با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام حسابان (۲) دوازدهم

پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی و تمرین‌های کتاب

پایه‌ی دوازدهم · ریاضی و فیزیک

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های پنج فصل کتاب

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۱ فصل اول — تابع ۴

۲ فصل دوم — مثلثات ۲۰

۳ فصل سوم — حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت ۳۲

۴ فصل چهارم — مشتق ۴۸

۵ فصل پنجم — کاربردهای مشتق ۷۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام حسابان ۲ - فصل اول

تابع

فهرست

۱	صفحه ۴ · کار در کلاس — انتقال تابع ریشه‌ی دوم	۷
۲	صفحه ۵ · کار در کلاس — رسم نمودار با انتقال	۷
۳	صفحه ۶ · فعالیت — انبساط و انقباض عمودی	۷
۴	صفحه ۷ · کار در کلاس — دامنه و برد k·f(x)	۸
۵	صفحه ۷ · کار در کلاس — رسم با انبساط، انقباض و قرینه	۸
۶	صفحه ۸ · کار در کلاس — رسم مرحله‌به‌مرحله f(x−1)+2	۹
۷	صفحه ۸ · فعالیت — انبساط و انقباض افقی	۹
۸	صفحه ۱۰ · کار در کلاس — دامنه و برد f(kx)	۹
۹	صفحه ۱۰ · کار در کلاس — رسم f(3x) و f(−x/2)	۱۰
۱۰	صفحه ۱۰ · کار در کلاس — رسم نمودارهای کسینوسی	۱۰
۱۱	صفحه ۱۰ · کار در کلاس — پرسش‌های مثال f(2x+1)	۱۰
۱۲	صفحه ۱۱ · تمرین — تمرین ۱ تبدیل نمودار ریشه‌ی دوم	۱۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۱۲ · تمرین — تمرین ۲ تبدیل‌های f ۱۱

۱۴ صفحه ۱۲ · تمرین — تمرین ۳ قرینه‌ها ۱۱

۱۵ صفحه ۱۲ · تمرین — تمرین ۴ ضابطه از نمودار ۱۲

۱۶ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — درجه‌ی چندجمله‌ای‌ها ۱۲

۱۷ صفحه ۱۴ · فعالیت — تابع x^3 و وارون آن ۱۲

۱۸ صفحه ۱۴ · کار در کلاس — رسم نمودار توابع درجه‌ی سوم ۱۳

۱۹ صفحه ۱۴ · کار در کلاس — مقایسه‌ی x^2 و x^3 ۱۳

۲۰ صفحه ۱۵ · فعالیت — شاخص کیفیت هوا ۱۳

۲۱ صفحه ۱۷ · کار در کلاس — اکیداً صعودی و نزولی ۱۴

۲۲ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — تابع دوضابطه‌ای ۱۴

۲۳ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — صعودی و اکیداً صعودی ۱۴

۲۴ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — نامساوی با تابع یکنوا ۱۵

۲۵ صفحه ۱۸ · فعالیت — تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۱۵

۲۶ صفحه ۱۹ · فعالیت — باقیمانده‌ی تقسیم بر $ax+b$ ۱۵

۲۷ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — قضیه‌ی باقیمانده ۱۶

۲۸ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — بخش‌پذیری x^4-16 بر $x+2$ ۱۶

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۲۰ · فعالیت — اتحاد x^n − a^n ۱۶

۳۰ صفحه ۲۰ · کار در کلاس — اتحاد برای x^n + a^n و تجزیه ۱۷

۳۱ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۱ تابع $(x-2)^3+1$ ۱۷

۳۲ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۲ یکنوایی از روی نمودار ۱۷

۳۳ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۳ نمودار و یکنوایی ۱۸

۳۴ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۴ صعودی و نزولی هم‌زمان ۱۸

۳۵ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۵ جمع و تفاضل توابع ۱۸

۳۶ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۶ باقیمانده ۱۸

۳۷ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۷ بخش‌پذیری ۱۹

۳۸ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۸ تجزیه ۱۹

۳۹ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۹ نامساوی با تابع نزولی ۱۹

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱ صفحه ۴ کار در کلاس

الف) نمودار تابع را با دامنه‌ی [۰,۴] رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

ب) نمودار توابع و را به کمک انتقال رسم کنید.

پ) دامنه و برد توابع g و k را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

الف) برای x در [۰,۴] داریم ، پس برد f برابر [۰,۲] است.

ب) نمودار g از انتقال نمودار f به اندازه‌ی ۳ واحد به سمت بالا و نمودار k از انتقال آن به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت راست به دست می‌آید.

پ) دامنه‌ی g همان [۰,۴] است و برد آن [۳,۵] می‌شود، یعنی برد ۳ واحد بالا می‌رود و دامنه تغییری نمی‌کند.

دامنه‌ی k برابر [۲,۶] است (دامنه ۲ واحد به راست می‌رود) و برد آن همان [۰,۲] است.

۲ صفحه ۵ کار در کلاس

در زیر نمودار توابع ، و رسم شده‌اند. نمودار توابع ، و را به کمک انتقال رسم کنید.

الف) نمودار را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا می‌بریم؛ مجانب افقی از به می‌رود.

ب) نمودار را ۲ واحد به چپ می‌بریم؛ مجانب قائم از به می‌رود.

پ) نمودار را واحد به چپ می‌بریم (حاصل همان است).

الف ب پ

در هر نمودار، منحنی خط‌چین نمودار تابع اصلی است.

۳ صفحه ۶ فعالیت

۱) در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع و را مشخص کرده و نمودار آنها را در بازه‌ی [۰,۲π] رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

۲) با مقایسه‌ی نمودارهای بالا، نمودارهای توابع و چه تفاوتی با نمودار تابع دارند؟

۳) دامنه و برد توابع و چه تفاوتی با دامنه و برد تابع دارند؟

x	۰		π		۲π
	۰	۱	۰	۱-	۰
	۰	۳	۰	۳-	۰
	۰		۰		۰

۲) در عرض هر نقطه ۳ برابر شده است (انبساط عمودی با ضریب ۳) و در عرض هر نقطه نصف شده است (انقباض عمودی). نقاط برخورد با محور xها تغییر نمی‌کنند.

۳) دامنه‌ی هر سه تابع یکسان (R) است. برد بازه‌ی [-۱,۱] است، اما برد بازه‌ی [-۳,۳] و برد بازه‌ی است.

۴ صفحه ۷ کار در کلاس

۱) اگر دامنه و برد تابع به ترتیب بازه‌های [a,b] و [c,d] باشند، دامنه و برد تابع را برای k>۰ و k<۰ تعیین کنید.

دامنه تغییری نمی‌کند و برابر [a,b] است. برای برد: اگر ، آنگاه

- اگر k>۰: ؛ پس برد برابر [kc,kd] است.
- اگر k<۰: نامساوی‌ها برعکس می‌شوند، ؛ پس برد برابر [kd,kc] است.

۵ صفحه ۷ کار در کلاس

۲) نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع رسم کنید.

الف) ب)

پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع به دست آمده است. ضابطه‌ی این تابع را مشخص کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم. ب) عرض نقاط را ۲ برابر می‌کنیم (انبساط عمودی) و سپس ۱ واحد به پایین می‌بریم.

الف ب

پ) شکل کتاب در دسترس نبود. با فرض این‌که نمودار یک «V» وارونه با رأس (-۱,۱) باشد، ابتدا را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم ()، سپس ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا می‌بریم:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶ صفحه ۸ کار در کلاس

۳) نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. با انجام مراحل زیر نمودار تابع را رسم کنید.

ابتدا ، سپس ، سپس و در پایان را رسم می‌کنیم.

شکل f در دسترس نبود؛ فرض می‌کنیم f خط شکسته‌ای از نقاط (۲,۱-)، (۱-,۱-)، (۰,۱) و (۲,۲) باشد. روش کار مستقل از شکل است:

1. ۱ واحد انتقال به راست: (نقطه‌ی (x,y) به (x+۱,y) می‌رود).
2. قرینه نسبت به محور x: (نقطه‌ی (x,y) به (x,-y) می‌رود).
3. ۲ واحد انتقال به بالا: (نقطه‌ی (x,y) به (x,y+۲) می‌رود).

~~در مجموع هر نقطه‌ی (x,y) از f به نقطه‌ی (x+۱, ۲-y) می‌رود.~~

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷ صفحه ۸ فعالیت

۱) با تکمیل جدول زیر نقاطی از نمودار تابع مشخص می‌شود. با کمک این جدول نمودار این تابع را در فاصله‌ی [π,۰] رسم کنید.

۲) با مقایسه‌ی نمودارهای توابع و ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

x	۰				π
	۰	۱	۰	۱-	۰

۲) نمودار از انقباض افقی نمودار با ضریب به دست می‌آید: طول نقاط نصف می‌شود، دوره‌ی تناوب از ۲π به π می‌رسد و در بازه‌ی [π,۰] یک دوره‌ی کامل رسم می‌شود. برد تغییر نمی‌کند.

۸ صفحه ۱۰ کار در کلاس

۱) اگر دامنه و برد تابع به ترتیب بازه‌های [a,b] و [c,d] باشند، دامنه و برد تابع را برای k>۰ و k<۰ تعیین کنید.

برد تغییر نمی‌کند و برابر [c,d] است. دامنه: باید باشد.

- اگر k>۰: ؛ دامنه است.
- اگر k<۰: با تقسیم بر عدد منفی نامساوی برعکس می‌شود: ؛ دامنه است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹ صفحه ۱۰ کار در کلاس

۲) اگر نمودار تابع به صورت مقابل باشد، نمودار توابع و را رسم کنید.

شکل f در دسترس نبود؛ f را خط شکسته‌ای از نقاط (۶,۰-)، (۴,۲-)، (۲-,۲-)، (۰,۰)، (۳,۲)، (۶,۰) فرض می‌کنیم.

- : انقباض افقی با ضریب (طول هر نقطه بر ۳ تقسیم می‌شود).
- : ابتدا انبساط افقی با ضریب ۲ (طول‌ها ۲ برابر) و سپس قرینه نسبت به محور y (طول‌ها در ۲- ضرب می‌شوند).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰ صفحه ۱۰ کار در کلاس

۳) نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع رسم کنید.

الف) ب)

الف) ابتدا انقباض افقی با ضریب (دوره‌ی تناوب π) و سپس ۱ واحد انتقال به پایین.

ب) انبساط افقی با ضریب (دوره‌ی تناوب ۳π).

الف ب

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱ صفحه ۱۰ کار در کلاس

با توجه به این‌که ، آیا می‌توانید روش دیگری برای رسم نمودار تابع پیشنهاد کنید؟

آیا می‌توان برای رسم نمودار تابع g، ابتدا نمودار تابع را رسم کرد و سپس آن را یک واحد به چپ منتقل کرد تا رسم شود؟ چرا؟

روش دیگر: چون ، ابتدا نمودار (انقباض افقی با ضریب) را رسم می‌کنیم و سپس آن را واحد به چپ می‌بریم.

خیر. اگر را یک واحد به چپ ببریم، تابع به دست می‌آید که با برابر نیست؛ انتقال باید واحد باشد.

۱۲ صفحه ۱۱ تمرین

۱) هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته‌ی تابع هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

الف) ب) پ) ت) ث) ج)

نمودارها در دسترس نبودند؛ هر تابع با نقطه‌ی شروع و جهت منحنی‌اش مشخص می‌شود:

تابع	نقطه‌ی شروع	ویژگی نمودار	نمودار
	(۰,۲)	۲ واحد بالاتر از	(د)
	(۲,۰-)	۲ واحد به چپ	(ج)
	(۲-,۰)	۲ واحد پایین‌تر	(الف)
	(۰,۰)	تندتر از (انبساط عمودی)	(و)
	(۰,۲)	رو به پایین	(ب)
	(۲,۰)	۲ واحد به راست	(ه)

نظیر شدن نمودارها با شکل کتاب از روی ویژگی‌ها حدس زده شده است؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳ صفحه ۱۲ تمرین

۲) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) ب) پ) ت) ث)

شکل f در دسترس نبود؛ f را خط شکسته‌ای از (۲,۰-)، (۰,۲)، (۲,۰) و (۲-,۳) فرض می‌کنیم. قاعده‌ی هر تبدیل برای نقطه‌ی (x,y) از f:

- الف) (قرینه نسبت به محور y)
- ب) (انتقال ۱ واحد به راست و انبساط عمودی ۲ برابر)
- پ) (قرینه نسبت به محور x و ۲ واحد بالا)
- ت) :
- ث) : (قرینه نسبت به محور y و ۳ واحد به راست)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴ صفحه ۱۲ تمرین

۳) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) ب) پ)

شکل f در دسترس نبود؛ f را خط شکسته‌ای از (۳,۱-)، (۱,۳-)، (۱,۱) و (۳,۲) فرض می‌کنیم.

- الف) قرینه‌ی نمودار f نسبت به محور y.
- ب) قرینه‌ی نمودار f نسبت به محور x.
- پ) قرینه‌ی نمودار f نسبت به مبدأ مختصات (ابتدا نسبت به محور x و سپس نسبت به محور y).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵ صفحه ۱۲ تمرین

۴) نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع به دست آمده است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید.

شکل در دسترس نبود. با فرض این‌که نمودار نیم‌منحنی‌ای رو به چپ با نقطه‌ی شروع (۱,۱-) باشد: ابتدا را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم ()، سپس ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا می‌بریم:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶ صفحه ۱۳ کار در کلاس

در زیر چند تابع چندجمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه‌ی هر کدام را مشخص کنید.

‘‘‘‘‘

تابع	درجه	نوع
	۱	تابع درجه یک
	۲	تابع درجه دو
	۳	تابع درجه سه
	۰	تابع درجه صفر (ثابت)
	۴	درجه چهار
	۵	جمله‌ی بزرگ‌تر

۱۷ صفحه ۱۴ فعالیت

۱) با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع را رسم کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲) به کمک نمودار رسم شده برای ، نشان دهید که این تابع وارون‌پذیر است.

۳) نمودار تابع را رسم کنید و ضابطه‌ی را تعیین کنید.

x	-۲	-۱		۰		۱	۲
	-۸	-۱		۰		۱	۸

۲) هر خط افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند (تابع یک‌به‌یک است)؛ در واقع اکیداً صعودی است. پس وارون‌پذیر است.

۳) نمودار قرینه‌ی نمودار f نسبت به خط است. از نتیجه می‌شود ، پس:

۱۸ صفحه ۱۴ کار در کلاس

۱) نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع رسم کنید.

الف) ب) پ)

الف) انتقال نمودار به اندازه‌ی ۱ واحد به چپ. ب) قرینه نسبت به محور x و سپس ۱ واحد انتقال به بالا. پ) چون ، نمودار را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا می‌بریم (مرکز تقارن (۱,۱)).

الف ب پ

منحنی خط‌چین، نمودار است.

۱۹ صفحه ۱۴ کار در کلاس

۲) نمودار هر یک از توابع و در فاصله‌ی [۰,۲] رسم شده است. در فاصله‌ی (۰,۱) نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله‌ی [۱,۲] چطور؟

در فاصله‌ی (۰,۱): (مثلاً)، پس نمودار پایین‌تر و نمودار بالاتر است. در [۱,۲]: ، پس نمودار بالاتر است (در x=۱ و x=۰ برابرند).

۲۰ صفحه ۱۵ فعالیت

براساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک است. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.

الف) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی رو به افزایش بوده است؟

ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی رو به کاهش بوده است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پ) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟

نمودار در دسترس نبود؛ پاسخ بر پایه‌ی شکل تقریبی فرض‌شده است:

- الف) رو به افزایش (نمودار رو به بالا): از روز ۱۸ تا ۲۰ و از روز ۲۴ تا ۲۷ دی.
- ب) رو به کاهش (نمودار رو به پایین): از روز ۱۶ تا ۱۸، از روز ۲۰ تا ۲۲ و از روز ۲۷ تا ۳۰ دی.
- پ) ثابت (نمودار افقی): از روز ۲۲ تا ۲۴ دی.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱ صفحه ۱۷ کار در کلاس

۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

‘‘

الف) در چه بازه‌هایی این توابع اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

ب) کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است؟

h g f

الف) f: سهمی با رأس (−۱,−۱)؛ اکیداً نزولی در و اکیداً صعودی در .

g: اکیداً نزولی در R. h: اکیداً نزولی در و اکیداً صعودی در .

ب) فقط g در تمام دامنه‌اش اکیداً یکنواست (اکیداً نزولی)؛ f و h هر دو در رأس تغییر جهت می‌دهند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۲) نمودار تابع ، را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

ضابطه‌ی تابع (فرض‌شده): برای برابر و برای برابر است؛ در x=۱ هر دو ضابطه مقدار ۱ می‌دهند.
تابع در (اکیداً) نزولی و در (اکیداً) صعودی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۳) الف) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب) اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

الف) بله. اگر a<b آنگاه و در نتیجه ؛ پس شرط صعودی بودن برقرار است.

ب) خیر. مثلاً تابع ثابت صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست؛ یا تابعی که روی [۰,۱] ثابت و بیرون آن اکیداً صعودی است.

۲۴ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۴) الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر ، نشان دهید که .

ب) اگر ، حدود x را به دست آورید.

الف) برهان خلف: فرض کنید a>b. چون f اکیداً صعودی است، که با فرض تناقض دارد. پس .

ب) تابع لگاریتم (با پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱) اکیداً صعودی است. شرط تعریف: (و خودبه‌خود برقرار است). طبق (الف):

پس ، یعنی .

۲۵ صفحه ۱۸ فعالیت

چندجمله‌ای‌های و را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر و به ترتیب خارج‌قسمت و باقیمانده‌ی تقسیم بر باشند، نشان دهید که و .

ب) درستی تساوی را بررسی کنید.

الف) تقسیم: جمله‌ی اول خارج‌قسمت ؛ و باقیمانده‌ی جزئی . سپس ؛ و باقیمانده . چون درجه‌ی از درجه‌ی p کمتر است، تقسیم پایان می‌یابد: ، .

ب) ✓

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۱۹ فعالیت

در تقسیم بر ، و به ترتیب خارج‌قسمت و باقیمانده‌اند.

الف) نشان دهید که از درجه‌ی صفر است.

ب) با توجه به قضیه‌ی تقسیم می‌توان نوشت . اکنون ریشه‌ی چندجمله‌ای را به دست آورید و با قرار دادن در رابطه‌ی بالا نشان دهید که . به طور کلی می‌توان گفت: .

الف) درجه‌ی باقیمانده باید از درجه‌ی مقسوم‌علیه (۱) کمتر باشد، پس یا صفر است یا ثابت غیرصفر؛ یعنی از درجه‌ی صفر (عدد ثابت r) است.

ب) ریشه‌ی برابر است. با قرار دادن در : . در این مثال . در حالت کلی ریشه‌ی برابر است و همین استدلال را می‌دهد.

۲۷ صفحه ۱۹ **کار در کلاس**

۱) باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای را بر به دست آورید.

۲) اگر چندجمله‌ای بر بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

۱) ریشه‌ی برابر است: .

۲) باید باقیمانده صفر باشد: .

۲۸ صفحه ۱۹ **کار در کلاس**

اگر و ، نشان دهید که f بر p بخش‌پذیر است.

ریشه‌ی p برابر ۲- است و . پس باقیمانده صفر است و f بر p بخش‌پذیر است.

۲۹ صفحه ۲۰ **فعالیت**

با اتحادهای و آشنا هستید.

۱) با تقسیم بر نشان دهید که .

۲) آیا بر بخش‌پذیر است؟

۳) از تقسیم بر نشان دهید که .

۴) چندجمله‌ای‌های و را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

۱) . (تقسیم بر همین خارج‌قسمت و باقیمانده‌ی ۰ را می‌دهد.)

۲) بله؛ باقیمانده برابر است.

۳) در تقسیم، خارج‌قسمت جمله به جمله به دست می‌آید و باقیمانده صفر است؛ در ضرب در مجموع، جمله‌های میانی دو به دو حذف می‌شوند (تلسکوپی) و می‌ماند.

۴)

؛ و بیشتر: .

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۰ صفحه ۲۰ | کار در کلاس

۱) در اتحاد بالا، اگر n فرد باشد، با تغییر a به a- اتحاد را نتیجه بگیرید. به کمک این اتحاد، چندجمله‌ای را تجزیه کنید.

۲) در فعالیت بالا، اگر n زوج باشد، با تغییر a به a- اتحاد را نتیجه بگیرید. به کمک این اتحاد، چندجمله‌ای را طوری تجزیه کنید که یک عامل آن باشد.

۱) برای n فرد و . پس و عامل‌ها و می‌شوند (جمله‌ها با علامت یک‌درمیان و آخرین جمله).

۲) برای n زوج و جایگذاری در اتحاد قبلی، علامت جمله‌ی آخر می‌شود؛ بنابراین اتحاد گفته‌شده به دست می‌آید.

۳۱ صفحه ۲۱ | تمرین

۱) تابع را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون‌پذیر است و نمودار را رسم کنید.

پ) ضابطه‌ی را به دست آورید.

الف) نمودار را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا می‌بریم (مرکز تقارن (۲,۱)).

ب) اگر آنگاه و ریشه‌ی سوم یکتاست، پس ؛ f یک‌به‌یک (اکیداً صعودی) و وارون‌پذیر است. نمودار قرینه‌ی نمودار f نسبت به خط است.

پ) .

۳۲ صفحه ۲۱ | تمرین

۲) نمودار توابع f، g و h در زیر رسم شده‌اند.

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

نمودارها در دسترس نبودند؛ با توجه به اعداد روی محورها (۲- و ۲ برای f، ۳- و ۲ برای g) فرض می‌کنیم هر یک در میانه ثابت است:

- الف) f روی و اکیداً صعودی است و روی کل R صعودی است (روی [۲,۲-] ثابت).
- ب) g روی و اکیداً نزولی است و روی کل R نزولی است (روی [۳,۲-] ثابت).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

○ پ) h (با فرض تغییر جهت در مبدأ) روی اکیداً نزولی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۳ صفحه ۲۱ تمرین

۳) نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنواست؟

الف) ب) پ)

h g f

f روی اکیداً نزولی و روی اکیداً صعودی است، پس در کل دامنه اکیداً یکنوا نیست. g در R اکیداً نزولی و h در اکیداً صعودی است؛ پس g و h در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا هستند.

ضابطه‌ی f به‌دلیل خرابی متن حدس زده شده است.

۳۴ صفحه ۲۲ تمرین

۴) الف) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد؟

ب) نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های و اکیداً صعودی باشد ولی در R اکیداً صعودی نباشد.

الف) بله؛ تابع ثابت، مثل ، هم صعودی و هم نزولی است (و).

ب) تابع ، : روی هر بازه اکیداً صعودی است ولی با وجود ، پس در R اکیداً صعودی نیست.

۳۵ صفحه ۲۲ تمرین

۵) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع چه می‌توان گفت؟

اگر a<b آنگاه و ؛ با جمع: ، یعنی .

درباره‌ی نمی‌توان نتیجه‌ی قطعی گرفت: برای تفاضل صعودی است، اما برای تفاضل نزولی است.

۳۶ صفحه ۲۲ تمرین

۶) اگر باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای بر برابر ۶ باشد، k را تعیین کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷ صفحه ۲۲ تمرین

۷) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای بر و بخش‌پذیر باشد.

باید و باشد:

پس و .

۳۸ صفحه ۲۲ تمرین

۸) هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته‌شده تجزیه کنید.

الف) با عامل

ب) با عامل

پ) با عامل

الف)

ب) n=۶ زوج است:

پ) n=۵ فرد است:

۳۹ صفحه ۲۲ تمرین

۹) الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر ، نشان دهید که .

ب) اگر ، حدود x را به دست آورید.

الف) برهان خلف: اگر a<b، چون f اکیداً نزولی است که با فرض تناقض دارد. پس .

ب) ؛ طبق (الف): .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام حسابان ۲ - فصل دوم

مثلثات

فهرست

۴۰ صفحه ۲۵ · فعالیت — تأثیر ضریب a در تابع y = a sin x ۲۲

۴۱ صفحه ۲۶ · فعالیت — تأثیر ضریب b در تابع y = sin bx ۲۲

۴۲ صفحه ۲۹ · فعالیت — محور تانژانت ۲۳

۴۳ صفحه ۳۰ · فعالیت — تغییرات تانژانت در ربع اول ۲۴

۴۴ صفحه ۳۰ · کار در کلاس — تغییرات تانژانت در ربع‌های دوم تا چهارم ۲۴

۴۵ صفحه ۳۲ · فعالیت — رسم نمودار تابع y = tan x ۲۵

۴۶ صفحه ۳۲ · کار در کلاس — یکنوایی تابع تانژانت ۲۶

۴۷ صفحه ۳۳ · تمرین — تمرین ۱ ـ دوره‌ی تناوب، ماکزیمم و مینیمم ۲۶

۴۸ صفحه ۳۳ · تمرین — تمرین ۲ ـ نظیرکردن تابع‌ها با نمودارها ۲۶

۴۹ صفحه ۳۴ · تمرین — تمرین ۳ ـ نوشتن ضابطه از روی دوره و ماکزیمم/مینیمم ۲۷

۵۰ صفحه ۳۴ · تمرین — تمرین ۴ ـ ضابطه از روی نمودار ۲۸

۵۱ صفحه ۳۴ · تمرین — تمرین ۵ ـ درست یا نادرست ۲۸

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۲ صفحه ۳۴ · تمرین — تمرین ۶ ـ مقایسه‌ی $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ ۲۸

۵۳ صفحه ۳۶ · فعالیت — جواب‌های معادله‌ی $\sin x = 1/2$ ۲۹

۵۴ صفحه ۳۷ · کار در کلاس — حل معادله‌های مثلثاتی ساده ۳۰

۵۵ صفحه ۳۸ · فعالیت — جواب‌های معادله‌ی $\cos x = \sqrt{3}/2$ ۳۰

۵۶ صفحه ۴۴ · تمرین — تمرین ۱ ـ حل معادله‌های مثلثاتی ۳۰

۵۷ صفحه ۴۴ · تمرین — تمرین ۲ ـ تعداد مثلث‌ها ۳۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۰ صفحه ۲۵ فعالیت

دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع‌ها به ترتیب ۱ و ۱- است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده‌شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

۱) جدول زیر را (با توجه به نمودار هر تابع) کامل کنید.

۲) با توجه به نمودارهای فوق، دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید.

۳) با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید، مشخص نمایید دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است.

۱) نمودار هر تابع از کشیدن (یا فشردن) نمودار $y = \sin x$ در راستای محور y به دست می‌آید (برای a منفی، نمودار نسبت به محور x قرینه هم می‌شود). نمودارها و جدول کامل‌شده:

تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره‌ی تناوب
$y = \sin x$	1	-1	2π
$y = 2 \sin x$	2	-2	2π
$y = -3 \sin x$	3	-3	2π
$y = (1/2) \sin x$	1/2	-1/2	2π
$y = -(1/3) \sin x$	1/3	-1/3	2π

۲) ضریب a فقط ارتفاع نمودار را تغییر می‌دهد و طول تکرار نمودار را عوض نمی‌کند. بنابراین برای تابع $y = a \sin x$:

۳) انتقال عمودی به اندازه‌ی c، دوره‌ی تناوب را تغییر نمی‌دهد ولی مقادیر ماکزیمم و مینیمم را به اندازه‌ی c جابه‌جا می‌کند. پس برای $y = a \sin x + c$:

برای تابع $y = a \cos x + c$ نیز دقیقاً همین نتیجه به دست می‌آید.

۴۱ صفحه ۲۶ فعالیت

۱) با دقت در نمودار هر یک از توابع داده‌شده، دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید (جدول را کامل کنید). در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده‌شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

۲) با توجه به نمودارهای صفحه‌ی قبل، دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

ایران توشه
توشه‌ی تو برای موفقیت

۳) با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است. (با انجام مراحلی مشابه می‌توان نشان داد دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx$ و $y = \cos bx + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.)

۱) ضریب b نمودار را در راستای محور x فشرده ($|b| > 1$) یا کشیده ($|b| < 1$) می‌کند؛ ارتفاع نمودار تغییر نمی‌کند. (علامت منفی b نمودار را نسبت به محور y قرینه می‌کند.)

تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره‌ی تناوب
$y = \sin x$	1	−1	2π
$y = \sin 2x$	1	−1	π
$y = \sin(-3x)$	1	−1	$2\pi/3$
$y = \sin(x/2)$	1	−1	4π
$y = \sin(-x/3)$	1	−1	6π

۲) ضریب b در مقادیر ماکزیمم و مینیمم بی‌تأثیر است ولی دوره‌ی تناوب را تغییر می‌دهد:

۳) انتقال به اندازه‌ی c دوره را تغییر نمی‌دهد و ماکزیمم و مینیمم را به اندازه‌ی c جابه‌جا می‌کند:

برای $y = \cos bx$ و $y = \cos bx + c$ نیز همین نتایج برقرار است.

۴۲ صفحه ۲۹ **فعالیت**

در دایره‌ی مثلثاتی، خط TAT' در نقطه‌ی A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویه‌ی α را در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه‌ی M' قطع کند. نشان دهید: $\tan \alpha = AM' = b$

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

پ) آیا $\tan(\pi/2)$ عددی حقیقی است؟ $\tan(3\pi/2)$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

الف) فرض کنید H پای عمودی باشد که از M بر محور کسینوس‌ها فرود می‌آید. در این صورت $OH = \cos \alpha$ و $MH = \sin \alpha$. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHM و OAM' یک زاویه‌ی مشترک α در رأس O دارند، پس متشابه‌اند و داریم:

(شعاع دایره‌ی مثلثاتی برابر $OA = 1$ است.)

ب) مقدار $\tan\alpha$ برابر طول (جهت‌دار) AM' است، یعنی عرض نقطه‌ی برخورد خط شامل ضلع انتهایی زاویه با محور تانژانت. اگر انتهای کمان در ربع اول باشد، ضلع انتهایی محور تانژانت را بالای A قطع می‌کند (مقدار مثبت). اگر انتهای کمان در ربع سوم باشد، امتداد ضلع انتهایی (از سمت مخالف مبدأ) باز هم محور تانژانت را بالای A قطع می‌کند، پس $\tan\alpha$ مثبت است. در ربع دوم و چهارم، خط شامل ضلع انتهایی محور تانژانت را زیر A قطع می‌کند و مقدار $\tan\alpha$ منفی است. (به بیان جبری: $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ و علامت sin و cos در ربع‌های اول و سوم هم‌علامت و در ربع‌های دوم و چهارم مختلف‌العلامت است.)

پ) ضلع انتهایی زاویه‌ی $\pi/2$ روی محور سینوس‌هاست و با محور تانژانت (که بر محور کسینوس‌ها عمود است) موازی است؛ پس آن را قطع نمی‌کند و $\tan(\pi/2)$ تعریف‌نشده است (عدد حقیقی نیست). همچنین ضلع انتهایی زاویه‌ی $3\pi/2$ نیز روی محور سینوس‌هاست و محور تانژانت را قطع نمی‌کند، پس $\tan(3\pi/2)$ هم عدد حقیقی نیست. (از نظر جبری $\cos(\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$ و تقسیم بر صفر ممکن نیست.)

۴۳ صفحه ۳۰ فعالیت

با تغییر زاویه‌ی α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه‌ی α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه‌ی α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\pi/2$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$.

الف) وقتی α به $\pi/2$ نزدیک می‌شود، ضلع انتهایی زاویه به محور سینوس‌ها نزدیک می‌شود و محل برخورد آن با محور تانژانت هر لحظه بالاتر می‌رود. پس $\tan\alpha$ بدون هیچ کران بالایی افزایش می‌یابد (به $+\infty$ میل می‌کند) و هر عدد مثبت دلخواهی را اختیار می‌کند:

ب) روی محور تانژانت نقطه‌ی T به ارتفاع a را (بالای A) مشخص می‌کنیم و آن را به مرکز دایره (O) وصل می‌کنیم. خط OT دایره را در نقطه‌ای در ربع اول قطع می‌کند؛ زاویه‌ای که این پاره‌خط با جهت مثبت محور کسینوس‌ها می‌سازد همان α است و $\tan\alpha = a$. چون tan در بازه‌ی $(0, \pi/2)$ صعودی است و همه‌ی مقدارهای مثبت را می‌گیرد، چنین α یکتاست و $0 < \alpha < \pi/2$.

۴۴ صفحه ۳۰ کار در کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

ب) بازه‌ی تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت ↑ به معنی افزایش یافتن و علامت ↓ به معنی کاهش یافتن است.)

الف و ب) با حرکت نقطه‌ی انتهای کمان روی دایره و بالا و پایین رفتن نقطه‌ی برخورد با محور تانژانت، در هر سه ربع روند تغییر **افزایشی** است:

ربع	زوایا	افزایشی یا کاهشی	tan بازه‌ی تغییرات
اول	$(0, \pi/2)$	افزایشی	$(0, +\infty)$
دوم	$(\pi/2, \pi)$	افزایشی	$(-\infty, 0)$
سوم	$(\pi, 3\pi/2)$	افزایشی	$(0, +\infty)$
چهارم	$(3\pi/2, 2\pi)$	افزایشی	$(-\infty, 0)$

پ) مقادیر تانژانت زوایای خاص در هر ربع (در تمام ربع‌ها مقدار تانژانت از چپ به راست افزایش می‌یابد؛ در $\pi/2$ و $3\pi/2$ تانژانت تعریف‌نشده است):

ربع	زوایا	tan مقادیر	روند
اول	$0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$	$0, \sqrt{3}/3, 1, \sqrt{3}$، تعریف‌نشده	↑
دوم	$\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi$	تعریف‌نشده، $0, -\sqrt{3}/3, -1, -\sqrt{3}$	↑
سوم	$\pi, 7\pi/6, 5\pi/4, 4\pi/3, 3\pi/2$	$0, \sqrt{3}/3, 1, \sqrt{3}$، تعریف‌نشده	↑
چهارم	$3\pi/2, 5\pi/3, 7\pi/4, 11\pi/6, 2\pi$	تعریف‌نشده، $0, -\sqrt{3}/3, -1, -\sqrt{3}$	↑

۴۵ صفحه ۳۲ **فعالیت**

در شکل کتاب نمودار تابع $y = \tan x$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

با استفاده از مقادیر جدول کار در کلاس صفحه‌ی ۳۰ و ۳۱ و با توجه به اینکه تابع با دوره‌ی π تناوبی است و در $x = \pi/2 + k\pi$ تعریف نشده است (خط‌چین‌ها مجانب قائم‌اند)، نمودار در بازه‌ی $[-\pi/2, 2\pi]$ به صورت زیر است. تکه‌ی ربع اول پررنگ‌تر و تکه‌ی ربع چهارم قبلی به رنگ خاکستری نشان داده شده است.
نمودار، تکه‌هایی صعودی است که هر کدام روی بازه‌ی $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌رود و محور x را در $x = k\pi$ قطع می‌کند.

۴۶ صفحه ۳۲ | کار در کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعه‌ی $[0, 2\pi] - \{\pi/2, 3\pi/2\}$ بررسی کنید.

مجموعه‌ی داده‌شده را به سه بازه تقسیم می‌کنیم: $[0, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ و $(3\pi/2, 2\pi]$. روی هر یک از این بازه‌ها تابع تانژانت **صعودی** است (طبق نمودار و جدول ربع‌ها، مقدار tan در هر ربع افزایش می‌یابد و در بازه‌ی $(\pi/2, 3\pi/2)$ که شامل ربع‌های دوم و سوم است نیز از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد).

اما روی کل مجموعه تابع صعودی نیست؛ برای مثال:

(در $\pi/4$ و $3\pi/4$ اولی در بازه‌ی اول و دومی در بازه‌ی دوم قرار دارد.) پس تانژانت روی هر بازه‌ی پیوسته‌ی دامنه‌اش صعودی است ولی روی کل مجموعه‌ی داده‌شده یکنوا نیست.

۴۷ صفحه ۳۳ | تمرین

۱) دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2\sin 7x$ **ب)** $y = -(3/2)\cos \pi x$

پ) $y = 2 - \sin(x/2)$ **ت)** $y = -\pi - (3/4)\cos 3x$

از فرمول‌های $y = a\sin bx + c$ یا $y = a\cos bx + c$ استفاده می‌کنیم:

الف) $a = 2, b = 7, c = 1$:

ب) $|a| = 3/2, b = \pi, c = 0$:

پ) $|a| = \pi, b = 1/2, c = -2$:

ت) $|a| = 3/4, b = 3, c = 0$:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۸ صفحه ۳۳ | تمرین

۲) هر یک از توابع داده‌شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ **ب)** $y = -(1/2)\cos x$ **پ)** $y = \sin 2x$ **ت)** $y = 1 - \cos 2x$

(چهار نمودار شماره‌دار ۱ تا ۴ در کتاب آمده است.)

برای نظیرکردن، دوره‌ی تناوب و بازه‌ی مقادیر هر تابع را حساب می‌کنیم:

تابع	دوره‌ی تناوب	مینیمم و ماکزیمم	ویژگی نمودار
الف) $y = \sin \pi x$	2	$-1, 1$	نوسان بسیار فشرده؛ از مبدأ می‌گذرد؛ در بازه‌ی 2π دقیقاً ۲ دوره
ب) $y = -(1/2) \cos x$	2π	$-1/2, 1/2$	نمودار کم‌ارتفاع؛ در $x = 0$ مینیمم $(-1/2)$ دارد
پ) $y = \sin 2x$	π	$-1, 1$	از مبدأ می‌گذرد؛ ارتفاع بین -1 و 1
ت) $y = 1 - \cos 2x$	π	$0, 2$	کاملاً بالای محور x (یا روی آن)؛ در $x = 0$ مینیمم صفر دارد

نمودارهای این چهار تابع به صورت زیر هستند؛ هر نمودار کتاب را با ویژگی‌های بالا (دوره‌ی تناوب، ماکزیمم، مینیمم و مقدار در $x = 0$) به تابع مربوط وصل می‌کنیم:

نکته: چون نمودارهای ۱ تا ۴ کتاب در متن در دسترس نبود، نظیر دقیق شماره‌ها ممکن است جابه‌جا باشد، ولی ویژگی‌های هر تابع به‌طور یکتا تعیین‌کننده‌ی نمودار آن است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۹ صفحه ۳۴ تمرین

۳) در هر مورد ضابطه‌ی تابعی مثلثاتی با دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده‌شده را بنویسید.

الف) $T = \pi, \min = -3, \max = 3$

ب) $T = 3, \min = 3, \max = 9$

پ) $T = 4\pi, \min = -7, \max = -1$

ت) $T = \pi/2, \min = -1, \max = 1$

تابع را به صورت $y = a \sin bx + c$ در نظر می‌گیریم (می‌توان از کسینوس هم استفاده کرد):

الف) $c = 0, a = 3, b = 2\pi/\pi = 2$:

ب) $c = (9+3)/2 = 6, a = 3, b = 2\pi/3$:

پ) $c = (-1-7)/2 = -4, a = 3, b = 2\pi/4\pi = 1/2$:

ت) $c = 0, a = 1, b = 2\pi/(\pi/2) = 4$:

(پاسخ یکتا نیست؛ برای نمونه می‌توان در هر مورد از $y = a \cos bx + c$ یا با علامت‌های متفاوت a و b نیز استفاده کرد.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۰ صفحه ۳۴ تمرین

۴) ضابطه‌ی مربوط به هر یک از نمودارهای داده‌شده را بنویسید. (نمودارهای الف و ب در کتاب آمده است.)

روش: از روی نمودار ماکزیمم، مینیمم و دوره‌ی تناوب را می‌خوانیم و سپس از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

علامت a را از شکل نمودار تشخیص می‌دهیم (نمودار سینوسی که از مبدأ با شیب مثبت می‌گذرد یعنی a, b همعلامت‌اند؛ نمودار کسینوسی که در $x = 0$ مینیمم دارد یعنی a منفی است).

الف) با فرض ماکزیمم ۱, مینیمم -3 و دوره‌ی تناوب 4π (نمودار سینوسی که از نقطه‌ی $(-1, 0)$ می‌گذرد):

ب) با فرض ماکزیمم ۳, مینیمم -3, دوره‌ی تناوب 8π و مینیمم در $x = 0$ (نمودار کسینوسی وارونه):

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۱ صفحه ۳۴ تمرین

۵) کدام یک از جمله‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

الف) نادرست. تانژانت روی هر بازه‌ی $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ صعودی است ولی روی کل دامنه (که از چند بازه‌ی جدا تشکیل شده) صعودی نیست؛ مثلاً $3\pi/4 > \pi/4$ اما $\tan(3\pi/4) = -1 < \tan(\pi/4) = 1$.

ب) نادرست. در هر بازه‌ای که تانژانت تعریف شده باشد (و در نتیجه شامل هیچ‌یک از نقطه‌های $\pi/2 + k\pi$ نباشد), تابع صعودی است؛ پس بازه‌ای که تابع در آن نزولی باشد وجود ندارد.

پ) درست. هر بازه‌ای که تابع در آن تعریف شده باشد، زیربازه‌ای از یکی از بازه‌های $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ است و روی آن بازه‌ها تانژانت صعودی است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۲ صفحه ۳۴ تمرین

۶) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $\pi < \alpha < 3\pi/2$ ب) $0 < \alpha < \pi/2$

الف) در ربع سوم، $\sin\alpha < 0$ (نقطه‌ی انتهای کمان زیر محور x است) ولی $\tan\alpha > 0$ (امتداد ضلع انتهایی محور تانژانت را بالای A قطع می‌کند). پس همواره:

ب) در ربع اول، $\cos\alpha < 1 > 0$ و $\sin\alpha > 0$, پس:

روی شکل: طول پاره‌خط روی محور تانژانت (AM') از طول پاره‌خط روی محور سینوس بیشتر است. پس $\tan \alpha > \sin \alpha$.

۵۳ صفحه ۳۶ فعالیت

اکنون معادله‌ی $\sin x = 1/2$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت بعد به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

۱) چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر 1/2 است مثال بزنید.

۲) خط $y = 1/2$ و نمودار $y = \sin x$ را در شکل کتاب رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده‌شده در شکل هستند؟

۳) طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = 1/2$ و $y = \sin x$ را که در شکل مشخص شده‌اند، در معادله‌ی $\sin x = 1/2$ جای‌گذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴) در دایره‌ی مثلثاتی، خط $y = 1/2$ رسم شده است. کدام دسته از زوایای مشخص‌شده روی نمودار سؤال قبل هم‌انتها با زاویه‌ی $\pi/6$ و کدام دسته هم‌انتها با زاویه‌ی $\pi - \pi/6$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته‌ی زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

---

۱) زاویه‌های $\pi/6, 5\pi/6$ (یعنی $\pi - \pi/6$), $13\pi/6 = \pi/6 + 2\pi$, $-7\pi/6 = 5\pi/6 - 2\pi$ و ... همگی سینوسی برابر 1/2 دارند.

۲) این مقدارها طول نقاط برخورد خط $y = 1/2$ با منحنی $y = \sin x$ هستند؛ به همین دلیل همه‌ی آنها بین نقاط مشخص‌شده روی شکل دیده می‌شوند.

۳) مثلاً $\sin(-7\pi/6) = 1/2, \sin(13\pi/6) = 1/2, \sin(5\pi/6) = 1/2, \sin(\pi/6) = 1/2$؛ ۱/۲ همه صدق می‌کنند. نتیجه: طول هر نقطه‌ی تقاطع نمودار $y = \sin x$ با خط $y = 1/2$، یک جواب معادله‌ی $\sin x = 1/2$ است و برعکس.

۴) دسته‌ی اول (هم‌انتها با $\pi/6$) و دسته‌ی دوم (هم‌انتها با $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$):

دسته	زوایا
هم‌انتها با $\pi/6$	$\dots, -11\pi/6, \pi/6, 13\pi/6, 25\pi/6, \dots$
هم‌انتها با $5\pi/6$	$\dots, -7\pi/6, 5\pi/6, 17\pi/6, 29\pi/6, \dots$

هر دو دسته را می‌توان از هر دو طرف با افزودن یا کم‌کردن مضرب‌های 2π ادامه داد. به این ترتیب جواب‌های کلی معادله چنین است:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۴ صفحه ۳۷ | کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ **ب)** $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

از رابطه‌ی $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha$ یا $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ استفاده می‌کنیم (k عددی صحیح).

الف) داریم:

ب) داریم:

۵۵ صفحه ۳۸ | فعالیت

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \sqrt{3}/2$ در شکل کتاب رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤال‌های زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله‌ی $\cos x = \sqrt{3}/2$ را بیابید.

الف) برخی از جواب‌های معادله‌ی $\cos x = \sqrt{3}/2$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی و محل تقاطع خط $x = \sqrt{3}/2$ با دایره‌ی مثلثاتی، جواب‌های معادله‌ی فوق را به دست آورید.

الف) طول نقاط تقاطع نمودار $y = \cos x$ با خط $y = \sqrt{3}/2$ جواب‌های معادله‌اند. چون $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ و $\cos x$ تابعی زوج و با دوره‌ی 2π است، نمونه‌هایی از جواب‌ها:

ب) خط $x = \sqrt{3}/2$ دایره‌ی مثلثاتی را در دو نقطه (در ربع اول و چهارم) قطع می‌کند که انتهای کمان‌های $\pi/6$ و $-\pi/6$ هستند. با افزودن مضرب‌های صحیح 2π (دوران‌های کامل) به این دو کمان، جواب‌های کلی چنین به دست می‌آید:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۶ صفحه ۴۴ | تمرین ۱

۱) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\sin x = \sin(2\pi/3)$ **ب)** $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$ **ت)** $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$

ث) $\cos^2 x - \sin x = 1/4$ **ج)** $\sin x - \cos 2x = 0$

چ) $\tan(2x - 1) = 0$ **ح)** $\tan 3x = \tan \pi x$

الف) $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha$ یا $x = 2k\pi + \pi - \alpha$، با $\alpha = 2\pi/3$:

ب) با $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$:

پ) $\cos 2x = \cos x$:

جواب‌های دسته‌ی اول در دسته‌ی دوم (به ازای k مضرب ۳) هم هستند؛ پس جواب کلی:

ت) با $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

$\sin x = -2$ غیرممکن است. پس $\sin x = 1/2$:

ث) با $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$\sin x = -3/2$ غیرممکن است. پس $\sin x = 1/2$:

ج) با $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

چ) $\tan(2x - 1) = 0 = \tan 0 \Rightarrow 2x - 1 = k\pi$, پس:

ح) $\tan 3x = \tan \pi x \Rightarrow 3x = \pi x + k\pi \Rightarrow (3 - \pi)x = k\pi$, پس:

(به ازای این x ها $\cos 3x$ و $\cos \pi x$ صفر نمی‌شوند: برای $k = 0$ داریم $x = 0$ و برای $k \neq 0$, x عددی گنگ است و $3x$ و πx مضرب فرد $\pi/2$ نیستند؛ پس همه‌ی جواب‌ها قابل قبول‌اند.)

۵۷ صفحه ۴۴ **تمرین**

۲) مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

اگر زاویه‌ی بین دو ضلع ۲ و ۶ برابر θ باشد, $(0 < \theta < \pi)$ مساحت مثلث برابر است با:

جواب‌های این معادله در بازه‌ی $(0, \pi)$ عبارت‌اند از:

برای هر یک از این دو زاویه (طبق حالت «ض‌زض») دقیقاً یک مثلث (با ضلع سوم متفاوت) ساخته می‌شود. بنابراین **دو مثلث** با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام حسابان ۲ - فصل سوم

حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت

فهرست

۵۸ صفحه ۴۶ · فعالیت — رفتار تابع $x/1$ در همسایگی راست صفر ۳۵

۵۹ صفحه ۴۷ · کار در کلاس — رفتار تابع $x/1$ در همسایگی چپ صفر ۳۵

۶۰ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — حدهای یک‌طرفه‌ی نامتناهی از روی نمودار ۳۶

۶۱ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — کاربرد قضیه‌ی ۱ و نمودارها ۳۶

۶۲ صفحه ۵۳ · کار در کلاس — محاسبه‌ی حدهای نامتناهی (قضیه‌ی ۳) ۳۷

۶۳ صفحه ۵۴ · فعالیت — حد مجموع و حاصل‌ضرب با حد نامتناهی ۳۷

۶۴ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — بازنویسی قضیه‌ی ۵ برای حد $-\infty$ ۳۸

۶۵ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — محاسبه‌ی حد و تعیین قضیه‌ی به‌کاررفته ۳۸

۶۶ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — رفتار $x^2/1$ و $x/1$ در اطراف صفر (مجانب قائم) ۳۹

۶۷ صفحه ۵۷ · کار در کلاس — مجانب‌های قائم تابع گویا ۳۹

۶۸ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱ ـ درستی حدهای نامتناهی ۳۹

۶۹ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۲ ـ محاسبه‌ی حدهای نامتناهی ۴۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۰ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۳ ـ تابعی با دو مجانب قائم ۴۰

۷۱ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۴ ـ تابعی روی $[-2, 2] - \{1\}$ با مجانب قائم ۴۰

۷۲ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۵ ـ مجانب‌های قائم ۴۱

۷۳ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۶ ـ نمودار $1/|x|$ در کنار مجانب قائم ۴۱

۷۴ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۷ ـ تشخیص نمودار در همسایگی $x = 1$ ۴۱

۷۵ صفحه ۵۹ · فعالیت — رفتار $1/x$ وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند ۴۲

۷۶ صفحه ۶۰ · کار در کلاس — رفتار $1/x$ وقتی x به $-\infty$ میل می‌کند ۴۲

۷۷ صفحه ۶۱ · کار در کلاس — حد در $\pm\infty$ از روی نمودار ۴۳

۷۸ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — مفهوم حد نامتناهی در $-\infty$ و نمودار x و x^2 ..... ۴۳

۷۹ صفحه ۶۴ · فعالیت — رفتار تابع x^3 در $\pm\infty$ ۴۳

۸۰ صفحه ۶۶ · کار در کلاس — حد تابع گویا در $\pm\infty$ ۴۴

۸۱ صفحه ۶۷ · کار در کلاس — چرا $y = 1$ مجانب افقی است؟ ۴۵

۸۲ صفحه ۶۸ · کار در کلاس — ۱ ـ تشخیص مجانب افقی $y = 2$ از روی نمودار ۴۵

۸۳ صفحه ۶۸ · کار در کلاس — ۲ ـ مجانب‌های افقی و قائم ۴۵

۸۴ صفحه ۶۹ · تمرین — تمرین ۱ ـ مفهوم حد در بی‌نهایت ۴۶

۸۵ صفحه ۶۹ · تمرین — تمرین ۲ ـ حدها و مجانب‌ها از روی نمودار ۴۶

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸۶ صفحه ۶۹ · تمرین — تمرین ۳ ـ محاسبه‌ی حد در بی‌نهایت ۴۶
۸۷ صفحه ۶۹ · تمرین — تمرین ۴ ـ مجانب‌های افقی و قائم ۴۷
۸۸ صفحه ۶۹ · تمرین — تمرین ۵ ـ رسم نمودار با شرایط داده‌شده ۴۷

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۸ صفحه ۴۶ فعالیت

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در این فعالیت رفتار تابع گویای را در همسایگی راست x = 0 بررسی می‌کنیم.

۱) جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می‌دهد. آن را تکمیل کنید. (x = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ..., 0)

۲) اگر بخواهیم f(x) از یک میلیون بزرگ‌تر شود، مقدار x از چه عددی باید کوچک‌تر شود؟

۳) وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود، آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می‌شوند؟ چرا؟

۱) مقدار را در هر نقطه حساب می‌کنیم:

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...	0
f(x) = 1/x	10	100	1000	10000	...	تعریف‌نشده

۲) باید باشد. چون x مثبت است، با معکوس‌کردن دو طرف نتیجه می‌شود:

یعنی x باید از $0.000001 = 10^{-6}$ کوچک‌تر (و مثبت) باشد.

۳) خیر. وقتی x از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود، مقدارهای f(x) (۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ...) بدون هیچ محدودیتی بزرگ می‌شوند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند؛ زیرا برای هر عدد مثبت دلخواه M اگر باشد، آنگاه f(x) > M است. در این حالت می‌نویسیم:

(نماد $+\infty$ نشان می‌دهد که حد متناهی وجود ندارد؛ $+\infty$ عدد نیست و فقط بیان می‌کند که مقدار تابع از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر می‌شود.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ صفحه ۴۷ کار در کلاس

برای تابع

الف) جدول زیر را کامل کنید: (x = −1, −0.1, −0.01, −0.001, −0.0001, −0.00001, ..., 0)

ب) اگر بخواهیم مقدار f(x) از -10^6 کوچک‌تر شود، x باید چگونه انتخاب شود؟

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود، f(x) چه تغییری می‌کند؟

ت) در مورد چه می‌توان گفت؟

الف)

x	−1	−0.1	−0.01	−0.001	−0.0001	−0.00001	...	0
f(x) = 1/x	−1	−10	−100	−1000	−10000	−100000	...	تعریف‌نشده

ب) باید باشد. چون x منفی است، با معکوس‌کردن دو طرف (و برگرداندن جهت نامساوی) داریم:

یعنی x باید از 0.000001− بزرگ‌تر (و منفی) باشد؛ یعنی به‌اندازه‌ی کافی به صفر نزدیک شود.

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقادیر f(x) منفی هستند و بدون هیچ محدودیتی کوچک می‌شوند (از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر می‌شوند).

ت) مقدار تابع از هر عدد منفی کوچک‌تر می‌شود، پس حد متناهی ندارد و می‌نویسیم:

(چون حد راست $+\infty$ و حد چپ $-\infty$ است، حد دوطرفه‌ی $1/x$ در $x = 0$ وجود ندارد.)

---

۶۰ صفحه ۵۰ کار در کلاس

نمودار توابع f, g و h در شکل‌های زیر داده شده‌اند. با توجه به آن‌ها حدود خواسته‌شده را در صورت وجود به دست آورید.

$f(x) = 1/(x-2), g(x) = \log x$ و $h(x) = \tan x$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

$\lim\limits_{x\to(-\pi/2)^+} h(x)$ ، $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} h(x)$ ، $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} h(x)$

با توجه به نمودارها (تابع f در همسایگی $x = 2$ مانند ، تابع g لگاریتمی با پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱ و $h = \tan x$):

- : وقتی x از چپ به ۲ نزدیک می‌شود، نمودار به سمت پایین می‌رود.
- : وقتی x از راست به ۲ نزدیک می‌شود، نمودار به سمت بالا می‌رود.
- : نمودار لگاریتم در نزدیکی محور y به سمت پایین می‌رود.
- (برای $\tan x$: درست بعد از $x = -\pi/2$ مقدار تابع بسیار منفی است، درست قبل از $\pi/2$ بسیار مثبت و درست بعد از $\pi/2$ دوباره بسیار منفی.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۶۱ صفحه ۵۱ کار در کلاس

با استفاده از نمودار توابع داده‌شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به دست آورید.

الف) ب)

الف) برای طبق قضیه‌ی ۱ ($n = 1$ فرد):

چون حدهای چپ و راست برابر نیستند، حد دوطرفه‌ی $1/x$ در $x = 0$ وجود ندارد (نه عدد است و نه ∞ یا $-\infty$)؛ نمودار در سمت راست به سمت بالا و در سمت چپ به سمت پایین می‌رود.

ب) برای طبق قضیه‌ی ۱ ($n = 2$ زوج) حد راست و حد چپ هر دو برابر $+\infty$ است. پس:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

نمودار $1/x^2$ در دو طرف محور y به سمت بالا می‌رود.

۶۲ صفحه ۵۳ کار در کلاس

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف)

ب)

پ)

از قضیه‌ی ۳ استفاده می‌کنیم: اگر حد صورت عددی ناصفر باشد و مخرج به صفر میل کند، علامت حد صورت و علامت مخرج در همسایگی محذوف تعیین‌کننده‌ی $\pm\infty$ است.

الف) وقتی $x \to -1^+$: حد صورت $-2-1 = -3$ (منفی) و مخرج $(x+1)^2$ همواره مثبت و میل‌کننده به صفر است. طبق بند (ب) قضیه‌ی ۳:

ب) وقتی $x \to 2^-$ (مثلاً $x = 1.9$ داریم $[x] = 1$) پس صورت برابر $1-2 = -1$ است. مخرج $x-2$ منفی است و به صفر میل می‌کند. طبق بند (ت) قضیه‌ی ۳ $L < 0$ و $g > 0$:

پ) مخرج را تجزیه می‌کنیم: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ که مثبت است و در $x \to 1^+$ به صفر میل می‌کند؛ حد صورت $1-2 = -1$ منفی است. طبق بند (ب) قضیه‌ی ۳:

(متن صورت‌های این پرسش در منبع ناقص بود و عبارت‌ها با روش درس بازسازی شده‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۳ صفحه ۵۴ فعالیت

توابع و را در نظر بگیرید.

۱) الف) حاصل و را به دست آورید.

ب) تابع $f + g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل را محاسبه کنید.

پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲) تابع $f \cdot g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل را محاسبه کنید و ارتباط آن را با و بیان کنید.

۱ـ الف) طبق قضیه‌ی ۱ ($n = 2$ زوج) و چون g چندجمله‌ای است:

ب) جمع دو تابع را هم‌مخرج می‌کنیم:

وقتی $x \to 0$, حد صورت برابر ۱ (مثبت) و مخرج x^2 مثبت و میل‌کننده به صفر است؛ پس طبق قضیه‌ی ۳:

پ) اگر حد یک تابع $+\infty$ و حد تابع دیگر عددی حقیقی (مانند ۱) باشد، حد مجموع آن‌ها برابر $+\infty$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲) حاصل‌ضرب:

حد صورت برابر ۱ (مثبت) و مخرج مثبت و میل‌کننده به صفر است، پس:

ارتباط: چون $\lim f = +\infty$ و $\lim g = 1 > 0$، حد حاصل‌ضرب برابر $+\infty$ شد؛ یعنی حاصل‌ضرب تابعی با حد $+\infty$ در تابعی با حد مثبت، حدش $+\infty$ است (و اگر حد تابع دوم عددی منفی بود حاصل‌ضرب به $-\infty$ میل می‌کرد).

---

۶۴ صفحه ۵۵ کار در کلاس

۱) قضیه‌ی ۵ را در حالتی که بازنویسی کنید.

فرض کنیم و L) عددی حقیقی و ناصفر) باشد. آنگاه:

۱. ○ حد مجموع:

۲. ○ اگر $L > 0$ باشد:

۳. ○ اگر $L < 0$ باشد:

(قضیه برای $x \to a^+$ و $x \to a^-$ نیز برقرار است.)

---

۶۵ صفحه ۵۵ کار در کلاس

۲) حاصل حدود زیر را به دست آورید. در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف)

ب)

پ)

ت)

الف) حد صورت: $1+1 = 2 > 0$؛ مخرج $x-1$ برای $x < 1$ منفی است و به صفر میل می‌کند. طبق قضیه‌ی ۳ (بند پ):

ب) عبارت را به صورت حاصل‌ضرب می‌نویسیم: . طبق قضیه‌ی ۱ داریم و . پس طبق قضیه‌ی ۵ (بند ب):

پ) مخرج $x^2+4x+4 = (x+2)^2$ همواره مثبت است و وقتی $x \to -2$ به صفر میل می‌کند؛ حد صورت $4-2+2 = 4$ > 0. طبق قضیه‌ی ۳ (بند الف):

ت) وقتی $x \to 0^-$: حد صورت $\cos 0 - 2 = -1 < 0$ و مخرج x^2 مثبت و میل‌کننده به صفر است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند ب):

(برخی ضابطه‌ها در منبع ناقص بود و با روش درس بازسازی شده‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
irantooshe.ir

۶۶ صفحه ۵۵ کار در کلاس

به نمودارهای هر یک از توابع و در اطراف نقطه‌ی صفر توجه کنید.

در هر دو نمودار، با نزدیک‌شدن x به صفر، نمودار به محور y «می‌چسبد» و بالا یا پایین می‌رود:

در هر دو منحنی خط $x = 0$ (محور y) را مجانب قائم نمودار می‌نامیم؛ زیرا دست‌کم یکی از حدهای یک‌طرفه‌ی تابع در $x = 0$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است.

۶۷ صفحه ۵۷ کار در کلاس

مجانب‌های قائم تابع را در صورت وجود به دست آورید.

مخرج و صورت را تجزیه می‌کنیم:

مخرج در $x = 1$ و $x = 2$ صفر می‌شود و صورت در این نقطه‌ها صفر نیست (به ترتیب 6- و ۴-)؛ پس این دو خط مجانب قائم‌اند. بررسی حدها:

(در $x \to 1^+$ مخرج $(x-2)(x-1)$ منفی و در $x \to 2^+$ مثبت است.) بنابراین مجانب‌های قائم تابع، خطوط $x = 1$ و $x = 2$ هستند.

(ضابطه‌ی تابع در منبع ناقص بود و بازسازی شده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۸ صفحه ۵۸ تمرین

۱) با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی، درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف)

ب)

پ)

الف) وقتی $x \to 0$ حد صورت $2+0 = 2$ عددی مثبت است و مخرج x^2 همواره مثبت و میل‌کننده به صفر است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند الف):

ب) مخرج $(x-4)^2$ مثبت است و وقتی $x \to 4$ به صفر میل می‌کند و حد صورت ۱ (مثبت) است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند الف):

پ) وقتی $x \to -3^-$: حد صورت $-2-3 = -5$ (منفی) و مخرج $x+3$ منفی (چون $x < -3$) و میل‌کننده به صفر است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند ت: $L < 0$ و $g < 0$):

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

(ضابطه‌ی برخی بندها در منبع ناقص بود و بازسازی شده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۹ صفحه ۵۸ تمرین

۲) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف)

ب)

پ)

الف) وقتی $x \to 2^-$: حد صورت $2^2 = 4 > 0$ و مخرج $x-2$ منفی و میل‌کننده به صفر است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند پ):

ب) حالت 0/0 است؛ صورت و مخرج را تجزیه و ساده می‌کنیم:

وقتی $x \to 1^-$: حد صورت ۴ (مثبت) و مخرج $x-1$ منفی و میل‌کننده به صفر است. پس:

پ) مخرج را تجزیه می‌کنیم: . وقتی $x \to 3^+$ مخرج مثبت و میل‌کننده به صفر است و حد صورت $3-1 = 2 > 0$ است. پس:

(برخی ضابطه‌ها در منبع ناقص بود و بازسازی شده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۰ صفحه ۵۸ تمرین

۳) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $R - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

تابعی که در $x = \pm 1$ تعریف نشده و مخرجش در این نقطه‌ها صفر می‌شود، مثلاً:

دامنه‌ی این تابع $R - \{-1, 1\}$ است. حدها در نزدیکی نقطه‌های ± 1:

پس خطوط $x = 1$ و $x = -1$ مجانب قائم‌اند. نمودار:
(پاسخ یکتا نیست؛ هر نمودار با دامنه‌ی $R - \{-1, 1\}$ و دو مجانب قائم پذیرفته است.)

۷۱ صفحه ۵۸ تمرین

۴) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $[-2, 2] - \{1\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

تابع را فقط روی بازه‌ی بسته‌ی $[-2, 2]$ و بدون نقطه‌ی ۱ تعریف می‌کنیم:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

چون و ، خط $x = 1$ مجانب قائم نمودار است. نمودار (دو نقطه‌ی انتهایی توپر هستند):
(پاسخ یکتا نیست؛ هر نمودار با این دامنه و دست‌کم یک مجانب قائم پذیرفته است.)

۷۲ صفحه ۵۸ تمرین

۵) مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)

ب)

الف) مخرج در صفر می‌شود و صورت در این نقطه $-1 - 1/2 = -1/2$ ناصفر است؛ حدها:

پس تنها مجانب قائم، خط است.

ب) مخرج $x^2 - 2x = x(x-2)$ در $x = 0$ و $x = 2$ صفر می‌شود و صورت $x+3$ در این نقطه‌ها برابر ۳ و ۵ (ناصفر) است. حدها:

پس مجانب‌های قائم تابع، خطوط **$x = 0$** و **$x = 2$** هستند.

(ضابطه‌ها در منبع ناقص بود و بازسازی شده‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷۳ صفحه ۵۸ تمرین

۶) نمودار تابع در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

چون ، با ضرب در ۱-:

پس خط $x = 0$ مجانب قائم است و نمودار در هر دو طرف آن به سمت پایین می‌رود؛ نمودار کاملاً زیر محور x و نسبت به محور y متقارن است:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۴ صفحه ۵۸ تمرین

۷) کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع را در همسایگی $x = 1$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟ (شکل‌های الف، ب، پ و ت)

مخرج $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ همواره نامنفی است و در $x = 1$ صفر می‌شود، در حالی که حد صورت $1+1 = 2 > 0$ است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند الف):

بنابراین خط $x = 1$ مجانب قائم است و **هر دو شاخه‌ی نمودار در دو طرف آن به سمت بالا ($+\infty$) می‌روند** (مانند نمودار $1/x^2$):

(چهار شکل کتاب در متن در دسترس نبود؛ شکل درست همان است که هر دو شاخه‌ی آن در اطراف $x = 1$ رو به بالا باشند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۷۵ صفحه ۵۹ فعالیت

نمودار تابع را در بازه‌ی $(0, +\infty)$ در نظر بگیرید.

۱) جدول زیر را کامل کنید. $(x = 1, 2, 5, 10, 100, 10^3, 10^5, 10^6)$

۲) اگر بخواهیم فاصله‌ی $f(x)$ تا محور xها از $1/5$ کمتر شود، x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟

۳) اگر بخواهیم فاصله‌ی $f(x)$ تا محور xها از $1/10$ کمتر شود، x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟

۴) اگر بخواهیم فاصله‌ی $f(x)$ تا محور xها از $1/100$ کمتر شود، x را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟

۵) آیا فاصله‌ی $f(x)$ تا محور xها را می‌توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟

---

۱) با محاسبه‌ی $f(x) = 1/x$:

x	1	2	5	10	100	10^3	10^5	10^6
$f(x)$	1	1/2	1/5	1/10	1/100	1/1000	10^{-5}	10^{-6}

۲) فاصله‌ی $f(x)$ تا محور xها برابر $1/x$ است. باید باشد، یعنی $x > 5$. (به همین ترتیب برای کمتر از $1/2$ باید $x > 2$ باشد.)

۳) .

۴) .

۵) بله. برای هر عدد مثبت دلخواه ε اگر انتخاب شود، فاصله‌ی $f(x)$ تا محور xها از ε کمتر می‌شود. در این صورت می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به $+\infty$ میل کند صفر است:

---

۷۶ صفحه ۶۰ کار در کلاس

نمودار تابع را در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ در نظر بگیرید.

۱) جدول زیر را کامل کنید. $(x = -1, -2, -5, -10, -100, -10^3, -10^4, \ldots)$

۲) اگر بخواهیم فاصله‌ی $f(x)$ تا محور xها کمتر از $1/10^3$ شود، x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳) اگر بخواهیم فاصله‌ی f(x) تا محور xها از $1/10^6$ کمتر شود، x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟

۱)

x	-1	-2	-5	-10	-100	-10^3	-10^4	...
f(x)	-1	-1/2	-1/5	-1/10	-1/100	-1/1000	$-1/10^4$	...

۲) باید باشد، یعنی $|x| > 1000$ و چون x منفی است، $x < -10^3$.

۳) به همین ترتیب $|x| > 10^6$ یعنی $x < -10^6$.

نتیجه: اگر x به اندازه‌ی کافی کوچک شود، f(x) را می‌توان به دلخواه به صفر نزدیک کرد:

---

۷۷ صفحه ۶۱ | کار در کلاس

با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را به دست آورید. $f(x) = 1/x^2$ و نمودار g در شکل)

نمودار در دو طرف به محور x نزدیک می‌شود:

نمودار g (تابع) نیز در دو انتها به محور x نزدیک می‌شود:

(نمودار g در متن در دسترس نبود و $g(x) = 1/x$ فرض شده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۷۸ صفحه ۶۴ | کار در کلاس

۱) مفاهیم و را بیان کنید.

۲) با توجه به نمودار توابع $y = x$ و $y = x^2$، حدود زیر را مشخص کنید.

۱) «$\lim f(x) = +\infty$ وقتی $x \to -\infty$» یعنی با کوچک‌شدن x، مقدار f(x) از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود؛ برای هر عدد مثبت M عدد N وجود دارد که برای هر $x < N$ داشته باشیم $f(x) > M$.

«$\lim f(x) = -\infty$ وقتی $x \to -\infty$» یعنی با کوچک‌شدن x، مقدار f(x) از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر شود؛ برای هر عدد منفی M عدد N وجود دارد که برای هر $x < N$ داشته باشیم $f(x) < M$.

۲)

---

۷۹ صفحه ۶۴ | فعالیت

تابع را با نمودار کتاب در نظر بگیرید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱) جدول زیر را کامل کنید. ($x = -10^6, -1000, -100, -10, -1, 0, 1, 10, 100, 1000, 10^6$)

۲) با افزایش (کاهش) x، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

۳) در مورد حدهای و چه می‌توان گفت؟

۱)

x	-10^6	-1000	-100	-10	-1	0	1	10	100	1000	10^6
$f(x) = x^3$	-10^{18}	-10^9	-10^6	-1000	-1	0	1	1000	10^6	10^9	10^{18}

۲) با افزایش x مقدار $f(x)$ بدون محدودیت زیاد می‌شود و با کاهش x بدون محدودیت کم می‌شود.

۳)

۸۰ صفحه ۶۶ **کار در کلاس**

الف) اگر و (یا) دو چندجمله‌ای باشند، نشان دهید:

۲) در هر یک از حالت‌های $n > m$ و $n < m$ و $n = m$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

۳) به کمک نتیجه‌ی قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف)

ب)

پ)

۱ـ الف) از x^n در صورت و از x^m در مخرج فاکتور می‌گیریم:

طبق قضیه‌ی ۶ هر جمله‌ی a/x^k در $\pm\infty$ به صفر میل می‌کند و طبق قضیه‌ی ۷ حد کسر داخلی برابر است. بنابراین:

۲)

- $n < m$: توان $n-m$ منفی است و .
- $n = m$: حد برابر است.
- $n > m$: توان $n-m$ مثبت است و حد برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است که به علامت ، زوج یا فرد بودن $n-m$ و جهت ($+\infty$ یا $-\infty$) بستگی دارد.

۳ـ الف) $n = 3 > m = 2$:

ب) $n = m = 3$:

پ) $n = 2 < m = 3$:

(ضابطه‌ی بندهای ۳ در منبع ناقص بود و بازسازی شده است.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۱ صفحه ۶۷ کار در کلاس

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط $y = 1$ مجانب افقی نمودارها است. چرا؟

طبق تعریف، خط $y = L$ مجانب افقی نمودار f است اگر دست‌کم یکی از حدهای یا برابر L باشد. در هر دو شکل، نمودار در انتهای راست یا چپ به خط $y = 1$ نزدیک می‌شود و فاصله‌ی آن از این خط به دلخواه کوچک می‌شود؛ یعنی و در نتیجه $y = 1$ مجانب افقی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۲ صفحه ۶۸ کار در کلاس

۱) در کدام‌یک از توابع زیر (شکل‌های الف تا ث)، خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است؟

خط $y = 2$ وقتی مجانب افقی است که نمودار در انتهای راست یا چپ ($x \to +\infty$) یا ($x \to -\infty$) به این خط نزدیک شود و باشد. باید دید در کدام شکل‌ها شاخه‌ی نمودار در دوردست‌ها بر خط افقی $y = 2$ «می‌نشیند»: شکل‌های (الف) و (ت) چنین‌اند و در بقیه‌ی شکل‌ها نمودار به عدد دیگری میل می‌کند یا بی‌کران می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۳ صفحه ۶۸ کار در کلاس

۲) مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) ب) پ)

الف)

پس $y = 2$ مجانب افقی است. مخرج در $x = 1$ صفر و صورت ۳ است: و ؛ پس $x = 1$ مجانب قائم است.

ب) و ؛ مجانب افقی ندارد. تابع چندجمله‌ای در همه‌ی نقطه‌ها تعریف‌شده است، پس مجانب قائم هم ندارد.

پ) درجه‌ی صورت از مخرج بیشتر است: ؛ مجانب افقی ندارد. مخرج در $x = -1$ صفر و صورت ۲ است: و ؛ پس $x = -1$ مجانب قائم است.

(ضابطه‌ی ب در منبع ناقص بود و $g(x) = x^3$ فرض شده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۴ صفحه ۶۹ تمرین

۱) مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) ب)

الف) وقتی x به اندازه‌ی کافی بزرگ شود، فاصله‌ی f(x) از عدد ۲ را می‌توان به هر اندازه‌ی دلخواه کوچک کرد؛ یعنی f(x) در انتهای راست به ۲ نزدیک می‌شود (و خط $y = 2$ مجانب افقی است).

ب) وقتی x به اندازه‌ی کافی کوچک (منفی با قدرمطلق بزرگ) شود، فاصله‌ی f(x) از عدد ۴ را می‌توان به هر اندازه‌ی دلخواه کوچک کرد؛ یعنی f(x) در انتهای چپ به ۴ نزدیک می‌شود (و $y = 4$ مجانب افقی است).

۸۵ صفحه ۶۹ تمرین

۲) برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید:

الف) ب) پ) ت) ث)

ج) مجانب‌های افقی و قائم

نمودار کتاب در متن در دسترس نبود؛ با فرض اینکه نمودار f مانند شکل زیر (تابع) باشد:

- الف)
- ب)
- پ)
- ت)
- ث)
- ج) مجانب افقی: $y = 1$ ؛ مجانب‌های قائم: $x = 3$ و $x = -2$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۶ صفحه ۶۹ تمرین

۳) حاصل حدود زیر را به دست آورید:

الف) ب)

پ) ت)

الف) درجه‌ی صورت و مخرج برابر است؛ نسبت ضرایب مرتبه‌ی اول:

ب)

پ)

ت) حد چندجمله‌ای برابر حد جمله‌ی با بزرگ‌ترین درجه است:

(ضابطه‌ها در منبع ناقص بود و بازسازی شده‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۸۷ صفحه ۶۹ تمرین

۴) مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

الف) ب)

پ) ت)

الف) ⇒ مجانب افقی $y = 1$. مخرج در $x = 2$ صفر و صورت ۱ ناصفر است ⇒ مجانب قائم $x = 2$.

ب) درجه‌ی صورت کمتر از مخرج است: ⇒ مجانب افقی $y = 0$. مخرج $(x+2)(x-2)$ در $x = \pm 2$ صفر و صورت (۶ و ۶−) ناصفر است ⇒ مجانب‌های قائم $x = 2$ و $x = -2$.

پ) ⇒ مجانب افقی $y = 2$. مخرج در $x = \pm 1$ صفر و صورت ۳ است ⇒ مجانب‌های قائم $x = 1$ و $x = -1$.

ت) ⇒ مجانب افقی $y = 2$. مخرج x^2+1 هرگز صفر نمی‌شود ⇒ مجانب قائم ندارد.

(ضابطه‌ها در منبع ناقص بود و بازسازی شده‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۸۸ صفحه ۶۹ تمرین

۵) نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد:

الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) ،

پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.

نمودار را شاخه‌شاخه می‌سازیم:

- سمت چپ $x = 0$: نمودار در انتهای چپ از بالا به $y = -1$ نزدیک می‌شود، در $x = -2$ محور x را لمس می‌کند و سپس تا $-\infty$ در $x = 0^-$ پایین می‌رود (مجانب افقی $y = -1$ و).
- بین ۰ و ۲: از $-\infty$ در 0^+ بالا می‌آید، در $x = 1$ محور x را لمس می‌کند و دوباره به سمت $-\infty$ در 2^- می‌رود.
- سمت راست $x = 2$: از $+\infty$ در 2^+ شروع می‌شود و پایین می‌آید.

نمونه ضابطه‌ی شاخه‌ها: $-(x+2)^2/x^2$ برای $x < 0$ ، $1/(2-x) - 1/x - 2$ برای $0 < x < 2$ و $1/(x-2) + 0.4(x-2)$ برای $x > 2$. (پاسخ یکتا نیست؛ هر نمودار با این شرایط پذیرفته است.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام حسابان ۲ - فصل چهارم

مشتق

فهرست

۸۹	صفحه ۷۳ · فعالیت — شیب خط‌ها و رسم خط با شیب داده‌شده	۵۲
۹۰	صفحه ۷۴ · فعالیت — خط قاطع و خط مماس بر منحنی	۵۲
۹۱	صفحه ۷۴ · فعالیت — شیب خط‌های قاطع منحنی $f(x) = -x^2+10x$	۵۳
۹۲	صفحه ۷۵ · فعالیت — تغییر Δx در محاسبه‌ی شیب‌های قاطع	۵۳
۹۳	صفحه ۷۶ · فعالیت — حدس شیب خط مماس از روی شیب قاطع‌ها	۵۳
۹۴	صفحه ۷۸ · کار در کلاس — خط مماس بر $y = x^2+3$ در $x = -2$	۵۴
۹۵	صفحه ۸۰ · کار در کلاس — هم‌ارزی دو دستور مشتق (اثبات جبری)	۵۴
۹۶	صفحه ۸۰ · کار در کلاس — مشتق و علامت شیب برای $f(x) = -x^2+10x$	۵۴
۹۷	صفحه ۸۱ · تمرین — تمرین ۱ ـ مشتق و خط مماس $f(x) = 3x^2-2x+1$	۵۵
۹۸	صفحه ۸۱ · تمرین — تمرین ۲ ـ نظیر کردن نقاط با شیب‌ها	۵۵
۹۹	صفحه ۸۱ · تمرین — تمرین ۳ ـ مرتب‌کردن شیب‌ها	۵۶
۱۰۰	صفحه ۸۱ · تمرین — تمرین ۴ ـ نظیر کردن نقاط با مشتق‌ها	۵۶

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰۱ صفحه ۸۲ · تمرین — تمرین ۵ ـ انتخاب نقاط با ویژگی‌های داده‌شده ۵۷

۱۰۲ صفحه ۸۲ · تمرین — تمرین ۶ ـ مشتق $f(x) = x^3 - 2$ در ۱- ۵۷

۱۰۳ صفحه ۸۲ · تمرین — تمرین ۷ ـ درست یا نادرست درباره‌ی شیب منحنی در نقاط A تا F ۵۷

۱۰۴ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۸ ـ مختصات نقاط روی خط مماس ۵۸

۱۰۵ صفحه ۸۴ · فعالیت — مشتق‌ناپذیری تابع ناپیوسته در $x = 2$ ۵۸

۱۰۶ صفحه ۸۵ · کار در کلاس — مشتق‌ناپذیری تابع g در $x = 1$ ۵۹

۱۰۷ صفحه ۸۶ · کار در کلاس — چرا؟ در اثبات قضیه‌ی «مشتق‌پذیری ⇒ پیوستگی» ۵۹

۱۰۸ صفحه ۸۷ · کار در کلاس — مشتق $f(x) = |x^2 - 1|$ در $x = -1$ و نیم‌مماس‌ها ۵۹

۱۰۹ صفحه ۸۹ · کار در کلاس — تعیین نقاط مشتق‌ناپذیر از روی شکل ۶۰

۱۱۰ صفحه ۹۰ · فعالیت — تابع مشتق $f(x) = x^2$ ۶۰

۱۱۱ صفحه ۹۲ · کار در کلاس — دامنه‌ی f و f' برای تابع ثابت با یک نقطه‌ی جدا ۶۰

۱۱۲ صفحه ۹۵ · کار در کلاس — مشتق چند تابع با دستورهای مشتق‌گیری ۶۱

۱۱۳ صفحه ۹۶ · کار در کلاس — مشتق توابع مثلثاتی ۶۱

۱۱۴ صفحه ۹۷ · کار در کلاس — مشتق با قاعده‌ی زنجیری ۶۱

۱۱۵ صفحه ۹۷ · کار در کلاس — تعریف مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a, b)$ و $(a, b]$ ۶۲

۱۱۶ صفحه ۹۷ · کار در کلاس — چرا f روی $[1, 2]$ مشتق‌پذیر نیست؟ ۶۲

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۱۷ صفحه ۹۸ · کار در کلاس — مشتق‌پذیری تابع چندضابطه‌ای روی بازه‌ها ۶۲

۱۱۸ صفحه ۹۹ · تمرین — تمرین ۱ ـ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر ۶۳

۱۱۹ صفحه ۹۹ · تمرین — تمرین ۲ ـ مشتق راست و چپ در نقطه‌ی A ۶۳

۱۲۰ صفحه ۹۹ · تمرین — تمرین ۳ ـ رسم f و f' و مشتق‌ناپذیری در ۰ و ۳ ۶۳

۱۲۱ صفحه ۹۹ · تمرین — تمرین ۴ ـ رسم نمودار با مشتق‌های خواسته‌شده ۶۴

۱۲۲ صفحه ۹۹ · تمرین — تمرین ۵ ـ ترتیب مشتق‌ها و رسم f' برای x^2+2x+3 ۶۴

۱۲۳ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۶ ـ مشتق‌پذیری در $x = 1$ (تابع چندضابطه‌ای) ۶۴

۱۲۴ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۷ ـ سه تابع با مشتق برابر ۶۵

۱۲۵ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۸ ـ مشتق‌پذیری $|x^2-4|$ در ۲ و ۲- ۶۵

۱۲۶ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۹ ـ مشتق $x^{\frac{2}{3}}\sqrt{}$ و مماس قائم ۶۵

۱۲۷ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۱۰ ـ نظیر کردن نمودار تابع با نمودار مشتق ۶۵

۱۲۸ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۱۱ ـ مشتق ضرب و خارج‌قسمت دو تابع روی نمودار ۶۶

۱۲۹ صفحه ۱۰۱ · تمرین — تمرین ۱۲ ـ مشتق مجموع ۶۶

۱۳۰ صفحه ۱۰۱ · تمرین — تمرین ۱۳ ـ مشتق راست و چپ موجود ولی مشتق ناموجود ۶۶

۱۳۱ صفحه ۱۰۱ · تمرین — تمرین ۱۴ ـ مشتق توابع جبری ۶۶

۱۳۲ صفحه ۱۰۱ · تمرین — تمرین ۱۵ ـ مشتق توابع مثلثاتی ۶۷

ایران توشه
توشه‌ی راه دانش‌آموز

۱۳۳ صفحه ۱۰۱ · تمرین — تمرین ۱۶ ـ مقدار مشتق اول و دوم $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$ ۶۷

۱۳۴ صفحه ۱۰۴ · کار در کلاس — مرتب‌کردن سرعت‌های متوسط و لحظه‌ای روی نمودار مکان ـ زمان ۶۷

۱۳۵ صفحه ۱۰۵ · کار در کلاس — آهنگ رشد قد کودکان $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ ۶۸

۱۳۶ صفحه ۱۰۶ · کار در کلاس — آهنگ متوسط تغییر نرخ باروری در [۱۳۶۴, ۱۳۷۹] ۶۸

۱۳۷ صفحه ۱۰۸ · کار در کلاس — سرعت پرتاب، سرعت برخورد و سرعت ±۳۵ برای $h(t) = -5t^2+40t$ ۶۹

۱۳۸ صفحه ۱۰۸ · تمرین — تمرین ۱ ـ آهنگ تغییر متوسط دما ۶۹

۱۳۹ صفحه ۱۰۸ · تمرین — تمرین ۲ ـ کسری از جمعیت آلوده به ویروس ۷۰

۱۴۰ صفحه ۱۰۹ · تمرین — تمرین ۳ ـ فروش کالا و هزینه‌ی تبلیغ ۷۰

۱۴۱ صفحه ۱۰۹ · تمرین — تمرین ۴ ـ لحظه‌ای که سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط برابر است ۷۱

۱۴۲ صفحه ۱۰۹ · تمرین — تمرین ۵ ـ سرعت توپ در $t = 0{,}4$ از روی جدول ۷۱

۱۴۳ صفحه ۱۱۰ · تمرین — تمرین ۶ ـ درست یا نادرست درباره‌ی آهنگ تغییر ۷۱

۱۴۴ صفحه ۱۱۰ · تمرین — تمرین ۷ ـ جرم توده‌ی باکتری $m(t) = t^2+3t$ ۷۲

۱۴۵ صفحه ۱۱۰ · تمرین — تمرین ۸ ـ تخلیه‌ی مایع از ظرف ۷۲

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸۹ صفحه ۷۳ فعالیت

۱) شیب هر یک از خط‌های داده‌شده را مشخص کنید.

۲) با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط به خط‌های d1, d2, d3 و d4 را روی شکل مشخص کنید. (شیب خط‌ها: d1: −2/3، d2: 3/2، d3: −3/2، d4: 5/4)

۱) شیب یک خط برابر است با (تغییر عمودی بر تغییر افقی). با خواندن دو نقطه‌ی روی هر خط، شیب‌ها به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

خط	d1	d2	d3	d4
شیب	−2/3	3/2	−3/2	5/4

۲) خطی که شیب آن منفی است از چپ به راست نزولی و خطی که شیب آن مثبت است صعودی است؛ هرچه قدر مطلق شیب بزرگ‌تر باشد خط تندتر است. اگر خط‌ها از مبدأ بگذرند، برای رسم هر خط کافی است از مبدأ Δx واحد به راست و Δy واحد بالا (یا پایین) برویم. مثلاً برای d1 با شیب 2/3− از مبدأ ۳ واحد به راست و ۲ واحد به پایین می‌رویم:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۰ صفحه ۷۴ فعالیت

نقطه‌ی ثابت A را روی منحنی در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه‌ی A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟

اکنون نقطه‌ی C را سمت چپ نقطه‌ی A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی بیفتد؟

وقتی نقطه‌ی B روی منحنی به A نزدیک می‌شود، خط قاطع AB دور نقطه‌ی A می‌چرخد و وضعیت آن به یک خط معین نزدیک می‌شود؛ این خط همان **خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A** است.

اگر نقطه‌ی C از سمت چپ به A نزدیک شود نیز خط‌های قاطع AC به همان خط مماس نزدیک می‌شوند. بنابراین به‌طور شهودی:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A، حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است، به شرط آنکه نقطه‌ها به قدر کافی (از هر دو طرف) به A نزدیک شوند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۱ صفحه ۷۴ فعالیت

الف) تابع با شرط $0 \le x \le 10$ داده شده است. نقاط $A(2, f(2)), B(6, f(6)), C(5, f(5)), D(4, f(4))$ و $E(3, f(3))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد، یعنی mAB، از دستور به دست می‌آید. به همین روش mAC، mAD و mAE را به دست آورید.

ابتدا مقدارهای تابع را حساب می‌کنیم: $f(2)=16$، $f(3)=21$، $f(4)=24$، $f(5)=25$، $f(6)=24$. سپس:

بازه	[2,6]	[2,5]	[2,4]	[2,3]
Δx	4	3	2	1
Δy	8	9	8	5
شیب قاطع	2	3	4	5

با نزدیک‌شدن نقطه‌ی دوم به A شیب خط قاطع بزرگ‌تر می‌شود.

۹۲ صفحه ۷۵ فعالیت

در هنگام محاسبه‌ی شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δx ها چگونه تغییر می‌کنند؟

در بازه‌های [2,6]، [2,5]، [2,4] و [2,3] مقدار به ترتیب برابر ۴، ۳، ۲ و ۱ است؛ یعنی هر بار نقطه‌ی دوم به A نزدیک‌تر می‌شود و Δx کوچک‌تر (در جهت صفر) می‌شود. مقدار Δy نیز تغییر می‌کند و نسبت همان شیب قاطع است.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir
توشه ای برای موفقیت

۹۳ صفحه ۷۶ فعالیت

ب) حال فرض کنید که با ادامه‌ی روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست‌آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A نزدیک می‌شود. با تکمیل جدول و مقایسه‌ی شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید. (شیب خطی که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد برابر است؛ h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.)

جدول: بازه‌های [۲, ۲.۴]، [۲, ۲.۳]، [۲, ۲.۲]، [۲, ۲.۱]، [۲, ۲.۰۱]، [۲, ۲.۰۰۱] و [2, 2+h] و ستون «شیب».

شیب قاطع در بازه‌ی [2, 2+h] برابر است با:

بازه	[2,2.4]	[2,2.3]	[2,2.2]	[2,2.1]	[2,2.01]	[2,2.001]	[2,2+h]
شیب	5.6	5.7	5.8	5.9	5.99	5.999	6−h

وقتی h به صفر (از راست) نزدیک می‌شود مقدار 6 − h به عدد ۶ نزدیک می‌شود؛ پس حدس می‌زنیم شیب خط مماس در A برابر ۶ است:

۹۴ صفحه ۷۸ **کار در کلاس**

معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع را در نقطه‌ای به طول 2− بنویسید.

فرض کنیم . مشتق در $a = -2$:

نقطه‌ی تماس $(-2, f(-2)) = (-2, 7)$ است؛ پس:

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و به‌صورت $y = x^2 + 3$ خوانده شد.)

۹۵ صفحه ۸۰ **کار در کلاس**

اگر موجود باشد، ثابت کنید . (راهنمایی: تغییر متغیر $x = h + a$ را به کار برید؛ توجه کنید وقتی $h \to 0$ آنگاه $x \to a$.)

در حد سمت چپ قرار می‌دهیم $x = a + h$ یا $h = x - a$. در این صورت $a + h = x$ و $h = x - a$ است. همچنین وقتی $h \to 0$ داریم $x = a + h \to a$ و برعکس، وقتی $x \to a$ داریم $h = x - a \to 0$. پس:

یعنی دو دستور یک حد را می‌دهند و معادل‌اند.

۹۶ صفحه ۸۰ **کار در کلاس**

الف) برای تابع ، و را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آن‌ها قرینه‌ی یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ث) با محاسبه‌ی و صحت حدس خود را بررسی نمایید.

ابتدا تابع مشتق را به دست می‌آوریم. برای داریم و با $h \to 0$:

الف) $f'(5) = -10 + 10 = 0$ و $f'(8) = -16 + 10 = -6$ (مماس در رأس سهمی افقی است).

ب) چون $f'(x) = -2x + 10$ نسبت به $x = 5$ قرینه است، هر دو نقطه‌ی متقارن نسبت به خط $x = 5$ این ویژگی را دارند؛ مثلاً $f'(4) = 2$ و $f'(6) = -2$ (نقاط به طول‌های ۴ و ۶). همچنین ۳ و ۷ با مشتق‌های ۴ و ۴-.

پ) در بازه‌ی $0 < x < 5$ که تابع صعودی است مشتق (شیب مماس) مثبت و در $5 < x < 10$ که تابع نزولی است مشتق منفی است؛ در $x = 5$ مشتق صفر است.

ت) نقطه‌ی ۴ از ۳ به رأس ($x = 5$) نزدیک‌تر است و مماس در آن تخت‌تر است؛ پس شیب مماس در نقطه‌ی ۳ بزرگ‌تر از شیب مماس در نقطه‌ی ۴ است.

ث) $f'(3) = -6 + 10 = 4$ و $f'(4) = -8 + 10 = 2$؛ چون $4 > 2$ حدس درست بود.

---

۹۷ صفحه ۸۱ تمرین

۱) اگر ، را به دست آورید و معادله‌ی خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

نقطه‌ی تماس $(2, f(2)) = (2, 9)$ و شیب ۱۰ است؛ پس:

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و بازسازی شده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۹۸ صفحه ۸۱ تمرین

۲) نقاط داده‌شده روی منحنی زیر A) تا F را با شیب‌های ارائه‌شده در جدول نظیر کنید. (شیب‌ها: $-3, -1, 0, 1/2, 1, 2$)

شیب مماس در هر نقطه نشان‌دهنده‌ی تندی و جهت منحنی است: شیب منفی یعنی منحنی نزولی، شیب صفر یعنی مماس افقی (نقطه‌ی بیشینه یا کمینه), و هرچه شیب مثبت بزرگ‌تر باشد منحنی صعودی‌تر و تندتر است. با شکلی نمونه (فرض‌شده) داریم:

نقطه	A	B	C	D	E	F
شیب	2	1/2	0	-1	-3	1

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ تناظر با شکلی فرضی و بر پایه‌ی قاعده‌ی بالا نوشته شد.)

ایران توشه

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۹ صفحه ۸۱ تمرین

۳) برای نمودار y = f(x) در شکل زیر شیب‌های داده‌شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه‌ی A ب) شیب نمودار در نقطه‌ی B پ) شیب نمودار در نقطه‌ی C ت) شیب خط AB

ث) شیب خط y = 2 ج) شیب خط y = x

(شیب‌ها را به ترتیب m1 تا m6 بنامید.)

با شکلی نمونه (منحنی با شیب منفی در C, شیبی کوچک و مثبت در A و شیب تندتر در B):

- پ) شیب در C منفی است: m3 = −1.5
- ث) خط y = 2 افقی است: m5 = 0
- الف) شیب در A: m1 = 0.5
- ج) خط y = x: m6 = 1
- ت) شیب قاطع AB بین شیب‌های A و B است: m4 = 1.25
- ب) شیب در B (تندترین): m2 = 2

یعنی ترتیب: پ، ث، الف، ج، ت، ب. (شکل کتاب در متن موجود نبود و ترتیب بر پایه‌ی شکلی فرضی به دست آمد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۰ صفحه ۸۱ تمرین

۴) با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید. (مقدارهای f'(x): −2, −0.5, 2, 0.5, 0)

در سمت چپ کمینه تابع نزولی است (مشتق منفی)، در نقطه‌ی کمینه مماس افقی است (مشتق صفر) و در سمت راست صعودی است (مشتق مثبت)؛ هرچه از کمینه دورتر باشیم شیب تندتر است:

نقطه	a	b	c	d	e
f'(x)	−2	−0.5	0	0.5	2

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ پاسخ بر پایه‌ی منحنی‌ای مانند شکل بالا نوشته شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰۱ صفحه ۸۲ تمرین

۵) نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار y = f(x) مشخص کنید به طوری که:

الف) A نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

روی نمودار نمونه‌ی زیر (یک تابع درجه‌ی سوم) نقاط را چنین انتخاب می‌کنیم:

- الف) A: نقطه‌ای روی بخش نزولی نمودار (بین ماکسیمم و مینیمم) — شیب مماس منفی.
- ب) B: نقطه‌ای روی بخش نزولی که زیر محور x است — هم $f < 0$ و هم $f' < 0$.
- پ) C: محل برخورد نمودار با محور x در بخش صعودی (طول ۲) — $f = 0$ و $f' > 0$.
- ت) D: نقطه‌ی مینیمم موضعی — مماس افقی و $f' = 0$.
- ث) E و F: دو نقطه‌ی متقارن نسبت به محور y (طول‌های ۱٫۵− و ۱٫۵) — مشتق هر دو برابر است.
- ج) G: نقطه‌ای بالای محور x روی بخش نزولی — $f > 0$ و $f' < 0$.

(پاسخ یکتا نیست و به شکل کتاب وابسته است که در متن موجود نبود.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۲ صفحه ۸۲ تمرین

۶) اگر ، را به دست آورید.

(با تجزیه‌ی $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$؛ همچنین از $f'(x) = 3x^2$ نیز $f'(-1) = 3$ به دست می‌آید.)

۱۰۳ صفحه ۸۲ تمرین

۷) نقاط A, B, C, D, E و F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A را با mA نمایش داده‌ایم.)

الف) شیب منحنی در همه‌ی این نقاط مثبت است. ب) mB < mA پ) mE < mB < mA

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ت) شیب منحنی در نقاط F, D و C منفی است. ث) mF < mD < mC ج) mA < mC < mD < mF < mE < mB

با شکلی نمونه که با شیب‌های گزاره‌ها سازگار است A) تندترین بخش صعودی، سپس B و در سمت راست E؛ و C, D و F روی بخش نزولی):

- الف) نادرست؛ در C، D و F منحنی نزولی و شیب منفی است.
- ب) درست؛ A تندتر از B صعود می‌کند.
- پ) درست؛ شیب‌ها در E از B و در B از A کمترند و همه مثبت‌اند.
- ت) درست؛ هر سه روی بخش نزولی‌اند.
- ث) درست؛ F از D و D از C تندتر نزول می‌کند.
- ج) نادرست؛ mA بزرگ‌ترین شیب مثبت است نه کوچک‌ترین، و mC منفی است درحالی‌که mE و mB مثبت‌اند: ترتیب درست mF < mD < mC < mE < mB < mA است.

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ پاسخ‌ها بر پایه‌ی شکلی فرضی است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۴ صفحه ۸۳ تمرین

۸) برای تابع f در شکل زیر داریم و . با توجه به شکل مختصات نقاط A, B و C را بیابید. (نقاط روی خط مماس در نقطه‌ی x = 4 به طول‌های ۳، ۴ و ۵ قرار دارند.)

خط مماس در نقطه‌ی به طول ۴ از نقطه‌ی (4, 2.5) می‌گذرد و شیب آن f'(4) = 1.5 است:

- B (نقطه‌ی تماس): B = (4, 2.5)
- A (طول ۳): A = (3, 1) ⇒ y = 1.5×3 − 3.5 = 1
- C (طول ۵): C = (5, 4) ⇒ y = 1.5×5 − 3.5 = 4

(جای نقاط روی شکل در متن موجود نبود و با فرض بالا حل شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۵ صفحه ۸۴ فعالیت

نمودار تابع (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم. اگر برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در x = 2 تعریف مشتق f در x = 2 را به کار گیریم:

الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که f′(2) وجود ندارد؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ب) نقطه‌ی دیگری (به‌جز $x = 2$ در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

ضابطه‌ی تابع: $f(x) = x^2 - 1$ برای $x \neq 2$ و $f(2) = 0$ (در شکل، نقطه‌ی $(۲, ۳)$ توخالی و نقطه‌ی $(۲, ۰)$ توپر است):

الف) نمودار در $x = 2$ پیوسته نیست (حد تابع در ۲ برابر ۳ ولی مقدار تابع ۰ است). وقتی x از دو طرف به ۲ نزدیک می‌شود، نقطه‌ی $(x, f(x))$ به نقطه‌ی توخالی $(۲, ۳)$ نزدیک می‌شود، ولی نقطه‌ی تماس باید $(۲, ۰)$ باشد؛ پس شیب خط‌های قاطع که از $(۲, ۰)$ می‌گذرند بی‌کران می‌شود (خط‌های قاطع به خط قائم نزدیک می‌شوند) و خط مماس غیرقائمی وجود ندارد. به کمک تعریف: حد صورت کسر برابر ۳ و حد مخرج برابر صفر است، پس حد موجود (و متناهی) نیست؛ بنابراین $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) بله. هر نقطه‌ی دیگر مانند $x = a \neq 2$ را در نظر بگیریم، در یک همسایگی آن $f(x) = x^2 - 1$ است و موجود است؛ پس تابع در همه‌ی نقاط به‌جز ۲ مشتق‌پذیر است.

۱۰۶ صفحه ۸۵ کار در کلاس

تابع g (شکل زیر) را به صورت در نظر می‌گیریم. چرا $g'(1)$ موجود نیست؟

تابع در $x = 1$ ناپیوسته است: $g(1) = 1$، حد چپ برابر ۱ و حد راست برابر ۲ است. در عمل نیز و حد چپ برابر است. حد راست نامتناهی است و با حد چپ برابر نیست، پس $g'(1)$ وجود ندارد.

۱۰۷ صفحه ۸۶ کار در کلاس

در اثبات قضیه‌ی «اگر f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است» عبارت نوشته شده است. (چرا؟)

چون f در a مشتق‌پذیر است، حد موجود و متناهی است و می‌توان حد حاصل‌ضرب را برابر حاصل‌ضرب حدها گرفت. از طرفی است؛ پس حاصل‌ضرب برابر $f'(a) \times 0 = 0$ می‌شود.

بنابراین ، یعنی و f در a پیوسته است.

۱۰۸ صفحه ۸۷ کار در کلاس

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل () در $x = -1$ نیز موجود نیست. در صورت امکان معادله‌ی نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x = -1$ را بنویسید.

برای $-1 < x < 1$ داریم $f(x) = 1 - x^2$ و برای $x < -1$ داریم $f(x) = x^2 - 1$؛ همچنین $f(-1) = 0$.

مشتق راست و چپ متناهی ولی نابرابرند؛ پس $f'(-1)$ وجود ندارد (نقطه‌ی گوشه‌ای). معادله‌ی نیم‌مماس‌ها:

- نیم‌مماس راست: $y = 2(x + 1)$ یا $y = 2x + 2$، $x \geq -1$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- نیم‌مماس چپ: $y = -2(x + 1)$ یا $y = -2x - 2$، $x \leq -1$

۱۰۹ صفحه ۸۹ **کار در کلاس**

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص‌شده مشتق‌پذیر نیست.

با توجه به شکل‌های نمونه (شکل کتاب در متن موجود نبود) هر نمودار را بررسی می‌کنیم:

- (۱) در x2 نقطه‌ی گوشه‌ای است (مشتق راست و چپ متناهی ولی نابرابر): مشتق‌پذیر نیست.
- (۲) در x2 ناپیوسته است: مشتق‌پذیر نیست.
- (۳) در x2 مماس قائم دارد (مشتق‌ها بی‌کران): مشتق‌پذیر نیست.
- (۴) در x2 نقطه‌ی گوشه‌ای است؛ در x1، x3 و x4 مشتق‌پذیر است.
- (۵) در x2 نقطه‌ی بازگشتی (مشتق‌های یک‌طرفه نامتناهی با علامت مخالف) است: مشتق‌پذیر نیست.
- (۶) نمودار هموار است و در همه‌ی نقطه‌های x1، x2 و x3 مشتق‌پذیر است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۰ صفحه ۹۰ **فعالیت**

تابع را در نظر می‌گیریم. جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده است). حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع وجود دارد؟

از رابطه‌ی استفاده می‌کنیم:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

مماس بر منحنی در هر نقطه یکتا و غیرقائم است، پس به هر x یک عدد $f'(x)$ نظیر می‌شود؛ یعنی f' تابعی از x است. حدس می‌زنیم مشتق در همه‌ی نقاط (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) وجود دارد و $f'(x) = 2x$ است.

۱۱۱ صفحه ۹۲ **کار در کلاس**

اگر ، دامنه‌ی f و دامنه‌ی f' را محاسبه کنید و ضابطه‌ی f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

دامنه‌ی f مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. f در $x = 1$ ناپیوسته است (حد برابر ۵ ولی مقدار تابع ۲)، پس در ۱ مشتق‌پذیر نیست. برای $x \neq 1$ تابع در یک همسایگی x ثابت و برابر ۵ است؛ پس $f'(x) = 0$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۱۲ صفحه ۹۵ کار در کلاس

۱) مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید: الف) ب) پ)

۲) اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$، $f'(2)=5$، $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$، مقدار $(fg)'(2)$ و را به دست آورید.

۱) الف)

ب) (یا با دستور حاصل‌ضرب:).

پ)

۲)

(ضابطه‌ی تابع‌های بخش ۱ در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۳ صفحه ۹۶ کار در کلاس

مشتق توابع زیر را به دست آورید. الف) ب)

الف)

ب)

(ضابطه‌ی g در متن ناقص بود و به صورت بالا خوانده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۴ صفحه ۹۷ کار در کلاس

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. الف) ب) پ)

الف) با دستور حاصل‌ضرب و قاعده‌ی زنجیری:

ب)

پ)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱۵ صفحه ۹۷ **کار در کلاس**

مشتق‌پذیری روی بازه‌های (a, b] و [a, b) را به‌طور مشابه تعریف کنید. تابع f روی بازه‌ی (a, b] مشتق‌پذیر است هرگاه ... تابع f روی بازه‌ی [a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه ...

بازه‌ی (a, b] : تابع f روی بازه‌ی (a, b] مشتق‌پذیر است هرگاه f در بازه‌ی باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ی b مشتق چپ داشته باشد (یعنی موجود و متناهی باشد).

بازه‌ی [a, b) : تابع f روی بازه‌ی [a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه f در بازه‌ی باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ی a مشتق راست داشته باشد (یعنی موجود و متناهی باشد).

۱۱۶ صفحه ۹۷ **کار در کلاس**

تابع را در نظر می‌گیریم. f روی بازه‌های [1 ,2-] و (۱, ∞) مشتق‌پذیر است ولی f روی بازه‌ی [۱, ۲] مشتق‌پذیر نیست. (چرا؟)

f در x = 1 ناپیوسته است: f(1) = 1 و . پس f در ۱ مشتق‌پذیر نیست؛ ولی روی بازه‌ی [۱, ۲] مشتق‌پذیری یعنی مشتق راست در ۱ موجود باشد: (نامتناهی). بنابراین مشتق راست در ۱ وجود ندارد و f روی [۱, ۲] مشتق‌پذیر نیست. اما روی [۱,۲-] کافی است مشتق چپ در ۱ را بررسی کنیم که موجود است.

۱۱۷ صفحه ۹۸ **کار در کلاس**

اگر ، نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های [1 ,1-] ، [۱ ,۲) و [0 ,2-] بررسی کنید.

- **[1 ,1-]:** روی (۱,۱-) ضابطه‌ی x - 1 است و مشتق‌پذیر است؛ مشتق راست در ۱- برابر ۱ و مشتق چپ در ۱ برابر ۱ موجود است. پس f روی [۱,۱-] مشتق‌پذیر است.
- **(2 ,5):** روی این بازه f(x) = -x + 5 و f′(x) = -1 است؛ پس مشتق‌پذیر است.
- **[0 ,2-]:** در x = -۱ تابع ناپیوسته است (حد چپ ۳، مقدار تابع ۲-)؛ پس در این نقطه از بازه مشتق‌پذیر نیست و f روی [۰ ,۲-] مشتق‌پذیر نیست.

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۱۸ صفحه ۹۹ تمرین

۱) دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در x = 2 پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

مثال‌ها: و .

f پیوسته است و ، ؛ مشتق‌های یک‌طرفه نابرابرند (نقطه‌ی گوشه‌ای).

g نیز پیوسته است ولی ؛ پس g در ۲ مشتق ندارد (مماس قائم).

۱۱۹ صفحه ۹۹ تمرین

۲) با محاسبه‌ی مشتق راست و مشتق چپ توابع داده‌شده در نقطه‌ی A، نشان دهید که این توابع در نقطه‌ی A مشتق‌پذیر نیستند.

(الف) $y = -x$ و $y = 2x$، $A(0, 0)$ (ب) $y = 1/x$ و $y = 1$، $A(1, 1)$ (پ) $y = x/2$ و $y = \sqrt{x}$، $A(4, 2)$

با شکل نمونه‌ی زیر (ضابطه‌ی سمت چپ و راست نقطه‌ی A را طبق ترتیب نوشته‌شده فرض کرده‌ایم):

الف) : ؛ نابرابر ⇒ مشتق‌پذیر نیست.

ب) برای $x \le 1$ ضابطه‌ی و برای $x > 1$ ضابطه‌ی $y = 1$: ؛ نابرابر ⇒ مشتق‌پذیر نیست.

پ) برای $x \le 4$ ضابطه‌ی و برای $x > 4$ ضابطه‌ی : ؛ نابرابر ⇒ مشتق‌پذیر نیست.

(شکل کتاب در متن موجود نبود و ترتیب ضابطه‌ها فرض شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۰ صفحه ۹۹ تمرین

۳) تابع داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟

پ) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید. ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

الف و ب) در $x = ۰$ حد چپ ۴ و حد راست ۰ است؛ در $x = ۳$ حد چپ ۳ و حد راست ۹ است. نمودار در این دو نقطه گسسته (ناپیوسته) است؛ پس $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند.

پ) مشتق در بقیه‌ی نقاط:

دامنه‌ی f' برابر $\mathbb{R} - \{0, 3\}$ است.

ت) نمودار f' در شکل سمت راست رسم شده است (نقطه‌های توخالی در $x = ۰$ و $x = ۳$ به معنای وجودنداشتن مشتق‌اند).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۱ صفحه ۹۹ تمرین

۴) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن الف) در یک نقطه برابر صفر شود. ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود. پ) در تمام نقاط مثبت باشد. ت) در تمام نقاط یکسان باشد. ث) در تمام نقاط منفی باشد.

پاسخ یکتا نیست؛ نمونه‌هایی از هر حالت:

- الف) $y = x^2 : f'(x) = 2x$ فقط در $x = 0$ صفر است.
- ب) $y = x^2 - x : f'(x) = 2x - 1$ و $f'(2) = 3$.
- پ) $y = x^3 + 3x : f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ در همه‌ی نقاط.
- ت) $y = 2x - 1 : f'(x) = 2$ در همه‌ی نقاط (خط، شیب ثابت).
- ث) $y = -x^3 - 3x : f'(x) = -3x^2 - 3 < 0$ در همه‌ی نقاط.

۱۲۲ صفحه ۹۹ تمرین

۵) الف) با استفاده از نمودار تابع (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید: $f'(0), f'(-1), f'(2)$ و $f'(3)$.

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه‌ی مشتق تابع بررسی کنید. پ) تابع مشتق را رسم کنید.

الف) رأس سهمی در $x = -1$ است (مماس افقی). در سمت چپ رأس شیب منفی و در سمت راست مثبت است و هرچه از رأس دورتر شویم شیب مماس بزرگ‌تر می‌شود؛ پس ترتیب: $f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$

ب) ؛ در نتیجه $f'(-1) = 0$، $f'(0) = 2$، $f'(2) = 6$، $f'(3) = 8$ و ترتیب درست است.

پ) نمودار $f'(x) = 2x + 2$ خطی با شیب ۲ و عرض از مبدأ ۲ است (شکل سمت راست).

۱۲۳ صفحه ۱۰۰ تمرین

۶) مشتق‌پذیری تابع را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی کنید.

$f(1) = 4$ و حد چپ $4 - 2 = 6$ است؛ پس f در ۱ پیوسته است. مشتق‌های یک‌طرفه:

چون $f'_-(1) \neq f'_+(1)$، تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست (نقطه‌ی گوشه‌ای).

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و با شرط پیوستگی بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۲۴ صفحه ۱۰۰ تمرین

۷) سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آن‌ها با هم برابر باشند.

توابع ، و سه تابع مختلف‌اند که مشتق هر سه 2x است (مشتق عدد ثابت صفر است).

۱۲۵ صفحه ۱۰۰ تمرین

۸) اگر ، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

x = 2: $f(2) = 0$؛ برای $x > 2$ داریم $|x^2 - 4| = x^2 - 4$ و برای $-2 < x < 2$ داریم $4 - x^2$.

x = −2: $f(-2) = 0$؛ برای $x < -2$ ضابطه‌ی $x^2 - 4$ و برای $-2 < x < 2$ ضابطه‌ی $4 - x^2$ است.

در هر دو نقطه مشتق‌های راست و چپ نابرابرند؛ پس f در $x = 2$ و $x = -2$ مشتق‌پذیر نیست.

۱۲۶ صفحه ۱۰۰ تمرین

۹) مشتق تابع را به دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

برای $x \neq 0$ با دستور (یا از تعریف):

در $x = 0$: که حد راست آن $+\infty$ و حد چپ آن $-\infty$ است. f در ۰ پیوسته است و مشتق‌های یک‌طرفه نامتناهی‌اند؛ پس خط $x = 0$ (محور yها) مماس قائم منحنی در مبدأ است (نمودار شبیه نوک تیز).

۱۲۷ صفحه ۱۰۰ تمرین

۱۰) نمودار توابع f, g, h و t را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.

با نمودارهای نمونه‌ی $f(x) = x^2$، $g(x) = x + 1$، $h(x) = x^3$ و $t(x) = |x|$ (ردیف بالا) و مشتق‌ها (ردیف پایین):

- (۲) ← f؛ شیب سهمی با x متناسب است: $f'(x) = 2x$ (خط گذرنده از مبدأ).
- (۳) ← g؛ شیب خط ثابت است: $g'(x) = 1$.
- (۴) ← h؛ $h'(x) = 3x^2$ (سهمی همواره نامنفی با کمینه‌ی ۰).
- (۱) ← t؛ $t'(x) = -1$ برای $x < 0$ و $t'(x) = 1$ برای $x > 0$ و در $x = 0$ مشتق وجود ندارد.

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ تناظر بر پایه‌ی نمودارهای فرضی است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۸ صفحه ۱۰۰ تمرین

۱۱) نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید (نقطه‌ی (۲, ۴) محل برخورد نمودارهاست).

الف) اگر $h(x) = f(x)\cdot g(x)$، مطلوب است $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$.

ب) اگر ، مطلوب است $k'(1)$، $k'(2)$ و $k'(3)$.

با فرض اینکه نمودارها دو خط باشند: f خطی گذرنده از مبدأ و (۲, ۴) یعنی $f(x) = 2x$ و g خطی با شیب ۱ گذرنده از (۲, ۴) یعنی $g(x) = x + 2$.

الف) ؛ پس

ب) ؛ پس

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ ضابطه‌ی خط‌ها از روی شکل حدس زده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۹ صفحه ۱۰۱ تمرین

۱۲) اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ است، مطلوب است $(f + g)'(1)$ و $(3f + 2g)'(1)$.

۱۳۰ صفحه ۱۰۱ تمرین

۱۳) اگر نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

هر دو مشتق یک‌طرفه موجودند ولی $0 \neq 1$، پس $f'(0)$ وجود ندارد f در ۰ پیوسته ولی نقطه‌ی گوشه‌ای دارد).

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳۱ صفحه ۱۰۱ تمرین

۱۴) مشتق توابع داده‌شده را به دست آورید.

الف) ب) پ) ت)

الف)

ب)

پ)

ت)

(ضابطه‌ی تابع‌ها در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۳۲ صفحه ۱۰۱ **تمرین**

۱۵) مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) ب) پ) ت)

الف)

ب)

پ)

ت)

(ضابطه‌ی تابع (ب) در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۳۳ صفحه ۱۰۱ **تمرین**

۱۶) اگر ، مقادیر زیر را حساب کنید. الف) ب)

الف)

ب)

(ضابطه‌ی تابع و ترتیب جمله‌ها در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۳۴ صفحه ۱۰۴ **کار در کلاس**

نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه‌ی t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

(محاسبه‌ی عددی لازم نیست.)

(A سرعت متوسط بین t = 1 و t = 3 (B سرعت متوسط بین t = 5 و t = 6 (C سرعت لحظه‌ای در t = 1

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

(D سرعت لحظه‌ای در t = 3 (E سرعت لحظه‌ای در t = 5 (F سرعت لحظه‌ای در t = 6

سرعت لحظه‌ای برابر شیب خط مماس و سرعت متوسط برابر شیب خط قاطع است. نمودار نمونه (مکان یک ذره که تا حدود t = ۴ بالا می‌رود و سپس برمی‌گردد):
در سمت چپ نقطه‌ی بیشینه شیب‌ها مثبت و کاهشی و در سمت راست منفی‌اند. شیب مماس در t = ۱ از شیب قاطع بین ۱ و ۳ بزرگ‌تر و آن از شیب مماس در ۳ بزرگ‌تر است؛ در سمت راست شیب‌ها منفی‌اند و از ۵ به ۶ منفی‌تر می‌شوند (و شیب قاطع بین ۵ و ۶ بین دو مماس است). پس:

یعنی ترتیب از کوچک به بزرگ: F, B, E, D, A, C.

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ پاسخ بر پایه‌ی منحنی‌ای شبیه شکل بالا نوشته شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۳۵ صفحه ۱۰۵ کار در کلاس

(تابع قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد.)
الف) آهنگ متوسط رشد در بازه‌ی زمانی [۰, ۲۵] چقدر است؟
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟
پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

الف) سانتی‌متر بر ماه.

ب) ؛ پس

آهنگ لحظه‌ای رشد در ۲۵ ماهگی (۰٫۷ سانتی‌متر بر ماه) بیشتر از ۴۹ ماهگی (۰٫۵) است؛ یعنی رشد با گذشت زمان کندتر می‌شود.

پ) سانتی‌متر بر ماه. برای مقایسه: طبق تابع، f(16) = 78 و f(36) = 92 و آهنگ متوسط تغییر در این بازه است. پس رشد علی (۰٫۷۵) کمی از رشد متوسط (۰٫۷) سریع‌تر بوده است.

---

۱۳۶ صفحه ۱۰۶ کار در کلاس

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه‌ی زمانی [۱۳۶۴, ۱۳۷۹] را به دست آورید (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار). بازه‌ی زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

مقادیر تقریبی از روی نمودار: نرخ باروری در سال ۱۳۶۴ حدود ۶٫۵ و در سال ۱۳۷۹ حدود ۲٫۱ فرزند به ازای هر مادر است. پس:

یعنی در این بازه نرخ باروری به طور متوسط سالی حدود ۰٫۳ فرزند کاهش یافته است.

آهنگ متوسط تغییر وقتی مثبت است که نرخ باروری در بازه افزایش یافته باشد. طبق نمودار، نرخ باروری از حدود سال ۱۳۵۵ (مقدار حدود ۶٫۲) تا ۱۳۶۴ (حدود ۶٫۵) افزایش داشته است؛ پس بازه‌ای مانند [۱۳۵۵, ۱۳۶۴] آهنگ متوسط مثبت دارد (حدود 0.03 ≈ 0.3/9 فرزند در سال).

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ مقادیر تقریبی‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۳۷ صفحه ۱۰۸ — کار در کلاس

با توجه به مثال قبل (جسمی که از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌شود و ارتفاع آن است):

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه‌ی زمانی [۵, ۸] به دست آورید.

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم ۳۵ m/s و ۳۵- m/s است.

الف) . جسم هنگام پرتاب در $t = 0$ است و هنگام برخورد به زمین $h(t) = 0 \Rightarrow -5t(t - 8) = 0 \Rightarrow t = 8$.

ب) متر بر ثانیه.

پ) $-10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5$ ثانیه (سرعت ۳۵ در بالا رفتن)؛ و $-10t + 40 = -35 \Rightarrow t = 7.5$ ثانیه (سرعت ۳۵- در برگشت).

۱۳۸ صفحه ۱۰۸ — تمرین

۱) جدول زیر درجه‌ی حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

الف) آهنگ تغییر متوسط درجه‌ی حرارت نسبت به زمان را از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید. ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید. پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

h (ساعت)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
T (درجه‌ی حرارت)	11	13	14	17	19	18	17	15	13	10	9

الف) درجه‌ی سانتی‌گراد بر ساعت.

ب) درجه‌ی سانتی‌گراد بر ساعت.

پ) از ساعت ۸ تا ۱۲ هوا به طور متوسط ساعتی ۲ درجه گرم‌تر شده و از ۱۲ تا ۱۸ به طور متوسط ساعتی حدود ۱٫۶۷ درجه سردتر شده است (علامت منفی یعنی کاهش دما).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳۹ صفحه ۱۰۸ تمرین

۲) کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله‌ی یک ویروس آلوده شده‌اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند؟ ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های t = 1, t = 2 یا t = 3 بیشتر است؟ پ) قسمت ب را برای t = 4, t = 5 و t = 6 بررسی کنید.

با نمودار نمونه‌ی زیر (خط l قاطع و خط d مماس بر نمودار):

الف) شیب خط قاطع ,l آهنگ متوسط گسترش آلودگی (تغییر کسر آلوده‌ها بر مدت زمان) در بازه‌ی میان دو نقطه‌ی آن است و شیب خط مماس ,d آهنگ لحظه‌ای گسترش آلودگی در لحظه‌ی تماس است.

ب) گسترش آلودگی در هر لحظه برابر شیب مماس است. در لحظه‌های ۱ تا ۳ نمودار صعودی و تندشونده است (شیب زیاد می‌شود)؛ پس شیب در t = ۳ بیشترین است و گسترش آلودگی در t = 3 از t = 2 و آن از t = 1 بیشتر است.

پ) پس از آن نمودار به صعود کندتر می‌رسد (شیب کم می‌شود)؛ پس در t = 4 گسترش بیشتر از t = 5 و در t = 5 بیشتر از t = 6 است.

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ پاسخ بر پایه‌ی منحنی‌ای Sشکل نوشته شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۰ صفحه ۱۰۹ تمرین

۳) نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است (نقاط (۱, ۳۰۰), (۲, ۴۸۰), (۳, ۶۰۰) و (۴, ۷۰۰) روی نمودارند).

الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فرض می‌کنیم نمودار از مبدأ می‌گذرد (N(0) = 0).

بازه	[0,1]	[1,2]	[2,3]	[3,4]
آهنگ تغییر ΔN/Δt	300	180	120	100

محاسبه: (واحد فروش بر میلیون تومان).

ب) با افزایش هزینه‌ی تبلیغ، بازار به تدریج اشباع می‌شود و تعداد مشتریان تازه‌ای که با هر میلیون تومان تبلیغاتی بیشتر جذب می‌شوند کمتر می‌شود؛ پس سود افزوده‌ی هر میلیون تومان بعدی کمتر است (نمودار صعودی ولی با تقعر رو به پایین).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۱ صفحه ۱۰۹ تمرین

۴) معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت بر حسب متر در بازه‌ی زمانی t [0, 5] بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی [۰, ۵] برابر است؟

در لحظه‌ی t = 2.5 ثانیه سرعت لحظه‌ای برابر سرعت متوسط است.

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و به صورت بالا خوانده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۲ صفحه ۱۰۹ تمرین

۵) توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. f(t) نشان‌دهنده‌ی فاصله‌ی توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر f(t) در جدول زیر نمایش داده شده است. بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰٫۴ ثانیه است، نشان دهد؟

الف) 1.23 m/s ب) 14.91 m/s پ) 11.5 m/s ت) 16.03 m/s

t (ثانیه)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
f(t) (متر)	11	12.4	13.8	15.1	16.3	17.4	18.4

سرعت لحظه‌ای در t = ۰٫۴ را با آهنگ متوسط تغییر در بازه‌ی کوچکی که ۰٫۴ وسط آن باشد تقریب می‌زنیم:

(با بازه‌های یک‌طرفه: 12 = 0.1/(16.3−15.1) و 11 = 0.1/(17.4−16.3) که میانگین آن‌ها هم ۱۱٫۵ است.) پس گزینه‌ی **(پ) ۱۱٫۵ m/s** درست است.

۱۴۳ صفحه ۱۱۰ تمرین

۶) کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است:

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه‌ی [۰, ۱] همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه‌ی (مورد نظر) است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$ باشد.

الف) نادرست. برای خط $f(x) = x$ آهنگ متوسط در $[0, 1]$ برابر ۱ و شیب منحنی در هر نقطه نیز ۱ است (کمتر نیست)؛ همچنین برای $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط در $[0, 1]$ برابر ۱ و شیب در $x = 1$ برابر $1/2$ است که از آهنگ متوسط کوچک‌تر است.

ب) نادرست. صعودی‌بودن تابع یعنی آهنگ‌های تغییر مثبت‌اند، نه اینکه آهنگ تغییر متوسط خودش صعودی (بزرگ‌شونده) باشد. مثلاً $f(x) = \sqrt{x}$ صعودی است ولی آهنگ متوسط در بازه‌های $[0,1]$، $[1,4]$ و $[4,9]$ به ترتیب 1، $1/3$ و $1/5$ است که کاهشی است.

پ) نادرست. مثلاً $f(x) = x^2$ در $a = 0$ هم $f(0) = 0$ و هم $f'(0) = 0$ دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۴ صفحه ۱۱۰ تمرین

۷) یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم گرم است.
الف) جرم این توده‌ی باکتری در بازه‌ی زمانی $3 \le t \le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟ ب) آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t = 3$ چقدر است؟

الف) گرم.

ب) گرم بر ساعت.

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴۵ صفحه ۱۱۰ تمرین

۸) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه‌ی $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه‌ی به دست آید:
الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه‌ی زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟ ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه‌ی $[0, 100]$ می‌شود؟

الف) $V(0) = 40$ و $V(1) = 40(0.99)^2 = 39.204$؛ پس

ب) $V(100) = 0$ و آهنگ متوسط در $[0, 100]$ برابر لیتر بر ثانیه است. مشتق:

در لحظه‌ی $t = 50$ ثانیه (حالت وسط بازه). (ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام حسابان ۲ - فصل پنجم

کاربردهای مشتق

فهرست

۱۴۶ صفحه ۱۱۲ · فعالیت — بیشترین و کمترین دما در ۴۸ ساعت ۷۷

۱۴۷ صفحه ۱۱۳ · کار در کلاس — ماکزیمم و مینیمم مطلق در سه نمودار ۷۷

۱۴۸ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس — اکسترمم‌های نسبی و مطلق (سه نمودار) ۷۷

۱۴۹ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس — مقدار و طول اکسترمم‌ها در پنج نمودار ۷۸

۱۵۰ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس — رسم نمودار با ماکزیمم و مینیمم نسبی داده‌شده ۷۹

۱۵۱ صفحه ۱۱۵ · کار در کلاس — اکسترمم‌های مطلق $f(x)=x^2$ (بازه‌ی بسته، باز و R) ۷۹

۱۵۲ صفحه ۱۱۵ · فعالیت — اکسترمم‌های نسبی و مشتق (نمودار با نقاط a تا l) ۷۹

۱۵۳ صفحه ۱۱۶ · فعالیت — نمودار با اکسترمم و مشتق موجود؛ گزاره‌های درست ۸۰

۱۵۴ صفحه ۱۱۶ · فعالیت — اکسترمم‌های مطلق در بازه‌های بسته و باز ۸۰

۱۵۵ صفحه ۱۲۰ · فعالیت — شیب مماس و صعودی/نزولی بودن ۸۱

۱۵۶ صفحه ۱۲۱ · فعالیت — رسم نمودار با علامت مشتق داده‌شده ۸۲

۱۵۷ صفحه ۱۲۱ · کار در کلاس — تابع صعودی اکید و مشتق‌پذیری ۸۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۸ صفحه ۱۲۱ · کار در کلاس — تابع x/1 نزولی است؟ ۸۳

۱۵۹ صفحه ۱۲۲ · فعالیت — آزمون مشتق اول ۸۳

۱۶۰ صفحه ۱۲۴ · کار در کلاس — تحلیل تابع از روی نمودار f′ ۸۴

۱۶۱ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۱: نمودار با چهار ویژگی ۸۴

۱۶۲ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۲: بدون ماکزیمم و مینیمم مطلق ۸۴

۱۶۳ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۳: صعودی و نزولی غیراکید ۸۵

۱۶۴ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۴: نمودارهای اکیداً یکنوا با ویژگی خاص ۸۵

۱۶۵ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۵: ماکزیمم مطلق f ولی نه |f| ۸۵

۱۶۶ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۶: اکسترمم‌های نسبی و مطلق ۸۵

۱۶۷ صفحه ۱۲۶ · تمرین — تمرین ۷: مینیمم نسبی $f(x)=x^3+ax+b$ ۸۶

۱۶۸ صفحه ۱۲۶ · تمرین — تمرین ۸: رسم نمودار با مقدارهای داده‌شده ۸۶

۱۶۹ صفحه ۱۲۶ · تمرین — تمرین ۹: جعبه با بیشترین حجم از برگه‌ی کاغذی ۸۶

۱۷۰ صفحه ۱۲۶ · تمرین — تمرین ۱۰: مستطیل محاط در نیم‌دایره ۸۷

۱۷۱ صفحه ۱۲۶ · تمرین — تمرین ۱۱: صعودی و نزولی بودن توابع ۸۷

۱۷۲ صفحه ۱۲۸ · فعالیت — شیب مماس‌ها و جهت تقعر ۸۷

۱۷۳ صفحه ۱۳۰ · کار در کلاس — رسم نمودار با تقعر داده‌شده ۸۸

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۷۴ صفحه ۱۳۲ · کار در کلاس — شناسایی نقاط عطف در نمودارها ۸۸

۱۷۵ صفحه ۱۳۲ · کار در کلاس — درست یا نادرست درباره‌ی نقطه‌ی عطف ۸۹

۱۷۶ صفحه ۱۳۵ · کار در کلاس — تعیین نمودار f از روی نمودار f' ۸۹

۱۷۷ صفحه ۱۳۶ · کار در کلاس — تعیین نمودار f از روی نمودار f'' ۸۹

۱۷۸ صفحه ۱۳۶ · تمرین — تمرین ۱: تغییر تقعر بدون نقطه‌ی عطف ۹۰

۱۷۹ صفحه ۱۳۶ · تمرین — تمرین ۲: جهت تقعر و نقطه‌ی عطف توابع ۹۰

۱۸۰ صفحه ۱۳۶ · تمرین — تمرین ۳: تابع درجه‌ی سوم با نقطه‌ی عطف داده‌شده ۹۰

۱۸۱ صفحه ۱۳۶ · تمرین — تمرین ۴: یافتن a و b و c از شرط نقطه‌ی عطف ۹۱

۱۸۲ صفحه ۱۳۶ · تمرین — تمرین ۵: ضرایب تابع درجه‌ی سوم با نمودار ۹۱

۱۸۳ صفحه ۱۴۴ · تمرین — تمرین ۱: جدول رفتار و نمودار ۶ تابع ۹۱

۱۸۴ صفحه ۱۴۴ · تمرین — تمرین ۲: تابع هموگرافیک با مجانب‌های داده‌شده ۹۲

۱۸۵ صفحه ۱۴۴ · تمرین — تمرین ۳: تشخیص نمودار $x^3-2x+\dots$ ۹۲

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۴۶ صفحه ۱۱۲ فعالیت

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟

با توجه به نمودار، بالاترین نقطه‌ی منحنی نقطه‌ی (39, 27) و پایین‌ترین نقطه‌ی آن (3, 10) است. پس:

- **بیشترین دما:** 27 درجه، در زمان x = 39 (ساعت ۳۹ ام)؛
- **کمترین دما:** 10 درجه، در زمان x = 3 (ساعت ۳ ام).

(مقدارهای دمای ابتدا و انتهای بازه‌ی ۴۸ ساعته در متن در دسترس نبود و فرض شد از ۱۰ بیشتر و از ۲۷ کمتر است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۷ صفحه ۱۱۳ کار در کلاس

۱) در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را در صورت وجود مشخص نمایید.

شکل کتاب در دسترس نبود؛ سه نمودار نمونه (مطابق برچسب‌های کتاب) فرض شد و روش پاسخ مستقل از شکل است:

- **الف)** f روی بازه‌ی بسته‌ی [a, e] پیوسته است. ماکزیمم مطلق برابر ۶ و در x = b و مینیمم مطلق برابر ۱ و در x = c است.
- **ب)** g روی بازه‌ی باز (a, d) تعریف شده است. مقدار g(b) = 5 از مقدارهای اطراف بیشتر است اما نزدیک d مقدارها به ۷ نزدیک می‌شوند و ۷ هرگز گرفته نمی‌شود؛ پس ماکزیمم مطلق ندارد. به همین ترتیب نزدیک a مقدارها به ۰٫۵ نزدیک می‌شوند و از g(c) = 1.5 کمتر می‌شوند، ولی ۰٫۵ گرفته نمی‌شود؛ پس مینیمم مطلق هم ندارد.
- **پ)** h در x = c ناپیوسته است و h(c) = 2 (مقدار ۵ گرفته نمی‌شود). ماکزیمم مطلق برابر ۴ و در x = d و مینیمم مطلق برابر ۰٫۵ و در x = e (نقطه‌ی انتهایی) است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۸ صفحه ۱۱۴ کار در کلاس

۲) دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطه‌ی ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به‌گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطه‌ی ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

شکل در دسترس نبود؛ سه نمودار زیر فرض شد. نقطه‌ی انتهایی بازه چون در دو طرف خود تعریف نشده است اکسترمم نسبی نیست (اما می‌تواند اکسترمم مطلق باشد).

- **الف)** ماکزیمم نسبی در b (مقدار ۶) و d (مقدار ۵)؛ مینیمم نسبی در c (مقدار ۲). ماکزیمم مطلق ۶ در b؛ مینیمم مطلق ۱ در e (نقطه‌ی انتهایی).
- **ب)** ماکزیمم نسبی در b (مقدار ۴). در c و d مینیمم نسبی (مقدار ۲) و هر نقطه‌ی درونی پاره‌خط افقی cd هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است. ماکزیمم مطلق ۵ در e و مینیمم مطلق ۱ در a (هر دو نقطه‌ی انتهایی).
- **پ)** ماکزیمم نسبی در b (مقدار ۴) و در c (مقدار ۵، چون f(c) از مقدارهای اطراف بیشتر است). مینیمم نسبی ندارد. ماکزیمم مطلق ۵ در c و مینیمم مطلق ۱ در a.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۹ صفحه ۱۱۴ **کار در کلاس**

۳) در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.

شکل‌های کتاب در دسترس نبود؛ نمودارهای زیر فرض شد.

- **الف)** روی $[-2, 2]$: مینیمم نسبی و مطلق برابر ۰ در $x = 0$؛ ماکزیمم مطلق ۴ در $x = \pm 2$ (نقاط انتهایی، ماکزیمم نسبی نیستند).
- **ب)** روی $[-3, 3]$: ماکزیمم نسبی و مطلق برابر ۴ در $x = 0$؛ مینیمم مطلق ۲- در $x = \pm 3$؛ مینیمم نسبی ندارد.
- **پ)** روی $[-1, 2]$: اکسترمم نسبی ندارد؛ ماکزیمم مطلق ۲ در $x = 2$ و مینیمم مطلق ۱- در $x = -1$.
- **ت)** روی $(-1, 2)$: مینیمم نسبی و مطلق ۰ در $x = 0$؛ ماکزیمم مطلق ندارد (۴ گرفته نمی‌شود).
- **ث)** تابع ثابت روی $[-1, 2]$: مقدار ۱ هم ماکزیمم و هم مینیمم مطلق است و در هر نقطه (طول دلخواه) رخ می‌دهد؛ هر نقطه‌ی درونی هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵۰ صفحه ۱۱۴ کار در کلاس

۴) نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطه‌ی (2, 4) ماکزیمم نسبی و در نقطه‌ی (5, 1) مینیمم نسبی داشته باشد.

منحنی را از نقطه‌ای پایین‌تر از ۴ شروع می‌کنیم، از نقطه‌ی (2, 4) (بالاترین نقطه‌ی محلی) رد می‌کنیم، تا (5, 1) (پایین‌ترین نقطه‌ی محلی) پایین می‌آوریم و دوباره بالا می‌بریم. هر منحنی هموار با این ویژگی پاسخ است:

۱۵۱ صفحه ۱۱۵ کار در کلاس

۵) تابع را در نظر بگیرید.

الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های [0, 1] و (0, 1) بررسی کنید.

ب) وجود اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر بررسی نمایید.

الف) روی [0, 1] تابع صعودی است؛ پس مینیمم مطلق $f(0) = 0$ و ماکزیمم مطلق $f(1) = 1$ وجود دارد.

روی (0, 1) مقدارهای تابع هر عدد بین ۰ و ۱ (بدون خود ۰ و ۱) را می‌گیرند. چون ۰ و ۱ گرفته نمی‌شوند و برای هر مقدار عددی مثل (کوچک‌تر) و (بزرگ‌تر) در بازه هست، تابع روی بازه‌ی باز **نه ماکزیمم مطلق دارد و نه مینیمم مطلق**.

ب) روی داریم و $f(0) = 0$؛ پس مینیمم مطلق برابر ۰ و در $x = 0$ است. اما بی‌کران بالاست (مثلاً $f(n) = n^2$ هر عدد بزرگی را می‌گذراند)؛ پس ماکزیمم مطلق ندارد.

۱۵۲ صفحه ۱۱۵ فعالیت

۱) در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید. ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید. پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید.

ت) آیا در همه‌ی نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟ ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟ چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟

شکل کتاب در دسترس نبود؛ نموداری با ۱۲ نقطه‌ی a تا l فرض شد (خط‌چین‌ها مماس افقی‌اند). در d، e، j گوشه، در i گوشه‌ی صعودی و در l ناپیوستگی داریم:

- **الف)** a, b, d, e, f, h, j, k, l (ماکزیمم نسبی: a, d, f, j, l؛ مینیمم نسبی: b, e, h, k).
- **ب)** d, e, i, j, l (گوشه یا ناپیوستگی).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

- **پ)** a, b, c, f, g, h, k.
- **ت)** خیر؛ مثلاً در d، e، j و l اکسترمم نسبی داریم ولی مشتق وجود ندارد.
- **ث)** صفر.
- **ج)** بله؛ مانند c و g (مماس افقی بدون اکسترمم)، نظیر در x = 0.
- **چ)** بله؛ مانند l که بالاترین نقطه‌ی نمودار است اما تابع در آن ناپیوسته است (یا مانند در x = 0).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۳ صفحه ۱۱۶ فعالیت

۲) سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چقدر است؟

۳) با توجه به آنچه در قسمت‌های ۱ و ۲ دیدید، کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند درست باشد؟ الف) اگر وجود نداشته باشد، آنگاه x = c یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست. ب) اگر ، آنگاه x = c یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی است. پ) اگر x = c طول یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد و موجود باشد، آنگاه .

۲) مثلاً در x = 1 ماکزیمم نسبی و در x = 2 مینیمم نسبی دارد. خط مماس در این نقاط افقی است؛ پس مشتق در نقطه‌ی اکسترمم (وقتی وجود دارد) برابر **صفر** است.
۳) فقط گزاره‌ی (پ) می‌تواند درست باشد (قضیه‌ی فرما).

- الف) نادرست: در x = 0 مشتق ندارد ولی مینیمم نسبی دارد.
- ب) نادرست: در x = 0 مشتقش صفر است ولی اکسترمم ندارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۴ صفحه ۱۱۶ فعالیت

۱) شکل روبه‌رو نمودار یک تابع پیوسته را نشان می‌دهد.

الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های بسته‌ی [−1, 0] ، [5, 10] ، [10, 13] ، [13, 15] و [16, 20] بررسی کنید.

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های باز (−1, 0)، (5, 10)، (10, 13)، (13, 15) و (16, 20) بررسی کنید.

۲) با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام‌یک از موارد زیر نمی‌تواند درست باشد؟ الف) هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است. ب) هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی باز دارای اکسترمم‌های مطلق است.

شکل کتاب در دسترس نبود؛ نمودار پیوسته‌ی زیر (صعودی روی $[-1, 0]$ و $[13, 15]$ ، نزولی روی $[16, 20]$ ، با ماکزیمم‌های محلی در $x=3, 8$ و مینیمم‌های محلی در $x = 6, 11$) فرض شد:

بازه	ماکزیمم مطلق	مینیمم مطلق
$[-1, 0]$	-2 (در 0)	-4 (در -1)
$(-1, 0)$	ندارد	ندارد
$[5, 10]$	4 (در 8)	-2 (در 6)
$(5, 10)$	4 (در 8)	-2 (در 6)
$[10, 13]$	1 (در 13)	-3 (در 11)
$(10, 13)$	ندارد	-3 (در 11)
$[13, 15]$	3 (در 15)	1 (در 13)
$(13, 15)$	ندارد	ندارد
$[16, 20]$	2 (در 16)	-5 (در 20)
$(16, 20)$	ندارد	ندارد

۲) گزاره‌ی (ب) نمی‌تواند درست باشد؛ تابع پیوسته روی بازه‌ی باز لزوماً اکسترمم مطلق ندارد (مثلاً روی $(13, 15)$). گزاره‌ی (الف) درست است و همان قضیه‌ی بعدی کتاب است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۵ صفحه ۱۲۰ **فعالیت**

۱) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌هایی منفی و در چه زیرمجموعه‌ای از دامنه شیب مماس‌ها برابر صفر است.

ب) تعیین کنید در چه بازه‌هایی مشتق f مثبت و در چه بازه‌هایی منفی و در چه بازه‌هایی برابر صفر است.

پ) تعیین کنید در چه بازه‌هایی تابع f صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌هایی تابع f ثابت است.

شکل در دسترس نبود؛ نمودار f با برچسب‌های a تا e چنین فرض شد: صعودی از a تا b، نزولی از b تا c، افقی از c تا d و صعودی از d تا e.

- **الف)** شیب مماس مثبت: (a, b) و (d, e)؛ منفی: (b, c)؛ صفر: [c, d] و نقطه‌ی b.
- **ب)** چون همان شیب مماس است: روی (a, b) و (d, e)؛ روی (b, c)؛ روی (c, d) (و در b).
- **پ)** f صعودی اکید روی [a, b] و [d, e] ؛ نزولی اکید روی [b, c] ؛ ثابت روی [c, d] .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۶ صفحه ۱۲۱ فعالیت

۲) دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازه‌ی [a, e] به‌گونه‌ای رسم کنید که دارای ویژگی‌های زیر باشد: تابع f در بازه‌ی (a, e) مشتق‌پذیر باشد؛ مقدار مشتق تابع در بازه‌های (a, b)، (b, c)، (c, d) و (d, e) به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد. تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.

روی (a, b) تابع نزول می‌کند، روی (b, c) صعود می‌کند، روی (c, d) افقی (ثابت) است و روی (d, e) دوباره نزول می‌کند. در b، c و d مماس افقی است تا مشتق پیوسته بماند:

- صعودی اکید: [b, c] ؛
- نزولی اکید: [a, b] و [d, e] ؛
- ثابت: [c, d] .

(مختصات دو نقطه‌ی داده‌شده در شکل دیده نشد و فرض شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۷ صفحه ۱۲۱ کار در کلاس

۱) توابع و در تمام صعودی اکیدند.

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟

ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

الف) خیر. تابع f صعودی اکید است اما در x = 1 مشتق‌پذیر نیست: مشتق چپ برابر 1 و مشتق راست برابر است.

ب) خیر. تابع صعودی اکید و مشتق‌پذیر است ولی (و در بقیه‌ی نقاط مشتق مثبت است).

۱۵۸ صفحه ۱۲۱ کار در کلاس

۲) تابع را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنه‌ی خود اکیداً نزولی است؟

الف) برای هر $x \neq 0$؛ پس طبق قضیه، تابع روی هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) خیر. دامنه‌ی تابع بازه نیست و ولی (یعنی با افزایش x مقدار تابع افزایش یافته است)؛ پس روی نزولی نیست.

۱۵۹ صفحه ۱۲۲ فعالیت

فرض کنیم $c \in (a, b) \subseteq Df$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد و f بر (a, b) پیوسته و به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد.

۱) اگر تابع f در بازه‌ای مانند (a, c) در سمت چپ آن صعودی و در بازه‌ای مانند (c, b) در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت $x = c$ یک نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f است. علامت را در دو طرف نقطه‌ی c مشخص نمایید.

۲) مشابه قسمت (۱) را برای نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f بنویسید.

۳) در شکل‌های زیر نمودار تابع f و نقطه‌ی c مشخص شده است و . الف) علامت را در دو طرف نقطه‌ی c در هر دو نمودار بررسی کنید. ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا c یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی است؟

۱) چپ c تابع صعودی است، پس ؛ راست c نزولی است، پس . یعنی از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد (ماکزیمم نسبی).

۲) چپ c تابع نزولی () و راست c صعودی () است؛ یعنی از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد (مینیمم نسبی).

۳) (شکل‌ها در دسترس نبود؛ با توجه به عنوان «صعودی» و «نزولی» زیر شکل‌ها، فرض شد در (الف) تابع در دو طرف c صعودی و در (ب) در دو طرف c نزولی است.)

- الف) در شکل (الف) علامت در هر دو طرف c مثبت و در شکل (ب) در هر دو طرف c منفی است.
- ب) در هیچ‌کدام تغییر علامت نداریم؛ پس c اکسترمم نسبی نیست (مانند در صفر).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶۰ صفحه ۱۲۴ کار در کلاس

نمودار تابع در شکل زیر داده شده است. الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در [s, t] بررسی کنید. ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟ پ) آیا نقاط بازه‌ی (d, e) اکسترمم نسبی هستند؟

شکل در دسترس نبود؛ نمودار چنین فرض شد: مثبت روی (s, a)، منفی روی (a, b)، مثبت روی (b, d) (با مماس شدن بر محور x در c)، صفر روی [d, e] و منفی روی (e, t).

- **الف)** f صعودی روی [s, a] و [b, d] ؛ نزولی روی [a, b] و [e, t] ؛ ثابت روی [d, e] .
- **ب)** همه‌ی نقاط a, b, c, d, e بحرانی‌اند (). در a علامت از + به − تغییر می‌کند: ماکزیمم نسبی؛ در b از − به +: مینیمم نسبی؛ در c علامت تغییر نمی‌کند: اکسترمم نیست؛ d ماکزیمم نسبی (چپ صعودی، راست ثابت) و e نیز ماکزیمم نسبی (چپ ثابت، راست نزولی) است.
- **پ)** بله؛ روی (d, e) تابع ثابت است، پس مقدار تابع در هر نقطه از مقدار نقاط همسایه کمتر یا مساوی (و بیشتر یا مساوی) است؛ هر نقطه‌ی این بازه هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۱ صفحه ۱۲۵ تمرین

۱) نمودار تابعی را رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد.

نقطه‌ی ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد. نقطه‌ی مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد. نقطه‌ی ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد. نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.

نمودار زیر هر چهار ویژگی را دارد:

- A: ماکزیمم نسبی با مماس افقی ()؛
- B: مینیمم نسبی در یک گوشه (پیوسته، بدون مشتق)؛
- D: ماکزیمم نسبی در نقطه‌ی ناپیوستگی (مقدار تابع از اطراف بیشتر است)؛
- C: مماس افقی ولی صعودی در دو طرف (اکسترمم نیست).

۱۶۲ صفحه ۱۲۵ تمرین

۲) نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

مثلاً بر پیوسته است ولی چون و ، نه ماکزیمم و نه مینیمم مطلق دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶۳ صفحه ۱۲۵ تمرین

۳) برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابع f در بازه‌ای مانند [a, b] صعودی است اما صعودی اکید نیست. ب) تابع f در بازه‌ای مانند [a, b] نزولی است اما نزولی اکید نیست. پ) تابع f در بازه‌ای مانند [a, b] هم صعودی و هم نزولی است.

- الف) تابعی که قسمتی از آن افقی است (ثابت) ولی هیچ‌جا نمی‌افتد؛ برای x1 < x2 همواره ولی برابری هم رخ می‌دهد.
- ب) مشابه (الف) ولی از چپ به راست هیچ‌جا بالا نمی‌رود.
- پ) تابع ثابت، چون هم و هم برقرار است.

۱۶۴ صفحه ۱۲۵ تمرین

۴) برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست. ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نیست. پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.

- الف) اکیداً نزولی و در x = 1 ناپیوسته (جهش) است.
- ب) اکیداً صعودی و پیوسته است ولی در x = 0 گوشه دارد.
- پ) اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است ولی منفی نیست.

۱۶۵ صفحه ۱۲۵ تمرین

۵) نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

تابع ماکزیمم مطلق ۰ را در x = 0 دارد، اما بی‌کران بالاست و ماکزیمم مطلق ندارد.

۱۶۶ صفحه ۱۲۵ تمرین

۶) نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید.

الف) ، [−2, 1] ب) ، [−1, 2] پ)

الف) . مقدارها: . پس مینیمم نسبی و مطلق در و ماکزیمم مطلق ۲۱ در x = −2 (نقطه‌ی انتهایی، بدون ماکزیمم نسبی) است.

ب) که فقط x = 1 درون بازه است. . مینیمم نسبی و مطلق ۲− در x = 1؛ ماکزیمم مطلق ۲ در x = −1 و x = 2 (هر دو انتهایی؛ ماکزیمم نسبی ندارد).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) روی $[0, 2)$ و روی $(2, +\infty)$ ؛ در $x = 2$ مشتق چپ ۱ و راست ۱- است، پس $x = 2$ نقطه‌ی بحرانی است. $f(2)$ =: ماکزیمم نسبی و مطلق ۲ در $x = 2$. چون مینیمم مطلق ندارد؛ مینیمم نسبی هم ندارد $f(0) = 0$ فقط در انتها است).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۷ صفحه ۱۲۶ تمرین

۷) ضرایب a و b را در تابع طوری پیدا کنید که در نقطه‌ی (2, 1) مینیمم نسبی داشته باشد.

شرایط: و . چون :

بنابراین و نشان می‌دهد نقطه‌ی (2, 1) واقعاً مینیمم نسبی است.

(متن این تمرین در فایل به‌صورت رمزگذاری‌شده بود؛ مختصات نقطه از روی آن بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۸ صفحه ۱۲۶ تمرین

۸) نمودار تابعی را به‌گونه‌ای رسم کنید که در شرایط زیر صدق کند: و نقطه‌ی (1, 5) ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

(متن تمرین بازسازی‌شده است.) منحنی از مبدأ شروع می‌شود، به (1, 5) می‌رود و در آن‌جا مماس افقی دارد (ماکزیمم نسبی)، سپس نزول می‌کند و از (4, 2) می‌گذرد (در این نقطه مینیمم نسبی گرفته‌ایم) و دوباره بالا می‌رود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶۹ صفحه ۱۲۶ تمرین

۹) یک برگه‌ی کاغذی مستطیل‌شکل با ضلع‌های x و y در اختیار داریم. از چهار گوشه‌ی آن مربع‌هایی به ضلع h می‌بریم و جعبه‌ای می‌سازیم. اگر $h = 2\ cm$ و $xy = 100\ cm^2$ باشد، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این جعبه بیشترین مقدار ممکن باشد.

ابعاد جعبه ، و ارتفاع ۲ است. با و $4 < x < 25$:

در دو سر بازه $V \to 0$ و $V(10) = 72$؛ پس بیشترین حجم $72\ cm^3$ به ازای $x = y = 10\ cm$ است.

(متن تمرین در فایل رمزگذاری‌شده بود و از روی نشانه‌ها بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۰ صفحه ۱۲۶ تمرین

۱۰) یک مستطیل در یک نیم‌دایره‌ی به شعاع ۴ سانتی‌متر محاط شده است. طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن باشد.

ضلع مستطیل روی قطر نیم‌دایره قرار دارد. اگر نیم‌طول قاعده x باشد، ارتفاع و مساحت:

برای مشتق‌گیری ساده‌تر را بیشینه می‌کنیم: . در دو سر S = 0 است؛ پس این ماکزیمم مطلق است:

طول مستطیل و عرض آن سانتی‌متر و مساحت بیشینه ۱۶ سانتی‌متر مربع است.

(شعاع و نوع شکل از متن رمزگذاری‌شده حدس زده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۱ صفحه ۱۲۶ تمرین

۱۱) توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟ الف) ب)

الف) . علامت: مثبت برای $x < -2$، منفی برای $-2 < x < 1$ و مثبت برای $x > 1$. پس f روی $(-\infty, -2]$ و $[1, +\infty)$ صعودی و روی $[-2, 1]$ نزولی است.

ب) برای $x \neq 2$؛ پس f روی $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ نزولی اکید است و جایی صعودی نیست.

(ضابطه‌ها از متن رمزگذاری‌شده بازسازی شدند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۲ صفحه ۱۲۸ فعالیت

در زیر بخشی از نمودارهای دو تابع و در بازه‌ی $[0, +\infty)$ و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.

۱) با حرکت از نقطه‌ی x = 0 به سمت راست، شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟ ۲) جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با تغییرات شیب خطوط مماس دارد؟

۳) تابع در بازه‌ی $[0, +\infty)$ صعودی است یا نزولی؟ ۴) تابع در بازه‌ی $[0, +\infty)$ صعودی است یا نزولی؟

۵) الف) در حالت کلی، صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع دارد؟ علامت بر بازه‌ی I مثبت است، آنگاه f بر I..... است؛ علامت بر I منفی است، آنگاه f بر I..... است. ب) صعودی یا نزولی بودن تابع

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

چه ارتباطی با علامت دارد؟ علامت بر I مثبت است آنگاه بر I..... است؛ علامت بر I منفی است آنگاه بر I..... است.

۶) الف) اگر مقدار در یک بازه مثبت باشد، تابع در آن بازه ..... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه ..... می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به ..... است. ب) اگر مقدار در یک بازه منفی باشد، تابع در آن بازه ..... است و لذا شیب خطوط مماس ..... می‌یابد و تقعر منحنی رو به ..... است.

۱) برای شیب مماس زیاد می‌شود و تقعر رو به بالاست. برای شیب مماس کم می‌شود و تقعر رو به پایین است.

۲) اگر شیب مماس‌ها زیاد شود تقعر رو به بالا و اگر کم شود تقعر رو به پایین است.

۳) صعودی است. **۴)** نزولی است.

۵) الف) علامت مثبت f ⇒ **صعودی**؛ علامت منفی f ⇒ **نزولی**. ب) علامت مثبت ⇒ **صعودی** ؛ علامت منفی ⇒ **نزولی**.

۶) الف) صعودی است، شیب مماس‌ها **زیاد** می‌شود و تقعر **رو به بالا** است. ب) نزولی است، شیب مماس‌ها **کم** می‌شود و تقعر **رو به پایین** است.

۱۷۳ صفحه ۱۳۰ **کار در کلاس**

نمودار تابع را با اطلاعات زیر رسم کنید: f(0) = f(1) = f(2) = 0 و بر بازه‌ی $(-\infty, 1)$ و بر بازه‌ی $(1, +\infty)$.

تقعر روی $(-\infty, 1)$ رو به پایین و روی $(1, +\infty)$ رو به بالاست، پس $x = 1$ نقطه‌ی عطف است. نمودار از $(0, 0)$ و $(1, 0)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد؛ بین ۰ و ۱ (تقعر پایین) برجستگی بالا و بین ۱ و ۲ (تقعر بالا) فرورفتگی پایین دارد. نمونه‌ی ساده: که :

۱۷۴ صفحه ۱۳۲ **کار در کلاس**

۱) در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.

شکل‌ها در دسترس نبود؛ سه نمودار نمونه فرض شد:

- الف) در $x = 0$ تقعر عوض می‌شود و مماس (خط‌چین) وجود دارد؛ پس نقطه‌ی عطف است و مماس از نمودار عبور می‌کند.
- ب) تابع : در $x = 0$ تقعر عوض می‌شود و مماس قائم (خط $x = 0$) دارد؛ پس نقطه‌ی عطف است.
- پ) تقعر در $x = 0$ عوض می‌شود اما نمودار در آن‌جا گوشه دارد و مماس ندارد؛ پس نقطه‌ی عطف نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷۵ صفحه ۱۳۲ کار در کلاس

۲) کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیاورید.
الف) در نقطه‌ی عطف علامت تغییر می‌کند. ب) هر نقطه که علامت در آن تغییر کند، نقطه‌ی عطف است. پ) هر نقطه‌ای که در آن مقدار برابر صفر شود یک نقطه‌ی عطف است. ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه‌ی عطف داشته باشد. ث) تابع صعودی اکید، نقطه‌ی عطف ندارد.

- **الف) درست**؛ چون تقعر عوض می‌شود.
- **ب) نادرست**؛ : در $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد ولی 0 در دامنه نیست (نمودار پیوسته نیست). همین‌طور اگر در نقطه مماس نباشد (گوشه).
- **پ) نادرست**؛ : ولی تغییر علامت نمی‌دهد.
- **ت) درست**؛ مثلاً بی‌شمار نقطه‌ی عطف دارد.
- **ث) نادرست**؛ اکیداً صعودی است و در مبدأ نقطه‌ی عطف دارد.

۱۷۶ صفحه ۱۳۵ کار در کلاس

۱) اگر شکل کشیده شده در صفحه‌ی شطرنجی مربوط به نمودار تابع باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟ (گزینه‌های الف، ب، پ، ت)

شکل‌ها در دسترس نبود؛ روش پاسخ: (۱) جایی که است f صعودی و جایی که است نزولی است؛ (۲) صفرهای مماس افقی‌اند و اگر علامت عوض شود اکسترمم‌اند؛ (۳) جایی که صعودی است تقعر f رو به بالا و جایی که نزولی است تقعر رو به پایین است؛ (۴) ماکزیمم یا مینیمم خود نقطه‌ی عطف f است.

برای نمونه اگر باشد، f باید در $x = -1$ ماکزیمم نسبی و در $x = 1$ مینیمم نسبی داشته و در $x = 0$ نقطه‌ی عطف داشته باشد؛ یعنی نمودار «سه‌تایی S شکل» (مانند). از میان گزینه‌ها آن نموداری که چنین رفتاری دارد (در فرض ما گزینه‌ی (ب)) درست است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۷ صفحه ۱۳۶ کار در کلاس

۲) اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟ (گزینه‌های الف، ب، پ، ت)

شکل در دسترس نبود. روش: علامت تقعر f را می‌دهد: ⇒ تقعر بالا و ⇒ تقعر پایین، و جایی که محور x را با تغییر علامت قطع می‌کند نقطه‌ی عطف f است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

برای نمونه اگر باشد، f روی $(-\infty, 2)$ تقعر پایین، روی $(2, +\infty)$ تقعر بالا و در $x = 2$ عطف دارد (مانند)؛ گزینه‌ای که چنین است (در فرض ما گزینه‌ی (ب) با طول عطف ۲) درست است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۷۸ صفحه ۱۳۶ تمرین

۱) نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه‌ی عطف نباشد.

کافی است در a مماس نداشته باشیم، مثلاً در $a = 0$:

روی $(-\infty, 0)$ (تقعر پایین) و روی $(0, +\infty)$ (تقعر بالا), ولی مشتق چپ ۰ و مشتق راست ۱ است؛ گوشه است و مماس ندارد، پس نقطه‌ی عطف نیست.

---

۱۷۹ صفحه ۱۳۶ تمرین

۲) جهت تقعر توابع زیر را در دامنه‌ی آنها بررسی کرده و نقطه‌ی عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) ب) پ)

الف) . تقعر پایین روی $(-\infty, 1)$، بالا روی $(1, +\infty)$؛ "f تغییر علامت می‌دهد و f مشتق‌پذیر است. نقطه‌ی عطف: .

ب) دامنه . . علامت : مثبت روی $(-\infty, -1)$، منفی روی $(-1, 3)$، مثبت روی $(3, +\infty)$. تقعر بالا روی $(-\infty, -1)$ و $(3, +\infty)$ و پایین روی $(-1, 3)$. در $x = 3$ تغییر تقعر و مماس داریم: نقطه‌ی عطف ؛ $x = -1$ در دامنه نیست و عطف نیست.

پ) . برای $x > 0$ (تقعر پایین) و برای $x < 0$ (تقعر بالا). در $x = 0$ تابع پیوسته با مماس قائم است؛ نقطه‌ی عطف $(0, 1)$.

(ضابطه‌های (ب) و (پ) از متن ناقص بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۸۰ صفحه ۱۳۶ تمرین

۳) برای هر مورد یک تابع درجه‌ی ۳ مثال بزنید که نقطه‌ی داده‌شده نقطه‌ی عطف آن باشد. الف) نقطه‌ی $(0, 0)$ ب) نقطه‌ی $(1, 0)$ پ) نقطه‌ی $(0, 1)$ ت) نقطه‌ی $(2, 2)$

تابع با در $x = a$ تغییر علامت می‌دهد و نقطه‌ی عطف آن (a, b) است. پس:

○ الف)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب)

پ)

ت)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۸۱ صفحه ۱۳۶ تمرین

۴) مقادیر a, b و c را در تابع طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند: x = 1/2 طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع f باشد، و .

؛ عطف در x = 1/2 یعنی . از و : ، b = 3.

و c = 1 b = 3, a = −2,

(ضابطه‌ی تابع از متن ناقص بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۸۲ صفحه ۱۳۶ تمرین

۵) اگر (0, 0) نقطه‌ی عطف تابع درجه‌ی سومی با ضابطه‌ی باشد که نمودار آن در شکل رسم شده است، a, b و c را پیدا کنید.

شکل در دسترس نبود؛ با توجه به اعداد ۰، ۲− و ۲ روی محور x فرض شد نمودار محور x را در x = −2, 0, 2 قطع می‌کند. عطف در مبدأ: ، و . پس و ریشه‌ی x = 2 می‌دهد 0 = b + 4، یعنی b = −4:

و c = 0 b = −4, a = 0,

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۸۳ صفحه ۱۴۴ تمرین

۱) جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) ب) پ)

ت) ث) ج)

الف) دامنه . ، (تقعر همواره بالا). مینیمم نسبی و مطلق f(1) = −1؛ محور y را در (0, 1) قطع می‌کند؛ .

ب) نقطه‌ی عطف در x = 0 (نقطه‌ی (0, 5)). ماکزیمم نسبی ≈ 9.3 ≈ f(−1.29)؛ مینیمم نسبی ≈ 0.7 ≈ f(1.29)؛ . عطف ندارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پ) با ریشه‌های 2− و ؛ با ریشه‌ی . مینیمم نسبی $f(-2) = 0$، ماکزیمم نسبی ، عطف . برخورد با محورها: $(0, 0)$

ت) دامنه ؛ مجانب افقی $y = 2$ و مجانب قائم $x = 2$. ، (منفی برای $x < 2$ و مثبت برای $x > 2$). برخورد با محورها: $(0, -2)$؛ .

ث) دامنه ؛ مجانب افقی $y = 1$ و مجانب قائم $x = -3$. ، (مثبت برای $x < -3$، منفی برای $x > -3$). برخورد با محورها: و $(1, 0)$.

ج) ؛ ماکزیمم نسبی $f(1) = 6$، مینیمم نسبی $f(2) = 5$، عطف ؛ محور y را در $(0, 1)$ قطع می‌کند؛ .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

(ضابطه‌های ت) و ث) از متن ناقص بازسازی شد.)

---

۱۸۴ صفحه ۱۴۴ تمرین

۲) فرض کنید . محل تقاطع مجانب‌های f نقطه‌ی $(1, 2)$ است. اگر این تابع از نقطه‌ی $(0, -1)$ بگذرد، ضابطه‌ی تابع را به دست آورید.

مجانب قائم و مجانب افقی ، پس می‌توان نوشت $a = c$ و $d = -2c$؛ با $c = 1$: . از $f(-1) = 0$ داریم $-1 + b = 0$ یعنی $b = 1$:

(مختصات نقاط از متن ناقص بازسازی شد.)

(همین تابع با ضرب صورت و مخرج در عدد ثابت هم‌ارز است.) ؛ جدول و نمودار:

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۸۵ صفحه ۱۴۴ تمرین

۳) کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع است؟ (گزینه‌های الف، ب، پ، ت)

شکل گزینه‌ها در دسترس نبود؛ ویژگی‌های نمودار: ، ماکزیمم نسبی $\approx (-0.82, 1.09)$ و مینیمم نسبی $\approx (0.82, -1.09)$؛ : عطف $(0, 0)$؛ ریشه‌ها ؛ . گزینه‌ای که از مبدأ می‌گذرد، سه نقطه‌ی برخورد با محور x دارد، از پایین چپ به بالا راست می‌رود و ماکزیمم نسبی آن سمت چپ محور y است، پاسخ است:

(ضابطه‌ی تابع از متن ناقص خوانده شد و شکل گزینه‌ها دیده نشد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir