با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام حسابان (۲) دوازدهم
فصل چهارم

عنوان فصل: مشتق

از صفحه‌ی ۷۱ تا صفحه‌ی ۱۱۰ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل مشتق آمده است.
مباحث فصل: آشنایی با مفهوم مشتق؛ مشتق‌پذیری و پیوستگی؛ آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۷۳ · فعالیت — شیب خط‌ها و رسم خط با شیب داده‌شده	۷
۲	صفحه ۷۴ · فعالیت — خط قاطع و خط مماس بر منحنی	۷
۳	صفحه ۷۴ · فعالیت — شیب خط‌های قاطع منحنی $f(x) = -x^2+10x$	۸
۴	صفحه ۷۵ · فعالیت — تغییر Δx در محاسبه‌ی شیب‌های قاطع	۸
۵	صفحه ۷۶ · فعالیت — حدس شیب خط مماس از روی شیب قاطع‌ها	۹
۶	صفحه ۷۸ · کار در کلاس — خط مماس بر $y = x^2+3$ در $x = -2$	۹
۷	صفحه ۸۰ · کار در کلاس — هم‌ارزی دو دستور مشتق (اثبات جبری)	۱۰
۸	صفحه ۸۰ · کار در کلاس — مشتق و علامت شیب برای $f(x) = -x^2+10x$	۱۰
۹	صفحه ۸۱ · تمرین — تمرین ۱ ـ مشتق و خط مماس $f(x) = 3x^2-2x+1$	۱۱
۱۰	صفحه ۸۱ · تمرین — تمرین ۲ ـ نظیر کردن نقاط با شیب‌ها	۱۱
۱۱	صفحه ۸۱ · تمرین — تمرین ۳ ـ مرتب‌کردن شیب‌ها	۱۲
۱۲	صفحه ۸۱ · تمرین — تمرین ۴ ـ نظیر کردن نقاط با مشتق‌ها	۱۳
۱۳	صفحه ۸۲ · تمرین — تمرین ۵ ـ انتخاب نقاط با ویژگی‌های داده‌شده	۱۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ صفحه ۸۲ · تمرین — تمرین ۶ ـ مشتق $f(x) = x^3 - 2$ در ۱- ۱۴

۱۵ صفحه ۸۲ · تمرین — تمرین ۷ ـ درست یا نادرست درباره‌ی شیب منحنی در نقاط A تا F ۱۵

۱۶ صفحه ۸۳ · تمرین — تمرین ۸ ـ مختصات نقاط روی خط مماس ۱۵

۱۷ صفحه ۸۴ · فعالیت — مشتق‌ناپذیری تابع ناپیوسته در $x = 2$ ۱۶

۱۸ صفحه ۸۵ · کار در کلاس — مشتق‌ناپذیری تابع g در $x = 1$ ۱۸

۱۹ صفحه ۸۶ · کار در کلاس — چرا؟ در اثبات قضیه‌ی «مشتق‌پذیری ⇒ پیوستگی» ۱۸

۲۰ صفحه ۸۷ · کار در کلاس — مشتق $f(x) = |x^2 - 1|$ در $x = -1$ و نیم‌مماس‌ها ۱۸

۲۱ صفحه ۸۹ · کار در کلاس — تعیین نقاط مشتق‌ناپذیر از روی شکل ۱۹

۲۲ صفحه ۹۰ · فعالیت — تابع مشتق $f(x) = x^2$ ۲۰

۲۳ صفحه ۹۲ · کار در کلاس — دامنه‌ی f و f' برای تابع ثابت با یک نقطه‌ی جدا ۲۰

۲۴ صفحه ۹۵ · کار در کلاس — مشتق چند تابع با دستورهای مشتق‌گیری ۲۰

۲۵ صفحه ۹۶ · کار در کلاس — مشتق توابع مثلثاتی ۲۱

۲۶ صفحه ۹۷ · کار در کلاس — مشتق با قاعده‌ی زنجیری ۲۱

۲۷ صفحه ۹۷ · کار در کلاس — تعریف مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a, b]$ و $(a, b]$ ۲۲

۲۸ صفحه ۹۷ · کار در کلاس — چرا f روی $[1, 2]$ مشتق‌پذیر نیست؟ ۲۲

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۹۸ · کار در کلاس — مشتق‌پذیری تابع چندضابطه‌ای روی بازه‌ها ۲۳

۳۰ صفحه ۹۹ · تمرین — تمرین ۱ ـ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر ۲۳

۳۱ صفحه ۹۹ · تمرین — تمرین ۲ ـ مشتق راست و چپ در نقطه‌ی A ۲۴

۳۲ صفحه ۹۹ · تمرین — تمرین ۳ ـ رسم f و f' و مشتق‌ناپذیری در ۰ و ۳ ۲۴

۳۳ صفحه ۹۹ · تمرین — تمرین ۴ ـ رسم نمودار با مشتق‌های خواسته‌شده ۲۵

۳۴ صفحه ۹۹ · تمرین — تمرین ۵ ـ ترتیب مشتق‌ها و رسم f' برای x^2+2x+3 ۲۶

۳۵ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۶ ـ مشتق‌پذیری در $x = 1$ (تابع چندضابطه‌ای) ۲۶

۳۶ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۷ ـ سه تابع با مشتق برابر ۲۷

۳۷ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۸ ـ مشتق‌پذیری $|x^2-4|$ در ۲ و ۲- ۲۷

۳۸ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۹ ـ مشتق $x\sqrt[3]{x^2}$ و مماس قائم ۲۷

۳۹ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۱۰ ـ نظیر کردن نمودار تابع با نمودار مشتق ۲۸

۴۰ صفحه ۱۰۰ · تمرین — تمرین ۱۱ ـ مشتق ضرب و خارج‌قسمت دو تابع روی نمودار ۲۸

۴۱ صفحه ۱۰۱ · تمرین — تمرین ۱۲ ـ مشتق مجموع ۲۹

۴۲ صفحه ۱۰۱ · تمرین — تمرین ۱۳ ـ مشتق راست و چپ موجود ولی مشتق ناموجود ۲۹

۴۳ صفحه ۱۰۱ · تمرین — تمرین ۱۴ ـ مشتق توابع جبری ۳۰

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۴ صفحه ۱۰۱ · تمرین — تمرین ۱۵ ـ مشتق توابع مثلثاتی ۳۰

۴۵ صفحه ۱۰۱ · تمرین — تمرین ۱۶ ـ مقدار مشتق اول و دوم $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$ ۳۱

۴۶ صفحه ۱۰۴ · کار در کلاس — مرتب‌کردن سرعت‌های متوسط و لحظه‌ای روی نمودار مکان ـ زمان ۳۱

۴۷ صفحه ۱۰۵ · کار در کلاس — آهنگ رشد قد کودکان $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ ۳۲

۴۸ صفحه ۱۰۶ · کار در کلاس — آهنگ متوسط تغییر نرخ باروری در [۱۳۶۴, ۱۳۷۹] ۳۲

۴۹ صفحه ۱۰۸ · کار در کلاس — سرعت پرتاب، سرعت برخورد و سرعت ±۳۵ برای $h(t) = -5t^2+40t$ ۳۳

۵۰ صفحه ۱۰۸ · تمرین — تمرین ۱ ـ آهنگ تغییر متوسط دما ۳۳

۵۱ صفحه ۱۰۸ · تمرین — تمرین ۲ ـ کسری از جمعیت آلوده به ویروس ۳۴

۵۲ صفحه ۱۰۹ · تمرین — تمرین ۳ ـ فروش کالا و هزینه‌ی تبلیغ ۳۵

۵۳ صفحه ۱۰۹ · تمرین — تمرین ۴ ـ لحظه‌ای که سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط برابر است ۳۵

۵۴ صفحه ۱۰۹ · تمرین — تمرین ۵ ـ سرعت توپ در $t = 0,4$ از روی جدول ۳۶

۵۵ صفحه ۱۱۰ · تمرین — تمرین ۶ ـ درست یا نادرست درباره‌ی آهنگ تغییر ۳۶

۵۶ صفحه ۱۱۰ · تمرین — تمرین ۷ ـ جرم توده‌ی باکتری $m(t) = t^2+3t$ ۳۷

۵۷ صفحه ۱۱۰ · تمرین — تمرین ۸ ـ تخلیه‌ی مایع از ظرف ۳۷

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱ صفحه ۷۳ فعالیت

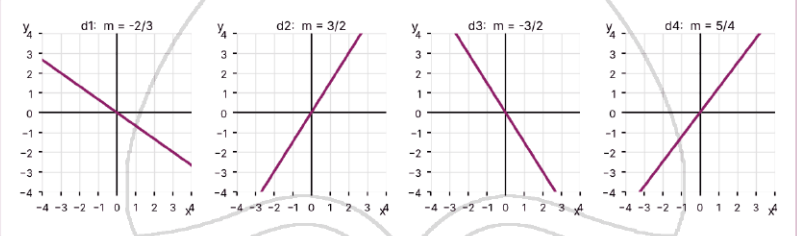
۱) شیب هر یک از خط‌های داده‌شده را مشخص کنید.

۲) با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط به خط‌های d1, d2, d3 و d4 را روی شکل مشخص کنید. (شیب خط‌ها: d1: −2/3، d2: 3/2، d3: −3/2، d4: 5/4)

۱) شیب یک خط برابر است با $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (تغییر عمودی بر تغییر افقی). با خواندن دو نقطه‌ی روی هر خط، شیب‌ها به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

خط	d1	d2	d3	d4
شیب	−2/3	3/2	−3/2	5/4

۲) خطی که شیب آن منفی است از چپ به راست نزولی و خطی که شیب آن مثبت است صعودی است؛ هرچه قدر مطلق شیب بزرگ‌تر باشد خط تندتر است. اگر خط‌ها از مبدأ بگذرند، برای رسم هر خط کافی است از مبدأ Δx واحد به راست و Δy واحد بالا (یا پایین) برویم. مثلاً برای d1 با شیب 2/3− از مبدأ ۳ واحد به راست و ۲ واحد به پایین می‌رویم:



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲ صفحه ۷۴ فعالیت

نقطه‌ی ثابت A را روی منحنی در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه‌ی A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟

اکنون نقطه‌ی C را سمت چپ نقطه‌ی A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی بیفتد؟

وقتی نقطه‌ی B روی منحنی به A نزدیک می‌شود، خط قاطع AB دور نقطه‌ی A می‌چرخد و وضعیت آن به یک خط معین نزدیک می‌شود؛ این خط همان **خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A** است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

اگر نقطه‌ی C از سمت چپ به A نزدیک شود نیز خط‌های قاطع AC به همان خط مماس نزدیک می‌شوند. بنابراین به‌طور شهودی:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A، حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است، به شرط آنکه نقطه‌ها به قدر کافی (از هر دو طرف) به A نزدیک شوند.

۳ صفحه ۷۴ فعالیت

الف) تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ با شرط $0 \le x \le 10$ داده شده است. نقاط A(2, f(2)), B(6, f(6)), C(5, f(5)), D(4, f(4)) و E(3, f(3)) را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد، یعنی mAB، از دستور $m_{AB} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{24 - 16}{4} = 2$ به دست می‌آید. به همین روش mAC، mAD و mAE را به دست آورید.

ابتدا مقدارهای تابع را حساب می‌کنیم: f(2)=16، f(3)=21، f(4)=24، f(5)=25، f(6)=24. سپس:

$$m_{AD} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{2} = 4 \qquad m_{AC} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 16}{3} = 3,$$

$$m_{AE} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{21 - 16}{1} = 5$$

بازه	[2,6]	[2,5]	[2,4]	[2,3]
Δx	4	3	2	1
Δy	8	9	8	5
شیب قاطع	2	3	4	5

با نزدیک‌شدن نقطه‌ی دوم به A شیب خط قاطع بزرگ‌تر می‌شود.

۴ صفحه ۷۵ فعالیت

در هنگام محاسبه‌ی شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δx ها چگونه تغییر می‌کنند؟

در بازه‌های [2,6]، [2,5]، [2,4] و [2,3] مقدار $\Delta x = x_B - x_A$ به ترتیب برابر ۴، ۳، ۲ و ۱ است؛ یعنی هر بار نقطه‌ی دوم به A نزدیک‌تر می‌شود و Δx کوچک‌تر (در جهت صفر) می‌شود. مقدار Δy نیز تغییر می‌کند و نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ همان شیب قاطع است.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۵ صفحه ۷۶ فعالیت

ب) حال فرض کنید که با ادامه‌ی روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به دست‌آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A نزدیک می‌شود. با تکمیل جدول و مقایسه‌ی شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید. (شیب خطی که از نقاط (a, f(a)) و (b, f(b)) می‌گذرد برابر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ است؛ h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.)

جدول: بازه‌های [۲, ۲.۴]، [۲, ۲.۳]، [۲, ۲.۲]، [۲, ۲.۱]، [۲, ۲.۰۱]، [۲, ۲.۰۰۱] و [2, 2+h] و ستون «شیب».

شیب قاطع در بازه‌ی [2, 2+h] برابر است با:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-(2+h)^2+10(2+h)-16}{h} = \frac{-h^2+6h}{h} = 6-h$$

بازه	[2,2.4]	[2,2.3]	[2,2.2]	[2,2.1]	[2,2.01]	[2,2.001]	[2,2+h]
شیب	5.6	5.7	5.8	5.9	5.99	5.999	6−h

وقتی h به صفر (از راست) نزدیک می‌شود مقدار 6 − h به عدد ۶ نزدیک می‌شود؛ پس حدس می‌زنیم شیب خط مماس در A برابر ۶ است:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$$

۶ صفحه ۷۸ کار در کلاس

معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول 2− بنویسید.

فرض کنیم $f(x) = x^2 + 3$. مشتق در a = −2:

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h-2)^2+3-7}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2-4h}{h} = \lim_{h\to 0} (h-4) = -4$$

نقطه‌ی تماس (−2, f(−2)) = (−2, 7) است؛ پس:

$$y - 7 = -4(x+2) \Rightarrow y = -4x - 1$$

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و به‌صورت $y = x^2 + 3$ خوانده شد.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷ صفحه ۸۰ | کار در کلاس

اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. (راهنمایی: تغییر متغیر $x=h+a$ را به کار برید؛ توجه کنید وقتی $h\to 0$ آنگاه $x\to a$.)

در حد سمت چپ قرار می‌دهیم $x=a+h$ یا $h=x-a$. در این صورت $a+h=x$ و $h=x-a$ است. همچنین وقتی $h\to 0$ داریم $x=a+h\to a$ و برعکس، وقتی $x\to a$ داریم $h=x-a\to 0$. پس:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یعنی دو دستور یک حد را می‌دهند و معادل‌اند.

۸ صفحه ۸۰ | کار در کلاس

الف) برای تابع $f(x)=-x^2+10x$، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آن‌ها قرینه‌ی یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

ث) با محاسبه‌ی $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

ابتدا تابع مشتق را به دست می‌آوریم. برای $f(x)=-x^2+10x$ داریم

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-2xh-h^2+10h}{h}=-2x-h+10$$ و با $h\to 0$:

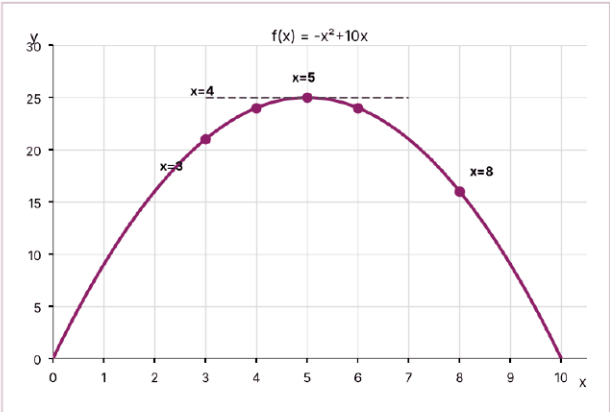
$$f'(x)=-2x+10$$

الف) $f'(8)=-16+10=-6$ و $f'(5)=-10+10=0$ (مماس در رأس سهمی افقی است).

ب) چون $f'(x)=-2x+10$ نسبت به $x=5$ قرینه است، هر دو نقطه‌ی متقارن نسبت به خط $x=5$ این ویژگی را دارند؛ مثلاً $f'(4)=2$ و $f'(6)=-2$ (نقاط به طول‌های ۴ و ۶). همچنین ۳ و ۷ با مشتق‌های ۴ و ۴-.

پ) در بازه‌ی $0<x<5$ که تابع صعودی است مشتق (شیب مماس) مثبت و در $5<x<10$ که تابع نزولی است مشتق منفی است؛ در $x=5$ مشتق صفر است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ت) نقطه‌ی ۴ از ۳ به رأس ($x = 5$) نزدیک‌تر است و مماس در آن تخت‌تر است؛ پس شیب مماس در نقطه‌ی ۳ بزرگ‌تر از شیب مماس در نقطه‌ی ۴ است.

ث) $f'(3) = -6 + 10 = 4$ و $f'(4) = -8 + 10 = 2$؛ چون $2 < 4$ حدس درست بود.

۹ صفحه ۸۱ تمرین

۱) اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله‌ی خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)^2-2(2+h)+1-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h^2+10h}{h} = 10$$

نقطه‌ی تماس $(2, f(2)) = (2, 9)$ و شیب ۱۰ است؛ پس:

$$y - 9 = 10(x - 2) \Rightarrow y = 10x - 11$$

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و بازسازی شده است.)

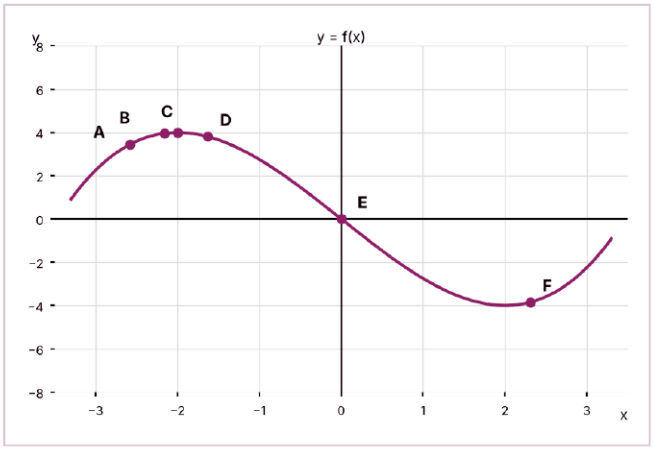
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰ صفحه ۸۱ تمرین

۲) نقاط داده‌شده روی منحنی زیر A) تا (F را با شیب‌های ارائه‌شده در جدول نظیر کنید. (شیب‌ها: $-3, -1, 0, 1/2, 1, 2$)

شیب مماس در هر نقطه نشان‌دهنده‌ی تندی و جهت منحنی است: شیب منفی یعنی منحنی نزولی، شیب صفر یعنی مماس افقی (نقطه‌ی بیشینه یا کمینه)، و هرچه شیب مثبت بزرگ‌تر باشد منحنی صعودی‌تر و تندتر است. با شکلی نمونه (فرض‌شده) داریم:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



نقطه	A	B	C	D	E	F
شیب	2	1/2	0	−1	−3	1

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ تناظر با شکلی فرضی و بر پایه‌ی قاعده‌ی بالا نوشته شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱ صفحه ۸۱ تمرین

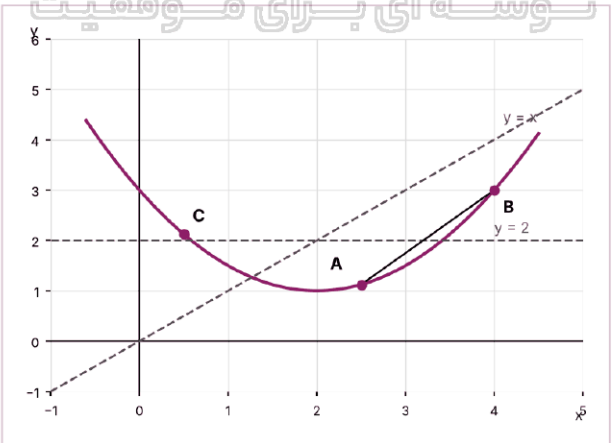
۳) برای نمودار y = f(x) در شکل زیر شیب‌های داده‌شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه‌ی A ب) شیب نمودار در نقطه‌ی B پ) شیب نمودار در نقطه‌ی C ت) شیب خط AB

ث) شیب خط y = 2 ج) شیب خط y = x

(شیب‌ها را به ترتیب m1 تا m6 بنامید.)

با شکلی نمونه (منحنی با شیب منفی در C، شیبی کوچک و مثبت در A و شیب تندتر در B):



- پ) شیب در C منفی است: m3 = −1.5
- ث) خط y = 2 افقی است: m5 = 0

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- الف) شیب در A: $m_1 = 0.5$
- ج) خط $y = x$: $m_6 = 1$
- ت) شیب قاطع AB بین شیب‌های A و B است: $m_4 = 1.25$
- ب) شیب در B (تندترین): $m_2 = 2$

$$m_3 < m_5 < m_1 < m_6 < m_4 < m_2$$

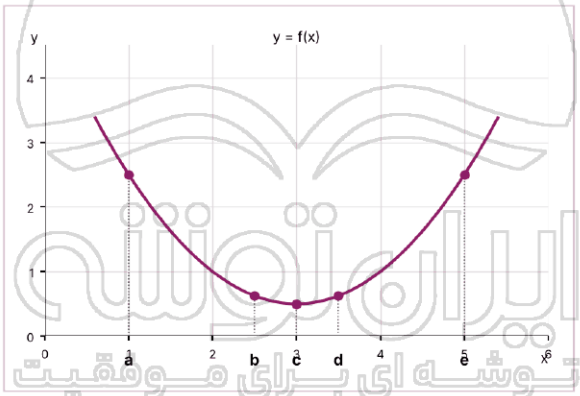
یعنی ترتیب: پ، ث، الف، ج، ت، ب. (شکل کتاب در متن موجود نبود و ترتیب بر پایه‌ی شکلی فرضی به دست آمد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲ صفحه ۸۱ تمرین

۴) با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید. (مقدارهای f'(x): −2, −0.5, 2, 0.5, 0)

در سمت چپ کمینه تابع نزولی است (مشتق منفی)، در نقطه‌ی کمینه مماس افقی است (مشتق صفر) و در سمت راست صعودی است (مشتق مثبت)؛ هرچه از کمینه دورتر باشیم شیب تندتر است:



نقطه	a	b	c	d	e
f'(x)	−2	−0.5	0	0.5	2

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ پاسخ بر پایه‌ی منحنی‌ای مانند شکل بالا نوشته شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳ صفحه ۸۲ تمرین

۵) نقاطی مانند A, B, C, D, E, F و G را روی نمودار y = f(x) مشخص کنید به طوری که:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

الف) A نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

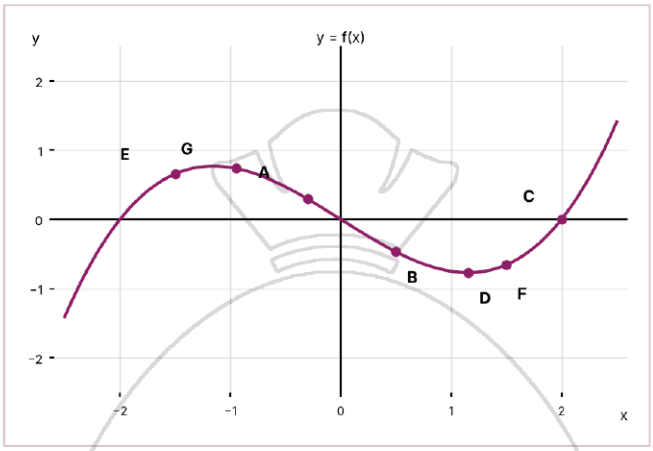
پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

روی نمودار نمونه‌ی زیر (یک تابع درجه‌ی سوم) نقاط را چنین انتخاب می‌کنیم:



- الف) A: نقطه‌ای روی بخش نزولی نمودار (بین ماکسیمم و مینیمم) — شیب مماس منفی.
- ب) B: نقطه‌ای روی بخش نزولی که زیر محور x است — هم $f < 0$ و هم $f' < 0$.
- پ) C: محل برخورد نمودار با محور x در بخش صعودی (طول ۲) — $f = 0$ و $f' > 0$.
- ت) D: نقطه‌ی مینیمم موضعی — مماس افقی و $f' = 0$.
- ث) E و F: دو نقطه‌ی متقارن نسبت به محور y (طول‌های ۱٫۵− و ۱٫۵) — مشتق هر دو برابر است.
- ج) G: نقطه‌ای بالای محور x روی بخش نزولی — $f > 0$ و $f' < 0$.

(پاسخ یکتا نیست و به شکل کتاب وابسته است که در متن موجود نبود.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴ صفحه ۸۲ تمرین

۶) اگر $f(x) = x^3 - 2$، $f'(-1)$ را به دست آورید.

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x\to -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

(با تجزیه‌ی $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$؛ همچنین از $f'(x) = 3x^2$ نیز $f'(-1) = 3$ به دست می‌آید.)

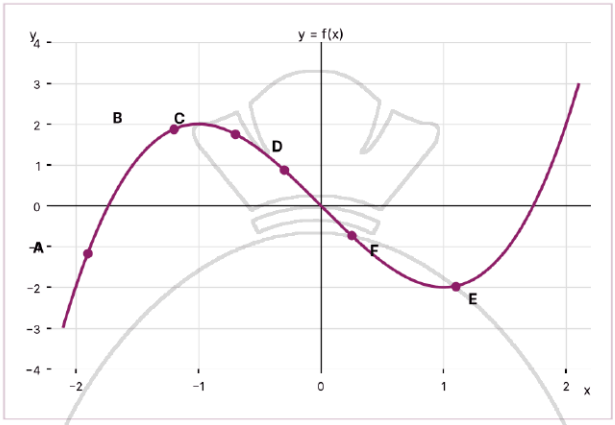
۱۵ صفحه ۸۲ تمرین

۷) نقاط A, B, C, D, E و F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A را با mA نمایش داده‌ایم.)

الف) شیب منحنی در همه‌ی این نقاط مثبت است. ب) mB < mA پ) mE < mB < mA

ت) شیب منحنی در نقاط F, D و C منفی است. ث) mF < mD < mC ج) mA < mC < mD < mF < mE < mB

با شکلی نمونه که با شیب‌های گزاره‌ها سازگار است A) تندترین بخش صعودی، سپس B و در سمت راست E؛ و C, D و F روی بخش نزولی):



- الف) نادرست؛ در C، D و F منحنی نزولی و شیب منفی است.
- ب) درست؛ A تندتر از B صعود می‌کند.
- پ) درست؛ شیب‌ها در E از B و در B از A کمترند و همه مثبت‌اند.
- ت) درست؛ هر سه روی بخش نزولی‌اند.
- ث) درست؛ F از D و D از C تندتر نزول می‌کند.
- ج) نادرست؛ mA بزرگ‌ترین شیب مثبت است نه کوچک‌ترین، و mC منفی است درحالی‌که mE و mB مثبت‌اند: ترتیب درست mF < mD < mC < mE < mB < mA است.

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ پاسخ‌ها بر پایه‌ی شکلی فرضی است.)

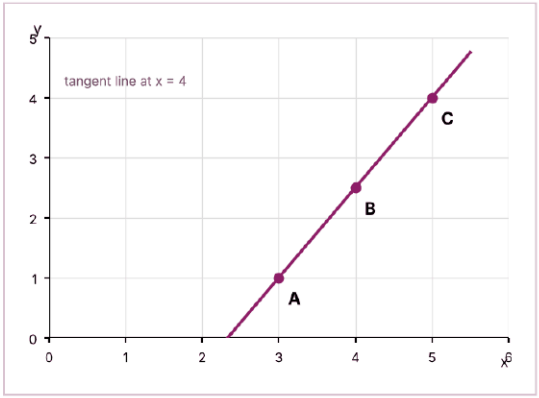
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶ صفحه ۸۳ تمرین

۸) برای تابع f در شکل زیر داریم $f'(4) = 1.5$ و $f(4) = 2.5$. با توجه به شکل مختصات نقاط A, B و C را بیابید. (نقاط روی خط مماس در نقطه‌ی x = 4 به طول‌های ۳، ۴ و ۵ قرار دارند.)

خط مماس در نقطه‌ی به طول ۴ از نقطه‌ی (4, 2.5) می‌گذرد و شیب آن $f'(4) = 1.5$ است:

$$y - 2.5 = 1.5(x - 4) \Rightarrow y = 1.5x - 3.5$$



- B (نقطه‌ی تماس): $B = (4, 2.5)$
- A (طول ۳): $A = (3, 1) \Rightarrow y = 1.5\times3 - 3.5 = 1$
- C (طول ۵): $C = (5, 4) \Rightarrow y = 1.5\times5 - 3.5 = 4$

(جای نقاط روی شکل در متن موجود نبود و با فرض بالا حل شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷ صفحه ۸۴ **فعالیت**

نمودار تابع $f(2) = 0$ $f(x) = x^2 - 1$ $(x \neq 2)$, (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم. اگر برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x = 2$ تعریف مشتق f در $x = 2$ را به کار گیریم:

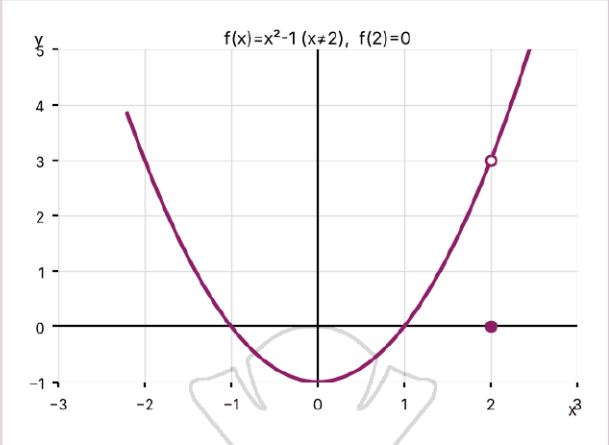
$$\lim_{x\to2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to2} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) نقطه‌ی دیگری (به‌جز $x = 2$ در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

ضابطه‌ی تابع: $f(x) = x^2 - 1$ برای $x \neq 2$ و $f(2) = 0$ (در شکل، نقطه‌ی $(۲, ۳)$ توخالی و نقطه‌ی $(۲, ۰)$ توپر است):



الف) نمودار در $x = 2$ پیوسته نیست (حد تابع در ۲ برابر ۳ ولی مقدار تابع ۰ است). وقتی x از دو طرف به ۲ نزدیک می‌شود، نقطه‌ی $(x, f(x))$ به نقطه‌ی توخالی $(۲, ۳)$ نزدیک می‌شود، ولی نقطه‌ی تماس باید $(۲, ۰)$ باشد؛ پس شیب خط‌های قاطع که از $(۲, ۰)$ می‌گذرند بی‌کران می‌شود (خط‌های قاطع به خط قائم نزدیک می‌شوند) و خط مماس غیرقائمی وجود ندارد. به کمک تعریف: حد صورت کسر برابر ۳ و حد مخرج برابر صفر است، پس

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{x-2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = -\infty$$

حد موجود (و متناهی) نیست؛ بنابراین $f'(2)$ وجود ندارد.

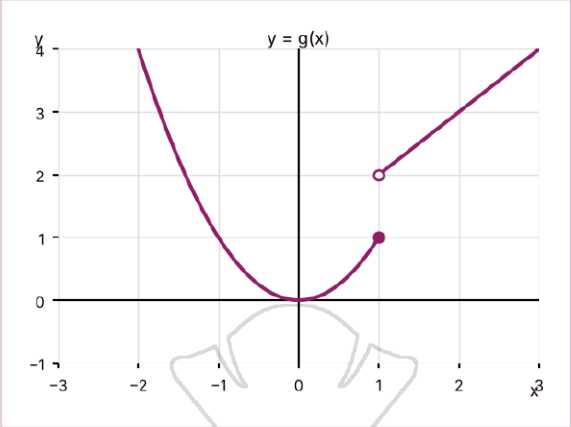
ب) بله. هر نقطه‌ی دیگر مانند $x = a \neq 2$ را در نظر بگیریم، در یک همسایگی آن $f(x) = x^2 - 1$ است و $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a$ موجود است؛ پس تابع در همه‌ی نقاط به‌جز ۲ مشتق‌پذیر است.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۱۸ صفحه ۸۵ کار در کلاس

تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x) = x + 1 \ (x > 1)$, $g(x) = x^2 \ (x \le 1)$ در نظر می‌گیریم. چرا $g'(1)$ موجود نیست؟



تابع در $x = 1$ ناپیوسته است: $g(1) = 1$، حد چپ برابر ۱ و حد راست برابر ۲ است. در عمل نیز

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x - 1} = +\infty$$

و حد چپ برابر $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ است. حد راست نامتناهی است و با حد چپ برابر نیست، پس $g'(1)$ وجود ندارد.

۱۹ صفحه ۸۶ کار در کلاس

در اثبات قضیه‌ی «اگر f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است» عبارت $\lim_{x\to a} (x - a) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \cdot f'(a) = 0$ نوشته شده است. (چرا؟)

چون f در a مشتق‌پذیر است، حد $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ موجود و متناهی است و می‌توان حد حاصل‌ضرب را برابر حاصل‌ضرب حدها گرفت. از طرفی $\lim_{x\to a} (x - a) = 0$ است؛ پس حاصل‌ضرب برابر $f'(a) \times 0 = 0$ می‌شود.

بنابراین $\lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) = 0$، یعنی $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ و f در a پیوسته است.

۲۰ صفحه ۸۷ کار در کلاس

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل ($f(x) = |x^2 - 1|$) در $x = -1$ نیز موجود نیست. در صورت امکان معادله‌ی نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x = -1$ را بنویسید.

برای $-1 < x < 1$ داریم $f(x) = 1 - x^2$ و برای $x < -1$ یا $x > 1$ داریم $f(x) = x^2 - 1$؛ همچنین $f(-1) = 0$.

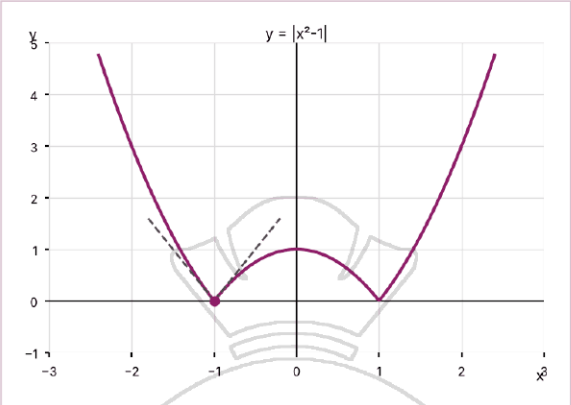
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{(1-x^2)-0}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} (1-x) = 2$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x^2-1)-0}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} (x-1) = -2$$

مشتق راست و چپ متناهی ولی نابرابرند؛ پس $f'(-1)$ وجود ندارد (نقطه‌ی گوشه‌ای). معادله‌ی نیم‌مماس‌ها:

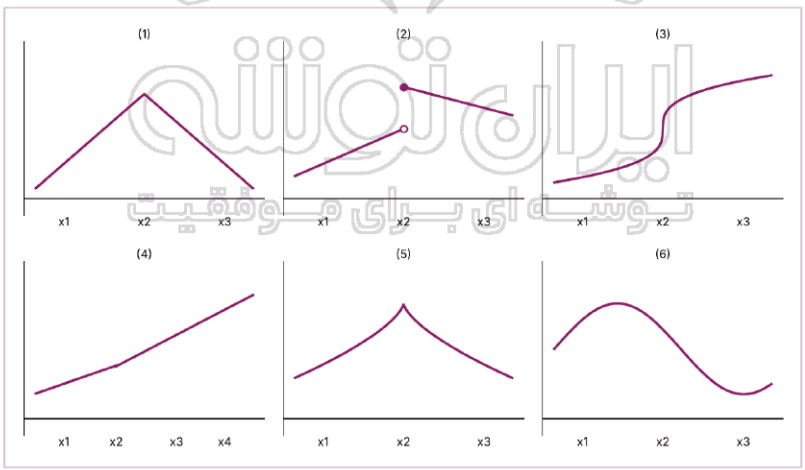
- نیم‌مماس راست: $y = 2(x+1)$ یا $y = 2x+2$، $x \geq -1$
- نیم‌مماس چپ: $y = -2(x+1)$ یا $y = -2x-2$، $x \leq -1$



۲۱ صفحه ۸۹ کار در کلاس

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص‌شده مشتق‌پذیر نیست.

با توجه به شکل‌های نمونه (شکل کتاب در متن موجود نبود) هر نمودار را بررسی می‌کنیم:



- (۱) در x2 نقطه‌ی گوشه‌ای است (مشتق راست و چپ متناهی ولی نابرابر): مشتق‌پذیر نیست.
- (۲) در x2 ناپیوسته است: مشتق‌پذیر نیست.
- (۳) در x2 مماس قائم دارد (مشتق‌ها بی‌کران): مشتق‌پذیر نیست.
- (۴) در x2 نقطه‌ی گوشه‌ای است؛ در x1، x3 و x4 مشتق‌پذیر است.
- (۵) در x2 نقطه‌ی بازگشتی (مشتق‌های یک‌طرفه نامتناهی با علامت مخالف) است: مشتق‌پذیر نیست.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

○ (۶) نمودار هموار است و در همه‌ی نقطه‌های x1، x2 و x3 مشتق‌پذیر است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۲ صفحه ۹۰ **فعالیت**

تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم. جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده است).

حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟

از رابطه‌ی $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} (x + a) = 2a$ استفاده می‌کنیم:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f'(x)$	−6	−4	−2	0	2	4	6

مماس بر منحنی در هر نقطه یکتا و غیرقائم است، پس به هر x یک عدد $f'(x)$ نظیر می‌شود؛ یعنی f' تابعی از x است. حدس می‌زنیم مشتق در همه‌ی نقاط (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) وجود دارد و $f'(x) = 2x$ است.

---

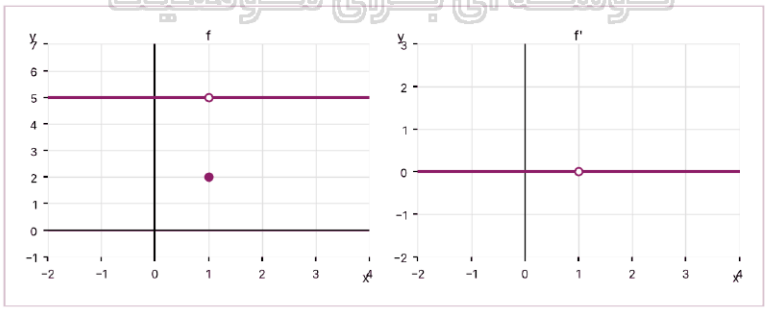
۲۳ صفحه ۹۲ **کار در کلاس**

اگر $f(1) = 2$ $\quad f(x) = 5\ (x \neq 1)$، دامنه‌ی f و دامنه‌ی f' را محاسبه کنید و ضابطه‌ی f' را به دست آورید.

نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

دامنه‌ی f مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. f در $x = 1$ ناپیوسته است (حد برابر ۵ ولی مقدار تابع ۲)، پس در ۱ مشتق‌پذیر نیست. برای $x \neq 1$ تابع در یک همسایگی x ثابت و برابر ۵ است؛ پس $f'(x) = 0$.

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}, \quad f'(x) = 0 \quad (x \neq 1)$$



---

۲۴ صفحه ۹۵ **کار در کلاس**

۱) مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید: الف) $f(x) = -\frac{1}{x^4}$ **ب)** $g(x) = (x^2 + 3)x^5$ **پ)** $h(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

irantooshe.ir

۲) اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$، $f'(2)=5$، $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$، مقدار $(fg)'(2)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ را به دست آورید.

۱) الف) $f(x)=-x^{-4} \Rightarrow f'(x)=4x^{-5}=\frac{4}{x^5}$

ب) $g(x)=x^7+3x^5 \Rightarrow g'(x)=7x^6+15x^4$ (یا با دستور حاصل‌ضرب: $2x\cdot x^5+(x^2+3)\cdot 5x^4$).

پ) $h'(x)=\frac{1\cdot(x^2-1)-(x+2)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$

۲) $(fg)'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=5\times 8+3\times(-6)=22$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2)g(2)-f(2)g'(2)}{g(2)^2}=\frac{40+18}{64}=\frac{29}{32}$$

(ضابطه‌ی تابع‌های بخش ۱ در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۵ صفحه ۹۶ — کار در کلاس

مشتق توابع زیر را به دست آورید. الف) $f(x)=\sin x\tan x$ **ب)** $g(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$

الف) $f'(x)=\cos x\tan x+\sin x(1+\tan^2 x)=\sin x+\sin x+\sin x\tan^2 x=2\sin x+\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$

ب) $g'(x)=\frac{(-\sin x)(1-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}$

(ضابطه‌ی g در متن ناقص بود و به صورت بالا خوانده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۶ صفحه ۹۷ — کار در کلاس

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. الف) $f(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$ **ب)** $g(x)=\cos^3 x$ **پ)** $h(x)=\sin(3x^2+5)$

الف) با دستور حاصل‌ضرب و قاعده‌ی زنجیری:

$$f'(x)=3(2x)(x^2+1)^2(5x-1)+5(x^2+1)^3=(x^2+1)^2\left[6x(5x-1)+5(x^2+1)\right]=(x^2+1)^2(35x^2-6x+5)$$

ب) $g'(x)=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-3\sin x\cos^2 x$

پ) $h'(x)=6x\cos(3x^2+5)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۷ صفحه ۹۷ | کار در کلاس

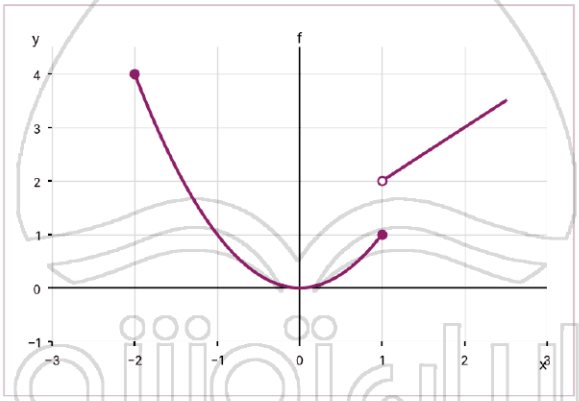
مشتق‌پذیری روی بازه‌های [a, b) و (a, b] را به‌طور مشابه تعریف کنید. تابع f روی بازه‌ی (a, b] مشتق‌پذیر است هرگاه ... تابع f روی بازه‌ی [a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه ...

بازه‌ی (a, b] : تابع f روی بازه‌ی (a, b] مشتق‌پذیر است هرگاه f در بازه‌ی باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ی b مشتق چپ داشته باشد (یعنی $f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ موجود و متناهی باشد).

بازه‌ی [a, b) : تابع f روی بازه‌ی [a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه f در بازه‌ی باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ی a مشتق راست داشته باشد (یعنی $f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود و متناهی باشد).

۲۸ صفحه ۹۷ | کار در کلاس

تابع $f(x) = x + 1\ (x > 1)$, $f(x) = x^2\ (-2 \le x \le 1)$ را در نظر می‌گیریم. f روی بازه‌های [−2, 1] و (۱, ∞) مشتق‌پذیر است ولی f روی بازه‌ی [۱, ۲] مشتق‌پذیر نیست. (چرا؟)

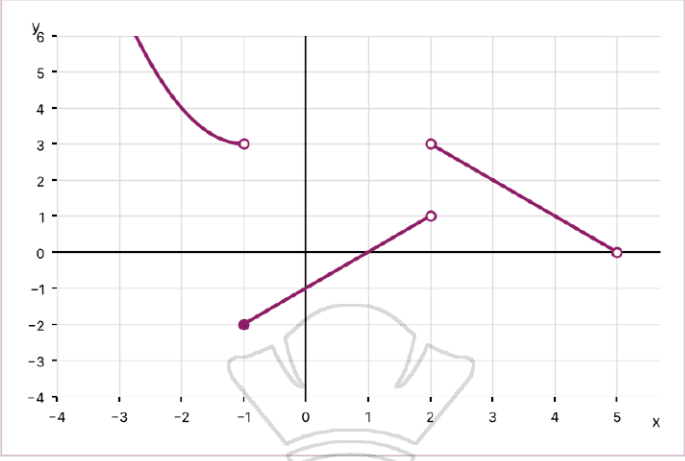


f در $x = 1$ ناپیوسته است: $f(1) = 1$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$. پس f در ۱ مشتق‌پذیر نیست؛ ولی روی بازه‌ی [۱, ۲] مشتق‌پذیری یعنی مشتق راست در ۱ موجود باشد: $\lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)-1}{x-1} = +\infty$ (نامتناهی). بنابراین مشتق راست در ۱ وجود ندارد و f روی [۱, ۲] مشتق‌پذیر نیست. اما روی [−۱, ۲] کافی است مشتق چپ در ۱ را بررسی کنیم که $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ موجود است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۹۸ کار در کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & (x < -1) \\ x - 1 & (-1 \le x < 2) \\ -x + 5 & (2 < x < 5) \end{cases}$، **نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های** $[-1, 1]$، $(2, 5)$ **و** $[-2, 0]$ **بررسی کنید.**



- **$[-1, 1]$:** روی $(-1, 1)$ ضابطه‌ی $x - 1$ است و مشتق‌پذیر است؛ مشتق راست در -1 برابر ۱ و مشتق چپ در ۱ برابر ۱ موجود است. پس f روی $[-1, 1]$ مشتق‌پذیر است.
- **$(2, 5)$:** روی این بازه $f(x) = -x + 5$ و $f'(x) = -1$ است؛ پس مشتق‌پذیر است.
- **$[0, 2]$:** در $x = -1$ تابع ناپیوسته است (حد چپ ۳، مقدار تابع -2)؛ پس در این نقطه از بازه مشتق‌پذیر نیست و f روی $[0, 2]$ مشتق‌پذیر نیست.

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۰ صفحه ۹۹ تمرین

۱) دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x = 2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

مثال‌ها: $f(x) = |x - 2|$ و $g(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

f پیوسته است و $f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$، $f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1$؛ مشتق‌های یک‌طرفه نابرابرند (نقطه‌ی گوشه‌ای).

g نیز پیوسته است ولی $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x - 2)^2}} = +\infty$؛ پس g در ۲ مشتق ندارد (مماس قائم).

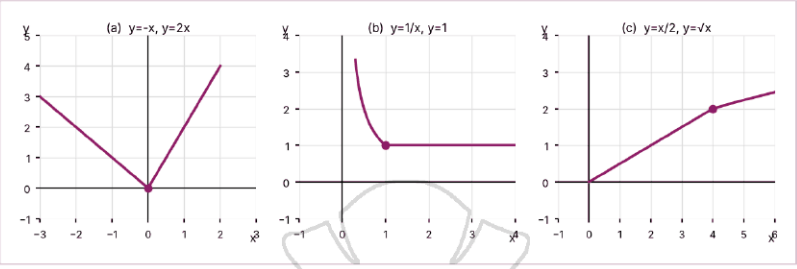
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۱ صفحه ۹۹ تمرین

۲) با محاسبه‌ی مشتق راست و مشتق چپ توابع داده‌شده در نقطه‌ی A، نشان دهید که این توابع در نقطه‌ی A مشتق‌پذیر نیستند.

(الف) $y = -x$ و $y = 2x$، $A(0, 0)$ (ب) $y = 1/x$ و $y = 1$، $A(1, 1)$ (پ) $y = x/2$ و $y = \sqrt{x}$، $A(4, 2)$

با شکل نمونه‌ی زیر (ضابطه‌ی سمت چپ و راست نقطه‌ی A را طبق ترتیب نوشته‌شده فرض کرده‌ایم):



الف) $f(x) = -x \ (x < 0), \quad 2x \ (x \geq 0)$: $f'_-(0) = -1, \ f'_+(0) = 2$؛ نابرابر ⇒ مشتق‌پذیر نیست.

ب) برای $x \leq 1$ ضابطه‌ی $y = \frac{1}{x}$ و برای $x > 1$ ضابطه‌ی $y = 1$: $f'_-(1) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)_{x=1} = -1, \ f'_+(1) = 0$؛ نابرابر ⇒ مشتق‌پذیر نیست.

پ) برای $x \leq 4$ ضابطه‌ی $y = \frac{x}{2}$ و برای $x > 4$ ضابطه‌ی $y = \sqrt{x}$: $f'_-(4) = \frac{1}{2}, \ f'_+(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$؛ نابرابر ⇒ مشتق‌پذیر نیست.

(شکل کتاب در متن موجود نبود و ترتیب ضابطه‌ها فرض شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

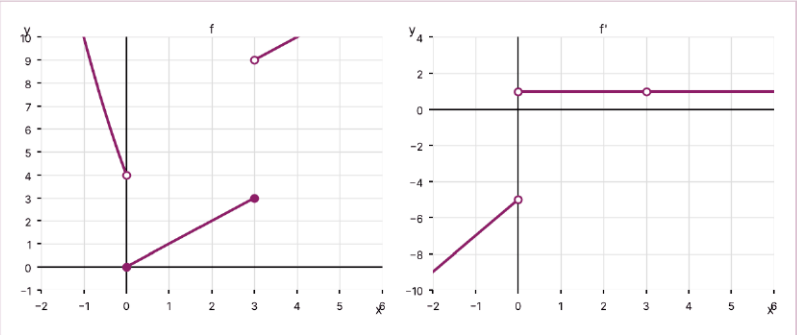
۳۲ صفحه ۹۹ تمرین

۳) تابع $f(x) = x + 6 \ (x > 3), \quad f(x) = x \ (0 \leq x \leq 3), \quad f(x) = x^2 - 5x + 4 \ (x < 0)$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید. ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.



الف و ب) در $x = 0$ حد چپ ۴ و حد راست ۰ است؛ در $x = 3$ حد چپ ۳ و حد راست ۹ است. نمودار در این دو نقطه گسسته (ناپیوسته) است؛ پس $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

پ) مشتق در بقیه‌ی نقاط:

$$f'(x) = 2x - 5 \ (x < 0), \quad 1 \ (0 < x < 3), \quad 1 \ (x > 3)$$

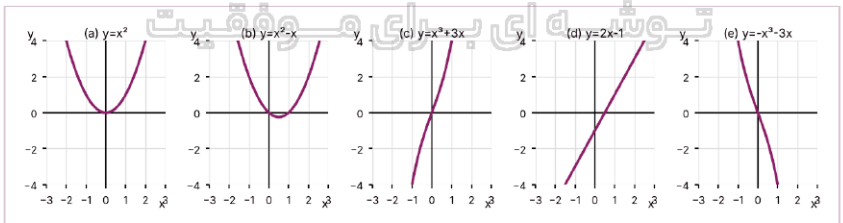
دامنه‌ی f' برابر $\mathbb{R} - \{0, 3\}$ است.

ت) نمودار f' در شکل سمت راست رسم شده است (نقطه‌های توخالی در $x = 0$ و $x = 3$ به معنای وجودنداشتن مشتق‌اند).

۳۳ صفحه ۹۹ تمرین

۴) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن الف) در یک نقطه برابر صفر شود. ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود. پ) در تمام نقاط مثبت باشد. ت) در تمام نقاط یکسان باشد. ث) در تمام نقاط منفی باشد.

پاسخ یکتا نیست؛ نمونه‌هایی از هر حالت:



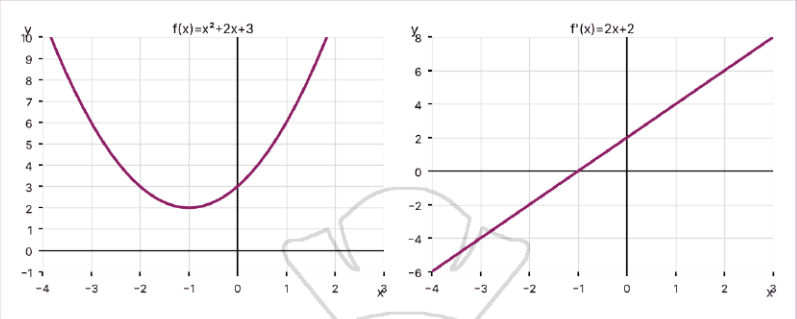
- الف) $y = x^2$: $f'(x) = 2x$ فقط در $x = 0$ صفر است.
- ب) $y = x^2 - x$: $f'(x) = 2x - 1$ و $f'(2) = 3$.
- پ) $y = x^3 + 3x$: $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ در همه‌ی نقاط.
- ت) $y = 2x - 1$: $f'(x) = 2$ در همه‌ی نقاط (خط، شیب ثابت).
- ث) $y = -x^3 - 3x$: $f'(x) = -3x^2 - 3 < 0$ در همه‌ی نقاط.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۴ صفحه ۹۹ تمرین

۵) الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید: $f'(0), f'(-1), f'(2)$ و $f'(3)$.

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه‌ی مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید. پ) تابع مشتق را رسم کنید.



الف) رأس سهمی در $x = -1$ است (مماس افقی). در سمت چپ رأس شیب منفی و در سمت راست مثبت است و هرچه از رأس دورتر شویم شیب مماس بزرگ‌تر می‌شود؛ پس ترتیب: $f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$

ب) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) + 3 - x^2 - 2x - 3}{h} = 2x + 2$؛ در نتیجه $f'(-1) = 0$، $f'(0) = 2$، $f'(2) = 6$، $f'(3) = 8$ و ترتیب درست است.

پ) نمودار $f'(x) = 2x + 2$ خطی با شیب ۲ و عرض از مبدأ ۲ است (شکل سمت راست).

۳۵ صفحه ۱۰۰ تمرین

۶) مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 6x - 2\ (x < 1)$, $f(x) = x^2 + 3\ (x \geq 1)$ را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی کنید.

$f(1) = 4$ و حد چپ $= 2 - 6 = 4$ است؛ پس f در ۱ پیوسته است. مشتق‌های یک‌طرفه:

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{6x - 2 - 4}{x - 1} = 6, \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} (x + 1) = 2,$$

چون $f'_-(1) \neq f'_+(1)$، تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست (نقطه‌ی گوشه‌ای).

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و با شرط پیوستگی بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۶ صفحه ۱۰۰ تمرین

۷) سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آن‌ها با هم برابر باشند.

توابع $f(x) = x^2$، $g(x) = x^2 + 1$ و $h(x) = x^2 - 5$ سه تابع مختلف‌اند که مشتق هر سه $2x$ است (مشتق عدد ثابت صفر است).

۳۷ صفحه ۱۰۰ تمرین

۸) اگر $f(x) = |x^2 - 4|$، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

$x = 2$: $f(2) = 0$؛ برای $x > 2$ داریم $|x^2 - 4| = x^2 - 4$ و برای $-2 < x < 2$ داریم $4 - x^2$.

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4, \qquad f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{4-x^2}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} -(x+2) = -4$$

$x = -2$: $f(-2) = 0$؛ برای $x < -2$ ضابطه‌ی $x^2 - 4$ و برای $-2 < x < 2$ ضابطه‌ی $4 - x^2$ است.

$$f'_-(-2) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} (x-2) = -4, \qquad f'_+(-2) = \lim_{x\to -2^+} \frac{4-x^2}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} (2-x) = 4$$

در هر دو نقطه مشتق‌های راست و چپ نابرابرند؛ پس f در $x = 2$ و $x = -2$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۸ صفحه ۱۰۰ تمرین

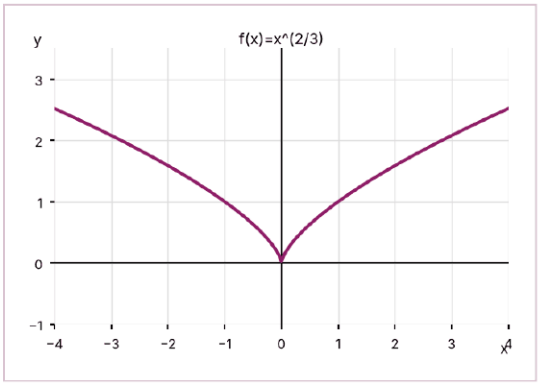
۹) مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را به دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

برای $x \neq 0$ با دستور $(x^n)' = nx^{n-1}$ (یا از تعریف):

$$f(x) = x^{2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

در $x = 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ که حد راست آن $+\infty$ و حد چپ آن $-\infty$ است. f در ۰ پیوسته است و مشتق‌های یک‌طرفه نامتناهی‌اند؛ پس خط $x = 0$ (محور yها) مماس قائم منحنی در مبدأ است (نمودار شبیه نوک تیز).

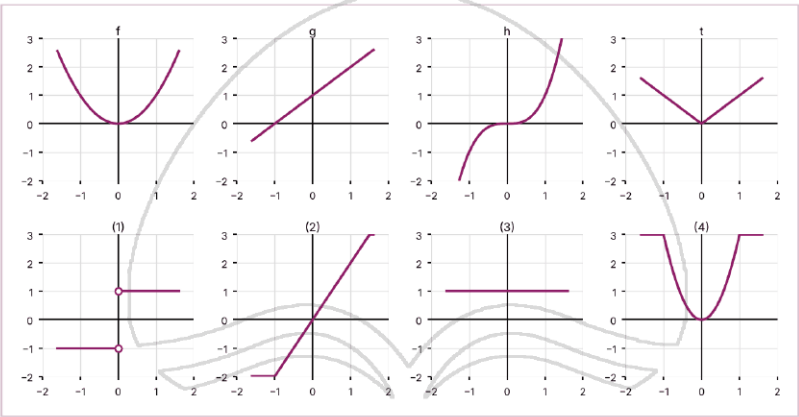
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت



۳۹ صفحه ۱۰۰ تمرین

۱۰) نمودار توابع f, g, h و t را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.

با نمودارهای نمونه‌ی $f(x) = x^2$، $g(x) = x + 1$، $h(x) = x^3$ و $t(x) = |x|$ (ردیف بالا) و مشتق‌ها (ردیف پایین):



- (۲) ← f؛ شیب سهمی با x متناسب است: $f'(x) = 2x$ (خط گذرنده از مبدأ).
- (۳) ← g؛ شیب خط ثابت است: $g'(x) = 1$.
- (۴) ← h؛ $h'(x) = 3x^2$ (سهمی همواره نامنفی با کمینه‌ی ۰).
- (۱) ← t؛ $t'(x) = -1$ برای $x < 0$ و $t'(x) = 1$ برای $x > 0$ و در $x = 0$ مشتق وجود ندارد.

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ تناظر بر پایه‌ی نمودارهای فرضی است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۰ صفحه ۱۰۰ تمرین

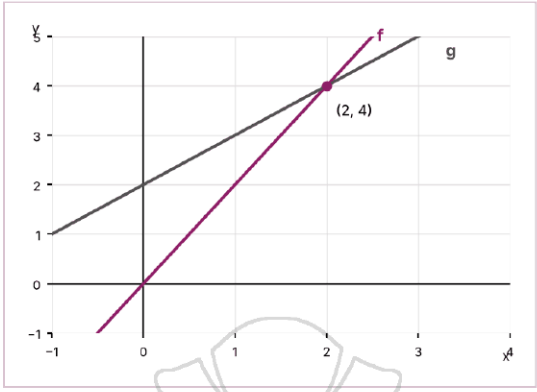
۱۱) نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید (نقطه‌ی (۲, ۴) محل برخورد نمودارهاست).

الف) اگر $h(x) = f(x)\cdot g(x)$، مطلوب است $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$.

irantooshe.ir

ب) اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$، مطلوب است $k'(1)$، $k'(2)$ و $k'(3)$.

با فرض اینکه نمودارها دو خط باشند: f خطی گذرنده از مبدأ و (۲, ۴) یعنی $f(x)=2x$ و g خطی با شیب ۱ گذرنده از (۲, ۴) یعنی $g(x)=x+2$.



الف) $h'(x)=f'g+fg'=2(x+2)+2x\cdot 1=4x+4$؛ پس

$$h'(1)=8,\quad h'(2)=12,\quad h'(3)=16$$

ب) $k'(x)=\frac{f'g-fg'}{g^2}=\frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$؛ پس

$$k'(1)=\frac{4}{9},\quad k'(2)=\frac{1}{4},\quad k'(3)=\frac{4}{25}$$

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ ضابطه‌ی خط‌ها از روی شکل حدس زده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۱ صفحه ۱۰۱ تمرین

۱۲) اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ است، مطلوب است $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$.

$$(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=3+5=8$$

$$(3f+2g)'(1)=3f'(1)+2g'(1)=9+10=19$$

---

۴۲ صفحه ۱۰۱ تمرین

۱۳) اگر $f(x)=x\ (x>0)$, $f(x)=x^2\ (x\le 0)$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x}=1,\qquad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0,$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

هر دو مشتق یک‌طرفه موجودند ولی $1 \neq 0$، پس $f'(0)$ وجود ندارد (f در ۰ پیوسته ولی نقطه‌ی گوشه‌ای دارد).

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۳ صفحه ۱۰۱ تمرین

۱۴) مشتق توابع داده‌شده را به دست آورید.

الف) $f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$ **ب)** $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{3 - 2x}$ **پ)** $f(x) = (x + 3)^3(2x + 1)$ **ت)** $f(x) = \frac{x}{9 - x^2}$

الف)

$$f'(x) = 6x(2x - 5)^3 + (3x^2 - 4) \cdot 6(2x - 5)^2 = 6(2x - 5)^2\left[x(2x - 5) + 3x^2 - 4\right] = 6(2x - 5)^2(5x^2 - 5x - 4)$$

ب)

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(3 - 2x) - (x^2 - 3x + 1)(-2)}{(3 - 2x)^2} = \frac{-4x^2 + 12x - 9 + 2x^2 - 6x + 2}{(3 - 2x)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 7}{(3 - 2x)^2}$$

پ)

$$f'(x) = 3(x + 3)^2(2x + 1) + 2(x + 3)^3 = (x + 3)^2(6x + 3 + 2x + 6) = (x + 3)^2(8x + 9)$$

ت)

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (9 - x^2) - x(-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{x^2 + 9}{(9 - x^2)^2}$$

(ضابطه‌ی تابع‌ها در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۴ صفحه ۱۰۱ تمرین

۱۵) مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$ **ب)** $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}$ **پ)** $f(x) = \tan 2x - 2\cos x$ **ت)** $f(x) = \sin x \cos 2x$

الف) $f'(x) = 3\cos 3x - 2\sin 2x$

ب)

$$f'(x) = \frac{\cos x(\sin x + 1) - (\sin x - 1)\cos x}{(\sin x + 1)^2} = \frac{2\cos x}{(\sin x + 1)^2}$$

پ) $f'(x) = 2(1 + \tan^2 2x) + 2\sin x = \frac{2}{\cos^2 2x} + 2\sin x$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ت) $f'(x) = \cos x\cos 2x + \sin x(-2\sin 2x) = \cos x\cos 2x - 2\sin x\sin 2x$

(ضابطه‌ی تابع (ب) در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۵ صفحه ۱۰۱ تمرین

۱۶) اگر $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$، مقادیر زیر را حساب کنید. الف) $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **ب)** $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) - f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = 2\sin x\cos x + 2\sin 2x = 3\sin 2x, \quad f''(x) = 6\cos 2x$

الف) $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\cos\frac{\pi}{3} = 3$

ب) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) - f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\cos\pi - 3\sin\pi = -6 - 0 = -6$

(ضابطه‌ی تابع و ترتیب جمله‌ها در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۶ صفحه ۱۰۴ کار در کلاس

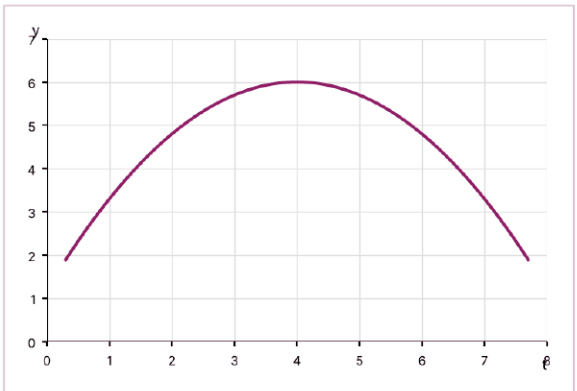
نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه‌ی t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

(محاسبه‌ی عددی لازم نیست.)

A) سرعت متوسط بین $t = 1$ و $t = 3$ B) سرعت متوسط بین $t = 5$ و $t = 6$ C) سرعت لحظه‌ای در $t = 1$

D) سرعت لحظه‌ای در $t = 3$ E) سرعت لحظه‌ای در $t = 5$ F) سرعت لحظه‌ای در $t = 6$

سرعت لحظه‌ای برابر شیب خط مماس و سرعت متوسط برابر شیب خط قاطع است. نمودار نمونه (مکان یک ذره که تا حدود $t = ۴$ بالا می‌رود و سپس برمی‌گردد):



ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

در سمت چپ نقطه‌ی بیشینه شیب‌ها مثبت و کاهشی و در سمت راست منفی‌اند. شیب مماس در $t = 1$ از شیب قاطع بین ۱ و ۳ بزرگ‌تر و آن از شیب مماس در ۳ بزرگ‌تر است؛ در سمت راست شیب‌ها منفی‌اند و از ۵ به ۶ منفی‌تر می‌شوند (و شیب قاطع بین ۵ و ۶ بین دو مماس است). پس:

$$F < B < E < D < A < C$$

یعنی ترتیب از کوچک به بزرگ: F, B, E, D, A, C.

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ پاسخ بر پایه‌ی منحنی‌ای شبیه شکل بالا نوشته شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۷ صفحه ۱۰۵ کار در کلاس

(تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد.)

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه‌ی زمانی [۰, ۲۵] چقدر است؟

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

الف) $\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{(7 \times 5 + 50) - 50}{25} = \frac{35}{25} = 1.4$ سانتی‌متر بر ماه.

ب) $f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{x}}$؛ پس

$$f'(49) = \frac{7}{14} = 0.5, \qquad f'(25) = \frac{7}{10} = 0.7,$$

آهنگ لحظه‌ای رشد در ۲۵ ماهگی (۰٫۷ سانتی‌متر بر ماه) بیشتر از ۴۹ ماهگی (۰٫۵) است؛ یعنی رشد با گذشت زمان کندتر می‌شود.

پ) $\frac{95 - 80}{36 - 16} = \frac{15}{20} = 0.75$ سانتی‌متر بر ماه. برای مقایسه: طبق تابع، $f(16) = 78$ و $f(36) = 92$ و آهنگ متوسط تغییر در این بازه $\frac{92 - 78}{20} = 0.7$ است. پس رشد علی (۰٫۷۵) کمی از رشد متوسط (۰٫۷) سریع‌تر بوده است.

---

۴۸ صفحه ۱۰۶ کار در کلاس

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه‌ی زمانی [۱۳۶۴, ۱۳۷۹] را به دست آورید (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار). بازه‌ی زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

مقادیر تقریبی از روی نمودار: نرخ باروری در سال ۱۳۶۴ حدود ۶٫۵ و در سال ۱۳۷۹ حدود ۲٫۱ فرزند به ازای هر مادر است. پس:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\frac{2.1 - 6.5}{1379 - 1364} = \frac{-4.4}{15} \approx -0.29$$

یعنی در این بازه نرخ باروری به طور متوسط سالی حدود ۰٫۳ فرزند کاهش یافته است.

آهنگ متوسط تغییر وقتی مثبت است که نرخ باروری در بازه افزایش یافته باشد. طبق نمودار، نرخ باروری از حدود سال ۱۳۵۵ (مقدار حدود ۶٫۲) تا ۱۳۶۴ (حدود ۶٫۵) افزایش داشته است؛ پس بازه‌ای مانند [۱۳۵۵, ۱۳۶۴] آهنگ متوسط مثبت دارد (حدود $0.3/9 \approx 0.03$ فرزند در سال).

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ مقادیر تقریبی‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۹ صفحه ۱۰۸ — کار در کلاس

با توجه به مثال قبل (جسمی که از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌شود و ارتفاع آن $h(t) = -5t^2 + 40t$ است):

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه‌ی زمانی [۵, ۸] به دست آورید.

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم ۳۵ m/s و ۳۵− m/s است.

الف) $h'(t) = -10t + 40$. جسم هنگام پرتاب در $t = 0$ است و هنگام برخورد به زمین $h(t) = 0 \Rightarrow -5t(t - 8) = 0 \Rightarrow t = 8$.

$$h'(0) = 40 \text{ m/s}, \quad h'(8) = -80 + 40 = -40 \text{ m/s}$$

ب) $\frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - 75}{3} = -25$ متر بر ثانیه.

پ) $-10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5$ ثانیه (سرعت ۳۵ در بالا رفتن)؛ و $-10t + 40 = -35 \Rightarrow t = 7.5$ ثانیه (سرعت ۳۵− در برگشت).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

---

۵۰ صفحه ۱۰۸ — تمرین

۱) جدول زیر درجه‌ی حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

الف) آهنگ تغییر متوسط درجه‌ی حرارت نسبت به زمان را از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید. ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید. پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

h (ساعت)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
T (درجه‌ی حرارت)	11	13	14	17	19	18	17	15	13	10	9

الف) $\frac{T(12)-T(8)}{12-8}=\frac{19-11}{4}=2$ درجه‌ی سانتی‌گراد بر ساعت.

ب) $\frac{T(18)-T(12)}{18-12}=\frac{9-19}{6}=-\frac{5}{3}\approx -1.67$ درجه‌ی سانتی‌گراد بر ساعت.

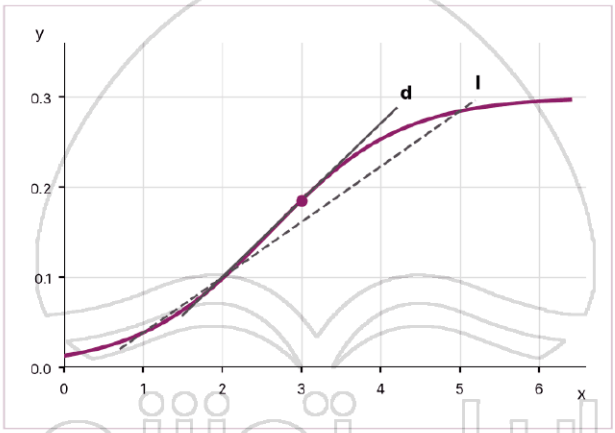
پ) از ساعت ۸ تا ۱۲ هوا به طور متوسط ساعتی ۲ درجه گرم‌تر شده و از ۱۲ تا ۱۸ به طور متوسط ساعتی حدود ۱٫۶۷ درجه سردتر شده است (علامت منفی یعنی کاهش دما).

۵۱ صفحه ۱۰۸ تمرین

۲) کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله‌ی یک ویروس آلوده شده‌اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند؟ ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=1, t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟ پ) قسمت ب را برای $t=4, t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.

با نمودار نمونه‌ی زیر (خط l قاطع و خط d مماس بر نمودار):



الف) شیب خط قاطع l آهنگ متوسط گسترش آلودگی (تغییر کسر آلوده‌ها بر مدت زمان) در بازه‌ی میان دو نقطه‌ی آن است و شیب خط مماس d آهنگ لحظه‌ای گسترش آلودگی در لحظه‌ی تماس است.

ب) گسترش آلودگی در هر لحظه برابر شیب مماس است. در لحظه‌های ۱ تا ۳ نمودار صعودی و تندشونده است (شیب زیاد می‌شود)؛ پس شیب در $t=3$ بیشترین است و گسترش آلودگی در $t=3$ از $t=2$ و آن از $t=1$ بیشتر است.

پ) پس از آن نمودار به صعود کندتر می‌رسد (شیب کم می‌شود)؛ پس در $t=4$ گسترش بیشتر از $t=5$ و در $t=5$ بیشتر از $t=6$ است.

(شکل کتاب در متن موجود نبود؛ پاسخ بر پایه‌ی منحنی‌ای Sشکل نوشته شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۲ صفحه ۱۰۹ تمرین

۳) نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است (نقاط (۱, ۳۰۰), (۲, ۴۸۰), (۳, ۶۰۰) و (۴, ۷۰۰) روی نمودارند).

الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

فرض می‌کنیم نمودار از مبدأ می‌گذرد ($N(0) = 0$).

بازه	[0,1]	[1,2]	[2,3]	[3,4]
آهنگ تغییر $\Delta N/\Delta t$	300	180	120	100

محاسبه: $\frac{700 - 600}{1} = 100$, $\frac{600 - 480}{1} = 120$, $\frac{480 - 300}{1} = 180$, $\frac{300 - 0}{1} = 300$ (واحد فروش بر میلیون تومان).

ب) با افزایش هزینه‌ی تبلیغ، بازار به تدریج اشباع می‌شود و تعداد مشتریان تازه‌ای که با هر میلیون تومان تبلیغاتی بیشتر جذب می‌شوند کمتر می‌شود؛ پس سود افزوده‌ی هر میلیون تومان بعدی کمتر است (نمودار صعودی ولی با تقعر رو به پایین).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۳ صفحه ۱۰۹ تمرین

۴) معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = -t^2 + 10t$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی t [0, 5] بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی [۰, ۵] برابر است؟

$$v_{avg} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{25 - 0}{5} = 5 \text{ m/s}$$

$$f'(t) = -2t + 10 = 5 \Rightarrow t = 2.5$$

در لحظه‌ی $t = 2.5$ ثانیه سرعت لحظه‌ای برابر سرعت متوسط است.

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و به صورت بالا خوانده شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۵۴ صفحه ۱۰۹ تمرین

۵) توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. f(t) نشان‌دهنده‌ی فاصله‌ی توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر f(t) در جدول زیر نمایش داده شده است. بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰٫۴ ثانیه است، نشان دهد؟

الف) 1.23 m/s ب) 14.91 m/s پ) 11.5 m/s ت) 16.03 m/s

t (ثانیه)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
f(t) (متر)	11	12.4	13.8	15.1	16.3	17.4	18.4

سرعت لحظه‌ای در t = ۰٫۴ را با آهنگ متوسط تغییر در بازه‌ی کوچکی که ۰٫۴ وسط آن باشد تقریب می‌زنیم:

$$\frac{f(0.5)-f(0.3)}{0.5-0.3}=\frac{17.4-15.1}{0.2}=11.5\ m/s$$

(با بازه‌های یک‌طرفه: 12 = 0.1/(16.3−15.1) و 11 = 0.1/(17.4−16.3) که میانگین آن‌ها هم ۱۱٫۵ است.) پس گزینه‌ی **(پ) ۱۱٫۵ m/s** درست است.

۵۵ صفحه ۱۱۰ تمرین

۶) کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است:

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه‌ی [۰, ۱] همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه‌ی (مورد نظر) است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=0$ و هم $f(a)=0$ باشد.

الف) نادرست. برای خط f(x) = x آهنگ متوسط در [۰, ۱] برابر ۱ و شیب منحنی در هر نقطه نیز ۱ است (کمتر نیست)؛ همچنین برای $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط در [۰, ۱] برابر ۱ و شیب در x = ۱ برابر 1/2 است که از آهنگ متوسط کوچک‌تر است.

ب) نادرست. صعودی‌بودن تابع یعنی آهنگ‌های تغییر مثبت‌اند، نه اینکه آهنگ تغییر متوسط خودش صعودی (بزرگ‌شونده) باشد. مثلاً $f(x)=\sqrt{x}$ صعودی است ولی آهنگ متوسط در بازه‌های [[0,1]]، [[1,4]] و [[4,9]] به ترتیب 1، 1/3 و 1/5 است که کاهشی است.

پ) نادرست. مثلاً $f(x)=x^2$ در a = 0 هم f(0) = 0 و هم $f'(0)=0$ دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۶ صفحه ۱۱۰ تمرین

۷) یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = t^2 + 3t$ گرم است.

الف) جرم این توده‌ی باکتری در بازه‌ی زمانی $3 \le t \le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟ ب) آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t = 3$ چقدر است؟

الف) $m(4) - m(3) = (16 + 12) - (9 + 9) = 28 - 18 = 10$ گرم.

ب) $m'(t) = 2t + 3 \Rightarrow m'(3) = 9$ گرم بر ساعت.

(ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۷ صفحه ۱۱۰ تمرین

۸) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه‌ی $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه‌ی $V(t) = 40\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه‌ی زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟ ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه‌ی $[0, 100]$ می‌شود؟

الف) $V(0) = 40$ و $V(1) = 40(0.99)^2 = 39.204$؛ پس

$$\frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = 39.204 - 40 = -0.796 \text{ L/s}$$

ب) $V(100) = 0$ و آهنگ متوسط در $[0, 100]$ برابر $\frac{0 - 40}{100} = -0.4$ لیتر بر ثانیه است. مشتق:

$$V'(t) = 80\left(1 - \frac{t}{100}\right)\left(-\frac{1}{100}\right) = -0.8\left(1 - \frac{t}{100}\right)$$

$$-0.8\left(1 - \frac{t}{100}\right) = -0.4 \Rightarrow 1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 50$$

در لحظه‌ی $t = 50$ ثانیه (حالت وسط بازه). (ضابطه‌ی تابع در متن ناقص بود و بازسازی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت