با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام حسابان (۲) دوازدهم
فصل پنجم

عنوان فصل: کاربردهای مشتق

از صفحه‌ی ۱۱۱ تا صفحه‌ی ۱۴۴ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل کاربردهای مشتق آمده است.

مباحث فصل: اکسترمم‌ها و توابع صعودی و نزولی؛ جهت تقعر و نقطه‌ی عطف؛ رسم نمودار تابع

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۱۱۲ · فعالیت — بیشترین و کمترین دما در ۴۸ ساعت ۶

۲ صفحه ۱۱۳ · کار در کلاس — ماکزیمم و مینیمم مطلق در سه نمودار ۶

۳ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس — اکسترمم‌های نسبی و مطلق (سه نمودار) ۷

۴ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس — مقدار و طول اکسترمم‌ها در پنج نمودار ۸

۵ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس — رسم نمودار با ماکزیمم و مینیمم نسبی داده‌شده ۸

۶ صفحه ۱۱۵ · کار در کلاس — اکسترمم‌های مطلق $f(x)=x^2$ (بازه‌ی بسته، باز و R) ۹

۷ صفحه ۱۱۵ · فعالیت — اکسترمم‌های نسبی و مشتق (نمودار با نقاط a تا l) ۹

۸ صفحه ۱۱۶ · فعالیت — نمودار با اکسترمم و مشتق موجود؛ گزاره‌های درست ۱۰

۹ صفحه ۱۱۶ · فعالیت — اکسترمم‌های مطلق در بازه‌های بسته و باز ۱۱

۱۰ صفحه ۱۲۰ · فعالیت — شیب مماس و صعودی/نزولی بودن ۱۲

۱۱ صفحه ۱۲۱ · فعالیت — رسم نمودار با علامت مشتق داده‌شده ۱۳

۱۲ صفحه ۱۲۱ · کار در کلاس — تابع صعودی اکید و مشتق‌پذیری ۱۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۱۲۱ · کار در کلاس — تابع x/1 نزولی است؟ ۱۴

۱۴ صفحه ۱۲۲ · فعالیت — آزمون مشتق اول ۱۴

۱۵ صفحه ۱۲۴ · کار در کلاس — تحلیل تابع از روی نمودار f′ ۱۵

۱۶ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۱: نمودار با چهار ویژگی ۱۶

۱۷ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۲: بدون ماکزیمم و مینیمم مطلق ۱۷

۱۸ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۳: صعودی و نزولی غیراکید ۱۷

۱۹ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۴: نمودارهای اکیداً یکنوا با ویژگی خاص ۱۸

۲۰ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۵: ماکزیمم مطلق f ولی نه |f| ۱۸

۲۱ صفحه ۱۲۵ · تمرین — تمرین ۶: اکسترمم‌های نسبی و مطلق ۱۸

۲۲ صفحه ۱۲۶ · تمرین — تمرین ۷: مینیمم نسبی $f(x)=x^3+ax+b$ ۱۹

۲۳ صفحه ۱۲۶ · تمرین — تمرین ۸: رسم نمودار با مقدارهای داده‌شده ۱۹

۲۴ صفحه ۱۲۶ · تمرین — تمرین ۹: جعبه با بیشترین حجم از برگه‌ی کاغذی ۲۰

۲۵ صفحه ۱۲۶ · تمرین — تمرین ۱۰: مستطیل محاط در نیم‌دایره ۲۰

۲۶ صفحه ۱۲۶ · تمرین — تمرین ۱۱: صعودی و نزولی بودن توابع ۲۱

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۷ صفحه ۱۲۸ · فعالیت — شیب مماس‌ها و جهت تقعر ۲۱

۲۸ صفحه ۱۳۰ · کار در کلاس — رسم نمودار با تقعر داده‌شده ۲۲

۲۹ صفحه ۱۳۲ · کار در کلاس — شناسایی نقاط عطف در نمودارها ۲۳

۳۰ صفحه ۱۳۲ · کار در کلاس — درست یا نادرست درباره‌ی نقطه‌ی عطف ۲۳

۳۱ صفحه ۱۳۵ · کار در کلاس — تعیین نمودار f از روی نمودار f' ۲۴

۳۲ صفحه ۱۳۶ · کار در کلاس — تعیین نمودار f از روی نمودار f'' ۲۴

۳۳ صفحه ۱۳۶ · تمرین — تمرین ۱: تغییر تقعر بدون نقطه‌ی عطف ۲۵

۳۴ صفحه ۱۳۶ · تمرین — تمرین ۲: جهت تقعر و نقطه‌ی عطف توابع ۲۵

۳۵ صفحه ۱۳۶ · تمرین — تمرین ۳: تابع درجه‌ی سوم با نقطه‌ی عطف داده‌شده ۲۶

۳۶ صفحه ۱۳۶ · تمرین — تمرین ۴: یافتن a و b و c از شرط نقطه‌ی عطف ۲۶

۳۷ صفحه ۱۳۶ · تمرین — تمرین ۵: ضرایب تابع درجه‌ی سوم با نمودار ۲۷

۳۸ صفحه ۱۴۴ · تمرین — تمرین ۱: جدول رفتار و نمودار ۶ تابع ۲۷

۳۹ صفحه ۱۴۴ · تمرین — تمرین ۲: تابع هموگرافیک با مجانب‌های داده‌شده ۳۰

۴۰ صفحه ۱۴۴ · تمرین — تمرین ۳: تشخیص نمودار $x^3-2x+\dots$ ۳۱

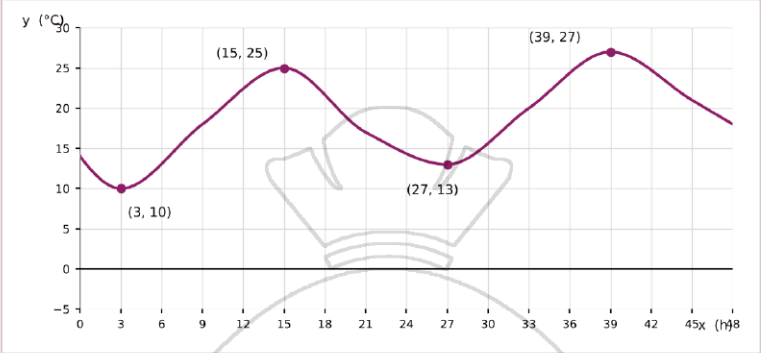
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱ صفحه ۱۱۲ **فعالیت**

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟

با توجه به نمودار، بالاترین نقطه‌ی منحنی نقطه‌ی (39, 27) و پایین‌ترین نقطه‌ی آن (3, 10) است. پس:

- **بیشترین دما:** 27 درجه، در زمان x = 39 (ساعت ۳۹ ام)؛
- **کمترین دما:** 10 درجه، در زمان x = 3 (ساعت ۳ ام).



(مقدارهای دمای ابتدا و انتهای بازه‌ی ۴۸ ساعته در متن در دسترس نبود و فرض شد از ۱۰ بیشتر و از ۲۷ کمتر است.)

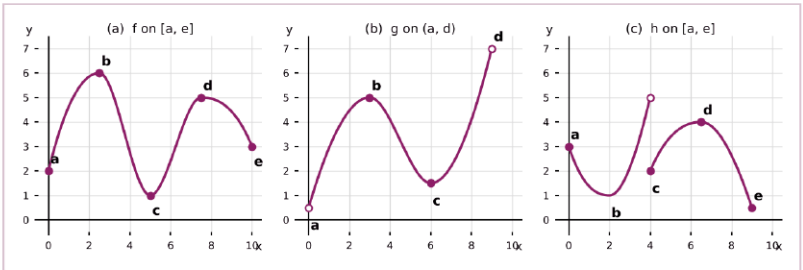
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲ صفحه ۱۱۳ **کار در کلاس**

۱) در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را در صورت وجود مشخص نمایید.

توشه ای برای موفقیت

شکل کتاب در دسترس نبود؛ سه نمودار نمونه (مطابق برچسب‌های کتاب) فرض شد و روش پاسخ مستقل از شکل است:



- **الف)** f روی بازه‌ی بسته‌ی [a, e] پیوسته است. ماکزیمم مطلق برابر ۶ و در x = b و مینیمم مطلق برابر ۱ و در x = c است.

- **ب)** g روی بازه‌ی باز (a, d) تعریف شده است. مقدار g(b) = 5 از مقدارهای اطراف بیشتر است اما نزدیک d مقدارها به ۷ نزدیک می‌شوند و ۷ هرگز گرفته نمی‌شود؛ پس ماکزیمم مطلق ندارد. به همین ترتیب نزدیک a مقدارها به ۰٫۵ نزدیک می‌شوند و از g(c) = 1.5 کمتر می‌شوند، ولی ۰٫۵ گرفته نمی‌شود؛ پس مینیمم مطلق هم ندارد.
- **پ)** h در x = c ناپیوسته است و h(c) = 2 (مقدار ۵ گرفته نمی‌شود). ماکزیمم مطلق برابر ۴ و در x = d و مینیمم مطلق برابر ۰٫۵ و در x = e (نقطه‌ی انتهایی) است.

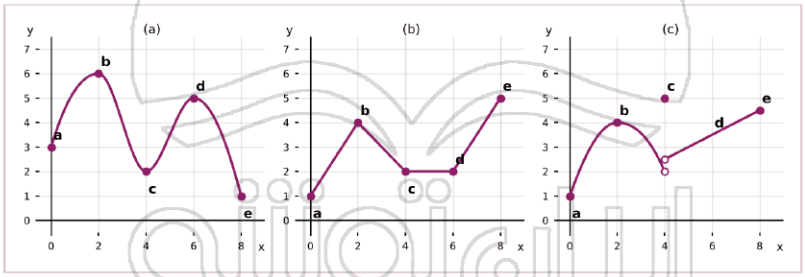
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳ صفحه ۱۱۴ کار در کلاس

۲) دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطه‌ی ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به‌گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطه‌ی ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

شکل در دسترس نبود؛ سه نمودار زیر فرض شد. نقطه‌ی انتهایی بازه چون در دو طرف خود تعریف نشده است اکسترمم نسبی نیست (اما می‌تواند اکسترمم مطلق باشد).



- **الف)** ماکزیمم نسبی در b (مقدار ۶) و d (مقدار ۵)؛ مینیمم نسبی در c (مقدار ۲). ماکزیمم مطلق ۶ در b؛ مینیمم مطلق ۱ در e (نقطه‌ی انتهایی).
- **ب)** ماکزیمم نسبی در b (مقدار ۴). در c و d مینیمم نسبی (مقدار ۲) و هر نقطه‌ی درونی پاره‌خط افقی cd هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است. ماکزیمم مطلق ۵ در e و مینیمم مطلق ۱ در a (هر دو نقطه‌ی انتهایی).
- **پ)** ماکزیمم نسبی در b (مقدار ۴) و در c (مقدار ۵، چون f(c) از مقدارهای اطراف بیشتر است). مینیمم نسبی ندارد. ماکزیمم مطلق ۵ در c و مینیمم مطلق ۱ در a.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

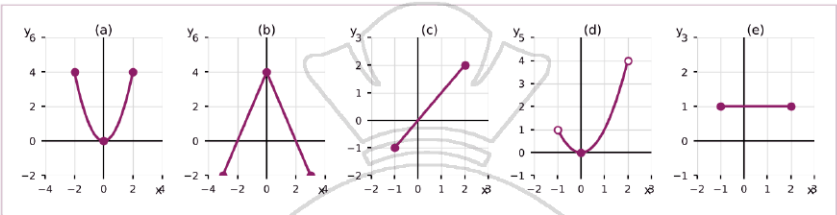
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۴ صفحه ۱۱۴ کار در کلاس

۳) در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.

شکل‌های کتاب در دسترس نبود؛ نمودارهای زیر فرض شد.



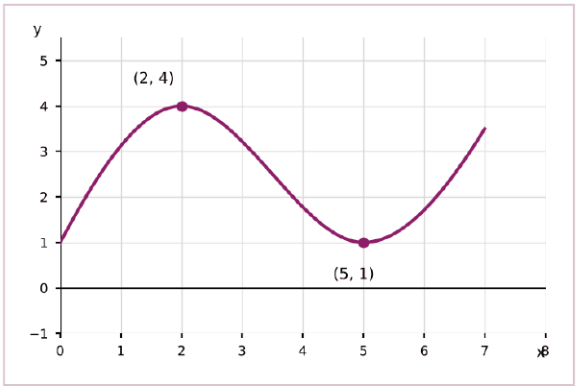
- **الف)** $y = x^2$ روی $[-2, 2]$: مینیمم نسبی و مطلق برابر ۰ در $x = 0$؛ ماکزیمم مطلق ۴ در $x = \pm 2$ (نقاط انتهایی، ماکزیمم نسبی نیستند).
- **ب)** $y = 4 - 2|x|$ روی $[-3, 3]$: ماکزیمم نسبی و مطلق برابر ۴ در $x = 0$؛ مینیمم مطلق ۲- در $x = \pm 3$؛ مینیمم نسبی ندارد.
- **پ)** $y = x$ روی $[-1, 2]$: اکسترمم نسبی ندارد؛ ماکزیمم مطلق ۲ در $x = 2$ و مینیمم مطلق ۱- در $x = -1$.
- **ت)** $y = x^2$ روی $(-1, 2)$: مینیمم نسبی و مطلق ۰ در $x = 0$؛ ماکزیمم مطلق ندارد (۴ گرفته نمی‌شود).
- **ث)** تابع ثابت $y = 1$ روی $[-1, 2]$: مقدار ۱ هم ماکزیمم و هم مینیمم مطلق است و در هر نقطه (طول دلخواه) رخ می‌دهد؛ هر نقطه‌ی درونی هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵ صفحه ۱۱۴ کار در کلاس

۴) نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطه‌ی (2, 4) ماکزیمم نسبی و در نقطه‌ی (5, 1) مینیمم نسبی داشته باشد.

منحنی را از نقطه‌ای پایین‌تر از ۴ شروع می‌کنیم، از نقطه‌ی (2, 4) (بالاترین نقطه‌ی محلی) رد می‌کنیم، تا (5, 1) (پایین‌ترین نقطه‌ی محلی) پایین می‌آوریم و دوباره بالا می‌بریم. هر منحنی هموار با این ویژگی پاسخ است:



۶ صفحه ۱۱۵ کار در کلاس

۵) تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های [0, 1] و (0, 1) بررسی کنید.

ب) وجود اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ بررسی نمایید.

الف) روی [0, 1] تابع صعودی است؛ پس مینیمم مطلق $f(0) = 0$ و ماکزیمم مطلق $f(1) = 1$ وجود دارد.

روی (0, 1) مقدارهای تابع هر عدد بین ۰ و ۱ (بدون خود ۰ و ۱) را می‌گیرند. چون ۰ و ۱ گرفته نمی‌شوند و برای هر مقدار x_0 عددی مثل $\frac{x_0}{2}$ (کوچک‌تر) و $\frac{x_0+1}{2}$ (بزرگ‌تر) در بازه هست، تابع روی بازه‌ی باز **نه ماکزیمم مطلق دارد و نه مینیمم مطلق.**

ب) روی $\mathbb{R}$ داریم $x^2 \geq 0$ و $f(0) = 0$؛ پس مینیمم مطلق برابر ۰ و در $x = 0$ است. اما x^2 بی‌کران بالاست (مثلاً $f(n) = n^2$ هر عدد بزرگی را می‌گذراند)؛ پس ماکزیمم مطلق ندارد.

۷ صفحه ۱۱۵ فعالیت

۱) در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

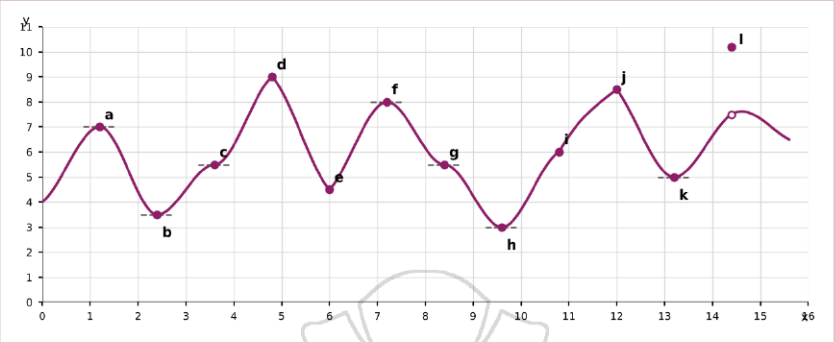
الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید. ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید. پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید.

ت) آیا در همه‌ی نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟ ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟

ایران توشه

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟ چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟

شکل کتاب در دسترس نبود؛ نموداری با ۱۲ نقطه‌ی a تا l فرض شد (خط‌چین‌ها مماس افقی‌اند). در d، e، j گوشه، در i گوشه‌ی صعودی و در l ناپیوستگی داریم:



- **الف)** a, b, d, e, f, h, j, k, l (ماکزیمم نسبی: a, d, f, j, l؛ مینیمم نسبی: b, e, h, k).
- **ب)** d, e, i, j, l (گوشه یا ناپیوستگی).
- **پ)** a, b, c, f, g, h, k.
- **ت)** خیر؛ مثلاً در d، e، j و l اکسترمم نسبی داریم ولی مشتق وجود ندارد.
- **ث)** صفر.
- **ج)** بله؛ مانند c و g (مماس افقی بدون اکسترمم)، نظیر $y = x^3$ در $x = 0$.
- **چ)** بله؛ مانند l که بالاترین نقطه‌ی نمودار است اما تابع در آن ناپیوسته است (یا مانند $y = -|x|$ در $x = 0$).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

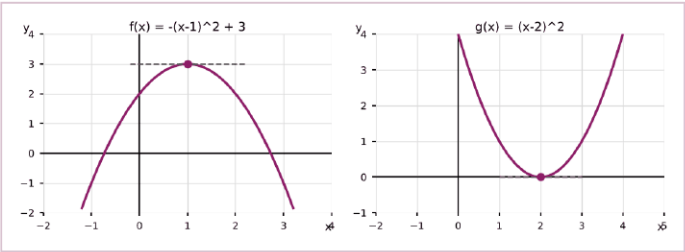
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸ صفحه ۱۱۶ **فعالیت**

۲) سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چقدر است؟

۳) با توجه به آنچه در قسمت‌های ۱ و ۲ دیدید، کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند درست باشد؟ الف) اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست. ب) اگر $f'(c) = 0$، آنگاه $x = c$ یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی است. پ) اگر $x = c$ طول یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$.

۲) مثلاً $f(x) = -(x - 1)^2 + 3$ در $x = 1$ ماکزیمم نسبی و $g(x) = (x - 2)^2$ در $x = 2$ مینیمم نسبی دارد. خط مماس در این نقاط افقی است؛ پس مشتق در نقطه‌ی اکسترمم (وقتی وجود دارد) برابر **صفر** است.



۳) فقط گزاره‌ی (پ) می‌تواند درست باشد (قضیه‌ی فرما).

- الف) نادرست: $f(x) = |x|$ در $x = 0$ مشتق ندارد ولی مینیمم نسبی دارد.
- ب) نادرست: $f(x) = x^3$ در $x = 0$ مشتقش صفر است ولی اکسترمم ندارد.

۹ صفحه ۱۱۶ **فعالیت**

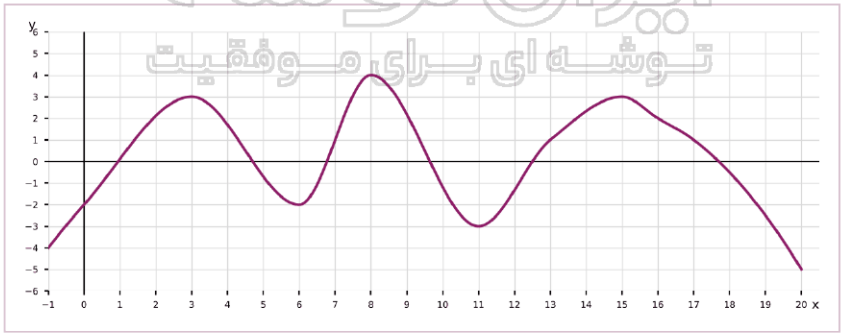
۱) شکل روبه‌رو نمودار یک تابع پیوسته را نشان می‌دهد.

الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های بسته‌ی [−1, 0] ، [5, 10] ، [10, 13] ، [13, 15] و [16, 20] بررسی کنید.

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های باز (−1, 0)، (5, 10)، (10, 13)، (13, 15) و (16, 20) بررسی کنید.

۲) با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام‌یک از موارد زیر نمی‌تواند درست باشد؟ الف) هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است. ب) هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی باز دارای اکسترمم‌های مطلق است.

شکل کتاب در دسترس نبود؛ نمودار پیوسته‌ی زیر (صعودی روی [−1, 0] و [13, 15] ، نزولی روی [16, 20] ، با ماکزیمم‌های محلی در x=3, 8 و مینیمم‌های محلی در x = 6, 11) فرض شد:



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

بازه	ماکزیمم مطلق	مینیمم مطلق
$[-1, 0]$	-2 (در 0)	-4 (در -1)
$(-1, 0)$	ندارد	ندارد
$[5, 10]$	4 (در 8)	-2 (در 6)
$(5, 10)$	4 (در 8)	-2 (در 6)
$[10, 13]$	1 (در 13)	-3 (در 11)
$(10, 13)$	ندارد	-3 (در 11)
$[13, 15]$	3 (در 15)	1 (در 13)
$(13, 15)$	ندارد	ندارد
$[16, 20]$	2 (در 16)	-5 (در 20)
$(16, 20)$	ندارد	ندارد

۲) گزاره‌ی (ب) نمی‌تواند درست باشد؛ تابع پیوسته روی بازه‌ی باز لزوماً اکسترمم مطلق ندارد (مثلاً روی $(13, 15)$). گزاره‌ی (الف) درست است و همان قضیه‌ی بعدی کتاب است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

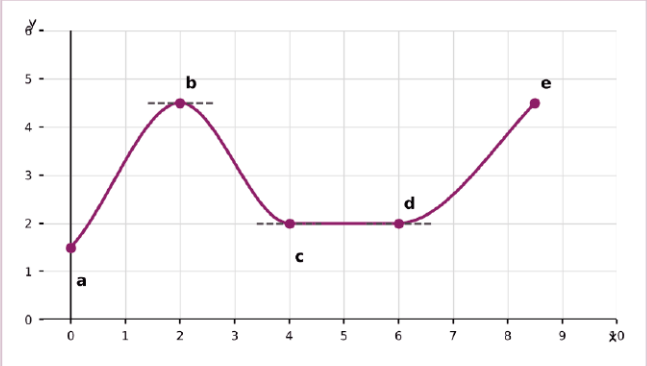
۱۰ صفحه ۱۲۰ فعالیت

۱) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌هایی منفی و در چه زیرمجموعه‌ای از دامنه شیب مماس‌ها برابر صفر است.

ب) تعیین کنید در چه بازه‌هایی مشتق f مثبت و در چه بازه‌هایی منفی و در چه بازه‌هایی f' برابر صفر است.

پ) تعیین کنید در چه بازه‌هایی تابع f صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌هایی تابع f ثابت است.

شکل در دسترس نبود؛ نمودار f با برچسب‌های a تا e چنین فرض شد: صعودی از a تا b، نزولی از b تا c، افقی از c تا d و صعودی از d تا e.



- **الف)** شیب مماس مثبت: (a, b) و (d, e)؛ منفی: (b, c)؛ صفر: [c, d] و نقطه‌ی b.
- **ب)** چون $f'(x)$ همان شیب مماس است: $f' > 0$ روی (a, b) و (d, e)؛ $f' < 0$ روی (b, c)؛ $f' = 0$ روی (c, d) (و در b).
- **پ)** f صعودی اکید روی [a, b] و [d, e] ؛ نزولی اکید روی [b, c] ؛ ثابت روی [c, d] .

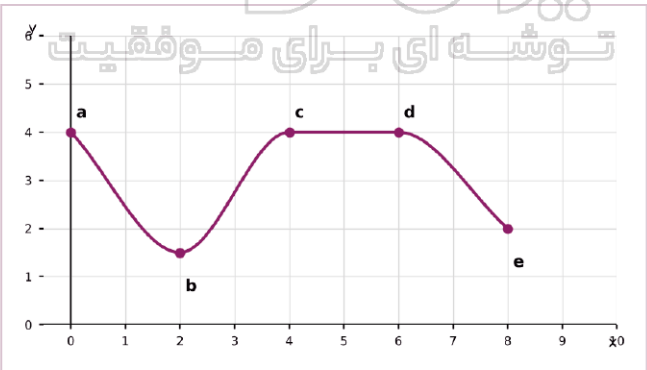
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۱ صفحه ۱۲۱ **فعالیت**

۲) دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازه‌ی [a, e] به‌گونه‌ای رسم کنید که دارای ویژگی‌های زیر باشد: تابع f در بازه‌ی (a, e) مشتق‌پذیر باشد؛ مقدار مشتق تابع در بازه‌های (a, b)، (b, c)، (c, d) و (d, e) به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد. تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.

روی (a, b) تابع نزول می‌کند، روی (b, c) صعود می‌کند، روی (c, d) افقی (ثابت) است و روی (d, e) دوباره نزول می‌کند. در b، c و d مماس افقی است تا مشتق پیوسته بماند:



- صعودی اکید: [b, c] ؛
- نزولی اکید: [a, b] و [d, e] ؛
- ثابت: [c, d] .

توشه ای برای موفقیت
ایران توشه

(مختصات دو نقطه‌ی داده‌شده در شکل دیده نشد و فرض شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲ صفحه ۱۲۱ کار در کلاس

۱) توابع $f(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ x^2 & (x \geq 1) \end{cases}$ **و** $g(x) = x^3$ **در تمام** $\mathbb{R}$ **صعودی اکیدند.**

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟

ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

الف) خیر. تابع f صعودی اکید است اما در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست: مشتق چپ برابر 1 و مشتق راست برابر $2x|_{x=1} = 2$ است.

ب) خیر. تابع $g(x) = x^3$ صعودی اکید و مشتق‌پذیر است ولی $g'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ (و در بقیه‌ی نقاط مشتق مثبت است).

۱۳ صفحه ۱۲۱ کار در کلاس

۲) تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ **را در نظر بگیرید.**

الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ **و** $(0, +\infty)$ **اکیداً نزولی است.**

ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنه‌ی خود اکیداً نزولی است؟

الف) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ برای هر $x \neq 0$؛ پس طبق قضیه، تابع روی هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) خیر. دامنه‌ی تابع بازه نیست و $-1 < 1$ ولی $f(-1) = -1 < f(1) = 1$ (یعنی با افزایش x مقدار تابع افزایش یافته است)؛ پس روی $\mathbb{R} - \{0\}$ نزولی نیست.

۱۴ صفحه ۱۲۲ فعالیت

فرض کنیم $c \in (a, b) \subseteq D_f$ **یک نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد و f بر** (a, b) **پیوسته و به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد.**

۱) اگر تابع f در بازه‌ای مانند (a, c) **در سمت چپ آن صعودی و در بازه‌ای مانند** (c, b) **در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت** $x = c$ **یک نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f است. علامت** f' **را در دو طرف نقطه‌ی c مشخص نمایید.**

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

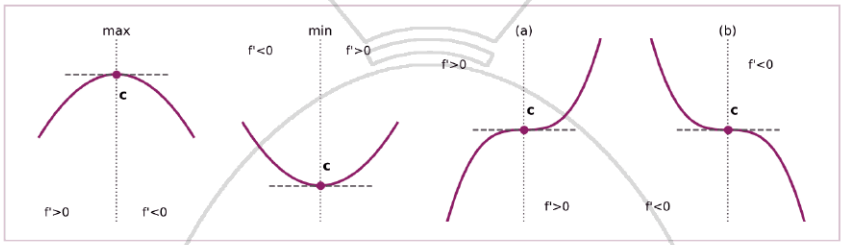
۲) مشابه قسمت (۱) را برای نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f بنویسید.

۳) در شکل‌های زیر نمودار تابع f و نقطه‌ی c مشخص شده است و $f'(c) = 0$. الف) علامت f' را در دو طرف نقطه‌ی c در هر دو نمودار بررسی کنید. ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا c یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی است؟

۱) چپ c تابع صعودی است، پس $f' > 0$؛ راست c نزولی است، پس $f' < 0$. یعنی f' از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد (ماکزیمم نسبی).

۲) چپ c تابع نزولی ($f' < 0$) و راست c صعودی ($f' > 0$) است؛ یعنی f' از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد (مینیمم نسبی).

۳) (شکل‌ها در دسترس نبود؛ با توجه به عنوان «صعودی» و «نزولی» زیر شکل‌ها، فرض شد در (الف) تابع در دو طرف c صعودی و در (ب) در دو طرف c نزولی است.)



- الف) در شکل (الف) علامت f' در هر دو طرف c مثبت و در شکل (ب) در هر دو طرف c منفی است.
- ب) در هیچ‌کدام تغییر علامت نداریم؛ پس c اکسترمم نسبی نیست (مانند $\pm x^3$ در صفر).

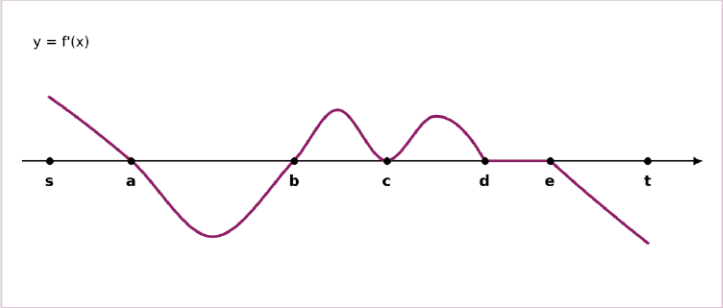
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵ صفحه ۱۲۴ کار در کلاس

نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است. الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در [s, t] بررسی کنید. ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟ پ) آیا نقاط بازه‌ی (d, e) اکسترمم نسبی هستند؟

شکل در دسترس نبود؛ نمودار f' چنین فرض شد: مثبت روی (s, a)، منفی روی (a, b)، مثبت روی (b, d) (با مماس شدن بر محور x در c)، صفر روی [d, e] و منفی روی (e, t).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



- **الف)** f صعودی روی [s, a] و [b, d] ؛ نزولی روی [a, b] و [e, t] ؛ ثابت روی [d, e] .
- **ب)** همه‌ی نقاط a, b, c, d, e بحرانی‌اند ($f' = 0$). در a علامت f' از + به − تغییر می‌کند: ماکزیمم نسبی؛ در b از − به +: مینیمم نسبی؛ در c علامت تغییر نمی‌کند: اکسترمم نیست؛ d ماکزیمم نسبی (چپ صعودی، راست ثابت) و e نیز ماکزیمم نسبی (چپ ثابت، راست نزولی) است.
- **پ)** بله؛ روی (d, e) تابع ثابت است، پس مقدار تابع در هر نقطه از مقدار نقاط همسایه کمتر یا مساوی (و بیشتر یا مساوی) است؛ هر نقطه‌ی این بازه هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است.

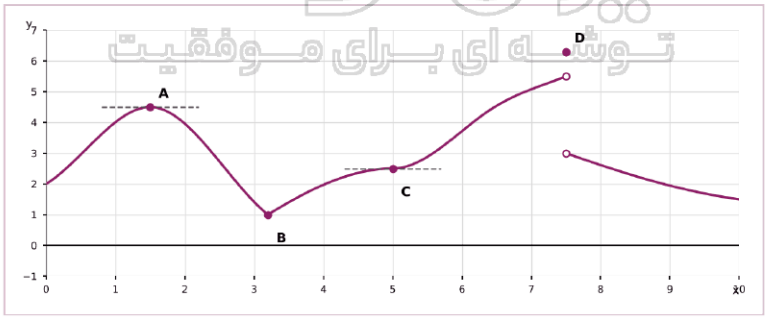
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶ صفحه ۱۲۵ تمرین

۱) نمودار تابعی را رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد.

نقطه‌ی ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد. نقطه‌ی مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد. نقطه‌ی ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد. نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.

نمودار زیر هر چهار ویژگی را دارد:



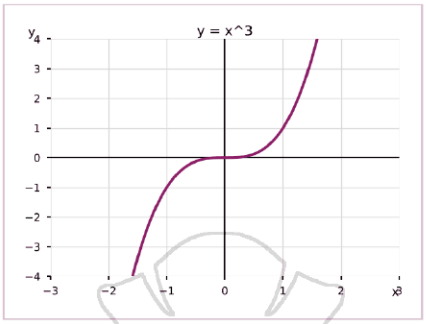
- A: ماکزیمم نسبی با مماس افقی ($f' = 0$)؛
- B: مینیمم نسبی در یک گوشه (پیوسته، بدون مشتق)؛
- D: ماکزیمم نسبی در نقطه‌ی ناپیوستگی (مقدار تابع از اطراف بیشتر است)؛
- C: مماس افقی ولی صعودی در دو طرف (اکسترمم نیست).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷ صفحه ۱۲۵ تمرین

۲) نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

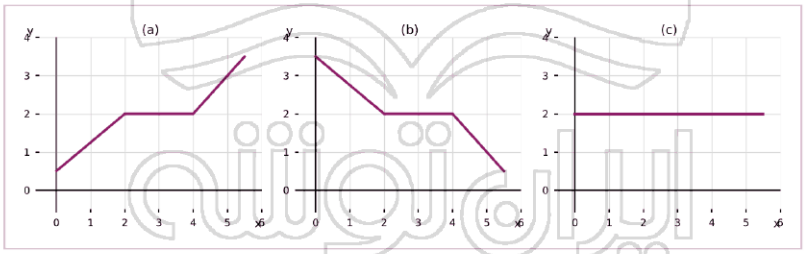
مثلاً $f(x)=x^3$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است ولی چون $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ، نه ماکزیمم و نه مینیمم مطلق دارد.



۱۸ صفحه ۱۲۵ تمرین

۳) برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابع f در بازه‌ای مانند [a, b] صعودی است اما صعودی اکید نیست. ب) تابع f در بازه‌ای مانند [a, b] نزولی است اما نزولی اکید نیست. پ) تابع f در بازه‌ای مانند [a, b] هم صعودی و هم نزولی است.



- الف) تابعی که قسمتی از آن افقی است (ثابت) ولی هیچ‌جا نمی‌افتد؛ برای $x_1 < x_2$ همواره $f(x_1) \le f(x_2)$ ولی برابری هم رخ می‌دهد.
- ب) مشابه (الف) ولی از چپ به راست هیچ‌جا بالا نمی‌رود.
- پ) تابع ثابت، چون هم $f(x_1) \le f(x_2)$ و هم $f(x_1) \ge f(x_2)$ برقرار است.

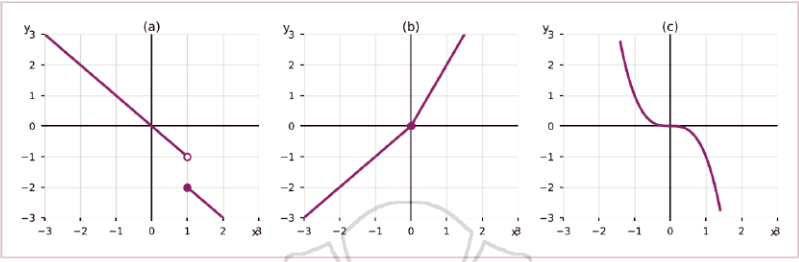
این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۱۹ صفحه ۱۲۵ تمرین

۴) برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست. ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نیست. پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.

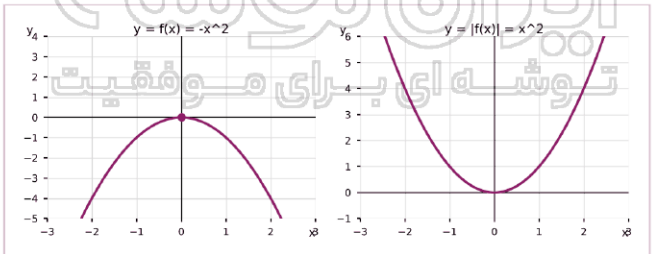


- الف) $f(x) = \begin{cases} -x & (x < 1) \\ -x - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$ اکیداً نزولی و در $x = 1$ ناپیوسته (جهش) است.
- ب) $f(x) = \begin{cases} x & (x < 0) \\ 2x & (x \geq 0) \end{cases}$ اکیداً صعودی و پیوسته است ولی در $x = 0$ گوشه دارد.
- پ) $f(x) = -x^3$ اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است ولی $f'(0) = 0$ منفی نیست.

۲۰ صفحه ۱۲۵ تمرین

۵) نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

تابع $f(x) = -x^2$ ماکزیمم مطلق ۰ را در $x = 0$ دارد، اما $|f(x)| = x^2$ بی‌کران بالاست و ماکزیمم مطلق ندارد.



۲۱ صفحه ۱۲۵ تمرین

۶) نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$، **ب)** $f(x) = x^3 - 3x$ $[-2, 1]$، **پ)** $[-1, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 2) \\ 4 - x & (x \ge 2) \end{cases}$$

الف) $f'(x) = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. مقدارها: $f(1) = 6$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{14}{3}$, $f(-2) = 21$. پس مینیمم نسبی و مطلق $\frac{14}{3}$ در $x = \frac{1}{3}$ و ماکزیمم مطلق ۲۱ در $x = -2$ (نقطه‌ی انتهایی، بدون ماکزیمم نسبی) است.

ب) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ که فقط $x = 1$ درون بازه است. $f(2) = 2$, $f(1) = -2$, $f(-1) = 2$. مینیمم نسبی و مطلق ۲- در $x = 1$؛ ماکزیمم مطلق ۲ در $x = -1$ و $x = 2$ (هر دو انتهایی؛ ماکزیمم نسبی ندارد).

پ) روی $[0, 2)$ $f' = 1$ و روی $(2, +\infty)$ $f' = -1$؛ در $x = 2$ مشتق چپ ۱ و راست ۱- است، پس $x = 2$ نقطه‌ی بحرانی است. $f(2) = 2$: ماکزیمم نسبی و مطلق ۲ در $x = 2$. چون $\lim_{x \to +\infty} (4 - x) = -\infty$ مینیمم مطلق ندارد؛ مینیمم نسبی هم ندارد ($f(0) = 0$ فقط در انتها است).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۲ صفحه ۱۲۶ تمرین

۷) ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه‌ی (2, 1) مینیمم نسبی داشته باشد.

شرایط: $f'(2) = 0$ و $f(2) = 1$. چون $f'(x) = 3x^2 + a$:

$$12 + a = 0 \Rightarrow a = -12, \quad 8 + 2a + b = 1 \Rightarrow 8 - 24 + b = 1 \Rightarrow b = 17$$

بنابراین $f(x) = x^3 - 12x + 17$ و $f''(2) = 12 > 0$ نشان می‌دهد نقطه‌ی (2, 1) واقعاً مینیمم نسبی است.

(متن این تمرین در فایل به‌صورت رمزگذاری‌شده بود؛ مختصات نقطه از روی آن بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

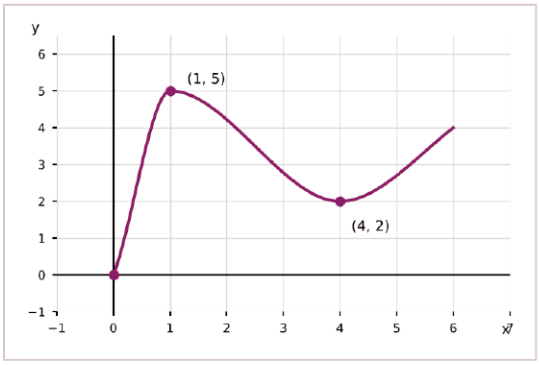
---

۲۳ صفحه ۱۲۶ تمرین

۸) نمودار تابعی را به‌گونه‌ای رسم کنید که در شرایط زیر صدق کند: $f(0) = 0$, $f(4) = 2$, $f(1) = 5$ و نقطه‌ی (1, 5) ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

(متن تمرین بازسازی‌شده است.) منحنی از مبدأ شروع می‌شود، به (1, 5) می‌رود و در آن‌جا مماس افقی دارد (ماکزیمم نسبی)، سپس نزول می‌کند و از (4, 2) می‌گذرد (در این نقطه مینیمم نسبی گرفته‌ایم) و دوباره بالا می‌رود:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۴ صفحه ۱۲۶ تمرین

۹) یک برگه‌ی کاغذی مستطیل‌شکل با ضلع‌های x و y در اختیار داریم. از چهار گوشه‌ی آن مربع‌هایی به ضلع h می‌بریم و جعبه‌ای می‌سازیم. اگر $h = 2\ cm$ و $xy = 100\ cm^2$ باشد، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این جعبه بیشترین مقدار ممکن باشد.

ابعاد جعبه $x - 2h = x - 4$، $y - 4$ و ارتفاع ۲ است. با $y = \frac{100}{x}$ و $4 < x < 25$:

$$V(x) = 2(x-4)\left(\frac{100}{x} - 4\right) = 232 - 8x - \frac{800}{x}$$

$$V'(x) = -8 + \frac{800}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 10 \quad (x > 0)$$

در دو سر بازه $V \to 0$ و $V(10) = 72$؛ پس بیشترین حجم $72\ cm^3$ به ازای $x = y = 10\ cm$ است.

(متن تمرین در فایل رمزگذاری‌شده بود و از روی نشانه‌ها بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵ صفحه ۱۲۶ تمرین

۱۰) یک مستطیل در یک نیم‌دایره‌ی به شعاع ۴ سانتی‌متر محاط شده است. طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن باشد.

ضلع مستطیل روی قطر نیم‌دایره قرار دارد. اگر نیم‌طول قاعده x باشد، ارتفاع $\sqrt{16 - x^2}$ و مساحت:

$$S(x) = 2x\sqrt{16 - x^2},\ 0 \le x \le 4$$

برای مشتق‌گیری ساده‌تر $S^2 = 4x^2(16 - x^2) = 64x^2 - 4x^4$ را بیشینه می‌کنیم:

$(S^2)' = 128x - 16x^3 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$. در دو سر $S = 0$ است؛ پس این ماکزیمم مطلق است:

طول مستطیل $2x = 4\sqrt{2}$ و عرض آن $\sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}$ سانتی‌متر و مساحت بیشینه ۱۶ سانتی‌متر مربع است.

(شعاع و نوع شکل از متن رمزگذاری‌شده حدس زده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۶ صفحه ۱۲۶ تمرین

۱۱) توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟ الف) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ **ب)** $f(x) = \frac{x}{x-2}$

الف) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$. علامت: مثبت برای $x < -2$، منفی برای $-2 < x < 1$ و مثبت برای $x > 1$. پس f روی $(-\infty, -2]$ و $[1, +\infty)$ صعودی و روی $[-2, 1]$ نزولی است.

ب) $f'(x) = \frac{(x-2)-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$ برای $x \neq 2$؛ پس f روی $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ نزولی اکید است و جایی صعودی نیست.

(ضابطه‌ها از متن رمزگذاری‌شده بازسازی شدند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۷ صفحه ۱۲۸ فعالیت

در زیر بخشی از نمودارهای دو تابع $g(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = x^2$ در بازه‌ی $[0, +\infty)$ و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.

۱) با حرکت از نقطه‌ی $x = 0$ به سمت راست، شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟ ۲) جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با تغییرات شیب خطوط مماس دارد؟

۳) تابع h' در بازه‌ی $[0, +\infty)$ صعودی است یا نزولی؟ ۴) تابع g' در بازه‌ی $[0, +\infty)$ صعودی است یا نزولی؟

۵) الف) در حالت کلی، صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع f' دارد؟ علامت f' بر بازه‌ی I مثبت است، آنگاه f بر I..... است؛ علامت f' بر I منفی است، آنگاه f بر I..... است. ب) صعودی یا نزولی بودن تابع f' چه ارتباطی با علامت f'' دارد؟ علامت f'' بر I مثبت است آنگاه f' بر I..... است؛ علامت f'' بر I منفی است آنگاه f' بر I..... است.

۶) الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه ..... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه ..... می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به ..... است. ب) اگر مقدار f'' در یک

بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه ..... است و لذا شیب خطوط مماس ..... می‌یابد و تقعر منحنی رو به ..... است.

۱) برای $h(x) = x^2$ شیب مماس $h'(x) = 2x$ زیاد می‌شود و تقعر رو به بالاست. برای $g(x) = \sqrt{x}$ شیب مماس $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ کم می‌شود و تقعر رو به پایین است.

۲) اگر شیب مماس‌ها زیاد شود تقعر رو به بالا و اگر کم شود تقعر رو به پایین است.

۳) $h'(x) = 2x$ صعودی است. **۴)** $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ نزولی است.

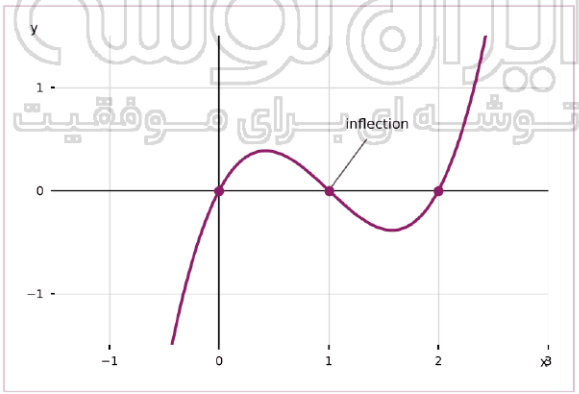
۵) الف) علامت f' مثبت $\Rightarrow$ f **صعودی**؛ علامت f' منفی $\Rightarrow$ f **نزولی**. ب) علامت f'' مثبت $\Rightarrow$ f' **صعودی**؛ علامت f'' منفی $\Rightarrow$ f' **نزولی**.

۶) الف) f' صعودی است، شیب مماس‌ها **زیاد** می‌شود و تقعر **رو به بالا** است. ب) f' نزولی است، شیب مماس‌ها **کم** می‌شود و تقعر **رو به پایین** است.

۲۸ صفحه ۱۳۰ **کار در کلاس**

نمودار تابع $y = f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید: $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ و بر بازه‌ی $(-\infty, 1)$ $f''(x) < 0$ و بر بازه‌ی $(1, +\infty)$ $f''(x) > 0$.

تقعر روی $(-\infty, 1)$ رو به پایین و روی $(1, +\infty)$ رو به بالاست، پس $x = 1$ نقطه‌ی عطف است. نمودار از $(0, 0)$ و $(1, 0)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد؛ بین ۰ و ۱ (تقعر پایین) برجستگی بالا و بین ۱ و ۲ (تقعر بالا) فرورفتگی پایین دارد. نمونه‌ی ساده: $f(x) = x(x-1)(x-2)$ که $f''(x) = 6x - 6$:

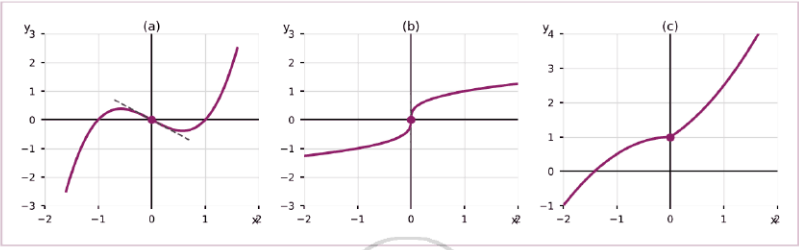


ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۱۳۲ کار در کلاس

۱) در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.

شکل‌ها در دسترس نبود؛ سه نمودار نمونه فرض شد:



- الف) در $x = 0$ تقعر عوض می‌شود و مماس (خط‌چین) وجود دارد؛ پس نقطه‌ی عطف است و مماس از نمودار عبور می‌کند.
- ب) تابع $\sqrt[3]{x}$: در $x = 0$ تقعر عوض می‌شود و مماس قائم (خط $x = 0$) دارد؛ پس نقطه‌ی عطف است.
- پ) تقعر در $x = 0$ عوض می‌شود اما نمودار در آن‌جا گوشه دارد و مماس ندارد؛ پس نقطه‌ی عطف نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۰ صفحه ۱۳۲ کار در کلاس

۲) کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیاورید.
الف) در نقطه‌ی عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند. ب) هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطه‌ی عطف است. پ) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه‌ی عطف است. ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه‌ی عطف داشته باشد. ث) تابع صعودی اکید، نقطه‌ی عطف ندارد.

توشه ای برای موفقیت

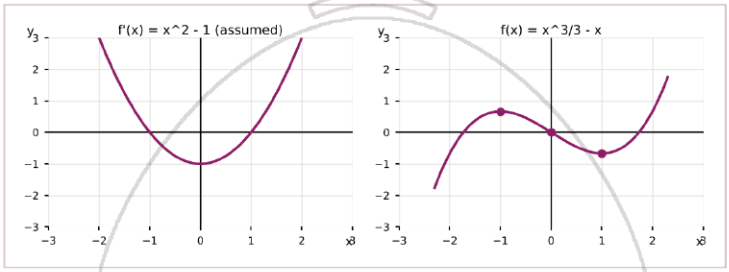
- **الف) درست**؛ چون تقعر عوض می‌شود.
- **ب) نادرست**؛ $f(x) = \frac{1}{x}$: $f'' = \frac{2}{x^3}$ در $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد ولی 0 در دامنه نیست (نمودار پیوسته نیست). همین‌طور اگر در نقطه مماس نباشد (گوشه).
- **پ) نادرست**؛ $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$ ولی $f'' = 12x^2 \geq 0$ تغییر علامت نمی‌دهد.
- **ت) درست**؛ مثلاً $\sin x$ بی‌شمار نقطه‌ی عطف $(k\pi, 0)$ دارد.
- **ث) نادرست**؛ $f(x) = x^3$ اکیداً صعودی است و در مبدأ نقطه‌ی عطف دارد.

۳۱ صفحه ۱۳۵ کار در کلاس

۱) اگر شکل کشیده شده در صفحه‌ی شطرنجی مربوط به نمودار تابع f' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟ (گزینه‌های الف، ب، پ، ت)

شکل‌ها در دسترس نبود؛ روش پاسخ: (۱) جایی که $f' > 0$ است f صعودی و جایی که $f' < 0$ است نزولی است؛ (۲) صفرهای f' مماس افقی‌اند و اگر علامت f' عوض شود اکسترمم‌اند؛ (۳) جایی که f' صعودی است تقعر f رو به بالا و جایی که f' نزولی است تقعر رو به پایین است؛ (۴) ماکزیمم یا مینیمم خود f' نقطه‌ی عطف f است.

برای نمونه اگر $f'(x) = x^2 - 1$ باشد، f باید در $x = -1$ ماکزیمم نسبی و در $x = 1$ مینیمم نسبی داشته و در $x = 0$ نقطه‌ی عطف داشته باشد؛ یعنی نمودار «سه‌تایی S شکل» (مانند $\frac{x^3}{3} - x$). از میان گزینه‌ها آن نموداری که چنین رفتاری دارد (در فرض ما گزینه‌ی (ب)) درست است.



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

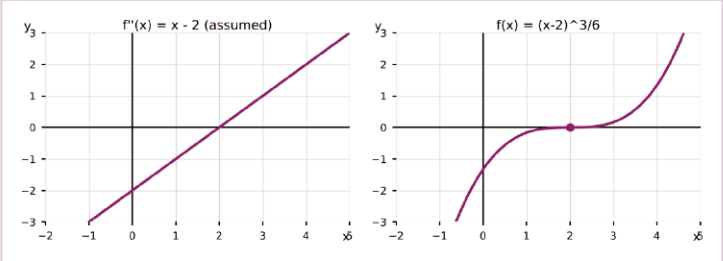
۳۲ صفحه ۱۳۶ کار در کلاس

۲) اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع f'' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟ (گزینه‌های الف، ب، پ، ت)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

شکل در دسترس نبود. روش: f'' علامت تقعر f را می‌دهد: $f'' > 0 \Rightarrow$ تقعر بالا و $f'' < 0 \Rightarrow$ تقعر پایین، و جایی که f'' محور x را با تغییر علامت قطع می‌کند نقطه‌ی عطف f است.

برای نمونه اگر $f''(x) = x - 2$ باشد، f روی $(-\infty, 2)$ تقعر پایین، روی $(2, +\infty)$ تقعر بالا و در $x = 2$ عطف دارد (مانند $\frac{(x-2)^3}{6}$)؛ گزینه‌ای که چنین است (در فرض ما گزینه‌ی (ب) با طول عطف ۲) درست است.



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

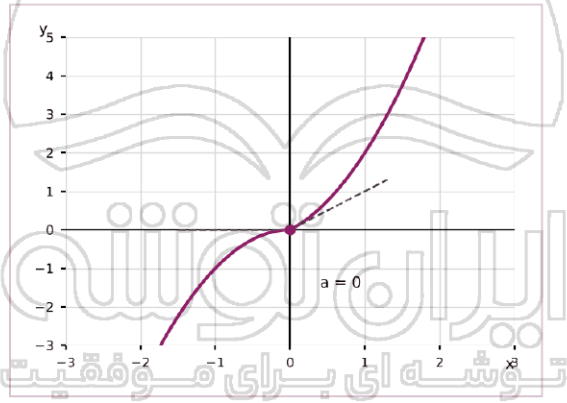
۳۳ صفحه ۱۳۶ تمرین

۱) نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه‌ی عطف نباشد.

کافی است در a مماس نداشته باشیم، مثلاً در $a = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & (x < 0) \\ x^2 + x & (x \geq 0) \end{cases}$$

روی $(-\infty, 0)$ $f'' = -2 < 0$ (تقعر پایین) و روی $(0, +\infty)$ $f'' = 2 > 0$ (تقعر بالا)، ولی مشتق چپ ۰ و مشتق راست ۱ است؛ گوشه است و مماس ندارد، پس نقطه‌ی عطف نیست.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

---

۳۴ صفحه ۱۳۶ تمرین

۲) جهت تقعر توابع زیر را در دامنه‌ی آنها بررسی کرده و نقطه‌ی عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ **ب)** $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^3}$ **پ)** $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

الف) $f'(x) = x^2 - 2x - 3,\ f''(x) = 2x - 2$. تقعر پایین روی $(-\infty, 1)$، بالا روی $(1, +\infty)$؛ "f تغییر علامت می‌دهد و f مشتق‌پذیر است. نقطه‌ی عطف: $(1, \frac{1}{3})$.

ب) دامنه $\mathbb{R}-\{-1\}$. $f'(x)=\frac{2(2-x)}{(x+1)^4}$، $f''(x)=\frac{6(x-3)}{(x+1)^5}$. علامت f'': مثبت روی $(-\infty,-1)$، منفی روی $(-1,3)$، مثبت روی $(3,+\infty)$. تقعر بالا روی $(-\infty,-1)$ و $(3,+\infty)$ و پایین روی $(-1,3)$. در $x=3$ تغییر تقعر و مماس داریم: نقطه‌ی عطف $(3,\frac{1}{32})$؛ $x=-1$ در دامنه نیست و عطف نیست.

پ) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$، $f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$. برای $x>0$ $f''<0$ (تقعر پایین) و برای $x<0$ $f''>0$ (تقعر بالا). در $x=0$ تابع پیوسته با مماس قائم است؛ نقطه‌ی عطف $(0,1)$.

(ضابطه‌های (ب) و (پ) از متن ناقص بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۵ صفحه ۱۳۶ تمرین

۳) برای هر مورد یک تابع درجه‌ی ۳ مثال بزنید که نقطه‌ی داده‌شده نقطه‌ی عطف آن باشد. الف) نقطه‌ی $(0,0)$ ب) نقطه‌ی $(1,0)$ پ) نقطه‌ی $(0,1)$ ت) نقطه‌ی $(2,2)$

تابع $f(x)=(x-a)^3+b$ با $f''(x)=6(x-a)$ در $x=a$ تغییر علامت می‌دهد و نقطه‌ی عطف آن (a,b) است. پس:

- الف) $f(x)=x^3$
- ب) $f(x)=(x-1)^3$
- پ) $f(x)=x^3+1$
- ت) $f(x)=(x-2)^3+2$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۶ صفحه ۱۳۶ تمرین

۴) مقادیر a,b و c را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند: $x=1/2$ طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع f باشد، $f(0)=1$ و $f(1)=2$.

$f''(x)=6ax+2b$؛ عطف در $x=1/2$ یعنی $f''(\frac{1}{2})=3a+2b=0\Rightarrow b=-\frac{3a}{2}$. از $f(0)=c=1$ و $f(1)=a+b+c=2$: $a-\frac{3a}{2}+1=2\Rightarrow a=-2$، $b=3$.

$a=-2, b=3, c=1$ و $f(x)=-2x^3+3x^2+1$

(ضابطه‌ی تابع از متن ناقص بازسازی شد.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

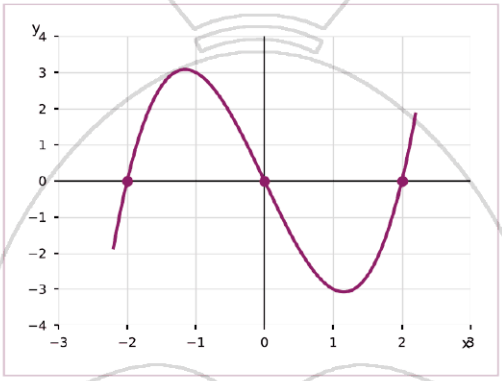
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۷ صفحه ۱۳۶ تمرین

۵) اگر (0, 0) نقطه‌ی عطف تابع درجه‌ی سومی با ضابطه‌ی $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل رسم شده است، a, b و c را پیدا کنید.

شکل در دسترس نبود؛ با توجه به اعداد ۰، ۲- و ۲ روی محور x فرض شد نمودار محور x را در $x = -2, 0, 2$ قطع می‌کند. عطف در مبدأ: $f''(x) = 6x + 2a$، $f''(0) = 0 \Rightarrow a = 0$ و $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$. پس $f(x) = x^3 + bx = x(x^2 + b)$ و ریشه‌ی $x = 2$ می‌دهد $4 + b = 0$، یعنی $b = -4$:

$a = 0, b = -4$ و $c = 0$ $f(x) = x^3 - 4x$



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۸ صفحه ۱۴۴ تمرین

۱) جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

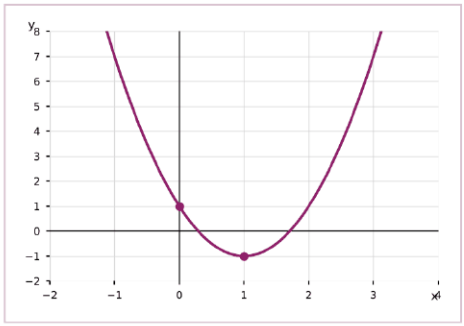
الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ **ب)** $f(x) = x^3 - 5x + 5$ **پ)** $f(x) = -x(x + 2)^2$

ت) $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 2}$ **ث)** $f(x) = \frac{x - 1}{x + 3}$ **ج)** $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

الف) دامنه $\mathbb{R}$. $f'(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$، $f'' = 4 > 0$ (تقعر همواره بالا). مینیمم نسبی و مطلق $f(1) = -1$؛ محور y را در (0, 1) قطع می‌کند؛ $\lim_{x \to \pm\infty} f = +\infty$. نقطه‌ی عطف ندارد.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f′		−	0	+	
f″		+	+	+	
f	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

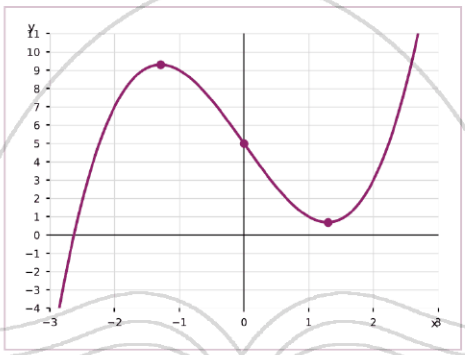
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



ب) $f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5/3} \approx \pm 1.29$؛ $f''(x) = 6x$: عطف در $x = 0$ (نقطه‌ی $(0, 5)$).

ماکزیمم نسبی $\approx 9.3 \approx f(-1.29)$؛ مینیمم نسبی $\approx 0.7 \approx f(1.29)$؛ $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$.

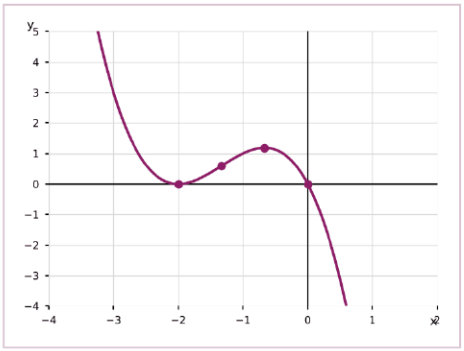
x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{3}}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f	$-\infty$	↗	≈ 9.3	↘	5	↘	≈ 0.7	↗	$+\infty$



پ) $f'(x) = -(x + 2)(3x + 2)$ با ریشه‌های -2 و $-\frac{2}{3}$؛ $f''(x) = -6x - 8$ با ریشه‌ی $-\frac{4}{3}$. مینیمم نسبی $f(-2) = 0$، ماکزیمم نسبی $f(-\frac{2}{3}) = \frac{32}{27}$، عطف $(-\frac{4}{3}, \frac{16}{27})$. برخورد با محورها: $(0, 0)$ و $(-2, 0)$؛ $\lim_{x\to+\infty} f = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$.

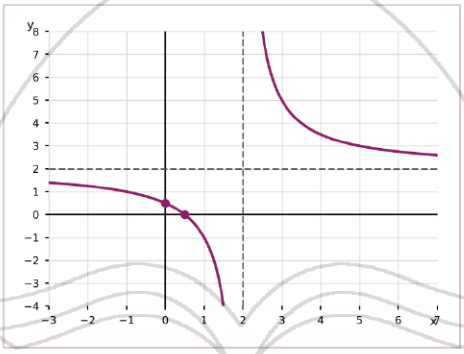
x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
f''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{16}{27}$	↗	$\frac{32}{27}$	↘	$-\infty$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



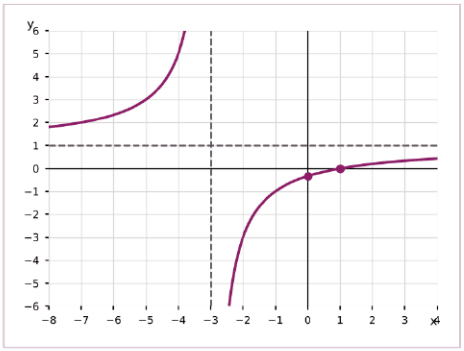
ت) دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$؛ مجانب افقی $y = 2$ و مجانب قائم $x = 2$. $f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$، $f''(x) = \frac{6}{(x-2)^3}$ (منفی برای $x < 2$ و مثبت برای $x > 2$). برخورد با محورها: $(0, \frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{2}, 0)$. اکسترمم و عطف ندارد.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		−	×	−	
f''		−	×	+	
f	2	↘	$\mp\infty$	↘	2



ث) دامنه $\mathbb{R} - \{-3\}$؛ مجانب افقی $y = 1$ و مجانب قائم $x = -3$. $f'(x) = \frac{4}{(x+3)^2} > 0$، $f''(x) = \frac{-8}{(x+3)^3}$ (مثبت برای $x < -3$، منفی برای $x > -3$). برخورد با محورها: $(0, -\frac{1}{3})$ و $(1, 0)$.

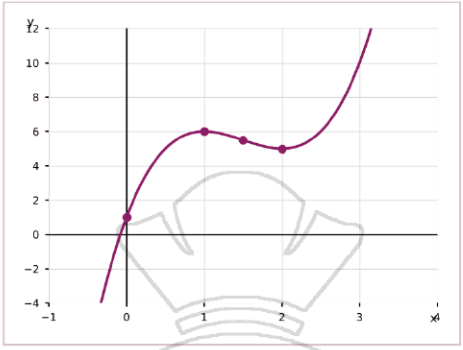
x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f'		+	×	+	
f''		+	×	−	
f	1	↗	$\pm\infty$	↗	1



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ج) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$؛ $f''(x) = 12x - 18$. ماکزیمم نسبی $f(1) = 6$، مینیمم نسبی $f(2) = 5$، عطف $(\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$؛ محور y را در $(0, 1)$ قطع می‌کند؛ $\lim_{x\to\pm\infty} f = \pm\infty$.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f'		+	0	−	−	−	0	+	
f''		−	−	−	0	+	+	+	
f	$-\infty$	↗	6	↘	$\frac{11}{2}$	↘	5	↗	$+\infty$



(ضابطه‌های (ت) و (ث) از متن ناقص بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۳۹ صفحه ۱۴۴ تمرین

۲) فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های f نقطه‌ی (2, 1) است. اگر این تابع از نقطه‌ی (−1, 0) بگذرد، ضابطه‌ی تابع را به دست آورید.

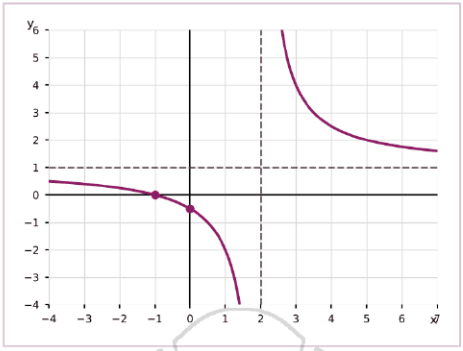
مجانب قائم $x = -\frac{d}{c} = 2$ و مجانب افقی $y = \frac{a}{c} = 1$، پس می‌توان نوشت $a = c$ و $d = -2c$؛ با $c = 1$:

$f(x) = \frac{x+b}{x-2}$. از $f(-1) = 0$ داریم $-1 + b = 0$ یعنی $b = 1$:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

(همین تابع با ضرب صورت و مخرج در عدد ثابت هم‌ارز است.) $f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$؛ جدول و نمودار:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$-$	$\times$	$-$	
f''		$-$	$\times$	$+$	
f	1	↘	$\mp\infty$	↘	1



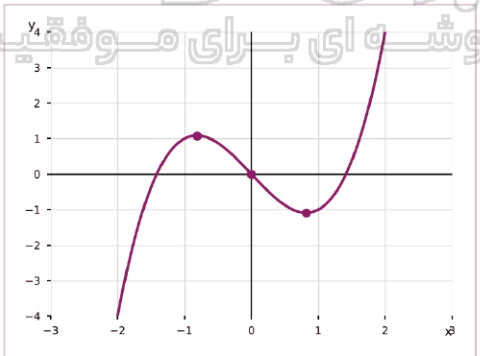
(مختصات نقاط از متن ناقص بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۰ صفحه ۱۴۴ تمرین

۳) کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^3 - 2x$ است؟ (گزینه‌های الف، ب، پ، ت)

شکل گزینه‌ها در دسترس نبود؛ ویژگی‌های نمودار: $f'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2/3} \approx \pm 0.82$، ماکزیمم نسبی ≈ (−0.82, 1.09) و مینیمم نسبی ≈ (0.82, −1.09)؛ $f'' = 6x$: عطف (0, 0)؛ ریشه‌ها $x = 0, \pm\sqrt{2}$؛ $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$. گزینه‌ای که از مبدأ می‌گذرد، سه نقطه‌ی برخورد با محور x دارد، از پایین چپ به بالا راست می‌رود و ماکزیمم نسبی آن سمت چپ محور y است، پاسخ است:



(ضابطه‌ی تابع از متن ناقص خوانده شد و شکل گزینه‌ها دیده نشد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت