۴۵ · تمرین — نسبت‌های α در ربع دوم با cos = -۳/۵ ... ۵۹

۱۲۰ صفحه ۴۵ · تمرین — نسبت‌ها در ربع چهارم با tan = -۳/۴ ... ۵۹

۱۲۱ صفحه ۴۵ · تمرین — نسبت‌های ۱۳۵° ۶۰

۱۲۲ صفحه ۴۵ · تمرین — نسبت‌های ۲۴۰° ۶۰

۱۲۳ صفحه ۴۵ · تمرین — عرض رودخانه ۶۰

۱۲۴ صفحه ۴۶ · تمرین — بررسی تساوی‌های مثلثاتی ۶۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۰ صفحه ۳۰ کار در کلاس

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و $\hat{A} = \hat{A}' = ۹۰^\circ$، A'B'C' و $\hat{C} = \hat{C}'$. جاهای خالی را کامل کنید.

۲ از تساوی AB/A'B' = AC/A'C' (چرا؟)، می‌توان نتیجه گرفت AB/AC = A'B'/A'C'. با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید.

قسمت ۱: دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و A'B'C دو زاویهٔ برابر دارند ($\hat{A} = \hat{A}' = ۹۰^\circ$ و $\hat{C} = \hat{C}'$)؛ پس طبق حالت «دو زاویه» متشابه‌اند: ABC ~ A'B'C. در دو مثلث متشابه نسبت اضلاع متناظر برابر است، بنابراین:

= =

قسمت ۲: از تساوی = با «ضرب طرفین در وسطین» (یعنی AB × A'C' = AC × A'B) و تقسیم دو طرف بر AC × A'C') نتیجه می‌شود = . به همین ترتیب:

= و =

یعنی نسبت هر دو ضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با نسبت دو ضلع نظیر در A'B'C برابر است؛ نتیجه: اگر یک زاویهٔ حادهٔ دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشد، نسبت‌های AB/BC، AB/AC و AC/BC در هر دو مثلث یکسان است.

۸۱ صفحه ۳۰ فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی AE/AB = EF/BC را بررسی کنید.

۲ نقطهٔ دیگری مثل M را در امتداد AC در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویهٔ A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید: BC/AB = ... = ... = ...

قسمت ۱: در شکل، BC و EF هر دو بر ضلع AB عمودند (مثلث‌های AEF و ABC هر دو قائم‌الزاویه‌اند و زاویهٔ A بین آن‌ها مشترک است). پس دو زاویه برابر است و ABC ~ AEF. از تشابه نتیجه می‌شود:

= = ؛ پس تساوی خواسته‌شده درست است.

قسمت ۲: مثلث AMN نیز قائم‌الزاویه (زاویهٔ N قائمه) و دارای زاویهٔ مشترک A است، پس با ABC متشابه است و نسبت ضلع مقابل به مجاور زاویهٔ A در هر سه مثلث یکی است:

= =

این نسبت ثابت است و فقط به اندازهٔ زاویهٔ A بستگی دارد (همان تانژانت زاویهٔ A).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۲ صفحه ۳۱ فعالیت

۱ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید. tan F = ...، cot M = MN/NO = ...، tan A = BC/AB = ... = cot F ،... ، tan M = ...، cot A = ... = ...

طبق تعریف، tan = (ضلع مقابل) ÷ (ضلع مجاور) و cot = (ضلع مجاور) ÷ (ضلع مقابل). با اندازه‌های روی شکل (مثلث ABC قائم‌الزاویه در B با AB = ۴ و BC = ۳ و AC = ۵؛ مثلث MNO قائم‌الزاویه در N با MN = ۲ و NO = ۲/۵):

- tan A = BC/AB = و cot A = AB/BC =
- cot M = MN/NO = = و tan M = NO/MN = =
- برای مثلث EFG نیز به همین ترتیب: tan F = (ضلع مقابل زاویهٔ F) ÷ (ضلع مجاور زاویهٔ F) و cot F = معکوس آن؛ اندازه‌ها را از روی شکل جای‌گذاری کنید.

توجه: tan A و cot A معکوس یکدیگرند (tan A × cot A = ۱).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۳ صفحه ۳۱ فعالیت

۲ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویهٔ A با پاره‌خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM ..... ضلع BC است. بنابراین BM = MC = ...

ب) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید. tan 30° = BM/AM = ... ، tan 60° = AM/BM = ...

پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ ۴۵° را پیدا کنید.

الف) در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویهٔ رأس، هم ارتفاع است و هم میانه؛ پس AM بر ضلع BC **عمود** و **عمودمنصف** آن است. بنابراین BM = MC = ۱.

ب) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM داریم AB = ۲ و BM = ۱، پس و . زاویهٔ B برابر ۶۰° و زاویهٔ BAM برابر ۳۰° است. پس:

tan 60° = = = ، tan 30° = = = =

پ) مربعی به ضلع ۱ را با قطرش نصف کنید؛ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی با دو ضلع قائمهٔ ۱ و ۱ و وتر به‌دست می‌آید که زاویه‌های حادهٔ آن ۴۵° است. پس:

tan 45° = = ۱ و cot 45° = = ۱

توشه ای برای موفقیت

۸۴ صفحه ۳۲ | کار در کلاس

با پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° به کمک شکل فعالیت قبل، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

از مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ (AB = ۲، BM = ۱ ، AM =) و مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین (اضلاع ۱، ۱ و) به‌دست می‌آید:

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin A			
cos A			
tan A		۱	
cot A		۱	

مثلاً sin 45° = = و tan 30° = = (پس از گویا کردن مخرج).

۸۵ صفحه ۳۳ | فعالیت

۱ یک زاویهٔ ۵۰° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۵۰° را به‌صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به‌دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.

۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم مساحت مثلث ABC = ½ × قاعده × ارتفاع.

الف) با توجه به اینکه sin 50° ≅ ۰/۷۶، داریم: AH = sin 50°/وتر = ... ⇒ AH ≅ .....

ب) با توجه به قسمت (الف) داریم: مساحت مثلث ABC = ½ × AH × BC ≅ ½ × ..... × ..... ≅ .....

۳ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها نشان دهید: مساحت ABC = ½ × AB × BC × sin B.

۱) پاسخ نمونه: زاویهٔ ۵۰° رسم می‌کنیم و روی یک ضلع آن نقطه‌ای به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از رأس می‌گیریم و از آن عمودی بر ضلع دیگر می‌کشیم. با خط‌کش اندازه می‌گیریم: ضلع مجاور ≅ ۶/۴ cm، ضلع مقابل ≅ ۷/۷ cm، وتر = ۱۰ cm. پس تقریباً:

نسبت	از اندازه‌گیری (تقریبی)	ماشین حساب
$\sin 50^\circ$	۷/۷ ÷ ۱۰ ≅ ۰/۷۷	۰/۷۶۶
$\cos 50^\circ$	۶/۴ ÷ ۱۰ ≅ ۰/۶۴	۰/۶۴۳
$\tan 50^\circ$	۷/۷ ÷ ۶/۴ ≅ ۱/۲۰	۱/۱۹۲
$\cot 50^\circ$	۶/۴ ÷ ۷/۷ ≅ ۰/۸۳	۰/۸۳۹

مقدارهای اندازه‌گیری‌شده به مقدارهای واقعی بسیار نزدیک‌اند و اختلاف آن‌ها به خاطر خطای اندازه‌گیری است. (اندازه‌های دانش‌آموز ممکن است کمی متفاوت باشد.)

۲) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، AB = ۶ متر وتر است (BC = ۸ متر قاعده و زاویهٔ B برابر ۵۰° است).

الف) متر.

ب) متر مربع.

۳) در مثلث ABC ارتفاع AH را بر ضلع BC رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم ، پس AH = AB × sin B. مساحت:

اگر زاویهٔ B باز باشد، پای ارتفاع بیرون مثلث می‌افتد، ولی چون $\sin(180^\circ - B) = \sin B$ است، همین رابطه برقرار می‌ماند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۸۶ صفحه ۳۴ کار در کلاس

۱ در راهپیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا اندازهٔ زاویهٔ B را به‌دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به‌دست آورید.

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ ۶۵°، طول طناب دوم را پیدا کنید. ($\sin 65^\circ \cong$ ۰/۹)

طبق شکل، در مثلث ABC زاویهٔ A برابر ۶۰°، زاویهٔ C برابر ۶۵° و AB = ۳۰ متر است (طناب دوم BC است).

الف) مجموع زاویه‌های مثلث ۱۸۰° است، پس $\hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ$ = **۵۵°**. ارتفاع BH را از B بر AC فرود می‌آوریم.

ب) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH: متر.

پ) در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC: متر.

پس طول طناب دوم حدود **۲۸/۹ متر** است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۷ صفحه ۳۴ کار در کلاس

۲ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta = ۳۰^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

$BC \Rightarrow \dots\dots = ۲BC \Rightarrow \sin\theta = BC/۸ = ½ = \dots\dots$ ؛ اکنون به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم: $AB^2 = AC^2 - BC^2$

$\dots\dots = AB \Rightarrow \dots\dots = \dots\dots - \dots\dots =$

نردبان $AC = ۸$ وتر مثلث قائم‌الزاویه است و BC (ارتفاع پنجره از زمین) ضلع مقابل زاویهٔ θ است:

پس ارتفاع پنجره تا زمین **۴ متر** است. حال با فیثاغورس:

فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان برابر $\cong$ **۶/۹۳ متر** است.

۸۸ صفحه ۳۴ تمرین

۱ علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟

در یک لحظه، پرتوهای خورشید با زمین زاویهٔ یکسانی می‌سازند (زاویهٔ α). پس تانژانت این زاویه برای علی و درخت برابر است:

ارتفاع درخت **۹ متر** است.

۸۹ صفحه ۳۵ تمرین

۲ مساحت شش‌ضلعی منتظم زیر را به‌دست آورید. (ضلع شش‌ضلعی ۳ سانتی‌متر است.)

مرکز شش‌ضلعی را به رئوس وصل می‌کنیم؛ شش مثلث هم‌نهشت به دست می‌آید. زاویهٔ هر مثلث در مرکز و دو ضلع کناری برابر شعاع هستند، پس مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ هستند.

سانتی‌متر مربع.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۹۰ صفحه ۳۵ تمرین

۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A فرود می‌آید؟ (tan ۱۳° ≅ ۰/۲۳)

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ارتفاع (۲ کیلومتر) ضلع مقابل زاویهٔ ۱۳° و فاصلهٔ افقی تا محل فرود ضلع مجاور آن است:

هواپیما در فاصلهٔ افقی حدود **۸/۷ کیلومتر** از نقطهٔ A (محل فرود) فرود می‌آید.

۹۱ صفحه ۳۵ تمرین

۴ فرض کنید sin ۷۵° ≅ ۰/۹۶. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید. (دو ضلع ۵ و ۳ سانتی‌متر با زاویهٔ ۷۵° بین آن‌ها)

طبق رابطهٔ مساحت (فعالیت صفحهٔ ۳۳):

مساحت مثلث حدود **۷/۲ سانتی‌متر مربع** است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۲ صفحه ۳۵ تمرین

۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید. (مثلثی با دو ضلع برابر ۳ سانتی‌متر و دو زاویهٔ ۳۰° مطابق شکل)

دو زاویهٔ ۳۰° زاویه‌های مجاور قاعده‌اند، پس دو ضلع برابر ۳ سانتی‌متر است که زاویهٔ بین آن‌ها می‌باشد. با sin ۱۲۰° = sin ۶۰° = :

مساحت مثلث حدود **۳/۹ سانتی‌متر مربع** است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۳ صفحه ۳۶ فعالیت

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده‌شده، نشان دهید.

قرارداد: زاویهٔ مثبت را از نیم‌محور مثبت xها **خلاف جهت عقربه‌های ساعت** و زاویهٔ منفی را **در جهت عقربه‌های ساعت** می‌شماریم؛ ضلع انتهایی، نیم‌خطی است که از مبدأ می‌گذرد و دایره را در نقطهٔ P قطع می‌کند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

زاویه	نحوهٔ رسم	انتهای کمان
۱۳۵°	۹۰° + ۴۵° خلاف عقربه‌ها	ربع دوم
۲۲۵°	۱۸۰° + ۴۵° خلاف عقربه‌ها	ربع سوم
-۳۰°	۳۰° در جهت عقربه‌ها	ربع چهارم
-۲۱۰°	۲۱۰° در جهت عقربه‌ها (هم‌انتهای ۱۵۰°)	ربع دوم
-۲۷۰°	۲۷۰° در جهت عقربه‌ها (هم‌انتهای ۹۰°)	روی نیم‌محور مثبت y

اندازهٔ زاویه‌های دقیق در شکل کتاب مشخص‌شده است؛ برای هر زاویهٔ دیگر هم با همین روش عمل کنید.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۴ صفحه ۳۶ فعالیت

۲ فرض کنید P(x, y) نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم‌خط OP با محور Ox می‌سازد. از نقطهٔ P خطی بر محور Ox عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم.

الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به‌دست آورید. cos θ = ... و sin θ = ... و tan θ = ...

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصلهٔ نقطهٔ Q تا مبدأ ..... برابر است و فاصلهٔ P تا پای عمود، یعنی نقطهٔ Q با ..... برابر است.

الف) در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPQ وتر OP برابر شعاع، یعنی ۱ است؛ OQ = x و PQ = y. پس:

‘‘

ب) فاصلهٔ نقطهٔ Q تا مبدأ (OQ) با **cos θ** (همان x) برابر است و فاصلهٔ P تا پای عمود (PQ) با **sin θ** (همان y) برابر است.

(در حالت کلی، مختصات نقطهٔ P برابر (cos θ, sin θ) است؛ برای همین محور xها را محور کسینوس‌ها و محور yها را محور سینوس‌ها می‌نامیم.)

۹۵ صفحه ۳۷ کار در کلاس

۱ مشخص کنید انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های زیر در کدام‌یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

الف) -۹۵° ب) -۳۰° پ) ۶۵° ت) ۱۸۲°

- الف) -۹۵° در جهت عقربه‌ها است؛ -۹۵° هم‌انتهای ۲۶۵° است، پس در **ربع سوم** قرار دارد.
- ب) -۳۰° هم‌انتهای ۳۳۰° است، پس در **ربع چهارم** قرار دارد.
- پ) ۶۵° بین ۰° و ۹۰° است، پس در **ربع اول** قرار دارد.

ت) ۱۸۲° بین ۱۸۰° و ۲۷۰° است، پس در **ربع سوم** قرار دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۶ صفحه ۳۷ کار در کلاس

۲ با توجه به آنچه در فعالیت قبل به‌دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان مربوط به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟

اگر $P(x, y)$ انتهای کمان در ربع اول باشد، هر دو مختصات مثبت‌اند: $x > 0$ و $y > 0$. چون $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$، پس سینوس و کسینوس مثبت‌اند. تانژانت و کتانژانت نیز خارج‌قسمت دو عدد مثبت‌اند:

،

پس همهٔ نسبت‌های مثلثاتی در ربع اول مثبت‌اند.

۹۷ صفحه ۳۸ فعالیت

۱ در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو اگر $\theta = 90^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۲ اگر $\theta = 180^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۳ اگر $\theta = 270^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

هرگاه ضلع انتهایی زاویه بر محورها منطبق باشد، P همان نقطهٔ $C(-1, 0)$، $B(0, 1)$ یا $D(0, -1)$ است و $\cos\theta =$ x ، $\sin\theta = y$.

1. $\theta = 90^\circ: P = B(0, 1) \Rightarrow \sin 90^\circ = 1$ ، $\cos 90^\circ = 0$ ، $\tan 90^\circ = y/x = 1/0$ **تعریف نشده** ، $\cot 90^\circ = x/y =$ $0/1 = 0$.
2. $\theta = 180^\circ: P = C(-1, 0) \Rightarrow \sin 180^\circ = 0$ ، $\cos 180^\circ = -1$ ، $\tan 180^\circ = 0/(-1) = 0$ ، $\cot 180^\circ = (-1)/0$ **تعریف نشده**.
3. $\theta = 270^\circ: P = D(0, -1) \Rightarrow \sin 270^\circ = -1$ ، $\cos 270^\circ = 0$ ، $\tan 270^\circ = (-1)/0$ **تعریف نشده** ، $\cot 270^\circ$ $= 0/(-1) = 0$.

۹۸ صفحه ۳۸ کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید (زاویه‌های ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰°).

مقدار	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
sin θ	۰	۱	۰	۱-	۰
cos θ	۱	۰	۱-	۰	۱
tan θ	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cot θ	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

(۳۶۰° هم‌انتهای ۰° است، پس نسبت‌هایش با ۰° برابر است. هرجا مخرج کسر صفر شود، نسبت تعریف نشده است.)

۹۹ صفحه ۳۸ فعالیت

۱ فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه sin θ = y و cos θ = x و در ربع سوم x, y < ۰، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

۲ فرض کنید α زاویه‌ای در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

۳ جدول زیر را کامل کنید.

۱) در ربع سوم $x < ۰$ و $y < ۰$ است. پس $\tan \theta = y/x > ۰$ ، $\cos \theta = x < ۰$ ، $\sin \theta = y < ۰$ (منفی بر منفی) ، $\cot \theta = x/y > ۰$.

۲) در ربع دوم $x < ۰$ و $y > ۰$ است. پس $\cot \alpha = x/y < ۰$ ، $\tan \alpha = y/x < ۰$ ، $\cos \alpha = x < ۰$ ، $\sin \alpha = y > ۰$.

۳) جدول کامل‌شده:

مقدار	ربع اول ($۰° < \alpha < ۹۰°$)	ربع دوم ($۹۰° < \alpha < ۱۸۰°$)	ربع سوم ($۱۸۰° < \alpha < ۲۷۰°$)	ربع چهارم ($۲۷۰° < \alpha < ۳۶۰°$)
sin θ	+	+	-	-
cos θ	+	-	-	+
tan θ	+	-	+	-
cot θ	+	-	+	-

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

نکته: برای هر زاویه θ داریم $-1 \le \sin\theta \le 1$ و $-1 \le \cos\theta \le 1$ است، چون مختصات هر نقطه از دایرهٔ واحد بین -1 و 1 است.

۱۰۰ صفحه ۳۹ فعالیت

۱ فرض کنید نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به‌طوری که $\cos\theta = -\sqrt{2}/2$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $\sin\theta = y =$ .....

الف) مختصات نقطهٔ P را به‌دست آورید.

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به‌دست آورید.

۲ اگر $\cos\alpha = -2/5$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

۱ – الف) $P(x, y)$ روی دایرهٔ واحد است، پس $x^2 + y^2 = 1$. با $x = \cos\theta$ داریم: .

θ در ربع سوم است و در این ربع $y < 0$؛ پس $\sin\theta = y$ و $P =$.

ب) $\theta = 225^\circ$ و ،.

۲) چون $\cos\alpha = x < 0$ است، نقطهٔ انتهای کمان در سمت چپ محور yها است؛ یعنی α در **ربع دوم یا ربع سوم** قرار دارد. برای تعیین دقیق‌تر، علامت $\sin\alpha$ (یا $\tan\alpha$) لازم است: اگر $\sin\alpha > 0$ ربع دوم و اگر $\sin\alpha < 0$ ربع سوم.

۳) باید $y < 0$ و $x > 0$ باشد؛ یعنی ربع چهارم. مثال: $\theta = -30^\circ$ (یا 330°) که $\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2} < 0$ و $\cos(-30^\circ) = > 0$ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۱ صفحه ۴۰ فعالیت

نمودار خط $y = 2x - 4$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطهٔ B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آن‌ها به محور xها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید.

الف) تانژانت زاویهٔ α را به‌دست آورید.

ب) شیب این خط را پیدا کنید. شیب خط = تفاضل عرض‌ها ÷ تفاضل طول‌ها = ...

پ) از مقایسهٔ قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

خط محور xها را در $A(2, 0)$ قطع می‌کند $(2x - 4 = 0)$. برای نمونه $B(3, 2)$ و $C(4, 4)$ را روی خط می‌گیریم؛ پس $E(3, 0)$ و $F(4, 0)$ است.

الف) و .

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) (با ضریب x در معادلهٔ $y = 2x - 4$ نیز یکی است).

پ) $\tan \alpha$ و شیب خط هر دو برابر ۲ شد؛ یعنی شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. دلیل: همان نسبت ضلع مقابل به مجاور در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۰۲ صفحه ۴۰ کار در کلاس

۱ مراحل فعالیت بالا را برای خط‌های زیر تکرار کنید. الف) $x + y = 2$ ب) $2y - 3x = 5$

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۳۰° است و از نقطهٔ (۱, ۰) می‌گذرد.

۱ – الف) . محل برخورد با محور x: ، پس $A(-5/3, 0)$. دو نقطهٔ نمونه $B(-1, 1)$ و $C(1, 4)$ با پای عمودهای $E(-1, 0)$ و $F(1, 0)$:

، ؛ هر دو برابرند ($\alpha \cong 56/3^\circ$).

ب) ؛ شیب = −۱. خط محور xها را در $A(2, 0)$ قطع می‌کند و زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها باز است ($\alpha = 135^\circ$). زاویهٔ حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه (O، A و نقطهٔ $B(0, 2)$) برابر ۴۵° است و $\tan 45^\circ = 1$؛ ولی $\alpha = 180^\circ - 45^\circ$ پس که برابر شیب خط است.

۲) شیب خط است و از (۱, ۰) می‌گذرد، پس:

---

۱۰۳ صفحه ۴۰ تمرین

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد. الف) ۱۸۵° ب) +۲۷۰° پ) ۲۲۵° ت) −۱۳۵°

- الف) ۱۸۵° بین ۱۸۰° و ۲۷۰° است: **ربع سوم**.
- ب) ۲۷۰° زاویهٔ مرزی است و روی نیم‌محور منفی y است؛ در هیچ ناحیه‌ای نیست.
- پ) ۲۲۵° بین ۱۸۰° و ۲۷۰° است: **ربع سوم**.
- ت) −۱۳۵° (۱۳۵° در جهت عقربه‌ها) هم‌انتهای ۲۲۵° است: **ربع سوم**.

رسم: هر زاویه را از نیم‌محور مثبت xها اندازه می‌گیریم (مثبت: خلاف عقربه‌ها، منفی: هم‌جهت عقربه‌ها) و نیم‌خط انتهایی را رسم می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۰۴ صفحه ۴۱ تمرین

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

الف) $\cos\alpha = ۳/۷$ (α در ربع چهارم)

ب) $\sin\beta = -۱/۲$ (β در ربع سوم)

الف) ؛ در ربع چهارم $\sin\alpha$ منفی است:

‘‘

ب) ؛ در ربع سوم $\cos\beta$ منفی است:

‘‘

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۵ صفحه ۴۱ تمرین

۳ اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم‌علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

چون $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$ است، $\tan\theta$ و $\sin\theta$ فقط وقتی هم‌علامت‌اند که $\cos\theta > ۰$ باشد. کسینوس در ربع‌های **اول و چهارم** مثبت است. پس θ در ربع اول یا ربع چهارم قرار دارد (در ربع اول هر دو مثبت و در ربع چهارم هر دو منفی‌اند).

۱۰۶ صفحه ۴۱ تمرین

۴ حدود زاویهٔ θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید. الف) $\cos\theta > ۰$, $\sin\theta < ۰$ ب) $\cos\theta < ۰$, $\sin\theta > ۰$

الف) $y > ۰$ و $x < ۰$: ربع سوم، یعنی $۱۸۰^\circ < \theta < ۲۷۰^\circ$ (به‌اضافهٔ مضرب‌های ۳۶۰°).

ب) $y > ۰$ و $x < ۰$: ربع دوم، یعنی $۹۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$ (به‌اضافهٔ مضرب‌های ۳۶۰°).

۱۰۷ صفحه ۴۱ تمرین

۵ اگر $\sin\alpha \times \cos\alpha > ۰$، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

حاصل‌ضرب دو عدد مثبت است اگر هر دو هم‌علامت باشند: یا هر دو مثبت (ربع اول) یا هر دو منفی (ربع سوم). پس α می‌تواند در **ربع اول یا ربع سوم** باشد. در ربع دوم و چهارم علامت‌ها مخالف‌اند و حاصل‌ضرب منفی می‌شود.

۱۰۸ صفحه ۴۱ تمرین

۶ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به‌طوری‌که $\cot \alpha > \tan \alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به‌طوری‌که $\tan \beta < \cot \beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$\alpha = ۳۰^\circ$:.

$\beta = ۶۰^\circ$:.

نتیجه: tan و cot هیچ‌کدام همواره از دیگری بزرگ‌تر نیستند؛ مقایسهٔ آن‌ها به زاویه بستگی دارد. (مثلاً در ربع اول برای زاویه‌های کوچک‌تر از ۴۵° کتانژانت بزرگ‌تر و برای زاویه‌های بین ۴۵° و ۹۰° تانژانت بزرگ‌تر است و در ۴۵° برابرند.)

۱۰۹ صفحه ۴۱ تمرین

۷ در تمرین ۶ به‌جای تانژانت و کتانژانت به ترتیب سینوس و کسینوس قرار دهید و در مورد آن بحث کنید.

یعنی زاویه‌ای مثل α با $\sin \alpha > \cos \alpha$ و زاویه‌ای مثل β با $\cos \beta > \sin \beta$:

$\alpha = ۶۰^\circ$ ؛ $\beta = ۳۰^\circ$:.

نتیجه مانند تمرین قبل است: هیچ‌کدام از سینوس و کسینوس همواره بزرگ‌تر از دیگری نیست و مقایسهٔ آن‌ها به زاویه بستگی دارد (در ربع اول، برای زاویه‌های کمتر از ۴۵° کسینوس و برای زاویه‌های بین ۴۵° و ۹۰° سینوس بزرگ‌تر است و در ۴۵° برابرند).

۱۱۰ صفحه ۴۱ تمرین

۸ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۴۵° است و نقطهٔ (۰, ۲) روی آن قرار دارد.

شیب $= \tan ۴۵^\circ = ۱$ و عرض از مبدأ برابر ۲ است (نقطهٔ (۰, ۲) روی محور yها است)، پس:

۱۱۱ صفحه ۴۱ تمرین

۹ با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط l را به‌دست آورید. (زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها ۱۲۰° و عدد -۳ روی محور yها)

شیب خط: . خط محور yها را در نقطهٔ (۰, -۳) قطع می‌کند، پس:

(اگر عدد -۳ محل برخورد با محور xها باشد، معادله می‌شود.)

ایران توشه
بوسه‌ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۲ صفحه ۴۲ فعالیت

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر بگیرید (BC = ۳ ، AB = ۴ و AC = x ؛ زاویه‌های θ و α).

الف) اندازهٔ وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویهٔ θ و α به‌دست آورید.

ب) با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف)، مقدار $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ و $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ را به‌دست آورید.

پ) درستی رابطهٔ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = ۱$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث بررسی کنید.

ت) مشابه قسمت (پ) درستی رابطهٔ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = ۱$ را بررسی کنید.

الف) . θ زاویهٔ رأس A (روبه‌رو به BC = ۳) و α زاویهٔ رأس C است:

	sin	cos	tan	cot
θ				
α				

ب) و

پ) (طبق رابطهٔ فیثاغورس $AC^2 = AB^2 + BC^2$).

ت) .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۳ صفحه ۴۳ کار در کلاس

با توجه به رابطهٔ بالا، یعنی $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = ۱$، جاهای خالی را پر کنید:

الف) $\sin\alpha$ ..... $\Rightarrow \sin^2\alpha =$ ..... $\Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = ۱ \Rightarrow \pm\sqrt{\quad} =$.....

ب) $\cos\alpha$ ..... $\Rightarrow \cos^2\alpha =$ ..... $\Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = ۱ \Rightarrow \pm\sqrt{\quad} =$.....

الف)

ب)

علامت (+ یا −) با توجه به ربعی که α در آن قرار دارد تعیین می‌شود.

۱۱۴ صفحه ۴۳ کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت برحسب کسینوس و کتانژانت برحسب سینوس: در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت بر حسب سینوس به‌دست می‌آوریم. $\sin^2\alpha +$ $(\sin^2\alpha)/(\cos^2\alpha) + ۱ = ۱/(\cos^2\alpha) \Rightarrow \tan^2\alpha + ۱ = ۱/(\cos^2\alpha)$ $(\cos\alpha \neq ۰)$ و $\cos^2\alpha = ۱$.

$(\sin^2\alpha)/۱ =$ ..... = ... ⇒ ..... $(\sin\alpha \neq ۰)$.

با تقسیم دو طرف $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = ۱$ بر $\sin^2\alpha$ $(\sin\alpha \neq ۰)$:

و با تقسیم بر $\cos^2\alpha$: .

۱۱۵ صفحه ۴۳ کار در کلاس

۳ اگر $\tan\alpha = -۳/۴$ و $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

α در ربع دوم است ($\cos\alpha < ۰$ و $\sin\alpha > ۰$). از رابطهٔ :

،

بررسی: .

۱۱۶ صفحه ۴۴ کار در کلاس

۱ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$

ب) $۱/\sin\alpha + \cot\alpha = (\tan\alpha + \cos\alpha)$

الف) = طرف راست ✓

ب) از طرف راست شروع می‌کنیم:

= طرف چپ ✓

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۷ صفحه ۴۴ کار در کلاس

۲ کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = ۱ - ۲\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

از $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = ۱$ داریم $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + ۲\sin^2\alpha\cos^2\alpha = ۱$، پس:

بنابراین **(ب) یک اتحاد است**.

(الف) اتحاد نیست؛ برای نمونه $\alpha = ۴۵^\circ$: طرف چپ $= + =$ ولی طرف راست $= ۱ - ۲ \times \times = ۰$ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۱۸ صفحه ۴۴ کار در کلاس

۳ با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $\tan^2\alpha = ۱/\cos^2\alpha + ۱$ در $\cot^2\alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید؛ سپس درستی آن را اثبات کنید.

طرفین را در $\cot^2\alpha$ ضرب می‌کنیم؛ چون $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = ۱$:

اثبات: ؛ و . پس هر دو طرف برابر است و اتحاد درست است (همان اتحاد $\cot^2\alpha = ۱/\sin^2\alpha + ۱$).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۱۹ صفحه ۴۵ تمرین

۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha = -۳/۵$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

(در ربع دوم سینوس مثبت است).

،

---

۱۲۰ صفحه ۴۵ تمرین

۲ اگر $\tan\alpha = -۳/۴$ و α زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

(ربع چهارم: کسینوس مثبت).

،

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۲۱ صفحه ۴۵ تمرین

۳ اگر $\sin ۱۳۵^\circ = \sqrt{۲}/۲$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ ۱۳۵° را به‌دست آورید.

۱۳۵° در ربع دوم است و کسینوس منفی است:

،

۱۲۲ صفحه ۴۵ تمرین

۴ اگر $\tan ۲۴۰^\circ = \sqrt{۳}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ ۲۴۰° را به‌دست آورید.

۲۴۰° در ربع سوم است و sin و cos منفی‌اند:

،

۱۲۳ صفحه ۴۵ تمرین

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازهٔ ۲۰۰ متر از C به‌صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطهٔ B برسد. اگر زاویهٔ دید این شخص (از نقطهٔ B به نقطهٔ A) $\theta = ۲۰^\circ$ باشد و $\sin ۲۰^\circ \cong ۰/۳۴$، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید.)

AC عرض رودخانه است و در مثلث ABC زاویهٔ C قائمه، $BC = ۲۰۰$ و زاویهٔ B برابر ۲۰° است. عرض $AC = BC \times \tan ۲۰^\circ$. ابتدا cos و سپس tan را از sin می‌یابیم (۲۰° حاده است):

عرض رودخانه حدود **۷۲/۳۱ متر** است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۴ صفحه ۴۶ تمرین

۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos\theta/(۱ - \sin\theta) = (۱ + \sin\theta)/\cos\theta$

ب) $\tan\theta = ۱/\cos\theta \times (\sin\theta/۱)$

پ) $\cos x - \tan x = \cos x/(۱ + \sin x)/۱$

ت) $\tan\alpha = (۱ + \cot\alpha)/(\tan\alpha + ۱)$

ث) $\frac{1}{(1+\sin x)} = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{(\sin x - 1)}{1}$

الف) طرفین-وسطین: که درست است؛ یا: ✓

ب) ✓

پ) ✓

ت) ✓

ث) ✓

همهٔ تساوی‌ها اتحاد هستند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی (۱) دهم - فصل سوم

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فهرست

۱۲۵ صفحه ۴۸ · فعالیت — تساوی توانی و تساوی رادیکالی ۶۴
۱۲۶ صفحه ۴۸ · کار در کلاس — طول ضلع مکعب به حجم ۲۵ ۶۴
۱۲۷ صفحه ۴۹ · کار در کلاس — جایگاه ریشه‌ها بین دو عدد صحیح متوالی ۶۴
۱۲۸ صفحه ۴۹ · کار در کلاس — روش دو دانش‌آموز برای یافتن ضلع مکعب ۶۵
۱۲۹ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — ریشه‌ها روی محور اعداد ۶۵
۱۳۰ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — جای خالی زیر رادیکال ۶۵
۱۳۱ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — سه مکعب تو در تو ۶۶
۱۳۲ صفحه ۵۰ · فعالیت — ریشهٔ چهارم ۶۶
۱۳۳ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — جدول ریشه‌های چهارم ۶۶
۱۳۴ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — جدول ریشه‌های پنجم ۶۷
۱۳۵ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — ریشهٔ پنجمِ برابر با خودش ۶۷
۱۳۶ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — محاسبهٔ ریشهٔ پنجم ۶۷
۱۳۷ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — تکمیل عبارت دربارهٔ ریشهٔ پنجم ۶۸
۱۳۸ صفحه ۵۱ · تمرین — جایگاه ریشه‌ها بین دو عدد صحیح ۶۸
۱۳۹ صفحه ۵۲ · تمرین — مقدار تقریبی رادیکال‌ها ۶۸
۱۴۰ صفحه ۵۲ · تمرین — وصل کردن نقطه‌ها به ریشهٔ سوم ۶۹
۱۴۱ صفحه ۵۲ · تمرین — مقایسهٔ a و ریشهٔ سوم a ۶۹
۱۴۲ صفحه ۵۲ · تمرین — رنگ ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم ۷۰
۱۴۳ صفحه ۵۳ · تمرین — تکمیل جاهای خالی دربارهٔ ریشه‌ها ۷۰
۱۴۴ صفحه ۵۳ · تمرین — مقایسهٔ عددهای توان‌دار و رادیکالی ۷۰
۱۴۵ صفحه ۵۴ · فعالیت — ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ ۷۱
۱۴۶ صفحه ۵۴ · فعالیت — ریشه‌های مختلف عدد منفی ۶۴- ۷۲
۱۴۷ صفحه ۵۵ · فعالیت — جدول تعداد ریشه‌های nام ۷۲
۱۴۸ صفحه ۵۵ · فعالیت — ریشهٔ حاصل‌ضرب ۷۳
۱۴۹ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — محاسبهٔ ریشه‌ها ۷۳
۱۵۰ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — محاسبهٔ $\sqrt[5]{32}$ با ضرب رادیکال‌ها ۷۴
۱۵۱ صفحه ۵۶ · تمرین — درستی رابطهٔ $\sqrt[m]{a} = \sqrt[k]{(a^m)}(\sqrt[k]{a})$ ۷۴
۱۵۲ صفحه ۵۶ · فعالیت — $\sqrt[n]{(a^n)}$ ۷۴
۱۵۳ صفحه ۵۷ · فعالیت — $(\sqrt[n]{a})^n$ ۷۵
۱۵۴ صفحه ۵۷ · کار در کلاس — چه زمانی تساوی برقرار نیست ۷۵
۱۵۵ صفحه ۵۷ · تمرین — مقایسه با توجه به ریشه و توان ۷۶
۱۵۶ صفحه ۵۷ · تمرین — مقایسهٔ توان‌های اعداد منفی ۷۶
۱۵۷ صفحه ۵۸ · تمرین — اثبات $\sqrt[n]{(a^n)} = a$ ۷۶
۱۵۸ صفحه ۵۸ · تمرین — ریشهٔ مجموع ۷۷
۱۵۹ صفحه ۵۸ · تمرین — ریشهٔ ضرب و تقسیم ۷۷

۱۶۰ صفحه ۵۸ · تمرین — ریشهٔ خارج‌قسمت ۷۷
۱۶۱ صفحه ۶۰ · فعالیت — توان‌های کسری با صورت ۱ ۷۸
۱۶۲ صفحه ۶۰ · فعالیت — توان‌های کسری و رادیکال ۷۸
۱۶۳ صفحه ۶۱ · کار در کلاس — توان کسری و رادیکال ۷۸
۱۶۴ صفحه ۶۱ · کار در کلاس — رادیکال به توان کسری ۷۸
۱۶۵ صفحه ۶۱ · کار در کلاس — ریشهٔ ریشه ۷۹
۱۶۶ صفحه ۶۱ · تمرین — توان کسری به رادیکال ۷۹
۱۶۷ صفحه ۶۱ · تمرین — توان‌های برابر ۷۹
۱۶۸ صفحه ۶۱ · تمرین — تقسیم توان‌های هم‌پایه با نمای گویا ۷۹
۱۶۹ صفحه ۶۱ · تمرین — محاسبهٔ توان‌های کسری ۸۰
۱۷۰ صفحه ۶۲ · فعالیت — مفهوم اتحاد ۸۰
۱۷۱ صفحه ۶۲ · فعالیت — اتحاد مکعب مجموع ۸۰
۱۷۲ صفحه ۶۲ · فعالیت — مکعب تفاضل از راه دیگر ۸۱
۱۷۳ صفحه ۶۳ · کار در کلاس — ضرب و ساده کردن عبارت‌ها ۸۱
۱۷۴ صفحه ۶۳ · کار در کلاس — اتحاد مجموع و تفاضل مکعب‌ها ۸۱
۱۷۵ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — تجزیه با اتحاد مکعب ۸۱
۱۷۶ صفحه ۶۴ · فعالیت — مضرب و شمارنده در عبارت‌های جبری ۸۲
۱۷۷ صفحه ۶۴ · فعالیت — مضرب بودن $27a^3 - 1$ ۸۲
۱۷۸ صفحه ۶۴ · فعالیت — عبارت‌های گویا ۸۲
۱۷۹ صفحه ۶۵ · فعالیت — مقدارهای تعریف‌نشدهٔ عبارت گویا ۸۳
۱۸۰ صفحه ۶۵ · فعالیت — جمع و تفریق عبارت‌های گویا ۸۳
۱۸۱ صفحه ۶۵ · کار در کلاس — ساده کردن عبارت‌های گویا با تجزیه ۸۳
۱۸۲ صفحه ۶۵ · کار در کلاس — قرار دادن $a = \sqrt[3]{2x}$ در اتحاد ۸۴
۱۸۳ صفحه ۶۵ · فعالیت — گویا کردن مخرج (ضرب در رادیکال مناسب) ۸۴
۱۸۴ صفحه ۶۶ · فعالیت — گویا کردن مخرج با مزدوج ۸۴
۱۸۵ صفحه ۶۶ · فعالیت — اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌ها با رادیکال ۸۴
۱۸۶ صفحه ۶۷ · فعالیت — گویا کردن مخرج با ریشهٔ سوم ۸۵
۱۸۷ صفحه ۶۷ · تمرین — تجزیه عبارت‌ها ۸۵
۱۸۸ صفحه ۶۷ · تمرین — گویا کردن مخرج کسرها ۸۵
۱۸۹ صفحه ۶۷ · تمرین — محاسبهٔ حاصل‌ضرب‌ها با اتحاد ۸۶
۱۹۰ صفحه ۶۷ · تمرین — جمع و تفریق عبارت‌های گویا ۸۶
۱۹۱ صفحه ۶۷ · تمرین — کاربرد مزدوج ۸۶
۱۹۲ صفحه ۶۸ · خواندنی — سه‌تایی فیثاغورسی ۸۷
۱۹۳ صفحه ۶۸ · خواندنی — جادوی توان ۸۷
۱۹۴ صفحه ۶۸ · خواندنی — مثلث خیام ۸۷

irantooshe.ir

۱۲۵ صفحه ۴۸ فعالیت

اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها:

$-۳ = \sqrt[3]{(-۲۷)} \Leftrightarrow -۲۷ = (-۳)^3$ ، $۸۱ \sqrt{۸۱} = ۹ \Leftrightarrow ۹^2 =$

$\Leftrightarrow -۱۲۵ = (-۵)^3$ ... $\Leftrightarrow ۵ = \sqrt[3]{۱۲۵}$ ... $\Leftrightarrow ۰/۰۶۲۵ = (۰/۲۵)^2$ ... $\Leftrightarrow -۲ = \sqrt[3]{(-۸)}$ ... $\Leftrightarrow ۰/۲۵ = (۰/۵)^2$ ...

هر تساوی توانی با تساوی رادیکالی هم‌ارز است (اگر n زوج باشد، b باید نامنفی در نظر گرفته شود). پس:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۶ صفحه ۴۸ کار در کلاس

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 مترمکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.

طول ضلع: ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ حجم مکعب: ۱ ، ... ، ... ، ... ، ۱۲۵ ، ...

طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶

چون $۸ < ۲۵ < ۲۷$ یعنی ، طول ضلع عددی بین ۲ و ۳ است و چون ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است، حدس می‌زنیم حدود ۲/۹ باشد. آزمایش: که کمی کمتر از ۲۵ است؛ پس طول ضلع کمی بزرگ‌تر از ۲/۹ است (حدود ۲/۹۲ متر) و مقدار دقیق آن است.

۱۲۷ صفحه ۴۹ کار در کلاس

۲ مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است:

الف) چون $۲۵ < ۳۰ < ۳۶$ پس $۵ < \sqrt{۳۰} < ۶$. همچنین چون $۸ < ۱۵ < ۲۷$ پس $۲ < \sqrt[3]{۱۵} < ۳$.

ب) $\sqrt{۱۰}$ پ) $\sqrt[3]{(-۱۷)}$ ت) $\sqrt[3]{۲۰}$

ب) چون $۹ < ۱۰ < ۱۶$ پس .

پ) چون $۸ < ۱۷ < ۲۷$ پس و در نتیجه .

ت) چون $۸ < ۲۰ < ۲۷$ پس .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۸ صفحه ۴۹ کار در کلاس

دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه‌رو به‌دست آورده‌اند: روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

احمد: چون $۲^۳ = ۸$ و $۳^۳ = ۲۷$ و $۸ < ۲۵ < ۲۷$ پس $۲ < \sqrt[۳]{۲۵} < ۳$. بهتر است ۲/۸ را امتحان کنم.

$(۲/۸)^۳ = ۲/۸ \times ۲/۸ \times ۲/۸ = ۲۱/۹۵۲ \neq ۲۵$ ؟

محسن: ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است تا ۸، پس بهتر است عدد ۲/۹ را امتحان کنم. $(۲/۹)^۳ = ۲/۹ \times ۲/۹ \times ۲/۹ = ۲۴/۳۸۹ \approx ۲۴/۴ \neq ۲۵$ ؟

روش احمد: ابتدا با مکعب‌های کامل ۸ و ۲۷ تشخیص می‌دهد که ریشه بین ۲ و ۳ است. سپس عدد ۲/۸ را حدس می‌زند و مکعب آن را حساب می‌کند: ۲۱/۹۵۲ که از ۲۵ کمتر است؛ پس ۲/۸ هنوز کوچک است و ریشه بزرگ‌تر از ۲/۸ است. (روش «حدس و آزمایش».)

روش محسن: او توجه می‌کند که ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است، پس ریشه باید به ۳ نزدیک‌تر باشد و ۲/۹ را امتحان می‌کند: ۲۴/۳۸۹ که خیلی به ۲۵ نزدیک است ولی هنوز کمی کمتر از آن است؛ پس ریشه کمی بزرگ‌تر از ۲/۹ است (حدود ۲/۹۲). این روش با استفاده از نزدیکی به مکعب‌های کامل، حدس بهتری می‌زند.

هر دو روش تقریب‌هایی از $\sqrt[۳]{۲۵}$ می‌دهند؛ مقدار دقیق آن اعشاری پایان‌پذیر یا متناوب نیست و فقط با نماد نمایش داده می‌شود.

۱۲۹ صفحه ۵۰ کار در کلاس

۳ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد نشان دهید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید): $\sqrt[۳]{۱}$ ، $\sqrt[۳]{۳}$ ، $\sqrt[۳]{۱۴}$ ، $\sqrt[۳]{۴}$ ، $\sqrt[۳]{(-۱۲۵)}$ ، $\sqrt[۳]{(-۸)}$ و ...

ریشه	$\sqrt[۳]{۱}$	$\sqrt[۳]{۳}$	$\sqrt[۳]{۴}$	$\sqrt[۳]{۱۴}$	$\sqrt[۳]{(-۸)}$	$\sqrt[۳]{(-۱۲۵)}$
مقدار	۱	$\approx ۱/۴۴$	$\approx ۱/۵۹$	$\approx ۲/۴۱$	-۲	-۵

برای نمایش، هر عدد را روی محور در جای مقدارش (برای ریشه‌های غیردقیق، به‌طور تقریبی) علامت می‌زنیم؛ مثلاً $\sqrt[۳]{۳}$ کمی بیشتر از ۱/۴ و $\sqrt[۳]{۱۴}$ کمی بیشتر از ۲/۴ است و $\sqrt[۳]{(-۸)}$ و $\sqrt[۳]{(-۱۲۵)}$ سمت چپ صفر، در ۲- و ۵- قرار می‌گیرند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳۰ صفحه ۵۰ کار در کلاس

۴ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف) $۴ < \square\sqrt{} < ۵$ **ب)** $۹ < \square\sqrt[3]{} < ۱۰$

الف) باید $۴^2 < \square < ۵^2$ یعنی $۱۶ < \square < ۲۵$؛ مثلاً $\sqrt{۱۷}$ ، $\sqrt{۲۰}$ یا $\sqrt{۲۴}$ (هر عدد بین ۱۶ و ۲۵).

ب) باید $۹^3 < \square < ۱۰^3$ یعنی $۷۲۹ < \square < ۱۰۰۰$؛ مثلاً $\sqrt[3]{۸۰۰}$ یا $\sqrt[3]{۹۰۰}$ (هر عدد بین ۷۲۹ و ۱۰۰۰).

۱۳۱ صفحه ۵۰ کار در کلاس

۵ سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

ضلع مکعب بزرگ و ضلع مکعب کوچک است. مکعب میانی باید از کوچک بزرگ‌تر و از بزرگ کوچک‌تر باشد، پس حجم آن بین ۲۷ و ۶۴ و ضلع آن عددی بین ۳ و ۴ است. مثلاً:

- ضلع ۳/۲ (حجم ۳۲/۷۶۸)
- ضلع ۳/۵ (حجم ۴۲/۸۷۵)
- ضلع ۳/۸ (حجم ۵۴/۹ ≈ یا ۳/۴۲ ≈)

۱۳۲ صفحه ۵۰ فعالیت

۱ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشهٔ چهارم را تعریف کرد. با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی داریم: $۲^4 = ۱۶$ ، $(-۲)^4 = ۱۶ \Rightarrow$ ریشه‌های چهارم ۱۶: ۲ و ۲- ؛ $۵^4 = ۶۲۵$ ، $(-۵)^4 = ۶۲۵ \Rightarrow$ ریشه‌های چهارم ۶۲۵: ۵ و ۵-.

آیا ۱۶- ریشهٔ چهارم دارد؟ آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر ۱۶- شود؟ اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای ..... ریشهٔ چهارم است که ..... یکدیگرند. عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

نه؛ ۱۶- ریشهٔ چهارم ندارد، زیرا هر عدد (مثبت یا منفی) وقتی به توان ۴ برسد نامنفی می‌شود: و هرگز برابر ۱۶- نمی‌شود.

تکمیل: هر عدد مثبت دارای **دو** ریشهٔ چهارم است که **قرینهٔ** یکدیگرند (مثل). عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

۱۳۳ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

عدد: ۱۶ ، ۶۲۵ ، ۱۰,۰۰۰ ، ۳۱۲۵ ، (دلخواه) ریشه‌های چهارم: ۲ و ۲- ، ۵ و ۵- ، ... ، ...

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰,۰۰۰	(دلخواه) ۸۱
ریشه‌های چهارم	۲ و ۲-	۵ و ۵-	۱۰ و ۱۰-	۳ و ۳-

برای عدد ۳۱۲۵ (که توان چهارم عدد درستی نیست): دو ریشهٔ چهارم دارد (چون $۵^4 = ۶۲۵ < ۳۱۲۵ < ۱۰^4$).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۳۴ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد: ۲۴۳- ، ۳۲- ، ... ؛ ریشهٔ پنجم: ... ، ... ، ۱- ، ۰ ، ۱ ، ۵ ، ۱۰

عدد	۲۴۳-	۳۲-	۱-	۰	۱	۳۱۲۵	۱۰۰۰۰۰
ریشهٔ پنجم	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۵	۱۰

چون و و برای ستون‌های بعد و .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۳۵ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۳ ریشهٔ پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟

باید داشته باشیم:

پس یا یعنی a = ۱ یا a = ۱۰-. جواب: **۰ و ۱ و ۱-**.

---

۱۳۶ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۴ محاسبه کنید. $\sqrt[5]{(1/100000)}$ ، $\sqrt[5]{(-0/00032)}$ ، $\sqrt[5]{(1/32)}$

- چون
- چون
- چون

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳۷ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای ..... ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشهٔ پنجم آن ..... است.

هر عدد مثبت یا منفی دارای **یک** ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد، ریشهٔ پنجم آن **منفی** است.

۱۳۸ صفحه ۵۱ تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این‌صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی موردنظر بین آن‌ها باشد.

$\sqrt{16}$ ، $\sqrt{20}$ ، $\sqrt[4]{400}$ ، $\sqrt{75}$ ، $\sqrt[3]{(-8)}$ ، $\sqrt[5]{400}$ ، $\sqrt[3]{(-90)}$ ، $\sqrt[3]{250}$ ، $\sqrt[5]{1}$ ، $-\sqrt[4]{20}$

عدد	نتیجه	دلیل
	۴	$۴^2 = ۱۶$ =
	بین ۴ و ۵	$۱۶ < ۲۰ < ۲۵$
	بین ۴ و ۵	$۴^4 = ۲۵۶ < ۴۰۰ < ۶۲۵ = ۵^4$
	بین ۸ و ۹	$۶۴ < ۷۵ < ۸۱$
	۲-	$(-۲)^3 = -۸$
	بین ۳ و ۴	$۳^5 = ۲۴۳ < ۴۰۰ < ۱۰۲۴ = ۴^5$
	بین ۵- و ۴-	$۶۴ < ۹۰ < ۱۲۵$
	بین ۶ و ۷	$۲۱۶ < ۲۵۰ < ۳۴۳$
	۱	۱۱^5 =
	بین ۳- و ۲-	$۳\ ۲^4 = ۱۶ < ۲۰ < ۸۱ = ۳^4 \Rightarrow ۲ < \sqrt[4]{20} <$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳۹ صفحه ۵۲ تمرین

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$\sqrt{10}$ ، $\sqrt[3]{7}$ ، $\sqrt[4]{25}$ ، $\sqrt[5]{16}$ ، $\sqrt[5]{64}$

عدد	مقدار تقریبی
	۳/۲
	۱/۹
	۲/۲
	۱/۷
	۲/۳

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۰ صفحه ۵۲ تمرین

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص‌شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص‌شده روی محور پایین که متناظر با ریشهٔ سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).

هر نقطهٔ a از محور بالا را به نقطهٔ روی محور پایین وصل می‌کنیم. چند مثال عددی:

- ۸ ← ۲ ، ۲۷ ← ۳ ، ۱ ← ۱ ، ۰ ← ۰
- ۸- ← ۲- ، ۲۷- ← ۳- ، ۱- ← ۱-
- عددهای بین ۰ و ۱ (مثل ۰/۱۲۵ به عدد بزرگ‌تر از خودشان (۰/۵) وصل می‌شوند و عددهای بزرگ‌تر از ۱ به عدد کوچک‌تر از خودشان؛ برای عددهای منفی بین ۰ و ۱- برعکس: ۰/۱۲۵- به ۰/۵- وصل می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۱ صفحه ۵۲ تمرین

۴ با توجه به آنچه دربارهٔ ریشهٔ سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a . a$ چه عددی می‌تواند باشد؟

ب) a عددی است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a . a$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a . a$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

الف) ؛ مثلاً

ب) پس **a = ۰ ، ۱ یا ۱-.**

پ) ؛ مثلاً

ت) برای a منفی: (مثلاً) و (مثلاً).

---

۱۴۲ صفحه ۵۲ تمرین

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.

شکل‌ها در متن موجود نیست؛ برای تشخیص هر رنگ از قاعده‌های زیر استفاده کنید a) عدد نقطهٔ بالا):

- اگر a منفی باشد، ریشهٔ چهارم وجود ندارد؛ پس فقط ریشه‌های سوم و پنجم (هر دو منفی) دیده می‌شوند.
- اگر a > ۱: هرچه ریشه بزرگ‌تر شود، حاصل کوچک‌تر و به ۱ نزدیک‌تر است: $\sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a} < a > ۱$؛ پس نزدیک‌ترین نقطه به ۱ ریشهٔ پنجم است.
- اگر ۰ < a < ۱: هرچه ریشه بزرگ‌تر شود، حاصل بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر است: $\sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a} < a < ۱$؛ پس نزدیک‌ترین نقطه به ۱ باز هم ریشهٔ پنجم است.
- اگر $\sqrt[3]{a}$:۱- < a < ۰ و $\sqrt[5]{a}$ هر دو منفی‌اند و $\sqrt[5]{a}$ از $\sqrt[3]{a}$ به ۰ نزدیک‌تر (بزرگ‌تر) است؛ برای ۱- < a < ۰ برعکس: $\sqrt[5]{a}$ از $\sqrt[3]{a}$ به ۱- نزدیک‌تر است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۴۳ صفحه ۵۳ تمرین

۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ..... ریشه‌های چهارم عدد ..... می‌باشند.

ب) اگر a^4 = ۱۶ باشد، در این صورت حاصل عبارت + $\sqrt[3]{(a^3)}$ ۵ برابر است با .....

الف) اعداد ۳ و **۳-** ریشه‌های چهارم عدد **۸۱** هستند، زیرا .

ب) از a^4 = ۱۶ نتیجه می‌شود a = ۲ یا a = -۲. چون ، مقدار عبارت است: اگر a = ۲ برابر **۷** و اگر a = -۲ برابر **۳** می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۴۴ صفحه ۵۳ تمرین

۷ در جاهای خالی یکی از علامت‌های «>»، «<» یا «=» را قرار دهید.

$(۰/۱)^5 \square (۰/۱)^3$ ، $(-۰/۱)^5 \square (-۰/۱)^3$ ، $(-۲)^4 \square (-۲)^5$ ، $۰/۱ \square \sqrt[5]{۰/۰۰۰۰۱}$

- (چون $۰/۱^5 = ۰/۰۰۰۰۱$ پس علامت «=» است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۵ صفحه ۵۴ فعالیت

۱ مشابه آنچه که برای ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشهٔ ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های دوم: ۸ و ... ؛ ریشهٔ سوم: ۴ ؛ ریشه‌های چهارم: $\sqrt[4]{۶۴}$ و ... ؛ ریشهٔ پنجم: $\sqrt[5]{۶۴}$ ؛ ریشه‌های ششم: ... و ... ؛ ریشهٔ هفتم: $\sqrt[7]{۶۴}$ ؛ ریشه‌های هشتم: $\sqrt[8]{۶۴}$ و ...

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{۶۴}$ یا همان ..... و ..... هستند؛ زیرا $۶۴ . (...)^6 = (...)^6 =$

دربارهٔ ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟

به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$، دربارهٔ ریشهٔ nام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟

در حالت کلی‌تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$، دربارهٔ تعداد ریشه‌های nام a چه می‌توان گفت؟

ریشه	مقدار
دوم	۸ و ۸-
سوم	۴ (تنها یک ریشه)
چهارم	و
پنجم	(تنها یک ریشه)
ششم	۲ و ۲-
هفتم	(تنها یک ریشه)
هشتم	و

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد **۲** و **۲-** هستند؛ زیرا $۶۴ . (-۲)^6 = ۲^6 =$

ریشهٔ هفتم ۶۴ مانند ریشهٔ پنجم و سوم فقط یکی (مثبت) است و ریشه‌های هشتم ۶۴ مانند ریشه‌های دوم، چهارم و ششم دو تاست که قرینهٔ هم‌اند.

به‌طور کلی برای عدد مثبت (مثل ۶۴): اگر n فرد باشد، **یک** ریشهٔ nام (مثبت) و اگر n زوج باشد، **دو** ریشهٔ nام قرینهٔ هم دارد. همین برای هر عدد مثبت a نیز درست است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۴۶ صفحه ۵۴ فعالیت

۲ جدول زیر را که دربارهٔ ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.

ریشهٔ دوم: وجود ندارد ؛ ریشهٔ سوم: $\sqrt[3]{(-64)} = -4$ ؛ ریشهٔ چهارم: وجود ندارد ؛ ریشهٔ پنجم: $\sqrt[5]{(-64)}$ ؛ ریشهٔ ششم، هفتم، هشتم: ...

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان ..... برسد و مساوی ۶۴- شود.

دربارهٔ ریشه‌های nام ($n \in \mathbb{N}$ ، ۶۴-) بحث کنید.

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، دربارهٔ ریشهٔ nام a چه می‌توان گفت؟

ریشه	مقدار
دوم	وجود ندارد
سوم	۴-
چهارم	وجود ندارد
پنجم	
ششم	وجود ندارد
هفتم	
هشتم	وجود ندارد

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان **زوج** برسد و مساوی ۶۴- شود (هر عدد به توان زوج نامنفی است).

بحث: اگر n فرد باشد، ۶۴- دقیقاً یک ریشهٔ nام (منفی) دارد؛ اگر n زوج باشد، ریشهٔ nام ندارد. همین‌طور برای هر عدد منفی a: اگر n فرد باشد، **یک** ریشهٔ nام منفی دارد و اگر n زوج باشد، ریشهٔ nام **ندارد**.

۱۴۷ صفحه ۵۵ فعالیت

۳ جدول زیر را کامل کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

n زوج $a > 0$: $\sqrt[n]{a} = \ldots$ و $-\sqrt[n]{a} = \ldots$ ؛ n فرد $a > 0$: $\sqrt[n]{a} = \ldots$ ؛ n زوج $a < 0$: $\ldots$ ؛ n فرد $a < 0$: $\ldots$

حالت	نتیجه	مثال
n زوج، $a > 0$	دو ریشهٔ nام: و	ریشه‌های چهارم ۸۱: و ۳-
n فرد، $a > 0$	یک ریشهٔ nام مثبت:	
n زوج، $a < 0$	ریشهٔ nام وجود ندارد	تعریف‌نشده
n فرد، $a < 0$	یک ریشهٔ nام منفی:	

۱۴۸ صفحه ۵۵ فعالیت

۴ در سال نهم دیدید که برای هر دو عدد مثبت a و b: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

آیا رابطهٔ بالا دربارهٔ $\sqrt[3]{}$ نیز برقرار می‌باشد؟ برای هر دو عدد a و b: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ مثال بزنید.

دربارهٔ $\sqrt[4]{}$ با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید a و b ..... باشند. $\sqrt[4]{81} \times \sqrt[4]{16} = 3 \times 2 = \sqrt[4]{(81 \times 16)}$.۶

دربارهٔ $\sqrt[4]{ab}$ چه می‌توان گفت؟

دربارهٔ $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b}$: آیا a و b حتماً باید نامنفی باشند؟ مثالی از a و b نامنفی و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

ریشهٔ سوم: بله برقرار است، برای هر a و b (مثبت یا منفی). مثال: و با عددهای منفی: .

ریشهٔ چهارم: چون ۴ زوج است، باید a و b **نامنفی** باشند تا ریشه‌ها تعریف شوند: و در حالت کلی .

ریشهٔ پنجم: لازم نیست نامنفی باشند. مثال با اعداد نامنفی: . مثال با اعداد منفی: و ؛ تساوی برقرار است.

۱۴۹ صفحه ۵۵ کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید:

$\sqrt[7]{128}$ ، $-\sqrt[7]{128}$ ، $\sqrt[8]{256}$ ، $-\sqrt[9]{1}$ ، $\sqrt[4]{625}$ ، $-\sqrt[4]{0/0016}$ ، $-\sqrt[5]{(1/32)}$ ، $\sqrt[6]{0}$

- (چون $128 = 2^7$) و
- (چون $256 = 2^8$)
- (چون $0/0016 = 0/2^4$)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۰ صفحه ۵۵ کار در کلاس

۲ با توجه به اینکه $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a \times b)}$، تساوی زیر را کامل کنید:

$\sqrt[5]{۳۲} = \sqrt[5]{(۲\times۲\times۲\times۲\times۲)} = \sqrt[5]{۲} \times \sqrt[5]{۲} \times \sqrt[5]{۲} \times \sqrt[5]{۲} \times \sqrt[5]{۲} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

زیرا طبق تعریف ریشه، . پس $\sqrt[5]{۳۲} = ۲$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۱ صفحه ۵۶ تمرین

درستی رابطهٔ $\sqrt[k]{(a^m)} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقداردهی‌های مختلف به k، m و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

k	m	a	$(\sqrt[k]{a})^m$	$\sqrt[k]{(a^m)}$
۳	۲	۸	$۲^2 = ۴$	
۴	۳	۱۶	$۲^3 = ۸$	
۳	۳	−۸	$(-۲)^3 = -۸$	
۲	۴	۹	$۳^4 = ۸۱$	

اثبات کلی: فرض کنید ، پس . آنگاه ، یعنی یک ریشهٔ kام است و داریم .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۲ صفحه ۵۶ فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

جدول: چهار حالت ($a \geq ۰$ با n زوج و n فرد؛ $a < ۰$ با n زوج و n فرد) با $a = ۲$ و $n = ۴$ یا ۳ و $a = -۲$ و $n = ۴$ یا ۳ برای محاسبهٔ .

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

اگر $a \geq 0$ از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که: ؛ و اگر $a < 0$ آنگاه برای n زوج و برای n فرد

حالت	محاسبه	نتیجه
$a = 2$ ، $n = 4$ (زوج)		$\sqrt[4]{a^4} = 2$
$a = 2$ ، $n = 3$ (فرد)		$\sqrt[3]{a^3} = 2$
$a = -2$ ، $n = 4$ (زوج)		$\sqrt[4]{a^4} = \lvert a \rvert = -a = 2$
$a = -2$ ، $n = 3$ (فرد)		$\sqrt[3]{a^3} = a = -2$

اگر $a \geq 0$: . اگر $a < 0$: برای n زوج و برای n فرد .

۱۵۳ صفحه ۵۷ فعالیت

۲ جدول زیر را کامل کنید.

جدول: چهار حالت با ($a = 16$ ، $n = 4$) ، ($a = 8$ ، $n = 3$) ، ($a = -16$ ، $n = 4$) ، ($a = -8$ ، $n = 3$) برای محاسبهٔ .

اگر $a \geq 0$ آنگاه و اگر $a < 0$ آنگاه

حالت	محاسبه	نتیجه
$a = 16$ ، $n = 4$		$\sqrt[4]{16} = a$
$a = 8$ ، $n = 3$		$\sqrt[3]{8} = a$
$a = -16$ ، $n = 4$		تعریف‌نشده
$a = -8$ ، $n = 3$		$\sqrt[3]{-8} = a$

اگر $a \geq 0$ آنگاه ؛ و اگر $a < 0$ (و n فرد، تا ریشه تعریف شود) باز هم است (برای n زوج و a منفی عبارت تعریف نشده است).

۱۵۴ صفحه ۵۷ کار در کلاس

تساوی زیر به‌ازای چه مقادیری از a و n برقرار نیست؟ $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{(a^n)}$

اگر n فرد باشد، هر دو طرف برابر a هستند و تساوی همیشه برقرار است. اگر n زوج و $a \geq 0$ باشد نیز هر دو طرف برابر a هستند.

تساوی فقط وقتی برقرار **نیست** که **n زوج و a منفی** باشد: در این حالت $\sqrt[n]{a}$ تعریف نشده است، در حالی که عددی نامنفی است (مثلاً ولی وجود ندارد).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۵۵ صفحه ۵۷ تمرین

۱ الف) یکی از علامت‌های < یا > یا = را در □ قرار دهید.

$(۰/۵)^۳$ □ $(۰/۵)^۲$ ، $\sqrt[۳]{۰/۵}$ □ $\sqrt{۰/۵}$ ، $۴^۳$ □ $۴^۲$ ، $\sqrt[۳]{۴}$ □ $\sqrt{۴}$

ب) وقتی $۰ < a < ۱$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در □ قرار دهید: $a^۳$ □ $a^۲$ ، $\sqrt[۳]{a}$ □ $\sqrt{a}$

پ) وقتی $a > ۱$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در □ قرار دهید: $a^۳$ □ $a^۲$ ، $\sqrt[۳]{a}$ □ $\sqrt{a}$

الف) ؛ ؛ ؛ .

ب) برای $۰ < a < ۱$: $a^۳ < a^۲$ و $\sqrt[۳]{a} < \sqrt{a}$.

پ) برای $a > ۱$: $a^۳ > a^۲$ و $\sqrt[۳]{a} > \sqrt{a}$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۵۶ صفحه ۵۷ تمرین

۲ الف) یکی از علامت‌های > = < را در مربع قرار دهید.

$(-۰/۵)^۳$ □ $(-۰/۵)^۲$ ، $(-۲)^۳$ □ $(-۲)^۲$

$(-۰/۵)^۵$ □ $(-۰/۵)^۳$ ، $(-۲)^۵$ □ $(-۲)^۳$

$(-۰/۵)^۲$ □ $(۰/۵)^۴$ ، $(-۲)^۲$ □ $(-۲)^۴$

- ○ و
- ○ و
- ○ و

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۵۷ صفحه ۵۸ تمرین

۳ با توجه به تعریف ریشهٔ nام (اگر $b^n = a$ آنگاه $\sqrt[n]{a} = b$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط بامعنا بودن رادیکال) رابطهٔ زیر برقرار است: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

فرض کنیم . طبق تعریف، $\sqrt[n]{a}$ عددی است که توان nام آن برابر a است، یعنی . حال b را به جای $\sqrt[n]{a}$ می‌گذاریم:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

■

۱۵۸ صفحه ۵۸ تمرین

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۴، ۳ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

خیر، به‌طور کلی برقرار نیست. مثال‌های نقض:

- $n = ۳$ ، $a = ۸$ ، $b = ۱$: ولی
- $n = ۴$ ، $a = ۱۶$ ، $b = ۶۵$: ولی
- $n = ۵$ ، $a = ۱$ ، $b = ۳۱$: ولی

(تنها در حالت‌های خاص مثل $a = ۰$ یا $b = ۰$ برقرار است.)

۱۵۹ صفحه ۵۸ تمرین

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

نمونه: $\sqrt[3]{-۱۲۵} = \sqrt[3]{-۱} \times \sqrt[3]{۱۲۵} = -۵$

$\sqrt[4]{۱/۸۱}$ ، $\sqrt[7]{۱/۱۲۸}$ ، $\sqrt[5]{-۱/۳۲}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۰ صفحه ۵۸ تمرین

۶ به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به‌طوری که:

الف) تساوی $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$ برقرار نباشد.

الف) (برای n فرد یا a, b مثبت همواره برقرار است.)

ب) سمت چپ تعریف‌شده است ولی سمت راست بی‌معناست (ریشهٔ زوج عدد منفی)؛ پس در حالت n زوج و a و b منفی تساوی برقرار نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
پوشه‌ای برای موفقیت

۱۶۱ صفحه ۶۰ فعالیت

هریک از عبارت‌های زیر را به شکل رادیکالی نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به‌دست آورید.

$\sqrt[3]{۲}$ = ... ، = ... ، = ... ، = ... ، = ... ، = ...

قاعده: ؛ فقط وقتی عدد زیر رادیکال توان کامل باشد، حاصل عدد گویاست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۲ صفحه ۶۰ فعالیت

اکنون شما اعداد تواندار زیر را به شکل رادیکال بنویسید و در صورت امکان حاصل آنها را به‌دست آورید.

الف) ب) پ) ت)

طبق تعریف و :

الف)

ب)

پ)

ت)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۳ صفحه ۶۱ کار در کلاس

۱ تساوی‌های زیر را مانند نمونه به‌صورت رادیکالی بنویسید.

نمونه: $\sqrt[3]{۲۵}$ = $\sqrt[3]{(۵^۲)}$ =

= ... ، = ... ، = ... ، = ...

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۴ صفحه ۶۱ کار در کلاس

۲ رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

نمونه: = $\sqrt[3]{(۷^۲)}$ = $\sqrt[5]{۱۹}$ ... = $\sqrt[5]{۶۴}$ ... = $\sqrt[5]{(۵^۲)}$ ...

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۶۵ صفحه ۶۱ | کار در کلاس

۳ با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ است. تساوی را کامل کنید. $(a > 0)$

و . پس ترتیب گرفتن ریشه‌ها مهم نیست و ریشهٔ mnام همان مقدار را می‌دهد.

---

۱۶۶ صفحه ۶۱ | تمرین

۱ هر یک از توان‌های کسری زیر را به‌صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به‌دست آورید.

‘ ‘ ‘ ‘ ‘ ‘

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۶۷ صفحه ۶۱ | تمرین

۲ می‌دانیم $a^{(۱/۲)} = a^{(۲/۴)}$ و $\sqrt[4]{(a^2)} = \sqrt[8]{(a^4)}$ ... . آیا تساوی $\sqrt[n]{(a^m)} = \sqrt[nk]{(a^{mk})}$ همواره برقرار است $(a > 0)$؟ $(m$، n و k طبیعی‌اند.) نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{۲}$، $\sqrt[4]{۴}$ و $\sqrt[6]{۸}$ برابرند.

بله: (ساده کردن کسر نما).

بنابراین: ؛ ؛ . پس هر سه با هم برابرند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۶۸ صفحه ۶۱ | تمرین

۳ فرض کنیم $a = ۶۴$ ، $r = ۱/۲$ و $s = ۱/۳$. مقدارهای a^r/a^s و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای a^r/a^s و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. (می‌توانید از ماشین‌حساب کمک بگیرید.) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نمونه: و (چون $۶۴ = ۲^6$)؛ برابرند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

a	r	s	a^r / a^s	a^{r-s}
۸۱	۱/۲	۱/۴	۳ = ۳ ÷ ۹	۳ =
۳۲	۳/۵	۱/۵	۴ = ۲ ÷ ۸	۴ =
۸	۲/۳	۱/۳	۲ = ۲ ÷ ۴	۲ =

نتیجه: ؛ قاعدهٔ تقسیم توان‌های هم‌پایه برای نماهای گویا نیز برقرار است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۹ صفحه ۶۱ تمرین

۴ حساب کنید. ۵^(...) = ... ، = $\sqrt[3]{۶۴}$ ... ، = $\sqrt[4]{۸۱}$ ...

- برای عبارت اول (که در متن موجود ناخوانا است) از قاعدهٔ استفاده کنید.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۰ صفحه ۶۲ فعالیت

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (۱) اتحاد گفته می‌شود؟

(مثال: اگر a = ۱/۵ و b = ۳ اختیار شود، $(۱/۵ + ۳)^2 = ۱/۵^2 + ۲×(۱/۵)×۳ + ۳^2 \Rightarrow ۲۵۶/۲۵ = ۲۵۶/۲۵$) یا اگر در رابطهٔ (۱) به جای b، b− قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (۲). اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به‌دست آورید.

چون تساوی (۱) به‌ازای **هر** مقدار دلخواه a و b (هر دو عدد) برقرار است و هر دو طرف آن همیشه مقدار یکسانی دارند؛ به چنین تساوی‌ای «اتحاد» می‌گوییم (برخلاف معادله که فقط به‌ازای برخی مقدارها درست است).

مثلاً با : و .

با جایگزینی b با b− در (۱): و اتحاد (۳): .

۱۷۱ صفحه ۶۲ فعالیت

۱ با محاسبهٔ $(a + b)^3$ اتحاد دیگری به‌دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (\ldots\ldots)(a+b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

میتوانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به‌دست آوریم: $(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b)$

$+ 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots - b^3$

با $b \rightarrow -b$:

یعنی جاهای خالی: و .

---

۱۷۲ صفحه ۶۲ **فعالیت**

۲ یک بار دیگر $(a-b)^3$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شمارهٔ (۲) محاسبه کنید.

$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (\ldots\ldots)(a-b) = \ldots\ldots$

که با نتیجهٔ قبل یکی است.

---

۱۷۳ صفحه ۶۳ **کار در کلاس**

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = \ldots\ldots$

---

۱۷۴ صفحه ۶۳ **کار در کلاس**

۲ با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های $a^3 + b^3$ و $a^3 - b^3$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به‌دست آورید.

از نتیجهٔ پرسش ۱ (با تعویض دو طرف):

این‌ها اتحادهای «مجموع مکعب‌ها» و «تفاضل مکعب‌ها» هستند.

---

۱۷۵ صفحه ۶۴ **کار در کلاس**

۳ عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

نمونه: $8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x-3)[(2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2] = (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$

$\ldots x^6 - 1 = \ldots x^3 - 125 = \ldots x^3 - 8 = \ldots x^3 + 1 =$

۱۷۶ صفحه ۶۴ **فعالیت**

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به خاطر دارید: ۱۲ × ۳ = ۴ ... در اتحاد مزدوج $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ هر یک از عبارت‌های $a - b$ و $a + b$ یک عامل (شمارنده) $a^2 - b^2$ است. آیا $a + b$ مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری از ضرب آن در عبارت‌های جبری دیگر به‌دست می‌آیند؛ مثلاً بعضی از مضرب‌های $a + b$: . بعضی از مضرب‌های $a - b$ را بنویسید.

۲ دو عبارت بنویسید که $a - b$ شمارندهٔ هر یک از آن‌ها باشد.

بله؛ هر حاصل‌ضرب $a + b$ در یک عبارت دیگر مضرب آن است: مثلاً و .

۱) بعضی از مضرب‌های $a - b$:

۲) مثلاً و (یا $5a - 5b$).

۱۷۷ صفحه ۶۴ **فعالیت**

۳ عبارت $127a^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

الف) $a - 1$ ب) $13a - 1$ پ) $3a + 19a^2 + 1$ ت) $13a + 1$

پس $127a^3 - 1$ مضرب عبارت‌های **(ب) $13a - 1$** و **(پ) $3a + 19a^2 + 1$** است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۸ صفحه ۶۴ **فعالیت**

۴ کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟ (عبارت گویا: خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای)

الف) ب) پ) ت)

عبارت گویا کسری است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند (متغیر زیر رادیکال یا با نمای کسری نداشته باشد).

- الف) ۳/۷ : نسبت دو عدد ثابت (چندجمله‌ای درجهٔ صفر) است، پس گویا است.
- ب) $x/(x-2)$: نسبت دو چندجمله‌ای است، پس گویا است.
- پ) $x-3 = (x-3)/1$: چندجمله‌ای است و هر چندجمله‌ای را می‌توان با مخرج ۱ نوشت، پس گویا است.
- ت) $(x^2+2x-3)/(x+1)$: نسبت دو چندجمله‌ای است، پس گویا است.

هر عبارتی که در آن متغیر زیر رادیکال (مثل $\sqrt{x}$) باشد، گویا نیست. (صورت اصلی گزینه‌ها در متن موجود ناخوانا بود؛ گزینه‌ها بازسازی شده‌اند.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۹ صفحه ۶۵ فعالیت

نکته: یک عبارت گویا به‌ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد (مقدار ندارد).

۵ عبارت گویای زیر به‌ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

مخرج‌ها نباید صفر شوند: ، و .

پس عبارت به‌ازای $x = 1$ و $x = -1$ تعریف نمی‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۰ صفحه ۶۵ فعالیت

۶ حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

الف)

ب)

الف)

ب)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۱ صفحه ۶۵ کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

الف) ب) پ) ت)

الف) $(x \neq -1)$

ب) $(x \neq 1)$

پ) $(x \neq \pm 2)$

ت) $(y \neq 0$ و $y \neq -2)$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸۲ صفحه ۶۵ کار در کلاس

۲ در اتحاد قرار دهید و حاصل را بازنویسی کنید:

چون و :

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۳ صفحه ۶۵ فعالیت

۱ از سال گذشته به یاد داریم که برای گویا کردن مخرج کسرهایی که شامل یک عبارت رادیکالی هستند، می‌توانیم آن کسر را در یک عبارت رادیکالی مناسب ضرب و تقسیم کنیم تا مخرج کسر گویا شود. در زیر کسرهای $۵/(۲\sqrt{۳})$ و $۴/\sqrt[۳]{۲}$ گویا شده‌اند. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۴ صفحه ۶۶ فعالیت

۲ دو عبارت مانند $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ که شامل مجموع و تفاضل دو قسمت یکسان هستند را مزدوج یکدیگر می‌گوییم. حاصل‌ضرب این دو عبارت را می‌توانیم به‌صورت محاسبه کنیم: . از این روش برای گویا کردن مخرج کسرها استفاده می‌کنیم. مانند نمونه (گویا کردن) مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) ب) پ) ت)

الف)

ب)

پ)

ت)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۵ صفحه ۶۶ فعالیت

۳ از اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌ها که به‌صورت زیر هستند، برای گویا کردن کسرهایی مانند و استفاده می‌کنیم. در هرکدام از اتحادهای زیر، قرار دهید و و آن‌ها را بازنویسی کنید.

آیا سمت راست تساوی‌های بالا شامل یک عبارت رادیکالی است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

خیر؛ سمت راست $(a - b)$ یا $(a + b)$ رادیکال ندارد، پس با ضرب صورت و مخرج در عامل مناسب مخرج گویا می‌شود. مثلاً:

۱۸۶ صفحه ۶۷ فعالیت

مانند نمونهٔ بالا، مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) ب) پ) ت)

الف)

ب)

پ)

ت)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۷ صفحه ۶۷ تمرین

۱ هریک از عبارت‌های زیر را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

الف) $y^4 - x^4$ ب) $x^6 - y^6$ پ) $27a^3 + 8$ ت) $8a^3 - b^6$

الف)

ب)

پ)

ت)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۸ صفحه ۶۷ تمرین

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) ب) پ) ت)

الف)

ب)

پ)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ت)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۹ صفحه ۶۷ تمرین

۳ با استفاده از اتحادها، حاصل‌ضرب‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید.

نمونه: $۱۵^2 - ۱ = (۱۵ - ۱)(۱ + ۱۵) = ۱۴ \times ۱۶ = ۲۲۴$ ،

الف) ۱۰۵^3 ب) ۱۰۵^2 پ) ۹۹۹۹^2

الف)

ب)

پ)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹۰ صفحه ۶۷ تمرین

۴ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) ب)

الف)

ب)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹۱ صفحه ۶۷ تمرین

۵ اگر ، حاصل عبارت را به‌دست آورید.

حاصل‌ضرب مزدوج‌ها: .

پس و .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۹۲ صفحه ۶۸ خواندنی

سه عدد ۳، ۴ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا $۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$. یک سه‌تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این‌گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

نمونه‌ها: ، ، ، ، ، . (مثلاً .)

هر ضرب صحیح از یک سه‌تایی فیثاغورسی نیز سه‌تایی فیثاغورسی است و بی‌شمار سه‌تایی وجود دارد؛ مثلاً از رابطهٔ (برای $m > n$ طبیعی) می‌توان آن‌ها را ساخت.

۱۹۳ صفحه ۶۸ خواندنی

(جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد: $(۱/۰۱)^{۳۶۵} = ۳۷/۸$ و $(۰/۹۹)^{۳۶۵} = ۰/۰۳$. چرا این‌قدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(۱/۰۱)^{۷۳۰}$ و $(۰/۹۹)^{۷۳۰}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

چون در توان‌های بزرگ، ضرب‌های پیاپی در عددی بزرگ‌تر از ۱ (۱/۰۱) هر بار مقدار را اندکی بزرگ‌تر و ضرب در عددی کوچک‌تر از ۱ (۰/۹۹) هر بار اندکی کوچک‌تر می‌کند و اثر این تغییرهای کوچک روی هم انباشته می‌شود (رشد و کاهش نمایی).

محاسبه با ماشین‌حساب: و . یعنی اگر هر روز یک درصد بهتر شویم، پس از دو سال حدود ۱۴۲۸ برابر می‌شویم، ولی اگر هر روز یک درصد بدتر شویم، تقریباً به صفر می‌رسیم. (همچنین .)

۱۹۴ صفحه ۶۸ خواندنی

(مثلث خیام) $(a+b)^۱ = a + b$ ، $(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$ ، $(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$ ؛ سطرها: ۱؛ ۱ ۱؛ ۱ ۲ ۱؛ ۱ ۳ ۳ ۱؛ ۱ ۴ ۶ ۴ ۱.

چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟ می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید. $(a+b)^۴ = (a+b)^۳(a+b) = (\ldots\ldots)(a+b) = \ldots\ldots$

ضرایب بسط $(a+b)^n$ دقیقاً اعداد سطر nام مثلث خیام (پاسکال) هستند؛ هر عدد مجموع دو عدد بالایی آن است.

ضرایب ۱، ۴، ۶، ۴، ۱ همان سطر بعدی مثلث خیام است.

گام به گام ریاضی (۱) دهم - فصل چهارم

معادله‌ها و نامعادله‌ها

فهرست

۱۹۵ صفحه ۷۰ · پرسش درون متن — قائم‌الزاویه بودن مثلث با اضلاع ۳، ۴ و ۵ ... ۹۰

۱۹۶ صفحه ۷۱ · فعالیت — حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه ... ۹۰

۱۹۷ صفحه ۷۱ · کار در کلاس — حل معادله به روش تجزیه ۹۰

۱۹۸ صفحه ۷۲ · فعالیت — حل معادلهٔ درجه دوم به کمک ریشه‌گیری ... ۹۱

۱۹۹ صفحه ۷۲ · مثال — جعبه‌ای با حجم ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب ... ۹۱

۲۰۰ صفحه ۷۳ · کار در کلاس — حل معادله به روش ریشه‌گیری ... ۹۲

۲۰۱ صفحه ۷۳ · فعالیت — حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل ... ۹۲

۲۰۲ صفحه ۷۳ · مثال — حل معادلهٔ $x^2 - 6x + 4 = 0$ به روش مربع کامل ... ۹۲

۲۰۳ صفحه ۷۴ · کار در کلاس — حل معادله به روش مربع کامل ... ۹۳

۲۰۴ صفحه ۷۴ · فعالیت — به‌دست آوردن فرمول کلی حل معادلهٔ درجه دوم ... ۹۳

۲۰۵ صفحه ۷۵ · کار در کلاس — تکمیل جمع‌بندی حالت‌های Δ ... ۹۴

۲۰۶ صفحه ۷۵ · کار در کلاس — حل معادله با فرمول کلی ۹۴

۲۰۷ صفحه ۷۶ · تمرین — حل معادله به کمک تجزیه ۹۴

۲۰۸ صفحه ۷۶ · تمرین — حل معادله به کمک ریشه‌گیری ۹۵

۲۰۹ صفحه ۷۶ · تمرین — حل معادله به روش مربع کامل ۹۵

۲۱۰ صفحه ۷۷ · تمرین — حل معادله با فرمول کلی ۹۶

۲۱۱ صفحه ۷۷ · تمرین — حل معادله به روش دلخواه ۹۶

۲۱۲ صفحه ۷۷ · تمرین — مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ... ۹۷

۲۱۳ صفحه ۷۷ · تمرین — ابعاد مستطیل ۹۷

۲۱۴ صفحه ۷۷ · تمرین — سن دو برادر ۹۷

۲۱۵ صفحه ۷۷ · تمرین — قاب عکس ۹۷

۲۱۶ صفحه ۷۷ · تمرین — تعداد تیم‌های تیمگان والیبال ۹۸

۲۱۷ صفحه ۷۷ · تمرین — فشار خون نرمال ۹۸

۲۱۸ صفحه ۷۸ · فعالیت — نمودار $y = x^2 - 4$ و اجزای سهمی ... ۹۸

۲۱۹ صفحه ۷۹ · فعالیت — رسم سهمی $y = x^2 - 4x + 5$ ۹۹

۲۲۰ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — رأس و رسم سهمی ۱۰۰

۲۲۱ صفحه ۸۰ · فعالیت — مختصات رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ... ۱۰۱

۲۲۲ صفحه ۸۱ · فعالیت — مقایسهٔ دو سهمی با رأس مشترک ... ۱۰۱

۲۲۳ صفحه ۸۱ · تمرین — رسم نمودار سهمی‌ها ۱۰۲

۲۲۴ صفحه ۸۱ · تمرین — خط تقارن سهمی از دو نقطه ۱۰۳

۲۲۵ صفحه ۸۱ · تمرین — نوشتن معادلهٔ سهمی از روی نقاط ... ۱۰۳

۲۲۶ صفحه ۸۱ · تمرین — مسیر پرتاب دو وزنه ۱۰۴

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۲۷ صفحه ۸۳ · فعالیت — تعیین علامت خط y = ۲x − ۶ ..... ۱۰۵

۲۲۸ صفحه ۸۴ · فعالیت — تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول ... ۱۰۵

۲۲۹ صفحه ۸۴ · مثال — بررسی علامت y = ۵x − ۲ ..... ۱۰۶

۲۳۰ صفحه ۸۵ · مثال — بررسی علامت A = (۲x − ۱)(۳ − x) ۱۰۶

۲۳۱ صفحه ۸۵ · کار در کلاس — تعیین علامت عبارت‌ها ۱۰۷

۲۳۲ صفحه ۸۶ · فعالیت — تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم ... ۱۰۸

۲۳۳ صفحه ۸۸ · کار در کلاس — تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم ... ۱۰۸

۲۳۴ صفحه ۸۹ · فعالیت — نامعادلهٔ دوگانه ۱۱۰

۲۳۵ صفحه ۹۰ · کار در کلاس — تبدیل دما از سانتی‌گراد به فارنهایت ... ۱۱۰

۲۳۶ صفحه ۹۰ · فعالیت — حل نامعادلهٔ درجه دوم به کمک نمودار و جدول ... ۱۱۰

۲۳۷ صفحه ۹۰ · کار در کلاس — حل نامعادلهٔ درجه دوم به دو روش ... ۱۱۱

۲۳۸ صفحه ۹۱ · فعالیت — نامعادلهٔ قدر مطلقی |x| ≤ ۳ و |x| ≥ ۳ ... ۱۱۲

۲۳۹ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — حل نامعادلهٔ قدر مطلقی ۱۱۲

۲۴۰ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — نوشتن نامعادلهٔ قدر مطلقی برای بازهٔ (۱، ۹) ... ۱۱۳

۲۴۱ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — نوشتن نامعادلهٔ قدر مطلقی برای اجتماع دو بازه ... ۱۱۳

۲۴۲ صفحه ۹۳ · تمرین — نوشتن مجموعه جواب نامعادله‌ها به شکل بازه ... ۱۱۳

۲۴۳ صفحه ۹۳ · تمرین — همواره مثبت بودن عبارت درجه دوم ... ۱۱۴

۲۴۴ صفحه ۹۳ · تمرین — سهمی همواره پایین محور xها ۱۱۴

۲۴۵ صفحه ۹۳ · تمرین — ارتفاع جسم پرتاب‌شده از بالای ساختمان ... ۱۱۴

۲۴۶ صفحه ۹۳ · تمرین — ضربان قلب پس از کار سنگین بدنی ... ۱۱۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۹۵ صفحه ۷۰ پرسش درون متن

اضلاع مثلث، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم‌الزاویه است (چرا؟).

طبق عکس قضیهٔ فیثاغورس، اگر در مثلثی مجذور بزرگ‌ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است. در اینجا:

پس مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ قائم‌الزاویه است و ضلع ۵ وتر آن است.

همچنین اگر کوچک‌ترین ضلع x و دو ضلع دیگر x+۱ و x+۲ باشند، از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

۱۹۶ صفحه ۷۱ فعالیت

معادلهٔ درجه دوم را که درسا در بخش قبل به آن رسید، درنظر بگیرید.

۱ با تجزیهٔ سمت چپ معادلهٔ بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. (x + ۱)(x − ...) = ۰

۲ از ویژگی حاصل‌ضرب صفر استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. (x+۱)(x−...) = ۰ ⇒

x+۱=۰ یا x = −۱ ⇒ x−...=۰ یا x = ...

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل‌شده، می‌توانیم هر دو جواب به‌دست‌آمده را در معادله قرار دهیم و آن‌ها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که قبلاً دربارهٔ آن بحث شده است؟ توضیح دهید.

۱) سه‌جمله‌ای را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عامل می‌نویسیم؛ دو عدد با حاصل‌ضرب ۳− و مجموع ۲− یعنی ۱ و ۳− را می‌یابیم:

پس جای خالی عدد **۳** است.

۲) طبق ویژگی حاصل‌ضرب صفر:

یا یا

آزمایش جواب x = ۳:

پاسخ به پرسش آخر: خیر؛ طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد، پس x = ۱− قابل قبول نیست. فقط x = ۳ پذیرفته است که اضلاع ۳، ۴ و ۵ را می‌دهد.

۱۹۷ صفحه ۷۱ کار در کلاس

معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) ب)

الف) ابتدا همه جمله‌ها را به یک طرف می‌بریم:

یا

آزمایش: و

ب) با فاکتورگیری از t:

یا

آزمایش: و

۱۹۸ صفحه ۷۲ **فعالیت**

معادلهٔ درجه دوم را درنظر بگیرید.

۱ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به‌دست آورید.

۲ ریشه‌های دوم عدد ۲۵ را به‌دست آورید و آن‌ها را با جواب‌های حاصل از تجزیه مقایسه کنید.

۳ اگر یک معادلهٔ درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به‌صورت نوشت؟ توضیح دهید.

۱) یا

۲) ریشه‌های دوم ۲۵ دو عدد ۵ و ۵- هستند (چون)؛ این‌ها دقیقاً همان جواب‌های روش تجزیه‌اند.

۳) خیر، همیشه نمی‌توان. اگر a منفی باشد، چون مربع هر عدد حقیقی نامنفی است، معادله جواب حقیقی ندارد و تعریف نشده است. اگر باشد، جواب‌ها هستند (برای a = ۰ فقط x = ۰).

۱۹۹ صفحه ۷۲ **مثال**

از صفحهٔ مقوایی به شکل مربع، چهار مربع کوچک به ضلع ۲ سانتی‌متر در گوشه‌ها جدا می‌کنیم و با تا زدن لبه‌ها جعبه می‌سازیم. اگر حجم جعبه ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول ضلع مقوای اولیه را به‌دست آورید.

(جاهای خالی حل مثال را کامل کنید.)

حجم جعبه = طول × عرض × ارتفاع = (۲)(x)(x) = ... ⇒ ... = ... ⇒ x^2 = ... ⇒ ۲۰۰ = ...

اگر ضلع کف جعبه x باشد، ارتفاع جعبه ۲ است، پس:

حجم باید ۲۰۰ باشد:

چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها x = ۱۰ قبول است. ضلع مربع اولیه از دو بریدگی ۲ سانتی‌متری در دو طرف و ضلع کف جعبه تشکیل شده است:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

طول ضلع مقوای اولیه **۱۴ سانتی‌متر** است. (آزمایش:)

۲۰۰ صفحه ۷۳ کار در کلاس

جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود، به روش ریشه‌گیری به‌دست آورید.

الف) ب) پ)

الف)

ب) ؛ مربع هیچ عدد حقیقی منفی نیست، پس معادله **جواب حقیقی ندارد**.

پ) یا

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰۱ صفحه ۷۳ فعالیت

۱ دو جمله‌ای را درنظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله‌ای اضافه شود تا چندجمله‌ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید: $(x + \dots)^2 = x^2 + 6x + \dots$. اعدادی که در جاهای خالی نوشته‌اید چه ارتباطی با شکل روبه‌رو دارند؟

۲ اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله‌ای چه جمله‌ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ $x^2 + ax + \dots = (x + \dots)^2$

۱) برای مربع کامل شدن باید «مربع نصف ضریب x» را اضافه کنیم؛ نصف ۶ برابر ۳ و مربع آن ۹ است:

ارتباط با شکل: مربعی به ضلع x و دو مستطیل ۳×x را کنار هم می‌چینیم؛ برای کامل شدن مربع بزرگ‌تر به ضلع x+۳ باید یک مربع کوچک ۳×۳ به مساحت ۹ اضافه شود. پس عدد ۳ طول ضلع مربع کوچک و عدد ۹ مساحت آن است.

۲) نصف ضریب x برابر است و باید مربع آن را اضافه کنیم:

۲۰۲ صفحه ۷۳ مثال

معادلهٔ را به روش مربع کامل حل می‌کنیم. جاهای خالی را کامل کنید.

به دو طرف معادله ... را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود:

$(x - ۳)^2 = ۵$

ابتدا ۴ را به طرف دیگر می‌بریم: .

نصف ضریب x برابر ۳- و مربع آن ۹ است؛ پس به دو طرف ۹ اضافه می‌کنیم:

از دو طرف ریشهٔ دوم می‌گیریم و ۳ را اضافه می‌کنیم:

جاهای خالی هر دو عدد ۹ هستند.

۲۰۳ صفحه ۷۴ کار در کلاس

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) ب)

پ) ت)

الف) مربع نصف ضریب x یعنی ۱ را اضافه می‌کنیم:

یا

ب) نصف ضریب t برابر و مربع آن است:

پ)

مربع یک عدد حقیقی نمی‌تواند منفی باشد؛ پس معادله **جواب حقیقی ندارد**.

ت) ابتدا دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضریب برابر ۱ شود:

۲۰۴ صفحه ۷۴ فعالیت

می‌خواهیم برای حل معادلهٔ درجه دوم ($a \neq 0$) فرمول کلی پیدا کنیم. مراحل زیر را کامل کنید:

$ax^2 + bx + c = 0$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم: $x^2 + (b/a)x + c/a = 0 \Rightarrow x^2 + (b/a)x = -c/a$

به دو طرف معادله ... را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

دو طرف را ساده کرده‌ایم: $(x + b/2a)^2 = (b^2 - 4ac)/4a^2$

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta = b^2 - 4ac$؛ پس: $(x + b/2a)^2 = \Delta/4a^2$. آیا می‌توانید با ریشهٔ دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به‌دست آورید؟ (گفت‌وگوی دانش‌آموز و معلم دربارهٔ حالت‌های $\Delta > 0$، $\Delta < 0$ و $\Delta = 0$ را نیز کامل کنید.)

مرحله ۱: تقسیم بر a (چون $a \neq 0$):

مرحله ۲: نصف ضریب x برابر است؛ پس مربع آن یعنی را به دو طرف اضافه می‌کنیم:

مرحله ۳: با قراردادن :

گفت‌وگو:

- اگر $\Delta < 0$: سمت راست منفی است و مربع هیچ عدد حقیقی منفی نمی‌شود؛ پس معادله **ریشهٔ حقیقی ندارد**.
- اگر $\Delta > 0$: از دو طرف ریشهٔ دوم می‌گیریم: (دو ریشهٔ حقیقی متمایز).
- اگر $\Delta = 0$: (یک ریشه که به آن ریشهٔ مضاعف یا ریشهٔ مکرر مرتبهٔ دوم می‌گویند).

۲۰۵ صفحه ۷۵ **کار در کلاس**

۱ با توجه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$؛ $\Delta > 0$ ...، $\Delta = 0$ ... ⇒ ...، $\Delta < 0$ ⇒ ...

با توجه به رابطهٔ :

حالت	نتیجه
$\Delta < 0$	معادله ریشهٔ حقیقی ندارد
$\Delta = 0$	معادله یک ریشهٔ حقیقی (ریشهٔ مضاعف) دارد:
$\Delta > 0$	معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد:

۲۰۶ صفحه ۷۵ **کار در کلاس**

۲ معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) ب) پ)

الف)

چون Δ منفی است، معادله **جواب حقیقی ندارد**.

ب)

یا

پ)

معادله یک ریشهٔ مضاعف $x = 2$ دارد.

۲۰۷ صفحه ۷۶ **تمرین**

۱ معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱) ۲)

۳) ۴)

۱) یا

۲) یا

۳) یا

۴) دو طرف را بر ۴ تقسیم می‌کنیم: یا

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۲۰۸ صفحه ۷۶ تمرین

۲ هر یک از معادله‌های زیر را با ریشهٔ دوم گرفتن حل کنید.

۱) ۲)

۳) ۴)

۱)

۲) ؛ مربع هیچ عدد حقیقی منفی نیست، پس **جواب حقیقی ندارد**.

۳) یا یا

۴)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰۹ صفحه ۷۶ تمرین

۳ معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) ۲)

۳) ۴)

۱) یا

۲)

سمت راست منفی است، پس معادله **جواب حقیقی ندارد**.

۳) (ریشهٔ مضاعف).

۴)

یا

---

۲۱۰ صفحه ۷۷ تمرین

۴ هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) ۲)

۳) ۴)

---

۱) یا

۲) ؛ معادله **جواب حقیقی ندارد**.

۳) ،

یا

۴) دو طرف را در ۶ ضرب می‌کنیم:

یا

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۱۱ صفحه ۷۷ تمرین

۵ هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) ۲)

۳) ۴)

---

۱)

۲) (ریشهٔ مضاعف).

۳) یا

۴)

یا

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱۲ صفحه ۷۷ تمرین

۶ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

دو عدد فرد متوالی را n و n+۲ می‌گیریم:

یا

بنابراین دو عدد **۱۱ و ۱۳** هستند (یا اگر اعداد منفی هم مجاز باشند: ۱۳- و ۱۱-). آزمایش:

۲۱۳ صفحه ۷۷ تمرین

۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

عرض را w می‌گیریم؛ طول است:

یا

عرض نمی‌تواند منفی باشد؛ پس عرض ۳ سانتی‌متر و طول سانتی‌متر است. (آزمایش: ۳ × ۱۵ = ۴۵)

۲۱۴ صفحه ۷۷ تمرین

۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

سن برادر کوچک‌تر را a می‌گیریم؛ سن برادر بزرگ‌تر a+۴ است. چهار سال دیگر سن‌ها a+۴ و a+۸ می‌شود:

سن نمی‌تواند منفی باشد، پس a = ۲. سن برادران **۲ سال و ۶ سال** است. (آزمایش: چهار سال بعد ۶ و ۱۰ می‌شوند و ۶ × ۱۰ = ۶۰)

۲۱۵ صفحه ۷۷ تمرین

۹ یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

فاصلهٔ لبه‌های عکس تا قاب را x می‌نامیم؛ ابعاد قاب و است:

یا

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فاصله منفی نیست، پس x = ۲/۵ سانتی‌متر. ابعاد قاب: و ؛ یعنی **۱۵ در ۲۰ سانتی‌متر** (مساحت ۳۰۰).

۲۱۶ صفحه ۷۷ **تمرین**

۱۰ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به‌دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به‌دست آورید.

هر تیم با n−۱ تیم دیگر بازی می‌کند، پس n(n−۱) بازی شمرده می‌شود؛ ولی هر بازی دو بار شمرده شده است.

بنابراین الگوی تعداد بازی‌ها:

برای N = ۴۵:

تعداد تیم‌ها **۱۰** است (n = ۹− قبول نیست).

۲۱۷ صفحه ۷۷ **تمرین**

۱۱ فشار خون نرمال یک شخص مذکر که بر حسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطهٔ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

قرار می‌دهیم P = ۱۲۵:

جواب منفی (حدود ۲۷/۲۵−) به‌عنوان سن قابل قبول نیست؛ جواب مثبت حدود **۳۰/۶ سال** (تقریباً ۳۱ سال) است.

۲۱۸ صفحه ۷۸ **فعالیت**

معادلهٔ را درنظر بگیرید.

الف) در جدولی چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند آمده است. این جدول را کامل کنید. (x = ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲)؛ نقاط به‌دست‌آمده را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و به یکدیگر وصل می‌کنیم.

ب) پایین‌ترین نقطهٔ این نمودار چه نقطه‌ای است؟ آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟

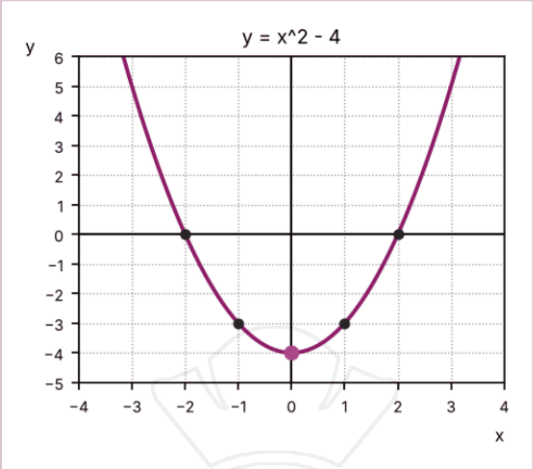
پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟

ت) محل برخورد منحنی رسم‌شده با محور xها در چه نقاطی است؟

الف)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = x^2 - ۴$	۰	-۳	-۴	-۳	۰
(x, y)	(-۲، ۰)	(-۱، -۳)	(۰، -۴)	(۱، -۳)	(۲، ۰)



ب) پایین‌ترین نقطهٔ نمودار **(۰، -۴)** است. نمودار نسبت به خط عمودی گذرنده از این نقطه، یعنی محور yها با معادلهٔ **x = ۰** متقارن است (مثلاً (۱، -۳) و (-۱، -۳) قرینهٔ هم‌اند).

پ) پنج نقطه استفاده کرده‌ایم. بله، به‌دلیل تقارن می‌توان با نقاط کمتر هم رسم کرد: کافی است رأس و دو یا سه نقطه در یک سمت محور تقارن را به‌دست آوریم و قرینهٔ آن‌ها را بنویسیم.

ت) برای برخورد با محور xها قرار می‌دهیم y = ۰ ؛ یعنی نقاط **(-۲، ۰)** و **(۲، ۰)**.

۲۱۹ صفحه ۷۹ **فعالیت**

معادلهٔ یک سهمی به‌صورت است.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید. $y = x^2 - ۴x + ۵ \Rightarrow y = (x - ۲)^2 + \ldots$

ب) ریشهٔ عبارت داخل پرانتز را به‌دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول (x = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴) قرار دهید.

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. $x - ۲ = ۰ \Rightarrow \ldots$

پ) پنج نقطهٔ حاصل‌شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

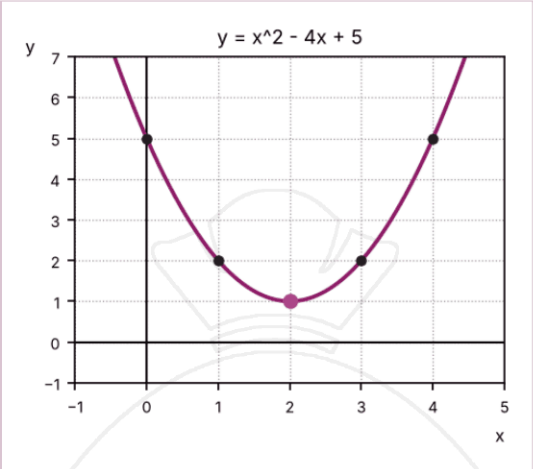
ت) آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطهٔ این سهمی را از معادلهٔ آن به شکل به‌دست آورید؟

الف)

ب) ؛ پس x = ۲ را در وسط جدول قرار می‌دهیم:

x	۰	۱	۲	۳	۴
x − ۲	−۲	−۱	۰	۱	۲
$y = (x - ۲)^2 + ۱$	۵	۲	۱	۲	۵
(x, y)	(۰، ۵)	(۱، ۲)	(۲، ۱)	(۳، ۲)	(۴، ۵)

پ) نمودار با وصل کردن این پنج نقطه رسم می‌شود:



ت) بله. چون است، کمترین مقدار y وقتی به‌دست می‌آید که یعنی $x = ۲$؛ آنگاه $y = ۱$. پس پایین‌ترین نقطه **(۲، ۱)** است و محور تقارن $x = ۲$ است.

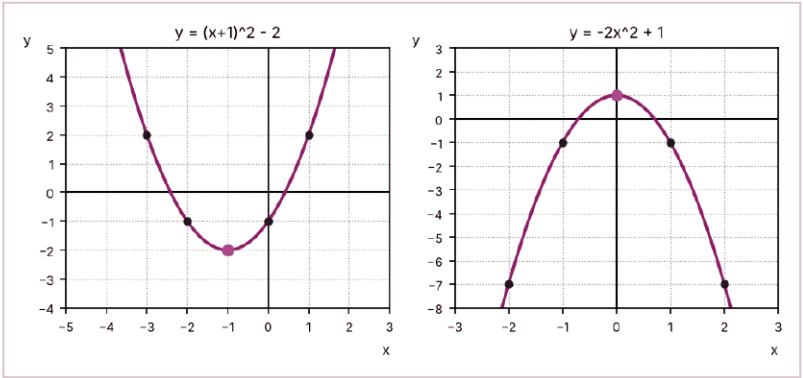
۲۲۰ صفحه ۸۰ **کار در کلاس**

۱ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

الف) ب)

الف) سهمی به شکل با $a = ۱$ و $h = ۱-$ و $k = ۲-$ است؛ پس رأس **(−۱، −۲)** و خط تقارن $x = ۱-$ است. چون $a > ۰$ است، رأس پایین‌ترین نقطه و دهانهٔ سهمی رو به بالاست. نقاط کمکی: (۰، −۱)، (−۲، −۱)، (۱، ۲)، (−۳، ۲).

ب) این سهمی به شکل است؛ پس رأس **(۰، ۱)** و خط تقارن $x = ۰$ است. چون $a = ۲- < ۰$ است، رأس بالاترین نقطه و دهانه رو به پایین است. نقاط کمکی: (±۱، −۱) و (±۲، −۷).



۲۲۱ صفحه ۸۰ **فعالیت**

معادلهٔ سهمی به‌صورت را در نظر بگیرید.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید:

ب) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطهٔ و خط تقارن آن نیز است.

الف) از جمله‌های شامل x ضریب a را فاکتور می‌گیریم و مربع کامل می‌سازیم:

ب) این رابطه به شکل است با و . سهمی به شکل رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارن x = h دارد (زیرا و کمترین یا بیشترین مقدار y در x = h رخ می‌دهد). بنابراین رأس سهمی و خط تقارن است.

۲۲۲ صفحه ۸۱ **فعالیت**

معادلهٔ دو سهمی به‌صورت و است.

الف) مختصات رأس و دو نقطهٔ دیگر از این دو سهمی را در جدول مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطهٔ A(۰، ۱) است.

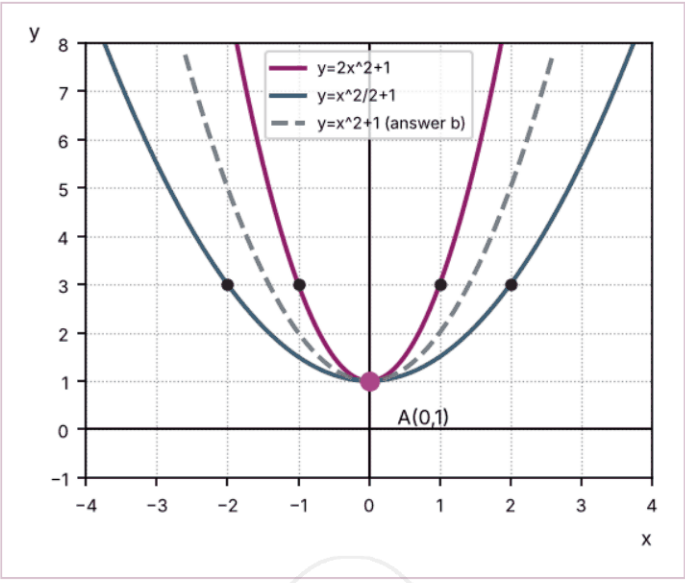
ب) معادلهٔ سهمی دیگری را که نقطهٔ A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

الف) برای هر دو سهمی و y در x = ۰ برابر ۱ است؛ پس رأس هر دو A(۰، ۱) است.

سهمی	رأس	نقطهٔ دوم	نقطهٔ سوم
$y = ۲x^2 + ۱$	(۱، ۰)	(۱، ۳)	(−۱، ۳)
$y = ½x^2 + ۱$	(۱، ۰)	(۲، ۳)	(−۲، ۳)

ب) هر معادله به شکل با رأسی در A(۰، ۱) دارد؛ مثلاً (خط چین در شکل). با a منفی نیز می‌توان نوشت، مثلاً که دهانه‌اش رو به پایین است.

irantooshe.ir



۲۲۳ صفحه ۸۱ | تمرین

۱ نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) ب)

پ) ت)

سهمی	رأس	خط تقارن	جهت دهانه
الف) $y = -(x+1)^2 - 3$	$(-1، -3)$	$x = -1$	پایین
ب) $y = 3x^2 - 2$	$(0، -2)$	$x = 0$	بالا
پ) $y = x^2 - x$	$(\frac{1}{2}، -\frac{1}{4})$	$x = \frac{1}{2}$	بالا
ت) $y = x^2/4 + x - 2$	$(-2، -3)$	$x = -2$	بالا

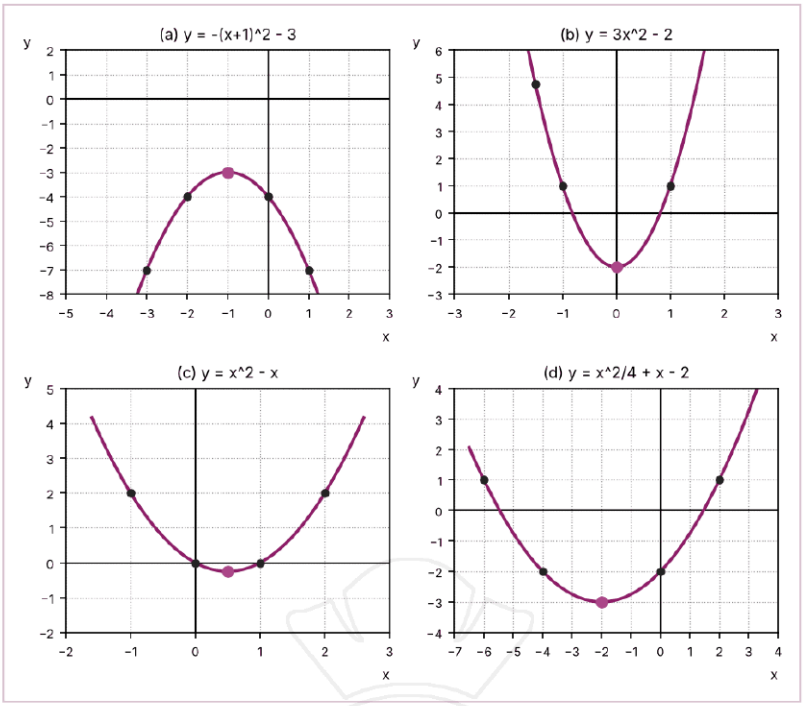
الف) از شکل مربع کامل، رأس $(-1، -3)$؛ نقاط: $(0، -4)$، $(-2، -4)$، $(1، -7)$، $(-3، -7)$.

ب) رأس $(0، -2)$؛ نقاط: $(\pm1، 1)$، $(\pm2، 10)$ و برخورد با محور x در .

پ) ؛ برخورد با محور x در $(0، 0)$ و $(1، 0)$؛ نقاط دیگر: $(-1، 2)$ و $(2، 2)$.

ت) ؛ برخورد با محور y در $(0، -2)$ و قرینهٔ آن $(-4، -2)$؛ نقاط: $(2، 1)$ و $(-6، 1)$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



۲۲۴ صفحه ۸۱ تمرین

۲ اگر (−۲، ۵) و (۰، ۵) دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به‌دست آورید.

دو نقطه عرض یکسان دارند، پس نسبت به خط تقارن قرینه‌اند و خط تقارن از وسط آن‌ها می‌گذرد:

خط تقارن سهمی $x = -1$ است.

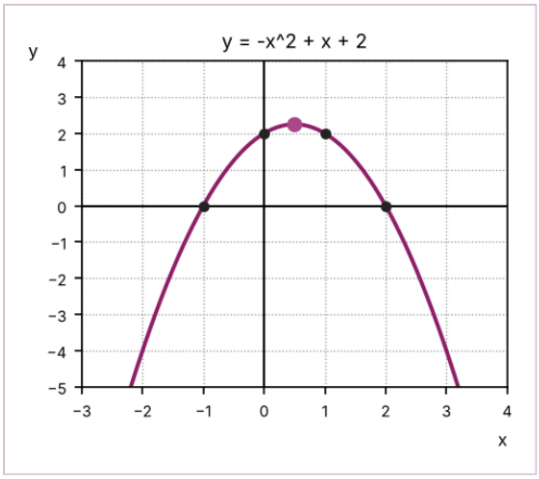
۲۲۵ صفحه ۸۱ تمرین

۳ نمودار سهمی ، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاطی به طول ۱− و ۲ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

چون محور xها را در ۱− و ۲ قطع کرده، ریشه‌های سهمی ۱− و ۲ هستند: . محور yها را در عرض ۲ قطع کرده، یعنی به‌ازای $x = 0$ مقدار $y = 2$ است:

رأس سهمی: ؛ دهانه رو به پایین است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



۲۲۶ صفحه ۸۱ تمرین

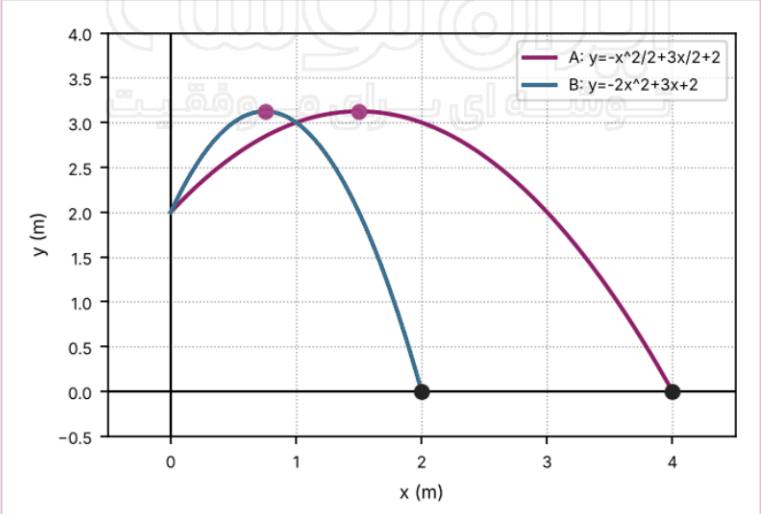
۴ دو پرتابگر وزنه در یک مسابقهٔ ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که α < β است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویهٔ α را انتخاب می‌کند و مسیر طی‌شده از رابطهٔ به‌دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویهٔ β را انتخاب می‌کند و مسیر طی‌شده از رابطهٔ به‌دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی‌شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور xها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازهٔ آن‌ها را مشخص کنید.

الف) هر دو سهمی دهانه‌ای رو به پایین دارند و از نقطهٔ (۰، ۲) (ارتفاع اولیه) می‌گذرند. رأس A: ، ؛ رأس B: ، .



ب) برخورد با زمین یعنی $y = 0$ (فقط $x \geq 0$ معنا دارد):

وزنهٔ A در نقطهٔ (۴، ۰) و وزنهٔ B در نقطهٔ (۲، ۰) به زمین می‌خورد؛ پس **وزنهٔ A مسافت افقی بیشتری (۴ متر در برابر ۲ متر)** طی کرده است.

پ) ارتفاع بیشینهٔ هر دو وزنه برابر متر است؛ یعنی هیچ‌کدام ارتفاع بیشتری پیدا نکرده‌اند و هر دو به **ارتفاع یکسان ۳/۱۲۵ متر** می‌رسند (A در $x = ۱/۵$ و B در $x = ۰/۷۵$).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

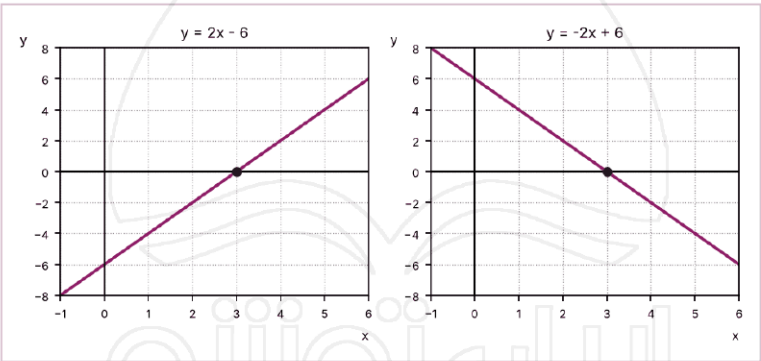
---

۲۲۷ صفحه ۸۳ **فعالیت**

۱ نمودار خط در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.

خط محور xها را در $x = ۳$ قطع می‌کند ($۲x \Rightarrow x = ۳ - ۶ = ۰$). نمودار برای $x < ۳$ زیر محور xها و برای $x > ۳$ بالای آن است:

x	$x < ۳$	$x = ۳$	$x > ۳$
$y = ۲x - ۶$	−	۰	+



---

۲۲۸ صفحه ۸۴ **فعالیت**

۲ نمودار خط را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر را که علامت y را برای xهای مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.

۳ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟

۴ نشان دهید که علامت عبارت ، برای xهای مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.

۲) ریشهٔ برابر $x = ۳$ است. نمودار (شکل سمت راست) برای $x < ۳$ بالای محور xها و برای $x > ۳$ پایین آن است:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

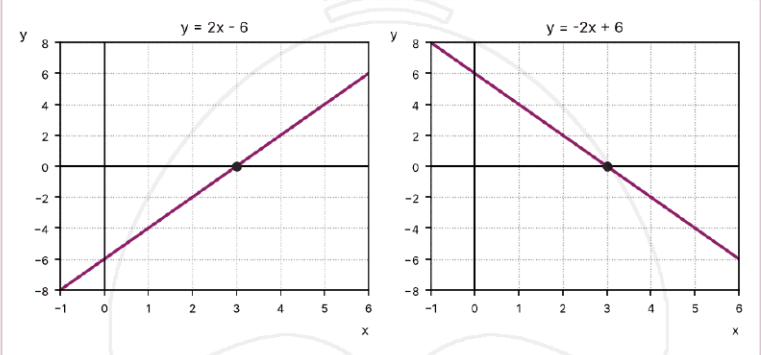
x	x < ۳	x = ۳	x > ۳
y = −۲x + ۶	+	۰	−

۳) وقتی ضریب x مثبت است (۲)، علامت y بعد از ریشه مثبت و قبل از آن منفی است؛ وقتی ضریب x منفی است (۲−)، علامت‌ها برعکس می‌شود: قبل از ریشه مثبت و بعد از آن منفی.

۴) ریشهٔ برابر است. می‌نویسیم :

x	x < −b/a	x = −b/a	x > −b/a
y = ax+b	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

- اگر باشد، است؛ پس علامت y همان علامت a است (موافق a).
- اگر باشد، است؛ پس علامت y مخالف علامت a است.
- در x = مقدار y برابر صفر است.



۲۲۹ صفحه ۸۴ مثال

مقدار y را برای x = ۳ و x = −۱ برای عبارت به‌دست آورید و صحت علامت اعداد به‌دست‌آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

ریشه: و ضریب x مثبت است (علامت: − قبل از ، + بعد از آن).

x = ۳: و چون است، علامت مثبت با جدول سازگار است.

x = −۱: و چون است، علامت منفی با جدول سازگار است.

۲۳۰ صفحه ۸۵ مثال

مقدار A = را برای x = ۴ و x = ۰ به‌دست آورید و صحت علامت مقادیر به‌دست‌آمده را با جدول بررسی کنید.

جدول: A منفی است برای ، مثبت است برای و منفی است برای x > ۳.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$x = ۴$: و $۳ < ۴$ است؛ علامت منفی با جدول سازگار است.

$x = ۰$: و است؛ علامت منفی با جدول سازگار است.

۲۳۱ صفحه ۸۵ **کار در کلاس**

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) ب)

پ) ت)

الف) ریشه‌ها: و .

x	$x < -\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳} < x < ۲$	۲	$x > ۲$
$۳x+۱$	−	۰	+	+	+
$x-۲$	−	−	−	۰	+
A	+	۰	−	۰	+

ب) و فقط در صفر است:

x	$x < ۳/۲$	۳/۲	$x > ۳/۲$
B	+	۰	+

پ) ریشه‌ها: ۰ و ۷.

x	$x < ۰$	۰	$۰ < x < ۷$	۷	$x > ۷$
$۳x$	−	۰	+	+	+
$x-۷$	+	+	+	۰	−
C	−	۰	+	۰	−

ت) صورت ریشهٔ و مخرج ریشهٔ $x = ۱$ دارد (در $x = ۱$ عبارت تعریف نشده است):

x	$x < ۱$	۱	$۱ < x < ۵/۲$	۵/۲	$x > ۵/۲$
$۵-۲x$	+	+	+	۰	−
$x-۱$	−	۰	+	+	+
D	−	تعریف‌نشده	+	۰	−

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳۲ صفحه ۸۶ — فعالیت

چندجمله‌ای درجه دوم را درنظر می‌گیریم که در آن a، b و c اعداد حقیقی‌اند و $a \neq 0$.

۱ فرض کنید معادلهٔ $P(x) = 0$ دو ریشهٔ متمایز x_1 و x_2 $(x_1 < x_2)$ داشته و به شکل تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت $P(x)$ را برای xهای مختلف تعیین کنید.

۲ اگر معادلهٔ $P(x) = 0$ ریشهٔ مضاعف برابر با x_1 داشته باشد، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل بنویسیم. با تکمیل جدول، علامت $P(x)$ را تعیین کنید.

۳ اکنون فرض کنید $\Delta < 0$ باشد؛ در این صورت معادلهٔ $P(x) = 0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. با توجه به اینکه ، علامت $P(x)$ را در جدول تعیین کنید.

۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ مثبت باشد، a و Δ چه علامتی دارند؟ برای وقتی که $P(x)$ منفی است نیز علامت a و Δ را تعیین کنید.

۱)

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
$x - x_1$	−	۰	+	+	+
$x - x_2$	−	−	−	۰	+
$(x-x_2)(x-x_1)$	+	۰	−	۰	+
$P(x)$	هم‌علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	هم‌علامت a

۲) است، پس:

x	$x \neq x_1$	$x = x_1$
$(x-x_1)^2$	+	۰
$P(x)$	هم‌علامت a	۰

۳) اگر $\Delta < 0$ باشد، است و داخل کروشه مجموع یک مربع (نامنفی) و یک عدد مثبت است؛ پس همواره مثبت است. بنابراین برای هر $x \in \mathbb{R}$، علامت $P(x)$ **هم‌علامت a** است.

۴) اگر $P(x)$ برای همهٔ xها مثبت باشد، باید $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد. اگر $P(x)$ برای همهٔ xها منفی باشد، باید $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

۲۳۳ صفحه ۸۸ — کار در کلاس

۱ چندجمله‌ای را با محاسبهٔ ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به‌دست‌آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

ایران توشه — توشه‌ای برای موفقیت

۲ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

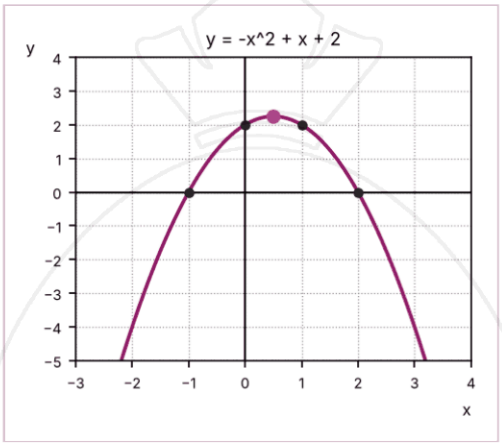
الف) ب)

۱) یا

چون $a = -۱ < ۰$ است، علامت بیرون ریشه‌ها منفی و بین ریشه‌ها مثبت است:

x	$x < -۱$	-۱	$-۱ < x < ۲$	۲	$x > ۲$
y	−	۰	+	۰	−

نمودار سهمی (دهانه رو به پایین، رأس (۰/۵، ۲/۲۵)) بین ۱− و ۲ بالای محور xها و بیرون این بازه پایین آن است؛ با جدول سازگار است.



۲ الف) و . ضریب x^2 در مثبت و ضریب x در منفی است.

x	$x < -۳$	-۳	$-۳ < x < ⅓$	$⅓$	$⅓ < x < ۳$	۳	$x > ۳$
$x^2-۹$	+	۰	−	−	−	۰	+
$۱-۳x$	+	+	+	۰	−	−	−
A	+	۰	−	۰	+	۰	−

ب) صورت: و فقط در $x = ۳$ صفر است. مخرج: با و $a = ۱ > ۰$ همیشه مثبت است. پس:

x	$x < ۳$	۳	$x > ۳$
$-x^2+۶x-۹$	−	۰	−
$x^2+x+۳$	+	+	+
B	−	۰	−

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳۴ صفحه ۸۹ فعالیت

فرض کنید x متغیری باشد که هم‌زمان در دو نامعادلهٔ زیر صدق می‌کند:

۱ هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به‌دست‌آمده را روی محور مقابل آن‌ها رسم کنید. به‌خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به‌دست‌آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.

۲ می‌توانیم دو نامعادلهٔ فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادلهٔ دوگانهٔ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادلهٔ دوگانه را حل کنید: به سه طرف ۱+ را اضافه می‌کنیم: ... < ۹ ≥ ۳x؛ هر سه طرف را در ⅓ ضرب می‌کنیم: ... < x ≥ .... جواب را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید.

۱)

روی محور: جواب اول نیم‌خطی از ⅓− (با دایرهٔ توخالی) به سمت راست و جواب دوم نیم‌خطی از ۳ (با دایرهٔ توپر) به سمت چپ است. اشتراک آن‌ها بخش مشترک هر دو یعنی پارهٔ بین ⅓− (توخالی) و ۳ (توپر) است:

۲)

جواب به‌دست‌آمده، همان اشتراک قسمت ۱ یعنی است؛ هر دو روش یک جواب می‌دهند.

۲۳۵ صفحه ۹۰ کار در کلاس

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجهٔ فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل می‌کند، به‌صورت است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را بر حسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید ۱۵ ≤ C ≤ ۲۵؛ سپس از رابطهٔ داده‌شده، C را بر حسب F بنویسید و نامعادلهٔ دوگانهٔ به‌دست‌آمده را حل کنید.)

به‌جای C مقدار آن را از رابطه قرار می‌دهیم:

همهٔ سه طرف را در ۹ ضرب می‌کنیم و بر ۵ تقسیم می‌کنیم:

پس حداقل دما **۵۹ درجهٔ فارنهایت** و حداکثر دما **۷۷ درجهٔ فارنهایت** است.

۲۳۶ صفحه ۹۰ فعالیت

سهمی را درنظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

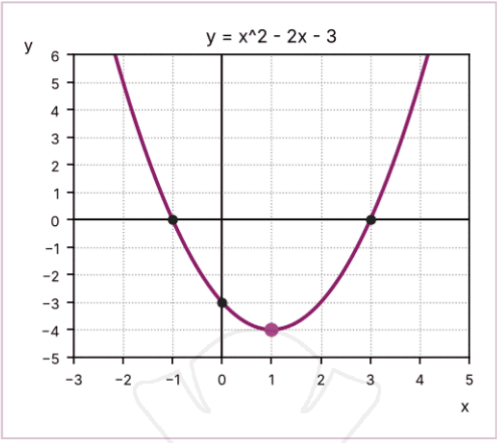
الف) به کمک نمودار رسم‌شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور xهاست؟

ب) جدول تعیین علامت عبارت را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x، علامت y منفی است؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به‌دست‌آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادلهٔ استفاده کرد.

ریشه‌ها: یا ؛ رأس: (۱، −۴).



الف) نمودار برای x بین ۱− و ۳ پایین محور xهاست، یعنی .

ب) چون a = ۱ > ۰ است:

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 3$	3	$x > 3$
$y = x^2-2x-3$	+	۰	−	۰	+

علامت y فقط برای منفی است.

پ) حل نامعادلهٔ یعنی یافتن xهایی که به‌ازای آن‌ها y منفی است، یعنی همان xهایی که نمودار زیر محور xهاست. هر دو روش (نمودار و جدول) به یک جواب می‌رسند: مجموعهٔ جواب است.

۲۳۷ صفحه ۹۰ کار در کلاس

هریک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) ب)

الف) ؛ ریشه‌ها ۴− و ۱.

جدول: a = ۱ > ۰ است؛ علامت عبارت برای x < ۴− مثبت، بین ۴− و ۱ منفی و برای x > ۱ مثبت است.

هندسی: سهمی دهانه رو به بالا دارد و محور xها را در ۴− و ۱ قطع می‌کند؛ بخش‌هایی که بالای محور یا روی آن‌اند: بیرون ریشه‌ها.

یا

ب) ؛ ریشه‌ها ۱- و ۲. علامت: بیرون ریشه‌ها مثبت و بین آن‌ها منفی است. سهمی (دهانه رو به بالا) بین ریشه‌ها زیر محور x است:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۸ صفحه ۹۱ **فعالیت**

۱ نامعادلهٔ را درنظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور نمایش دهید. مجموعهٔ مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به‌صورت بازه بنویسید.

۲ نامعادلهٔ را درنظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند. این اعداد را روی محور نشان دهید و مجموعهٔ این مقادیر را به‌صورت بازه بنویسید.

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. $|x| \leq ۳ \Rightarrow \ldots \leq x \leq \ldots$ ⇒ مجموعه جواب (به شکل بازه) = ...؛ $|x| \geq ۳ \Rightarrow x \leq \ldots$ یا $\ldots \leq x$ ⇒ مجموعه جواب (به شکل بازه) = ...

۱) اعدادی که فاصله‌شان از صفر حداکثر ۳ است، از ۳- تا ۳ هستند (با دایره‌های توپر روی ۳- و ۳ و پاره‌خط بین آن‌ها):

۲) اعدادی که فاصله‌شان از صفر حداقل ۳ است، در سمت راست ۳ (شامل ۳) یا سمت چپ ۳- (شامل ۳-) قرار دارند (دو نیم‌خط با دایره‌های توپر در ۳- و ۳):

۳)

یا

۲۳۹ صفحه ۹۳ **کار در کلاس**

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به‌دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) ب)

الف)

روی محور: پاره‌خطی بین ۵- و ۴ با دایره‌های توخالی در دو سر.

ب)

روی محور: پاره‌خطی بین ۳- و ۳ با دایره‌های توپر در دو سر.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۴۰ صفحه ۹۳ کار در کلاس

۲ یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازهٔ (۱، ۹) باشد.

وسط بازهٔ (۱، ۹) عدد ۵ و فاصلهٔ آن تا دو سر، ۴ است؛ یعنی x باید از ۵ کمتر از ۴ فاصله داشته باشد:

بررسی: ✓

۲۴۱ صفحه ۹۳ کار در کلاس

۳ یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن باشد.

نقطهٔ وسط ۶- و ۳ برابر است و فاصلهٔ آن تا هر دو سر است. جواب شامل نقاطی است که فاصله‌شان از حداقل باشد:

بررسی: یا ✓

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۴۲ صفحه ۹۳ تمرین

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) ب)

پ) ت)

ث) ج)

چ) ح)

الف)

ب) دو نامعادله هم‌زمان برقرارند: و . اشتراک:

پ)

ت) ریشهٔ صورت $x = ۲$ و ریشهٔ مخرج است. علامت کسر: برای منفی، برای مثبت و برای $x > ۲$ منفی؛ در $x = ۲$ صفر و در تعریف‌نشده است:

ث) چون برای هر x است، علامت حاصل‌ضرب همان علامت x است:

ج) مخرج دارای و $a > ۰$ است، پس همیشه مثبت است؛ علامت کسر همان علامت صورت است:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

چ)

ح)

توجه: متن بعضی نامعادله‌ها (به‌ویژه ت، چ و ح) در فایل منبع ناخوانا بوده و از روی نشانه‌های باقی‌مانده بازسازی شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۴۳ صفحه ۹۳ تمرین

۲ به ازای چه مقادیری از k، عبارت همواره مثبت است؟

عبارت درجه دوم با $a = ۱ > ۰$ وقتی همواره مثبت است که $\Delta < ۰$ باشد:

پس به‌ازای عبارت همواره مثبت است.

---

۲۴۴ صفحه ۹۳ تمرین

۳ به ازای چه مقادیری از m، سهمی همواره پایین محور xهاست؟

سهمی همواره پایین محور xهاست یعنی y برای هر x منفی است؛ پس باید $a = m < ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد:

این جواب با شرط $m < ۰$ سازگار است؛ پس **$m < ۰ > -۴$**، یعنی .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۴۵ صفحه ۹۳ تمرین

۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

باید باشد:

ریشه‌ها: $t = ۰$ و $t = ۳/۶$. چون ضریب منفی است، عبارت بین ریشه‌ها مثبت است:

یعنی از لحظهٔ پرتاب تا **۳/۶ ثانیه** بعد، ارتفاع جسم بیشتر از ۱۳ متر است. (جسم حدود ۴/۲ ثانیه بعد به زمین می‌رسد.)

۲۴۶ صفحه ۹۳ تمرین

۵ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ به‌دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به‌دست‌آمده قابل قبول‌اند؟

باید باشد:

یا

چون x زمان است، $x \geq 0$؛ پس ضربان قلب در و دقیقه بیشتر از ۱۱۰ است.

قابل قبول بودن: ضربان در لحظهٔ $x = 0$ برابر ۲۰۰ است، کاهش می‌یابد و در $x = 8$ به کمترین مقدار (۸۰) می‌رسد. جواب $0 \leq x < 4$ منطقی است؛ ولی $x > 12$ قابل قبول نیست، زیرا در واقعیت پس از استراحت، ضربان قلب به حالت عادی برمی‌گردد و دوباره بالا نمی‌رود (مدل فقط برای مدت کوتاه پس از ورزش معتبر است).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی (۱) دهم - فصل پنجم

تابع

فهرست

۲۴۷ صفحه ۹۵ · فعالیت ۱ — جدول‌های رابطهٔ دو مجموعه ۱۱۸

۲۴۸ صفحه ۹۶ · فعالیت ۲ — نمودار پیکانی و تعریف تابع ۱۱۸

۲۴۹ صفحه ۹۶ · کار در کلاس ۱ — تشخیص تابع در نمودارهای پیکانی (دانش‌آموزان و ورزش) ۱۱۹

۲۵۰ صفحه ۹۷ · کار در کلاس ۲ — رسم نمودار پیکانی تابع و غیرتابع ۱۱۹

۲۵۱ صفحه ۹۷ · کار در کلاس ۳ — سن، وزن و غذای مورد علاقه ۱۲۰

۲۵۲ صفحه ۹۷ · کار در کلاس ۴ — تشخیص تابع بودن چند نمودار پیکانی ۱۲۰

۲۵۳ صفحه ۹۷ · فعالیت — نمایش تابع به‌صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی ۱۲۱

۲۵۴ صفحه ۹۸ · کار در کلاس ۱ — جمعیت شهرها ۱۲۱

۲۵۵ صفحه ۹۹ · کار در کلاس ۲ — نمایش‌های مختلف یک رابطه ۱۲۲

۲۵۶ صفحه ۹۹ · کار در کلاس ۳ — معیار تابع بودن مجموعهٔ زوج‌های مرتب ۱۲۲

۲۵۷ صفحه ۱۰۰ · تمرین ۱ — کدام رابطه تابع است؟ ۱۲۳

۲۵۸ صفحه ۱۰۰ · تمرین ۲ — روابط از A به B و نمایش با زوج مرتب و نمودار ۱۲۳

۲۵۹ صفحه ۱۰۰ · تمرین ۳ — کدام مجموعه تابع است؟ ۱۲۴

۲۶۰ صفحه ۱۰۰ · تمرین ۴ — ساخت تابع از مجموعه‌های غیرعددی ۱۲۵

۲۶۱ صفحه ۱۰۱ · فعالیت — چندضلعی و مجموع زوایای داخلی ۱۲۵

۲۶۲ صفحه ۱۰۱ · کار در کلاس ۱ — ضلع مربع و محیط آن ۱۲۶

۲۶۳ صفحه ۱۰۱ · کار در کلاس ۲ — دامنه و برد با تعداد عضو معین ۱۲۶

۲۶۴ صفحه ۱۰۱ · کار در کلاس ۳ — دامنه، برد و مجموعهٔ B ۱۲۷

۲۶۵ صفحه ۱۰۲ · فعالیت — دنبالهٔ شکل‌ها و تابع $2n-1$ ۱۲۷

۲۶۶ صفحه ۱۰۲ · کار در کلاس — برد تابع $f(n)=2n+1$ روی دامنهٔ مشخص ۱۲۸

۲۶۷ صفحه ۱۰۳ · کار در کلاس — تابع خطی $y=2x-1$ ۱۲۸

۲۶۸ صفحه ۱۰۳ · فعالیت — وزن کودک و نمودار رشد (قسمت‌های الف تا ت) ۱۲۹

۲۶۹ صفحه ۱۰۴ · کار در کلاس ۱ — تشخیص تابع بودن از روی نمودار و معیار خط عمودی ۱۳۰

۲۷۰ صفحه ۱۰۵ · کار در کلاس — تابع بودن نمودارها (دامنه و برد) ۱۳۱

۲۷۱ صفحه ۱۰۵ · تمرین ۱ — تشخیص تابع بودن نمودارها و دامنه و برد ۱۳۱

۲۷۲ صفحه ۱۰۶ · تمرین ۲ — مثال‌هایی از توابع با دامنه و برد خاص ۱۳۲

۲۷۳ صفحه ۱۰۶ · تمرین ۳ — جدول و نمودار توابع $y=2x$ با دامنه‌های مختلف ۱۳۲

۲۷۴ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۴ — ارتفاع شمع ۱۳۳

۲۷۵ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۵ — آیا خط $x=2$ و $y=5$ تابع‌اند؟ ۱۳۴

۲۷۶ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۶ — توابع خطی با دامنهٔ $[-۳، ۵]$ ۱۳۴

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۷۷ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۷ — نمایش جبری تابع با نمودار داده‌شده ... ۱۳۴

۲۷۸ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۸ — دمای سنگ‌ها در عمق زمین ۱۳۵

۲۷۹ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۹ — رسم تابع $f(x)=-3$ با دامنه‌های مختلف ... ۱۳۵

۲۸۰ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۰ — تابع خطی با $f(2)=11$ و $f(0)=7$ ۱۳۶

۲۸۱ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۱ — آیا جدول، تابع است؟ ۱۳۶

۲۸۲ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۲ — مسافت پیاده‌روی علی ۱۳۶

۲۸۳ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۳ — نوشتن تابع g با زوج مرتب و رسم نمودار ... ۱۳۷

۲۸۴ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۴ — سانتی‌گراد و فارنهایت ۱۳۷

۲۸۵ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۵ — محیط مستطیل برحسب عرض ... ۱۳۷

۲۸۶ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۶ — دو تابع با دامنه و برد یکسان و بدون زوج مرتب مشترک ... ۱۳۸

۲۸۷ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۷ — نمودار تابعی با دامنهٔ $[0, 2]$ و برد $[-2, 1]$ ... ۱۳۸

۲۸۸ صفحه ۱۰۹ · فعالیت ۱ — توابع مساحت مربع و دایره، حجم کره، توابع چندجمله‌ای ... ۱۳۸

۲۸۹ صفحه ۱۱۰ · فعالیت ۲ — تابع همانی ۱۳۹

۲۹۰ صفحه ۱۱۰ · فعالیت ۳ — تابع ثابت ۱۴۰

۲۹۱ صفحه ۱۱۰ · کار در کلاس ۱ — مثال‌هایی از چند نوع تابع ... ۱۴۰

۲۹۲ صفحه ۱۱۱ · کار در کلاس ۲ — مقایسهٔ توابع x^2 ..... ۱۴۰

۲۹۳ صفحه ۱۱۱ · فعالیت — تابع قدرمطلق ۱۴۱

۲۹۴ صفحه ۱۱۲ · فعالیت — تابع قدرمطلق با دامنهٔ R ۱۴۲

۲۹۵ صفحه ۱۱۲ · فعالیت — توابع قطعه‌ای f, g, h و نمودارهایشان ... ۱۴۲

۲۹۶ صفحه ۱۱۳ · فعالیت — رسم توابع به کمک انتقال عمودی ... ۱۴۲

۲۹۷ صفحه ۱۱۳ · کار در کلاس ۱ — رسم نمودار توابع قطعه‌ای و محاسبهٔ مقادیر ... ۱۴۳

۲۹۸ صفحه ۱۱۳ · کار در کلاس ۲ — یافتن ضابطهٔ تابع قطعه‌ای از روی نمودار ... ۱۴۳

۲۹۹ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس ۱ — انتقال نمودار تابع قدرمطلق ... ۱۴۴

۳۰۰ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس ۲ — انتقال نمودار سهمی و رسم $(x+1)^2$ ... ۱۴۴

۳۰۱ صفحه ۱۱۵ · کار در کلاس — تابع‌های درجه دوم و نمودارشان ... ۱۴۵

۳۰۲ صفحه ۱۱۵ · تمرین ۱ — تابع $f(x)=3x-1$ روی دامنه‌های مختلف ... ۱۴۵

۳۰۳ صفحه ۱۱۵ · تمرین ۲ — دامنه و برد توابع از روی نمودار ... ۱۴۶

۳۰۴ صفحه ۱۱۶ · تمرین ۳ — درستی یا نادرستی گزاره‌ها دربارهٔ دامنه و برد ... ۱۴۶

۳۰۵ صفحه ۱۱۶ · تمرین ۴ — حجم تانکر گاز ۱۴۷

۳۰۶ صفحه ۱۱۶ · تمرین ۵ — تشخیص نمودار هر تابع، دامنه و برد ... ۱۴۷

۳۰۷ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۶ — برد توابع تمرین ۵ روی دامنهٔ $[-2, 3]$ ... ۱۴۸

۳۰۸ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۷ — ضابطه و مقادیر تابع از روی نمودار ... ۱۴۸

۳۰۹ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۸ — تابع خطی گذرنده از $(3,4)$ و $(3,0)$ ... ۱۴۹

۳۱۰ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۹ — هزینهٔ مکالمهٔ تلفنی ۱۴۹

۳۱۱ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۱۰ — کدام رابطه تابع است؟ ۱۴۹

۳۱۲ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۱۱ — الگوی ذوزنقه‌ها و محیط شکل ۱۵۰

۳۱۳ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۱۲ — تابع درجه دوم با سهمی از دو نقطه ... ۱۵۱

irantooshe.ir

۲۴۷ صفحه ۹۵ فعالیت ۱

در جدول‌های زیر مثال‌های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقهٔ خودتان تکمیل کنید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می‌توان به آن نسبت داد. دربارهٔ بقیهٔ جدول‌ها مشابه این عبارت را بنویسید.

به یک ساعت معین فقط یک دما را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

.....

..... یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد. .....

جدول قیمت: به یک کالای معین فقط یک قیمت را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک کالا (مثلاً خودکار) دو قیمت متفاوت ندارد.

جدول نمره: به یک درس معین فقط یک نمره را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک درس، برای یک دانش‌آموز، دو نمرهٔ متفاوت ندارد.

جدول روز تولد: به یک شخص معین فقط یک روز تولد را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

جدول آخر (نمونه): به هر دانش‌آموز کلاس، شمارهٔ ملی او را نسبت می‌دهیم؛ هر دانش‌آموز فقط یک شمارهٔ ملی دارد. (یا: هر کشور ← پایتخت آن؛ هر کشور فقط یک پایتخت دارد.)

نتیجه: در همهٔ جدول‌ها، به هر عضو ستون اول دقیقاً یک عضو از ستون دوم نسبت داده شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۴۸ صفحه ۹۶ فعالیت ۲

جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آن‌ها را به هم مربوط می‌کنند، مشخص کرد. به این شیوهٔ نمایش، نمودارهای پیکانی می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.

توجه دارید که در رابطه‌های بالا، از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این‌گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامند. برای تکمیل این مورد از مثال‌های مطرح‌شده در کلاس کمک بگیرید.

هر جدول را با دو مجموعه می‌نویسیم: اعضای ستون اول در مجموعهٔ A و اعضای ستون دوم در مجموعهٔ B قرار می‌گیرند و هر سطر جدول یک پیکان از A به B است:

- **ساعت ← دما:** ۸ ← ۱۵، ۹ ← ۱۶، ۱۰ ← ۱۷، ۱۱ ← ۱۷، ۱۲ ← ۱۸ (از هر ساعت یک پیکان؛ به ۱۷ دو پیکان می‌رسد که اشکالی ندارد).

- **کالا ← قیمت:** خودکار ← ۱۵۰۰، دفتر ← ۳۰۰۰، مداد ← ۱۰۰۰، خط‌کش ← ۱۵۰۰.
- **درس ← نمره:** ریاضی، فیزیک، شیمی و ادبیات هر کدام به نمرهٔ خودشان وصل می‌شوند (از هر درس فقط یک پیکان).
- **فرد ← روز تولد:** هر فرد (امیدی، احسانی، کشاورز، رستگار) به روز تولد خودش وصل می‌شود (از هر فرد فقط یک پیکان).

تعریف: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۴۹ صفحه ۹۶ کار در کلاس ۱

مجموعهٔ A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعهٔ B شامل دو رشتهٔ ورزشی است که دانش‌آموزان می‌توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده‌شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟

برای تشخیص، از هر عضو A (محمد، حسین، امید) تعداد پیکان‌های خارج‌شده را می‌شماریم:

- اگر از **هر سه** دانش‌آموز **دقیقاً یک** پیکان خارج شده باشد، نمودار تابع است (مثلاً هر سه یک ورزش انتخاب کرده‌اند، حتی اگر هر سه یک رشته را انتخاب کرده باشند).
- اگر از یک دانش‌آموز **هیچ** پیکانی خارج نشده باشد (ورزشی انتخاب نکرده)، نمودار تابع نیست.
- اگر از یک دانش‌آموز **دو** پیکان خارج شده باشد (هم والیبال و هم فوتبال)، نمودار تابع نیست.

پس نمودارهایی که در آن‌ها هر دانش‌آموز دقیقاً یک پیکان دارد تابع‌اند و بقیه (دارای عضو بدون پیکان یا عضو با دو پیکان) تابع نیستند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

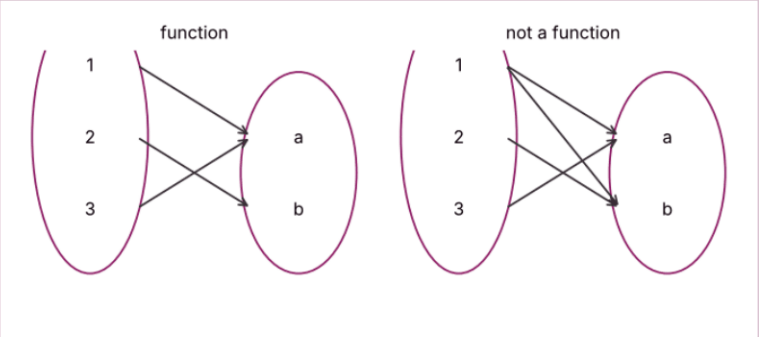
---

۲۵۰ صفحه ۹۷ کار در کلاس ۲

از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y این کار را به‌گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

نمونه (پاسخ‌های دیگر هم درست است). نمودار چپ تابع است: از هر عضو یک پیکان خارج شده. نمودار راست تابع نیست: از عضو ۱ دو پیکان خارج شده است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



۲۵۱ صفحه ۹۷ **کار در کلاس ۳**

الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آن‌ها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ رابطه‌ای که به افراد وزن آن‌ها را نسبت می‌دهد، چطور؟

ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقهٔ آن‌ها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید.

الف) بله، هر دو تابع‌اند؛ هر فرد (در یک زمان معین) فقط یک سن و فقط یک وزن دارد، پس از هر فرد دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود.

ب) خیر، معمولاً تابع نیست؛ چون یک فرد می‌تواند بیش از یک غذای مورد علاقه داشته باشد (مثلاً قورمه‌سبزی و قیمه)، پس از آن فرد دو پیکان خارج می‌شود. (فقط اگر هر فرد دقیقاً یک غذای مورد علاقه داشته باشد تابع خواهد بود.)

۲۵۲ صفحه ۹۷ **کار در کلاس ۴**

کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟ (نمودارها از A به B، C به D، E به F و X به Y)

برای هر نمودار از هر عضو مجموعهٔ سمت راست (مبدأ) پیکان‌ها را می‌شماریم. نمودار وقتی تابع است که:

1. از هیچ عضو مبدأ بدون پیکان نماند (هر عضو مبدأ حتماً پیکان دارد)،
2. از هیچ عضو مبدأ بیش از یک پیکان خارج نشود.

نمودارهایی که شرط بالا را داشته باشند تابع‌اند؛ اگر در نمودار عضوی از مبدأ دو پیکان داشته باشد یا هیچ پیکانی نداشته باشد، تابع نیست. (اینکه چند پیکان به یک عضو مقصد برسد یا عضوی از مقصد پیکان دریافت نکند، در تابع بودن اثری ندارد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵۳ صفحه ۹۷ فعالیت

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد. رابطهٔ بین زمان و دما را به‌صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.

اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض درنظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده‌شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به‌صورت زیر نمایش داد: (۴، ۵)، (۵، ۴)، (۶، ۳)، (۷، ۳)

در هر زوج مرتب عضو اول را «مؤلفهٔ اول» و عضو دوم را «مؤلفهٔ دوم» می‌نامیم. مجموعهٔ f یک تابع است. برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار نیز دما را به زمان نسبت دهید و نمودار را به‌صورت زوج مرتب نمایش دهید.

ساعت	۴	۵	۶	۷
دما (سانتی‌گراد)	۵	۴	۳	۳

نمودار پیکانی: ۴ ← ۵، ۵ ← ۴، ۶ ← ۳، ۷ ← ۳. از هر ساعت دقیقاً یک پیکان خارج شده است، پس این رابطه **تابع** است (به ۳ دو پیکان رسیده؛ اشکالی ندارد).

نمایش زوج مرتبی:

هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ اول یکسان ندارند، پس f تابع است. دامنهٔ f برابر {۴، ۵، ۶، ۷} و برد آن {۳، ۴، ۵} است. زوج‌های (۴، ۵) و (۵، ۴) برابر نیستند، چون ترتیب مهم است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵۴ صفحه ۹۸ کار در کلاس ۱

نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز، اهواز و کرمان در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به‌طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

رابطهٔ بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت تقریبی (میلیون نفر)	۸/۷	۳/۲	۲	۱/۶	۱/۶	۱/۱	۰/۷

نمودار پیکانی: از هر شهر یک پیکان به جمعیت همان شهر می‌رود (مثلاً تهران ← ۸/۷، مشهد ← ۳/۲، ...).

زوج مرتبی:

{(تهران، ۸/۷)، (مشهد، ۳/۲)، (اصفهان، ۲)، (شیراز، ۱/۶)، (تبریز، ۱/۶)، (اهواز، ۱/۱)، (کرمان، ۰/۷)}

هر شهر فقط یک جمعیت دارد (مؤلفهٔ اول هیچ دو زوجی یکسان نیست)؛ پس این رابطه **تابع** است. (برابر بودن جمعیت دو شهر مانعی ندارد.)

اعداد جمعیت تقریبی‌اند و پاسخ‌های دیگر نزدیک به آن‌ها هم پذیرفته است.

۲۵۵ صفحه ۹۹ کار در کلاس ۲

در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

ستون‌ها: توصیف رابطه | مجموعهٔ زوج‌های مرتب | نمودار پیکانی | جدول یا نمودار

ردیف ۱: «به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.» با زوج‌های {(۱،۱)، (۲،۱)، (۲،۲)، (۳،۱)، (۳،۳)}

ردیف ۲: زوج‌های {(۲،۴)، (۳،۹)، (۴،۱۶)}

ردیف ۳: «به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آن‌ها را نسبت می‌دهد.»

ردیف ۴: نمودار پیکانی از {−۲، ۰، ۲} به {−۱، ۰، ۱}

ردیف ۱: پیکان‌ها: ۱ ← ۱؛ ۲ ← ۱ و ۲؛ ۳ ← ۱ و ۳. جدول: ورودی ۲ دو خروجی ۱ و ۲ دارد. چون از ۲ و ۳ دو پیکان خارج می‌شود، **تابع نیست**.

ردیف ۲: توصیف: «به هر عدد، مربع آن را نسبت می‌دهد» (به اعداد ۲، ۳، ۴ مربعشان را). نمودار پیکانی: ۲ ← ۴، ۳ ← ۹، ۴ ← ۱۶. **تابع است**.

ردیف ۳: ریشه‌های دوم ۴ برابر ۲ و ۲− و ریشه‌های دوم ۷ برابر و هستند:

از ۴ دو پیکان (به ۲ و ۲−) و از ۷ دو پیکان خارج می‌شود، پس **تابع نیست**.

ردیف ۴: برای نمونه پیکان‌ها باشند (هر عدد به نصف خودش): توصیف «هر عدد را به نصف آن نسبت می‌دهد»؛ مجموعهٔ زوج‌های مرتب:

از هر عضو دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود، پس **تابع است**. (ردیف آخر به دلخواه؛ مثلاً: به هر عدد فرد کمتر از ۷ بیشترین مقسوم‌علیه‌اش را نسبت می‌دهیم.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵۶ صفحه ۹۹ کار در کلاس ۳

الف) کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

g = {(۱، ۵)، (۲، ۹)، (۲، ۵)، (۳، ۱۰)} f = {(۱، ۵)، (۲، ۹)، (۳، ۱۰)}

ب) با تکمیل جملهٔ زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به‌صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به‌دست آورید: اگر یک رابطه به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن ..... .

الف) f تابع است، چون مؤلفه‌های اول (۱، ۲، ۳) همه متفاوت‌اند و از هر عضو یک پیکان خارج می‌شود.

g تابع نیست؛ چون دو زوج مرتب (۲، ۹) و (۲، ۵) مؤلفهٔ اول یکسان (۲) ولی مؤلفهٔ دوم متفاوت دارند، یعنی از ۲ دو پیکان خارج می‌شود.

ب) «...هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن **مؤلفهٔ اول یکسان نداشته باشند**» (یا: مؤلفهٔ اول مشترک ولی مؤلفهٔ دوم متفاوت نداشته باشند).

۲۵۷ صفحه ۱۰۰ **تمرین ۱**

کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.

الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

هـ) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشهٔ سوم آن را نسبت می‌دهد.

الف) تابع است؛ هر مربع با ضلع a فقط یک محیط دارد: .

ب) تابع است؛ هر فرد در یک زمان معین فقط یک دمای بدن دارد.

ج) تابع است؛ هر فرد فقط یک گروه خونی دارد.

د) تابع نیست؛ یک دانش‌آموز می‌تواند چند دوست داشته باشد (چند پیکان از یک عضو).

هـ) تابع نیست؛ هر عدد مثبت دو ریشهٔ دوم دارد، مثلاً ۴ ← ۲ و ۲-. (عدد منفی ریشهٔ دوم ندارد و برای صفر یک ریشه داریم.)

و) تابع است؛ هر عدد حقیقی دقیقاً یک ریشهٔ سوم دارد، مثلاً ریشهٔ سوم ۸ برابر ۲ و ریشهٔ سوم ۸- برابر ۲- است.

۲۵۸ صفحه ۱۰۰ **تمرین ۲**

مجموعه‌های A = {a, b, c} و B = {۱, ۲} داده شده‌اند.

الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.

ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

ج) چهار رابطهٔ به‌دست‌آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

الف) از هر عضو A دقیقاً یک پیکان به B رسم می‌کنیم:

- f_1: a ← ۱، b ← ۱، c ← ۲
- f_2: a ← ۱، b ← ۲، c ← ۲

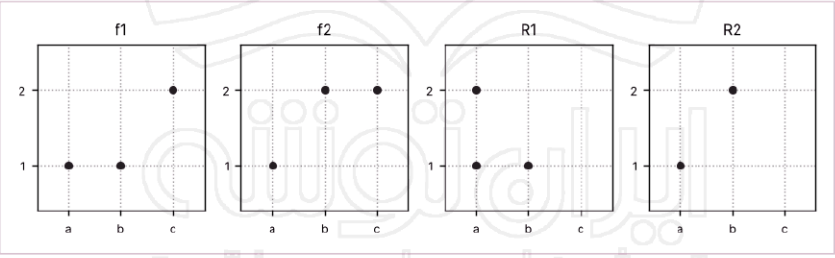
ب) یا از یک عضو دو پیکان خارج شود یا از عضوی هیچ پیکانی خارج نشود:

- R_1: a ← ۱ و b ← ۱، ۲ (از a دو پیکان؛ از c هیچ پیکان)
- R_2: a ← ۱، b ← ۲ (از c هیچ پیکانی خارج نشده)

ج) نمایش زوج مرتبی:

- $f_1 = \{(a,۱)، (b,۱)، (c,۲)\}$
- $f_2 = \{(a,۱)، (b,۲)، (c,۲)\}$
- $R_1 = \{(a,۱)، (a,۲)، (b,۱)\}$
- $R_2 = \{(a,۱)، (b,۲)\}$

نمودار مختصاتی: روی محور افقی a، b، c و روی محور عمودی ۱ و ۲ قرار می‌گیرند. نقاط هر رابطه روی نمودار زیر مشخص شده‌اند (در f_1 و f_2 روی هر خط عمودی دقیقاً یک نقطه هست؛ در R_1 روی خط a دو نقطه و در R_2 روی خط c هیچ نقطه‌ای نیست).



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵۹ صفحه ۱۰۰ تمرین ۳

کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$f = \{(۱، ۲)، (۳، -۵)، (۳، ۷)\}$ $g = \{(۱، ۸)، (۱، ۳/۵)، (۱، -۵)، (۱، ۰)\}$

$h = \{(۲، ۳)، (۳، ۲)، (۱، ۱)\}$ $k = \{(۲، ۵)\}$

$r = \{(۲، ۰)، (۷-، ۰)\}$ $l = \{(۱، ۲)، (۲، ۴)، (۳، ۶)، ...\}$

طبق معیار، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تابع است که هیچ دو زوج متمایزی مؤلفهٔ اول یکسان نداشته باشند.

- **f:** تابع نیست؛ دو زوج (۳، ۵-) و (۳، ۷) مؤلفهٔ اول یکسان و مؤلفهٔ دوم متفاوت دارند.
- **g:** تابع نیست؛ چهار زوج مؤلفهٔ اول یکسان (۱) و مؤلفه‌های دوم متفاوت دارند.
- **h:** تابع است؛ مؤلفه‌های اول ۲، ۳ و ۱ متفاوت‌اند.
- **k:** تابع است؛ فقط یک زوج مرتب دارد.
- **r:** تابع است؛ مؤلفه‌های اول ۲ و ۷- متفاوت‌اند (برابر بودن مؤلفه‌های دوم مشکلی ندارد).
- **l:** تابع است؛ هر عدد طبیعی x به ۲x نسبت داده شده و مؤلفه‌های اول همه متفاوت‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۶۰ صفحه ۱۰۰ **تمرین ۴**

A و B مجموعه‌هایی غیرعددی‌اند. در شکل زیر در A و B اعضایی دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید دست‌کم سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

برای نمونه: A = {سیب، موز، هویج} و B = {میوه، سبزی}.

- تابع ۱ (نوع خوراکی): سیب ← میوه، موز ← میوه، هویج ← سبزی.
- تابع ۲ (همه به یک عضو): سیب ← میوه، موز ← میوه، هویج ← میوه.
- تابع ۳: سیب ← سبزی، موز ← میوه، هویج ← سبزی.

در هر سه نمودار از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده است، پس هر کدام تابع‌اند. (پاسخ‌های دیگر هم درست است.)

۲۶۱ صفحه ۱۰۱ **فعالیت**

در جدول زیر رابطهٔ بین تعدادی چندضلعی و مجموع زوایای داخلی آن‌ها داده شده است. جدول را کامل کنید. (مثلث، مربع، لوزی، پنج‌ضلعی)

این رابطه را به‌صورت زوج مرتبی نمایش دهید: f = {(مثلث، ۱۸۰)، (مربع، ...)، (لوزی، ...)، (پنج‌ضلعی، ...)}

چرا f یک تابع است؟

چندضلعی	مثلث	مربع	لوزی	پنج‌ضلعی
مجموع زوایای داخلی (درجه)	۱۸۰	۳۶۰	۳۶۰	۵۴۰

مجموع زوایای داخلی nضلعی است: برای چهارضلعی‌ها ۳۶۰ و برای پنج‌ضلعی .

f = {(مثلث، ۱۸۰)، (مربع، ۳۶۰)، (لوزی، ۳۶۰)، (پنج‌ضلعی، ۵۴۰)}

f تابع است چون هر چندضلعی فقط یک مجموع زوایای داخلی دارد؛ یعنی مؤلفه‌های اول زوج‌ها (مثلث، مربع، لوزی، پنج‌ضلعی) همه متفاوت‌اند. (مربع و لوزی هر دو ۳۶۰ دارند که مشکلی ایجاد نمی‌کند.)

دامنه: {مثلث، مربع، لوزی، پنج‌ضلعی} و برد: {۱۸۰، ۳۶۰، ۵۴۰}.

۲۶۲ صفحه ۱۰۱ **کار در کلاس ۱**

در جدول زیر رابطهٔ بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع: ، ۱، ، ۲ | محیط: ۲، ۴، ...، ...

رابطهٔ داده‌شده را به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

محیط مربع ۴ برابر ضلع آن است: . پس برای ضلع محیط ۶ و برای ضلع ۲ محیط ۸ می‌شود.

طول ضلع	۱/۲	۱	۳/۲	۲
محیط	۲	۴	۶	۸

f تابع است چون مؤلفه‌های اول (طول ضلع‌ها) همه متفاوت‌اند؛ یعنی هر ضلع فقط یک محیط دارد.

دامنه = و برد = {۲، ۴، ۶، ۸}.

۲۶۳ صفحه ۱۰۱ **کار در کلاس ۲**

الف) تابعی مثال بزنید که دامنهٔ آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنهٔ آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

الف) ؛ دامنه {۱، ۲، ۳} (سه عضو) و برد {a, b} (دو عضو).

ب) خیر؛ چون از هر عضو دامنه دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود، تعداد اعضای برد نمی‌تواند از تعداد اعضای دامنه بیشتر باشد. با دو عضو در دامنه حداکثر دو عضو در برد داریم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶۴ صفحه ۱۰۱ کار در کلاس ۳

اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد، می‌دانیم که دامنهٔ f همان مجموعهٔ A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعهٔ B برابر است؟ مثال بزنید.

خیر. برد فقط شامل اعضایی از B است که پیکانی به آن‌ها رسیده؛ پس برد زیرمجموعه‌ای از B است و ممکن است برابر B نباشد.

مثال: ؛ دامنهٔ f برابر A است ولی برد آن {۱} است که با B برابر نیست.

۲۶۵ صفحه ۱۰۲ فعالیت

دنبالهٔ شکل‌های زیر را درنظر بگیرید (شکل اول ۱ دایره، شکل دوم ۳ دایره، شکل سوم ۵ دایره، شکل چهارم ۷ دایره، ...). جدول را کامل کنید. (شمارهٔ شکل: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ...، ۱۰۰، ...، n؛ تعداد دایره‌ها: ۱، ۳، ...)

چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع: f = {(۱، ۱)، (۲، ۳)، (۳، ۵)، ...، (۱۰۰، ...)، ...، (n، ...)، ...}

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.

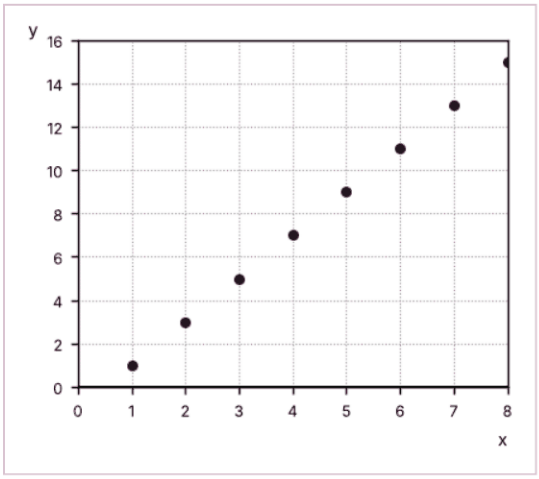
دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید.

هر شکل از دایره‌های شکل قبلی ۲ تا بیشتر دارد؛ شکل nام دایره دارد.

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n
تعداد دایره‌ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	2n−1

هر شکل (هر عدد طبیعی) فقط یک تعداد دایره دارد، پس مؤلفه‌های اول زوج‌ها متفاوت‌اند و رابطه تابع است:

نمودار پیکانی: ۱ ← ۱، ۲ ← ۳، ۳ ← ۵، ۴ ← ۷، ...، n ← 2n−1. **نمودار مختصاتی:** نقطه‌های جدا از هم (نه خط پیوسته) به‌صورت زیر:



دامنه = مجموعهٔ اعداد طبیعی و **برد** = مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد .

۲۶۶ صفحه ۱۰۲ کار در کلاس

اگر تابعی با نمایش جبری داده شده باشد و دامنهٔ آن A = {۱، ۲، ۳، ۴} باشد، برد تابع f را به‌دست آورید.

پس برد تابع f برابر **{۳، ۵، ۷، ۹}** است.

۲۶۷ صفحه ۱۰۳ کار در کلاس

جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط استفاده کنید. (x: ۱-، ۰، ۱، ۲، ۳)

آیا می‌توانید شباهت و تفاوت این جدول را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید.

نمودار این تابع و تابع داده‌شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟

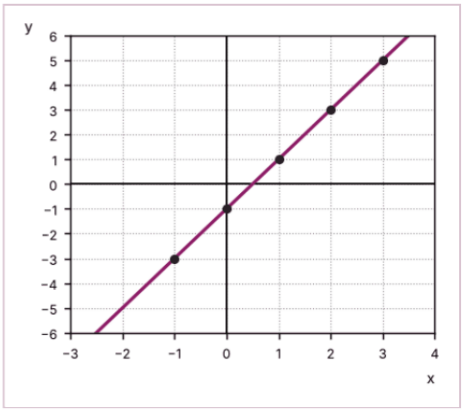
دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید و با دامنه و برد تابع که در آن n∈N مقایسه کنید. جاهای خالی را کامل کنید: g(۰) = ...، g(...) = ۲، ...

نمایش جبری تابع داده‌شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. g(x) = ... در اینجا x یک عدد ..... است.

هر تابع که بتوان آن را به شکل y = ax + b نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y = 2x - 1	۳-	۱-	۱	۳	۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



شباهت: ضابطهٔ هر دو ۲ برابر ورودی منهای ۱ است؛ و نقطه‌های فعالیت قبل روی همین خط قرار دارند. **چرا تابع است؟** به هر x فقط یک y = 2x − 1 نسبت داده می‌شود (مؤلفه‌های اول متفاوت‌اند).

تفاوت: در فعالیت قبل x فقط عدد طبیعی بود (نقطه‌های جدا از هم؛ دامنه N و برد اعداد فرد)، ولی اینجا x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد و نمودار یک خط پیوسته است؛ دامنه و برد تابع g هر دو مجموعهٔ اعداد حقیقی R هستند.

مقدارها:

در اینجا x یک عدد **حقیقی** است. این تابع خطی است (شکل y = ax + b با a = ۲ و b = −۱).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۶۸ صفحه ۱۰۳ فعالیت

هنگامی که پزشکان می‌خواهند دربارهٔ رشد یک کودک اظهارنظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسهٔ نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند: الف) رشد مطلوب، ب) کندی رشد، پ) توقف رشد، ت) افت رشد.

جدول زیر نشان‌دهندهٔ وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد. (زمان به ماه: ۰ تا ۱۲؛ وزن به کیلوگرم: ۲/۸، ۳/۳، ۴/۲، ۵، ۵، ۵، ۴/۸، ۴/۵، ۵/۵، ۶/۵، ۷/۲، ۸، ۸/۵)

الف) به نظر شما در فاصلهٔ زمانی تولد تا سه‌ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان‌داده‌شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

ب) در چه فاصلهٔ زمانی‌ای وزن او ثابت مانده است؟

پ) اعداد داده‌شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به‌دست‌آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به‌دست آید. با مقایسهٔ این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

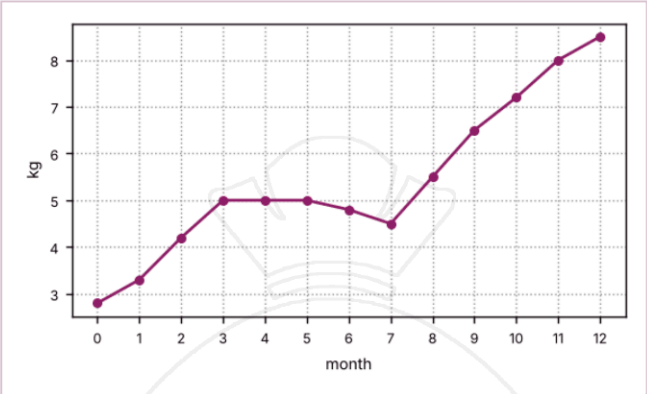
وزن کودک در فاصلهٔ بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصلهٔ بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

ت) دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

الف) وزن از ۲/۸ تا ۵ کیلوگرم و به‌سرعت بالا می‌رود؛ این وضعیت با «**رشد مطلوب**» (شکل ۲، الف) مطابقت دارد.

ب) از پایان ماه سوم تا پایان ماه پنجم وزن ثابت و برابر ۵ کیلوگرم بوده است (توقف رشد). همچنین از ماه ۵ تا ۷ وزن کم شده است (افت رشد).

پ) نقطه‌های (ماه، وزن) را در شکل (۱) مشخص و به هم وصل می‌کنیم:



بررسی: تا ماه سوم رشد مطلوب است؛ سپس سه ماه توقف رشد، بعد افت وزن (۴/۸ و ۴/۵)، و پس از آن دوباره افزایش مناسب وزن تا ۸/۵ کیلوگرم. پس رشد کودک در این سال یکنواخت و طبیعی نبوده و نیاز به توجه پزشک داشته است.

تقریب وزن بین ماه‌ها: با خوانش از نمودار وصل‌شده، مثلاً وزن در ماه ۱/۵ تقریباً ۳/۸ کیلوگرم و در ماه ۹/۵ حدود ۶/۸ کیلوگرم است.

ت) دامنه = {۰، ۱، ۲، ...، ۱۲} و برد = {۲/۸، ۳/۳، ۴/۲، ۴/۵، ۴/۸، ۵، ۵/۵، ۶/۵، ۷/۲، ۸، ۸/۵}. نمودار پیکانی: هر ماه به وزن همان ماه وصل می‌شود (۰ ← ۲/۸، ۱ ← ۳/۳، ۲ ← ۴/۲، ۳ و ۴ و ۵ هر سه ← ۵، ۶ ← ۴/۸، ۷ ← ۴/۵، ۸ ← ۵/۵، ۹ ← ۶/۵، ۱۰ ← ۷/۲، ۱۱ ← ۸، ۱۲ ← ۸/۵). از هر ماه دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۶۹ صفحه ۱۰۴ **کار در کلاس ۱**

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید. می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آن‌ها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

با تکمیل جملهٔ زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به‌صورت نمودار ارائه می‌شود، به‌دست آورید: اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در ..... قطع کند.

روش: نقطه‌های نمودار را به‌صورت زوج مرتب می‌خوانیم. اگر دو نقطه مؤلفهٔ اول (طول) یکسان و مؤلفهٔ دوم (عرض) متفاوت داشته باشند (یعنی یک خط عمودی نمودار را در دو نقطه ببرد)، نمودار تابع نیست؛ در غیر این صورت تابع است. دامنه = مجموعهٔ طول‌های نقطه‌ها (تصویر نمودار روی محور x) و برد = مجموعهٔ عرض‌ها (تصویر روی محور y).

تکمیل جمله: «...حداکثر در **یک نقطه** قطع کند.»

نکته: نمودارهای شکل کتاب در دسترس نبود؛ هر کدام را با همین معیار (آزمون خط عمودی) بررسی کنید: نمودارهایی مثل دایره یا سهمی خوابیده (به سمت راست/چپ باز) که خط عمودی را در دو نقطه می‌برند تابع نیستند؛ نمودارهای مثل سهمی رو به بالا، خط غیرعمودی و نقاط با طول‌های متفاوت تابع‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۷۰ صفحه ۱۰۵ کار در کلاس

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟

از آزمون خط عمودی استفاده می‌کنیم: اگر هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نمودار تابع است؛ اگر حتی یک خط عمودی نمودار را در دو نقطه یا بیشتر ببرد، تابع نیست (مثلاً زوج‌هایی مانند (۱، ۲) و (۱، ۲−) هر دو روی نمودار باشند). برای نمودارهای تابع، دامنه تصویر نمودار روی محور x و برد تصویر آن روی محور y است.

نمودارهای این بخش در دسترس نبود؛ پاسخ به شکل روش ارائه شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۷۱ صفحه ۱۰۵ تمرین ۱

کدام یک تابع است؟ دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

هر نمودار را با خط‌های عمودی آزمایش می‌کنیم؛ نمودارهایی که هر خط عمودی را حداکثر در یک نقطه قطع کنند تابع‌اند. برای هر تابع، دامنه = همهٔ طول‌های نقاط نمودار و برد = همهٔ عرض‌های نقاط نمودار (در صورت امکان به صورت بازه یا مجموعه).

شکل‌های این تمرین در دسترس نبود؛ پاسخ به شکل روش ارائه شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۷۲ صفحه ۱۰۶ تمرین ۲

تابعی مثال بزنید که:

الف) دامنهٔ آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

پ) دامنهٔ آن تنها یک عضو داشته باشد.

ت) دامنهٔ آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

الف) (دامنه {۱، ۲}).

ب) (برد {۳}).

پ) (دامنه {۴}).

ت) (دامنه R نامتناهی و برد {۲}).

ث) یا (دامنه و برد هر دو نامتناهی).

۲۷۳ صفحه ۱۰۶ تمرین ۳

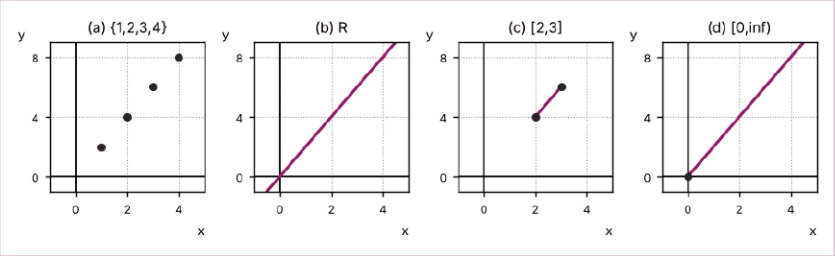
جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول توصیف شده‌اند، رسم کنید.

(الف) $y = 2x$ با دامنهٔ {۱، ۲، ۳، ۴} (ب) $h(x) = 2x$ با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی (پ) $g(x) = 2x$ با دامنهٔ [۲، ۳]

(ت) $f(x) = 2x$ با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی؛ برد: ؟

تابع	دامنه	برد
الف) $y = 2x$	{۱، ۲، ۳، ۴}	{۲، ۴، ۶، ۸}
ب) $h(x) = 2x$	R	R
پ) $g(x) = 2x$	[۲، ۳]	[۴، ۶]
ت) $f(x) = 2x$	[۰، +∞)	[۰، +∞)

نمودارها: (الف) چهار نقطهٔ جدا (۱، ۲)، (۲، ۴)، (۳، ۶)، (۴، ۸)؛ (ب) کل خط $y = 2x$؛ (پ) پاره‌خطی از (۲، ۴) تا (۳، ۶) با نقطه‌های دو سر؛ (ت) نیم‌خطی که از مبدأ شروع می‌شود و به سمت بالا می‌رود.



برد هر کدام با ضرب دامنه در ۲ به دست می‌آید.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۷۴ صفحه ۱۰۷ تمرین ۴

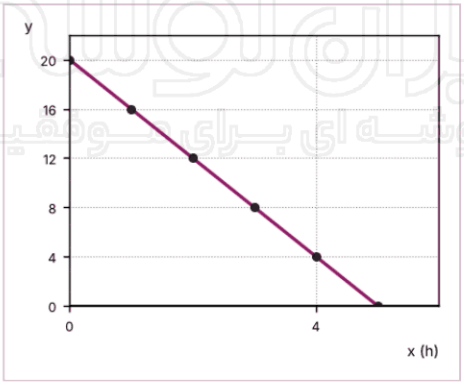
یک شمع ۲۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی‌متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید. (x زمان، y ارتفاع شمع؛ x = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵)

نمودار این تابع را رسم کنید.

چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

ارتفاع شمع بعد از x ساعت: . شمع وقتی خاموش می‌شود که y = ۰ باشد: ؛ یعنی پس از **۵ ساعت** خاموش می‌شود.

x (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع، سانتی‌متر)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰



نمودار پاره‌خطی از (۰، ۲۰) تا (۵، ۰) است (دامنه [۰، ۵]). تابع خطی است چون ضابطه‌اش به شکل با و است؛ ارتفاع در هر ساعت مقدار ثابتی (۴ سانتی‌متر) کم می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای خوشبختی

۲۷۵ صفحه ۱۰۷ **تمرین ۵**

آیا خط $x = ۲$ را می‌توان به‌عنوان یک تابع درنظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = ۵$ را چطور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز درنظر گرفت؟

خط تابع نیست؛ همهٔ نقطه‌های $(۲، y)$ روی آن‌اند و برای $x = ۲$ بی‌شمار y وجود دارد (یک خط عمودی نمودار را در بی‌نهایت نقطه می‌برد).

خط تابع است (تابع ثابت)؛ به هر x دقیقاً یک $y = ۵$ نسبت داده می‌شود و هر خط عمودی آن را در یک نقطه می‌برد.

در حالت کلی: هر خطی که **موازی محور عرض‌ها (عمودی) نباشد** یک تابع است (به شکل $y = ax + b$).

۲۷۶ صفحه ۱۰۷ **تمرین ۶**

نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنهٔ آن بازهٔ $[-۳، ۵]$ باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع وجود دارند؟

هر تابع با دامنهٔ $[-۳، ۵]$ مثال است؛ مثلاً:

چون برای a و b می‌توان هر عدد حقیقی را انتخاب کرد (حتی $a = ۰$ و تابع ثابت)، تعداد این توابع **بی‌شمار (نامتناهی)** است.

۲۷۷ صفحه ۱۰۷ **تمرین ۷**

نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به‌دست آورید. از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام‌یک مناسب‌تر است؟

روش: اگر نمودار خط است، دو نقطهٔ مشخص روی آن، مثلاً و ، را می‌خوانیم و شیب را حساب می‌کنیم:

سپس b را از جای‌گذاری یکی از نقطه‌ها (یا از عرض از مبدأ) به‌دست می‌آوریم. از میان نمایش‌ها (جدول، زوج مرتب، نمودار پیکانی، نمودار و ضابطهٔ جبری) برای تابع‌های با دامنهٔ بی‌نهایت نمایش جبری مناسب‌تر است؛ زیرا کوتاه است و مقدار تابع را برای هر x نشان می‌دهد.

شکل کتاب در دسترس نبود؛ پاسخ به شکل روش ارائه شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۷۸ صفحه ۱۰۷ **تمرین ۸**

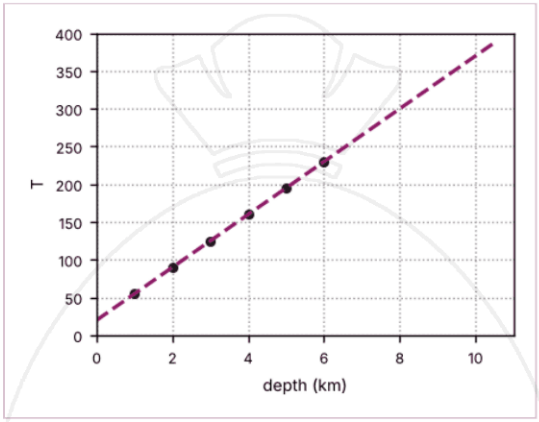
جدول زیر دمای سنگ‌ها را در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین نشان می‌دهد. (عمق به کیلومتر: ۱ تا ۶؛ دما به سانتی‌گراد: ۵۵، ۹۰، ۱۲۵، ۱۶۰، ۱۹۵، ۲۳۰)

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به‌دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید.

ب) معادله‌ای برای این تابع به‌دست آورید.

پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیرزمین است، بیابید.

الف) هر عمق دقیقاً یک دما دارد (عمق‌های جدول همه متفاوت‌اند)، پس به هر عضو دامنه فقط یک عضو برد نسبت داده می‌شود. نقطه‌های (۱، ۵۵)، (۲، ۹۰)، ...، (۶، ۲۳۰) روی یک خط‌اند:



ب) با افزایش هر یک کیلومتر عمق، دما ۳۵ درجه بالا می‌رود، پس شیب ۳۵ است: . از داریم :

(آزمایش:)

پ) ؛ دمای سنگ در عمق ۱۰ کیلومتری حدود **۳۷۰ درجهٔ سانتی‌گراد** است.

۲۷۹ صفحه ۱۰۷ **تمرین ۹**

الف) تابع را رسم کنید و مقادیر f(√۵)، f(−۵)، f(۱۰۰)، f(۲) و f(−۳/۴) را به‌دست آورید.

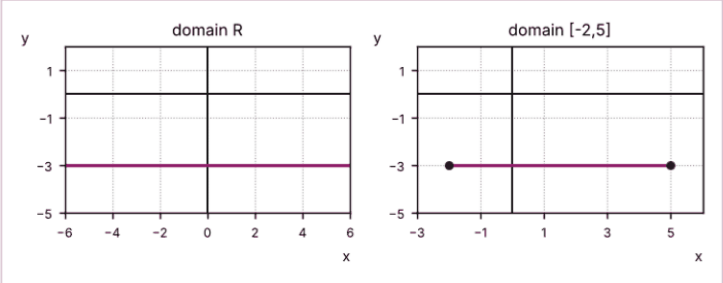
ب) اگر دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنهٔ آن بازهٔ [−۲، ۵] باشد، نیز رسم کنید.

الف) این تابع ثابت است و به هر x عدد ۳- را نسبت می‌دهد؛ پس:

ب) و پ) نمودار (ب) خط افقی ۳ = y- روی همهٔ اعداد حقیقی و نمودار (پ) پاره‌خطی افقی از (۲-، ۳-) تا (۵، ۳-) است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۸۰ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۰

برای یک تابع خطی می‌دانیم که: f(۲) = ۱۱ و f(۰) = ۷. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

تابع خطی است: . از نتیجه می‌شود . از :

نمودار، خطی است که از نقطه‌های (۰، ۷) و (۲، ۱۱) می‌گذرد (شیب ۲ و عرض از مبدأ ۷).

۲۸۱ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۱

آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟ (x: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶؛ y: ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶)

بله؛ مقدارهای x در جدول همه متفاوت‌اند (۱ تا ۶) و به هر x دقیقاً یک y نسبت داده شده است. در واقع ضابطهٔ آن است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۸۲ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۲

علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت ۰/۱ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با f(t) نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به‌دست می‌دهد؟

الف) f(t) = t − ۰/۱ ب) f(t) = ۰/۱ t پ) f(t) = t + ۰/۱ ت) f(t) = t / ۰/۱ (یا f(t) = t − ۰/۱)

مسافت = سرعت × زمان = ۰/۱ × t؛ پس گزینهٔ **ب)** درست است. (نمونه: ۱۰ دقیقه ← ۱ کیلومتر.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۸۳ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۳

اگر دربارهٔ تابع g داشته باشیم (چهار مقدار g در چهار نقطه داده شده است)، g را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

روش: هر شرط به شکل یعنی زوج مرتب (a، b). چهار شرط داده‌شده را به‌ترتیب به‌صورت زوج مرتب می‌نویسیم و g را مجموعهٔ آن چهار زوج قرار می‌دهیم: . برای نمودار، هر زوج را به‌صورت یک نقطهٔ جدا (طول a، عرض b) روی صفحهٔ مختصات می‌گذاریم و آن‌ها را به هم وصل نمی‌کنیم.

صورت دقیق مقادیر g در متن در دسترس نبود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۸۴ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۴

برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطهٔ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) ۲۰- درجهٔ سانتی‌گراد، چند درجهٔ فارنهایت است؟

ب) ۱۰۴ درجهٔ فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت به‌دست آورد.

ت) آیا رابطهٔ بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

الف) ؛ یعنی **۴- درجهٔ فارنهایت**.

ب) ؛ یعنی **۴۰ درجهٔ سانتی‌گراد**.

پ)

ت) بله؛ هر دو رابطه به شکل «عددی ضربدر متغیر به‌علاوهٔ عدد ثابت» (y = ax + b) هستند: F برحسب C با و C برحسب F با .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۸۵ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۵

طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

اگر عرض x باشد، طول است:

۲۸۶ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۶

دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن‌ها یکی باشد، ولی هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

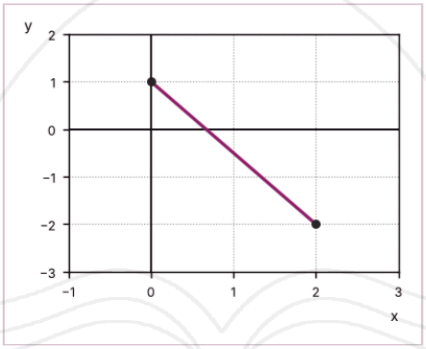
مثال اول (متناهی): و ؛ دامنه و برد هر دو {۱، ۲}، اما زوج مشترک ندارند.

مثال دوم (نامتناهی): و هر دو با دامنهٔ R (برد هر دو R)؛ چون هیچ زوج مشترکی ندارند.

۲۸۷ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۷

نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن [۰، ۲] و برد آن [−۲، ۱] باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع می‌توان رسم کرد؟

پاره‌خطی از (۰، ۱) تا (۲، ۲−) را رسم می‌کنیم: . این تابع دامنهٔ [۰، ۲] دارد و مقدارهایش همهٔ اعداد بین ۲− و ۱ هستند.



هر منحنی دیگر (مثلاً قسمتی از سهمی یا نمودار شکسته) که روی [۰، ۲] تعریف شده و همهٔ مقادیر از ۲− تا ۱ را بپوشاند هم درست است؛ پس تعداد چنین توابعی **بی‌شمار** است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۸۸ صفحه ۱۰۹ فعالیت ۱

جدول‌های زیر را کامل کنید. (طول ضلع مربع: ۰/۱، ۱، ۲/۵، ۳، ۴، ۱۲، x و مساحت آن؛ شعاع دایره: ۱، ۲، ۳، r و مساحت آن)

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از ..... است و به‌صورت f(x) = ... قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از ..... است و به‌صورت g(r) = ... قابل نمایش است.

چون f و g به‌صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم از x و r بیان شده‌اند، آن‌ها را توابع درجه دوم می‌نامیم. حجم یک کره را برحسب یک تابع درجهٔ سوم از r (شعاع کره) بنویسید: V(r) = ...

irantooshe.ir

توابع زیر همگی توابع چندجمله‌ای‌اند: $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$، $g(x) = 4x^2 - 3$، $h(a) = a^3 + 2a^2 - 4a - 9$، $r(t)$.
تابع f را به‌صورت $y = 2x^2 + 5x + 1$ نیز نمایش می‌دهند. بقیهٔ توابع را نیز به این صورت نمایش دهید.

طول ضلع	۰/۱	۱	۲/۵	۳	۴	۱۲	x
مساحت	۰/۰۱	۱	۶/۲۵	۹	۱۶	۱۴۴	x^2

شعاع	۱	۲	۳	r
مساحت	π	۴π	۹π	πr^2

مساحت مربع تابعی از **x** است و به‌صورت نمایش داده می‌شود؛ مساحت دایره تابعی از **r** است و به‌صورت نمایش داده می‌شود.

حجم کره:

نمایش به‌صورت y: ، ؛ و برای r(t) نیز همین ضابطه را به‌جای r(t) در برابر y می‌نویسیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۸۹ صفحه ۱۱۰ **فعالیت ۲**

دامنه و برد توابع زیر را به‌دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟ (سه نمودار پیکانی که هر عضو را به خودش می‌برند؛ از جمله $f = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$)

در هر سه تابع، دامنه و برد برابرند (مثلاً برای f دامنه و برد هر دو {a, b, c} است) و هر عضو دامنه دقیقاً به خودش نظیر می‌شود.

شباهت: دامنه = برد و هر عضو به خودش وصل می‌شود. **تفاوت:** مجموعه‌های دامنه و برد در آن‌ها فرق دارد (در یکی اعداد، در دیگری حروف).

اگر دامنه و برد برابر باشند و هر عضو دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را «همانی» می‌نامند. نمایش جبری آن است و اگر دامنه R باشد نمودارش خط است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۹۰ صفحه ۱۱۰ فعالیت ۳

سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آن‌ها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک‌اند؟
(جدول ساعت ۸، ۹، ۱۰ با دمای هوای ۱۹، ۱۹، ۱۹؛ یک نمودار پیکانی؛ و نمودار y = ۳)

در جدول: دامنه {۸، ۹، ۱۰} و برد {۱۹}. در نمودار y = ۳: دامنه R (یا همان بازهٔ رسم‌شده) و برد {۳}.

ویژگی مشترک: در هر سه تابع، برد فقط یک عضو دارد؛ یعنی همهٔ اعضای دامنه به یک عضو واحد نظیر می‌شوند.

تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم و آن را با نمایش می‌دهیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۹۱ صفحه ۱۱۰ کار در کلاس ۱

برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.
مثالی از یک تابع چندجمله‌ای ارائه کنید.
یک تابع همانی مثال بزنید که دامنهٔ آن {α, β, ۲, ۵} باشد.
یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد.
مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنهٔ آن ۵ عضوی باشد.
مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

- تابع چندجمله‌ای:
- تابع همانی:
- دامنه و برد برابر ولی غیرهمانی: (دامنه و برد هر دو {۱، ۲، ۳}، ولی ۱ ← ۲ نه ۱ ← ۱).
- تابع ثابت با دامنهٔ ۵ عضوی: (برد {۷}).
- تابع ثابت در دنیای واقعی: تابعی که به هر ساعت از یک شبانه‌روز، تعداد ساعت‌های همان شبانه‌روز (۲۴) را نسبت می‌دهد؛ یا تعداد زاویه‌های داخلی هر مثلث (۳) یا مجموع زوایای داخلی مثلث (۱۸۰ درجه) برای مثلث‌های مختلف.

۲۹۲ صفحه ۱۱۱ کار در کلاس ۲

نمودارهای توابع داده‌شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$f(x)=x^2$ با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی؛ $g(x)=x^2$ با دامنهٔ $[-2, 3]$؛ $h(x)=x^2$ با دامنهٔ $\{-2, 0, 1, 2\}$؛ $t(x)=x^2$ با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی منفی. دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.

تابع	دامنه	برد
$f(x) = x^2$	R	$[0, +\infty)$
$g(x) = x^2$	$[-2, 3]$	$[0, 9]$
$h(x) = x^2$	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 4\}$
$t(x) = x^2$	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$

تفاوت نمودارها: f کل سهمی؛ g قسمتی از سهمی بین $x = -2$ و $x = 3$ (با ارتفاع حداکثر ۹ در $x = 3$)؛ h چهار نقطهٔ $(-2, 4)$، $(0, 0)$، $(1, 1)$، $(2, 4)$؛ و t شاخهٔ چپ سهمی بدون نقطهٔ مبدأ.

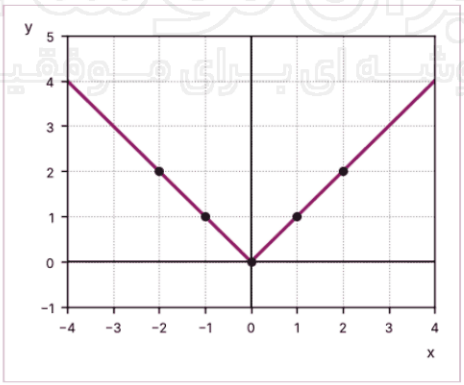
برای g: کمترین مقدار ۰ (در $x = 0$) و بیشترین مقدار ۹ (در $x = 3$) است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۹۳ صفحه ۱۱۱ **فعالیت**

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده‌شده را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.

x	-۲	-۱/۲	۰	۱/۲	۱	۲
$\|f(x)\| = \|x$	۲	۱/۲	۰	۱/۲	۱	۲



دامنه: همهٔ اعداد حقیقی R؛ برد: (چون قدرمطلق هیچ عددی منفی نیست و برای هر دو ورودی داریم).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹۴ صفحه ۱۱۲ فعالیت

اگر دامنهٔ یک تابع قدرمطلق مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

تابع $f(x) = |x|$ برای $x \geq 0$ برابر x و برای $x < 0$ برابر $-x$ است؛ نمودار آن شکل V با رأس مبدأ مختصات است: نیم‌خط $y = x$ به‌ازای $x \geq 0$ و نیم‌خط $y = -x$ به‌ازای $x < 0$ (همان نمودار شکل بالا). دامنه R و برد $[0, +\infty)$ است.

چون برای $x \geq 0$ و $x < 0$ ضابطه‌های مختلف دارد، تابع قدرمطلق یک تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای) است.

۲۹۵ صفحه ۱۱۲ فعالیت

توابع f، g، h و نیز قسمتی از نمودارهای آن‌ها داده شده‌اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.
مقادیر g(۰)، h(۵)، g(−۲)، f(۳) و ... را بیابید.

روش: برای هر ضابطهٔ قطعه‌ای، هر قسمت را فقط روی بازهٔ مربوط به خودش رسم می‌کنیم: جدول مقدار برای چند نقطهٔ همان بازه می‌نویسیم، نقطه‌ها را وصل می‌کنیم؛ ابتدا و انتهای هر قطعه را با نقطهٔ توپر (بازهٔ بسته) یا توخالی (بازهٔ باز) نشان می‌دهیم. نمودار متعلق به هر تابع را با مقایسهٔ چند نقطه و قسمت‌های داده‌شده تشخیص می‌دهیم. دامنه، اجتماع بازه‌های همهٔ قطعه‌ها و برد، اجتماع بردهای قطعه‌هاست. برای محاسبهٔ f(a) ابتدا بازه‌ای را که a در آن است پیدا می‌کنیم و در ضابطهٔ همان قسمت می‌گذاریم.

ضابطه‌ها و شکل‌های این فعالیت از متن قابل بازسازی نبود؛ پاسخ به شکل روش ارائه شده است.

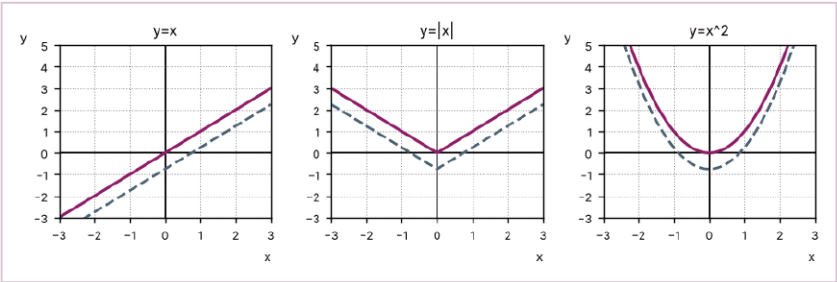
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۹۶ صفحه ۱۱۳ فعالیت

نمودارهای توابع $h(x) = x^2$، $g(x) = |x|$، $f(x) = x$ و $h(x) = x^2 + ۳$، $g(x) = |x| + ۳$، $f(x) = x + ۳$ داده شده‌اند.
توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $g(x) = |x| - ۳/۴$، $f(x) = x - ۳/۴$ و $h(x) = x^2 - ۳/۴$ را به همین روش رسم کنید.

هر نقطهٔ نمودار همان نقطه از نمودار است که ۳ واحد بالاتر آمده (عرض‌ها ۳ تا زیاد شده‌اند)؛ یعنی نمودار سه تابع آخر از **انتقال ۳ واحدی به سمت بالا** (در امتداد محور y) نمودار سه تابع اول به‌دست می‌آید.

برای رسم و ... نمودارهای x و $|x|$ و x^2 را واحد به سمت **پایین** منتقل می‌کنیم (خط‌چین‌ها در شکل؛ رأس و نقطهٔ است).



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۹۷ صفحه ۱۱۳ کار در کلاس ۱

نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید. مقادیر $g(-2)$، $g(2)$، $f(5)$، $g(0)$، $f(0)$ و ... را به‌دست آورید. (f و g توابعی قطعه‌ای‌اند.)

روش: هر قطعه را روی بازهٔ مخصوص خودش رسم می‌کنیم (دو نقطه برای قطعهٔ خطی؛ جدول برای سهمی) و در نقطهٔ پایان بازهٔ باز، دایرهٔ توخالی و در بازهٔ بسته، دایرهٔ توپر می‌گذاریم. دامنه، اجتماع بازه‌ها و برد، اجتماع مقادیر هر قطعه است.

برای مثال اگر باشد: ، دامنه R و برد .

ضابطه‌های دقیق کتاب از متن قابل بازسازی نبود؛ پاسخ به‌صورت روش و نمونه آمده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۹۸ صفحه ۱۱۳ کار در کلاس ۲

نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطهٔ آن را به‌دست آورید. دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید.

روش: نمودار را به قطعه‌هایی تقسیم می‌کنیم که هر کدام خط یا سهمی ساده‌اند. برای هر قطعهٔ خطی، دو نقطه روی آن را می‌خوانیم و معادلهٔ خط را می‌نویسیم، بازهٔ x آن را از روی نمودار (دایره‌های توپر و توخالی) تعیین می‌کنیم و همه را به شکل می‌نویسیم. دامنه از تصویر نمودار روی محور x و برد از تصویر روی محور y به دست می‌آید.

شکل کتاب در دسترس نبود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

irantooshe.ir

۲۹۹ صفحه ۱۱۴ کار در کلاس ۱

در شکل زیر دامنه و برد توابعی را که به کمک تابع $f(x) = |x|$ رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟ (نمودارهای $y = |x - ۳|$، $y = |x|$، $y = |x + ۱|$)

هر سه تابع دامنهٔ R و برد دارند (فقط جای رأس عوض شده است).

توضیح: نمودار همان نمودار است که ۳ واحد به **راست** منتقل شده (رأس در (۳، ۰))، و نمودار همان نمودار است که ۱ واحد به **چپ** منتقل شده (رأس در (−۱، ۰)).

قاعده: برای رسم نمودار را k واحد در امتداد محور xها منتقل می‌کنیم؛ اگر $k > ۰$ انتقال به سمت چپ (جهت منفی) و اگر $k < ۰$ به سمت راست (جهت مثبت) است.

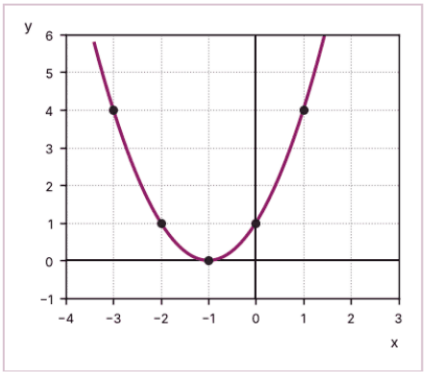
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۰۰ صفحه ۱۱۴ کار در کلاس ۲

در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $f(x) = x^2$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آن‌ها را بیابید. نمودار $f(x) = (x+۱)^2$ را نیز رسم کنید. (توابع: $y = (x - ۲)^2$، $y = -x^2$، $y = -(x + ۳)^2$، $y = x^2$)

تابع	دامنه	برد	رأس	توضیح
$y = x^2$	R	$[۰، +\infty)$	(۰، ۰)	سهمی اصلی
$y = (x-۲)^2$	R	$[۰، +\infty)$	(۰، ۲)	۲ واحد انتقال به راست
$y = -x^2$	R	$(-\infty، ۰]$	(۰، ۰)	قرینه نسبت به محور x
$y = -(x+۳)^2$	R	$(-\infty، ۰]$	(۰، −۳)	قرینه و ۳ واحد انتقال به چپ

نمودار همان نمودار است که ۱ واحد به **چپ** منتقل شده و رأس آن (−۱، ۰) است؛ دامنه R و برد .



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۰۱ صفحه ۱۱۵ کار در کلاس

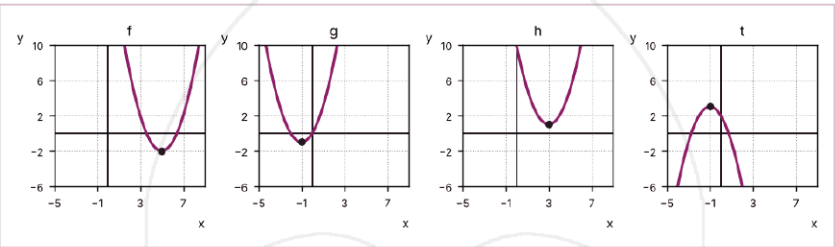
در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم f، g، h و t رسم شده‌اند: $f(x) = (x-5)^2 - 2$، $g(x) = (x+1)^2 - 1$، $h(x) = (x-3)^2 + 1$، $t(x) = -(x+1)^2 + 3$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به‌دست آورید.

هر تابع به شکل سهمی‌ای با رأس است؛ نمودارها را با رأس تشخیص می‌دهیم:

تابع	رأس	جهت دهانه	دامنه	برد
$f(x) = (x-5)^2 - 2$	$(5، -2)$	بالا	R	$[-2، +\infty)$
$g(x) = (x+1)^2 - 1$	$(-1، -1)$	بالا	R	$[-1، +\infty)$
$h(x) = (x-3)^2 + 1$	$(3، 1)$	بالا	R	$[1، +\infty)$
$t(x) = -(x+1)^2 + 3$	$(-1، 3)$	پایین	R	$(-\infty، 3]$



برای تعیین نمودارها: سهمی‌ای که رأس آن $(5، -2)$ است f است، رأس $(-1، -1)$ برای g، رأس $(3، 1)$ برای h و سهمی رو به پایین با رأس $(-1، 3)$ برای t.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۰۲ صفحه ۱۱۵ تمرین ۱

تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنهٔ آن مجموعهٔ $\{1/2، 0، 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به‌دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید. اگر دامنهٔ این تابع R باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟

برد = ؛ زوج‌های مرتب: ؛ نمودار پیکانی: $0 \leftarrow -1$، $1/2 \leftarrow 1/2$، $5 \leftarrow 14$. نمودار مختصاتی: سه نقطهٔ جدا از هم.

اگر دامنه R باشد: نمودار کل خط است (به‌جای سه نقطه)، برد آن R می‌شود و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی دیگر با فهرست‌کردن اعضا ممکن نیست؛ فقط ضابطهٔ جبری و نمودار خط را داریم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۰۳ صفحه ۱۱۵ تمرین ۲

در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آن‌ها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به‌صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.

روش: دامنه = تصویر نمودار روی محور x (از چپ‌ترین تا راست‌ترین نقطه، با توجه به دایره‌های توپر و توخالی) و برد = تصویر نمودار روی محور y (از پایین‌ترین تا بالاترین نقطه). هر کدام را به‌صورت بازه می‌نویسیم، مثلاً برای دو سر بسته و برای دو سر باز.

نمایش جبری: اگر نمودار خط است و از نقطه‌هایی مانند (۰، ۱−) و (۸، ۷) می‌گذرد، شیب و ضابطه است. اگر نمودار سهمی با رأس باشد، و ضریب a از یک نقطهٔ دیگر به‌دست می‌آید.

شکل‌های کتاب در دسترس نبود؛ پاسخ به شکل روش ارائه شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۰۴ صفحه ۱۱۶ تمرین ۳

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنهٔ تابع برابر (۰، +∞) و برد آن نیز (۰، +∞) است.

ب) دامنهٔ تابع همهٔ اعداد حقیقی و برد آن (۲، +∞) است.

پ) دامنهٔ تابع ثابت برابر (−∞، +∞) است.

ت) اگر آنگاه، f(۱)/f(۲) = ۲.

الف) نادرست. اگر دامنه مشخص نشده باشد R است و برد یعنی است؛ نه (۰، +∞).

ب) نادرست. دامنه R درست است ولی برد، چون کمترین مقدار در x = ۰ برابر است، می‌شود، نه (۲، +∞).

پ) درست. تابع ثابت ۲ برای هر عدد حقیقی تعریف شده است، پس دامنه و برد {۲} است.

ت) نادرست (با فرض مقادیر f(۲) و f(۱)): .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۰۵ صفحه ۱۱۶ **تمرین ۴**

یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

حجم استوانه و دو نیم‌کره روی هم یک کره به حجم می‌سازند:

۳۰۶ صفحه ۱۱۶ **تمرین ۵**

هر یک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟

الف) $y = x^2 - ۳$ ب) $y = -x^2 + ۲$ پ) $y = |x|$ ت) $y = -|x|$ ث) $y = (x+۱)^2$ ج) $y = |x| - ۱/۲$ چ) $y = |x-۲|$ ح) $y = -(x+۲)^2$ خ) $y = -|x| - ۲$ د) $y = (x-۲)^2 + ۳$ ذ) $y = |x| - ۲$ ر) $y = (x + ۱/۲)^2 - ۳$

برای شناسایی نمودار هر تابع، رأس و جهت دهانه را می‌یابیم:

تابع	رأس	شکل	دامنه	برد
الف) $x^2 - ۳$	$(۰، -۳)$	سهمی رو به بالا	R	$[-۳، +\infty)$
ب) $-x^2 + ۲$	$(۰، ۲)$	سهمی رو به پایین	R	$(-\infty، ۲]$
پ) $\|x\|$	$(۰، ۰)$	V	R	$[۰، +\infty)$
ت) $-\|x\|$	$(۰، ۰)$	V وارونه	R	$(-\infty، ۰]$
ث) $(x+۱)^2$	$(-۱، ۰)$	سهمی رو به بالا	R	$[۰، +\infty)$
ج) $\|x\| - ۱/۲$	$(۰، -۱/۲)$	V	R	$[-۱/۲، +\infty)$
چ) $\|x-۲\|$	$(۲، ۰)$	V	R	$[۰، +\infty)$
ح) $-(x+۲)^2$	$(-۲، ۰)$	سهمی رو به پایین	R	$(-\infty، ۰]$
خ) $-\|x\| - ۲$	$(۰، -۲)$	V وارونه	R	$(-\infty، -۲]$
د) $(x-۲)^2 + ۳$	$(۲، ۳)$	سهمی رو به بالا	R	$[۳، +\infty)$
ذ) $\|x\| - ۲$	$(۰، -۲)$	V	R	$[-۲، +\infty)$
ر) $(x+۱/۲)^2 - ۳$	$(-۱/۲، -۳)$	سهمی رو به بالا	R	$[-۳، +\infty)$

نمودارهای کتاب در دسترس نبود؛ برای تطبیق هر شکل با تابع، رأس و جهت دهانهٔ آن را با جدول بالا مقایسه کنید.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۰۷ صفحه ۱۱۷ تمرین ۶

فرض کنیم دامنهٔ هر یک از توابع تمرین ۵ به بازهٔ [−۲، ۳] محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

با بررسی کمترین و بیشترین مقدار تابع روی [−۲، ۳] (در رأس یا دو سر بازه):

تابع	برد روی [−۲، ۳]	توضیح
الف) $x^2 - ۳$	[−۳، ۶]	کمینه در x=۰ و بیشینه در x=۳
ب) $x^2 + ۲-$	[−۷، ۲]	بیشینه در x=۰ و کمینه در x=۳
پ) $\|x\|$	[۰، ۳]	
ت) $-\|x\|$	[−۳، ۰]	
ث) $(x+۱)^2$	[۰، ۱۶]	رأس x=−۱ در بازه؛ بیشینه در x=۳
ج) $\|x - ۱/۲\|$	[−۱/۲، ۵/۲]	
چ) $\|x-۲\|$	[۰، ۴]	کمینه در x=۲؛ بیشینه در x=−۲
ح) $-(x+۲)^2$	[−۲۵، ۰]	رأس x=−۲ در بازه؛ کمینه در x=۳
خ) $-\|x - ۲\|$	[−۵، −۲]	
د) $(x-۲)^2 + ۳$	[۳، ۱۹]	کمینه در x=۲؛ بیشینه در x=−۲
ذ) $\|x - ۲\|$	[−۲، ۱]	
ر) $(x+۱/۲)^2 - ۳$	[−۳، ۳۷/۴]	رأس x=−۱/۲ در بازه؛ بیشینه در x=۳: ۳-۴۹/۴

(برای مثال ث: و برای ح: .)

۳۰۸ صفحه ۱۱۷ تمرین ۷

نمودار تابع f داده شده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته‌شده را حساب کنید. (f(۶)، f(√۵)، f(−۵/۲)، f(۰)، f(۱/۲)، f(۳))

روش: قطعه‌های نمودار را تشخیص می‌دهیم، برای هر قطعه ضابطه و بازهٔ آن را از روی نقطه‌های مشخص نمودار می‌نویسیم، سپس برای هر عدد خواسته‌شده، بازه‌ای که آن عدد در آن است را پیدا می‌کنیم و آن را در ضابطهٔ همان قطعه قرار می‌دهیم.

شکل کتاب در دسترس نبود، پس مقادیر عددی را نمی‌توان خواند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۰۹ صفحه ۱۱۷ تمرین ۸

نمودار یک تابع خطی از نقاط (۴، ۳) و (۰، ۳) می‌گذرد. f(−۴) و f(−۱) را به‌دست آورید.

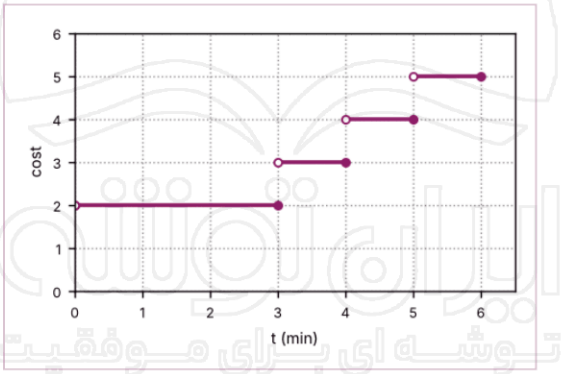
عرض هر دو نقطه ۳ است، پس شیب صفر و تابع ثابت است:

۳۱۰ صفحه ۱۱۷ تمرین ۹

هزینهٔ مکالمهٔ تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینهٔ آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

زمان t (دقیقه)	$0 < t \le 3$	$3 < t \le 4$	$4 < t \le 5$	$5 < t \le 6$
هزینه (هزار تومان)	۲	۳	۴	۵

نمودار، تابعی پله‌ای است: پاره‌خط‌های افقی که در سمت چپ نقطهٔ توخالی و در سمت راست نقطهٔ توپر دارند.



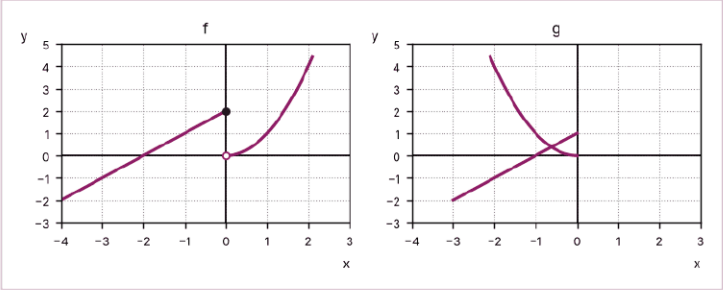
۳۱۱ صفحه ۱۱۷ تمرین ۱۰

کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \{x^2 \;،\; x > 0 \;;\; x + 2 \;،\; x \le 0\} \qquad g(x) = \{x^2 \;،\; x < 0 \;;\; x + 1 \;،\; x \ge 0\}$$

f تابع است: دو قطعهٔ آن روی بازه‌های جدا از هم ($x > 0$ و $x \le 0$) تعریف شده‌اند و به هر x دقیقاً یک مقدار نسبت می‌دهند.

g تابع نیست: بازه‌های $x < 0$ و $x \ge 0$ هم‌پوشانی دارند؛ مثلاً برای $x = -1$ دو مقدار و به‌دست می‌آید؛ یعنی دو زوج (−۱، ۱) و (−۱، ۰) داریم.



ضابطه‌های دقیق از متن کتاب قابل بازسازی کامل نبود؛ استدلال بر اساس هم‌پوشانی بازه‌هاست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۱۲ صفحه ۱۱۷ تمرین ۱۱

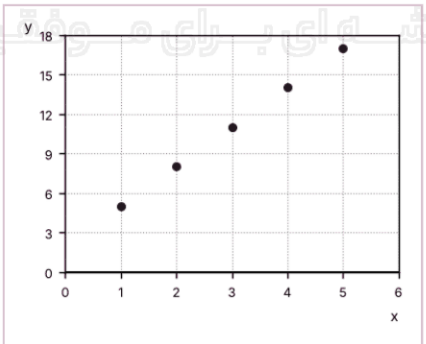
الگوی زیر از تعدادی ذوزنقه تشکیل شده است. الف) جدول زیر را کامل کنید. (تعداد ذوزنقه‌ها n: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵؛ محیط شکل)

ب) چرا رابطهٔ بین تعداد ذوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

با فرض ذوزنقهٔ با اضلاع ۱، ۱، ۱ و ۲ (قاعده‌ها ۱ و ۲): یک ذوزنقه محیط ۵ دارد و هر ذوزنقهٔ تازه با چسباندن به ضلع ۱، محیط را ۳ واحد زیاد می‌کند (۴ ضلع جدید منهای ۲ برابر ضلع مشترک):

n	۱	۲	۳	۴	۵
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷

برای هر تعداد ذوزنقه فقط یک محیط وجود دارد، پس تابع است. دامنه: اعداد طبیعی و برد: . نمودار، نقطه‌های جدا از هم‌اند:



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

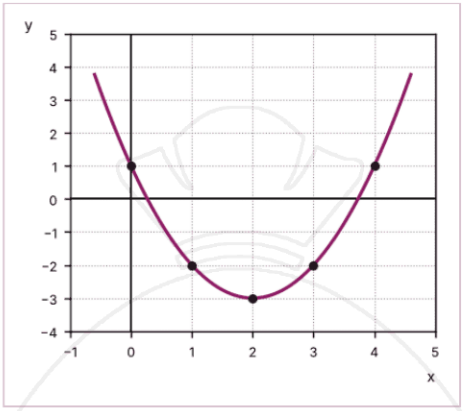
۳۱۳ صفحه ۱۱۷ **تمرین ۱۲**

نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط (۱، ۲-) و (۲، ۳-) می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

عرض از مبدأ ۱ است، پس . از دو نقطه:

با کم‌کردن: ؛ پس

رأس سهمی (۲، ۳-) و دهانه رو به بالاست. دامنه و برد است.



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی (۱) دهم - فصل ششم

شمارش، بدون شمردن

فهرست

۳۱۴ صفحه ۱۱۸ · پرسش آغاز فصل — کمترین تعداد رنگ برای رنگ‌آمیزی نقشه ... ۱۵۴

۳۱۵ صفحه ۱۱۹ · پرسش آغاز درس — شماره‌گذاری اتومبیل با پلاک ... ۱۵۴

۳۱۶ صفحه ۱۱۹ · فعالیت — اصل جمع و اصل ضرب ۱۵۴

۳۱۷ صفحه ۱۲۱ · کار در کلاس — اصل جمع و ضرب: گل و شیرینی ... ۱۵۵

۳۱۸ صفحه ۱۲۱ · کار در کلاس — توجیه شکلی انتخاب‌های سفر با اتومبیل یا قطار ... ۱۵۶

۳۱۹ صفحه ۱۲۲ · کار در کلاس — ساختن اعداد سه رقمی با ارقام ۲، ۳ و ۵ ... ۱۵۶

۳۲۰ صفحه ۱۲۴ · تمرین — ۱ — تعداد رمزهای دستگاه، اصل جمع یا ضرب ... ۱۵۷

۳۲۱ صفحه ۱۲۵ · تمرین — ۲ — کارخانه‌های شهرک صنعتی ... ۱۵۸

۳۲۲ صفحه ۱۲۵ · تمرین — ۳ — رنگ‌آمیزی رأس‌های مثلث ... ۱۵۸

۳۲۳ صفحه ۱۲۵ · تمرین — ۴ — شماره‌گذاری اتومبیل با پلاک ... ۱۵۹

۳۲۴ صفحه ۱۲۵ · تمرین — ۵ — انواع اتومبیل ۱۵۹

۳۲۵ صفحه ۱۲۶ · تمرین — ۶ — آزمون چندگزینه‌ای ۱۵۹

۳۲۶ صفحه ۱۲۶ · تمرین — ۷ — مسیرهای بین شهرها ۱۶۰

۳۲۷ صفحه ۱۲۶ · تمرین — ۸ — تکمیل مسئله ۱۶۰

۳۲۸ صفحه ۱۲۶ · تمرین — ۹ — طرح مسئله با جواب ۲×۲×۲ + ۳×۳×۳ ... ۱۶۰

۳۲۹ صفحه ۱۲۷ · فعالیت — اتصال فیش‌ها به درگاه‌ها (جایگشت سه شیء) ... ۱۶۰

۳۳۰ صفحه ۱۲۷ · فعالیت — چیدن چهار عدد کنار هم و جایگشت ... ۱۶۱

۳۳۱ صفحه ۱۲۸ · کار در کلاس — ۱ — نوشتن فاکتوریل به‌صورت حاصل‌ضرب ... ۱۶۲

۳۳۲ صفحه ۱۲۸ · کار در کلاس — ۲ — محاسبهٔ عبارت‌های فاکتوریلی ... ۱۶۲

۳۳۳ صفحه ۱۲۹ · کار در کلاس — ۳ — نمایش حاصل‌ضرب‌ها با فاکتوریل ... ۱۶۳

۳۳۴ صفحه ۱۲۹ · فعالیت — جایگشت r تایی از n شیء ۱۶۳

۳۳۵ صفحه ۱۳۱ · کار در کلاس — مربی فوتبال و اعداد سه رقمی با ارقام غیرتکراری ... ۱۶۴

۳۳۶ صفحه ۱۳۱ · تمرین — ۱ — سه تیم برتر لیگ ۱۶۴

۳۳۷ صفحه ۱۳۱ · تمرین — ۲ — تعداد کتاب‌ها ۱۶۴

۳۳۸ صفحه ۱۳۱ · تمرین — ۳ — درست یا نادرست بودن تساوی‌های فاکتوریلی ... ۱۶۴

۳۳۹ صفحه ۱۳۲ · تمرین — ۴ — کلیدهای ماشین‌حساب ۱۶۵

۳۴۰ صفحه ۱۳۲ · تمرین — ۵ — کلمه‌سازی با حروف «گل پیرا» ... ۱۶۵

۳۴۱ صفحه ۱۳۳ · فعالیت — رابطهٔ جایگشت و ترکیب ۱۶۶

۳۴۲ صفحه ۱۳۶ · پرسش درون متن — چرا تعداد کمیته‌های بدون ایرانی برابر C(۵,۵) است؟ ... ۱۶۷

۳۴۳ صفحه ۱۳۶ · کار در کلاس — ۱ و ۲ — تشخیص جایگشت یا ترکیب و تعداد حالت‌ها ... ۱۶۷

۳۴۴ صفحه ۱۳۶ · کار در کلاس — ۳ — کمیتهٔ علمی ۱۶۸

۳۴۵ صفحه ۱۳۶ · فعالیت — کمیتهٔ دو نفره از رشته‌های متفاوت ... ۱۶۸

۳۴۶ صفحه ۱۳۷ · فعالیت — رابطه‌های C(n,r) و C(n,n−r) و C(n,r)=C(n−1,r−1)+C(n−1,r) ... ۱۶۹

۳۴۷ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۱ — آجیل‌های فروشگاه ۱۷۱

۳۴۸ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۲ — جلسهٔ ۵ نفره در اداره ۱۷۱

۳۴۹ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۳ — تعداد داوطلبان مسابقات علمی ... ۱۷۱

۳۵۰ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۴ — دسته‌گل ۱۷۲

۳۵۱ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۵ — ترکیب رنگ‌های نقاش ۱۷۲

۳۵۲ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۶ — مثلث‌ها با رأس روی دایره ۱۷۲

۳۵۳ صفحه ۱۴۰ · تمرین — ۷ — طعم‌های آشپز ۱۷۲

۳۵۴ صفحه ۱۴۰ · تمرین — ۸ — طرح مسئله با جواب ترکیبی ۱۷۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۱۴ صفحه ۱۱۸ پرسش آغاز فصل

داشتن حداقل چند رنگ کافی است تا هر نقشه‌ای را بتوان به‌گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیهٔ هم‌مرز هم‌رنگ نباشند؟

چهار رنگ کافی است. این مطلب به «قضیهٔ چهار رنگ» معروف است: هر نقشه‌ای را می‌توان با حداکثر ۴ رنگ چنان رنگ کرد که هیچ دو ناحیهٔ هم‌مرز (دارای مرز مشترک، نه فقط یک نقطهٔ مشترک) همرنگ نباشند. در برخی نقشه‌ها (مثلاً چهار ناحیه که هر دو به هم مرز دارند) سه رنگ کافی نیست، پس کمترین تعداد رنگ لازم برای همهٔ نقشه‌ها برابر ۴ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۱۵ صفحه ۱۱۹ پرسش آغاز درس

می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به‌صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

شکل پلاک در متن در دسترس نیست؛ روش حل با اصل ضرب است: برای هر جایگاه پلاک (رقم یا حرف) تعداد انتخاب‌های ممکن را می‌شماریم و در هم ضرب می‌کنیم. مثلاً اگر پلاک از دو رقم، یک حرف و سه رقم و یک کد دو رقمی شهر تشکیل شود و رقم‌ها از ۱ تا ۹ و تعداد حرف‌های مجاز k باشد، تعداد پلاک‌ها برابر است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۱۶ صفحه ۱۱۹ فعالیت

۱ امین قصد دارد به‌خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه‌سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب‌میوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب‌میوهٔ هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

۲ هفتهٔ بعد پوریا قصد دارد به‌خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب‌میوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب‌میوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

۳ چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

۴ در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب‌میوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

۱) پوریا فقط یکی از دو کار (رستوران یا آب‌میوه‌فروشی) را انجام می‌دهد: یا یکی از ۲ غذا یا یکی از ۳ آب‌میوه. پس تعداد انتخاب‌ها است.

۲) امین هم یک غذا (۲ حالت) و هم یک آب‌میوه (۳ حالت) دریافت می‌کند، پس حالت دارد: قورمه‌هویج، قورمه‌سیب، قورمه‌پرتقال، قیمه‌هویج، قیمه‌سیب و قیمه‌پرتقال.

۳) در سؤال اول فقط یکی از دو کار انجام می‌شود (حرف ربط «یا»)، ولی در سؤال دوم هر دو کار باید انجام شوند (حرف ربط «و»).

۴) در سؤال اول تعداد گزینه‌ها با هم **جمع** می‌شود چون کارها جدا از هم‌اند و فقط یکی انجام می‌شود؛ در سؤال دوم تعداد گزینه‌ها در هم **ضرب** می‌شود چون برای هر انتخاب غذا باید یک آب‌میوه هم انتخاب شود (دو مرحله پشت سر هم).

۳۱۷ صفحه ۱۲۱ **کار در کلاس**

۱ پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانهٔ دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: مریم، گلایل، زنبق و رز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟

۲ هفتهٔ بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانهٔ جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آن‌ها را بنویسید.

۳ در هر یک از قسمت‌های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

۴ دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

۱) فقط یکی از دو کار انجام می‌شود: انتخاب.

۲) هر دو خرید انجام می‌شود: حالت. اگر گل‌ها را م (مریم)، گ (گلایل)، ز (زنبق)، ر (رز) و شیرینی‌ها را گ‌د (گردویی)، ن (نارگیلی)، ک (کشمشی) بنامیم، حالت‌ها عبارت‌اند از:

مریم-گردویی، مریم-نارگیلی، مریم-کشمشی، گلایل-گردویی، گلایل-نارگیلی، گلایل-کشمشی، زنبق-گردویی، زنبق-نارگیلی، زنبق-کشمشی، رز-گردویی، رز-نارگیلی، رز-کشمشی.

۳) در قسمت (۱) از **اصل جمع** استفاده کردیم، چون فقط یکی از دو کار (گل یا شیرینی) انجام می‌شود. در قسمت (۲) از **اصل ضرب** استفاده کردیم، چون هر دو کار (خرید گل و خرید شیرینی) باید انجام شود و دو مرحله است.

توشه ای برای موفقیت

۴) نمونه‌ها: مسئلهٔ اصل جمع: «علی می‌خواهد با یکی از ۵ کتاب داستان یا یکی از ۳ کتاب علمی سرگرم شود. او چند انتخاب دارد؟» پاسخ: . مسئلهٔ اصل ضرب: «یک دانش‌آموز ۴ پیراهن و ۳ شلوار دارد. او به چند طریق می‌تواند یک پیراهن و یک شلوار بپوشد؟» پاسخ: .

۳۱۸ صفحه ۱۲۱ **کار در کلاس**

فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتومبیل خود به این سفر برود، مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است (از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳) و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود، سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند انتخاب دارد؟ حل: اگر با اتومبیل برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق؛ لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد.
با رسم یک شکل این پاسخ را توجیه کنید.

شکل را به این صورت می‌کشیم: از «تهران» دو شاخهٔ اصلی خارج می‌شود: شاخهٔ «اتومبیل» و شاخهٔ «قطار».

- شاخهٔ اتومبیل: ابتدا یکی از مسیرهای a یا b تا قم (۲ حالت) و سپس از هر کدام یکی از مسیرهای ۱، ۲ یا ۳ تا اصفهان (۳ حالت) ← شش مسیر: ، ، ، ، ، .
- شاخهٔ قطار: سه مسیر مستقیم از تهران به اصفهان (قطار اول، دوم و سوم).

در شکل درختی، بخش اتومبیل ۶ برگ و بخش قطار ۳ برگ دارد. چون مسافر فقط یکی از این دو شاخه را انتخاب می‌کند، تعداد برگ‌های دو شاخه با هم جمع می‌شود: حالت.

۳۱۹ صفحه ۱۲۲ **کار در کلاس**

الف) با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به‌طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این‌کار می‌توان نوشتن عدد سه رقمی را به‌صورت پرکردن سه جایگاه (صدگان، دهگان، یکان) با ارقام مذکور درنظر گرفت. هر جایگاه را به سه حالت می‌توان پر کرد. تعداد حالت‌ها .... با نمودار درختی کشیده‌شده در حاشیهٔ صفحه نیز این تعداد را به‌دست آورید و آن را تکمیل کنید.
ب) با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟ ۱ــ برای پرکردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟ ۲ ــ حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای پرکردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟ ۳ ــ برای پرکردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟ لذا .... عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری وجود دارد.
پ) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟ ۱ــ جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود، به‌گونه‌ای که عدد ساخته‌شده زوج باشد؟ ۲ ــ دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می‌توانند پر شوند؟ لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با ....

ت) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟ ۱ ــ جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به‌گونه‌ای که عدد ساخته‌شده زوج باشد؟ ۲ ــ پس از پرکردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ به چند طریق می‌تواند پر شود؟ ۳ ــ حال جایگاه وسط به چند طریق می‌تواند پر شود؟ ۴ ــ لذا تعداد اعداد موردنظر در این حالت برابر است با ....

الف) هر یک از سه جایگاه به ۳ حالت پر می‌شود: عدد. در نمودار درختی از ریشه ۳ شاخه (۲، ۳، ۵) برای صدگان، از هر یک ۳ شاخه برای دهگان و از هر یک دوباره ۳ شاخه برای یکان خارج می‌شود؛ پس ۲۷ برگ داریم، مانند ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۵، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۵، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۵ (برای صدگان ۲) و به همین ترتیب برای صدگان ۳ و ۵ (هر کدام ۹ عدد).

ب) ۱) ۳ حالت. ۲) ۲ حالت (رقم انتخاب‌شده تکرار نمی‌شود). ۳) ۱ حالت. بنابراین عدد (۲۳۵، ۲۵۳، ۳۲۵، ۳۵۲، ۵۲۳، ۵۳۲).

پ) ۱) عدد زوج است پس یکان باید ۲ باشد: ۱ حالت. ۲) هر یک از دو جایگاه دیگر ۳ حالت دارد. لذا عدد.

ت) ۱) یکان باید ۲ باشد: ۱ حالت. ۲) صدگان از دو رقم ۳ و ۵: ۲ حالت. ۳) دهگان: ۱ حالت. لذا عدد (۳۵۲ و ۵۳۲).

۳۲۰ صفحه ۱۲۴ تمرین

۱ تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به‌دست آورید. مشخص کنید برای این‌کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینهٔ اول یک عدد و گزینهٔ دوم یک حرف الفبای فارسی است.

پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینهٔ دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینهٔ اول اعداد غیرتکراری و دو گزینهٔ دوم حروف انگلیسی غیرتکراری‌اند.

در همهٔ قسمت‌ها «عدد» یعنی یک رقم ۰ تا ۹ (۱۰ حالت)، الفبای فارسی ۳۲ حرف و الفبای انگلیسی ۲۶ حرف دارد.

الف) فقط یکی از دو کار: اصل جمع).

ب) اصل ضرب).

پ) ترتیب مشخص نشده است؛ دو حالت «عدد، حرف» و «حرف، عدد» داریم که هر کدام ۳۲۰ حالت است: هر دو اصل: جمع و ضرب).

ت) هر دو عدد: ؛ هر دو حرف انگلیسی: ؛ در کل هر دو اصل).

ث) دو عدد غیرتکراری: ؛ دو حرف انگلیسی غیرتکراری: ؛ طبق اصل ضرب: ۵۰۰, (اصل ضرب).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۲۱ صفحه ۱۲۵ تمرین

۲ در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

طبق تعمیم اصل ضرب:

حداقل: کارخانه

حداکثر: ۰۰۰, کارخانه

۳۲۲ صفحه ۱۲۵ تمرین

۳ می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به‌گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم‌رنگ نباشند.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

(شکل: مثلثی که هر سه رأس آن با ضلع‌ها به هم وصل‌اند.)

الف) هر رأس را به ۲ حالت می‌توان رنگ کرد: حالت.

ب) هر سه رأس دو به دو به هم وصل‌اند، یعنی باید سه رنگ متفاوت داشته باشند، ولی فقط دو رنگ داریم؛ پس ۰ حالت (هیچ رنگ‌آمیزی مجازی وجود ندارد).

پ) با ۳ رنگ: حالت (الف): . حالت (ب): رأس اول ۳ حالت، رأس دوم (متفاوت از اول) ۲ حالت و رأس سوم (متفاوت از دو رنگ قبلی) ۱ حالت: .

۳۲۳ صفحه ۱۲۵ تمرین

۴ با پلاک‌هایی به‌صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آن‌ها از مجموعهٔ A انتخاب شود و سایر ارقام از مجموعهٔ B انتخاب شوند و حرف استفاده‌شده در آن از مجموعهٔ C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

و C مجموعهٔ حروف ب، ج، د، س، ص، ط، ق، ل، م، ن، و، ه، ی است.

شکل پلاک در متن در دسترس نیست؛ فرض می‌کنیم پلاک به‌صورت معمول ایران باشد: دو رقم، یک حرف، سه رقم و در سمت راست یک عدد دو رقمی (کد). یعنی ۵ رقم از مجموعهٔ B (هر کدام ۹ حالت)، یک حرف از حرف) و عدد دو رقمی از حالت):

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۲۴ صفحه ۱۲۵ تمرین

۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیراتوماتیک) تولید می‌شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟

ب) اگر یکی از رنگ‌های تولیدشده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می‌شود؟

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می‌شود؟

الف) نوع.

ب) رنگ ثابت است (۱ حالت): نوع.

پ) رنگ و دنده ثابت‌اند: نوع.

۳۲۵ صفحه ۱۲۶ تمرین

۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله ــ خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به‌صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) مجبور باشد به همهٔ سؤال‌ها جواب دهد؟

ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

الف) هر سؤال ۴ گزینه‌ای ۴ حالت و هر سؤال ۲ گزینه‌ای ۲ حالت دارد:

ب) اگر بتواند سؤالی را بی‌پاسخ بگذارد، هر سؤال یک حالت بیشتر دارد (۵ حالت برای سؤال‌های ۴ گزینه‌ای و ۳ حالت برای سؤال‌های ۲ گزینه‌ای):

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۲۶ صفحه ۱۲۶ تمرین

۷ اگر شکل مقابل نشان‌دهندهٔ جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همهٔ جاده‌ها یک‌طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟

شکل در متن در دسترس نیست و تعداد جاده‌ها مشخص نیست. روش حل: برای هر مسیر ممکن (مثلاً A→B→E یا A→C→D→E)، تعداد جاده‌های هر قطعه را در هم ضرب می‌کنیم (اصل ضرب)؛ سپس تعداد حالت‌های مسیرهای مختلف را با هم جمع می‌کنیم (اصل جمع).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۲۷ صفحه ۱۲۶ تمرین

۸ مسئلهٔ زیر را به‌گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه‌شده، درست باشد.

مسئله: چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت؛ به‌طوری‌که .....؟

حل: تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط موردنظر وجود دارد.

یکان ۵ حالت و دهگان (که صفر نمی‌تواند باشد) ۴ حالت دارد. «تمام ارقام آن زوج باشند» این شرط را می‌دهد: ارقام زوج ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ هستند؛ یکان ۵ حالت و دهگان (غیر از ۰) ۴ حالت.

مسئلهٔ کامل‌شده: چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت به‌طوری‌که هر دو رقم آن زوج باشند؟ (جواب:

۳۲۸ صفحه ۱۲۶ تمرین

۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هردوی آن‌ها حل شود و جواب آن به‌صورت زیر باشد.

مسئلهٔ پیشنهادی: یک رمز سه‌کاراکتری یا فقط از حروف مجموعهٔ {الف، ب} ساخته می‌شود (هر کاراکتر یکی از این دو حرف) یا فقط از ارقام مجموعهٔ {۱، ۲، ۳} (هر کاراکتر یکی از این سه رقم). چند رمز ممکن است؟

حل: حالت اول: . حالت دوم: . چون فقط یکی از دو حالت رخ می‌دهد (اصل جمع): .

۳۲۹ صفحه ۱۲۷ فعالیت

سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به درگاه مخصوص به خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟

۱ فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آن‌ها را در مربع‌های زیر بنویسید.

۲ آیا در سه مربع به‌هم‌چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟

۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به‌دست آورد؟

۱) حالت‌ها (۶ حالت): abc، acb، bac، bca، cab، cba.

۲) خیر؛ هر فیش فقط یک بار استفاده می‌شود و حرفی تکرار نمی‌شود.

۳) مربع اول ۳ حالت، مربع دوم ۲ حالت (یک حرف مصرف شده) و مربع سوم ۱ حالت دارد: .

پاسخ به پرسش ابتدایی: ۶ حالت وجود دارد. شرکت‌های تولیدی برای پیدا کردن راحت‌تر حالت درست، فیش‌ها و درگاه‌های متناظر را با رنگ یا شکل یا اندازهٔ یکسان از هم متمایز می‌کنند، به‌طوری‌که هر فیش فقط در درگاه خودش جا برود (یا هر دو را با یک رنگ مشخص می‌کنند).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۳۰ صفحه ۱۲۷ فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟ می‌خواهیم مسئلهٔ قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع وجود دارد که پرکردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است.

۱ اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پر شود؟ ــ پس از پرشدن اولین مربع چند عدد چیده‌نشده باقی مانده است؟ ــ حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ سومین و چهارمین مربع را چطور؟ ــ حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با ....

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت است از حاصل‌ضرب ....

۲ به‌نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به‌ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟

۳ تعداد کلمات هفت‌حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)

۴ با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۵ تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟

۶ اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل‌ضرب نشان دهید.

۱) مربع اول ۴ روش؛ سپس ۳ عدد باقی می‌ماند، مربع دوم ۳ روش، مربع سوم ۲ روش و مربع چهارم ۱ روش. تعداد حالت‌ها: . پس تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز برابر است.

۲)

۳) کلمه.

۴) ۸۸۰, عدد.

۵) ... ۶۲۸,۸۰۰, جایگشت.

۶) ... ؛ که آن را فاکتوریل) می‌نامیم.

۳۳۱ صفحه ۱۲۸ **کار در کلاس**

۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف ب ..... پ ..... ت .....

الف)

ب) ۳۲۰,

پ) ۶۲۸,۸۰۰,

ت) ...

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۳۲ صفحه ۱۲۸ **کار در کلاس**

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) ب) پ)

ت) ث) ج)

چ) ح) خ)

د) ذ) ر)

الف) ب) پ)

ت) ث) ج)

چ) ح) خ)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

د) ذ)

ر)

(در هر مورد، فاکتوریل بزرگ‌تر را تا جایی که با فاکتوریل مخرج یکی شود باز می‌کنیم و ساده می‌کنیم.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۳۳ صفحه ۱۲۹ کار در کلاس

۳ حاصل‌ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف ب پ ت) ۸ ث ج

ب) پ)

ت) ث)

ج)

(قسمت (الف) نمونه است:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۳۴ صفحه ۱۲۹ فعالیت

۱ تعداد کلمات هفت‌حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a, b, d, e, f, s, t می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با .....

۲ حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه‌حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به‌دست آوریم. برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمهٔ سه‌حرفی چند انتخاب داریم؟ برای انتخاب دوم و سوم حرف چطور؟ بنابراین تعداد کلمات سه‌حرفی موردنظر برابر است با ..... در واقع آنچه به‌دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از هفت شیء متمایز است.

۳ تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به‌دست آورید.

۴ اعداد به‌دست‌آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

۵ تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به‌دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

۶ تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز را به‌دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

---

۱)

۲) انتخاب اول ۷ حالت، انتخاب دوم ۶ حالت و انتخاب سوم ۵ حالت:

۳)

۴)

۵)

۶)

(برای داریم ؛ برای داریم

۳۳۵ صفحه ۱۳۱ کار در کلاس

۱ یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیشرو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

۲ با عددهای ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۱) پست‌ها متفاوت‌اند و ترتیب مهم است: حالت.

۲) انتخاب ۳ رقم از ۴ رقم با ترتیب: عدد.

۳۳۶ صفحه ۱۳۱ تمرین

۱ در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

ترتیب مهم است: حالت.

۳۳۷ صفحه ۱۳۱ تمرین

۲ از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تاست؟

چون تابع برای صعودی است، تنها جواب است. پس ۷ کتاب وجود دارد.

۳۳۸ صفحه ۱۳۱ تمرین

۳ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

: نادرست .

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

: درست .

: نادرست .

: نادرست .

: نادرست .

: نادرست .

(دو مورد آخر به‌دلیل ناخوانا بودن متن بازسازی شده‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۳۹ صفحه ۱۳۲ تمرین

۴ در یک نوع ماشین‌حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید موردنظر کدام‌اند و بخواهد به‌طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور موردنظر را اجرا کند؟

تعداد حالت‌های ممکن است. در بدترین حالت باید همهٔ آن‌ها را امتحان کند:

۶۸۰, ثانیه دقیقه ساعت و ۴۸ دقیقه.

۳۴۰ صفحه ۱۳۲ تمرین

۵ با حروف کلمهٔ «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها با «گل» شروع می‌شود؟

ب) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

پ) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ث) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمهٔ «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

حروف: گ، ل، پ، ی، ر، ا (۶ حرف متمایز).

الف) کلمه. با «گل» شروع‌شده: دو حرف اول مشخص‌اند و ۴ حرف دیگر به حالت چیده می‌شوند: ۲۴ کلمه.

ب) کلمه.

پ) «پ» و «ر» را یک حرف حساب می‌کنیم: جایگشت، و دو حالت «پر» و «رپ»: کلمه.

ایران توشه
پوسته ای برای موفقیت

ت) جایگاه دو حرف چسبیده در کلمهٔ ۴ حرفی ۳ حالت دارد (جایگاه‌های ۱-۲، ۲-۳ یا ۳-۴)؛ ترتیب «پر» یا «رپ»: ۲ حالت؛ دو جایگاه باقی‌مانده با ۴ حرف دیگر: . جواب: کلمه.

ث) چهار حرف «پیرا» را یک بلوک می‌گیریم که حالت درونی دارد. بلوک و یک حرف دیگر (گ یا ل: ۲ انتخاب) را به حالت می‌چینیم: کلمه.

(همهٔ این اعداد با شمارش مستقیم رایانه‌ای هم تأیید شده‌اند.)

۳۴۱ صفحه ۱۳۳ **فعالیت**

۱ همان‌طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تعداد عدد سه رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت که عبارت‌اند از: (جدول ۱۰ ستونی از اعداد ۱۲۳، ۱۳۲، ۲۱۳، ۲۳۱، ۳۱۲، ۳۲۱ و ... تا ستون ۳۴۵، ۳۵۴، ۴۳۵، ۴۵۳، ۵۳۴، ۵۴۳). به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟

۲ با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ {۱, ۲, ۳, ۴, ۵} را بنویسیم؟ این زیرمجموعه‌ها چندتا هستند؟ آن‌ها را بنویسید. {۱, ۲, ۳} و .....

۳ چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های موردنظر آن‌ها را متمایز کرد؟

۴ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی از فعالیت ۲ را به‌دست می‌دهد؟

۵ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟ این عدد را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟

۱) شش عدد هر ستون از یک مجموعهٔ سه‌تایی یکسان از رقم‌ها ساخته شده‌اند و فقط ترتیب رقم‌هایشان فرق دارد (مثلاً ستون ۱۲۳: ۱۲۳، ۱۳۲، ۲۱۳، ۲۳۱، ۳۱۲، ۳۲۱).

۲) از هر ستون یک زیرمجموعه می‌گیریم. ۱۰ زیرمجموعهٔ سه‌عضوی داریم:

{۱,۲,۳}، {۱,۲,۴}، {۱,۲,۵}، {۱,۳,۴}، {۱,۳,۵}، {۱,۴,۵}، {۲,۳,۴}، {۲,۳,۵}، {۲,۴,۵}، {۳,۴,۵}

۳) در فعالیت ۱ ترتیب قرارگرفتن رقم‌ها مهم است (۱۲۳ با ۳۲۱ فرق دارد)، ولی در فعالیت ۲ ترتیب اعضای مجموعه اهمیتی ندارد.

۴) هر ستون دقیقاً یک زیرمجموعهٔ سه‌عضوی را مشخص می‌کند.

۵) بر ۶ (تعداد اعضای هر ستون)، یعنی . عدد ۶ همان تعداد جایگشت‌های سه شیء یعنی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۴۲ صفحه ۱۳۶ پرسش درون متن

اما تعداد افراد دستهٔ دوم (کمیته‌های ۵ نفره‌ای که هیچ داور ایرانی در آن‌ها نیست) برابر است. چرا؟

۹ داور داریم که ۴ نفرشان ایرانی‌اند؛ پس ۵ داور غیرایرانی وجود دارد. اگر هیچ ایرانی در کمیته نباشد، هر ۵ عضو کمیته باید از این ۵ داور انتخاب شوند، یعنی باید هر ۵ نفر را برداریم و این کار فقط به روش ممکن است. بنابراین جواب «حداقل یک ایرانی» برابر است.

۳۴۳ صفحه ۱۳۶ کار در کلاس

۱ در کدام‌یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام‌یک ترتیب قرار گرفتن اشیا اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟

الف) ساختن کلمه‌ای سه‌حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی‌معنی).

ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.

پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند.

ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند.

ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت.

ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به‌ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز داده شود.

۲ در هر کدام از موارد «کار در کلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده‌کردن جواب نیست)

مورد	ترتیب مهم است؟	نوع	تعداد حالت‌ها
الف	بله	جایگشت	
ب	خیر	ترکیب	
پ	بله (پست‌ها فرق دارند)	جایگشت	
ت	خیر	ترکیب	
ث	خیر	ترکیب	
ج	بله (مدال‌ها فرق دارند)	جایگشت	

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۴۴ صفحه ۱۳۶ **کار در کلاس**

۳ از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟

پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟

الف)

ب) کمیتهٔ ۳ نفره از ۳ رشته با حداقل یک نفر از هر رشته، یعنی دقیقاً یک نفر از هر رشته:

پ) همهٔ کمیته‌های ۲ نفره از ۱۹ نفر: ؛ کمیته‌های بدون ریاضی‌دان (از ۱۱ نفر): . جواب:

۳۴۵ صفحه ۱۳۶ **فعالیت**

از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیتهٔ دو نفره انتخاب شود، به‌گونه‌ای که دو نفر انتخاب‌شده هم‌رشته نباشند. چند حالت برای انجام این‌کار وجود دارد؟ به جواب‌های چند دانش‌آموز به سؤال بالا (محمد: ؛ پژمان: ؛ حمید: دقت کنید.

ـــ دو نفر مدرس ریاضی را و ، دو نفر مدرس فیزیک را و ، و دو نفر مدرس شیمی را و درنظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آن‌ها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط‌بودن آن را مشخص کنید.

همهٔ ۱۲ حالت (کمیته‌های دو نفره از دو رشتهٔ متفاوت):

ریاضی-فیزیک:

img:m_b6dc04489b:8.13

،

img:m_d859e4382c:8.13

،

img:m_d9259a450e:8.13

،

img:m_6ac7506fdf:8.13

ریاضی-شیمی:

img:m_4431352b72:8.13

،

img:m_376ccffbfb:8.13

،

img:m_a606f07d0e:8.13

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

،

img:m_f2aedd8430:8.13

فیزیک-شیمی:

img:m_41fc66f61a:8.13

،

img:m_9934de0e03:8.13

،

img:m_9985aae0a8:8.13

،

img:m_d760dc60fe:8.13

پس جواب درست **۱۲** است (جواب محمد و پژمان درست است) و جواب حمید (۲۴) **غلط** است.

نمودار درختی جواب حمید: ریشه ← ۶ شاخه برای نفر اول و از هر شاخه ← ۴ شاخه برای نفر دوم (هم‌رشتهٔ نفر اول نباشد). مثلاً از شاخه‌های ، ، ، و از شاخه‌های ، ، ، خارج می‌شود؛ در نتیجه ۲۴ برگ داریم.

علت غلط‌بودن: در آن ترتیب انتخاب مهم گرفته شده است. مثلاً مسیرهای سپس و سپس یک کمیتهٔ یکسان

img:m_b6dc04489b:8.13

را نشان می‌دهند، پس هر کمیته دو بار شمرده شده است. جواب درست برابر است.

۳۴۶ صفحه ۱۳۷ **فعالیت**

۱ می‌دانیم که C(n, r) همان تعداد زیرمجموعه‌های r تایی از یک مجموعهٔ n عضوی است. حال ، و C(n, n) را یک‌بار با توجه به این تعبیر و یک‌بار با فرمول به‌دست آورید.

۲ الف) یک مربی قصد دارد از بین بازیکنان شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟ با پرکردن جدول (ستون‌های «به زمین می‌روند» و «به زمین نمی‌روند») تمام حالات را نمایش دهید.

ب) این بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟

پ) بین تعداد انتخاب‌های و چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟

ت) تساوی درستی را یک‌بار با استفاده از توجیه بالا و یک‌بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.

۳ جاهای خالی را پر کنید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعهٔ حروف انگلیسی برابر است با: .....

ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعهٔ حروف انگلیسی که حرف a در آن‌ها هست برابر است با: .....

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعهٔ حروف انگلیسی که حرف a در آن‌ها نیست، برابر است با: .....

ت) بنابراین: ....

۴ فرض کنیم A یک مجموعهٔ n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. ($a \in A$)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ A برابر است با: .....

ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آن‌ها هست، برابر است با: .....

پ) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آن‌ها نیست، برابر است با: .....

ت) بنابراین: ....

۱)

با تعبیر زیرمجموعه: فقط یک زیرمجموعهٔ تهی داریم ؛ زیرمجموعه‌های تک‌عضوی n تا هستند ؛ و تنها یک زیرمجموعهٔ n عضوی (خود مجموعه) وجود دارد.

۲ الف) حالت:

به زمین می‌روند	به زمین نمی‌روند
۱، ۲، ۳	۴، ۵
۱، ۲، ۴	۳، ۵
۱، ۲، ۵	۳، ۴
۱، ۳، ۴	۲، ۵
۱، ۳، ۵	۲، ۴
۱، ۴، ۵	۲، ۳
۲، ۳، ۴	۱، ۵
۲، ۳، ۵	۱، ۴
۲، ۴، ۵	۱، ۳
۳، ۴، ۵	۱، ۲

ب) ستون دوم جدول: دو بازیکن نیمکت‌نشین: {۴,۵}، {۳,۵}، {۳,۴}، {۲,۵}، {۲,۴}، {۲,۳}، {۱,۵}، {۱,۴}، {۱,۳}، {۱,۲} — یعنی حالت.

پ) . توجیه: انتخاب ۳ بازیکنی که به زمین می‌روند، یکی‌به‌یک با انتخاب ۲ بازیکنی که نمی‌روند متناظر است (هر انتخاب، دیگری را مشخص می‌کند).

پس ؛ از نظر تعبیر نیز انتخاب r عضو برای «برداشتن» با انتخاب n−r عضو برای «کنار گذاشتن» برابر است.

۳ الف) ب) را برمی‌داریم و ۴ حرف دیگر را از ۲۵ حرف باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم) **پ)** حرف را از ۲۵ حرف غیر از a انتخاب می‌کنیم)

ت)

۴ الف) C(n, r) **ب) پ)**

ت)

۳۴۷ صفحه ۱۳۹ تمرین

۱ یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمهٔ کدو، تخمهٔ ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

۷ نوع تنقلات داریم و باید ۵ یا ۶ یا ۷ نوع را انتخاب کنیم (ترتیب مهم نیست):

نوع آجیل.

۳۴۸ صفحه ۱۳۹ تمرین

۲ یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

الف) رئیس: ۱ حالت؛ یک کارشناس حقوقی از ۳ نفر: ۳ حالت؛ ۳ نفر دیگر از ۱۴ نفر باقی‌مانده نفر که رئیس و حقوقی نیستند): . جواب:

ب) رئیس ۱ حالت، معاون ۳ حالت، کارشناس حقوقی ۳ حالت؛ ۲ نفر دیگر از ۱۱ نفر (۱۸ - ۱ - ۳ - ۳)، که نه رئیس‌اند، نه معاون و نه حقوقی: . جواب:

پ) رئیس ۱ حالت، معاون ۳ حالت، حسابدار ۲ حالت، حقوقی ۳ حالت؛ یک نفر دیگر از ۹ نفر (کارشناس اداری ۶ و کارگزینی ۳): ۹ حالت. جواب:

۳۴۹ صفحه ۱۳۹ تمرین

۳ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

(جواب منفی قابل قبول نیست.) پس ۸ داوطلب وجود داشته است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۵۰ صفحه ۱۳۹ تمرین

۴ گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته‌گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته‌گل مختلف می‌تواند درست کند؟

دسته‌گل.

۳۵۱ صفحه ۱۳۹ تمرین

۵ یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به‌دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟
چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

باید ۲ یا ۳ یا ۴ رنگ از ۴ رنگ را ترکیب کنیم: رنگ جدید (و با احتساب ۴ رنگ اصلی، ۱۵ رنگ).

علت: در محاسبهٔ ما فقط «انتخاب رنگ‌ها» شمرده شده و مقدار (نسبت) هر رنگ در ترکیب یکسان فرض شده است. در عمل می‌توان رنگ‌ها را با نسبت‌های مختلف (مثلاً دو قسمت قرمز و یک قسمت آبی یا برعکس) مخلوط کرد و همچنین رنگ را با سفید و... روشن یا تیره کرد؛ هر نسبت، فام جدیدی می‌سازد.

۳۵۲ صفحه ۱۳۹ تمرین

۶ هفت نقطهٔ A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

هر سه نقطه از روی دایره (که هیچ سه‌تایی‌شان هم‌خط نیستند) یک مثلث می‌سازد و ترتیب انتخاب مهم نیست: مثلث.

۳۵۳ صفحه ۱۴۰ تمرین

۷ یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه
الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟
ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟
پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

ت) ادویه‌ها به ۲ دستهٔ ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ‌یک از ادویه‌های دستهٔ اول با هیچ‌یک از ادویه‌های دستهٔ دوم سازگاری ندارند؟

الف)

ب) حالت‌هایی که هر دو ادویهٔ ناسازگار در آن‌ها هستند: سومین ادویه از ۸ تای دیگر، یعنی ۸ حالت. جواب:

پ) فقط یک حالت (خود آن سه ادویه) ممنوع است:

ت) هر طعم باید کاملاً از یک دسته باشد:

---

۳۵۴ صفحه ۱۴۰ تمرین

۸ مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

الف ب

(ارقام ۵، ۶، ۳، ۲ از متن ناخوانا بازسازی شده‌اند.)

الف) در یک گروه ۵ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان هستند. به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره شامل ۳ ریاضی‌دان و ۲ فیزیک‌دان انتخاب کرد؟ (هر دو کار باید انجام شود، اصل ضرب) جواب:

ب) به چند طریق می‌توان کمیته‌ای انتخاب کرد که یا فقط شامل ۳ نفر از ۵ ریاضی‌دان باشد یا فقط شامل ۲ نفر از ۶ فیزیک‌دان؟ (فقط یکی از دو کار، اصل جمع) جواب:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی (۱) دهم - فصل هفتم

آمار و احتمال

فهرست

۳۵۵ صفحه ۱۴۲ · فعالیت — جدول حالت‌های پرتاب دو تاس ... ۱۷۶

۳۵۶ صفحه ۱۴۳ · کار در کلاس — پرتاب هم‌زمان یک تاس و یک سکه ... ۱۷۷

۳۵۷ صفحه ۱۴۳ · مثال (تکمیلی) — جنسیت فرزندان یک خانواده ۴ فرزندی ... ۱۷۷

۳۵۸ صفحه ۱۴۴ · مثال (تکمیلی) — انتخاب ۳ مهره از ۵ مهره و پیشامدهای آن ... ۱۷۸

۳۵۹ صفحه ۱۴۵ · کار در کلاس — پیشامدها و اعمال روی آن‌ها در پرتاب دو تاس ... ۱۷۹

۳۶۰ صفحه ۱۴۵ · کار در کلاس — طرح پیشامدهای ناسازگار برای پرتاب یک تاس ... ۱۷۹

۳۶۱ صفحه ۱۴۶ · مثال (تکمیلی) — پرتاب یک تاس و دو سکه ... ۱۸۰

۳۶۲ صفحه ۱۴۷ · مثال (تکمیلی) — کارت‌های دو رقمی با ارقام ۲ و ۳ و ۴ ... ۱۸۰

۳۶۳ صفحه ۱۴۷ · مثال (تکمیلی) — احتمال انتخاب ۳ مهره از ۴ آبی و ۳ قرمز ... ۱۸۰

۳۶۴ صفحه ۱۴۷ · فعالیت — ویژگی‌های احتمال ۱۸۱

۳۶۵ صفحه ۱۴۸ · کار در کلاس — احتمال متمم یک پیشامد ... ۱۸۱

۳۶۶ صفحه ۱۴۸ · مثال (تکمیلی) — احتمال در پرتاب دو تاس ... ۱۸۱

۳۶۷ صفحه ۱۴۹ · مثال (تکمیلی) — چیدن تصادفی حروف کلمهٔ «جهانگردی» ... ۱۸۲

۳۶۸ صفحه ۱۴۹ · پرسش درون متن — تایپ تصادفی کلمه و شعر توسط کودک ... ۱۸۲

۳۶۹ صفحه ۱۵۰ · تمرین — ۱ — کارت‌های اعداد زوج کوچک‌تر از ۱۱ ... ۱۸۳

۳۷۰ صفحه ۱۵۰ · تمرین — ۲ — نمایش پیشامدها با نمودار ون ... ۱۸۳

۳۷۱ صفحه ۱۵۰ · تمرین — ۳ — کارت‌های ۱ تا ۸ ..... ۱۸۴

۳۷۲ صفحه ۱۵۰ · تمرین — ۴ — فرزندان یک خانواده ۳ فرزندی ... ۱۸۴

۳۷۳ صفحه ۱۵۰ · تمرین — ۵ — سکه و تاس و دو سکه ۱۸۴

۳۷۴ صفحه ۱۵۰ · تمرین — ۶ — انتخاب تیم دو نفره از ۵ دانش‌آموز ... ۱۸۵

۳۷۵ صفحه ۱۵۱ · تمرین — ۷ — کارت‌های اعتباری A و B ۱۸۵

۳۷۶ صفحه ۱۵۱ · تمرین — ۸ — ردیف شدن ۷ نفر که دو نفرشان برادرند ... ۱۸۶

۳۷۷ صفحه ۱۵۱ · تمرین — ۹ — اثبات $P(A) \le P(B)$ وقتی A زیرمجموعهٔ B است ... ۱۸۶

۳۷۸ صفحه ۱۵۳ · کار در کلاس — ۱ — مثال‌هایی از تصمیم‌گیری بر اساس اعداد و ارقام ... ۱۸۶

۳۷۹ صفحه ۱۵۳ · کار در کلاس — ۲ — مراحل علم آمار ۱۸۷

۳۸۰ صفحه ۱۵۳ · کار در کلاس — ۳ — مراحل علم آمار در خبر هواشناسی ... ۱۸۷

۳۸۱ صفحه ۱۵۳ · کار در کلاس — ۴ — تفاوت آمار و علم آمار ... ۱۸۷

۳۸۲ صفحه ۱۵۳ · کار در کلاس — ۵ — تعداد لامپ‌های معیوب در یک کارخانه ... ۱۸۷

۳۸۳ صفحه ۱۵۴ · کار در کلاس — ۶ — درست یا نادرست دربارهٔ علم آمار ... ۱۸۸

۳۸۴ صفحه ۱۵۴ · کار در کلاس — ۷ — تبدیل تصویر به اعداد (پیکسل) ... ۱۸۹

۳۸۵ صفحه ۱۵۴ · کار در کلاس — ۸ — جدول عددی یک شکل ... ۱۸۹

۳۸۶ صفحه ۱۵۵ · فعالیت — الف — کاربرد علم آمار در پزشکی (چاقی) ... ۱۸۹

۳۸۷ صفحه ۱۵۶ · فعالیت — ب — پیش‌بینی درصد افراد چاق شهر از روی نمونه ... ۱۹۰

۳۸۸ صفحه ۱۵۶ · مثال (تکمیلی) — شاخص توده بدن فردی با وزن ۱۰۰ کیلوگرم و قد ۱٫۷۴ متر ... ۱۹۰

۳۸۹ صفحه ۱۵۷ · کار در کلاس — جامعه و نمونه در تولید قطعات دو کارخانه ... ۱۹۱

۳۹۰ صفحه ۱۵۸ · تمرین — ۱ — جامعه و نمونه در کیفیت محصولات یک کارخانه ... ۱۹۲

۳۹۱ صفحه ۱۵۸ · تمرین — ۲ — درست یا نادرست دربارهٔ جامعه و نمونه ... ۱۹۲

۳۹۲ صفحه ۱۵۸ · تمرین — ۳ — جامعه و نمونه در صف صبحگاهی ... ۱۹۲

۳۹۳ صفحه ۱۵۹ · فعالیت — سنجش کیفیت میوهٔ هلو ۱۹۳

۳۹۴ صفحه ۱۶۰ · کار در کلاس — ۱ — متغیرهای یک خودرو ۱۹۳

۳۹۵ صفحه ۱۶۱ · کار در کلاس — ۲ — متغیرهای یک دانش‌آموز ... ۱۹۴

۳۹۶ صفحه ۱۶۱ · کار در کلاس — ۳ — متغیرهای یوزپلنگ ایرانی ... ۱۹۴

۳۹۷ صفحه ۱۶۱ · کار در کلاس — ۴ — متغیر مهارت کارگران کارخانه ... ۱۹۵

۳۹۸ صفحه ۱۶۲ · فعالیت — متغیرهای کمی و کیفی ۱۹۵

۳۹۹ صفحه ۱۶۳ · کار در کلاس — ۱ — تشخیص متغیر کمی یا کیفی از روی شکل‌ها ... ۱۹۶

۴۰۰ صفحه ۱۶۳ · کار در کلاس — ۲ — نوع متغیر: کمی یا کیفی ... ۱۹۶

۴۰۱ صفحه ۱۶۳ · کار در کلاس — ۳ — جدول نوع متغیر ۱۹۶

۴۰۲ صفحه ۱۶۴ · فعالیت — انواع متغیرهای کمی (پیوسته و گسسته) ... ۱۹۷

۴۰۳ صفحه ۱۶۵ · کار در کلاس — ۱ — پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای خودرو ... ۱۹۷

۴۰۴ صفحه ۱۶۵ · کار در کلاس — ۲ — گسسته یا پیوسته ۱۹۸

۴۰۵ صفحه ۱۶۶ · کار در کلاس — ۳ — نوع متغیر (پیوسته/گسسته) ... ۱۹۸

۴۰۶ صفحه ۱۶۶ · فعالیت — انواع متغیرهای کیفی (اسمی و ترتیبی) ... ۱۹۹

۴۰۷ صفحه ۱۶۷ · کار در کلاس — متغیر اسمی و ترتیبی در شکل‌ها ... ۱۹۹

۴۰۸ صفحه ۱۶۸ · تمرین — ۱ — اسمی یا ترتیبی ۲۰۰

۴۰۹ صفحه ۱۶۸ · تمرین — ۲ — دسته‌بندی نوع متغیرهای هواشناسی ... ۲۰۰

۴۱۰ صفحه ۱۶۹ · تمرین — ۳ — نوع متغیرهای دانش‌آموزان ... ۲۰۱

۴۱۱ صفحه ۱۶۹ · تمرین — ۴ — شاخص توده بدن فردی با وزن ۹۵ و قد ۱۶۰ ... ۲۰۲

۴۱۲ صفحه ۱۶۹ · تمرین — ۵ — جدول عددی شکل (پرچم) ۲۰۲

۴۱۳ صفحه ۱۶۹ · تمرین — ۶ — تعریف جامعه و نمونه با مثال ... ۲۰۳

۴۱۴ صفحه ۱۶۹ · تمرین — ۷ — اندازه و اعضای جامعه و نمونه در شکل ... ۲۰۳

۴۱۵ صفحه ۱۷۰ · تمرین — ۸ — نوع متغیرها ۲۰۴

irantooshe.ir

۳۵۵ صفحه ۱۴۲ فعالیت

۱ اگر دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن را می‌توان در جدول زیر مشاهده کرد. ابتدا این جدول را کامل کنید و از طریق اصل ضرب درستی تعداد کل حالت‌های موجود در جدول را بررسی کنید؛ سپس به سؤال‌ها پاسخ دهید:

۲ قطر آبی رنگ چه پیشامدی را نشان می‌دهد؟

۳ خانه‌های مربوط به حالت‌هایی را که هر دو عدد رو شده زوج و هر دو عدد رو شده فردند هاشور بزنید؛ چه الگویی به دست می‌آید؟

۴ با توجه به جدول، یک مسئله طرح کنید و پاسخ آن را توضیح دهید.

۵ با توجه به جدول و قطرهای آن، تعداد حالت‌ها برای مجموع دو تاس، در چه اعدادی برابر است؟ (راهنمایی: به‌عنوان مثال، تعداد حالت‌ها برای مجموع ۵ و مجموع دو تاس ۹، برابر است.)

۱) سطرها نشان‌دهندهٔ عدد تاس آبی و ستون‌ها نشان‌دهندهٔ عدد تاس قرمز هستند. جدول کامل شده در شکل زیر آمده است.

طبق اصل ضرب، برای تاس اول ۶ حالت و برای تاس دوم ۶ حالت داریم، پس تعداد کل حالت‌ها است که با تعداد خانه‌های جدول (۶ سطر و ۶ ستون) برابر است.

۲) قطر رنگی خانه‌های (۱،۱)، (۲،۲)، ... ، (۶،۶) را دربر دارد، یعنی پیشامد «آمدن دو عدد یکسان (برابر) روی دو تاس» را نشان می‌دهد. این پیشامد ۶ عضو دارد.

۳) در خانه‌های هاشورخورده هر دو عدد زوج یا هر دو فرد هستند. الگوی به‌دست‌آمده شبیه صفحهٔ شطرنج است: خانه‌ها یک در میان هاشور می‌خورند و ۱۸ خانه (۹ خانهٔ «هر دو زوج» و ۹ خانهٔ «هر دو فرد») هاشور می‌خورد.

۴) نمونه: «احتمال اینکه مجموع اعداد دو تاس برابر ۷ شود چقدر است؟» روی قطر فرعی (از گوشهٔ بالاراست به پایین‌چپ) مجموع همهٔ خانه‌ها ۷ است: (۱،۶)، (۲،۵)، (۳،۴)، (۴،۳)، (۵،۲)، (۶،۱). پس ۶ حالت مطلوب از ۳۶ حالت داریم و احتمال برابر است.

۵) تعداد حالت‌ها برای هر مجموع برابر تعداد خانه‌های روی قطر فرعی متناظر با آن است: مجموع ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ به‌ترتیب ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ حالت دارند. پس تعداد حالت‌ها برای مجموع‌های زیر برابر است:

- مجموع ۲ و مجموع ۱۲ (هرکدام ۱ حالت)
- مجموع ۳ و مجموع ۱۱ (هرکدام ۲ حالت)
- مجموع ۴ و مجموع ۱۰ (هرکدام ۳ حالت)
- مجموع ۵ و مجموع ۹ (هرکدام ۴ حالت)
- مجموع ۶ و مجموع ۸ (هرکدام ۵ حالت)

به بیان دیگر مجموع‌هایی که از ۷ فاصلهٔ یکسان دارند، تعداد حالت‌های برابر دارند؛ فقط مجموع ۷ تعداد حالتی (۶ حالت) برابر با مجموع دیگر ندارد.

۳۵۶ صفحه ۱۴۳ **کار در کلاس**

فرض کنید می‌خواهیم یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم:

۱ آیا می‌توانید نتیجهٔ حاصل را به‌صورت قطعی بیان کنید؟

۲ آیا این پدیده یا آزمایش، تصادفی است؟ چرا؟

۳ همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید (فضای نمونه‌ای را تشکیل دهید).

۴ تعداد این حالت‌ها را با استفاده از اصل ضرب به دست آورید.

۵ جدول ۶*۲ یا ۲*۶ مربوط به این آزمایش را رسم کنید.

۱) خیر؛ قبل از انداختن، نمی‌توان گفت تاس چه عددی و سکه چه رویی نشان می‌دهد.

۲) بله، تصادفی است؛ زیرا نتیجهٔ آن از قبل قابل پیش‌بینی نیست، ولی همهٔ حالت‌های ممکن را می‌دانیم.

۳) هر حالت را به‌صورت (سکه، تاس) می‌نویسیم. فضای نمونه‌ای:

S = {(ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،۴)، (ر،۵)، (ر،۶)، (پ،۱)، (پ،۲)، (پ،۳)، (پ،۴)، (پ،۵)، (پ،۶)}

۴) سکه ۲ حالت و تاس ۶ حالت دارد؛ طبق اصل ضرب .

۵) جدول سطرها: وضعیت سکه، ستون‌ها: عدد تاس):

۳۵۷ صفحه ۱۴۳ **مثال (تکمیلی)**

فرض کنید خانواده‌ای ۴ فرزند دارد؛ اما از جنسیت فرزندان این خانواده اطلاع نداریم. اگر ترتیب به‌دنیا آمدن فرزندان اهمیت داشته باشد، با توجه به اصل ضرب تعداد همهٔ حالت‌های ممکن برای فرزندان این خانواده عبارت است از: ۲*۲*۲*۲ حالت. (پ، پ، د، پ) به این معنی است که فرزند اول یا بزرگ‌تر در این خانواده پسر و فرزند دوم دختر و فرزند سوم و چهارم، پسر هستند. حالت (د، پ، پ، پ) را شما توضیح دهید. پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید و جاهای خالی را پر کنید:

الف) پیشامد اینکه «دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد» A = {(د، پ، پ، پ) ، ... ، ... ، (پ، پ، پ، د)} ، A =

ب) پیشامد اینکه «حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد» B = {(پ، پ، پ، پ) ، ... ، ... ، ... ، (پ، پ، پ، د)} ، B =

پ) پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشد» C = {(پ، پ، د، د) ، ... ، ... ، ... ، ... ، (د، د، پ، پ)} ، C =

ت) پیشامد اینکه «تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد» = D ، D = {(پ، پ، پ، پ) ، ... ، ... ، ... ، (د، پ، پ، پ)}

حالت (د، پ، پ، پ) یعنی فرزند اول (بزرگ‌ترین) دختر و فرزندان دوم، سوم و چهارم هر سه پسر هستند.

الف) A = {(د، پ، پ، پ) ، (پ، د، پ، پ) ، (پ، پ، د، پ) ، (پ، پ، پ، د)} که ۴ عضو دارد.

ب) «حداکثر یک دختر» یعنی هیچ دختر یا دقیقاً یک دختر: B = {(پ، پ، پ، پ) ، (د، پ، پ، پ) ، (پ، د، پ، پ) ، (پ، پ، د، پ) ، (پ، پ، پ، د)} که ۵ عضو دارد.

پ) باید دقیقاً ۲ پسر و ۲ دختر داشته باشیم (۶ = C(۴،۲) حالت): C = {(پ، پ، د، د) ، (پ، د، پ، د) ، (پ، د، د، پ) ، (د، پ، پ، د) ، (د، پ، د، پ) ، (د، د، پ، پ)}

ت) پسرها بیشتر از دخترها باشند: یا ۴ پسر یا ۳ پسر و ۱ دختر: D = {(پ، پ، پ، پ) ، (پ، پ، پ، د) ، (پ، پ، د، پ) ، (پ، د، پ، پ) ، (د، پ، پ، پ)} که ۵ عضو دارد.

۳۵۸ صفحه ۱۴۴ **مثال (تکمیلی)**

در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز متفاوت (با شماره‌های ۱ تا ۳) و ۲ مهرهٔ آبی متفاوت (با شماره‌های ۱ و ۲) وجود دارد. اگر ۳ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود، تعداد حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره، عبارت است از ،... ، زیرا ترتیب انتخاب مهم نیست. بنابراین فضای نمونه‌ای را بنویسید و جاهای خالی را پر کنید. اگر پیشامدهای «حداقل ۱ مهرهٔ آبی انتخاب شود» و «حداکثر ۱ مهرهٔ آبی انتخاب شود» و «هر سه مهره قرمز انتخاب شود» را به ترتیب A و B و C بنامیم، S را مجموعهٔ مرجع فرض کنیم، متمم A یعنی A' با کدام‌یک از مجموعه‌های B یا C برابر است؟

تعداد حالت‌ها: .

S = {R۱R۲R۳ ، R۱R۲B۱ ، R۱R۲B۲ ، R۱R۳B۱ ، R۱R۳B۲ ، R۲R۳B۱ ، R۲R۳B۲ ، B۱B۲R۱ ، B۱B۲R۲ ، B۱B۲R۳}

A (حداقل یک آبی) = همهٔ حالت‌ها به‌جز R۱R۲R۳، یعنی ۹ عضو: {B۲R۱R۲ ، B۱R۲R۳ ، B۱R۱R۳ ، B۱R۱R۲ ، B۱B۲R۳ ، B۱B۲R۲ ، B۱B۲R۱ ، B۲R۲R۳ ، B۲R۱R۳}

B (حداکثر یک آبی) = {R۱R۲R۳ ، B۲R۲R۳ ، B۲R۱R۳ ، B۲R۱R۲ ، B۱R۲R۳ ، B۱R۱R۳ ، B۱R۱R۲} که ۷ عضو دارد.

C = {R۱R۲R۳}

متمم A، یعنی حالتی که «هیچ مهرهٔ آبی نباشد» که فقط است؛ پس A' و با B برابر نیست (B دارای ۷ عضو است).

۳۵۹ صفحه ۱۴۵ کار در کلاس

۱ با توجه به فعالیت ابتدای این درس (انداختن دو تاس) هر یک از پیشامدهای زیر را تشکیل دهید و جاهای خالی را پر کنید.

A = پیشامد آنکه هر دو تاس فرد باشند = {(۱،۱) ، ... }

B = پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۶ باشد = {(۱،۵) ، (۵،۱) ، ... }

C = پیشامد آنکه تاس آبی مضرب ۳ بیاید = {(۳،۱) ، ... }

الف) پیشامد اینکه «هر دو تاس فرد و مجموع آن‌ها ۶ باشد» ($A \cap B$)

ب) پیشامد آنکه «هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس ۶ باشد» ($A \cup B$)

پ) پیشامد آنکه ($A - C$) رخ بدهد؛ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی ...»

ت) پیشامد ($B - C$) را توصیف کنید و آن را تشکیل دهید.

ث) اگر پیشامد D را «مجموع دو تاس، عدد ۷ باشد» و پیشامد E را «هر دو تاس زوج باشند» تعریف کنیم، آیا D و E ناسازگارند؟ چرا؟

(مؤلفهٔ اول عدد تاس آبی است.)

الف) حالت‌هایی که هم هر دو فرد و هم مجموع ۶ است:

ب) همهٔ اعضای A و B (اعضای مشترک یک بار شمرده می‌شود):

تعداد اعضا: که با شمارش مستقیم هم برابر است.

پ) $A - C$ یعنی «هر دو تاس فرد باشند، ولی تاس آبی مضرب ۳ نباشد» (یعنی تاس آبی ۱ یا ۵ باشد):

ت) $B - C$ یعنی «مجموع دو تاس ۶ باشد، ولی تاس آبی مضرب ۳ نباشد». از B حالت (۳،۳) (که تاس آبی آن ۳ است) حذف می‌شود:

ث) {(۴،۳) ،(۳،۴) ،(۵،۲) ،(۲،۵) ،(۶،۱) ،(۱،۶)} = D. اگر هر دو تاس زوج باشند مجموع آن‌ها زوج است و نمی‌تواند ۷ (فرد) باشد؛ پس و D و E ناسازگارند.

۳۶۰ صفحه ۱۴۵ کار در کلاس

۲ تاسی را می‌اندازیم، روی فضای نمونه‌ای حاصل، پیشامدهای A و B و C را طوری تعریف کنید که:

الف) A و B ناسازگار باشند.

ب) A و B و C دو به دو ناسازگار باشند.

پ) ($A \cup B$) و C ناسازگار باشند.

فضای نمونه‌ای {۶ ، ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱} = S است. نمونه جواب‌ها:

الف) A = «عدد زوج» = {۲ ، ۴ ، ۶} و B = «عدد فرد» = {۱ ، ۳ ، ۵}؛ چون $A \cap B = \varnothing$ ناسازگارند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ب) $A = \{۱ ، ۲\}$ و $B = \{۳ ، ۴\}$ و $C = \{۵ ، ۶\}$؛ هر دو تای آن‌ها عضو مشترک ندارند.

پ) $A = \{۱ ، ۲\}$ و $B = \{۳\}$ و $C = \{۵ ، ۶\}$؛ در این صورت $A \cup B = \{۱ ، ۲ ، ۳\}$ و $C \cap (A \cup B) = \varnothing$.

---

۳۶۱ صفحه ۱۴۶ — مثال (تکمیلی)

یک تاس و ۲ سکه را با هم می‌اندازیم:

الف) فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟ *۲*...

ب) پیشامد آنکه «هر دو سکه رو و تاس زوج باشد» را تشکیل دهید. A = {(ر ، ر ، ۲) ، ... }

پ) پیشامد آنکه «هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید» را تشکیل دهید. B = {(پ ، پ ، ۱) ، (پ ، پ ، ۲) ، ... }

هر حالت را به صورت (سکهٔ اول، سکهٔ دوم، تاس) می‌نویسیم.

الف)

ب) A = {(ر، ر، ۲) ، (ر، ر، ۴) ، (ر، ر، ۶)}

پ) هر دو سکه پشت: ۶ حالت (تاس هرچه باشد)؛ تاس ۵: ۴ حالت (سکه‌ها هرچه باشند) که حالت (پ، پ، ۵) در هر دو مشترک است. پس عضو داریم:

B = {(پ، پ، ۱) ، (پ، پ، ۲) ، (پ، پ، ۳) ، (پ، پ، ۴) ، (پ، پ، ۵) ، (پ، پ، ۶) ، (ر، ر، ۵) ، (ر، پ، ۵) ، (پ، ر، ۵)}

---

۳۶۲ صفحه ۱۴۷ — مثال (تکمیلی)

فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می‌توانیم بسازیم، روی یک کارت می‌نویسیم و آن‌ها را در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم: اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب «خارج شدن عدد زوج» و «خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟ (جاهای خالی را پر کنید.)

چون ، شانس رخداد پیشامد A (خارج شدن عدد زوج) بیشتر است.

---

۳۶۳ صفحه ۱۴۷ — مثال (تکمیلی)

در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

الف) هر سه مهره آبی باشند.

ب) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

پ) دقیقاً ۲ مهره هم‌رنگ باشند.

الف)

ب) یا هر سه مهره آبی یا هر سه قرمز (دو حالت ناسازگار):

پ) دو آبی و یک قرمز، یا دو قرمز و یک آبی:

---

۳۶۴ صفحه ۱۴۷ فعالیت

اگر S فضای نمونه‌ای متناهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهایی در این فضا باشند، در این صورت:

(دلیل آن را کامل کنید.)

II) P(∅) ، (دلیل آن را کامل کنید.)

III) P(A ∪ B) ∩ (دلیل آن را کامل کنید.)

I) چون $A \subseteq S$ است، . با تقسیم طرفین بر $n(S)$ (که مثبت است):

II) ∅ عضوی ندارد و S همهٔ اعضای فضا را دارد:

III) می‌دانیم (از اصل شمول و عدم شمول) . با تقسیم طرفین بر $n(S)$:

اگر A و B ناسازگار باشند، $A \cap \emptyset$ و $P(A) \cap$ ، پس $P(A) \cup$.

---

۳۶۵ صفحه ۱۴۸ کار در کلاس

اگر A' متمم پیشامد A در فضای نمونه‌ای S باشد (A و A' ناسازگارند) نشان دهید ').

می‌دانیم ، پس . از طرفی A و A' ناسازگارند، پس:

---

۳۶۶ صفحه ۱۴۸ مثال (تکمیلی)

اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد: (می‌دانیم در انداختن دو تاس

الف) هر دو تاس زوج باشند؟

ب) مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند؟

پ) مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشند؟

ت) مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ث) حاصل‌ضرب دو عدد رو شده ۱۲ باشد؟

الف) پیشامد هر دو زوج: $A = \{(۲،۲) ، (۲،۴) ، (۲،۶) ، (۴،۲) ، (۴،۴) ، (۴،۶) ، (۶،۲) ، (۶،۴) ، (۶،۶)\}$

ب) $B =$ «مجموع ۸» $= \{(۲،۶) ، (۳،۵) ، (۴،۴) ، (۵،۳) ، (۶،۲)\}$ و $C =$ «هر دو فرد» که ۹ عضو دارد. اشتراک: $B \cap C = \{(۳،۵) ، (۵،۳)\}$

پ) $D =$ «مجموع ۷» $= \{(۱،۶) ، (۲،۵) ، (۳،۴) ، (۴،۳) ، (۵،۲) ، (۶،۱)\}$ که ۶ عضو دارد و A (هر دو زوج) ۹ عضو دارد. چون $A \cap D = \emptyset$:

ت) مجموع بین ۲ تا ۱۲ است و شمردن حالت‌های «کمتر از ۱۱» طولانی است؛ از متمم استفاده می‌کنیم. $A =$ «مجموع کمتر از ۱۱» و $A' =$ «مجموع بزرگ‌تر یا مساوی ۱۱» $= \{(۵،۶) ، (۶،۵) ، (۶،۶)\}$:

ث) $A = \{(۲،۶) ، (۶،۲) ، (۳،۴) ، (۴،۳)\}$

---

۳۶۷ صفحه ۱۴۹ **مثال (تکمیلی)**

اگر حروف کلمهٔ «جهانگردی» را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد:

الف) حرف «ی» آخر باشد؟

ب) دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

پ) با حرف «ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

کلمهٔ «جهانگردی» ۸ حرف متمایز دارد؛ پس تعداد همهٔ حالت‌ها است.

الف) «ی» در جای آخر ثابت و ۷ حرف دیگر به حالت چیده می‌شوند:

ب) «ی» و «د» را یک بسته می‌گیریم: با ۷ شیء، جایگشت و داخل بسته حالت (ید یا دی):

پ) حرف اول «ج» و حرف آخر «ی» ثابت‌اند و ۶ حرف وسط به حالت چیده می‌شوند:

---

۳۶۸ صفحه ۱۴۹ **پرسش درون متن**

فرض کنیم تعداد دکمه‌های یک رایانه ۵۰ عدد باشد و کودکی که خواندن و نوشتن نمی‌داند، به صورت تصادفی شروع به تایپ کردن کند. چقدر احتمال دارد که یک کلمه مانند «طبیعت» را تایپ کند؟ (احتمال انتخاب هر حرف مانند «ط» برابر ۱/۵۰ است و چون این کلمه ۵ حرف دارد احتمال تایپ آن برابر است با

اگر همین کودک بخواهد بیت «تو کز سرای طبیعت نمی‌روی بیرون / کجا به کوی طریقت گذر توانی کرد» را به طور تصادفی تایپ کند احتمال آن چقدر است؟ این عدد چقدر کوچک است؟

حال اگر شعری که این بیت در آن قرار دارد بخواهیم تصادفی تایپ کنیم احتمال آن چقدر می‌شود؟

اگر کسی به شما بگوید به طور تصادفی کودکی کتاب حافظ را تایپ کرد شما باور می‌کنید؟

توشه ای برای موفقیت

طبیعتی که در اطراف ما است بسیار پیچیده‌تر از شعر حافظ است، آیا می‌توان پذیرفت که به طور تصادفی به‌وجود آمده است؟

کلمهٔ «طبیعت»: ۵ حرف دارد و هر حرف با احتمال تایپ می‌شود؛ حرف‌ها مستقل‌اند:

یعنی حدود سه در یک میلیارد.

بیت شعر: اگر فقط حرف‌ها را بشماریم (بدون فاصله و علامت)، مصراع اول ۲۴ حرف و مصراع دوم ۲۳ حرف دارد؛ جمعاً ۴۷ حرف. احتمال:

این عدد بسیار کوچک است (صفر، ممیز، ۷۹ صفر و سپس رقم‌های ۱۴)؛ عملاً می‌توان گَفت غیرممکن است.

کل شعر: چون حروف بسیار بیشتری دارد، توان کسر بسیار بزرگ‌تر می‌شود و احتمال بسیار بسیار کوچک‌تر از این (باز هم بی‌نهایت نزدیک به صفر) خواهد بود. اگر شعر n حرف داشته باشد، احتمال است.

باور کردن: خیر؛ احتمال تایپ تصادفی یک کتاب کامل مانند دیوان حافظ آن‌قدر ناچیز است که رخ دادن آن را باور نمی‌کنیم.

طبیعت: چون طبیعت و موجودات آن بسیار پیچیده‌تر از یک شعر هستند، احتمال پیدایش تصادفی آن‌ها از این هم کمتر است؛ بنابراین نمی‌توان پذیرفت که طبیعت به طور کاملاً تصادفی و بدون طرح و تدبیر پدید آمده باشد.

۳۶۹ صفحه ۱۵۰ تمرین

۱ هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچک‌تر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به‌تصادف برمی‌داریم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی را مشخص کنید.

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟

پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد»، مشخص کنید.

الف)

ب) هر زیرمجموعهٔ S یک پیشامد است. S پنج عضو دارد، پس تعداد زیرمجموعه‌ها (پیشامدها) است (شامل پیشامد غیرممکن ∅ و پیشامد قطعی S).

پ)

۳۷۰ صفحه ۱۵۰ تمرین

۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

الف) پیشامدهای A و C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.

ناحیهٔ رنگی در هر نمودار پاسخ مسئله است.

الف) $C) - B \cap$

ب) $(C \cup$

پ)

---

۳۷۱ صفحه ۱۵۰ تمرین

۳ هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آن‌ها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد».

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد».

پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد».

الف) و

ب) اعداد اول ۱ تا ۸ (۱ اول نیست):

پ)

---

۳۷۲ صفحه ۱۵۰ تمرین

۴ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

هر حالت را با ترتیب تولد می‌نویسیم (پ پسر، د دختر). تعداد حالت‌ها است:

S = {(پ، پ، پ) ، (پ، پ، د) ، (پ، د، پ) ، (د، پ، پ) ، (پ، د، د) ، (د، پ، د) ، (د، د، پ) ، (د، د، د)}

پیشامد «حداقل یک دختر» یعنی همهٔ حالت‌ها به‌جز (پ، پ، پ). این پیشامد ۷ عضو دارد:

A = {(پ، پ، د) ، (پ، د، پ) ، (د، پ، پ) ، (پ، د، د) ، (د، پ، د) ، (د، د، پ) ، (د، د، د)}

---

۳۷۳ صفحه ۱۵۰ تمرین

۵ سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکهٔ دیگر را می‌اندازیم:

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

الف) اگر سکهٔ اول پشت بیاید، یکی از ۶ حالت تاس رخ می‌دهد؛ اگر رو بیاید، دو سکهٔ دیگر ۴ حالت دارند. پس عضو داریم:

S = {(پ، ۱) ، (پ، ۲) ، (پ، ۳) ، (پ، ۴) ، (پ، ۵) ، (پ، ۶) ، (ر، ر، ر) ، (ر، ر، پ) ، (ر، پ، ر) ، (ر، پ، پ)}

ب) A = {(پ، ۲) ، (پ، ۴) ، (پ، ۶)}

پ) وقتی سکهٔ اول پشت است، هیچ سکهٔ دیگری انداخته نمی‌شود (تعداد رو برابر ۰ است). اگر سکهٔ اول رو باشد، باید حداقل یکی از دو سکهٔ بعدی هم رو باشد:

B = {(ر، ر، ر) ، (ر، ر، پ) ، (ر، پ، ر)}

۳۷۴ صفحه ۱۵۰ تمرین

۶ می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشتهٔ ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشتهٔ تجربی یک تیم دو نفرهٔ تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند؟

پ) ۱ نفر از رشتهٔ ریاضی و ۱ نفر از رشتهٔ تجربی باشد؟

تعداد کل حالت‌ها: .

الف)

ب) هر دو ریاضی (۳ حالت) یا هر دو تجربی ، حالت):

پ) (که مکمل پیشامد قسمت «ب» است).

۳۷۵ صفحه ۱۵۱ تمرین

۷ یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

«حداقل یکی از دو کارت» یعنی A ∪ B. طبق فرمول احتمال اجتماع:

پس احتمال مورد نظر ۰٫۸۱ یا ۸۱ درصد است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷۶ صفحه ۱۵۱ تمرین

۸ اگر ۷ نفر که دو نفر آن‌ها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:

الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟

ب) یکی از آن‌ها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

تعداد کل حالت‌ها است.

الف) ابتدا احتمال «کنار هم بودن» را حساب می‌کنیم: دو برادر را یک بسته می‌گیریم حالت برای ۶ شیء و حالت داخل بسته):

ب) برادرها دو سر ردیف را با ۲ حالت می‌گیرند و ۵ نفر دیگر در وسط حالت دارند:

۳۷۷ صفحه ۱۵۱ تمرین

۹ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \subseteq B$، ثابت کنید .

چون $A \subseteq B$ است، هر عضو A عضو B هم هست؛ پس . با تقسیم دو طرف بر :

راه دوم: B را به‌صورت اجتماع دو پیشامد ناسازگار A و $B - A$ می‌نویسیم: زیرا .

(جهت نمادها در متن استخراج‌شده ناخوانا بود؛ حکم به‌صورت استاندارد «اگر پیشامدی زیرمجموعهٔ پیشامد دیگر باشد، احتمال آن کمتر یا مساوی است» بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۷۸ صفحه ۱۵۳ کار در کلاس

۱ در پیرامون خود، مثال‌هایی را از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی بر اساس اعداد و ارقام بیاورید.

- پیش‌بینی وضع هوا بر اساس دما، رطوبت و بارش روزهای گذشته و تصمیم برای سفر یا همراه داشتن چتر؛
- پیش‌بینی نتیجهٔ انتخابات یا نظرسنجی‌ها بر اساس پرسش از تعدادی از مردم؛
- تصمیم یک مغازه‌دار برای سفارش جنس بیشتر بر اساس آمار فروش ماه‌های گذشته؛
- تصمیم معلم برای تکرار یک درس بر اساس نمرات دانش‌آموزان در آزمون؛
- تصمیم پزشک برای درمان بر اساس نتایج آزمایش خون بیمار و مقایسه با مقادیر طبیعی؛
- تعیین زمان‌بندی چراغ‌های راهنمایی بر اساس شمارش خودروهای عبوری.

۳۷۹ صفحه ۱۵۳ کار در کلاس

۲ مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید. (چهار کادر: جمع‌آوری اعداد و ارقام ← سازمان‌دهی و نمایش ← تحلیل و تفسیر داده ← ؟)

مراحل علم آمار به ترتیب عبارت‌اند از:

1. **جمع‌آوری اعداد و ارقام** (داده‌ها)
2. **سازمان‌دهی و نمایش** داده‌ها (جدول، نمودار و ...)
3. **تحلیل و تفسیر** داده‌ها
4. **نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی** (تصمیم‌گیری)

۳۸۰ صفحه ۱۵۳ کار در کلاس

۳ با درنظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

1. **جمع‌آوری اعداد و ارقام:** آمار مربوط به دمای هوا، میزان رطوبت و بارش باران در ایستگاه‌های هواشناسی طی ده روز گذشته.
2. **سازمان‌دهی و نمایش:** قرار دادن این داده‌ها در جدول و رسم نمودار دما، رطوبت و بارش.
3. **تحلیل و تفسیر:** بررسی روند داده‌ها با استفاده از روش‌های مدل‌بندی هواشناسی.
4. **نتیجه‌گیری و پیش‌بینی:** «دمای هوا طی سه روز آینده ۵ درجه گرم‌تر می‌شود و هوا صاف و آفتابی است»؛ و در نتیجه خانواده سه روز آینده را برای مسافرت انتخاب می‌کند.

۳۸۱ صفحه ۱۵۳ کار در کلاس

۴ تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟

آمار مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است (مانند جدول دمای هوا یا تعداد لامپ‌های معیوب). **علم آمار** مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازمان‌دهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب دربارهٔ پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

۳۸۲ صفحه ۱۵۳ کار در کلاس

۵ مدیر کارخانه‌ای برای پیدا کردن تعداد کل لامپ‌های معیوب در یک ماه آینده، می‌خواهد یک تحقیق آماری انجام دهد. برای این منظور تعداد لامپ‌های معیوب را در چند روز کاری به صورت زیر جمع‌آوری کرده است:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

روز اول ۵۰، روز دوم ۷۰، روز سوم ۹۰، روز چهارم ۱۲۰ و روز پنجم ۱۸۰. بر اساس داده‌های به دست آمده، به سؤال‌ها پاسخ دهید:

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان‌دهندهٔ چه چیزی است؟

ب) در این تمرین چه چیزی به‌عنوان آمار محسوب می‌شود؟

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه بر اساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟ (ادامهٔ خط تولید لامپ‌ها یا توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها)

الف) اعداد ۵۰، ۷۰، ۹۰، ۱۲۰ و ۱۸۰ روزبه‌روز بیشتر می‌شوند؛ یعنی تعداد لامپ‌های معیوب در حال افزایش است و نشان می‌دهد خط تولید دچار مشکل است و کیفیت تولید روزبه‌روز بدتر می‌شود.

ب) خود اعداد و ارقام جمع‌آوری‌شده، یعنی تعداد لامپ‌های معیوب در پنج روز کاری (۵۰، ۷۰، ۹۰، ۱۲۰، ۱۸۰) آمار محسوب می‌شود.

پ) چون روند خرابی صعودی است و در ماه آینده هم ادامه خواهد یافت، بهترین تصمیم **توقف یا اصلاح خط تولید** است تا علت خرابی برطرف شود، نه ادامهٔ بدون تغییر.

۳۸۳ صفحه ۱۵۴ **کار در کلاس**

۶ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع‌آوری داده‌هاست.

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجهٔ استفاده از «علم آمار» است.

پ) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است.

الف) درست. مرحلهٔ اول علم آمار جمع‌آوری اعداد و ارقام است.

ب) درست. مرحلهٔ آخر علم آمار نتیجه‌گیری، پیش‌بینی و تصمیم‌گیری است.

پ) نادرست. اعداد و ارقام را «آمار» می‌گویند؛ «علم آمار» مجموعهٔ روش‌های جمع‌آوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر آن‌هاست.

۳۸۴ صفحه ۱۵۴ کار در کلاس

۷ به شکل روبه‌رو توجه کنید: آیا این شکل را می‌توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد؟ اعداد و ارقام آن چگونه‌اند؟ برای پاسخ به این سؤال‌ها، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید.

بله. هر تصویر از تعداد زیادی مربع کوچک به نام «پیکسل» ساخته شده است و به هر پیکسل می‌توان عددی را نسبت داد که نشان‌دهندهٔ مقدار روشنایی (یا رنگ) آن است. بنابراین هر تصویر به یک جدول عددی تبدیل می‌شود که هر خانهٔ آن، عدد مربوط به یک پیکسل است (مثلاً ۰ برای سیاه و عددهای بزرگ‌تر برای رنگ‌های روشن‌تر). با داشتن این جدول عددی می‌توان با روش‌های آماری کیفیت تصویر را بررسی و تصاویر مخدوش را با تصاویر اصلی مقایسه کرد.

(شکل صورت سؤال در متن موجود نبود؛ پاسخ به‌صورت کلی نوشته شده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۸۵ صفحه ۱۵۴ کار در کلاس

۸ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می‌شود. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز را با عدد ۱ و رنگ مشکی را با عدد صفر نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.

روش کار: هر خانهٔ شکل را با توجه به رنگ آن به عدد مربوط (سبز ← ۳، زرد ← ۲، قرمز ← ۱، مشکی ← ۰) تبدیل می‌کنیم و برعکس، هر عدد جدول را با رنگ متناظر در شکل رنگ می‌کنیم. مثلاً خانه‌ای که عدد ۱ دارد قرمز، خانه‌ای با عدد ۳ سبز و خانه‌ای با عدد ۰ مشکی رنگ می‌شود.

(شکل و جدول نیمه‌کامل در متن موجود نبود، پس پاسخ فقط روش تکمیل را بیان می‌کند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۸۶ صفحه ۱۵۵ فعالیت

الف) چاقی امروزه، به عنوان یکی از مسائل مهم و اساسی در زمینهٔ سلامت افراد محسوب می‌شود. برای اطلاع بیشتر، کاربرد علم آمار در علوم پزشکی را مطالعه کنید.

برای سنجش میزان چاقی از «شاخص توده بدن» (BMI) استفاده می‌شود که از تقسیم وزن (W) بر حسب کیلوگرم بر مجذور قد (H) بر حسب متر به دست می‌آید:

شاخص توده بدن	طبقه‌بندی
کمتر از ۱۸٫۵	کم‌وزن
۱۸٫۵ تا ۲۴٫۹	وزن طبیعی
۲۵ تا ۲۹٫۹	اضافه وزن
۳۰ تا ۳۴٫۹	چاقی درجه یک
۳۵ تا ۳۹٫۹	چاقی درجه دو
بیشتر از ۴۰	چاقی درجه سه

علم آمار با مدل‌های آماری مناسب، عوامل مؤثر بر شاخص توده بدن مانند رژیم غذایی ناسالم و کم‌تحرکی را شناسایی می‌کند؛ بنابراین رژیم غذایی سالم، پرهیز از خوراکی‌های مضر و ورزش (مثل ورزش صبحگاهی و بوفهٔ سالم در مدارس) برای پیشگیری از چاقی لازم است.

۳۸۷ صفحه ۱۵۶ فعالیت

با هدف به دست آوردن آمار افراد چاق و درصد این افراد، فرض کنیم بخواهیم تعداد کل افراد چاق را که در این شهر زندگی می‌کنند، بشماریم یا به عبارت دیگر سرشماری کنیم. به نظر شما، این کار به سادگی انجام می‌شود؟

به کمک افراد انتخابی از شهر در شکل «ب» پیش‌بینی کنید که چند درصد افراد این شهر چاق‌اند.

خیر؛ شمردن همهٔ افراد شهر کار پرهزینه، وقت‌گیر و دشوار است و به‌سادگی انجام نمی‌شود.

برای پیش‌بینی، درصد افراد چاق را در نمونهٔ انتخاب‌شده حساب می‌کنیم و همان را برای کل شهر پیش‌بینی می‌کنیم:

(شکل «ب» در متن موجود نبود؛ با شمردن افراد چاق و کل افراد نمونه‌ی شکل می‌توان عدد را به‌دست آورد. مثلاً اگر از ۲۰ نفر نمونه ۴ نفر چاق باشند، پیش‌بینی می‌کنیم حدود ۲۰ درصد افراد شهر چاق‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۸۸ صفحه ۱۵۶ مثال (تکمیلی)

فرض کنید وزن شخصی ۱۰۰ کیلوگرم و قدش ۱ متر و ۷۴ سانتی‌متر باشد. شاخص توده بدن شخص به صورت زیر است: $۱۰۰ / (۱/۷۴)^۲ \approx ۳۳/۰۲$

۱ با مراجعه به جدول موجود در کاربرد علم آمار و احتمال در پزشکی، دربارهٔ چاق بودن این شخص به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

۲ دربارهٔ چاق بودن خودتان و اعضای خانوادهٔ خود اظهار نظر کنید.

۱) چون عدد حدود ۳۳ در بازهٔ ۳۰ تا ۳۴٫۹ است، این شخص در طبقهٔ **چاقی درجه یک** قرار دارد.

۲) (پاسخ نمونه) شاخص توده بدن خود را با فرمول W / H^2 حساب می‌کنیم. مثلاً اگر وزن ۵۵ کیلوگرم و قد ۱٫۶۵ متر باشد، شاخص برابر است که در محدودهٔ وزن طبیعی (۱۸٫۵ تا ۲۴٫۹) قرار دارد. هر دانش‌آموز باید با وزن و قد خود و اعضای خانواده‌اش محاسبه کند و طبقهٔ مربوط را از جدول بخواند.

۳۸۹ صفحه ۱۵۷ **کار در کلاس**

در نمودار روبه‌رو تعداد کل قطعات تولیدی دو کارخانهٔ «الف» و «ب» مشخص شده است. برای شناسایی تعداد قطعات معیوب، نمونه‌هایی از تعداد کل قطعات تولیدی انتخاب شده که در نمودار روبه‌رو ارائه شده است. با توجه به اعداد و ارقام موجود در نمودار، جدول صفحهٔ بعد را کامل کنید.

(جدول: جامعه / عضو جامعه / اندازهٔ جامعه / نمونه / اندازهٔ نمونه برای کارخانهٔ الف و کارخانهٔ ب)

	جامعه	عضو جامعه	اندازهٔ جامعه	نمونه	اندازهٔ نمونه
کارخانهٔ الف	همهٔ قطعات تولیدی کارخانهٔ الف	هر قطعهٔ تولیدی	۱۰۰۰	قطعات انتخابی از قطعات کارخانهٔ الف	تعداد قطعات انتخابی (مطابق نمودار)
کارخانهٔ ب	همهٔ قطعات تولیدی کارخانهٔ ب	هر قطعهٔ تولیدی	تعداد کل قطعات (مطابق نمودار)	قطعات انتخابی از قطعات کارخانهٔ ب	تعداد قطعات انتخابی (مطابق نمودار)

اندازهٔ جامعه برابر تعداد کل قطعات تولیدی و اندازهٔ نمونه برابر تعداد قطعات انتخاب‌شده است. (مقدارهای عددی نمودار در متن موجود نبود، فقط عدد ۱۰۰۰ برای کارخانهٔ الف خوانده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۹۰ صفحه ۱۵۸ تمرین

۱ می‌خواهیم دربارهٔ کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید: (جامعه، اندازهٔ جامعه، اندازهٔ نمونه، ویژگی مورد بررسی)

جامعه	اندازهٔ جامعه	اندازهٔ نمونه	ویژگی مورد بررسی
همهٔ قطعات تولیدشدهٔ کارخانه	۱۰۰۰۰	۱۰۰	کیفیت (سالم یا معیوب بودن) قطعات

۳۹۱ صفحه ۱۵۸ تمرین

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازهٔ جامعه کمتر از اندازهٔ نمونه است.

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند.

پ) نمونه زیرمجموعه‌ای از جامعه است.

الف) نادرست. نمونه بخشی از جامعه است، پس اندازهٔ جامعه بیشتر یا مساوی (نه کمتر از) اندازهٔ نمونه است.

ب) نادرست. اعضای نمونه فقط بخشی از اعضای جامعه‌اند، نه همهٔ آن‌ها.

پ) درست. نمونه بخشی از جامعه است که برای مطالعه انتخاب می‌شود.

۳۹۲ صفحه ۱۵۸ تمرین

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند. هر صف افقی نشان‌دهندهٔ تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونهٔ دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.

جامعه: همهٔ دانش‌آموزان حاضر در صف صبحگاهی (همهٔ دانش‌آموزان آن مدرسه).

اعضای جامعه: هر یک از دانش‌آموزان مدرسه.

دو نمونهٔ دلخواه: (۱) دانش‌آموزان یکی از صف‌ها (یک کلاس)، مثلاً کلاس اول؛ (۲) نفر اول (یا مثلاً سه نفر اول) از هر صف.

(شکل مدرسه در متن موجود نبود؛ پاسخ به‌صورت کلی و نمونه ارائه شده است.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۹۳ صفحه ۱۵۹ فعالیت

الف) برای اندازه‌گیری کیفیت میوهٔ هلو چه باید کرد؟ آیا به کمک ابزار اندازه‌گیری می‌توان به این سؤال پاسخ داد؟

ب) آیا ترازو، پاسخ این سؤال را هم می‌دهد؟

پ) کشاورز چگونه می‌تواند کیفیت میوهٔ هلوی تولیدی خود را بالا ببرد؟

الف) خیر؛ هیچ ابزاری برای اندازه‌گیری مستقیم کیفیت میوه وجود ندارد. در عمل با توجه به مرغوبیت و درشتی میوه، به آن عدد نسبت می‌دهند: عدد ۱ برای هلوی بسیار مرغوب و درشت (درجه یک)، ۲ برای متوسط (درجه دو) و ۳ برای ریز (درجه سه).

ب) خیر؛ ترازو فقط وزن را اندازه می‌گیرد و کیفیت را نشان نمی‌دهد.

پ) با کمک علم آمار و طراحی آزمایش: چند قطعهٔ زمین که از نظر رطوبت، حاصل‌خیزی خاک و نور یکسان‌اند را در نظر می‌گیرد، در هر قطعه درصد متفاوتی از کود (مثل نیترات آمونیوم یا فسفر) می‌دهد و کیفیت و کمیت محصول هر قطعه را مقایسه می‌کند. بدین ترتیب بهترین مقدار و نوع کود برای بیشترین تولید را مشخص می‌کند.

۳۹۴ صفحه ۱۶۰ کار در کلاس

۱ شکل «ب» یک خودرو را نشان می‌دهد، برخی از ویژگی‌های این خودرو مانند سرعت، میزان بنزین مصرفی و رنگ خودرو در شکل مشخص شده است. ... به نظر شما چه متغیرهای دیگری در این خودرو می‌توان معرفی نمود؟ در سطرهای خالی مقدار هر یک از متغیرهای معرفی شده جدید را بیان کنید.

متغیرهای یک خودرو	مقدار متغیر
حداکثر سرعت مجاز خودرو در جاده	۱۲۰ (کیلومتر بر ساعت)
میزان بنزین مصرفی برای هر ۱۰۰ کیلومتر	۸ لیتر
رنگ خودرو	سفید
تعداد سرنشینان مجاز (ظرفیت)	۵ نفر
تعداد درهای خودرو	۴
حجم موتور	۱۶۰۰ سی‌سی
وزن خودرو	۱۱۰۰ کیلوگرم
نوع سوخت	بنزین

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

(سه سطر اول در کتاب آمده و بقیه نمونه‌اند؛ هر ویژگی قابل مطالعهٔ دیگری نیز می‌تواند پاسخ باشد.)

۳۹۵ صفحه ۱۶۱ کار در کلاس

۲ جدول زیر متغیرهایی را که دربارهٔ یک دانش‌آموز مطالعه شده است، نشان می‌دهد. مقدار این متغیرها را دربارهٔ خودتان در جدول زیر بنویسید. (سن، نمرهٔ ریاضی نهم، گروه خونی (A، B، AB، O)، قد، وزن)

متغیرهای یک دانش‌آموز	مقدار متغیر (نمونه)
سن دانش‌آموز	۱۵ سال
نمرهٔ ریاضی نهم دانش‌آموز	۱۸٫۵
گروه خونی	A
قد دانش‌آموز	۱۶۵ سانتی‌متر
وزن دانش‌آموز	۵۵ کیلوگرم

این‌ها مقادیر نمونه‌اند؛ هر دانش‌آموز باید مقدار واقعی خودش را بنویسد.

۳۹۶ صفحه ۱۶۱ کار در کلاس

۳ با توجه به مطالب مربوط به کاربرد علم آمار در محیط زیست، متغیرها و مقدار متغیرهای مربوط به یوزپلنگ ایرانی را در جدول روبه‌رو بنویسید. (سطر اول: طول بدن ← ۱/۲ متر)

متغیر	مقدار متغیر
طول بدن	۱٫۲ متر
ارتفاع شانه	۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر (بین این دو مقدار)
وزن	۲۷ تا ۴۰ کیلوگرم
طول دم	۴۸ تا ۶۶ سانتی‌متر

اعداد از متن مطالعه (برای مطالعه) درباره یوزپلنگ گرفته شده‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۹۷ صفحه ۱۶۱ کار در کلاس

۴ در یک کارخانه، کارگران مشغول کارند. مهندس این کارخانه، این کارگران را بر اساس مهارت به صورت بسیار ماهر، ماهر، متوسط و ضعیف درجه‌بندی کرده است. متغیر و مقدار متغیر را برای کارگران بنویسید.

متغیر: میزان (سطح) مهارت کارگر.

مقدارهای متغیر: بسیار ماهر، ماهر، متوسط، ضعیف (می‌توان آن‌ها را با اعداد ۴، ۳، ۲، ۱ نشان داد).

۳۹۸ صفحه ۱۶۲ فعالیت

در یک شهر، با افراد مختلفی رو به رو می‌شویم و از آن‌ها سؤال‌هایی می‌کنیم. آن‌ها به صورت زیر، به سؤال‌های ما پاسخ داده‌اند. از یک آقا و خانم می‌پرسیم: «چقدر از آشپزی کردن لذت می‌برید؟»؛ از مادر یک خانواده می‌پرسیم: «چند فرزند دارید؟»؛ از همان خانم و آقا می‌پرسیم: «قد شما چند سانتی‌متر است؟»؛ و سؤال آخر: «گروه خونی خود را بگویید؟»

الف) با توجه به شکل‌های مورد نظر، پاسخ‌های افراد را در جدول زیر قرار دهید و آن را کامل کنید. (نام متغیر: تعداد فرزندان — ۲ ؛ قد افراد ؛ گروه خونی ؛ میزان لذت بردن از آشپزی)

ب) با توجه به متغیرهای بیان شده، کدام متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند و کدام نیستند؟ به‌جای علامت سؤال، نام متغیر مورد نظر را بنویسید.

نام متغیر	پاسخ
تعداد فرزندان	۲
قد افراد	۱۸۲٫۵ سانتی‌متر و ۱۷۰ سانتی‌متر
گروه خونی	مثلاً O و A (مطابق شکل)
میزان لذت بردن از آشپزی	مثلاً «زیاد» و «کم» (مطابق شکل)

ب)

متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری هستند	متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند
تعداد فرزندان، قد افراد	گروه خونی، میزان لذت بردن از آشپزی

(دو پاسخ مربوط به لذت بردن از آشپزی و گروه‌های خونی از روی شکل‌هایی که در متن موجود نبود، به‌صورت نمونه نوشته شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۹۹ صفحه ۱۶۳ کار در کلاس

۱ با توجه به شکل‌ها، جمله‌ها را کامل کنید:

در شکل «الف»، تعداد مسافران یک قطار، یک متغیر کمی است.

در شکل «ب»، اقوام ایرانی یک متغیر ..... است.

در شکل «پ»، قد فرد، یک متغیر ..... است.

در شکل «ت»، جنسیت افراد یک متغیر ..... است.

در شکل «ب»، اقوام ایرانی یک متغیر **کیفی** است (قابل اندازه‌گیری نیست).

در شکل «پ»، قد فرد یک متغیر **کمی** است (با عدد، مثلاً ۱۸۲٫۵ سانتی‌متر، بیان می‌شود).

در شکل «ت»، جنسیت افراد یک متغیر **کیفی** است (مقادیر آن زن و مرد است).

۴۰۰ صفحه ۱۶۳ کار در کلاس

۲ نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده) (کمی / کیفی)

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. (کمی / کیفی)

پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای) (کمی / کیفی)

الف) کیفی — قابل اندازه‌گیری نیست و با نام بیان می‌شود.

ب) کمی — با عدد (مثلاً ۱۵ دقیقه) اندازه‌گیری می‌شود.

پ) کیفی — رنگ چشم عددی نیست.

۴۰۱ صفحه ۱۶۳ کار در کلاس

۳ جدول زیر را کامل کنید. (سؤال/متغیر ← نوع متغیر): موی شما چه رنگی است؟ — وزن شما چه عددی است؟ — چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟

سؤال (متغیر)	نوع متغیر
موی شما چه رنگی است؟	کیفی
وزن شما چه عددی است؟	کمی
چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟	کیفی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۰۲ صفحه ۱۶۴ فعالیت

همان‌گونه که در فعالیت قبل مطرح شد، پاسخ دو سؤال زیر، متغیرهایی از نوع کمی‌اند. ۱ از مادر یک خانواده می‌پرسیم: چند فرزند دارید؟ برخی از جواب‌های ممکن: ۰، ۱، ۲، ۳ و ... ۲ قد شما چند سانتی‌متر است؟ برخی از جواب‌های ممکن: ۱۵۰ سانتی‌متر تا ۱۷۰ سانتی‌متر، ۱۵۹ سانتی‌متر، ۱۶۰/۵ سانتی‌متر و ...

۳ فرض کنید کمترین و بیشترین وزن در جامعهٔ دانش‌آموزان پایهٔ دهم کشور به ترتیب ۴۶ کیلوگرم و ۷۵ کیلوگرم باشد. در این صورت وزن تمام دانش‌آموزان کشور در بازهٔ [۴۶ ، ۷۵] قرار می‌گیرد. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند وزن یک دانش‌آموز باشد؟

۴ فرض کنید کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور به ترتیب ۰ و ۲۰ باشد. در این صورت تعداد فرزندان هر خانواده در این کشور عددی صحیح از بازهٔ [۰ ، ۲۰] خواهد بود. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند نشان‌دهندهٔ تعداد فرزندان یک خانواده باشد؟

۵ متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ کمی‌اند و یا کیفی؟

۶ چه تفاوتی در متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ وجود دارد که جواب‌های مربوط به آن‌ها متفاوت است؟

۷ با توجه به قسمت‌های ۳ و ۴ در شکل زیر به‌جای علامت سؤال، پاسخ مناسب قرار دهید. (متغیر کمی: «متغیری که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، آنگاه هر مقداری بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند» ؟ ، «متغیری که اگر دو مقدار a و b را اختیار کند، آنگاه مقداری بین آن‌ها وجود دارد که نمی‌تواند اختیار کند» ؟)

۳) بله؛ وزن دانش‌آموز می‌تواند هر عددی بین ۴۶ و ۷۵ باشد (مثلاً ۴۶٫۳ یا ۵۸٫۷۲ کیلوگرم).

۴) خیر؛ تعداد فرزندان فقط می‌تواند عدد صحیح (۰، ۱، ۲، ... ، ۲۰) باشد. مثلاً ۲٫۵ یا ۱۰٫۳ فرزند معنی ندارد.

۵) هر دو کمی‌اند (با عدد بیان می‌شوند و قابل اندازه‌گیری‌اند).

۶) وزن می‌تواند هر مقدار حقیقی در یک بازه را بگیرد (بین دو مقدار هر عددی ممکن است)، ولی تعداد فرزندان فقط مقدارهای صحیح را می‌گیرد و بین دو عدد صحیح متوالی مقدار ممکنی وجود ندارد؛ پس وزن «پیوسته» و تعداد فرزندان «گسسته» است.

۷) متغیر کمی به دو نوع تقسیم می‌شود: کادر اول (هر مقداری بین a و b را بتواند اختیار کند **پیوسته**؛ کادر دوم (مقداری بین a و b وجود دارد که نمی‌تواند اختیار کند **گسسته**.

۴۰۳ صفحه ۱۶۵ کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کمی زیر را مشخص کنید.

الف) سرعت خودرو یک متغیر پیوسته است. مقدار آن متغیر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

ب) میزان مصرف بنزین این خودرو، یک متغیر ..... و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر ..... است.

irantooshe.ir

پ) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر ..... است و این تعداد برابر با ..... است.

ب) میزان مصرف بنزین یک متغیر **پیوسته** است و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر **۸ لیتر** است.

پ) تعداد سرنشینان مجاز یک متغیر **گسسته** است (فقط عدد صحیح می‌شود) و این تعداد برابر با **۵ نفر** است.

(عدد ۸ از متن کار در کلاس صفحهٔ قبل است. عدد ۵ نفر به‌عنوان ظرفیت یک خودروی سواری نمونه نوشته شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۰۴ صفحه ۱۶۵ **کار در کلاس**

۲ انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

الف) تعداد ماهی‌های یک دریا (گسسته / پیوسته)

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. (گسسته / پیوسته)

پ) وزن افراد (گسسته / پیوسته)

ت) تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه (گسسته / پیوسته)

الف) گسسته — تعداد، عددی صحیح است.

ب) پیوسته — زمان می‌تواند هر مقدار حقیقی (مثلاً ۱۲٫۵ دقیقه) باشد.

پ) پیوسته — وزن می‌تواند هر مقدار حقیقی در یک بازه باشد.

ت) گسسته — تعداد دانش‌آموزان عددی صحیح است.

۴۰۵ صفحه ۱۶۶ **کار در کلاس**

۳ در هر مورد نوع متغیر مطرح شده در سؤال را مشخص کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

قد شما چه عددی است؟ — وزن شما چه عددی است؟ — تعداد دوستان شما چند نفر است؟ — وزن دوستتان چه عددی است؟ — شاخص توده بدن خانوادهٔ شما چه عددی است؟ — ارتفاع شانهٔ یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟

سؤال (متغیر)	نوع متغیر
قد شما چه عددی است؟	کمی پیوسته
وزن شما چه عددی است؟	کمی پیوسته
تعداد دوستان شما چند نفر است؟	کمی گسسته
وزن دوستتان چه عددی است؟	کمی پیوسته
شاخص توده بدن خانوادهٔ شما چه عددی است؟	کمی پیوسته
ارتفاع شانهٔ یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟	کمی پیوسته

۴۰۶ صفحه ۱۶۶ فعالیت

به سؤال‌های زیر توجه کنید: سؤال: از یک آقا و خانم می‌پرسیم: چقدر از آشپزی کردن لذت می‌بری؟ برخی از جواب‌های ممکن: خیلی زیاد، زیاد، متوسط، کم، خیلی کم. سؤال: گروه خونی خود را بگویید. برخی از جواب‌های ممکن: گروه خونی A، B، AB، O. در پاسخ به سؤال اول، یک ترتیب طبیعی وجود دارد؛ همانند شکل «الف» در صورتی که در پاسخ به سؤال دوم نمی‌توان ترتیب طبیعی قائل شد، شکل «ب» را ملاحظه کنید.

در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب را قرار دهید. (متغیر کیفی ← دارای ترتیب طبیعی: ؟ ، بدون ترتیب: ؟)

متغیر کیفی به دو دسته تقسیم می‌شود:

- متغیر کیفی **دارای ترتیب طبیعی** ← **ترتیبی** (مثل میزان لذت بردن از آشپزی: خیلی زیاد، زیاد، متوسط، کم، خیلی کم)
- متغیر کیفی **بدون ترتیب** ← **اسمی** (مثل گروه خونی A، B، AB، O)

۴۰۷ صفحه ۱۶۷ کار در کلاس

با توجه به شکل‌های زیر جمله‌های زیر را کامل کنید:

در شکل «الف»، جنسیت افراد، یک متغیر اسمی است و مقادیر آن زن و مرد است.

در شکل «ب»، مقام‌هایی که یک ورزشکار در مسابقه به‌دست می‌آورد، یک متغیر ..... است و مقادیر آن ..... است.

در شکل «پ»، میزان علاقهٔ شما به خورش قیمه سؤال شده است که یک متغیر ..... است و مقادیر آن ..... است.

شکل «ب»: مقام‌هایی که ورزشکار به دست می‌آورد یک متغیر **ترتیبی** است و مقادیر آن **مقام اول، مقام دوم و مقام سوم** است (دارای ترتیب طبیعی است).

شکل «پ»: میزان علاقه به خورش قیمه یک متغیر **ترتیبی** است و مقادیر آن **بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم** است.

۴۰۸ صفحه ۱۶۸ تمرین

۱ با پر کردن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان‌سال، کهنسال)

ب) نژاد افراد (سفیدپوست، زردپوست، سیاه‌پوست)

پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی)

ت) کیفیت میوهٔ هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳)

الف) ترتیبی — مراحل رشد ترتیب طبیعی دارند.

ب) اسمی — بین نژادها ترتیب طبیعی وجود ندارد.

پ) اسمی — رنگ‌ها ترتیب طبیعی ندارند.

ت) ترتیبی — درجه ۱ بهتر از درجه ۲ و آن بهتر از درجه ۳ است.

۴۰۹ صفحه ۱۶۸ تمرین

۲ نوع متغیرها را در نمودار زیر دسته‌بندی کنید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱ــ میزان بارندگی بر حسب سانتی‌متر در یک شهر، ۲ــ نوع بارندگی (باران، برف)، ۳ــ تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند، ۴ــ میزان دمای هوا، ۵ــ شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)، ۶ــ انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)، ۷ــ شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)

شمارهٔ متغیر	متغیر	نوع متغیر
۱	میزان بارندگی بر حسب سانتی‌متر	کمی پیوسته
۲	نوع بارندگی (باران، برف)	کیفی اسمی
۳	تعداد شهرهایی که هوای آفتابی دارند	کمی گسسته
۴	میزان دمای هوا	کمی پیوسته
۵	شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)	کیفی ترتیبی
۶	انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	کیفی اسمی
۷	شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)	کیفی ترتیبی

۴۱۰ صفحه ۱۶۹ **تمرین**

۳ جدول زیر متغیرهای دانش‌آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید. (متغیرها: سن، نمرهٔ ریاضی نهم، جنسیت (دختر و پسر)، قد، وزن، میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)، میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)، شاخص توده بدن)

متغیر	کمی	کیفی	گسسته	پیوسته	ترتیبی	اسمی
سن						
نمرهٔ ریاضی نهم						
جنسیت (دختر و پسر)						
قد						
وزن						
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)						
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)						
شاخص توده بدن						

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

نکته: «سن» اگر بر حسب سال کامل بیان شود گسسته است؛ نمرهٔ ریاضی که می‌تواند اعشاری باشد (مثل ۱۷٫۲۵) پیوسته در نظر گرفته شد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۱۱ صفحه ۱۶۹ تمرین

۴ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱۶۰ سانتی‌متر باشد.

الف) شاخص توده بدن این شخص را حساب کنید.

ب) شاخص توده بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟

الف) قد را بر حسب متر می‌نویسیم: ۱۶۰ سانتی‌متر ۱٫۶ متر.

این مقدار بین ۳۵ و ۳۹٫۹ است، یعنی چاقی درجه دو.

ب) شاخص توده بدن یک عدد است و قابل اندازه‌گیری (محاسبه) است، پس متغیر **کمی** است؛ می‌تواند هر مقدار حقیقی در یک بازه را بگیرد، پس **پیوسته** است. (کیفی، گسسته، اسمی و ترتیبی نیست.)

۴۱۲ صفحه ۱۶۹ تمرین

۵ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با عدد ۱ نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟ (جدول: ردیف بالا: ۳ ۳ ؟ ، ردیف وسط: ۲ ؟ ۲ ، ردیف پایین: ۱ ۱ ؟)

در ردیف بالا همهٔ خانه‌ها سبز (۳)، در ردیف وسط همه سفید (۲) و در ردیف پایین همه قرمز (۱) هستند. پس جدول کامل شده:

۳	۳	۳
۲	۲	۲
۱	۱	۱

این شکل **پرچم ایران** است (سبز، سفید، قرمز).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۱۳ صفحه ۱۶۹ تمرین

۶ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک مثال بزنید.

جامعه: مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد؛ هر یک از آن‌ها عضو جامعه است. مثال: همهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه.

نمونه: بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می‌شود؛ هر یک از افراد یا اشیای انتخاب‌شده عضو نمونه است. مثال: دانش‌آموزان یک کلاس از آن مدرسه (یا ۳۰ دانش‌آموز انتخاب‌شده به تصادف).

۴۱۴ صفحه ۱۶۹ تمرین

۷ شکل زیر یک جامعهٔ فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده‌ایم.
همچنین اعضای نمونه با خط سبز رنگ انتخاب شده‌اند. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:
الف) اندازهٔ جامعه چه عددی است؟
ب) اندازهٔ نمونهٔ انتخابی چه عددی است؟
پ) اعضای نمونهٔ انتخابی را بنویسید.

الف) اعضای جامعه شماره‌های ۱ تا ۲۰ هستند، پس اندازهٔ جامعه برابر **۲۰** است.

ب) اندازهٔ نمونه برابر تعداد اعضایی است که با خط سبز مشخص شده‌اند.

پ) اعضای نمونه همان شماره‌هایی هستند که با خط سبز دور آن‌ها کشیده شده است.

(شکل در متن موجود نبود؛ پس فقط قسمت «الف» به‌طور قطعی پاسخ داده شد و برای «ب» و «پ» روش پاسخ بیان شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۱۵ صفحه ۱۷۰ تمرین

۸ جدول زیر را کامل کنید. (وزن یک هلو، کیفیت یک هلو، اندازهٔ طول بدن یوزپلنگ ایرانی، اقوام ایرانی، وضعیت آب و هوا، دمای هوا در قلهٔ کوه شیراز ، شهرستان سامان ــ استان چهارمحال و بختیاری، فشار هوا در قلهٔ کوه)

متغیر	نوع متغیر
وزن یک هلو	کمی پیوسته
کیفیت یک هلو (درجه ۱، ۲، ۳)	کیفی ترتیبی
اندازهٔ طول بدن یوزپلنگ ایرانی	کمی پیوسته
اقوام ایرانی	کیفی اسمی
وضعیت آب و هوا (آفتابی، ابری، ...)	کیفی اسمی
دمای هوا در قلهٔ کوه	کمی پیوسته
فشار هوا در قلهٔ کوه	کمی پیوسته

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir